

# Informe de Métodos Numéricos

## Tarea 4: EDP's Elípticas

Leonardo Leiva

### 1. Resumen

En este informe se describirá el proceso para resolver un caso particular de la ecuación de Poisson en 2D, en el marco de resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP). Se busca aprender a resolverlas mediante el método de la sobre-relajación y aplicar condiciones de borde.

### 2. Introducción: Marco Teórico

#### 2.1. La Ecuación de Poisson y Las Condiciones de Borde

Se busca la solución de la ecuación de Poisson para el potencial electrostático:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -\rho(x, y) \quad (1)$$

para un problema en un área rectangular, por lo que se reduce a dos dimensiones. Para las condiciones de borde se usará una condición para todo el borde del área y una condición sobre la derivada del potencial de la forma:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\Gamma} = \pm 1 \quad (2)$$

donde  $\Gamma$  corresponde a la curva donde se tiene la condición. La derivada del potencial tomara el valor positivo para valores sobre la curva y el negativo para los que van por abajo.

Este problema incluye la presencia de una densidad de carga  $\rho(x, y)$ , la cual será la inicial del nombre (para este caso, 'L'). La carga total cumple la siguiente condición:

$$Q = \int \rho(x, y) dx dy = 1[C] \quad (3)$$

en unidades de Coulomb.

#### 2.2. El Método de Relajación

El problema se resolverá por el método de relajación, el cual consiste teóricamente en minimizar la acción definida de la siguiente manera:

$$S[\phi] = \int dx dy [(\nabla \phi)^2 / 2 - \nabla \phi \rho] \quad (4)$$

Se usan las condiciones de bordes dadas para resolver completamente el problema. La discretización del problema resulta en la siguiente relación de recurrencia:

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}[\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + h^2 \rho_{i,j}] \quad (5)$$

donde  $h$  es el paso usado.

Pero la relación más general de recurrencia es:

$$\phi_{i,j} = (1 - \omega)\phi_{i,j} + \frac{\omega}{4}[\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + h^2 \rho_{i,j}] \quad (6)$$

Donde  $\omega = 1$  recupera la ecuación (5). Algunos valores de  $\omega$  permiten la convergencia más rápida del problema. Para que la solución sea convergente,  $\omega \in (0,2)$ .

*Es importante notar que cada posición  $(x,y)$ , asociada a  $(i,j)$  dependerá de todos los valores que la rodean, por lo*

### 2.3. Condiciones de Borde

Para las condiciones de borde rígidas del tipo:

$$[\phi]_{\Gamma} = [g_1(x, y)]_{(x,y) \in \Gamma} \quad (7)$$

se realiza una grilla en el área a integrar y se dejan fijos los valores de  $(x, y) \in \Gamma$ . Para las condiciones de borde de tipo Neumann:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{\Gamma} = [g_2(x, y)]_{(x,y) \in \Gamma} \quad (8)$$

se usa la discretización:

$$\phi_{i,j} = \phi_{i,j-1} + hg_i \quad (9)$$

En resumen, para los valores cercanos a la condición de Neumann se itera con (9), y para los lejanos se usa (6).

## 3. Método

### 3.1. Construcción de la grilla y de la carga

El problema descrito se integrará en una sección rectangular de dimensiones  $10 \times 15$  [cm<sup>2</sup>] conectada a tierra en los bordes, es decir  $\phi = 0$  en estos. Ubicando el origen en el centro de la caja, existe una línea en  $y = -5,5$ ,  $x \in [-3, 3]$  que cumple (2), condición de Neumann. Toma el valor positivo para  $y > -5,5$  y el negativo para  $y < -5,5$ .

Además, existe una carga distribuida en el rectángulo de dimensiones  $5 \times 7$  [cm<sup>2</sup>] centrado en el origen. La carga se ubica sobre la letra L de grosor 1 [cm] uniformemente, tal como se muestra en la figura (1). Dado que la carga total tenía que ser 1 y la distribución es constante,  $\rho = 1/11$  si  $(x, y)$  está dentro de la letra y 0 si no. El archivo que muestra como es la distribución de carga y que genera la figura (1) es 'carga.py'.

El paso que se usará será  $h = 0,2$  [cm].

