

金融工程

算法交易—VWAP 模型

金融工程

◆VWAP 算法的定义和目标

VWAP 即成交量加权平均价格，VWAP 算法既表示算法以接近市场 VWAP 价格为目标、又表示算法采用贴近市场交易分布的交易方法。其基本思路是从历史交易模式出发，统计归纳历史成交时间、成交量、价格分布等的规则，并将这些规则应用于之后的交易。

◆交易量模拟

VWAP 算法的核心即在于模拟交易量的分布，我们统计了市场上所有股票滚动若干个月的交易量分布，并以其中一些为例说明。股票相对交易量在一天内呈现前凸后凹的特征，用时间的三次幂函数拟合相对交易量能达到很好的效果，并可以平滑短时间内的交易量波动。

◆VWAP 算法最优解与扩展

我们基于模型推导给出了 VWAP 算法期望最优的解序列 $\{x_k\}$ ，该解包含了相对交易量与股价波动率的协方差项。我们证明了在所有有效交易序列中，VWAP 交易方式的期望冲击成本最小，但成交均价的期望方差最大。最后，我们给出了 VWAP 算法在加入日内趋势项情况下的扩展应用，这类扩展并非方差最优的，但包含了击败市场 VWAP 的可能性。

分析师

倪蕴韬（执业证书编号：
S0930512070002）
021-22169338
niyt@ebcn.com

刘道明（执业证书编号：
S0930510120008）
021-22169109
liudaoming@ebcn.com

相关研报

《算法交易—基础理念与系统构建》
《市场微观结构之冲击成本模拟》

1、 VWAP 算法的定义和目标

算法交易是目前量化投资的前沿课题之一，和传统量化研究通常着眼于寻找获取正收益的机会不同，算法交易关心的是控制交易总成本和总风险，通过优化的拆单方式将一笔大单拆成若干小单，达到减少市场冲击的效果。VWAP 算法作为最早出现的算法模型之一，其思路较为简明而直接，目前在市场上的应用也最为广泛，欧美成熟市场中，VWAP 的应用约占所有算法交易的 27%。顾名思义，VWAP 算法就是以贴近 VWAP 为目标的算法，因此我们首先需要定义 VWAP。

VWAP 的全拼是 Volume weighted average price（成交量加权平均价格），其表达

$$\text{公式为 } VWAP = \frac{\sum_{i=1}^N P_i V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}, \text{ 即每笔交易成交量与成交价乘积的总和除以成交量}$$

的总和。狭义的 VWAP 指一个交易日内的 VWAP，数值上等于当日总交易额除以总交易量。广义的 VWAP 则可以指任意一段交易时间内的 VWAP，因此交易者所说的 VWAP 交易通常可以理解为“在交易时段内以 VWAP 方式进行交易”。

对于任何算法交易模型而言，其首要的任务总是设定算法目标，VWAP 交易的目标就是找到一种拆单方式，使交易实现的总均价最接近交易时段内的市场 VWAP。在一开始，使用 VWAP 做为算法目标只是单纯的由于对于机构投资者而言，考核机制决定了他们通常希望自己的成交均价接近或低于市场均价。逐渐的，交易者又发现了 VWAP 算法的其他很多好处，例如在所有可能的拆单方法中，VWAP 拆单是期望冲击成本最小的方式（我们将在后文详细讨论）；同时，VWAP 算法立足于以平均的比例参与市场每一时间段的交易，因此不会出现在任何一个时段中交易过多的情况，这使得交易具有很好的隐蔽性，将大单可能造成的信息泄露程度降到了最低；最后，VWAP 算法的简单易行性使得其对计算机运算能力没有太大要求，因而硬件方面的成本较低。

另一方面，VWAP 算法也存在着一些缺陷，首先 VWAP 算法的目标是交易实现均价最接近市场均价，因此其本质上是只关心期望成本而不考虑风险的，而当今金融市场的发展趋势是将风险控制放在越来越重要的位置。其次，VWAP 本身的计算公式表明，当交易者的交易量占市场总交易量比重越大时，其成交均价必然越贴近市场 VWAP。极端情况下，市场上所有的买入或卖出方都来自同一个交易者，则其均价必然等于市场 VWAP，因此当交易者本身的交易量较大时，VWAP 并不是好的衡量标准，通常占市场总交易量 10% 以下的单使用 VWAP 比较合适。最后，VWAP 算法比较符合某些投资机构考核标准的要求，但对于很多交易者来说，他们的买卖指令是依赖于作出决策当时的市场价格，如果当天股价呈现强趋势并且朝着不利于自己的方向运动，则以 VWAP 成交依然意味着大量的亏损。由于这些缺点的存在，研究者们开发了各种更新的算法作为 VWAP 的替代与补充。

总的来说，VWAP 算法既表示算法以 VWAP 为目标、又表示算法采用贴近市场交易分布的交易方法。其研究方法是从历史交易模式出发，统计归纳历史成交时间、成交量、价格分布等的规则，并将这些规则应用于之后的交易。随着时间的推移，在最简单的 VWAP 算法基础上，算法研究者们又进行了各种调整和优化，开发出了带趋势判断的 VWAP（VWAP with tilt）、动态调整 VWAP

(Dynamic VWAP)、路径依赖的 VWAP (Sample-path VWAP) 等较复杂的算法, 其中某些开始以战胜市场 VWAP 为目标, 但算法的核心基础仍是对历史交易模式的归纳和总结。

