金融工程

风险模型在时间序列上的改进

——《因子选股系列研究之三十一》

报告发布日期 2017 年 12 月 01 日

证券分析师 朱剑涛
021-63325888*6077
zhujiantao@orientsec.com.cn
执业证书编号：S0860515060001

研究结论

- 风险模型有三个功能：控制风险暴露、估计收益率协方差矩阵、绩效归因。不是所有功能都要用到风险因子，估计协方差矩阵可以采用纯统计方法，报告把这个领域最新学术成果和业界常用的因子模型在 A 股进行了实证对比。
- 由于股票数量多，收益率样本数量少，样本协方差矩阵的估计误差比较大，导致其矩阵条件数（最大特征值除以最小特征值）较高，输入组合优化器进行数值求解时会让结果对数据误差十分敏感。压缩估计方法即是去调整样本协方差矩阵的特征值，压缩其分布区间，同时降低估计误差。我们之前研究中一直采用**线性压缩方法（LS）**，报告里新测试了 Ledoit(2017)提出的**非线性压缩估计(NLS)**。
- **因子模型(FM)**的构建参考了 BARRA CNE5 文档，在估计因子收益率协方差矩阵和特质方差矩阵时采用非线性压缩方法，并增加了 EWMA 时变结构。
- 协方差矩阵估计也可以采用多元 GARCH 模型，但参数估计方法需要做大的改进。我们采用 CL 方法进行参数估计，BEKK 和 DCC GARCH 模型已经可以较快估计出参数，具备实盘价值，但历史回溯太耗时，最后实证采用的是简化版的 **CCC-GARCH**，股票数量较多时，它和 DCC GARCH 差别不显著。
- 我们用不同协方差矩阵估计量构建全局最小方差组合（GMVP），看哪种方法得到的 GMVP 组合的真实方差最小，判断协方差估计量的优劣。
- LS，NLS 和不加时变结构的因子模型表现基本相当，差距在统计上不显著。鉴于 NLS 方法在仿真测试的优越性，**我们预计横截面方向风险模型的改进空间可能很有限**。
- FM 和 CCC-GARCH 表现显著比 LS 和 NLS 强，**时间序列上改进风险模型的作用明显**，把这两者等权组合在一起可以减小模型设定偏误，进一步显著增强模型风控能力，并降低组合换手。
- **时间序列方向上改进风险模型的代价是增加组合换手**。究竟是时变模型带来风险下降的利好多，还是换手率增加带来的损失多，取决于 alpha 模型、组合约束条件、产品规模、交易成本等因素，不同的问题可能会有不同的结论，但至少这是一个值得尝试的改进方向，特别是那些交易便利的机构

风险提示

- 量化模型失效风险
- 市场极端环境的冲击

相关报告

量化因子选股回顾与展望	2017-11-27
细分行业建模之券商内因子研究	2017-10-26
质优股量化投资	2017-08-31
用机器学习解释市值：特异市值因子	2017-08-04
预期外的盈利能力	2017-07-09
因子选股与事件驱动的 Bayes 整合	2017-06-01
多因子模型在港股中的应用	2017-04-26
细分行业建模之银行内因子研究	2017-04-25
反转因子失效市场下的量化策略应对	2017-04-09
中美市场因子选股效果对比分析	2017-03-06
动态情景 Alpha 模型再思考	2017-02-17
技术类新 Alpha 因子的批量测试	2017-02-17
在 Alpha 衰退之前	2016-12-05
A 股市场风险分析	2016-12-02

专题报告

【金融工程·证券研究报告】

目录

一、风险模型概述

如我们前期报告所述（《A 股市场风险分析》，2016.12.02），风险模型的作用有三个：

1） 识别风险因子、控制风险暴露，降低组合净值波动；

2） 估计协方差矩阵，输入后续的组合优化器；

3） 绩效归因，分析组合风险暴露，收益来源；

鉴于 BARRA 在风险模型领域的领导地位，很多投资者在概念上会直接把风险模型等同于 BARRA，BARRA 提供了一系列实用性强的风险因子（参考 MSCI CNE5 附录）来实现上述三个功能，其它公司，像 Axioma、Northfield，也有提供自己的风险因子。BARRA CNE5 的风险因子和其之前公布的美国版本 USE 4 比较类似，A 股是否存在特有的风险因子值得研究。**我们在之前报告中给出了一套风险因子定量判别方法，和 alpha 因子相比，两者最大的差别在于**：

i. alpha 因子看重的是时间序列方向上因子收益率的显著性，风险因子看重的是横截面方向上因子对股票收益的解释度，其因子收益率在时间序列上可能不显著；

ii. 风险因子在时间序列上数值要稳定，不能变化太快，否则风险控制起不到作用。alpha 因子则不要求，只要其因子收益率能够覆盖高换手带来的交易成本即可。所以**对于月频调仓组合而言，“过去一个月收益率”因子只适合做 alpha 因子，不适合做风险因子**，因为一个月间隔后，这个因子的数值变化太过剧烈， 上次调仓做的风险控制不起作用。

风险模型的第二个功能不一定要用风险因子来做，有很多其它的统计方法。协方差矩阵估计领域的研究成果众多（Pourahmadi, 2013），我们本篇报告重点关注的是这个领域专家 Oliver Ledoit (http://www.econ.uzh.ch/en/people/postdocs/ledoit.html) 近些年提出的一些高效算法在实际投资中的作用，并和业界常用的类 BARRA 的因子模型做对比。

