金融工程

算法交易—均值方差模型之组合算法

金融工程

◆单股票均值-方差模型回顾

在之前的报告中，我们将算法交易的目标一般化为了均值-方差最优的问题，即令交易的总期望损失 $E(x)$ 和期望波动 $V(x)$ 的加权组合 $E(x)+\lambda V(x)$ 最小化。在假设了股票价格随机过程、永久性和暂时性冲击成本方程等的基础上，我们通过偏导数求解效用函数最小值的方法得到了单股票最优交易序列的一般解。

◆基于股票组合的均值-方差模型

由于实践中交易者往往不会只交易一支股票，因此我们将均值-方差模型拓展到股票组合的最优交易路径。基本假设和分析方法与单股票的情况相似，但需要考虑不同股票之间的相互冲击、以及波动率的相关性。所以组合算法中的冲击成本、股票波动率等均以矩阵形式出现，也无法求出解析解。我们通过解一个线性系统的方式可以得出组合算法的数值解。

◆组合算法应用示例及启示

在本文最后，我们模拟两支股票的信息，并对它们的组合运用算法。从结果来看，流动性越好、价格传导性越低的股票会在算法模型中以较快的速度被交易，而流动性较差的和价格传导性强的股票的大部分交易会在整个时段的后期进行。实际应用中，所有的股票参数均被存储在服务器中以方便算法模块调用，交易者只需照常输入交易股票信息即可实现算法优化拆单。

分析师

倪蕴韬（执业证书编号：S0930512070002）
021-22169338
niyt@ebscn.com

刘道明（执业证书编号：S0930510120008)
021-22169109
liudaoming@ebscn.com

相关研报

《算法交易—基础理念与系统构建》
《算法交易—均值方差模型》
《市场微观结构之冲击成本模拟》

1、 单股票均值方差模型回顾

在之前的算法交易报告中，我们建立了针对单只股票交易的均值方差最优模型。对于算法交易设定目标的问题，我们将其进行了一般化：从传统的经济理论出发，我们认为投资者希望达到期望效用最大化，而投资者效用可以用收益和风险两方面的因素来涵盖。如果用期望成交均价代表收益而用成交均价的波动率（方差）代表风险，则一个“最优的”交易算法应当达到均值—方差最优。在我们的均值方差模型中，以到达价格（Arrival Price），即下单时证券的市场价格作为基准，用期望成交均价与到达价格的差值 $E(\overline{S}-S_0)$ 来衡量均值，用这一差值的波动率 $V(\overline{S}-S_0)$ 来衡量方差。在实际的模型运算中，为了方便起见，我们将使用总期望损失 $E(x)=E[(\overline{S}-S_0)X]$ 及其方差 $V(x)=V[(\overline{S}-S_0)X]$ 作为两者的等价替代。由于这两者对投资者效用的贡献均为负，因此模型的目标是求出使这两者的一个加权组合 $E(x)+\lambda V(x)$ 最小化的交易序列 $(x_0,x_1\ldots x_k\ldots x_N)$，其中对于卖出交易，有 $x_0=X$，$x_N=0$。

和所有的数学模型一样，均值方差模型也必须依赖于某些前提假设，主要的假设包括：

考虑冲击成本的股票价格随机过程：$S_k = S_{k-1}+\alpha\tau+\sigma\tau^{1/2}\xi_k-\tau g(\frac{n_k}{\tau})$

线性冲击成本：$g(\frac{n_k}{\tau})=\gamma\frac{n_k}{\tau}$，$h(\frac{n_k}{\tau})=\eta\frac{n_k}{\tau}$

在以上假设下，当交易时间并非很长时，可认为股价漂浮率 α 在交易持续期内为 0，则模型的目标效用函数转化为

$$\mathrm{U}(x)=\sum_{k=1}^{N}\tau g(\frac{n_k}{\tau})x_k+\sum_{k=1}^{N}h(\frac{n_k}{\tau})n_k+\lambda\sigma^2\sum_{k=1}^{N}\tau x_k^2$$

通过令函数的所有偏导数等于 0

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}=2\tau\{\lambda\sigma^2 x_k-(\eta-\frac{\gamma\tau}{2})\frac{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}{\tau^2}\}=0$$