2、 交易量模拟

2.1 相对交易量

我们假设总交易时间为 T , 分成 N 个小段, 每个小段是交易者关心的最小交易长度单位, 对于模型而言, 可忽略每个小段内的价格变动情况, 而以小段的收盘价或均价作为小段价格 P_i 。在实践中, 时间小段划分的细致程度取决于交易者对模拟精度的要求, 通常对于基于一天交易的 VWAP 算法而言, 以 1 分钟作为交易小段已经达到了较高的精度, 国外的实际操作以 5-10 分钟作为交易小段也完全可行。在模型分析中, 我们用小写字母 v 表示交易者本身的交易量, 市场的总交易量用大写字母 V 表示, \bar{V} 则表示去除 v 之后的市场剩余交易量。 v_i 表示从交易开始到时段 i 结束时交易者的累积交易量, V_i 表示相同时段内市场的累积交易量, $u_i = v_i - v_{i-1}$ 和 $U_i = V_i - V_{i-1}$ 则分别表示交易者和市场在单个时段 i 内的交易量。

在以上定义下, 我们可知交易者实现的均价为:

$$VWAP_{trader} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i u_i}{\sum_{i=1}^N u_i} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i u_i}{v_T}$$

而市场均价为:

$$VWAP_{market} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i U_i}{\sum_{i=1}^N U_i} = \frac{\sum_{i=1}^N P_i U_i}{V_T}$$

将两者进行对比, 因为 P_i 不变, 我们可以发现使两个 VWAP 相等的关键就在

于使 $\frac{u_i}{v_T} = \frac{U_i}{V_T}$, 由于 v_T 和 V_T 是整个时段内的总成交量, 因此我们称 $\frac{u_i}{v_T}$ 和 $\frac{U_i}{V_T}$ 为

相对交易量, 即用总成交量正规化后的交易量。为了模拟方便, 通常我们用

$x_i = \frac{v_i}{v_T}$ 和 $X_i = \frac{V_i}{V_T}$ 替代 $\frac{u_i}{v_T}$ 和 $\frac{U_i}{V_T}$, 在本文之后的部分, 我们均用 x_i 和 X_i 分别

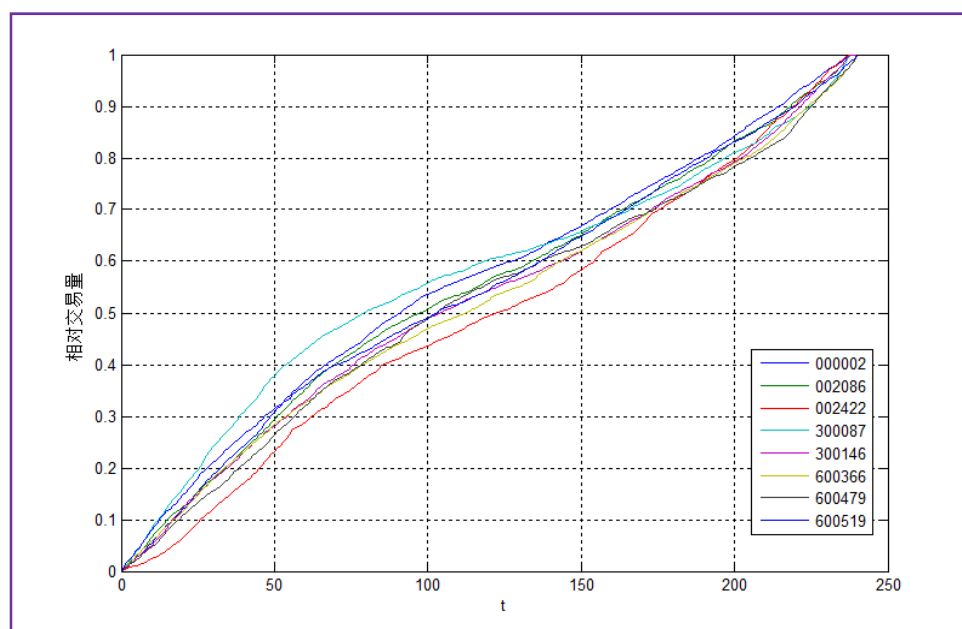
代表交易者和市场的相对交易量。显然的, $x_0 = X_0 = 0$, $x_T = X_T = 1$, 在整个

交易段内 x_i 和 X_i 是从 0 到 1 严格单调递增的曲线。

2.2 市场相对交易量模拟

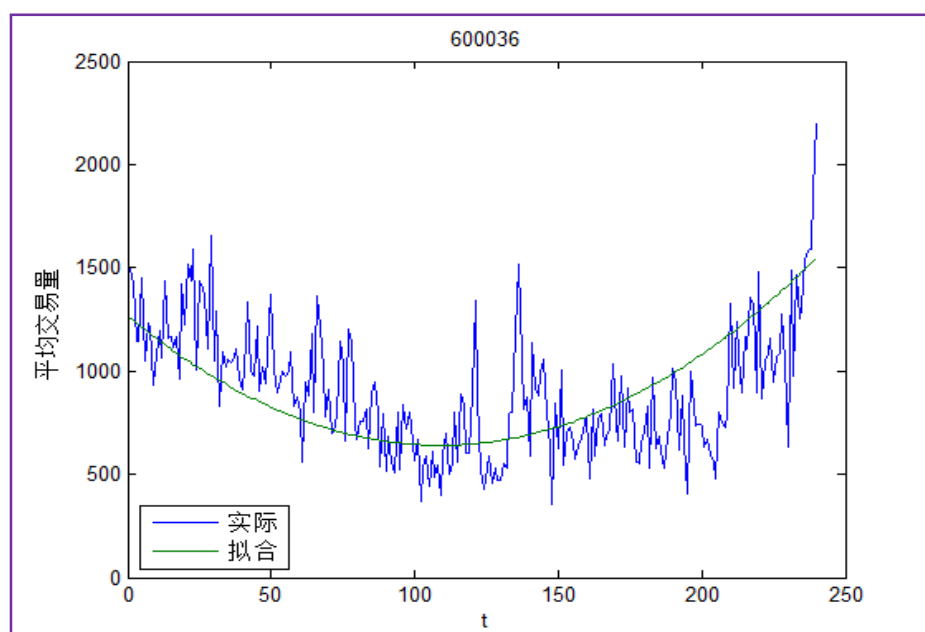
在上一小节，我们阐明了实现 VWAP 算法的关键就是使 $x_i = X_i$ ，鉴于 x_i 是算法模块实现的拆单，我们的目标便落实为模拟每支股票在一天内的市场相对交易量序列 $\{X_i\}$ 。最基本，也是最常用的方法就是用过去若干天实际发生的市场交易量数据计算出每天的相对交易量序列 $\{X_{ki}\}$ ，然后以这若干天的平均值作为对下一天 $\{X_i\}$ 序列的估计。下图中，我们给出了几支股票使用 2012 年 7 月的 20 个交易日 1 分钟数据拟合的相对交易量 $\{X_i\}$ 曲线。