二、协方差矩阵估计方法

2.1 样本协方差矩阵的不足

假设$\vec{X}=(\mathrm{X}_1, X_2 \dots X_p)$是一个 p 维随机向量，有 n 个观察值$\{\vec{X_t}=(\mathrm{X}_{t,1}, X_{t,2} \dots X_{t,p}),\ t=1,2 \dots n\}$，随机向量的协方差记为$\Sigma=\mathrm{cov}(\vec{X})$。如果$\vec{X}$满足 p 维正态分布，则 Σ 的极大似然估计正好等于样本协方差矩阵：

$$\mathrm{S}=\frac{1}{n}\sum_{t}^{n}(\vec{X_t}-\bar{X})\cdot(\vec{X_t}-\bar{X})' \qquad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{t}^{n}\vec{X_t}$$

S 是一个无偏估计，如果 p 是一个不变的常数，则在 $n\to\infty$时，$\mathrm{S}\xrightarrow{p}\Sigma$ 。不过在估算股票收益率协方差矩阵时，**由于股票收益率的分布在时间序列方向上不稳定，不建议用太长的历史数据**，所以经常碰到的情况是用过去一年 252 个交易日的数据去估算 1000 甚至更多只股票的协方差矩阵，样本协方差矩阵 S 的秩等于 $n-1$，因此当$p\geq n$时，S 不可逆；即使 p <n，根据 Ledoit(2004)里面的引理 2.1，S 特征值也会比 Σ 特征值的分布区间广，因此 S 特征值的最大值比Σ 特征值的最大值大，S 特征值的最小值比Σ 特征值的最小值小，造成矩阵 S 的条件数（Condition Number，矩阵最

大特征值除以最小特征值）偏高，偏高幅度与 p/n 的大小正相关。后续的组合优化过程中可能会对 S 求逆或者以 S 为系数矩阵求解线性方程，S 条件数过大会让计算结果对数据误差十分敏感，使得组合优化得到的组合权重不稳定。

解决这个问题的常用方法有三种：

1) **增加样本数量 n**。前文提到不宜用太久之前的历史数据，因此可以考虑提高数据的采样频率，也就是采用高频数据。不过高频数据在增加样本数量的同时也在增加数据噪音，统计工具上可能要有所改变。另外高频数据计算得到的是高频协方差矩阵，高频数据在收益率序列自相关性和低频数据可能有差异，如何把高频协方差矩阵转换成低频协方差矩阵也是需要考虑的问题。

2) **降低变量维度 p**。BARRA 因子模型属于这一类，也称作结构化风险模型。它通过寻找少量因子来解释股票收益率，把估计股票收益率协方差矩阵转换成估计因子收益率协方差矩阵和个股特质方差，把需要估计的参数数量从$O(p^2)$ 大幅降为$O(p)$，减小估计量的方差。因子对股票收益率的解释度越高，降维效果越明显。

3) **通过函数转换调整样本协方差矩阵的特征值，同时提高估计准确性**。这也是下文要介绍的压缩估计方法。

2.2 线性与非线性压缩估计

首先介绍压缩估计量方法，这个在后面的因子模型里也会用到。对于 p 维对称矩阵$A=(a_{i,j})$和$B=(b_{i,j})$，常用 Frobenius 距离来衡量两个矩阵的接近程度：$\|A-B\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{i,j}-b_{i,j}\right)^2}$。如果$\Sigma$ 是要估计的真实协方差矩阵，$\hat{\Sigma}$ 是某个协方差矩阵估计量，可以定义估计量的估计误差为

$$\mathrm{error}=E(\|\hat{\Sigma}-\Sigma\|^2)$$

样本协方差矩阵 S 的条件数偏大，也就是说 S 特征值的最大值和最小值距离太远，需要压缩来降低条件数。一种简便的线性压缩方法是给 S 加上一个目标矩阵 T，目标矩阵的选取有很多种（Schafer 2005），以单位阵I为例，**线性压缩（LS，Linear Shrinkage**）估计量可以表示成：

$$\Sigma_{LS}=\rho\cdot\nu\cdot I+(1-\rho)\cdot S,\quad 0\le\rho\le 1,\nu>0\qquad\cdots\cdots\quad(1)$$

线性压缩估计即是要在所有可能的线性组合中，找到一个估计误差最小的，即求解

$$\max_{0\le\rho\le 1,\ \nu>0}\|\rho\cdot\nu\cdot I+(1-\rho)\cdot S-\Sigma\|$$

可显式求得这个问题的解为

$$\nu=\mu,\quad \rho=\frac{\beta^2}{\delta^2}$$

其中μ 等于Σ 特征值的平均值，$\beta^2=E(\|S-\Sigma\|^2)$ 表示样本协方差矩阵的估计误差，$\delta^2=E(\|S-\mu I\|^2)$度量的是样本协方差矩阵特征值分布的离散程度。$\Sigma$ 的真实值不知道，μ,β^2,δ^2 也就无法计算，不过在一定的理论假设下，Ledoit(2004)构建了μ,β^2,δ^2的样本统计量，保证在$n\to\infty,p\to\infty$ 时，对应的样本压缩估计量收敛于Σ_{LS}。

样本协方差矩阵是（1）式的一个特例（$\rho = 0$），因此 **LS 估计量的估计误差小于等于样本协方差（n,p 足够大的时候），误差减小的幅度取决于两个数值 p/n 和 ρ，值越大，估计误差减小幅度越明显**。LS 估计量不依赖于随机变量的分布，而且中间过程涉及的变量都可以显式计算，因此计算效率非常之高，全市场 3000 只股票计算一次协方差矩阵耗时在毫秒级别，因此也是我们之前研究中最常用的协方差矩阵估计方法。**Python（sklearn.covariance.LedoitWolf），MATLAB（作者个人主页有作者自己编写的代码可下载），R（nlshrink package）都有成熟的工具包可调用**。