我们解得最优交易序列为

$$x_k=\frac{\sinh(\kappa(T-k\tau))}{\sinh(\kappa T)}X$$

其中 κ 满足 $\cosh(\kappa\tau)=1+\frac{\tau^2\lambda\sigma^2}{2\eta-\gamma\tau}$。

在进一步的模型扩展中，我们考虑了 $\alpha\neq 0$，股价序列存在自相关性等常见的情况，并将其整合入模型结果。最后，我们指出将均值方差加权组合最小化的

过程也是投资者对风险厌恶系数λ选择的过程，在所有可能的λ取值下，另$E(\overline{S}-S_0)+\lambda V(\overline{S}-S_0)$最小的 E 和 V 的集合即构成算法的有效边界，对于边界上的任意一点 k，不存在另一个 E 和 V 的组合点 j 能同时满足$E(x_j)<E(x_k)$且$V(x_j)\le V(x_k)$。而λ则对应着经过有效边界上每一点的切线斜率。

2、 股票组合均值方差模型

2.1 前提假设

在现实的股票交易中，很多时候投资者在同一时间并不会只交易一支股票，而往往是基于投资组合管理进行多支股票的交易。从算法的角度来说，多支股票和单支股票的交易是有很大差别的，虽然将单支股票的模型直接运用于每支股票在某种程度上也是可行的，但那样势必造成大部分交易集中于整个时间段的早期，对于整个组合的成本—方差来说并非最优。当组合内的股票彼此之间相关性较高时尤其如此，这是因为高相关性会使得对一支股票交易产生的冲击成本传导至其他股票，因此所有股票沿相似的路径交易将使得总的冲击成本大大提高，从而偏离最优的标准。在本文中，我们从多支股票的相互关系出发，探讨对于股票组合的最优算法交易模型。

首先，我们依然要提出一系列的前提假设，对于每个单支股票，我们仍然假设其价格服从几何随机游走过程：

$$S_k=S_{k\text{-}1}+\alpha\tau+\sigma\tau^{1/2}\xi_k$$

并且在算法交易所持续的时间长度内， 我们近似认为漂浮率α等于零，模型被简化为：

$$S_k=S_{k\text{-}1}+\sigma\tau^{1/2}\xi_k$$

考虑投资者本身交易对市场形成的冲击成本后，股价模型被进一步修正为（假设进行卖出交易）：

$$S_k=S_{k\text{-}1}+\sigma\tau^{1/2}\xi_k-\tau g(\frac{n_k}{\tau})$$

而每一交易区段内的成交均价则和暂时性冲击成本相关，这部分冲击源于交易对市场流动性的耗竭，在我们交易的时候影响暂时的股票价格，但每一交易区段结束后就不再影响之后的股票价格：

$$\tilde{S}_k=S_{k\text{-}1}-h(\frac{n_k}{\tau})$$

注意暂时性成本是不在价格的随机过程中出现的，它只影响算法交易每一笔下单实现的均价。在基于股票组合的均值-方差模型中，我们依然先假设每支股票的永久性和暂时性冲击成本函数均为线性形式：

$$g(\frac{n_k}{\tau})=\gamma\frac{n_k}{\tau}\qquad h(\frac{n_k}{\tau})=\eta\frac{n_k}{\tau}$$

最后，我们假设每支股票的价格序列存在一定的相关性，整个股票组合的方差-协方差矩阵为$C=\sigma\sigma^T$，这一相关性同时也会反映在冲击成本上，即交易一支股票可能对另一支股票产生冲击。

2.2 组合均值与方差

和单支股票模型类似，我们依然以 X 表示初始股票量，S 代表股票价格，x_t 表示剩余待交易股票量的序列，而以n_t表示每一时段交易量的序列，所不同的是，它们以向量而非数值形式出现。如果组合中有 m 支股票，则 $X=(X_1,\dots X_m)^T$，$S_0=(S_{10},\dots S_{m0})^T$，$S_t=(S_{1t},\dots S_{mt})^T$，$x_k=(x_{1k},\dots x_{mk})^T$，$n_k=(n_{1k},\dots n_{mk})^T$。