图 1. 历史数据拟合 X_i 曲线（2012 年 7 月）



我们从沪深 300、中证 500、中小板指数、创业板指数这四个市值规模不同、流动性也不同的风格指数中各抽取两支股票，观察其 $\{X_i\}$ 和 $\{X_i - \frac{t}{T}\}$ 曲线的情况。可以看到，每支股票所对应的曲线有明显的共同之处。对于 $\{X_i\}$ 序列，所有股票都呈现出前半部是凸函数、后半部则是凹函数的形态，这意味着在一天开始的时候，交易量平均比较大，随后呈现单调递减态势，在接近中午的时候到达低点，随后又呈单调递增，在交易临近结束时到达另一个高峰。也就是说，平均交易量应当表现为两边高中间低的形态，从实际数据来看也确实如此，我们以 600036 在 2012 年 7 月的数据为例：

图 2. 平均实际交易量曲线



图中蓝色的曲线为 20 天内每分钟实际发生的交易量的平均值，绿色曲线则为用实际值拟合出来的平滑曲线，如果使用时间更长的数据，则平均值曲线相对拟合线的波动会进一步减小。图中可以看出交易量分布明显的“笑脸”形态，从金融理论上说，出现这一现象的原因是关于股票价值的新信息的传递。在每天开盘时，由于大量隔夜信息的积累，很多投资者需要进行交易以匹配他们对股票价值的重新评估，之后随着信息慢慢被消化，交易量逐渐减少；而在越接近每天收盘时，为了回避收盘后的隔夜信息带来的不确定性，投资者也要进行较多的交易以控制风险，因此出现了两边高中间低的交易量分布。对于中国股市而言，由于中午有一个半小时的休市时间，所以同样出于对休市时段内新信息进入的反应，在 11:30 之前和 1:00 之后的一段时间内，会出现两个交易的小高峰，这在图中也清晰可见。

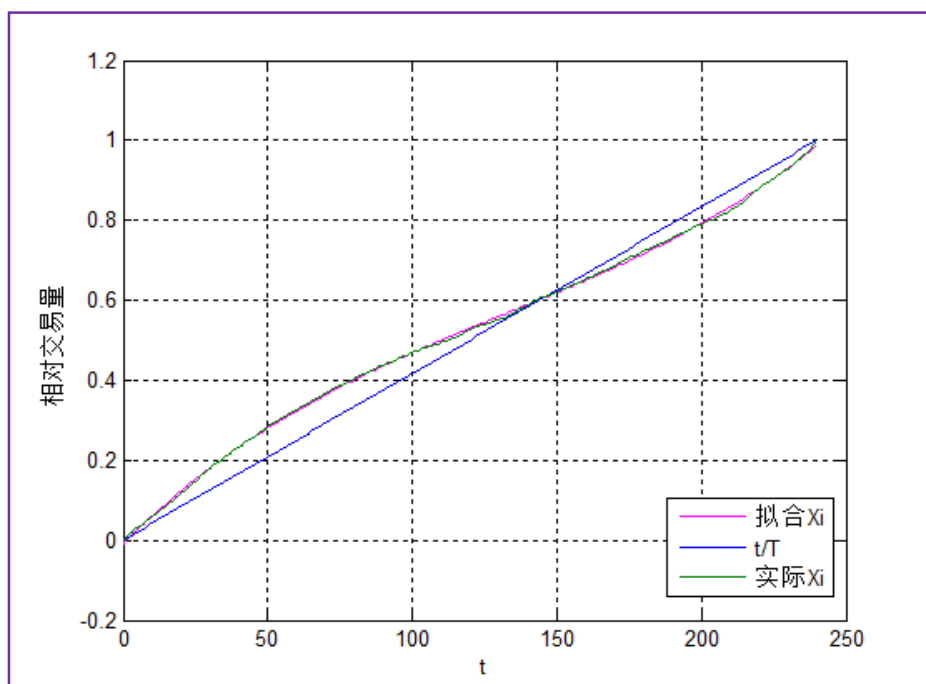
具有这种形态的 $\{X_i\}$ 类似于三次幂函数的曲线，因此通常也可以用相对交易

时间 t/T 的三次方程来拟合 $\{X_i\}$ ，即 $X_i = \alpha + \beta_1(\frac{t}{T}) + \beta_2(\frac{t}{T})^2 + \beta_3(\frac{t}{T})^3$ ，从

