方正证券
FOUNDER SECURITIES

富贵何须险中求--期权无风险套利研究

期权研究专题报告

金融工程专题报告
2015.05.21

方正证券研究所证券研究报告

金融工程首席分析师：高子剑
执业证书编号：S1220514090003
TEL：021-68386225
E-mail：gaozijian@foundersc.com

金融工程高级分析师：楼华锋
执业证书编号：S1220514080011
TEL：021-50432679
E-mail：louhuafeng@foundersc.com

联系人：陶勤英
TEL：021-58435536
E-mail：taoqinying@foundersc.com

相关研究

请务必阅读最后特别声明与免责条款

报告摘要

- 期权无风险套利机会的产生来源于期权价格的错估，即期权违背了无套利价格（区间），从而造成期权本身价格或者相对价格的平衡关系被打破。
- 期权无风险套利原理简单，其模式容易被复制，因此发现转瞬即逝的套利机会并尽可能迅速触发下单成为成功套利的关键。我们对**无风险套利监控系统进行了优化**以达到“精准监控、迅速触发”的监控目标。
- 我们将不同套利策略所涉及的合约数量及特点总结如下：
  - 边界套利涉及单个期权合约
  - 垂直价差套利涉及两个同方向的期权合约
  - 凸性套利涉及到三个同方向的期权合约
  - 平价套利涉及相同行权价格的两个反方向合约
  - 盒式套利涉及两组相同行权价格的看涨、看跌期权组合
- 根据期权价格曲线的特征，将无风险套利监控系统**从“对所有期权合约进行遍历监控”优化为“对部分期权合约进行监控”**从而有效减少运算负荷。

触发单个期权下边界套利 → 触发垂直价差上边界套利

触发单个期权上边界套利 → 触发垂直价差下边界套利

触发垂直价差上边界套利 → 触发凸性套利

触发垂直价差下边界套利 → 触发凸性套利

目 录

1. 期权无风险套利理论基础

1.1 期权无风险套利的本质与类别

无套利原理是金融经济学理论中最重要的原理之一。根据无套利原理，利用相对定价法，我们可以获得诸多衍生产品的理论价格，即无套利价格。考虑交易成本、市场冲击成本等交易摩擦因素，我们可以在无套利价格的基础上获得无套利区间。套利机会源于资产价格偏离于无套利区间。当套利机会出现时，我们利用衍生品到期结算的属性，在到期日实现无风险套利利润。将无套利原理应用到期权市场中，我们可以开发基于期权的无风险套利策略。**从本质上来说，期权无风险套利机会的产生来源于价格错估，即期权价格违背了无套利价格（区间）。**

那么，为何无风险套利策略在期权交易中备受关注呢？原因归纳起来有如下几点：第一，同一标的资产对应的期权合约往往数以十计，甚至数以百计，如此多的合约同时在市场交易，合约价格之间的相对关系被打破的机会较多；第二，期权精确定价难度较高，较容易出现价格错估；第三，无风险套利机会意味可以获得“万无一失”的利润。

通常，期权套利策略涉及期权、现货、期货之间的无套利关系。根据期权价格的无套利关系，我们可以构建基于“期权-标的资产”、“看涨期权-看跌期权”、“看涨期权-看涨期权”、“看跌期权-看跌期权”等多样化的套利监控体系，捕捉市场中可能出现的无风险套利机会。

另外，**无风险套利机会跟期权定价模型的选择无关，只与期权价格本身的特性相关**，即期权无风险套利模型的构造均基于期权价格的性质。而期权的非线性回报以及波动率挂钩特质，使得基于期权的套利策略较为复杂，形式上也灵活多变。根据套利机会所遵循的期权价格属性的不同，**我们将期权无风险套利机会划分为边界套利、垂直价差套利、凸性套利以及平价套利四种类别**。接下来我们将依次介绍这四类套利策略。

要注意的一点是，在本章节中，我们将忽略现实套利操作中交易成本、冲击成本等交易摩擦因素，并且不考虑标的资产分红的情况。前者意味着无套利价格拓宽为一个无套利区间，后者意味着无套利价格需要考虑红利现值。我们所讨论的期权类型全部为场内欧式期权。

1.2 边界套利

期权的边界套利是指由于期权的市场价格高于（低于）其理论价格上限（下限）而产生的套利机会。具体而言，边界套利可分为

看涨边界套利与看跌边界套利。

1、看涨期权边界套利

无红利欧式看涨期权理论价格应满足

$$max(S-Ke^{-rT},0)<C<S$$

即期权理论价格的下限是期权的内在价值，上限是标的资产现价。如果期权市价超出了这两者所限定的理论价格区间，那么就产生了无风险套利机会。具体分为以下两种情形：

（1）看涨期权价格超过理论上限：$C>S$

这意味着期权价格被高估，我们可以卖出看涨期权，买入标的资产，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 1：无风险套利策略现金流量表

时间点	卖出看涨期权	买入股票	存款账户	现金流总和
$t=0$	$+C$	$-S$	$-(C-S)$	0
$t=T \quad S_T>K$	$-S_T+K$	S_T	$(C-S)\times e^{rT}$	$K+(C-S)\times e^{rT}$
$t=T \quad S_T<K$	0	S_T	$(C-S)\times e^{rT}$	$S_T+(C-S)\times e^{rT}$

注：现金流量表中符号的含义如下：对于期权或标的物，正号代表卖出期权、标的物对应的现金流入；负号代表买入期权、标的物对应的现金流出；对于存款账户，正号代表取出存款，负号代表存入存款；对于贷款账户，正号代表借入贷款，负号代表偿还贷款。下同。

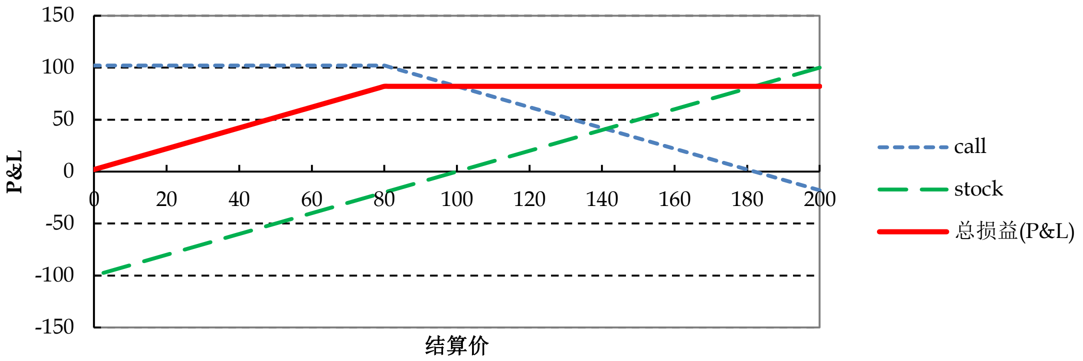
【范例】考虑股票 A 及其期权，二者市场价格如下：

S=100, 80 Call @ 102

（注：S 代表股票 A，市场价格 100 元；80 Call @ 102 代表行权价为 80 元的期权的市场价格是 102 元，下文的期权报价方式与此相同）

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 2：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

（2）看涨期权价格低于理论下限：$C < max(S - Ke^{-rT}, 0)$

这意味着期权价格被低估，我们可以买入看涨期权，做空标的资产，同时投资无风险资产，即相当于合成了看跌期权多头。持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 3：无风险套利策略现金流量表

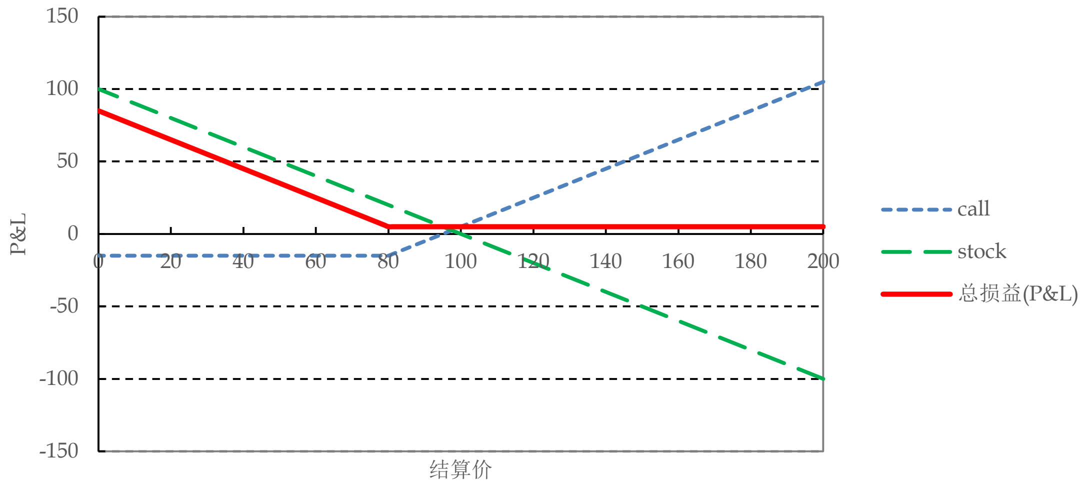
时间点	买入看涨期权	卖出股票	存款账户	现金流总和
$t=0$	$-C$	$+S$	$-(S-C)$	0
$t=T\quad S_T>K$	S_T-K	$-S_T$	$(S-C)\times e^{rT}$	$(S-C)\times e^{rT}-K$
$t=T\quad S_T<K$	0	$-S_T$	$(S-C)\times e^{rT}$	$(S-C)\times e^{rT}-S_T$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格 80 Call @ 15, S=100

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 4：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

2、看跌期权边界套利

无红利欧式看跌期权理论价格应满足

$$max(Ke^{-rT}-S,0)<P<K$$

即期权理论价格的下限是期权内在价值，上限是期权行权价格。如果期权市价超出了这两者所限定的理论价格区间，那么就产生了无风险套利机会。具体分为以下两种情形：

（1）看跌期权价格超过理论上限：$P>K$

这意味着期权被高估，我们可以卖出看跌期权，将所得收入投资无风险资产，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 5：无风险套利策略现金流量表