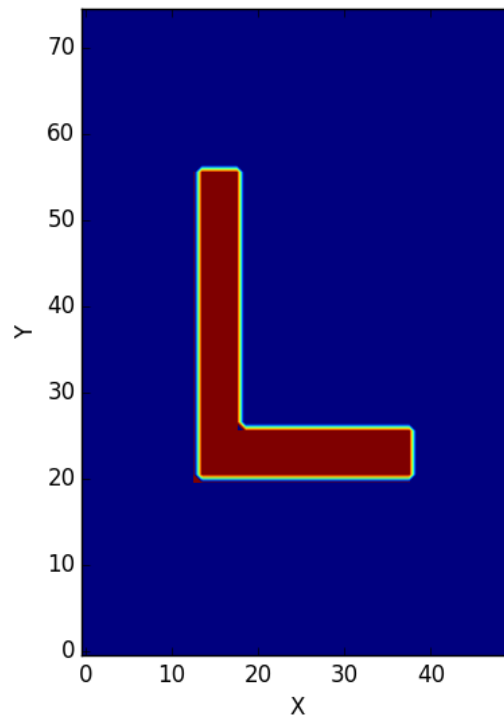


Figura 1: Representa la distribución de carga en la caja. En azul donde no hay carga y en rojo donde la carga es uniforme. El tipo de gráfico entrega efectos de degradado en los bordes, pero no hay variación según el color.

### 3.2. Integración y Resultados

Mediante las reglas de iteración descritas en (6) y (9) se resolvió la ecuación (1). La grilla se recorrió parte por parte para evitar evaluar la carga en cada caso, considerando que en muchos de ellos valía 0, y solo se evaluó para dentro del rectángulo donde se encuentra la letra.

Para la resolución de la ecuación por relajación se usa un método para verificar que la solución ha convergido. Se implementa un método muy similar al visto en clases que consiste en:

$$\max(|\phi^{n+1} - \phi^n|) < \epsilon \quad (10)$$

donde se usó por defecto  $\epsilon = 10^{-4}$ , pero el método permitía cambiarlo.

Luego se realiza la iteración para toda la caja, de manera que construye de a poco la solución hasta que se verifica convergencia. Inicialmente se verifica para  $\omega = 1$ , notando que el sistema no converge aun para  $n = 3000$ , por lo que se prueba el valor  $\omega = 1,2$ , donde se tiene la convergencia en  $n = 2187$ . Para obtener el gráfico se usa este valor, obteniendo las figuras (2) y (3).

En los gráficos se puede observar que lejos de la línea que cumple la condición (2) el potencial tiende a ser 0, sobre todo en las paredes (donde se tiene la condición de estar

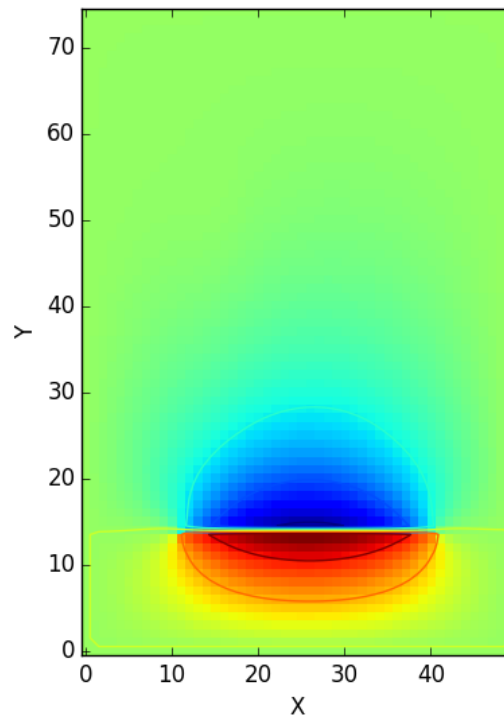


Figura 2: Representación de la intensidad del potencial en la caja. El color azul oscuro representa el potencial mínimo mientras que el rojo oscuro el potencial es máximo. Los valores intermedios se representan por degradados de los colores mencionados. El color verde corresponde al potencial igual a 0.

conectadas a tierra). Para la vecindad de la línea se observa una gran variación del potencial: Por debajo de la línea el potencial es positivo, baja drásticamente a través de la línea y se vuelve negativo después de esta. La aproximación determina que el potencial es lineal pero su curva no es suave. Esto es razonable con la teoría, ya que el potencial eléctrico es continuo, y en los casos en los que tiende a no serlo, ocurren variaciones drásticas en los bordes, como se ve en este caso.

En la figura (5) se observa mucho mejor la influencia de la carga en el sistema (para la figura (2) casi no se parecía). Se observa que la carga disminuye la presencia del campo. Esto significa que es más difícil mover una carga positiva por esa región, lo que tiene mucho sentido por la presencia de densidad de carga positiva y estas se repelerían. Es más probable que las cargas fluyan hacia los bordes de la caja dadas estas condiciones.