记 S 的特征值为$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_p$，其对应特征向量为$u_1, u_2 \dots u_p$，则 S 可以谱分解为$S = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i \cdot u_i^T$。压缩估计量可以表示成：

$$\Sigma_{LS} = \rho * \mu \sum_{i=1}^{p} u_i \cdot u_i^T + (1-\rho) \cdot \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i \cdot u_i^T = \sum_{i=1}^{p} (\rho\mu + (1-\rho) \cdot \lambda_i) \cdot u_i \cdot u_i^T \quad \cdots\cdots (2)$$

可以看到，S 的特征值λ_i 被线性压缩到了Σ_{LS} 的$\rho\mu + (1-\rho) \cdot \lambda_i$，也就是说$\lambda_i$向真实协方差矩阵$\Sigma$特征值的平均值$\mu$ 靠拢，靠拢程度取决于ρ的大小。这样**Σ_{LS}特征值的分布区间相对 S 而言得到了一定的压缩，矩阵的条件数减小，用它做后续的组合优化，结果对数据误差的敏感性也会降低**。

LS 是给样本协方差矩阵 S 所有特征值设定了同一个目标μ，做全局压缩。另一种更灵活的**非线性压缩（NLS, Nonlinear Shrinkage）**方式由 Ledoit(2017)近期提出，它的形式和(2)很类似，可以写作:

$$\Sigma_{NLS} = \sum_{i=1}^{p} d(\lambda_i) \cdot u_i \cdot u_i^T$$

这里$d(\cdot)$ 是一个一元函数，在 LS 的（2）式中$d(\cdot)$是一个一元函数。在对总体的协方差矩阵，数据产生过程和函数$d(\cdot)$的特性做了一些理论假设后，可以证明下面 oracle 函数可以最小化 NLS 估计量的估计误差：

$$d^o(x) = \frac{x}{\left(\pi c x f(x)\right)^2 + \left(1 - c - \pi c x H_f(x)\right)^2}$$

其中 $c = p/n$，$f(\cdot)$是协方差矩阵特征值的极限谱分布函数，$H_f(\cdot)$是其对应的 Hilbert 变换。Ledoit(2017)通过核函方法计算得到样本协方差矩阵谱分布函数$\widehat{f_n}(\cdot)$ 、对应的 Hilbert 变换$\widehat{H_{f_n}}(\cdot)$和 oracle 函数$d_n^o(\cdot)$，并证明当$n \to \infty, p \to \infty$时 $d_n^o(\cdot) \to d^o(\cdot)$。

NLS 和 LS 对样本协方差矩阵特征值的压缩效果不同。对于极大和极小的特征值，NLS 和 LS 一样也会将其往均值方向压缩，但中间区域的特征值压缩方向有可能是远离均值的，NLS 会把特征值向其附近特征值取值集中的区域压缩，每个不同特征值处的压缩强度都是不一样的，是一种局部性质。**Ledoit (2017)通过仿真模拟发现，在真实协方差矩阵的条件数较大、样本集中度（p/n）较小或样本数量较多时，NLS 相对 LS 的估计误差减小幅度非常明显**。而且 NLS 计算过程里涉及的变量也都是可以显式计算的，运算速度非常之快，和 LS 基本相当，因此之前采用 LS 估计的研究人员可以非常便捷的转移到 NLS 上。

需要注意的是，Ledoit(2017) 附录 C 有一处小错误，其文后所附的 MATLAB 代码需要做几处对应的修改。

2.3 因子模型

假设市场上有 p 个股票，我们已经找到 K 个风险因子，股票 i 在因子 k 上的暴露度为X_i^k，记 $p \times K$矩阵 B 为因子暴露度矩阵 $B_{i,k} = X_i^k$，则做横截面回归

$$R = B \cdot f + \epsilon$$

可以估算得到横截面上的风险因子纯因子收益率$\hat{f}$ 。考虑到横截面上股票特质方差的差异，需要采用 WLS（Weighted Least Square）以保证得到的估计量同时也是极大似然估计，权重为个股特质方差的倒数。个股特质方差和其市值平方根倒数近似成正比（参考 BARRA USE4 和我们之前报告的 A 股实证结果），所以实际计算的时候可以采用个股市值平方根作为权重。由此，股票的协方差矩阵可如下计算：

$$\Sigma = cov(R,R) = cov(B \cdot f + \epsilon, B \cdot f + \epsilon) = B \cdot F \cdot B' + S \quad \text{where } F = cov(f,f), \qquad S = var(\epsilon)$$

每个横截面上做一次回归得到 f 和ϵ的时间序列后，F 和 S 可以在时间序列方向上进行估计。

横截面回归的 Rsquared 可以用来度量风险因子对股票收益的解释程度。不过要注意的是，Rsquared 的计算方式和测试股票池不一样，得到的数值会有很大差别。由于横截面回归使用了 WLS 方法，因此可以计算 weighted rsquared，不过这个数值会比传统 OLS 里面的 adjusted rsqaured 高很多，例如我们参考 CNE5 构建的因子模型，全市场回归得到的月度 weighted rsqaured 平均超过 40%，但 adjusted rsquared 只有 20%左右。因子模型在大股票里的解释能力更强，如果缩减股票池，weighted rsquared 可以超过 50%，adjusted rsquared 可以超过 30%。**在协方差矩阵估计中，adjusted rsquared 的参考意义更大**，因为协方差矩阵估计过程中，各个股票的数据地位是平等的，adjusted rsquared 越大，能被风险因子解释的方差越多，因子模型的降维效果越明显。

我们在去年的专题报告《A 股市场分析中》参考 BARRA CNE5 文档构建了一个因子风险模型，并和 LS 做对比，当时实证发现因子风险模型的效果不如 LS。不过严格的讲，当时报告里的实证方法不公平，因子模型采用的是月频的风险因子数据，LS 模型用的则是日频收益率数据，为保证公平性，报告后文的实证中，风险因子数据都是采用日频更新，因子收益率也是每日计算。