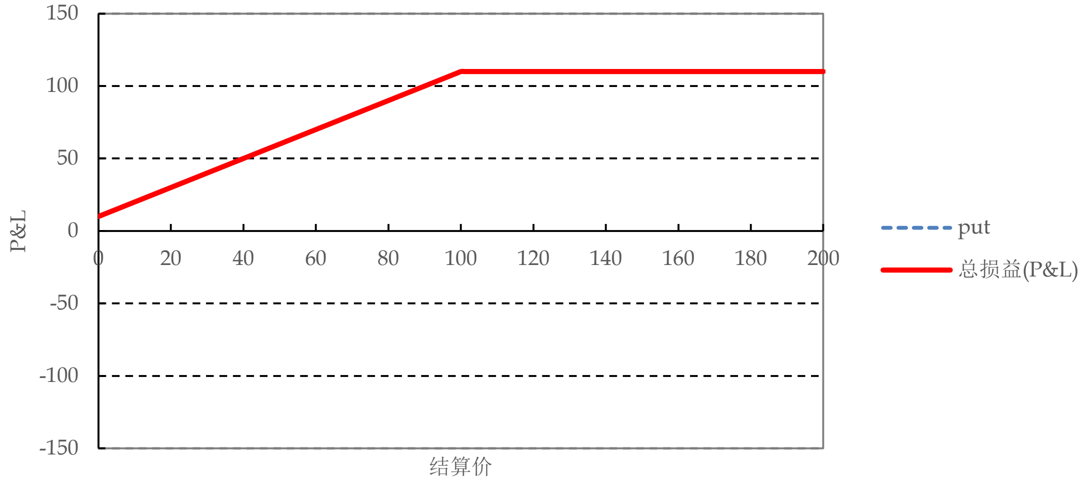
时间点	卖出看跌期权	存款账户	现金流总和
$t=0$	$+P$	$-P$	0
$t=T\quad S_T>K$	0	$P\times e^{rT}$	$P\times e^{rT}$
$t=T\quad S_T<K$	S_T-K	$P\times e^{rT}$	$S_T-K+P\times e^{rT}$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格 100 Put @ 110

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 6：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

（2）看跌期权价格低于理论下限：$P < max(Ke^{-rT} - S, 0)$

当期权价格低于理论下限，意味着期权被低估，我们可以借入所需资金，同时买入看跌期权和标的资产，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 7：无风险套利策略现金流量表

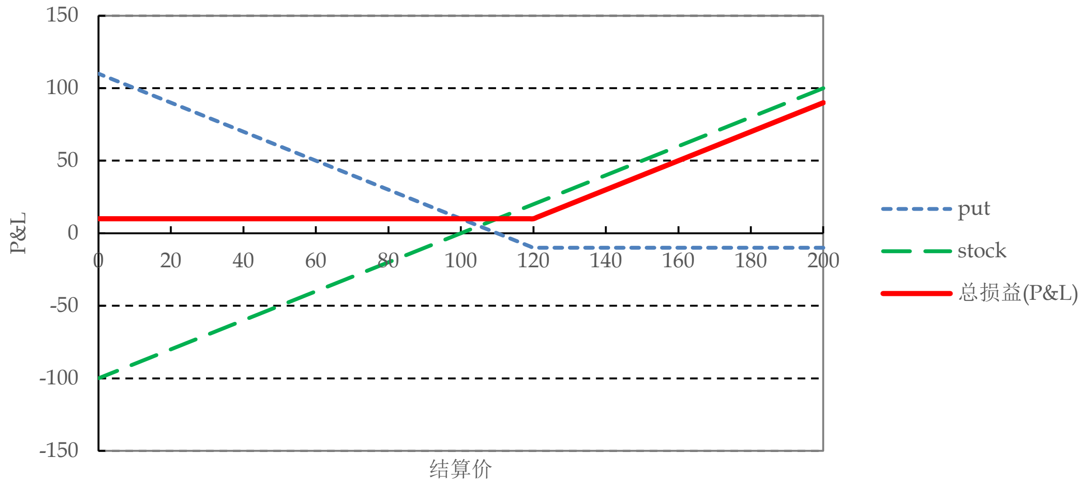
时间点	买入看跌期权	买入股票	贷款账户	现金流总和
$t=0$	$-P$	$-S$	$S+P$	0
$t=T\quad S_T>K$	0	S_T	$-(S+P)\times e^{rT}$	$S_T-(S+P)\times e^{rT}$
$t=T\quad S_T<K$	$K-S_T$	S_T	$-(S+P)\times e^{rT}$	$K-(S+P)\times e^{rT}$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格 120 Put @ 10, S=100

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 8：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

3、期权边界套利小结

图表 9：边界套利总结

套利类型	无套利条件	套利机会（理论上）
看涨期权	$max(S-K\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{rT}},0)<C<S$	$C-S>0$
		$max(S-K\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{rT}},0)-C>0$
看跌期权	$max(K\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{rT}}-S,0)<P<K$	$P-K>0$
		$max(K\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{rT}}-S,0)-P>0$

资料来源：方正证券研究所

1.3 垂直价差套利

同单个期权的边界套利原理一致，由两个相同到期日、不同行权价的同类型期权组成的价差期权也有理论价格上下限。

1、看涨期权垂直价差套利

看涨期权价差组合应满足

$$0 < C_1 - C_2 < (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

其中，C_1和C_2分别对应行权价格为K_1和K_2（$K_1 < K_2$）的看涨期权。右边不等式描述的是，价差期权（多方）的理论价格应严格小于其内涵期权的行权价之差。左边不等式也可以理解为低行权价的看涨期权价格要高于高行权价的同期限看涨期权。

（1）看涨期权垂直价差一旦超过上界

如果$C_1 - C_2 \geq (K_2 - K_1)e^{-rT}$，即看涨垂直价差组合被高估，那么我们可以做空价差期权，同时投资无风险资产，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 10：无风险套利策略现金流量表

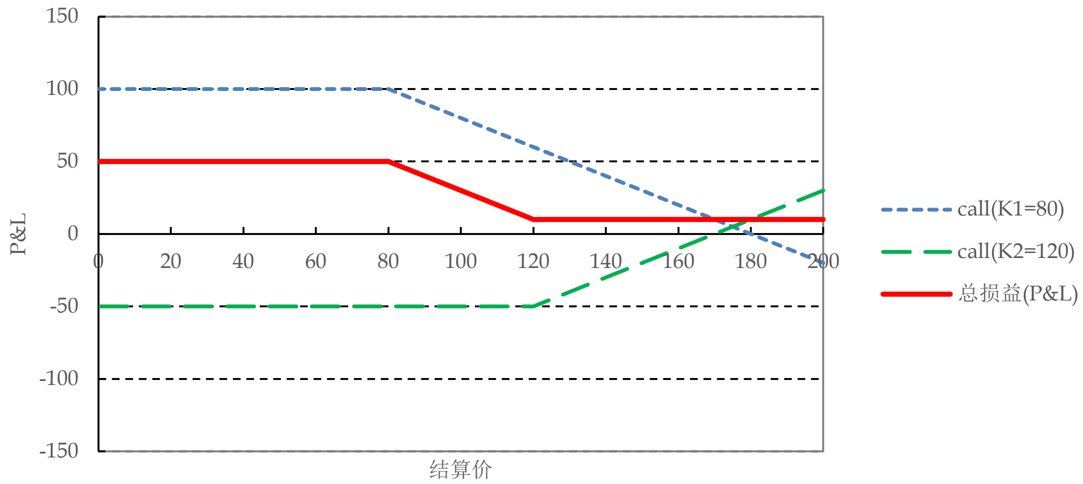
时间点	卖出看涨期权 K_1	买入看涨期权 K_2	存款账户	现金流总和
$t=0$	$+C_1$	$-C_2$	$-(C_1-C_2)$	0
$t=T$ $S_T>K_2$	$-S_T+K_1$	S_T-K_2	$(C_1-C_2)\times e^{rT}$	K_1-K_2+ $(C_1-C_2)\times e^{rT}$
$t=T$ $K_1<S_T<K_2$	$-S_T+K_1$	0	$(C_1-C_2)\times e^{rT}$	K_1-S_T+ $(C_1-C_2)\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T<K_1$	0	0	$(C_1-C_2)\times e^{rT}$	$(C_1-C_2)\times e^{rT}$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格 80 Call @ 100, 120 Call @ 50

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 11：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

（2）看涨期权垂直价差一旦低于下界

如果$C_1 - C_2 < 0$，即低行权价的看涨期权价格要低于高行权价的同期限看涨期权，这意味着低行权价的看涨期权被低估，我们可以通过做多低行权价的看涨期权、做空高行权价的看涨期权，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 12：无风险套利策略现金流量表

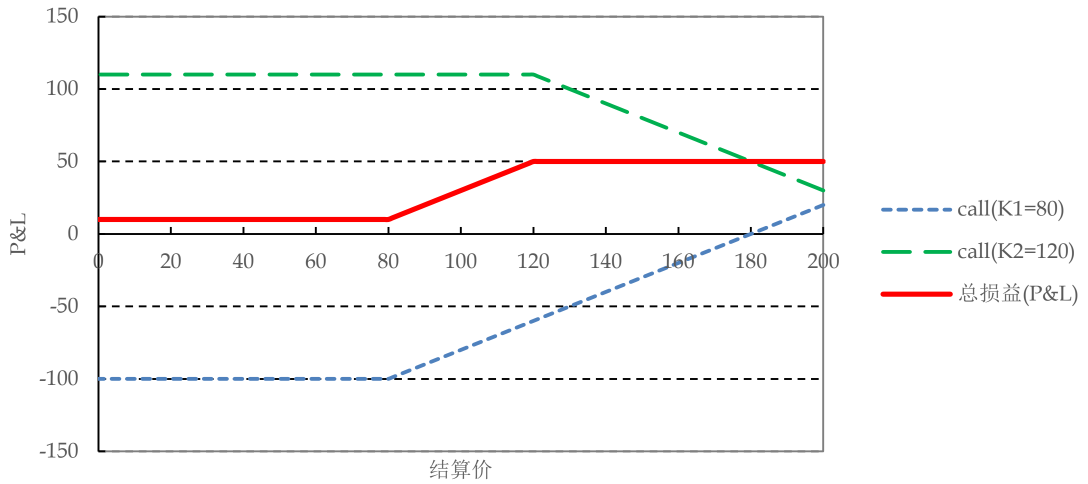
时间点	买入看涨期权 K_1	卖出看涨期权 K_2	存款账户	现金流总和
$t=0$	$-C_1$	$+C_2$	$-(C_2-C_1)$	0
$t=T$ $S_T>K_2$	S_T-K_1	$-S_T+K_2$	$(C_2-C_1)\times e^{rT}$	K_2-K_1+ $(C_2-C_1)\times e^{rT}$
$t=T$ $K_1<S_T<K_2$	S_T-K_1	0	$(C_2-C_1)\times e^{rT}$	S_T-K_1+ $(C_2-C_1)\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T<K_1$	0	0	$(C_2-C_1)\times e^{rT}$	$(C_2-C_1)\times e^{rT}$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格 80 Call @ 100, 120 Call @ 110