函数形态上来看，一般有 $\beta_1 > 0, \beta_2 < 0, \beta_3 > 0$ 。我们依然以 600036 在 2012

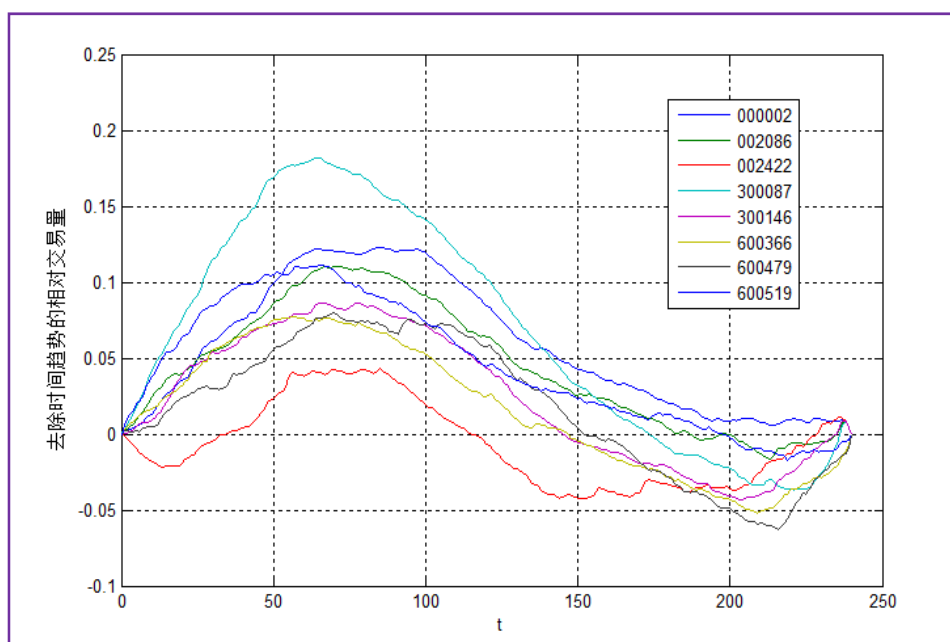
年 7 月的数据为例，拟合结果为 $\beta_1 = 1.716, \beta_2 = -1.841, \beta_3 = 1.119$ ，将曲线绘图如下所示

图 3. 拟合相对交易量曲线



可以看到，用三次幂函数拟合相对交易量函数可以达到很好的效果，拟合的 X_i 曲线和实际曲线基本一致，因此实践中使用 VWAP 算法时经常也使用拟合后的幂函数作为期望 X_i ，这样可以使交易量的分布更平滑，在每一个交易小段间的交易量不会出现急剧波动。而使用过去一段时间实际发生的平均 X_i 序列作为期望 X_i 的话，由于分钟层面的波动较大，可能出现相邻的两分钟期望交易量却相差两到三倍的情况，这会导致较大的累积冲击成本。

在图中，我们还加入了 t/T 直线作为对比，这样就可以更显著的看出 X_i 函数前凸后凹的性质。我们注意到，拟合的和实际的 X_i 函数均大约在 $t=140$ 的位置和 t/T 直线相交，由于 $T=240$ ，这说明相对交易量在前半段略为集中，也就是上午的交易量相对较多，为了更明显地甄别这一点，我们将 X_i 函数减去 t/T ，得到去除时间趋势的相对交易量曲线 $\{X_i - \frac{t}{T}\}$ 。

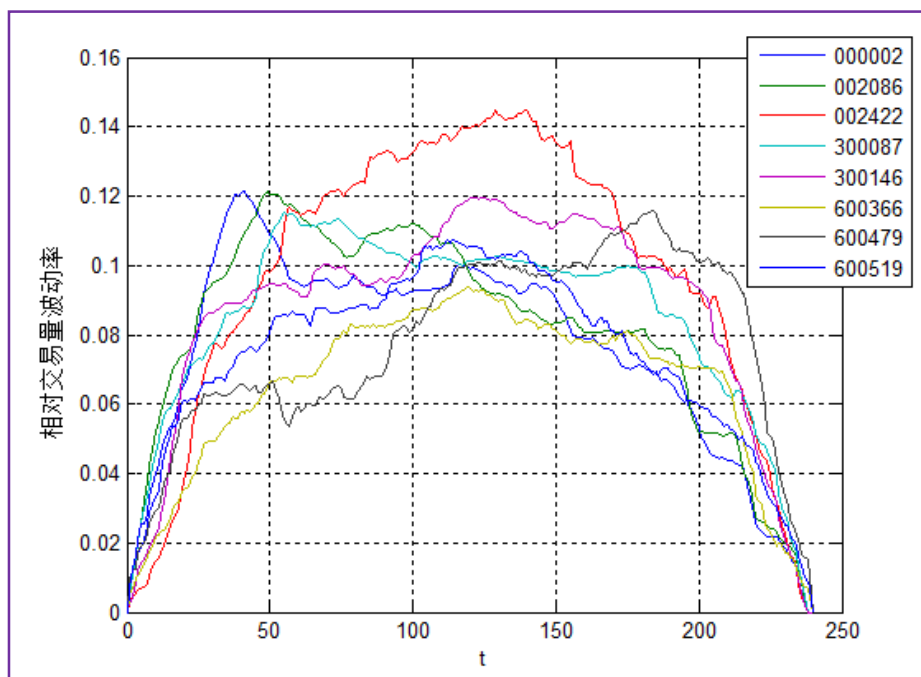
图 4. $X_i - t/T$ 曲线 (2012 年 7 月)

$\{X_i - \frac{t}{T}\}$ 通常被用来刻画交易量分布向某一时间段的偏离程度。在图中可以很明显的看出，在 2012 年 7 月，除了 002422（科伦药业）外，其余 7 支股票的 $\{X_i - \frac{t}{T}\}$ 曲线均在前半段相对 0 轴有较大的正偏离，而后半段只有较小的负偏离，这一现象表明交易量的大部分集中在上午，其中前 60 分钟、即开盘后的一小时集中度尤为明显，也就是说，交易量的分布出现了明显了倾斜 (tilt)。这也导致了在这个月中经常出现在开盘后不久股票价格出现大幅变动，而之后的股价波动率非常小的情况。相反的，在某一些时候则会出现交易量向下半段的倾斜，从我们的研究结果来看，交易量分布倾斜的状况在月的尺度上变化不大，因此完全可以用前一个月的数据拟合对下一个月的估计；但在半年以上的尺度下，交易量分布可能出现较显著的变化，一个例子就是上午倾斜 (morning tilt) 可能转为下午倾斜 (afternoon tilt)，因此滚动更新交易量分布信息是必要的。交易量出现 tilt 的现象也是拓展的 VWAP 算法需要优化和解决的问题之一。