### 3.3. Análisis de Convergencia

Para analizar la convergencia se realizó un programa que tomaba valores de  $\omega$  desde 0.8 hasta 1.8 espaciados. Para cada uno el programa corre que se tuviera convergencia, o hasta que finalizara la iteración, guardando el último valor de  $n$ . Se usó un  $N_{máx} = 5000$ ,

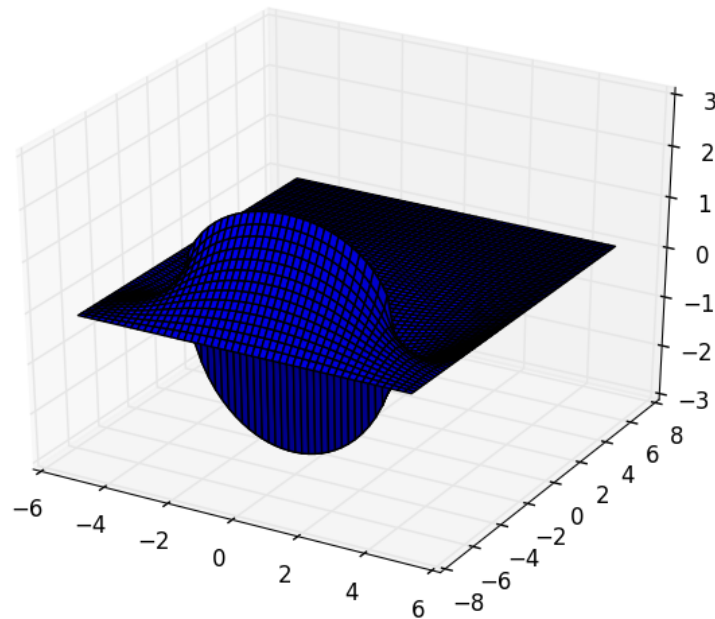


Figura 3: Gráfico en 3 dimensiones sobre el potencial. Se complementa con la figura (2). Se aprecian gráficamente los mínimos y los máximos. Se puede observar que el máximo y el mínimo son 1 y -1. Se lamenta no tener una representación más clara de eso.

y, graficando  $\omega$  vs  $N_{relajacion}$  se obtuvo la figura (4). Se observa que  $N_{relajacion}$  decae y su mínimo es 1.8. Para  $\omega = 2$  no se alcanzaba la convergencia en ese rango y por eso no aparece. Teóricamente el algoritmo converge (en general) de mejor manera para 1.2 y 1.4, pero se observó algo diferente. Puede ser que este sea un caso particular.

Se propone hacer un arreglo de  $\omega$  más detallados cerca de 1.8 para ver que sucede en ese sector, en busca de un mínimo más preciso. También sería interesante ver la manera de la curva entre 1.8 y 2: Puede ser una discontinuidad justo en el valor 2 y justo antes de eso se tiene el mínimo. Dado la gran cantidad de tiempo que tarda en converger para cada valor, este cálculo queda pendiente.

Observación: No se pudieron cambiar los valores de la grilla para que el origen quedara en el centro. Tampoco está a escala: mide según el número del paso en el que está, por lo que no está en centímetros. Tampoco se puede poner los gráficos en lugares más apropiados. Por ello se han referenciado en los textos a medida que se comenta sobre ellos.