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 13：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

2、看跌期权垂直价差套利

由看跌期权构成的价差组合应满足

$$0 < P_2 - P_1 < (K_2 - K_1)e^{-rT}$$

（1）看跌期权垂直价差一旦超过上界

如果$P_2 - P_1 \geq (K_2 - K_1)e^{-rT}$，即看跌垂直价差组合被高估，那么我们可以做空价差期权，同时投资无风险资产，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 14：无风险套利策略现金流量表

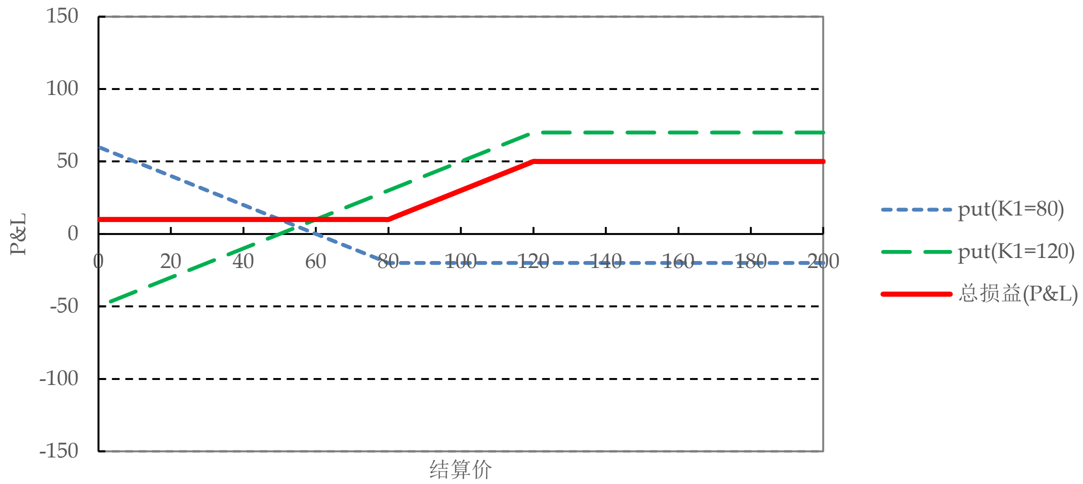
时间点	买入看跌期权 K_1	卖出看跌期权 K_2	存款账户	现金流总和
$t=0$	$-P_1$	$+P_2$	$-(P_2-P_1)$	0
$t=T$ $S_T>K_2$	0	0	$(P_2-P_1)\times e^{rT}$	$(P_2-P_1)\times e^{rT}$
$t=T$ $K_1<S_T<K_2$	0	S_T-K_2	$(P_2-P_1)\times e^{rT}$	S_T-K_2+ $(P_2-P_1)\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T<K_1$	$-S_T+K_1$	S_T-K_2	$(P_2-P_1)\times e^{rT}$	K_1-K_2+ $(P_2-P_1)\times e^{rT}$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格 80 Put @ 20, 120Put @ 70

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 15：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

（2）看跌期权垂直价差一旦低于下界

如果$P_2 - P_1 < 0$，即低行权价的看跌期权价格要高于高行权价的同期限看跌期权，这意味着低行权价期权被高估，我们可以通过做空低行权价期权、做多高行权价期权，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。套利操作现金流量表如下所示：

图表 16：无风险套利策略现金流量表

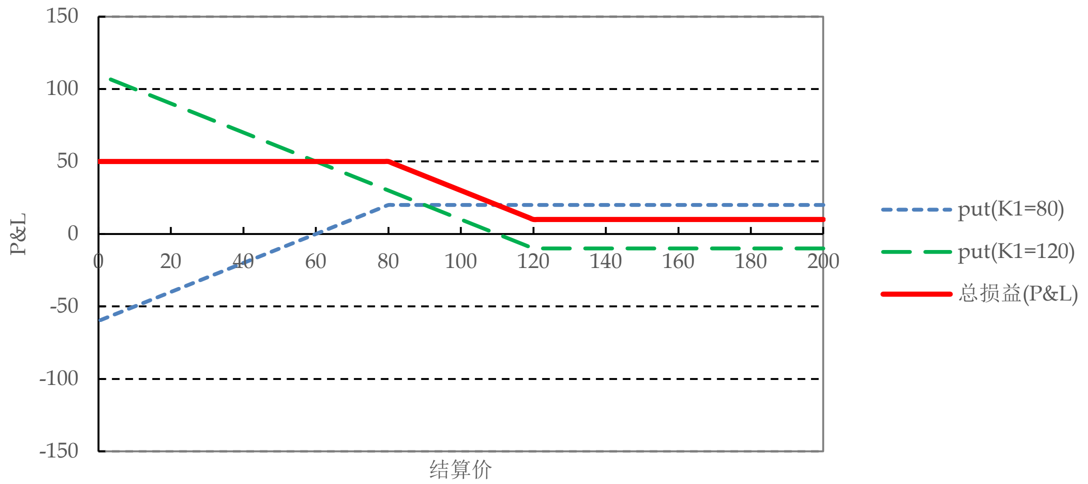
时间点	卖出看跌期权 K_1	买入看跌期权 K_2	存款账户	现金流总和
$t=0$	$+P_1$	$-P_2$	$-(P_1-P_2)$	0
$t=T$ $S_T>K_2$	0	0	$(P_1-P_2)\times e^{rT}$	$(P_1-P_2)\times e^{rT}$
$t=T$ $K_1<S_T<K_2$	0	K_2-S_T	$(P_1-P_2)\times e^{rT}$	K_2-S_T+ $(P_1-P_2)\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T<K_1$	S_T-K_1	K_2-S_T	$(P_1-P_2)\times e^{rT}$	K_2-K_1+ $(P_1-P_2)\times e^{rT}$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格 80 Put @ 20, 120Put @ 10

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 17：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

3、垂直价差套利小结

图表 18：边界套利总结

套利类型	无套利条件	套利机会（理论上）
看涨期权垂直价差	$0 < C_1 - C_2 < (K_2 - K_1)e^{-rT}$	$C_1 - C_2 < 0$
		$C_1 - C_2 \geq (K_2 - K_1)e^{-rT}$
看跌期权垂直价差	$0 < P_2 - P_1 < (K_2 - K_1)e^{-rT}$	$P_2 - P_1 < 0$
		$P_2 - P_1 \geq (K_2 - K_1)e^{-rT}$

资料来源：方正证券研究所

1.4 凸性套利

期权的凸性套利策略是指利用同期限期权的理论价格是其行权价的凸函数这一性质来判断套利机会。考虑同期限的行权价分别为K_1、K_2和K_3的三只看涨期权C_1、C_2和C_3，以及三只看跌期权P_1、P_2和P_3，其理论价格应满足如下关系

$$C_1 + \lambda \cdot C_3 > (1+\lambda)C_2$$

$$P_1 + \lambda \cdot P_3 > (1+\lambda)P_2$$

其中，$\lambda = \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1}$.

如果这一关系被打破，就意味着无风险套利机会的存在。

（1）看涨期权凸性关系被打破

如果$C_1 + \lambda \cdot C_3 < (1+\lambda)C_2$，那么套利策略如下表所示：

图表 19：无风险套利策略现金流量表

时间点	买入 1 份看涨期权 K_1	卖出(1+λ)看涨期权 K_2	买进 λ 份看涨期权 K_3	存款账户	现金流总和
$t=0$	$-C_1$	$+(1+\lambda)C_2$	$-\lambda C_3$	$-[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]$	0
$t=T$ $K_3<S_T$	(S_T-K_1)	$(1+\lambda)(-S_T+K_2)$	$\lambda\times(S_T-K_3)$	$[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$	$[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$
$t=T$ $K_2<S_T<K_3$	(S_T-K_1)	$(1+\lambda)(-S_T+K_2)$	0	$[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$	$\lambda(K_3-S_T)$ $+[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$
$t=T$ $K_1<S_T<K_2$	(S_T-K_1)	0	0	$[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$	(S_T-K_1) $+[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T<K_1$	0	0	0	$[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$	$[(1+\lambda)C_2-C_1-\lambda C_3]\times e^{rT}$