2.3 相对交易量的波动率

另一个值得投资者关注的问题是相对交易量的波动性，在研究中，我们用样本内股票在每一天特定时刻的相对交易量的标准差来表现。从 VWAP 算法的角度来说，相对交易量的波动率越大，则算法拆单成交结果的波动率也会越大，期望单次交易实现的算法效果就越差，在编写算法时，我们也需要将这点考虑在内。我们同样以 2012 年 7 月若干股票的数据为例：

图 5. 相对交易量波动率曲线



由于 $X_0 = 0$ 而 $X_T = 1$ ，必有 $std(X_0) = std(X_T) = 0$ ，而离两端越远的地方相对交易量的不确定性就越大，因此波动率曲线呈现如图所示的“拱桥”形态。可以看到，对于大部分股票而言，波动率的最高点都出现在中间位置，对应于一天交易的中午时刻。对于少数股票，600519（贵州茅台）和 002086（东方海洋）的最高点出现在交易前半段，大约对应 10:00-10:15 之间的位置；600479（千金药业）的最高点则出现在下午约 13:30 的位置。总体来看，中小板和创业板的股票相对交易量的波动率明显大于主板股票，这说明了相对交易量波动率和流动性之间所存在的相关性。

3、 最优 VWAP 算法

3.1 最优 VWAP 算法的解

VWAP 算法是基于对历史成交量模式归纳的交易模型，因此通常假设当天期望的相对交易量序列等同于历史平均相对交易量序列，而当天期望价格波动率等于历史已实现波动率。作为成功的 VWAP 算法，首先要满足期望成交均价等于市场均价，即 $E(VWAP_{trader}) = E(VWAP_{market})$ ；其次，从最优化角度出发，则

要求两者差值的方差最小： $Var[V(x_i)] = E[Var(VWAP_{trader} - VWAP_{market})]$ 最小。

下面我们就推导出满足这两个要求的算法解。

最简单也是最直接的思路是令 x_i 等于历史平均 X_i ，这一方法是有效的，也是一些算法软件在现实中所使用的；另一种方法是令 x_i 等于用 t/T 的三次幂函数

拟合得到的 \hat{X}_i ，这一方法使得拆单后的每一段中的交易量分布更为平滑，对

市场波动的假定更弱。但以上两者均非方差最优，和对于股票价格随机过程的经典研究一致，我们假设股价服从随机过程：

$$S_k = S_{k-1} + \alpha + \sigma \tau^{1/2} \xi_k$$

其中 α 为股价的漂浮率 (Drift)， σ 为波动率， ξ_k 为正态分布项。则 $\sum_{i=1}^k \sigma \tau^{1/2} \xi_i$

是一个鞅过程 (Martingale)，我们将股价随机过程转化为：

$$S_k = S_0 + \alpha k \tau + M_k = S_0 + A_k + M_k$$

用离散形式表示的整个 VWAP 拆单的方差为：

$$\text{Var}[v(x_k)] = \text{Var}\left[\sum_{k=1}^T (X_k - x_k)(S_k - S_{k-1})\right]$$

为了便于分析，不失一般性地，我们将其转化为连续形式：

$$\text{Var}[v(x_k)] = \text{Var}\left(\int_0^T (X_k - x_k) dS_k\right)$$

根据伊藤等距原理当 $E\left[\int_a^b g(s) dW(s)\right] = 0$ 时有：

$$E\left[\left(\int_a^b g(s) dW(s)\right)^2\right] = \int_a^b E[g^2(s)] ds$$

因此，VWAP 算法的方差可进一步变换为：

$$\text{Var}\left(\int_0^T (X_k - x_k) dS_k\right) = E\left\{\int_0^T (X_k - x_k)^2 d[S, S]_k\right\}$$

由于 $S_k = S_0 + A_k + M_k$ 其中唯一的随机项来自 $M_k = \int_0^t \sigma_k dW_k$ ，因此

$$E\left\{\int_0^T (X_k - x_k)^2 d[S, S]_k\right\} = E\left[\int_0^T (X_k - x_k)^2 \sigma_k^2 dt\right]$$

我们的问题也被归结为了在已知期望 $\{X_k\}$ 序列下，求令

$E\left[\int_0^T (X_k - x_k)^2 \sigma_k^2 dt\right]$ 最小的 $\{x_k\}$ 序列，求解如下：

$$\begin{aligned} \min_{x_k} \{E[\int_0^T (X_k - x_k)^2 \sigma_k^2 dt]\} &= \min_{x_k} \{E[\int_0^T (X_k^2 - 2X_k x_k + x_k^2) \sigma_k^2 dt]\} \\ &= \min_{x_k} \{E[\int_0^T (x_k^2 E(\sigma_k^2) - 2x_k E(X_k \sigma_k^2)) dt]\} \\ &= \min_{x_k} \{E[\int_0^T [x_k - \frac{E(X_k \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)}]^2 dt]\} \end{aligned}$$

显然，这一方程的最小值在 $x_k = \frac{E(X_k \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)}$ 时取到，而

$\frac{E(X_k \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} = E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)}$ ，所以给定限制性条件 $x_T = 1, x_0 = 0$ 下的

$$x_0 = 0$$

$$\text{最优解序列为 } x_k = E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)}, \forall E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} \leq 1$$

$$x_k = 1, \forall E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} > 1$$

从最优解的式子中可以发现，如果 $\frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} = 0$ ，即相对交易量和价格波动

