

连续投资下的资金规划问题

报告要点

■ 传统的资产配置模型的缺陷

传统的资产配置模型讨论的是同一个时间段内投资的问题，往往假设的是所有投资都是从一个时点开始的。单个项目的投资额总和等于初始总可用资金。实际投资中的面临投资项目并不都是同一时间点开始的。我们的资金规划系列报告试图寻找的是将时间上的差异也加入到考虑范围之后的配置方案。

■ 简单情形的抽象和解法

我们将资金规划的问题按照项目之间时间关联的复杂性和目标函数的复杂性进行分类。对于时间关系简单的情形，处理与传统的规划区别不大。而对于时间关系复杂而目标函数是预期收益率最大化的问题，我们首先由穷举树构造相应的决策图，进而将其对应到图论中的最短路径问题，并通过 Dijkstra 算法解决此类问题。但是同时我们也指出这种解法非常局限，只能解决收益率目标下的问题，在处理其他目标函数如夏普比率等时则不适用。

■ 一般情形的数学抽象及解法

我们通过分析每一个项目的资金流入流出情况，得到在每一个项目的资金使用所需要满足的限制条件，然后在不同的目标函数下利用序列二次规划算法求其数值解（序列二次规划算法对于大部分的非线性目标函数的规划都可以较快完成），作为连续投资下资金规划的解决方案。

对于实际应用中的规划问题，我们还需要考虑其它一些问题，包括：将可合并的投资项目进行合并，将大的项目规划拆成若干独立的小的项目规划，投资项目开始、结束时间的不可预测性等等。

■ 与其它配置方法的对比举例

我们分别以预期收益率最大化目标、夏普比率目标、资金周转次数目标对模拟产生的项目集合进行规划，并将结果与非连续投资的情况和简单的“有钱就用”连续投资策略进行比较。资金规划均实现了各自的目标。现实投资中的应用例子我们将在后续报告中给出。

分析师：

俞文冰

021-68751782

yuwb@cjsc.com.cn

执业证书编号：S0490510120020

联系人：

俞文冰

021-68751782

yuwb@cjsc.com.cn

正文目录

| | | |
|----|-------------------------|----|
| 一、 | 传统资金规划的局限 | 3 |
| 二、 | 连续投资下资金规划的抽象与建模 | 4 |
| 1. | 目标函数一般而时间关系简单时的情形 | 4 |
| 2. | 目标函数简单而时间关系复杂时的情形 | 5 |
| 3. | 目标函数一般且时间关系复杂时的情形 | 9 |
| 4. | 一般情形的抽象及数值解法 | 13 |
| 三、 | 现实投资中的其它问题 | 14 |
| 1. | 相同项目的合并 | 14 |
| 2. | 连续投资项目的起止 | 16 |
| 3. | 规划项目的可拆分性 | 16 |
| 4. | 新旧项目集合的衔接 | 18 |
| 四、 | 资金规划效果举例和对比 | 19 |

图表目录

| | | |
|-------|--|----|
| 图 1: | 不同项目的时间冲突 | 3 |
| 图 2: | 简单的时间关系 | 4 |
| 图 3: | 仍然是简单的时间关系 | 4 |
| 图 4: | 复杂时间关系的例子 | 5 |
| 图 5: | 收益率目标下的穷举树 | 5 |
| 图 6: | 收益目标下四项目的决策图 | 6 |
| 图 7: | Dijkstra 算法解以收益率为目标的资金规划问题 | 8 |
| 图 8: | 使用 Dijkstra 算法求解收益率目标下的四项目决策图 | 8 |
| 图 9: | 一般目标下的项目穷举树 | 9 |
| 图 10: | 一般目标函数下的简单例子 | 10 |
| 图 11: | 一般目标函数下的决策图 | 11 |
| 图 12: | 四项目资金流动 | 12 |
| 图 13: | 投资机会时间上的相互关联 | 17 |
| 图 14: | 项目不断被观察到时的处理流程 | 18 |
| 图 15: | 传统配置方法与连续投资下的资金配置方法的比较 | 20 |
| 表 1: | 使用 Dijkstra 算法计算收益率目标下四项目资金规划的过程 | 9 |
| 表 2: | 传统配置方法与连续投资下资金配置方法的比较 | 20 |
| 表 3: | 资金配置权重 | 21 |