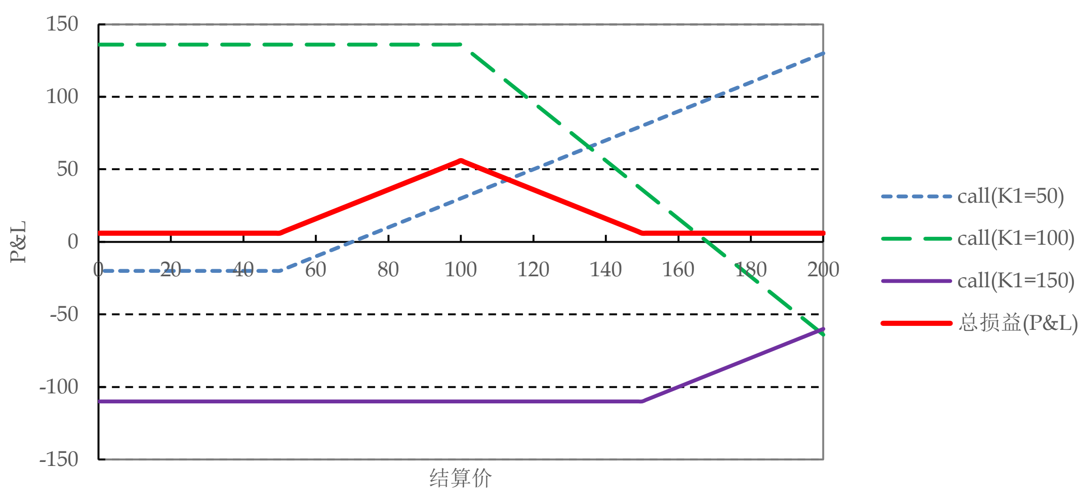
资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格如下：

K	50	100	150
Call Price	110	68	20
Position	+1	-2	+1

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 20：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

（2）看跌期权凸性关系被打破

如果$P_1+\lambda\cdot P_3<(1+\lambda)P_2$，那么套利策略如下表所示：

图表 21：无风险套利策略现金流量表

时间点	买入 1 份看跌期权 K_1	卖出(1+λ)看跌期权 K_2	买入 λ 份看跌期权 K_3	存款账户	现金流总和
$t=0$	$-P_1$	$(1+\lambda)P_2$	$-\lambda P_3$	$-[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]$	0
$t=T$ $K_3<S_T$	0	0	0	$[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$	$[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$
$t=T$ $K_2<S_T<K_3$	0	0	$\lambda(K_3-S_T)$	$[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$	$\lambda(K_3-S_T)$ $+[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$
$t=T$ $K_1<S_T<K_2$	0	$-(1+\lambda)(K_2-S_T)$	$\lambda(K_3-S_T)$	$[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$	(S_T-K_1) $+[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T<K_1$	(K_1-S_T)	$-(1+\lambda)(K_2-S_T)$	$\lambda(K_3-S_T)$	$[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$	$[(1+\lambda)P_2-P_1-\lambda P_3]\times e^{rT}$

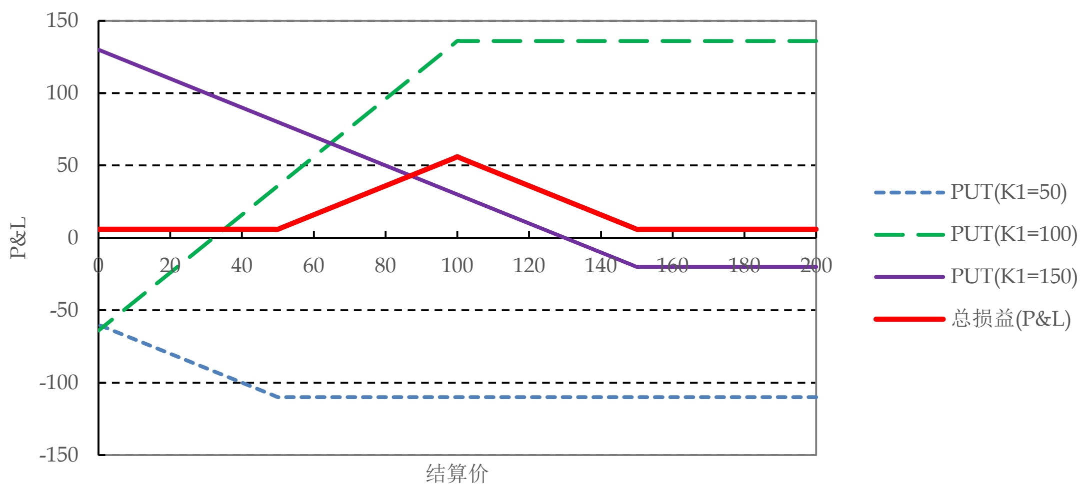
资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格如下：

K	50	100	150
Put Price	20	68	110
Position	+1	-2	+1

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 22：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

1.5 平价套利

1、Put-Call Parity（看跌-看涨期权平价公式）

对于相同标的资产、相同到期日、相同行权价格的无收益欧式看涨期权和看跌期权来说，二者满足如下平价关系：

$$C + Ke^{-rT} = P + S$$

其中，C、P和S均为t时刻的价格，期权到期日为T。

这个关系通常被称为 Put-Call Parity，即欧式期权的看跌-看涨期权平价公式。其原理很简单，即可将等式的左右两边都认为是两个投资组合，左边的代表一份看涨期权和Ke^{-rT}数量的现金，右边的代表一份看跌期权和一份标的资产（这里注意看跌期权和标的资产），两者到期的价值均为$max(S_T, K)$，在其他条件相同的情况下，根据无套利原理，两者的现值也相等。

另外，看跌-看涨期权平价公式也可以写成如下形式：

$$C - P = S - Ke^{-rT}$$

从投资组合的角度，等式左边相当于用看涨期权和看跌期权合成了一份持有成本为 K 切剩余期限为 T 的期货多头，而等式右边就是这一期货头寸的价值。当看跌-看涨期权平价关系被打破时，便出现了无风险套利机会。

2、正向套利

当$C - P > S - Ke^{-rT}$的关系出现时，平价关系被打破，我们进行的套利策略即为正向套利，具体操作如下：买入看跌期权并卖出看涨期权，同时融资Ke^{-rT}买入现货。不考虑保证金的情况下，起初即可获得正现金流，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。

图表 23：无风险套利策略现金流量表

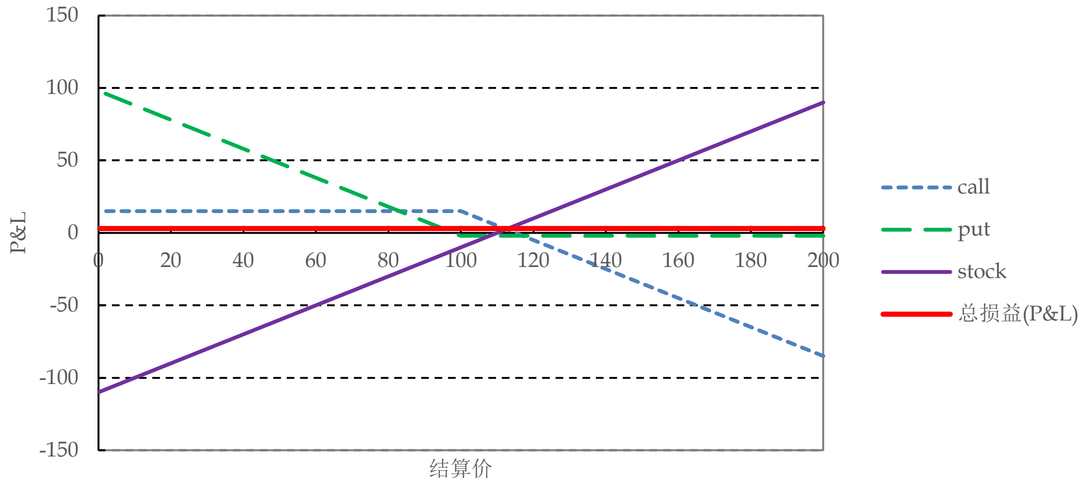
	买入看跌期权	卖出看涨期权	买入股票	存款账户	现金流总和
$t=0$	$-P$	$+C$	$-S$	$-(C-P-S)$	0
$t=T$ $S_T<K$	$K-S_T$	0	S_T	$(C-P-S)\times e^{rT}$	$K+(C-P-S)\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T>K$	0	$-S_T+K$	S_T	$(C-P-S)\times e^{rT}$	$K+(C-P-S)\times e^{rT}$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格如下：100Put @ 3、100Call @ 15、S @110

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 24：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

3、反向套利

当$C-P<S-Ke^{-rT}$的关系出现时，平价关系被打破，我们进行的套利策略即为反向套利，具体操作如下：买入看涨期权并卖出看跌期权，同时融券卖出现货，然后投资无风险资产。不考虑保证金的情况下，起初即可获得正现金流，持有这一组合到期，即可获取无风险收益。

图表 25：无风险套利策略现金流量表

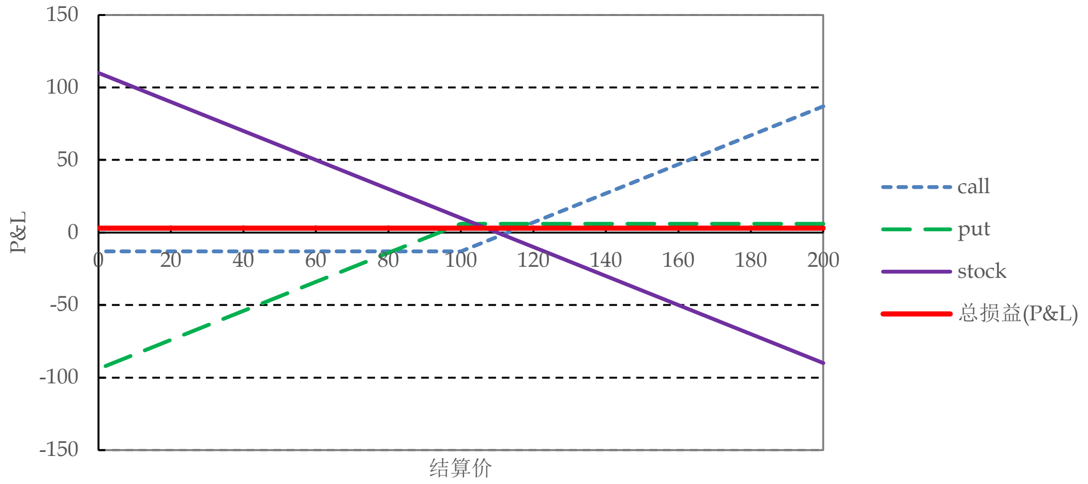
	卖出看跌期权	买入看涨期权	卖出股票	存款	现金流总和
$t=0$	$+P$	$-C$	$+S$	$+(C-P-S)$	0
$t=T$ $S_T<K$	$-K+S_T$	0	$-S_T$	$-(C-P-S)\times e^{rT}$	$-K-(C-P-S)\times erT$
$t=T$ $S_T>K$	0	S_T-K	$-S_T$	$-(C-P-S)\times e^{rT}$	$-K-(C-P-S)\times erT$