对于组合冲击成本，我们以$\Gamma_{m\times m}$表示永久冲击成本矩阵，以$H_{m\times m}$表示暂时冲击成本矩阵，Γ_{ij}代表交易股票 j 对股票 i 形成的永久性冲击，H_{ij}代表相应的暂时性冲击。对于整个组合，令$v=\dfrac{n}{\tau}$,有

$$g(v)=\Gamma v \qquad h(v)=Hv$$

在交易开始时，组合的到达价值（arrival value）为X^TS_0，交易中的期望损失和方差分别为:

$$E(x)=\sum_{k=1}^{N}\tau x_k^T\Gamma v_k+\sum_{k=1}^{N}\tau v_k^T Hv_k$$

$$V(x)=\sum_{k=1}^{N}\tau x_k^T Cx_k$$

算法的目标依然被归结为求解最佳的交易矩阵x_t，使给定风险回避系数λ后的$E(x)+\lambda V(x)$取最小值。

3、 组合算法的解和有效边界

为了便于对组合算法求解，我们进一步将Γ和H矩阵分解为对称部分和非对称部分：$\Gamma^S=\dfrac{1}{2}(\Gamma+\Gamma^T)$，$\Gamma^A=\dfrac{1}{2}(\Gamma-\Gamma^T)$，$H^S=\dfrac{1}{2}(H+H^T)$，$H^A=\dfrac{1}{2}(H-H^T)$

这样，组合交易的期望损失均值可变化为

$$E(x)=\frac{1}{2}X^T\Gamma^S X+\sum_{k=1}^{N}\tau x_k^T\Gamma^A v_k+\sum_{k=1}^{N}\tau v_k^T\tilde{H}v_k$$

其中 $\tilde{H} = H^S - \frac{1}{2}\tau\Gamma^S$

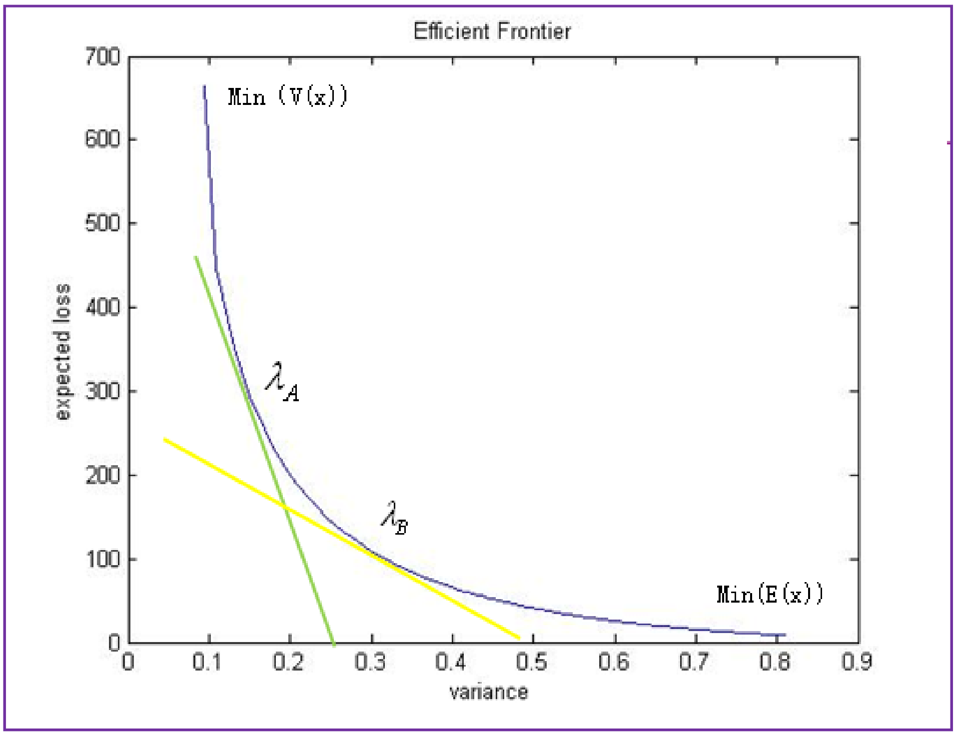
对于求使 $E(x)+\lambda V(x)$ 取得最小值的交易序列矩阵 x_t，我们依然令所有偏导数等于 0：$\frac{\partial U}{\partial x_k} = 2\tau(\lambda C x_k + \Gamma^A \frac{x_{k-1}-x_{k+1}}{2\tau} - \tilde{H}\frac{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}{\tau^2}) = 0$，