一、传统资金规划的局限

传统的资产配置模型讨论的是同一个时间段内投资的问题,假设所有投资都是从一个时间点开始的。例如 Markowitz 资产配置模型就是讨论在有效前沿上配置风险资产,有效前沿上的每个点对应着不同资产的权重,各部分资产权重之和为 1。在 Markowitz 模型中,风险资产由预期收益率和预期波动率来描述。

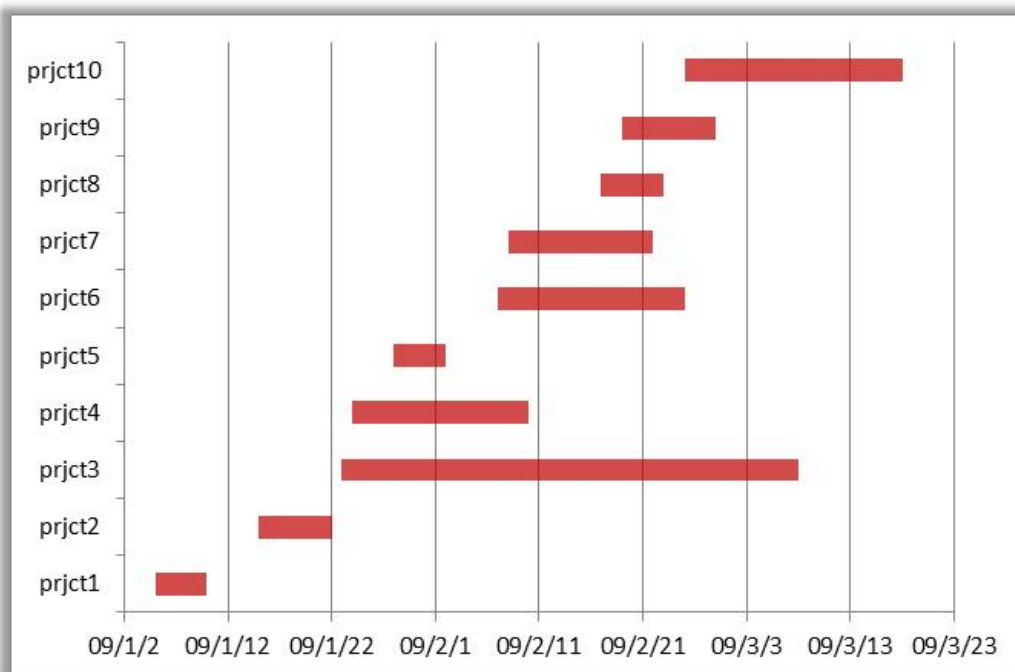
然而,实际投资中面临的问题当然并非如此简单,一个最典型的问题就是:所有的投资项目并不是同一时间点开始的。我们的资金规划系列报告试图寻找的是将时间上的差异也加入到考虑范围之后的配置方案。

与 Markowitz 模型一样,配置方案本身并不能带来额外的收益。“投资是由观念和理念来推动的,如果观念是错误的,那么任何的有效的执行和分析都于事无补。须知,如果输入的是垃圾,那么输出的也必然是垃圾,我们所能做的就是使这些垃圾的加工过程更为有效。然而,至少我们保证那些成功的思想和创意不会在实际的应用中被浪费。”(Richard C. Grinold)

我们以一个例子来说明考虑时间之后的配置策略需要关注的因素:

在连续投资的情况下,项目 A 投入的资金,在项目 B 需要投资时可能已经收回,单个项目使用资金的总和不再等于总资金。即资金的重复利用是考虑时间因素和不考虑时间因素的策略的关键差别。比如图 1 的 10 个项目,每个条形表示项目占用资金的时间段。