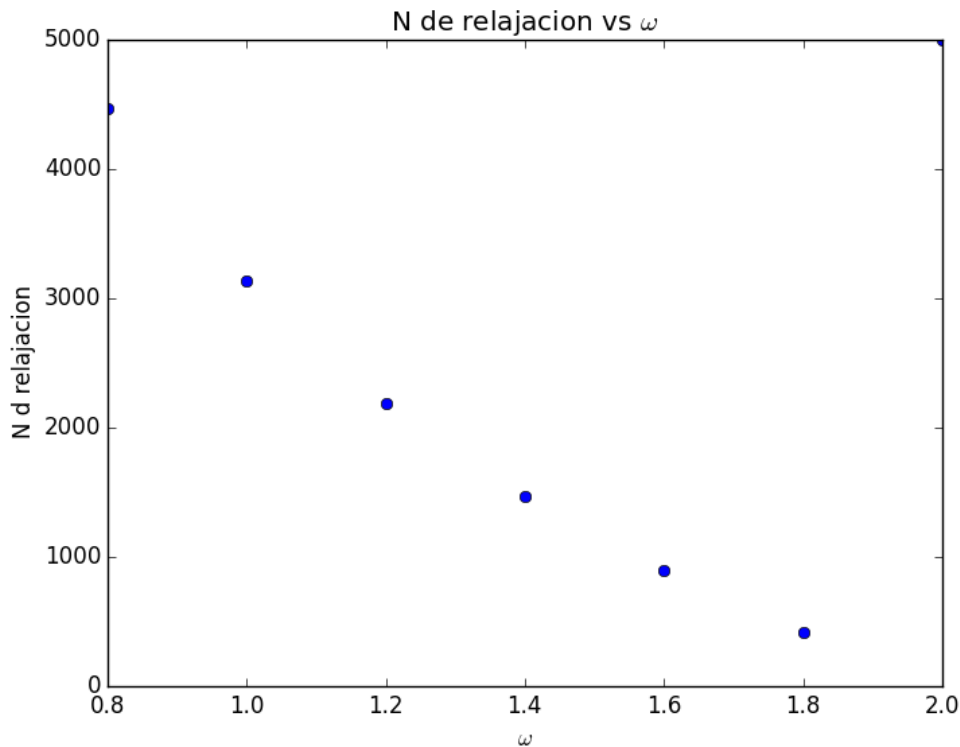


Figura 4: Relación entre el  $N_{relajacion}$  con  $\omega$ . Se observa un decrecimiento cada vez menor: tiene a no ser lineal.

#### 4. Conclusiones

Se concluye que para el método de relajación usar un  $\omega$  distinto de 1 es mucho más efectivo, ya que la convergencia ocurre más rápido. Para este caso en particular, resulta mucho mejor usar  $\omega = 1,8$ . No se puede generalizar con que sea el óptimo para todos los casos, ya que se sabe (de clases) que 1.2 y 1.4 son recomendados.

Se rescata el uso de la sintaxis estándar (verificando a través de pep8), ya que permite una más fácil comprensión de los códigos. Resulta ser una práctica que se adquiere con costumbre y que resulta positiva para entender mejor desde los códigos de otras personas hasta los que una misma persona hace.

Se construyó un código bastante largo para evitar evaluar la carga en lugares donde se sabía que no era 0. Se propone optimizar ese código con funciones genéricas que tomen el valor inicial en  $x$  e  $y$ . Queda pendiente por tiempo. Se hizo pensando en que el código tomara menos tiempo, pero no se alcanza a verificar que esto sea cierto. También queda pendiente verificarlo.

Con la preocupación por realizar el código (sobre todo implementar la condición de Neumann y el tiempo que tarda en correr debido a numerosas iteraciones) el contexto físico del problema queda un poco ageno. No se tienen demasiadas conclusiones sobre su interpretación tanto por la falta de tiempo para pensar e investigar en que significa como en la cercanía con la

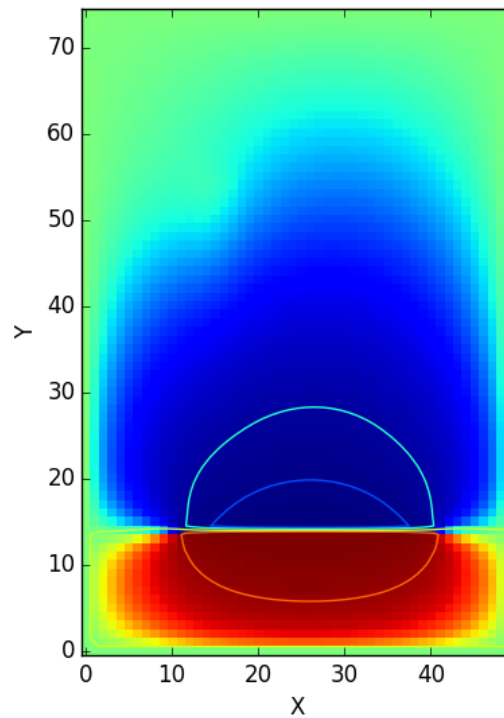


Figura 5: Gráfico de contraste para el potencial Se observa mejor la influencia de la carga en el problema.

realidad del problema presentado: No se entiende que puede significar la condición (2) en la práctica. Sugeriría agregar una aplicación para esa condición en la derivada del potencial en el enunciado.

## Referencias

- [1] Métodos Computacionales en Física - Patricio Cordero. Versión 14 de julio 2009.