资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格如下：100Put @ 6、100Call @ 13、S @110

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 26：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

4、盒式价差套利

盒式价差套利策略源于盒式价差期权组合（Box Spread）的实际价格与理论价格的偏离。无套利条件下，根据看涨-看跌期权的平价公式我们有如下关系成立：

$$S = C_1 - P_1 + K_1 \cdot e^{-rT} = C_2 - P_2 + K_2 \cdot e^{-rT}$$

其中，C_1、P_1分别代表行权价格K_1的看涨期权和看跌期权，C_2、P_2分别代表行权价格K_2的看涨期权和看跌期权，并且这四份期权的到期期限一致。该平价关系可视为两个不同行权价格期权平价关系的叠加（假设$K_2 > K_1$），也可以写成

$$C_1 - C_2 + P_2 - P_1 = (K_2 - K_1) \cdot e^{-rT}$$

此时，等式左边相当于买入由看涨期权组成的牛市价差期权，同时买入由看跌期权组成的熊市价差期权；等式右边相当于一笔无风险投资的现值。

当该平价关系被打破时，便可进行无风险套利，具体分如下两种情况：

当$C_1 - C_2 + P_2 - P_1 < (K_2 - K_1) \cdot e^{-rT}$时，我们可以借入现金来买入牛市价差期权（即买入$C_1$并卖出$C_2$），同时买入熊市价差期权（即买入$P2$并卖出$P1$），持有这一组合到期，并在到期结清头寸，即可获取无风险收益。

当$C_1 - C_2 + P_2 - P_1 > (K_2 - K_1) \cdot e^{-rT}$时，我们卖出牛市价差期

权（即卖出C_1并买入C_2），同时卖出熊市价差期权（即卖出P_2并买入P_1），将所得权利金收入投资于无风险资产，持有这一组合到期，并在到期结清头寸，即可获取无风险收益。

以$C_1-C_2+P_2-P_1<(K_2-K_1)\cdot e^{-rT}$为例，其套利现金流量表如下：

图表 27：无风险套利策略现金流量表

	买入看涨期权 K_1	卖出看跌期权 K_1	卖出看涨期权 K_2	买入看跌期权 K_2	存款	现金流总和
$t=0$	$-C_1$	$+P_1$	$+C_2$	$-P_2$	$-(-C_1+C_2+P_1-P_2)$	0
$t=T$ $S_T>K_2$	S_T-K_1	0	$-S_T+K_2$	0	$(-C_1+C_2+P_1-P_2)\times e^{rT}$	K_2-K_1+ $(-C_1+C_2+P_1-P_2)\times e^{rT}$
$t=T$ $K_1<S_T<K_2$	S_T-K_1	0	0	K_2-S_T	$(-C_1+C_2+P_1-P_2)\times e^{rT}$	K_2-K_1+ $(-C_1+C_2+P_1-P_2)\times e^{rT}$
$t=T$ $S_T<K_1$	0	S_T-K_1	0	K_2-S_T	$(-C_1+C_2+P_1-P_2)\times e^{rT}$	K_2-K_1+ $(-C_1+C_2+P_1-P_2)\times e^{rT}$

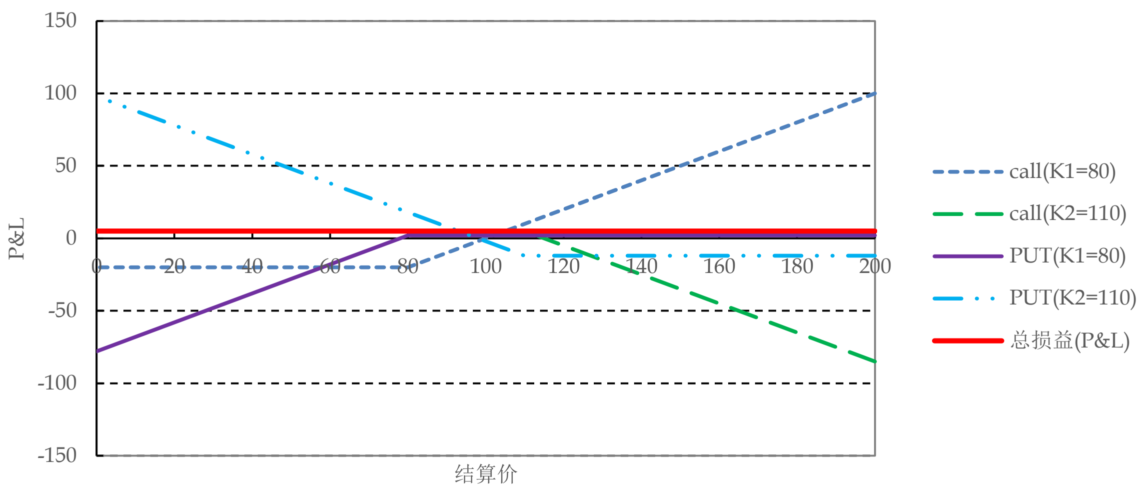
资料来源：方正证券研究所

【范例】市场价格如下：

80 Put @ 2、80 Call @ 20 、110Put @ 12、110Call @ 5、S @100

易知存在无风险套利机会，策略到期盈亏如下图所示：

图表 28：无风险套利策略到期盈亏图



数据来源：方正证券研究所

5、平价套利小结

图表 29：平价套利总结

套利类型	无套利条件	套利机会（理论上）
Put-Call Parity	$C+Ke^{-rT}=P+S$ $OR\ \ C-P=S-Ke^{-r(T-t)}$	正向套 C$-P>S-Ke^{-rT}$
		反向套利 $C-P<S-Ke^{-rT}$
盒式价差套利	$C_1-P_1+K_1\cdot e^{-rT}=C_2-P_2+K_2\cdot e^{-rT}$ $OR\ \ C_1-C_2+P_2-P_1=(K_2-K_1)\cdot e^{-rT}$	$C_1-C_2+P_2-P_1<(K_2-K_1)\cdot e^{-rT}$
		$C_1-C_2+P_2-P_1>(K_2-K_1)\cdot e^{-rT}$

资料来源：方正证券研究所

2. 期权无风险套利监控系统设计及优化方案

虽然期权市场潜藏着各类无风险套利机会，但套利者的存在让大部分机会转瞬即逝。交易摩擦因素的存在也增加了套利者的成本。要想捕捉并实现套利，需要完善的套利监测系统。通过监测期权与现货、期权与期货、期权之间的各类无套利关系，来发掘潜在的套利机会。本章内容将详细介绍期权无风险套利监控设计机制。

2.1 期权无风险套利监控的特点

期权无风险套利原理简单易懂，模式很容易被复制，所以最为关键的一点是要敏锐地发现转瞬即逝的套利机会，并尽可能迅速地触发下单。接下来我们将分析期权无风险套利监控模式的特点，从而发掘其优化的空间，以达到“精准监控、迅速触发”的监控目标。

首先，我们将不同套利策略所涉及的合约数量及特点总结如下：

- 边界套利涉及单个期权合约
- 垂直价差套利涉及两个同方向的期权合约
- 凸性套利涉及到三个同方向的期权合约
- 平价套利涉及相同行权价格的两个反方向合约
- 盒式套利涉及两组相同行权价格的看涨、看跌期权组合

然后，我们以 3 月 24 日的上证 50ETF 期权市场为例（当日市场中存在 13 个行权价格与 4 个到期月份），统计得到无风险套利策略合约数量如下：

- 边界套利：需遍历$4\times2\times13$，即 104 个合约；
- 垂直价差套利：需遍历$4\times2\times \mathrm{C}_{13}^{2}$，即 624 对组合；

- 凸性套利：需遍历$4\times2\times C_{13}^{3}$，即 2288 对组合；
- 平价套利：需遍历4×13，即 52 对组合；
- 盒式套利：需遍历$4\times C_{13}^{2}$，即 312 对组合。

2.2 不同无风险套利类别之间的关联

从上述统计数据来看，垂直价差套利与凸性套利需要遍历较多的期权合约，这无疑降低了我们发现套利机会的速度。所以，我们有必要进一步探寻不同无风险套利类别之间可能存在的关联性。经过理论分析，我们得到了如下结论，如图 30 所示。接下来我们将分别推导这四类关联性。注意，为了简化分析，我们只论证了看涨期权对应的情形，利用看跌期权可以完全复制此分析思路。

符号说明如下：我们用C_1、C_2、C_3、...表示行权价格为K_1、K_2、K_3、⋯的看涨期权合约价格，其中K_1、K_2、K_3、...为依次上升且彼此相邻的行权价格。

图表 30：不同无风险套利类别之间的关联

触发单个期权下边界套利	→	触发垂直价差上边界套利
触发单个期权上边界套利	→	触发垂直价差下边界套利
触发垂直价差上边界套利	→	触发凸性套利
触发垂直价差下边界套利	→	触发凸性套利