图 1: 不同项目的时间冲突



资料来源:长江证券研究部

容易看出,不管项目 1 (prjct1)、项目 2 (prjct2) 各自占用了多少资金量,都不会影响其他项目的可用资金。因为在其他项目需要投资之时,项目 1、项目 2 的资金均已回收,所以项目 1、项目 2 相互之间以及与其他项目都可以“和谐相处”。而对 prjct3 进行决策时,不仅要比较 prjct4,还要考虑到 prjct5-prjct10。如上所述,在连续投资的情况下,总资金约束表现为稍显复杂的形式。这也就是我们将要处理的问题。

请阅读最后一页评级说明和重要声明

二、连续投资下资金规划的抽象与建模

1. 目标函数一般而时间关系简单时的情形

如果项目之间的时间关系如图 2 所示。即各个项目在时间上完全是一种串联的关系，对于目标函数，我们只要求它对各个项目的投资资金量都是增函数（偏导数不小于 0）。

图 2: 简单的时间关系

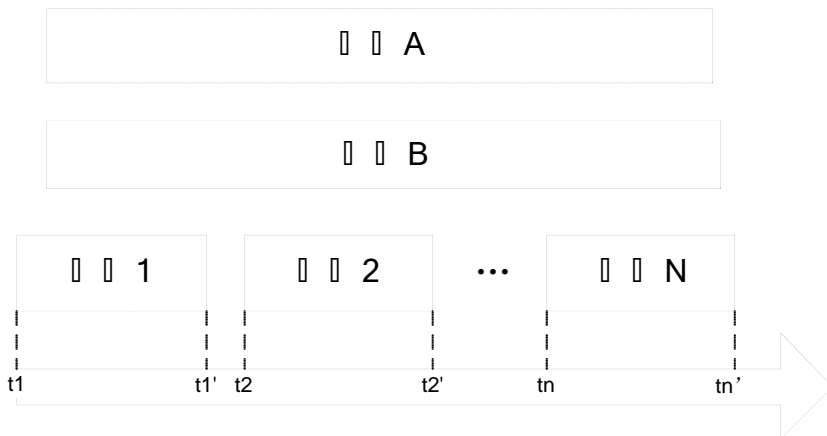


资料来源：长江证券研究部

在这种假设下，不管目标函数的具体形式如何，任何一个项目 i 的投资金额越大，其后续所有项目的总预期可用资金都会增大（每个项目的预期收益率都为正），从而最终的目标函数也会增大。因此在这种时间关系非常简单的情形下，最终决策就是将全部资金依次投资于各个项目。

我们再考虑另外一种时间关系，如图 3 所示。这种情形与上述情形没有本质区别。决策时，将项目 1 到项目 N 作为一个整体，这个整体内部的投资方案如上面所讨论的就是依次投资的过程。这个整体与项目 A、项目 B 直接完全没有资金流动。那么决策过程就是将初始资金分成三部分，分别投资于项目 A、项目 B 和项目 1 到 N 组成的整体。由于三部分之间没有资金流动，三部分的资金分配方法就是传统的单一时点上的资金分配方法。

图 3: 仍然是简单的时间关系



资料来源：长江证券研究部

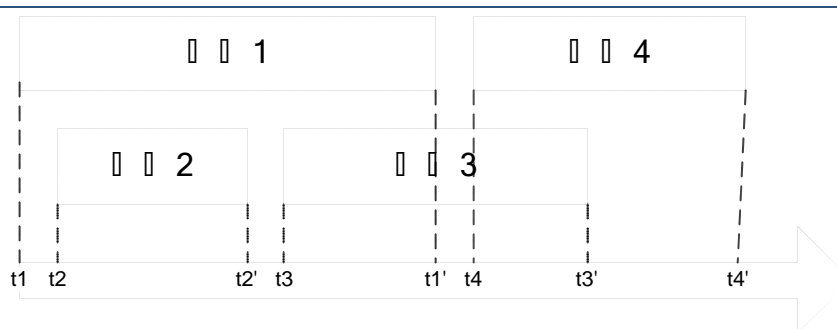
因此我们对于“简单时间关系”下的连续投资，不论其目标函数的具体形式如何，都可以比较方便地处理。而我们对“简单的时间关系”的确定方法是：在面对的项目集合中，是不是每个项目的资金的可能来源只有一个，或者是不是每个项目的回收资金只有一种用途，如果是，则是“简单时间关系”。例如图 3 中项目 A、项目 B、项目 1 的资金只可能来源于初始资金，而项目 i ($i \geq 2$) 的资金只可能来源于项目 $i-1$ 。