在上述标准模型基础上，我们用非线性压缩方法来估计因子收益率协方差矩阵 F 和特质方差矩阵 S，以降低样本协方差矩阵条件数过大的问题， CNE5 中对特质方差矩阵的 Bayesian Shrinkage 是一种线性压缩估计方法，采用非线性压缩有可能进一步提升模型表现。另外我们给 F 和 S 也加上了一个 EWMA 架构，通过调整衰减系数来调节模型对近期数据的敏感性。

2.4 多元 GARCH 类模型

压缩估计和标准的因子模型相对样本协方差矩阵的改进都属于横截面方向上的，也就是说它们都基于股票收益率在时间序列方向上是独立同分布的假设，不过股票在时间序列上的异质性明显，可以考虑从这个方向上改进风险模型。在一维情形下，我们可以用 GARCH 类模型来描述条件方差的动态变化，因此一个最直接的思路是将 GARCH 模型推向高维。

记t 时刻 p 个股票的收益率为 p 维向量 $\mathrm{r_t}$，它基于 t-1 时刻已有市场信息$\mathcal{F}_{t-1}$的条件预期收益和协方差分别假设为$\mathrm{E}(\mathrm{r_t}|\mathcal{F}_{t-1})=0$，$Var(r_t|\mathcal{F}_{t-1})=H_t$。我们需要赋予$\mathrm{H_t}$一定的结构来计算极大似然函数，目前最常用的结构有两种：Engle(1995)的 **BEKK 模型**和 Engle(2002)的 **DCC（Dynamic Conditional Correlation）模型**。

BEKK 模型直接对协方差矩阵建模，假设$\mathrm{H_t}$满足如下递归形式：

$$\mathrm{H_t}=(1-\alpha-\beta)\cdot\Sigma+\alpha r_{t-1}\cdot r_{t-1}'+\beta H_{t-1},\quad \alpha\geq 0,\quad \beta\geq 0,\quad \alpha+\beta<1$$

DCC 则是对相关系数矩阵建模，假设$\mathrm{D_t}$是一个$\mathrm{p\times p}$ 对角阵，其第 i 个对角线元素是股票 i 在 t 时刻的条件方差，DCC 模型假设相关系数矩阵$\mathrm{Q_t}=\sqrt{D_t^{-1}}\cdot H_t\cdot\sqrt{D_t^{-1}}$ 满足如下形式：

$$\mathrm{Q_t}=(1-\alpha-\beta)\cdot C+\alpha s_{t-1}\cdot s_{t-1}'+\beta\mathrm{Q}_{t-1},\quad \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0,\quad \alpha+\beta<1$$

其中$\mathrm{s_{t,i}}=r_{t,i}/\sqrt{var(r_{t,i}|\mathcal{F}_{t-1})}$。

在$\mathrm{r_t}$满足正态分布的假设下，容易计算得到对数极大似然函数为

$$\sum_{t=1}^{T}\left(-\frac{\ln(|H_t|)}{2}-\frac{r_t'\cdot H_t^{-1}\cdot r_t}{2}\right)\qquad \cdots\cdots(3)$$

对于低维度问题，p 比较小，上述极大似然函数比较好计算，R 里面有成熟的 package（rmgarch）可以直接调用。但如果 p 较大，每次求$\mathrm{H_t}$的逆需要耗费$\mathrm{O(p^3)}$ 运算，极大似然函数的求值将十分费时，而且后面用数值方法优化极大似然函数时，极大似然函数可能会被求值成百上千次，个人电脑上可能需要几天的时间才能算完，实用性有限。

Pakel(2017) 借鉴 Lindsay(1988)提出的 CL（Composite Likelihoods）思想大大降低了 DCC 和 BEKK 模型估计参数的计算量，并在一定理论假设前提下，保证估计量的一致性。这个方法分为两部，第一步是用传统样本协方差方法来估计 BEKK 模型里的Σ 和 DCC 里面的C，第二部计算 CL 函数，和(3)式的极大似然函数相比，它把 p 个随机变量两两配对，计算二维的对数极大似然函数再进行累加。这样矩阵的逆运算都是二维的，p 较大时，运算速度会快很多倍。Engle(2017)对第一步的方法做了改进，采用 NLS 方法估计Σ和C，这样做的好处是在股票数量较多时，可以大幅降低估计误差。

我们用 Engle(2017)的方法编写 python 代码在 A 股进行了测试，时间点是 2009.01.04，用过去一年的日频收益率数据分别在沪深 300 成份股（HS300）、中证 500 成份股（ZZ500）和小市值 500（SC500，中证 800 之后市值最大的 500 只股票）进行了参数估计，结果如图 1 所示。BEKK 模型的 alpha 参数大概 0.02 附近，beta 参数在 0.98 附近，这个和 Pakel(2017)的在标普 500 里面的参数估计结果很接近，他们估算得到 alpha 大概在 0.03 附近，beta 在 0.96 附近。**DCC 模型估计得到的 alpha 和美股相差较大：A 股估计得到的数值大概在 0.001 左右，而美股大概在 0.007，也就是说 A 股股票间的条件相关系数矩阵对新收益率数据不敏感，动态性不强；造成这种结果的**

一种可能性是 **A 股股票间的相关系数确实变化不大**（这个与主观感觉有出入），另一种可能性是 **DCC 模型设定不适合 A 股，存在模型设定偏误。** DCC 模型的 beta 在美股和 A 股都在 0.99 左右，比较接近。

图 1：用 CL 方法估计得到的 BEKK 和 DCC 模型参数

	BEKK			DCC		
	沪深300	中证500	SC500	沪深300	中证500	SC500
α	0.0233	0.0116	0.0225	0.0010	0.0011	0.0010
β	0.9757	0.9873	0.9764	0.9980	0.9978	0.9979
耗时（分钟）	12.2	53.7	54.9	13.5	61.6	26.4