即等价于 $\frac{x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}}{\tau^2} = \lambda \tilde{H}^{-1} C x_k + \tilde{H}^{-1}\Gamma^A \frac{x_{k-1}-x_{k+1}}{2\tau}$

在一般的 Γ 和 H 矩阵形式下，以上这个方程无法求出显式解，但可以通过求解一个维度为 m(N-1)的线性系统得出其数值解，这一问题通过大多数主流统计软件即可解决。仅当 Γ 和 H 为对角阵，即每支股票的交易对其他股票均不形成冲击时，算法可得出与单支股票情况下类似的解析解。

同样的，股票组合的算法也存在有效边界。对于某一交易序列矩阵 x，如果存在另一序列矩阵 x' 使得 $E(x') < E(x)$ 且 $V(x') \le V(x)$，则称序列矩阵 x 是无效的，反之则是有效的。所有有效序列对应的 E 和 V 的组合所构成的集合即为组合算法的有效边界。有效边界曲线上的每一点都对应着不同 λ 取值下的最优解，而 λ 则等于经过该点的切线斜率，因此有效边界曲线同时也是所有可能的 λ 下使 $E(x)+\lambda V(x)$ 最小的点的集合。有效边界曲线向原点凸出，越往右下方的点对应越小的 λ 值，在最小风险点 $\lambda = \infty$，在最小期望冲击点 λ=0，而最小期望冲击点右侧 $\lambda < 0$，代表着交易者为风险偏好型，因此可看到曲线重新上升。

图 1. 有效边界示例



4、 组合算法实际应用举例

本节中，我们通过设定虚拟股票的参数，来展现组合算法在实际情境下是如何被应用的，在例子中，我们的组合仅包含两支股票，但其操作可方便地推广到任意多的 N 支股票，计算时间线性增加。我们设定模拟中的两支股票基本参数如下：

股票 A

初始价格：$S_0=10$（元）

年化波动率：25%

交易方向：卖出

交易总量：$X=2.5*10^6$（股）

交易时间：T=2 （天） X1000

交易时段数量：N=96 （分段长度为 5 分钟）

预期交易时段内日收益：$\alpha=0$

日均交易量：$V=7.5*10^7$（股）

股票 B

初始价格：$S_0=200$（元）

年化波动率：27%

交易方向：卖出

交易总量：$X=10^5$（股）

交易时间：T=2 （天）

交易时段数量：N=96 （分段长度为 5 分钟）

预期交易时段内日收益：$\alpha=0$

日均交易量：$V=3.5*10^6$（股）

Γ 矩阵

Γ 系数	股票 A	股票 B
股票 A	$4.48819*10^{-9}$	0
股票 B	0	$4.31807*10^{-6}$

H 矩阵

H 系数	股票 A	股票 B
股票 A	$2.24409*10^{-9}$	$5.48164*10^{-10}$
股票 B	$9.80599*10^{-9}$	$1.74383*10^{-6}$