数据来源：方正证券研究所

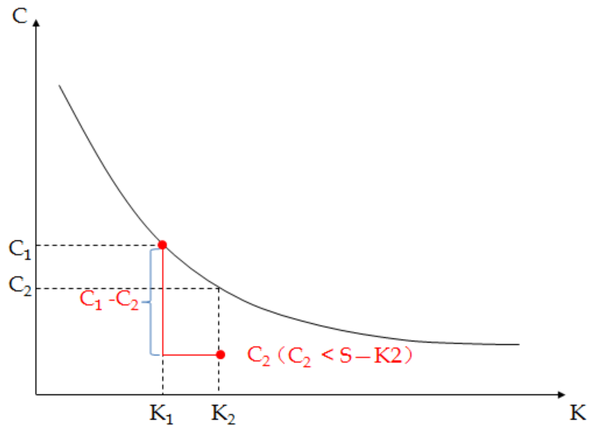
1、触发单个期权下边界套利——>触发垂直价差上边界套利

【理论论证】假设某个期权$C_2\le S-K_2$（$suppose\ S>K_2$），即触发了单个期权的下界套利，此时

$$C_1-C_2-(K_2-K_1)\ge C_1+K_2-S-(K_2-K_1)$$
$$=C_1-(S-K_1)>0$$

（这里假设C_1没有触发下边界套利），这意味着触发了C_2的下界套利也就同时触发了C_1和C_2垂直价差上边界套利。利用下图，我们可以很容易发现这一点。

图表 30：不同无风险套利类别之间的关联



数据来源：方正证券研究所

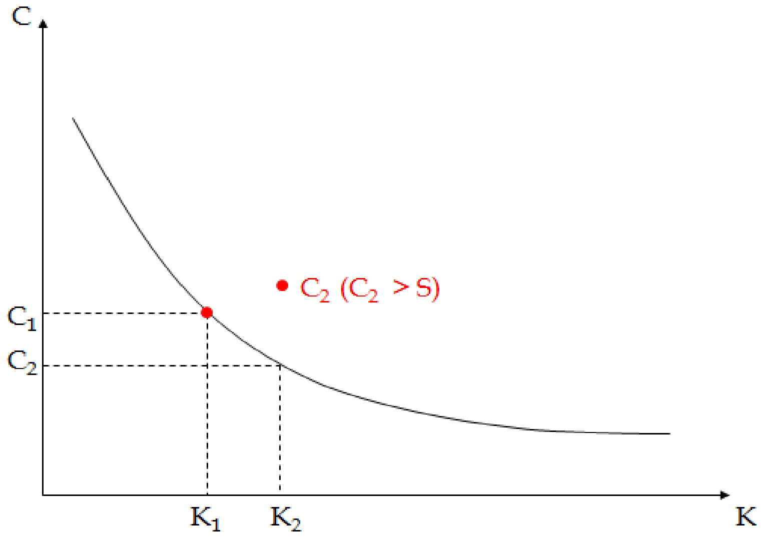
2、触发单个期权上边界套利——>触发垂直价差下边界套利

【理论论证】假设某个期权：$C_2 \geq S$，此时

$$C_1 - C_2 \leq C_1 - S < 0$$

（这里假设C_1没有触发上边界套利），这意味着触发了C_2的上界套利也就同时触发了C_1、C_2的垂直价差下边界套利。此原理图示如下。

图表 31：不同无风险套利类别之间的关联



数据来源：方正证券研究所

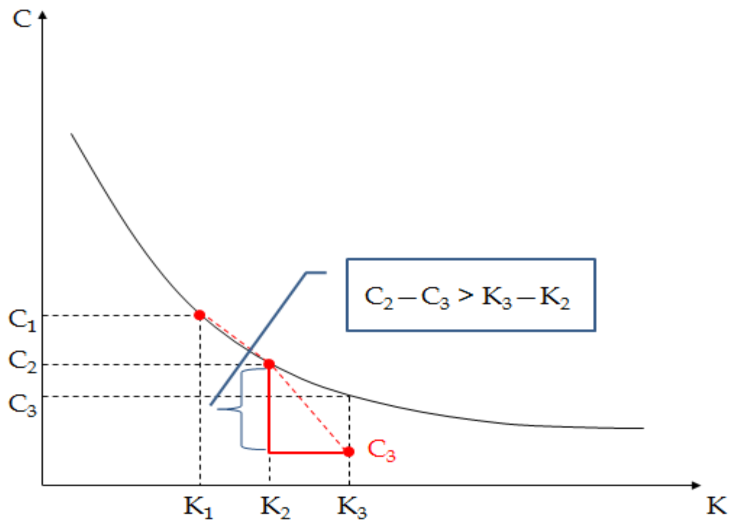
3、触发垂直价差上边界套利——>触发凸性套利

【理论论证】假设某两个期权$C_2-C_3 \geq K_3-K_2$，此时

$$\begin{aligned}2C_2-C_1-C_3 &= C_2-C_1+C_2-C_3\\ &> K_1-K_2+C_2-C_3\\ &\geq K_1-K_2+K_3-K_2=0\end{aligned}$$

（这里假设C_1和C_2没有触发垂直上边界套利），这意味着触发了C_2和3的垂直上边界套利也就同时触发了C_1、C_2和C_3的凸性套利。此原理图示如下。

图表 32：不同无风险套利类别之间的关联



数据来源：方正证券研究所

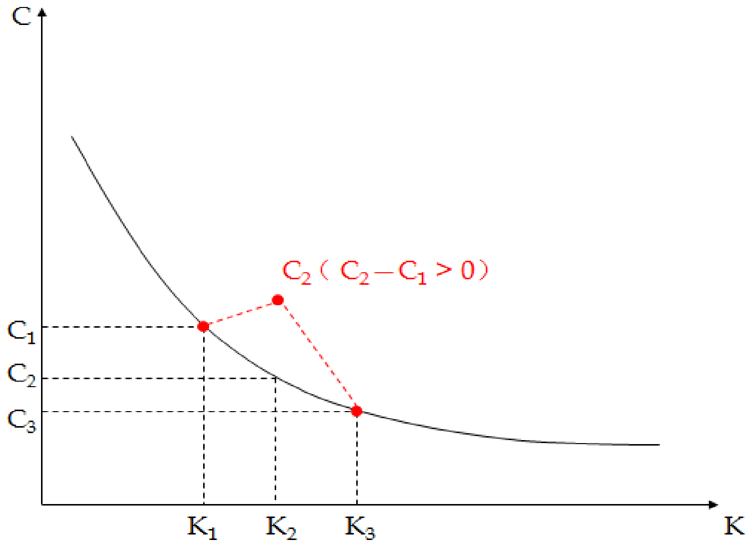
4、触发垂直价差下边界套利——>触发凸性套利

【理论论证】假设某两个期权$C_1-C_2 \leq 0$，此时

$$2C_2-C_1-C_3 = C_2-C_1+C_2-C_3 \geq 0+C_2-C_3 > 0$$

（这里假设C_2和C_3没有触发垂直下边界套利），这意味着触发了C_2和3的垂直下边界套利也就同时触发了C_1、C_2和C_3的凸性套利。此原理图示如下。

图表 33：不同无风险套利类别之间的关联



数据来源：方正证券研究所

2.3 期权套利监控优化方案

根据我们对套利策略关联性的分析，我们可以设计期权合约遍历的相应优化方案。首先，我们判断能够优化的套利策略如下：

- 单个合约的边界套利，不能优化
- 两个同方向合约的垂直价差套利，有优化的空间
- 两个异向合约的平价套利，不能优化
- 三个同方向合约的凸性套利，有优化的空间
- 四个合约的盒式套利，有优化空间

接下来，我们将针对存在优化空间的套利策略进行逐个分析。

1、垂直价差套利监控优化方案：

首先我们要论证一个结论：一旦垂直价差边界套利被触发，那么相邻两个期权合约获得的无风险套利收益是最大的。假设现有期权合约C_1、C_2和C_3.

【模拟 1】假设由于C_3价格被低估，触发了垂直价差上边界套利，即$C_2-C_3>K_3-K_2$，在没有交易成本的情况下，对应的无风险套利绝对收益为$C_2-C_3-(K_3-K_2)$，记为R_1。此时如果C_1和C_3同时触发垂直价差上边界套利，对应套利绝对收益为$C_1-C_3-(K_3-K_1)$，记为R_2，则$R_1-R_2=K_2-K_1-(C_1-C_2)>0$，（假设$C_1$和$C_2$没有触发垂直价差下边界套利）

【模拟 2】假设由于C_3价格被高估，触发了垂直价差下边界套利，即$C_2 - C_3 < 0$，相应的无风险套利绝对收益为$C_3 - C_2$，记为R_1。此时若C_1和C_3也同时触发了垂直价差下边界套利，相应的套利绝对收益为$C_3 - C_1$，记为R_2，则$R_1 - R_2 = C_1 - C_2 > 0$（假设$C_1$和$C_2$没有触发垂直价差下边界套利）。

综合这两种模拟情景，我们得出以下结论：若触发垂直价差套利，相邻期权合约获得的绝对收益较大，因此，我们只需监控相邻两个合约即可。

将这一优化方案应用于 3 月 24 日的 50ETF 期权市场，优化前需要遍历$4 \times 2 \times \mathrm{C}_{13}^{2}$，即 624 对组合，但是经过优化后，这一数字变为$4 \times 2 \times 12$，即 96 对组合，大大降低了监控强度。

2、凸性套利监控优化方案

首先，我们需要引入一个数学定理：

【定理】设$f(x)$为区间$(a\,,b)$内连续，则$f(x)$是凸函数的充要条件是：不等式$f(x) \le \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$在任何含于（a ,b）的闭区间$[x-h\,,x+h]$ $(h>0)$成立。

考虑期权价格关于行权价格的凸性关系，在离散情况下应用上述定理，可以简化为：任取行权价格K_0的期权（价格为C_0，不管是 call 还是 put 都适用），只需监控K_0左右两侧相同间距行权价期权合约组合即可，即$C_0 < \frac{1}{2}(C_{-1} + C_1)$，$C_0 < \frac{1}{2}(C_{-2} + C_2)$，……，其中，$C_{-1}$和$C_1$表示与$K_0$左右间距 1 档行权价的期权，$C_{-2}$和$C_2$表示与$K_0$左右间距 2 档行权价的期权，以此类推。

将这一优化方案应用于 3 月 24 日的 50ETF 期权市场，优化前需要遍历$4 \times 2 \times \mathrm{C}_{13}^{3}$，即 2288 对组合，但是经过优化后，这一数字变为$4 \times 2 \times [6 + 2 \times (1+2+3+4+5)]$，即 288 对组合，大大降低了监控强度。