2. 目标函数简单而时间关系复杂时的情形

容易看出，“简单时间关系”实际上是一种非常特殊的情况。大部分项目在时间上的关联并非如此简单。

如图 4 所示的四个项目：

图 4：复杂时间关系的例子



资料来源：长江证券研究部

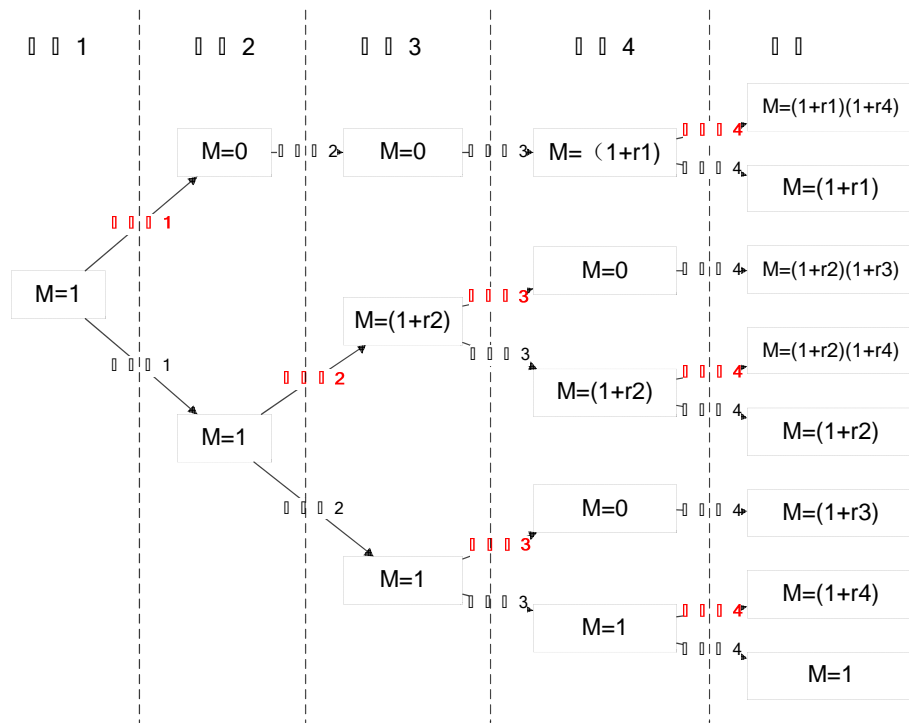
可以看出，项目 4 的资金既可以来源于项目 1，又可以来源于项目 2。因此已经不是“简单时间关系”。我们无法使用简单时间关系时的方案来处理这类问题。相应的，我们称这种时间关系为“复杂时间关系”。

对于这种情况，我们首先讨论在预期收益率最大化这个简单目标函数下的项目选择问题。由于在预期收益率最大化目标下，任何项目选择都是“非此即彼”的，即对于任何一个项目，要么完全不投资，要么将全部可用资金都投资于这个项目。

我们按照时间的先后，将决策过程划分成 4 个阶段，每个项目的开始时刻就是每个决策阶段的开始。如图 5 中我们将整个决策划分成 4 个阶段，分别对应 **Error! Reference source not found.** 中的 t_1, t_2, t_3, t_4 。在 i 阶段决定项目 i 的投资额度（在收益率的目标下，投资额度实际上只在 0 和全部现有资金 M 两种选择），图 5 中的相邻阶段之间的箭头就表示各个阶段采取的策略。