资料来源：东方证券研究所 & Wind 资讯

模型参数估计耗费的时间值得关注，在个人电脑上（i5-4590+16G 内存+pycharm+python 3.5），估算沪深 300 成份股 300 只股票的 DCC 和 BEKK 模型参数，只需 10 分钟左右，但增加到 500 只股票（ZZ500&SC500）时，耗时接近一个小时。**CL 方法和最初的 MLE 估计方法几天的耗时相比已经大幅降低了，而且在实际实盘投资中也可用，开盘前运行一次，输入到组合优化中得到组合权重即可。不过对于长时间的历史回溯而言，累加起来的耗时量非常惊人，调参数困难。**程序耗时的原因可能和代码编写有关系，计算 CL 函数时需要通过 BEKK 和 DCC 的迭代式反复循环计算，而后续在优化 CL 函数时，CL 函数可能会被反复求值上千次，总运算量巨大。虽然迭代式的代码我们已经用 Cython 进行了加速，但目前看来效果并不理想，用纯 C 语言来写可能效果会更佳。

鉴于 DCC 和 BEKK 模型的耗时，我们可以考虑采用 DCC 模型的一个简化版本 CCC GARCH，它假设 DCC 模型中的条件相关系数矩阵Q_t是一个常数矩阵，不随时间变化，条件协方差的变化完全由个股条件方差的变化引起。这样估计参数时，只需要对每个股票做时间序列上的一维 GARCH 模型拟合，然后计算 devolatised return 的相关系数矩阵即可，计算量大幅降低。图 1 **在 A 股估计得到的 DCC 模型 alpha** 很小，**Q_t在时间序列上的动态性不强，支持我们采用 CCC GARCH 模型做简化。**Pakel(2017)做过大量 Monte-Carlo 仿真测试，结果显示当股票数量较少时（100 只左右），DCC 相对 CCC 模型的估计误差降幅明显，但随着股票数量的逐步增加（1000 只），误差的相对降幅越来越小；而且**如果用真实的股票收益率数据构建全局最小方差组合（GMVP），两者的结果基本相当。**

最后补充一点，Pakel(2017)和 Engle(2017)在做实证时都是选取历史上一直都在正常交易的股票作为标的，但 A 股实际投资中，不可避免会碰到很多历史长期停牌的股票，我们研究发现缺失数据的填补方式对模型的使用效果影响较大。

三、实证结果

3.1 协方差矩阵估计量的评价方法

协方差矩阵数值不可以通过现实数据观测得到，需要设计一定的方法去检验。实证中用的最多的方法有两种。一种是 Monte Carlo 模拟，预先设定协方差矩阵数值，按照一定的概率分布去随机模拟生成一系列样本点；基于这些样本点，再用不同的方法去估计得到协方差矩阵，看看哪种方法得到的估计值距离预先设定的数值最近。距离的定义方式有很多，上文 2.2 节介绍的 Frobenius 距离是一种，其它可以参考使用的还有 Lediot(2017b)、Liu(2007)。

需要注意的是，用距离方法判断协方差矩阵估计量好坏的前提是必须知道真实协方差矩阵数值，所以适宜配合 MonteCarlo 模拟方法使用。股票数量较多时，不能拿样本外收益率的样本协方差矩阵作为真实协方差矩阵的替代值。如果股票数量 p 较小，收益率样本点数量 n 较多，那么当$n \to \infty$时，样本协方差矩阵是真实协方差矩阵的一致估计量，估计误差会趋于零，样本足够多时，可以拿样本协方差矩阵作为真实协方差矩阵的近似值。但如果股票数量较多，甚至是组合优化里经常碰到的 p>n 的情形，我们则需要考虑$n \to \infty$同时$p \to \infty$时样本协方差矩阵的一致性，但此时一致性在绝大多数情况下都不成立（Ledoit 2004, Theorem 3.1），也就是说估计误差不趋向于零。所以，**一个估计量距离样本协方差矩阵很近，并不代表它距离真实协方差矩阵近**，事实上，当 p/n 较大时，压缩估计量都可以相对样本协方差矩阵大幅降低估计误差，距离真实协方差矩阵更近。

另一种评价方法则是实用主义的。在组合优化领域，通常的方法是用不同协方差矩阵估计量构建全局最小方差组合（GMVP, Global Minimum Variance Portfolio），看哪种方法得到的 GMVP 组合的真实方差最小。GMVP 的收益率序列是一维的，样本方差是真实方差的一致估计量，因此样本数量较多时（例如：五年的日收益率），可以用样本方差作为真实方差的近似值。GMVP 组合通过下列组合优化问题得到：

$$\min_{w} w' \cdot \Sigma \cdot w \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

下文用 A 股数据比较了五种协方差矩阵估计方法的效果，包括：

1) 因子模型（FM）。在标准因子模型基准上，用非线性压缩方法估计因子收益率协方差矩阵和特质方差矩阵，并加上 EWMA 时变结构。
2) 线性压缩模型（LS）。压缩目标选择我们之前报告里一直用的平均相关系数矩阵。
3) 非线性压缩（NLS）。参考第 2.2 节
4) CCC GARCH.
5) FM+CCC：把 FM 和 CCC 模型估计得到的协方差矩阵进行简单平均，这样可以一定程度上降低模型设定偏误的影响，一些实证研究发现这种多模型组合的方式能获得比单模型更好的效果，例如 Caldeira(2017).