动不相关的话，则最优解退化为 $x_k = E(X_k)$ （注意 $E(X_0) = 0, E(X_T) = 1$ ）

某些时候，研究者会近似假设 $\sigma_i = \sigma_k = \sigma$ ，即价格波动率稳定不变。但事实上，多项实证研究均发现，相对交易量对价格的波动率有着“放大效应”，即当一段时间内集中了较大比例的交易量时，该时间段的股价波动也会增加，也就是说， $\text{cov}(X_k, \sigma_k^2) > 0$ 。对这一问题的研究依然使用了大量高频数据，由于其和本文的主体不相关，在此不赘述。最后，值得指出的是，我们给出的 VWAP 算法最优解并不需要成交时间为一整天，在任何时间长度内使用 VWAP 交易方式均服从此最优解。

3.2 VWAP 算法评价

首先，考虑交易对市场冲击的话，VWAP 是在相同交易时段内的所有可能算法中令期望市场冲击最小的拆单方法，也就是说，如果多次重复交易，则 VWAP 是可能达到的最“便宜”的算法。从这一层面上，很多算法提供商或机构投资者也把 VWAP 算法实现的结果作为衡量其他算法优劣的基准。证明如下：我们假设考虑自身交易导致的冲击成本后股票价格服从以下的随机过程

$$S_k = S_{k-1} + \sigma \tau^{1/2} \xi_k + \text{Sgn}(n_k) \tau g\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$$

其中 $n_k = \frac{u_k}{U_k}$ 代表我们在这一时段的交易占市场总交易量的比例， $g\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$ 是永

久性冲击成本函数，衡量我们的交易对股价造成的永久性影响，Sgn 是符号函数，表示买入交易会形成正的冲击成本，而卖出则会形成负的冲击。

另一方面，股票成交均价过程则服从：

$$\tilde{S}_k = S_{k-1} - h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$$

其中 $h\left(\frac{n_k}{\tau}\right)$ 为暂时冲击成本函数，表示投资者自身交易仅在交易时段内影响股票价格的那部分成本。

如果以开始交易时的到达价格 S_0 作为基准，则交易产生的总损失为：

$$XS_0 - \sum_{k=1}^N n_k \tilde{S}_k = - \sum_{k=1}^N (\sigma \tau^{1/2} \xi_k - \tau g(\frac{n_k}{\tau})) x_k + \sum_{k=1}^N h(\frac{n_k}{\tau}) n_k$$

期望的总冲击成本为

$$E(x) = \sum_{k=1}^N \tau g(\frac{n_k}{\tau}) x_k + \sum_{k=1}^N h(\frac{n_k}{\tau}) n_k$$

其方差则为

$$V(x) = \sigma^2 \sum_{k=1}^N \tau x_k^2$$

在线性冲击成本假设下, $g(\frac{n_k}{\tau}) = \gamma \frac{n_k}{\tau}$ $h(\frac{n_k}{\tau}) = \eta \frac{n_k}{\tau}$

期望冲击成本方程可进一步简化为 $E(x) = \frac{1}{2} \gamma X^2 + [(\eta - \frac{1}{2} \gamma \tau) / \tau] \sum_{k=1}^N n_k^2$

令所有偏导数为 0, 易解得当 $n_1 = n_2 = \dots = n_k = \dots = n_N$ 时, 方程取到最小值

$$\min(E(x)) = \frac{1}{2} \gamma X^2 + (\eta - \frac{1}{2} \gamma \tau) \frac{X^2}{T}$$

因为 $n_k = \frac{u_k}{U_k}$ 代表我们在这一时段的交易占市场总交易量的比例, 所以

$n_1 = n_2 = \dots = n_k = \dots = n_N$ 就代表着 VWAP 交易方法, 即是说 VWAP 算法是令期望

冲击成本最小的方式。另一方面, 在 $n_1 = n_2 = \dots = n_k = \dots = n_N$ 的条件下,

$V(x) = \frac{1}{3} \sigma^2 X^2 T (1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{1}{2N})$ 是所有有效算法中方差最大的, 也就是受到价格不利变动影响的风险最大。更详细的分析可参见后续报告《算法交易—均值方差模型》

4、VWAP 拓展—带方向性判断的 VWAP

在实践中, 很多投资者并不满足于以最小方差的方式去贴近市场 VWAP, 而是希望战胜市场 VWAP。当投资者有额外信息, 或较高的市场研判水准时, 这是一种合理的想法。其中的一种拓展形式就是在基础 VWAP 模型中加入方向性判断, 假设投资者具有正确的判断能力的话, 则他可以通过依此调整拆单模式来获取正的期望收益。注意在考虑股价方向性运动的情况下, 本文第三部分的结论依然是最贴近市场 VWAP 的方法, 而本节的讨论则是在风险方面作出一些牺牲的前提下, 追求期望战胜市场 VWAP。

战胜 VWAP 必须依赖于一定的额外信息, 最简单的一种信息就是对股票价格的方向性判断, 以一天为例, 交易者可能断定在一天内股票的价格期望上升或下

跌 μ ，且漂浮率在当天为均匀分布，即每一小时段股价的期望变化为 $\mu \frac{\tau}{T}$ 。(如果只是对一天内的某一时段有方向性判断，则可将该时段单独进行模拟)。如果用 $G(x_k) = \int_0^T (X_k - x_k) dS$ 表示在连续函数假设下拆单方式的收益的话，注意对于股价随机过程 $S_k = S_0 + A_k + M_k$ ，有 $\mu_k \equiv E(A_k)$ ，因此

$$\begin{aligned} E[G(x_k)] &= E\left[\int_0^T (X_k - x_k) d(A_k + M_k)\right] = E\left[\int_0^T (X_k - x_k) dA_k\right] \\ &= \int_0^T (E(X_k) - x_k) \mu_k dt \end{aligned}$$