方差-协方差矩阵（年化）

方差-协方差	股票 A	股票 B
股票 A	25%	12%
股票 B	12%	27%

投资者风险回避系数：λ=10^{-4} （1/元）

将所有参数输入算法程序后，算法自动给出两支股票的每个时段最佳交易量n_A、n_B，以及相应的最优交易序列x_A、x_B如下图所示：

图 2. 算法输出结果n_A、n_B

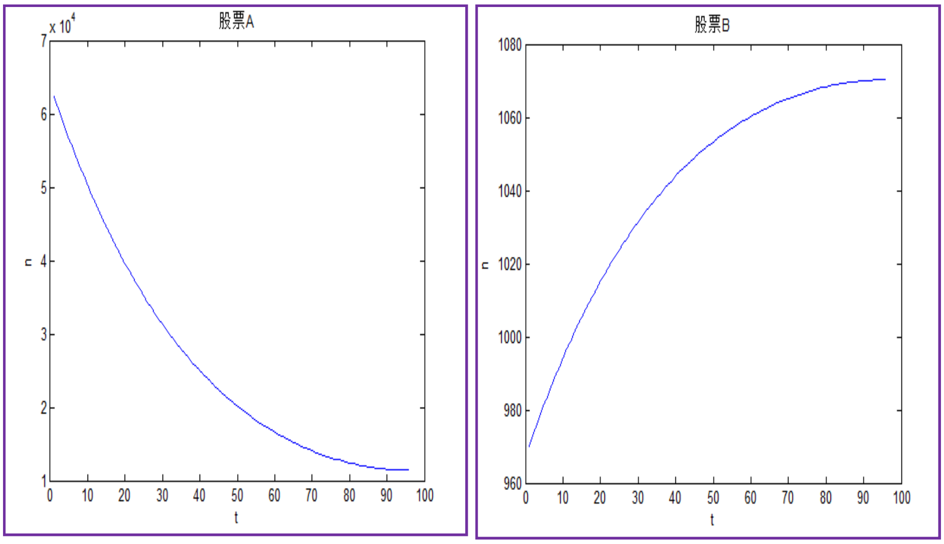
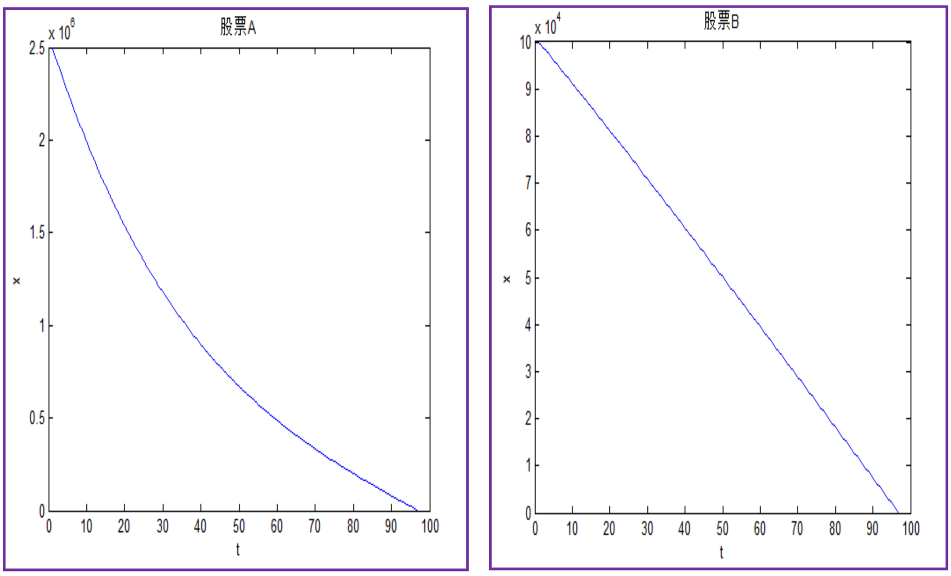