3.2 月频 GMVP

历史回溯测试的实证区间设定为 2009.01.4 – 2017.10.31，每个月初，我们基于过去一年的日收益率数据，用不同的协方差矩阵估计方法，分别在沪深 300 成份股（HS300）、中证 500 成份股（ZZ500）和小市值 500（SC500，中证 800 之后市值最大的 500 只股票）里面构建 GMVP，持仓一个月到下个月初，滚动操作，看看不同估计方法得到的 GMVP 组合方差的相对大小。图 2 报告的是这些组合的年化波动率数据。

图 2：不同估计方法得到的月频 GMVP 年化波动率

年化波动率	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
沪深300	0.170	0.183	0.182	0.161	**0.159**
中证500	0.226	0.248	0.235	0.228	**0.223**
SC 500	0.204	0.222	0.225	0.228	**0.194**

资料来源：东方证券研究所 & Wind 资讯

比较两个 GMVP 日收益率序列是否方差相等，我们采用 Fligner-Killeen 检验，和传统的 F 检验相比，它不依赖于收益率正态分布假设，对尖峰厚尾、有异常值的数据比较稳健，两两比较检验的 p 值如图 3 所示。如果投资者想检验月频收益率的方差，样本数量比较小，也可以考虑采用 Ledoit(2011)的 bootstrap 方法。

图 3：不同估计方法得到的月频 GMVP 日收益率方差是否相等的 Fligner-Killeen 检验 p 值

沪深300	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
FM		0.029	0.029	0.013	0.020
LS			0.980	0.000	0.000
NLS				0.000	0.000
CCC-GARCH					0.845
FM+CCC					

中证500	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
FM		0.211	0.705	0.051	0.112
LS			0.367	0.002	0.006
NLS				0.024	0.054
CCC-GARCH					0.711
FM+CCC					

SC500	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
FM		0.009	0.002	0.059	0.048
LS			0.615	0.461	0.000
NLS				0.217	0.000
CCC-GARCH					0.000
FM+CCC					

资料来源：东方证券研究所 & Wind 资讯

从上图可以看到，**虽然 NLS 对样本协方差矩阵特征值的压缩方式比 LS 更精细，但不论在 HS300、ZZ500 还是 SC500 里面，两种方法得到的 GMVP 组合年化波动率数值相差非常小，而且差额在统计上不显著（5%置信度）**。不过上述实证涉及的情景非常有限，实际投资中会碰到很多未知情况；而 Ledoit (2017)的 Monte Carlo 仿真测试显示 NLS 相对 LS 在很多情形下是有明显优势的，**因此我们还是建议之前使用 LS 估计量的投资者转到 NLS 上，增加的计算量负荷非常少，但或许能应对的未知情况更多**。

和之前报告《A 股市场风险分析》的结论相反，图 2 里面因子模型 FM 表现在三个成份股里面都要好于 LS，而且在沪深 300 和 SC500 里面统计显著，原因是因为我们对之前的因子模型做了三点改进：①采用日频数据，②因子收益率协方差矩阵和特质方差矩阵用 NLS 估计，③ 因子收益率协方差矩阵和特质方差矩阵增加了 EWMA 的时变特性。其中第三点是最重要的。如果不加入 EWMA 架构，因子模型在沪深 300 内 GMVP 组合的年化波动率等于 17.9%，和 LS,NLS 模型非常接近，差异统计上不显著。**也就是说，如果不考虑时间序列方向上的改进，横截面上日频因子模型 FM、线性压缩 LS 和非线性压缩 NLS 没有显著差别，投资者可以任选其一，从计算效率上讲后两者更好**。

CCC-GARCH 和 FM 互有胜负，沪深 300 内 CCC-GARCH 比 FM 好，且差异在统计上显著；SC500 内 FM 比 CCC-GARCH 好，且差异在统计上显著。如果把两者等权合在一起（FM+CCC），会发现其 GMVP 波动率数值在不同成份股内都是最小，虽然有时候这种数值差异在统计上不显著。

总结来说，横截面上改进风险模型效果不明显，时间序列方向上的改进更显著。加入了时变结构的因子风险模型表现已经很好，但并不能保证最好，和 CCC-GARCH 这样的纯统计模型结合在一起可以进一步提升模型表现。

3.3 周频 GMVP

月频调仓是量化实证研究中最常用的调仓频率，但实际投资中提高调仓频率一般会更有益处，一方面 IC 衰减速度较快的技术类因子有效时，提高调仓频率可以减小 IC 衰减的影响（参考前期报告《在 alpha 衰退之前》）；另一方面即使技术类因子失效，提高调仓频率增加不了 alpha，每一次调仓都是在做一次风险控制调整，提高调仓频率有助于降低跟踪误差和风险暴露，从而提升信息比。投资者需要做的是在高频率调仓中控制每次调仓的换手率，保证总的换手率不要增加太多。因此需要测试一下高频调仓下不同风险模型的效果。以下测试了周频的情况，其它回溯测试设置同上。

图 4：不同估计方法得到的周频 GMVP 年化波动率

	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
沪深300	0.159	0.177	0.179	0.163	**0.153**
中证500	0.220	0.245	0.243	0.230	**0.217**
SC 500	0.191	0.225	0.231	0.208	**0.190**

资料来源：东方证券研究所 & Wind 资讯

和月频模型相比（图 4），周频 GMVP 的波动率总体上比月频 GMVP 小，这和前面的逻辑分析一致，但小的幅度并不大，很多差异不显著；变化比较大的主要是 FM 模型在 HS300、SC500 里的表现，周频调仓可以让组合年化波动率比月频调仓低 1%以上。

图 5：不同估计方法得到的周频 GMVP 日收益率方差是否相等的 Fligner-Killeen 检验 p 值

沪深300	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
FM		0.007	0.005	0.265	0.262
LS			0.909	0.000	0.000
NLS				0.000	0.000
CCC-GARCH					0.947
FM+CCC					

中证500	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
FM		0.000	0.002	0.586	0.609
LS			0.677	0.004	0.000
NLS				0.014	0.000
CCC-GARCH					0.292
FM+CCC					