战胜 VWAP 的问题便被转化为一个经典的均值方差问题——求 $E[G(x_k)] - \lambda \text{Var}[G(x_k)]$ 的最大值，其中 λ 从均值方差理论来说是投资者的风险回避系数，从交易角度来说也可以认为是反映了交易者对 μ 判断的确定性。如果 μ 的判断完全确定，则 $\lambda=0$ ；如果 μ 的确定度很低，则 λ 趋近 ∞ 。最优交易序列 \tilde{x}_k 的求解如下：

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= \max_{x_k} \{E[G(x_k)] - \lambda \text{Var}[G(x_k)]\} \\ &= \max_{x_k} \{E[\int_0^T (X_k - x_k) dP_k] - \lambda \text{Var}[\int_0^T (X_k - x_k) dP_k]\} \\ &= \min_{x_k} \left\{ \int_0^T E[\lambda (X_k - x_k)^2 \sigma_k^2 - (X_k - x_k) \mu_k] dt \right\} \\ &= \min_{x_k} \left\{ \int_0^T \left[x_k - \left(E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} - \frac{\mu_k}{2\lambda E(\sigma_k^2)} \right) \right]^2 dt \right\} \end{aligned}$$

所以

$$\tilde{x}_0 = 0$$

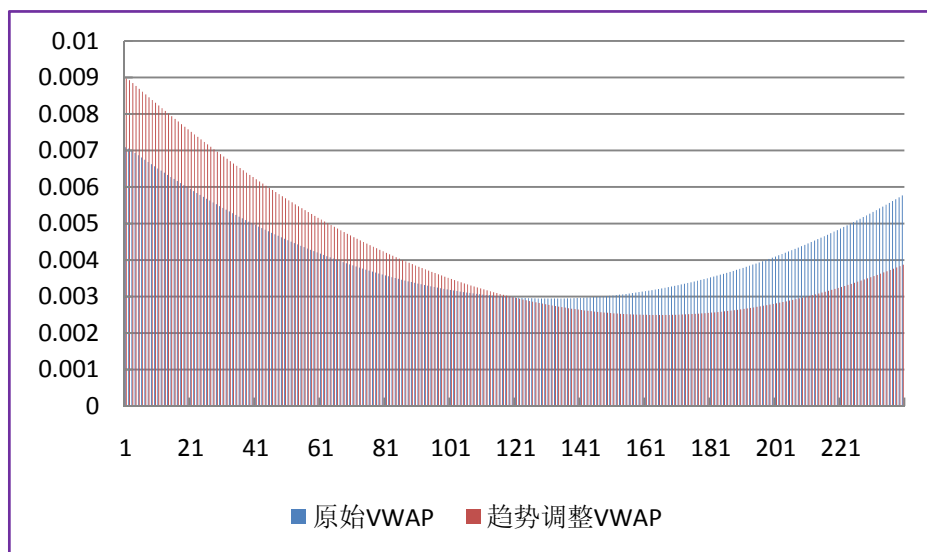
$$\begin{aligned} \tilde{x}_k &= E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} - \frac{\mu_k}{2\lambda E(\sigma_k^2)}, \forall E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} - \frac{\mu_k}{2\lambda E(\sigma_k^2)} \leq 1 \\ \tilde{x}_k &= 1, \forall E(X_k) + \frac{\text{cov}(X_k, \sigma_k^2)}{E(\sigma_k^2)} - \frac{\mu_k}{2\lambda E(\sigma_k^2)} > 1 \end{aligned}$$

也就是说，相比无趋势判断下的最优解，含趋势判断的 VWAP 算法在每一时段中加入了 $-\frac{\mu_k}{2\lambda E(\sigma_k^2)}$ 的变动，该调整项的方向取决于交易和趋势方向的一致性。

如果交易和趋势是同方向的（如买入交易和上升趋势），则加入正的调整项，即增加前半段的交易减少后半段；反之则加入负的调整项。而调整项的大小则取决于 μ_k 和 λ 的大小，总的来说，判断趋势越强、对判断的确定性越高，则调整项的绝对值越大。在下图中，我们比较了同一支股票使用原始的 VWAP

算法得到的拆单结果及加入趋势判断的 VWAP 算法拆单结果。

图 6. 原始 VWAP 与含趋势判断的 VWAP



在本图的模拟中，我们假设买入交易，当天期望的 $\mu = 3\%$ ，因此均匀分布下每

一小段的 $\mu_k = \frac{3\%}{240}$ ， $\lambda = 10$ 。从模拟结果中我们发现，相比原始 VWAP 拆单，加入期望趋势后的 VWAP 拆单明显偏向于上午了，如果将 λ 进一步调小，拆单的交易量还将更向上午集中。

5、小结

在本文中，我们阐述了 VWAP 算法的基本思路和算法目标，然后讨论了 VWAP 算法的核心——对交易量分布的研究，包括交易量的分布曲线、函数模拟形式、相对交易量波动率、相对交易量与股价波动率之间的关系等等。最后，我们基于数理分析给出了 VWAP 算法的期望最优解，并将基本的 VWAP 拓展为加入交易者对市场趋势判断的调整 VWAP 方法。

作为第一代算法，VWAP 迄今为止仍然是市场占有率最高的算法，其具有简单易行的优点，在拆单的隐蔽性上表现突出，又便于算法开发者根据交易的不同需要做多种拓展。不过，随着交易者目标的多元化，单一的 VWAP 算法已经无法满足需要，因此随之出现了第二、第三代的各类算法，我们将在后续报告中加以讨论。