例如，如果在 t_1 时刻（阶段 1）选择了投资于项目 1，在收益率目标下，一定是将全部的资金都投资于项目 1 了，因此项目 2、项目 3 的可用资金都为 0，于是 t_2 时刻（阶段 2）、 t_3 时刻（阶段 3）的决策就只有不投资，到了 t_4 时刻（阶段 4）预期可用资金为 $(1+r_1)$ ，这时如果选择投资于项目 4，那么最终的收益就是 $(1+r_1)(1+r_4)$ ，如果不投资就是 $(1+r_1)$ 。

图 5：收益率目标下的穷举树



资料来源：长江证券研究部

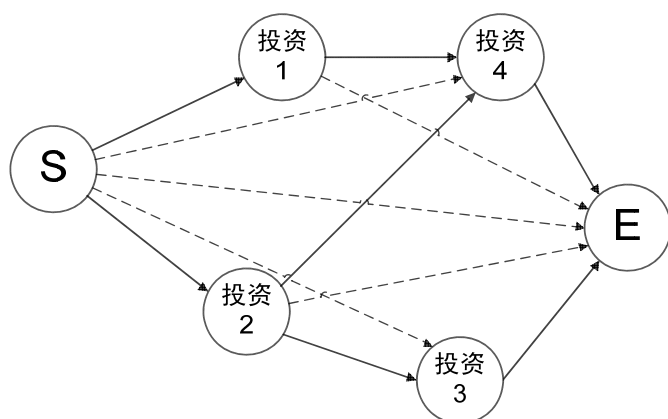
上面的方法中，我们对所有的可能决策进行了穷举。最后，我们选择 M 最大的，其对应的路径就是各个阶段的决策方案，也就对应了每个项目的投资额度。例如，假设 $(1+r_2)(1+r_4)$ 最大，那么对应的决策就是：不投资 1→投资 2→不投资 3→投资 4。

在后文中，我们都称这种图为“穷举树”。

穷举树中每段线条都对应着一个决策。红色标注的决策表示进行了投资。每一个阶段的状态（图中 M 的值）由先前的所有决策共同决定。如果将状态省略掉，并只突出显示进行了投资的决策（即图 5 中标注了红色的线条），同时将相同的决策进行合并。由于在收益率目标下，每个阶段只有一种红色线条（如第四阶段，三根红色线条都表示全部投资于项目 4），最终得到如图 6 所示的项目选择图，其中除开始点 S 和结束点 E 之外的顶点的个数等于项目的个数。

在后文中，我们都称这种图为“决策图”。可以看出，穷举树中的任何一种决策方法，都能在决策图中找到对应的路径。

图 6：收益目标下四项目的决策图



资料来源：长江证券研究部

更进一步地，

图 6 中虚线表示的边也可以省略掉，因为对于任何一条虚线对应的决策一定不是最优决策——如“S→投资 1→投资 4”一定优于“S→投资 4”，所以可以直接将“S→投资 4”忽略掉。