SC500	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
FM		0.000	0.000	0.081	0.708
LS			0.126	0.004	0.000
NLS				0.000	0.000
CCC-GARCH					0.161
FM+CCC					

资料来源：东方证券研究所 & Wind 资讯

不同模型之间对比来看（图 4，图 5），和之前月频结果比较类似。加了时变结构的 FM 和 CCC_GARCH 要比纯横截面改进的 LS 和 NLS 模型要好，把 FM 和 CCC_GARCH 组合在一起得到 GMVP 组合波动率数值更小，但和单个模型的差异在统计上不显著。

以上的周频组合仍是用过去一年的日频数据来估算协方差矩阵。对于高频调仓组合，可以考虑增加近期数据的权重以增加模型对市场短期变化的敏感性。图 6 尝试了用过去半年的数据估算协方差矩阵做周频 GMVP，结果和图 4 非常接近。**提高近期数据权重的同时也在减少样本数量，使 p/n 数值变大，进而增加估计误差，抵消了模型敏感度增加的好处**。

图 6：不同估计方法得到的周频 GMVP 年化波动率（用过去滚动半年的数据）

	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
沪深300	0.159	0.172	0.174	0.165	**0.156**
中证500	0.220	0.244	0.244	0.232	**0.221**
SC 500	0.193	0.213	0.230	0.207	**0.193**

资料来源：东方证券研究所 & Wind 资讯

3.4 带权重约束的月频 GMVP

GMVP 组合波动率的大小可以理论上反映不同协方差矩阵估计模型控制风险能力的最大值，但如果仔细看 GMVP 组合的权重分布，会发现很多股票被做空，个别股票的权重异常高（例如：超过 20%），和真实的投资限制差别较大。可以进一步加入约束条件，考察风险模型在实际投资中的效果。下文只以沪深 300 成份股为例，在标准 GMVP 基础上，要求股票不能做空，单个股票权重不能超过 5%，这样得到的 GMVP 组合表现如图 7 所示。

图 7：不同估计方法得到的沪深 300 月频 GMVP 表现

	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
年化波动率	0.186	0.199	0.203	0.191	**0.185**
单边年换手率	348.0%	228.0%	235.0%	376.0%	**323.0%**

F-K检验 p 值	FM	LS	NLS	CCC-GARCH	FM+CCC
FM		0.182	0.071	0.905	0.588
LS			0.636	0.237	0.063
NLS				0.098	0.020
CCC-GARCH					0.501
FM+CCC					

资料来源：东方证券研究所 & Wind 资讯

和图 2 相比，增加的约束条件限制了风险模型调节风险的能力，所以得到的 GMVP 波动率都比无约束条件下的高。不同模型间，从波动率数值上看，还是 FM 和 CCC-GARCH 要比 LS 和 NLS 好，但此时数值的差别在统计上不是很显著；把 FM 和 CCC-GARCH 组合在一起可以进一步降低 GMVP 的波动率，而且它相对 LS 和 NLS 模型的优势在统计上更加显著。

在时间序列方向上改进波动率模型是有代价的，可以看到 FM 和 CCC-GARCH 的 GMVP 换手率明显要比 LS 和 NLS 高，把 FM 和 CCC-GARCH 组合在一起可以降低部分换手率。真实投资中，我们除了单个股票权重限制，可能还会加上跟踪误差、风险因子主动暴露等约束，限制更严，用时变风险模型实际增加的换手率会比上面测试结果低，但对应的，时变风险模型降风险的幅度也会减小。**究竟是时变模型带来风险下降的利好多，还是换手率增加带来的损失多，取决于 alpha 模型、组合约束条件、产品规模、交易成本等因素，不同的问题可能会有不同的结论，但至少这是一个值得尝试的改进方向，特别是那些交易便利的私募、券商自营等机构**。

四、总结

协方差矩阵估计领域的研究成果众多，不可能一一比较，从已读文献里的仿真和实证结果看，非线性压缩 NLS 应该是这个领域一个比较领先的方法，但报告实证发现在实际投资中它和我们之前用的简单线性压缩 LS、标准化因子模型（不加时变结构）效果没有显著差别。因此个人感觉，如果假设股票收益率在时间序列上是独立同分布，纯靠横截面方法去改进风险模型，空间可能不大。给风险模型加上时间序列结构可以增强模型的风险控制能力，FM 和 CCC-GARCH 的实证结果说明了这一点，但改进的代价是会增加换手率。把不同的时变模型组合在一起可以进一步加强风险模型的控风险能力，并降低换手率。报告实证用的是 FM+CCC 组合，除此之外 BEKK 和 DCC-GARCH 也是可以考虑纳入，但程序代码上可能还要再做进一步优化。

风险提示

1. 量化模型基于历史数据分析得到，未来存在失效的风险，建议投资者紧密跟踪模型表现。
2. 极端市场环境可能对模型效果造成剧烈冲击，导致收益亏损。

参考文献

[1]. Caldeira,J.F., Moura, G.V., Nogales, F.J., Santos, A.A.,(2017),"Combining Multivariate Volatility Forecasts: An Economic-Based Approach",Journal of Financial Econometrics, Vol(15), Issue 2, 247–285,

[2]. Engle, R. F., (2002), "Dynamic conditional correlation - a simple class of multivariate garch models". Journal of Business and Economic Statistics 20, 339–350

[3]. Engle, R. F. and K. F. Kroner (1995). "Multivariate simultaneous generalized ARCH". Econometric Theory, vol(11), 122–150

[4]. Engle, R.F., Ledoit, O., Wolf, M., (2017), "Large Dynamic Covariance Matrices", Journal of Business & Economic Statistics, forthcoming.