此外，从套利收益的角度来看，一旦出现凸性套利机会，相邻三个期权合约构成的凸性套利收益最高，即C_{-1}、C_0、C_1这三个期权合约构成的凸性套利组合获得套利收益最高。

3、盒式套利监控优化方案

只有在平价公式不满足的情况下，才会触发盒式套利，因此，盒式套利监控可以在正向套利和反向套利触发后再开启。

考虑到盒式套利绝对收益≤所选两组平价套利绝对收益的和，因此，在不考虑可操作性的情况下，盒式套利的性价比显然不如直接进行平价套利。下面我们来证明这个结论。

【模拟 1】$C_1 - P_1 < S - K_1$，$C_2 - P_2 < S - K_2$，此时盒式套利绝对收益<平价套利。

【模拟 2】$C_1 - P_1 < S - K_1$，$C_2 - P_2 > S - K_2$，此时正、反向套利=盒式套利

【模拟 3】$C_1 - P_1 < S - K_1$，$C_2 - P_2 = S - K_2$，盒式套利绝对收益=平价套利

但是，考虑到实际交易中可能出现"融券难"的现实问题，此时盒式套利更具优势。

另外，上面模拟的情况均是从绝对收益金额来考虑，但投资性价比的好坏需要考虑投资获得的收益率高低，因此我们还需要考虑投资投入的资金大小。

从套利占用资金的角度考虑，由于期权是保证金交易，其占用资金小于直接买入标的或者融券卖出标的占用的资金，因此**盒式套利的收益率会高于正、反向套利的收益率**（这一现象后两个章节中均有实例呈现）。

3. 50 ETF 期权市场中的无风险套利机会

本章将具体运用前两章的套利原理以及监控方案，对上证50ETF 期权市场进行跟踪监控。我们将所得监控成果整理如下。

3.1 熔断情况出现时套利机会展示

本节我们希望能够通过一个 50ETF 期权熔断时刻监控到的套利机会案例让读者进一步了解各类型套利间的一些联系。

《上海证券交易所股票期权试点交易规则》第 76 条规定期权交易实行熔断制度。连续竞价交易期间，若合约盘中交易价格较最近参考价格上涨、下跌达到或者超过 50%，且价格涨跌绝对值达到或者超过该合约最小报价单位 5 倍，那么该合约进入 3 分钟的集合竞价交易阶段。集合竞价交易结束后，合约继续进行连续竞价交易。

2 月 11 日下午 13 点 3 分 12 秒，50ETF 购 4 月 2.40(简记为 c240，相应地，50ETF 沽 4 月 2.40 简记为 p240，以此类推)、50ETF 购 4 月 2450 合约价格出现大幅异常。其中 50ETF 购 4 月 2.40 合约价格在 13:03:10-13:03:12 之间价格从 0.1006 元跌至 0.001 元，50ETF 购 4 月 2.45 合约价格从 0.0808 元跌至 0.001 元，顿时触发熔断机制。在熔断发生时，显然上述两个期权合约触发了期权的下边界套利，除此之外我们监控到的无风险套利机会如下表所示（图表中只展示了 c240 相关的套利机会）：

图表 34：熔断情况出现时套利机会展示

触发套利类型	操作(+为买；-为卖)	即期收益	年化收益率
反向套利	+c240+p240-50ETF	2.27%	11.84%
垂直价差套利 1	+c240-c220	2.81%	14.65%
垂直价差套利 2	+c240-c225	7.99%	41.66%
垂直价差套利 3	+c240-c230	11.29%	58.86%
垂直价差套利 4	+c240-c235	18.79%	97.97%
蝶式套利 1	+c220+c240-2c230	7.85%	40.93%
蝶式套利 2	+c230+c240-2c235	10.90%	56.83%
凸性套利 1	+c225+2c240-3c235	13.78%	71.85%
凸性套利 2	+c220+3c240-4c235	16.02%	83.52%
凸性套利 3	+2c225+c240-3c230	4.36%	22.73%
凸性套利 4	+3c220+c240-4c225	4.31%	22.47%
盒式套利 1	+c240-p240-c220+p220	9.21%	48.02%
盒式套利 2	+c240-p240-c225+p225	10.60%	55.27%
盒式套利 3	+c240-p240-c230+p230	9.54%	49.74%
盒式套利 4	+c240-p240-c235+p235	11.17%	58.24%

资料来源：方正证券研究所

从图表 34 我们可以看到，在垂直价差套利中，获得最高收益的是“垂直价差套利 4”（即+c240-c235，图表中用阴影标注），显然在 c240 出现价格低估的情况，与之相邻的 c235 构成的垂直价差组合获得了最高收益，与我们 2.3 节中的论证相符。显然，蝶式套利隶属于凸性套利，之所以分开记录是为了展示蝶式套利收益最大的组合是相邻的三个合约，即“蝶式套利 2”（+c230+c240-2c235，图表中用阴影标注）。

此外，“凸性套利 2”成为凸性套利中收益最大的组合，原因也是显而易见的，c240 作为低估期权，组合中配置的比例越高组合收益就越高。

盒式套利收益率由于占用资金小，其收益率明显高于反向套利机会。

3.2 普通交易日无风险套利机会展示

50ETF 期权上市初期，由于市场参与力量以做市商为主，期权无风险套利机会并不多见，但随着各类投资者参与市场的力度越来越大，无风险套利机会也逐渐增加。

图表 35-图表 39 这一系列的图表展示了上述现象，其中 3 月 17 日-3 月 24 日期间（选取了上市初期的一段时间）市场鲜有无风险套利机会，平均年化收益率均低于 2%，尚不能覆盖资金成本，没有参与的意义。而在 4 月 27 日-5 月 14 日这一期间的套利机会展示中，我们不难发现，平均年化收益率超过 5%的套利机会已较为常见，市场甚至不乏年化收益极高的套利机会（20%以上）。随着期权市场参与力量的多元化，我们有理由相信无风险套利机会将会进一步增加，因此投资者不妨密切关注期权市场中的“捡钱”机会。

说明一下，下面图表中的 bounder 代表边界套利，vertical 代表垂直价差套利，box 代表盒式套利，pcpb 代表反向套利，pcpf 代表正向套利。数据我们用的是 Wind 提供的期权日内跳价，图表中“跳数”表示 Wind 日内跳价维持的次数。此外在套利监测中，我们做了如下参数设置：

无风险利率 r=5%；

50ETF 单边交易手续费=0.06%；

期权单边交易手续费=5 元（卖开免收手续费）；

期权保证金按照交易所标准收取；

买卖 50ETF 均采用 100%资金占用计算。

从监测到的套利类型来看，50ETF 期权市场出现的平价公式套利（正向、反向、盒式套利）机会较多，反映到隐含波动率上则表现为，50ETF 期权市场认购期权与认沽期权的隐含波动率差距较大的现象屡见不鲜。

具体来说，在上证 50 期货上市之前（4 月 16 日在中国金融交易所上市），由于融券卖出难度较高，认沽期权隐含波动率一直凌驾于认购期权之上。而上证 50 期货上市之后，融券做空难的问题得以解决，加之市场看涨情绪高涨等因素，这一现象被颠覆，认购期权隐含波动率反而呈现“后来者居上”的气势。

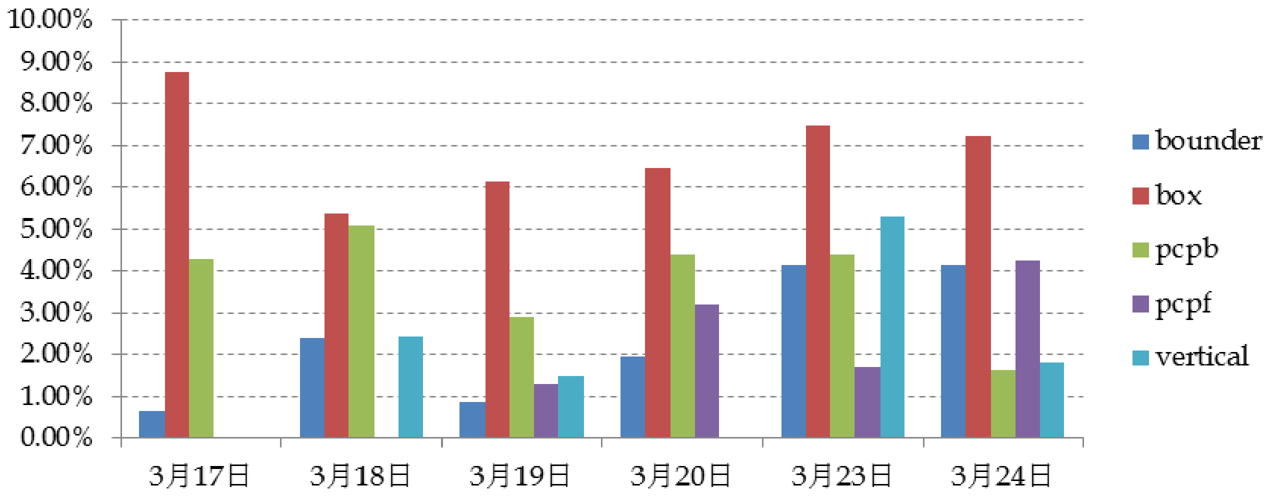
认沽期权隐含波动率占据上风的时期，市场以反向套利机会为主；认购期权隐含波动率“逆袭”之际，市场则以正向套利机会为主；而盒式套利，由于期权保证金交易带来的套利占用资金金额的下降，反而成为了期权无风险套利机会中的“主角”。