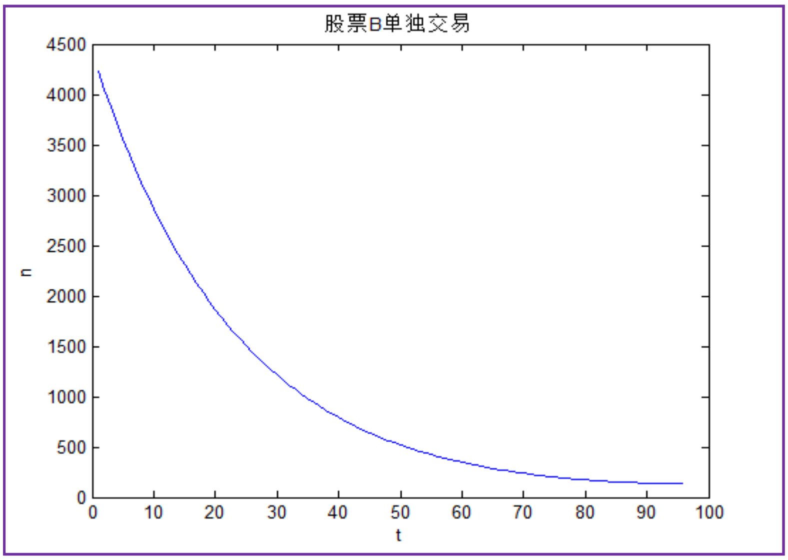
图 3. 算法输出结果x_A、x_B



可以看到，股票组合的均值-方差最优解和单支股票的最优解有很大的区别。其中股票 A 的交易序列和单支股票的情况下比较相似，在早期交易较多而晚期逐渐减少交易量，形成凸向原点的x_A序列；而股票 B 的交易序列则和单支股票

的情况下正相反，在早期交易较少，随着时间推移逐渐增加，最后形成的 x_B 序列呈现凹向原点的形状。出现这样的结果是因为两支股票的交易不仅影响它们本身的价格，还对彼此产生冲击成本，因此如果都采用和单支股票的情况下相同的轨迹进行交易，必然会导致在前期交易过多、产生冲击过大的情况。相互冲击的结果就是流动性较好的股票将沿着近似于单股票的交易轨迹完成交易，而流动性较差的股票将减少前期交易量、增加后期交易比重，在相互冲击较为显著的情况下，会出现如图中这样被逆转的最优交易序列。

图 4. 对比图：单股票交易的 n_B



对于包含更多数量股票的组合，算法也是用相似的方法进行处理，总体而言，流动性越好（表现为单位价格的冲击成本较低）、价格传导性越低（对其他股票的冲击较小）的股票会在算法模型中以较快的速度被交易，而流动性较差的和价格传导性强的股票的大部分交易会在整个时段的后期进行。

在实际应用中，基于股票组合的算法模型将被包含在策略交易平台的算法模块中，我们通过历史数据计算出所有 A 股的 Γ 矩阵、H 矩阵以及方差-协方差矩阵，并定期轮动数据进行更新。这些参数和股票的其他信息均保存在算法服务器中，可随时调用，交易员只需照常输入想要交易股票的信息，算法模块即可自动计算出均值-方差最优交易序列并将拆单信息返还到交易模块。

分析师声明

负责准备本报告以及撰写本报告的所有研究分析师或工作人员在此保证，本研究报告中关于任何发行商或证券所发表的观点均如实反映分析人员的个人观点。负责准备本报告的分析师获取报酬的评判因素包括研究的质量和准确性、客户的反馈、竞争性因素以及光大证券股份有限公司的整体收益。所有研究分析师或工作人员保证他们报酬的任何一部分不曾与，不与，也将不会与本报告中具体的推荐意见或观点有直接或间接的联系。

分析师介绍

刘道明，光大证券研究所金融工程研究部副总经理，金融工程研究负责人。主要研究方向：行为金融与文本挖掘，著有面向金融投资的文本挖掘专门网站 www.chinesecloud.net。

倪蕴韬，瑞典哥德堡大学金融学硕士,复旦大学世界经济系学士，2010 年加入光大证券研究所任金融工程分析师。主要研究方向：投资时钟量化框架、算法交易、高频策略。

行业及公司评级体系

买入—未来 6-12 个月的投资收益率领先市场基准指数 15%以上；
增持—未来 6-12 个月的投资收益率领先市场基准指数 5%至 15%；
中性—未来 6-12 个月的投资收益率与市场基准指数的变动幅度相差-5%至 5%；
减持—未来 6-12 个月的投资收益率落后市场基准指数 5%至 15%；
卖出—未来 6-12 个月的投资收益率落后市场基准指数 15%以上。
市场基准指数为沪深 300 指数。

特别声明

光大证券股份有限公司（以下简称“本公司”）创建于1996年，系由中国光大（集团）总公司投资控股的全国性综合类股份制证券公司，是中国证监会批准的首批三家创新试点公司之一。公司经营业务许可证编号：z22831000。