分析师声明

负责准备本报告以及撰写本报告的所有研究分析师或工作人员在此保证，本研究报告中关于任何发行商或证券所发表的观点均如实反映分析人员的个人观点。负责准备本报告的分析师获取报酬的评判因素包括研究的质量和准确性、客户的反馈、竞争性因素以及光大证券股份有限公司的整体收益。所有研究分析师或工作人员保证他们报酬的任何一部分不曾与，不与，也将不会与本报告中具体的推荐意见或观点有直接或间接的联系。

分析师介绍

刘道明，光大证券研究所金融工程研究部副总经理，金融工程研究负责人。主要研究方向：行为金融与文本挖掘，著有面向金融投资的文本挖掘专门网站 www.chinesecloud.net。

倪蕴韬，瑞典哥德堡大学金融学硕士,复旦大学世界经济系学士，2010 年加入光大证券研究所任金融工程分析师。主要研究方向：投资时钟量化框架、算法交易、高频策略。

行业及公司评级体系

买入—未来 6-12 个月的投资收益率领先市场基准指数 15%以上；
增持—未来 6-12 个月的投资收益率领先市场基准指数 5%至 15%；
中性—未来 6-12 个月的投资收益率与市场基准指数的变动幅度相差-5%至 5%；
减持—未来 6-12 个月的投资收益率落后市场基准指数 5%至 15%；
卖出—未来 6-12 个月的投资收益率落后市场基准指数 15%以上。
市场基准指数为沪深 300 指数。

特别声明

光大证券股份有限公司（以下简称“本公司”）创建于1996年，系由中国光大（集团）总公司投资控股的全国性综合类股份制证券公司，是中国证监会批准的首批三家创新试点公司之一。公司经营业务许可证编号：z22831000。

本公司已获业务资格：证券经纪；证券投资咨询；与证券交易、证券投资活动有关的财务顾问；证券承销与保荐；证券自营；证券资产管理；为期货公司提供中间介绍业务；证券投资基金代销；融资融券业务；中国证监会批准的其他业务。

本证券研究报告由光大证券股份有限公司研究所（以下简称“光大证券研究所”）编写，以合法获得的我们相信为可靠、准确、完整的信息为基础，但不保证我们所获得的原始信息以及报告所载信息之准确性和完整性。光大证券研究所可能将不时补充、修订或更新有关信息，但不保证及时发布该等更新。

本报告根据中华人民共和国法律在中华人民共和国境内分发，仅供本公司的客户使用。

本报告中的资料、意见、预测均反映报告初次发布时光大证券研究所的判断，可能需随时进行调整。报告中的信息或所表达的意见不构成任何投资、法律、会计或税务方面的最终操作建议，本公司不就任何人依据报告中的内容而最终操作建议作出任何形式的保证和承诺。

在法律允许的情况下，本公司及其附属机构可能持有报告中提及的公司所发行证券的头寸并进行交易，也可能为这些公司提供或正在争取提供投资银行、财务顾问或金融产品等相关服务。投资者应当充分考虑本公司及本公司附属机构就报告内容可能存在的利益冲突，不应视本报告为作出投资决策的唯一参考因素。

在任何情况下，本报告中的信息或所表达的建议并不构成对任何投资人的投资建议，本公司及其附属机构（包括光大证券研究所）不对投资者买卖有关公司股份而产生的盈亏承担责任。

本公司的销售人员、交易人员和其他专业人员可能会向客户提供与本报告中观点不同的口头或书面评论或交易策略。本公司的资产管理部和投资业务部可能会作出与本报告的推荐不相一致的投资决策。本公司提醒投资者注意并理解投资证券及投资产品存在的风险，在作出投资决策前，建议投资者务必向专业人士咨询并谨慎抉择。

本报告的版权仅归本公司所有，任何机构和个人未经书面许可不得以任何形式翻版、复制、刊登、发表、篡改或者引用。

光大证券股份有限公司研究所

上海市新闻路1508号静安国际广场3楼 邮编 200040

总机：021-22169999 传真：021-22169114

销售交易团队	姓名	办公电话	手机	电子邮件
北京	王汗青(总经理)	010-68567189	13501136670	wanghq@ebsecn.com
	郝辉	010-68561722	13511017986	haohui@ebsecn.com
	黄怡	010-68561506	13699271001	huangyi@ebsecn.com
	梁晨	010-56513153	13901184256	liangchen@ebsecn.com
企业客户	孙威(执行董事)	010-68567231	13701026120	sunwei@ebsecn.com
	吴江	010-68561595	13718402651	wujiang@ebsecn.com
	杨月	010-68561606	18910037319	yangyue1@ebsecn.com
	顾超	021-22169485	18616658309	guchao@ebsecn.com
上海	李大志(销售交易部总经理助理)	021-22169128	13810794466	lidz@ebsecn.com
	严非(执行董事)	021-22169086	13127948482	yanfei@ebsecn.com
	王宇	021-22169131	18616755888	wangyu1@ebsecn.com
	周薇薇	021-22169087	13671735383	zhouww1@ebsecn.com
	徐又丰	021-22169082	13917191862	xuyf@ebsecn.com
	韩佳	021-22169491	13761273612	hanjia@ebsecn.com
	冯诚	021-22169083	18616830416	fengcheng@ebsecn.com
深圳	黎晓宇(副总经理)	0755-83024434	13823771340	lix1@ebsecn.com
	黄鹂华(执行董事)	0755-83024396	13802266623	huanglh@ebsecn.com
	张晓峰	0755-83024431	13926576680	zhangxf@ebsecn.com
	江虹	0755-83024029	13810482013	jianghong1@ebsecn.com
	罗德锦	0755-83024064	13609618940	luodj@ebsecn.com
富尊财富中心	濮维娜(副总经理)	021-62152373	13611990668	puwn@ebsecn.com
	陶奕	021-62152393	13788947019	taoyi@ebsecn.com
	戚德文	021-22169152	15821755866	qidw@ebsecn.com