图表 35：普通交易日无风险套利机会展示

日期	套利类型	最大年化收益率	维持跳数	平均年化收益率
3 月 17 日	bounder	0.63%	6	0.34%
	box	8.76%	1	1.18%
	pcpb	4.28%	1	0.59%
3 月 18 日	bounder	2.39%	5	0.80%
	box	5.38%	3	1.17%
	pcpb	5.10%	1	0.96%
	vertical	2.42%	4	1.66%
3 月 19 日	bounder	0.89%	12	0.40%
	box	6.13%	1	0.86%
	pcpb	2.89%	5	0.53%
	pcpf	1.29%	4	0.29%
	vertical	1.48%	1	0.94%
3 月 20 日	bounder	1.95%	3	0.68%
	box	6.45%	1	0.94%
	pcpb	4.38%	3	0.68%
	pcpf	3.19%	1	0.39%
3 月 23 日	bounder	4.16%	9	1.09%
	box	7.50%	5	1.59%
	pcpb	4.38%	9	0.49%
	pcpf	1.72%	2	0.26%
	vertical	5.29%	1	1.27%
3 月 24 日	bounder	0.15%	12	0.15%
	box	7.24%	1	1.03%
	pcpb	1.63%	5	0.39%
	pcpf	4.25%	3	0.44%
	vertical	1.82%	24	1.12%

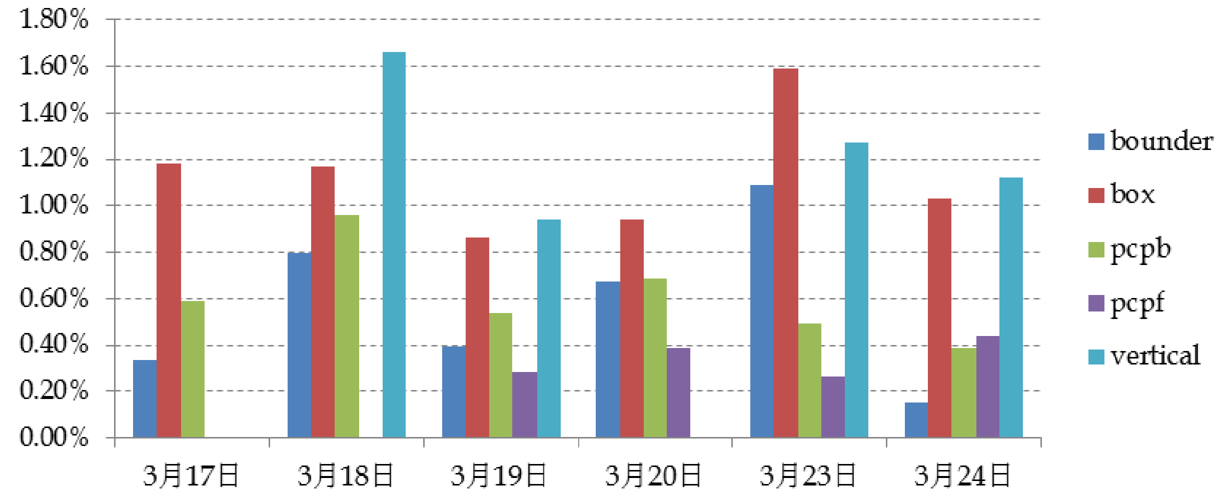
资料来源：方正证券研究所

图表 36：2015.3.17-2015.3.24 期间 各类套利触发后最大年化收益率



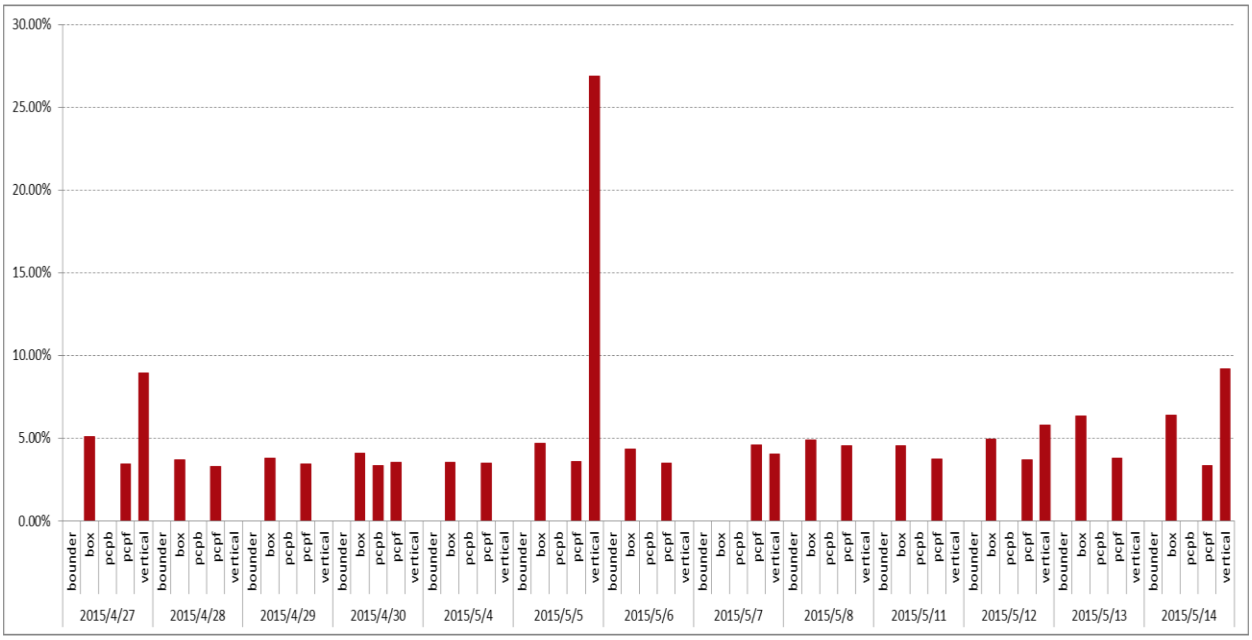
数据来源：方正证券研究所

图表 37： 2015.3.17-2015.3.24 期间各类套利触发后平均年化收益率



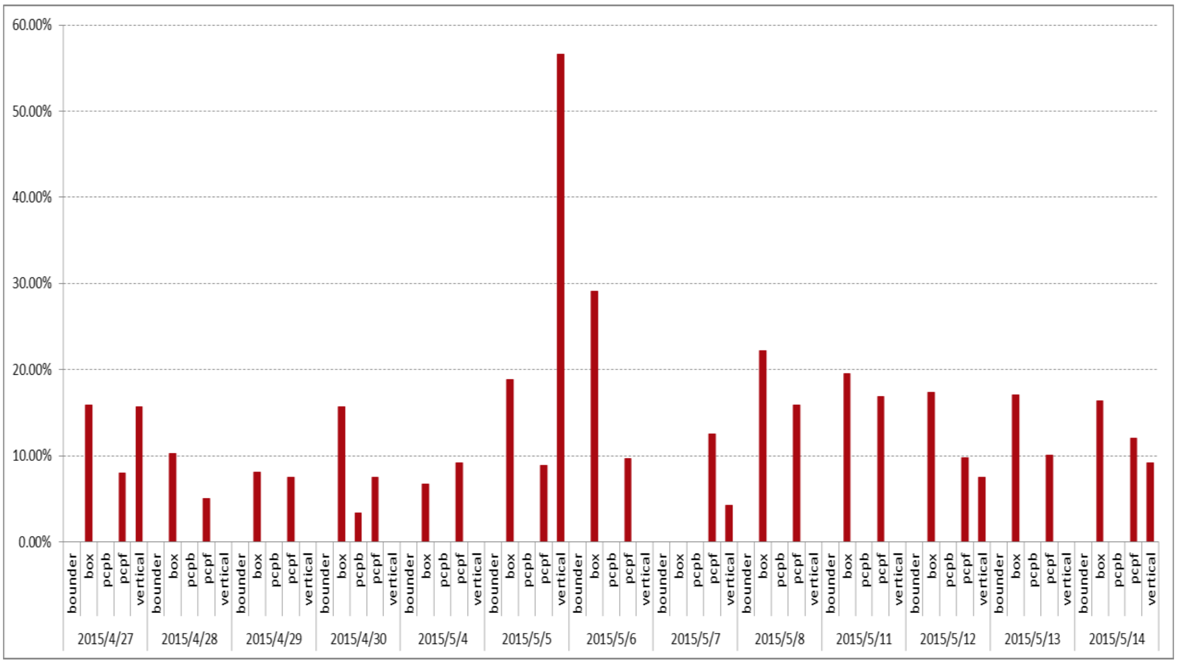
数据来源：方正证券研究所

图表 38：2015.4.27-2015.5.14 期间 各类套利触发后平均年化收益率展示



数据来源：方正证券研究所

图表 39：2015.4.27-2015.5.14 期间 各类套利触发后最大年化收益率展示



数据来源：方正证券研究所

分析师声明

作者具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格，保证报告所采用的数据和信息均来自公开合规渠道，分析逻辑基于作者的职业理解，本报告清晰准确地反映了作者的研究观点，力求独立、客观和公正，结论不受任何第三方的授意或影响。研究报告对所涉及的证券或发行人的评价是分析师本人通过财务分析预测、数量化方法、或行业比较分析所得出的结论，但使用以上信息和分析方法存在局限性。特此声明。

免责声明

公司投资评级的说明：

强烈推荐：分析师预测未来半年公司股价有20%以上的涨幅；
推荐：分析师预测未来半年公司股价有10%以上的涨幅；
中性：分析师预测未来半年公司股价在-10%和10%之间波动；
减持：分析师预测未来半年公司股价有10%以上的跌幅。

行业投资评级的说明：

推荐：分析师预测未来半年行业表现强于沪深300指数；
中性：分析师预测未来半年行业表现与沪深300指数持平；
减持：分析师预测未来半年行业表现弱于沪深300指数。

	北京	上海	深圳	长沙
地址：	北京市西城区阜外大街甲34号方正证券大厦8楼（100037）	上海市浦东新区浦东南路360号新上海国际大厦36楼（200120）	深圳市福田区深南大道4013号兴业银行大厦201（418000）	长沙市芙蓉中路二段200号华侨国际大厦24楼（410015）
网址：	http://www.foundersc.com	http://www.foundersc.com	http://www.foundersc.com	http://www.foundersc.com
E-mail：	yjzx@foundersc.com	yjzx@foundersc.com	yjzx@foundersc.com	yjzx@foundersc.com