本公司已获业务资格：证券经纪；证券投资咨询；与证券交易、证券投资活动有关的财务顾问；证券承销与保荐；证券自营；证券资产管理；为期货公司提供中间介绍业务；证券投资基金代销；融资融券业务；中国证监会批准的其他业务。

本证券研究报告由光大证券股份有限公司研究所（以下简称“光大证券研究所”）编写，以合法获得的我们相信为可靠、准确、完整的信息为基础，但不保证我们所获得的原始信息以及报告所载信息之准确性和完整性。光大证券研究所可能将不时补充、修订或更新有关信息，但不保证及时发布该等更新。

本报告根据中华人民共和国法律在中华人民共和国境内分发，仅供本公司的客户使用。

本报告中的资料、意见、预测均反映报告初次发布时光大证券研究所的判断，可能需随时进行调整。报告中的信息或所表达的意见不构成任何投资、法律、会计或税务方面的最终操作建议，本公司不就任何人依据报告中的内容而最终操作建议作出任何形式的保证和承诺。

在法律允许的情况下，本公司及其附属机构可能持有报告中提及的公司所发行证券的头寸并进行交易，也可能为这些公司提供或正在争取提供投资银行、财务顾问或金融产品等相关服务。投资者应当充分考虑本公司及本公司附属机构就报告内容可能存在的利益冲突，不应视本报告为作出投资决策的唯一参考因素。

在任何情况下，本报告中的信息或所表达的建议并不构成对任何投资人的投资建议，本公司及其附属机构（包括光大证券研究所）不对投资者买卖有关公司股份而产生的盈亏承担责任。

本公司的销售人员、交易人员和其他专业人员可能会向客户提供与本报告中观点不同的口头或书面评论或交易策略。本公司的资产管理部和投资业务部可能会作出与本报告的推荐不相一致的投资决策。本公司提醒投资者注意并理解投资证券及投资产品存在的风险，在作出投资决策前，建议投资者务必向专业人士咨询并谨慎抉择。

光大证券股份有限公司研究所

上海市新闸路 1508 号静安国际广场 3 楼　邮编 200040

总机：021-22169999　传真：021-22169114

销售交易团队	姓名	办公电话	手机	电子邮件
北京	王汗青(总经理)	010-68567189	13501136670	wanghq@ebscn.com
	郝辉	010-68561722	13511017986	haohui@ebscn.com
	黄怡	010-68561506	13699271001	huangyi@ebscn.com
	梁晨	010-56513153	13901184256	liangchen@ebscn.com
企业客户	孙威(执行董事)	010-68567231	13701026120	sunwei@ebscn.com
	吴江	010-68561595	13718402651	wujiang@ebscn.com
	杨月	010-68561606	18910037319	yangyue1@ebscn.com
	顾超	021-22169485	18616658309	guchao@ebscn.com
上海	李大志(销售交易部总经理助理)	021-22169128	13810794466	lidz@ebscn.com
	严非(执行董事)	021-22169086	13127948482	yanfei@ebscn.com
	王宇	021-22169131	18616755888	wangyu1@ebscn.com
	周薇薇	021-22169087	13671735383	zhouww1@ebscn.com
	徐又丰	021-22169082	13917191862	xuyf@ebscn.com
	韩佳	021-22169491	13761273612	hanjia@ebscn.com
	冯诚	021-22169083	18616830416	fengcheng@ebscn.com
深圳	黎晓宇(副总经理)	0755-83024434	13823771340	lixy1@ebscn.com
	黄鹂华(执行董事)	0755-83024396	13802266623	huanglh@ebscn.com
	张晓峰	0755-83024431	13926576680	zhangxf@ebscn.com
	江虹	0755-83024029	13810482013	jianghong1@ebscn.com
	罗德锦	0755-83024064	13609618940	luodj@ebscn.com
富尊财富中心	濮维娜(副总经理)	021-62152373	13611990668	puwn@ebscn.com
	陶奕	021-62152393	13788947019	taoyi@ebscn.com
	戚德文	021-22169152	15821755866	qidw@ebscn.com