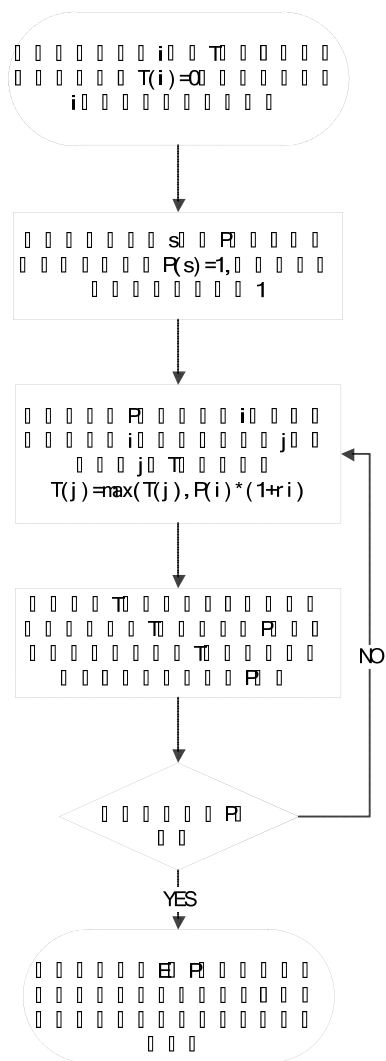
将穷举树图 5 简化成决策图

图 6 之后，很容易联想到使用图论中的最短路径算法来解决这个问题。

我们对决策图中的每条边赋以权值，以项目 i 为起点的边的权值为 $(1+r_i)$ ，表示如果对项目 i 投资资金 1，可以获得的预期收益为 $(1+r_i)$ ，起点 S 是虚拟的节点，并没有实际的投资，因此以 S 为起点的边权值为 1。连续经过两条分别以项目 i 和项目 j 为起点的边，即表示先投资于项目 i 然后将获得的全部回收资金再投资于项目 j ，所以可以获得的收益为 $(1+r_i)(1+r_j)$ 。

可以通过图 7 所示的求解最短路径的 Dijkstra 算法的流程来解决这类以收益率为目标的资金规划问题：

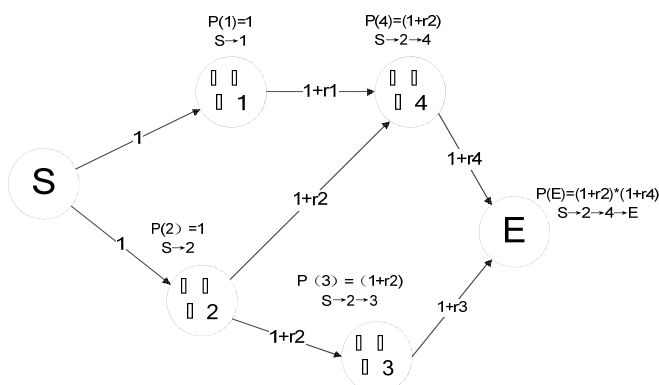
图 7: Dijkstra 算法解以收益率为目标的资金规划问题



资料来源：长江证券研究部

以图 4 中所示的项目为例，假设 $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ ，则每个项目可能获得的最大投资金额（流程图中 P 标号的值）和获取该最大投资金额的方案（P 标号值对应的路径）如图 8 所示，决策的具体过程如表 1 所示

图 8: 使用 Dijkstra 算法求解收益率目标下的四项目决策图



资料来源：长江证券研究部

表 1: 使用 Dijkstra 算法计算收益率目标下四项目资金规划的过程

| 获取 P 标号的节点 | P 标号节点对应路径 | 修改 T 标号的节点 |
|--------------------------|--|---|
| $P(S)=1$ | S | $T(1)=0, T(2)=0, T(3)=0$ $T(4)=0, T(E)=0$ |
| $P(1)=1, P(2)=1$ | $S \rightarrow 1, S \rightarrow 2$ | $T(1)=1, T(2)=1$ |
| $P(4)=1+r_2, P(3)=1+r_2$ | $S \rightarrow 2 \rightarrow 4, S \rightarrow 2 \rightarrow 3$ | $T(3)=1+r_2, T(4)=1+r_1$ $T(4)=1+r_2$ |
| $P(E)=(1+r_2)(1+r_4)$ | $S \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow E$ | $T(E)=(1+r_2)(1+r_3),$ $T(E)=(1+r_2)(1+r_4)$ |