[5]. Ledoit,O., Wolf,M., (2004),"A Well Conditioned Estimator for Large-dimensional Covariance Matrices", Journal of Multivariate Analysis, vol(88), pp:365-411

[6]. Ledoit,O., Wolf,M., (2011)，" Robust performance hypothesis testing with the variance", Wilmott Magazine, Issue 55, 86-89

[7]. Ledoit,O., Wolf,M., (2017), " Direct Nonlinear Shrinkage Estimation of Large Dimensional Covariance Matrices", working paper, https://ssrn.com/abstract=3047302

[8]. Ledoit, O., Wolf, M., (2017 b),"Nonlinear Shrinkage of the Covariance Matrix for Portfolio Selection: Markowitz Meets Goldilocks",The Review of Financial Studies, Vol(30), Issue 12, 4349–4388

[9]. Liu,L., (2007), "Portfolio Risk Measurement: the estimation of the covariance of stock returns", doctoral dissertation, University of Warwick.

[10]. Pakel, C., Shephard, N., Sheppard, K., Engle, R., F., (2017), "Fitting Vast Dimensional Time-Varying Covariance Models". NYU Working Paper No. FIN-08-009. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=1354497

[11]. Pourahmadi, M., (2013), "High-Dimensional Covariance Estimation: With High-Dimensional Data", Wiley Series in Probability and Statistics

[12]. Schafer, J., Strimmer,K., (2005), "A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Estimation and Implications for Functional Genomics". Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology, vol(4).

分析师申明

每位负责撰写本研究报告全部或部分内容的研究分析师在此作以下声明：

分析师在本报告中对所提及的证券或发行人发表的任何建议和观点均准确地反映了其个人对该证券或发行人的看法和判断；分析师薪酬的任何组成部分无论是在过去、现在及将来，均与其在本研究报告中所表述的具体建议或观点无任何直接或间接的关系。

投资评级和相关定义

报告发布日后的 12 个月内的公司的涨跌幅相对同期的上证指数/深证成指的涨跌幅为基准；

公司投资评级的量化标准

买入：相对强于市场基准指数收益率 15%以上；

增持：相对强于市场基准指数收益率 5%～15%；

中性：相对于市场基准指数收益率在-5%～+5%之间波动；

减持：相对弱于市场基准指数收益率在-5%以下。

未评级——由于在报告发出之时该股票不在本公司研究覆盖范围内，分析师基于当时对该股票的研究状况，未给予投资评级相关信息。

暂停评级——根据监管制度及本公司相关规定，研究报告发布之时该投资对象可能与本公司存在潜在的利益冲突情形；亦或是研究报告发布当时该股票的价值和价格分析存在重大不确定性，缺乏足够的研究依据支持分析师给出明确投资评级；分析师在上述情况下暂停对该股票给予投资评级等信息，投资者需要注意在此报告发布之前曾给予该股票的投资评级、盈利预测及目标价格等信息不再有效。

行业投资评级的量化标准：

看好：相对强于市场基准指数收益率 5%以上；

中性：相对于市场基准指数收益率在-5%～+5%之间波动；

看淡：相对于市场基准指数收益率在-5%以下。

未评级：由于在报告发出之时该行业不在本公司研究覆盖范围内，分析师基于当时对该行业的研究状况，未给予投资评级等相关信息。

暂停评级：由于研究报告发布当时该行业的投资价值分析存在重大不确定性，缺乏足够的研究依据支持分析师给出明确行业投资评级；分析师在上述情况下暂停对该行业给予投资评级信息，投资者需要注意在此报告发布之前曾给予该行业的投资评级信息不再有效。

免责声明

本证券研究报告（以下简称"本报告"）由东方证券股份有限公司（以下简称"本公司"）制作及发布。

本报告仅供本公司的客户使用。本公司不会因接收人收到本报告而视其为本公司的当然客户。本报告的全体接收人应当采取必要措施防止本报告被转发给他人。

本报告是基于本公司认为可靠的且目前已公开的信息撰写，本公司力求但不保证该信息的准确性和完整性，客户也不应该认为该信息是准确和完整的。同时，本公司不保证文中观点或陈述不会发生任何变更，在不同时期，本公司可发出与本报告所载资料、意见及推测不一致的证券研究报告。本公司会适时更新我们的研究，但可能会因某些规定而无法做到。除了一些定期出版的证券研究报告之外，绝大多数证券研究报告是在分析师认为适当的时候不定期地发布。

在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见并不构成对任何人的投资建议，也没有考虑到个别客户特殊的投资目标、财务状况或需求。客户应考虑本报告中的任何意见或建议是否符合其特定状况，若有必要应寻求专家意见。本报告所载的资料、工具、意见及推测只提供给客户作参考之用，并非作为或被视为出售或购买证券或其他投资标的的邀请或向人作出邀请。

本报告中提及的投资价格和价值以及这些投资带来的收入可能会波动。过去的表现并不代表未来的表现，未来的回报也无法保证，投资者可能会损失本金。外汇汇率波动有可能对某些投资的价值或价格或来自这一投资的收入产生不良影响。那些涉及期货、期权及其它衍生工具的交易，因其包括重大的市场风险，因此并不适合所有投资者。

在任何情况下，本公司不对任何人因使用本报告中的任何内容所引致的任何损失负任何责任，投资者自主作出投资决策并自行承担投资风险，任何形式的分享证券投资收益或者分担证券投资损失的书面或口头承诺均为无效。

提示客户及公众投资者慎重使用未经授权刊载或者转发的本公司证券研究报告，慎重使用公众媒体刊载的证券研究报告。

东方证券研究所

地址： 上海市中山南路 318 号东方国际金融广场 26 楼
联系人： 王骏飞
电话： 021-63325888*1131
传真： 021-63326786
网址： www.dfzq.com.cn
Email： wangjunfei@orientsec.com.cn