资料来源：长江证券研究部

3. 目标函数一般且时间关系复杂时的情形

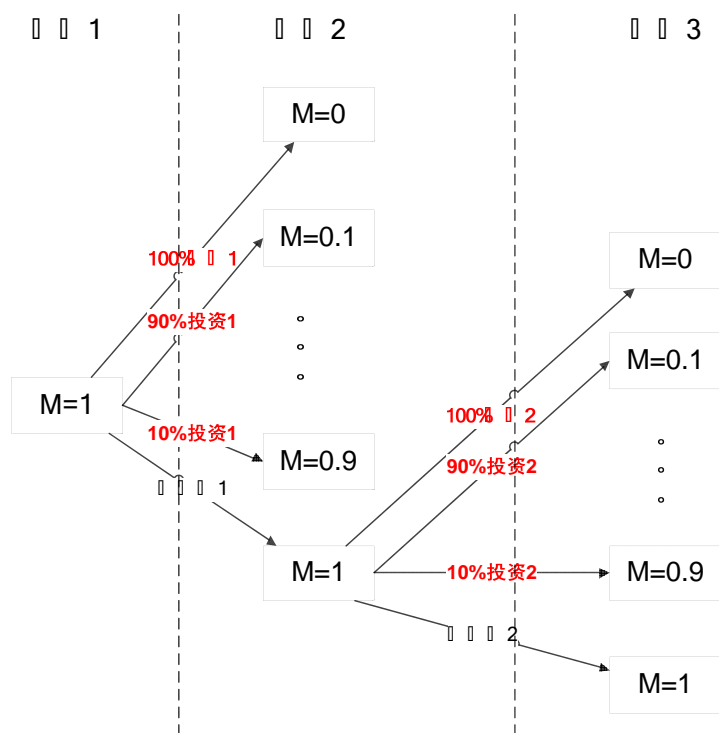
上面两小节的讨论中，我们将问题按时间关系的复杂性进行了分类。在时间关系简单时，处理的方法很简单；当时间关系复杂时，我们对问题进行了进一步的细分，即按照其目标函数的复杂性分为以收益率最大化目标函数和其他目标函数情形。在收益率目标函数下，上一小节中说明了使用最短路径方法解决资金规划问题的途径。

在这一小节中我们将考虑最一般的情况，即：目标函数一般且时间关系复杂时的情形¹。

在一般目标函数下，对每一个项目的最优投资策略**并不是**要么完全不投资，要么将持有的资金完全投资。假定我们设定了一个固定的最低投资额，例如设定最低投资额为初始资金的 10%，那么可以用类似图 5 的画法试着画出这种情况下的项目选择图，如图 9 所示。

图 9: 一般目标下的项目穷举树

¹ 因为预期收益率仅仅是一个期望值（平均值），并不完全反映项目的优劣；另外通常收益率的预测是十分困难的，预期收益与实际收益往往有很大的差别，直接以预期收益率最大化为决策目标很难获得好的投资效果。因此我们并不能满足于以预期收益率最大化这种特殊目标下的规划解决方案。我们希望找到的是对尽可能多类型的目标函数都适用的规划方法。



资料来源：长江证券研究部

图 9 中 M 的值表示每个阶段开始时的可用资金，箭头表示决策（项目的投资额度）。

我们发现，即使在只有 4 个项目的情况下，这样的穷举树也过于复杂，我们已经无法完全将其画出来了。那么，计算机是否可以处理这样的问题呢？假设有 20 个项目，最低投资额度为 10%，则最终的状态数目可以保守地假设为 5^{20} ²。假设计算机每秒可以处理 10000 个状态（每个状态至少要计算一次目标函数），那么处理 20 个项目的规划需要 $5^{20}/10000 > 9E9$ 秒 > 4000 天。即使仅仅考虑耗时，这样的穷举算法就已经无法接受了。

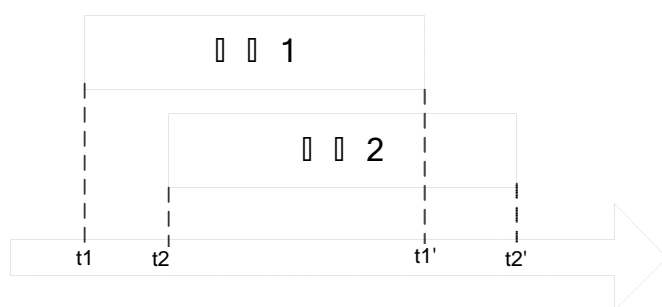
是否可以像上一节一样将问题对应到最短路径问题而简化呢？实际上，决策图包含了穷举树中的所有路径，所以决策图只是穷举树的另一种画法，本质上还是穷举。简化来自于 Dijkstra 算法，而并不是来源于项目决策图的画法本身。

Dijkstra 算法中，对每一个点进行 T 标号，表示到达这一顶点时目标函数最优值的下限，通过比较不同路径到达每一个点的 T 标号值，逐步舍弃掉非最优的路径，从而使得算法大大简化。要在过程中及时舍弃非最优的路径，必须能对不同的路径进行提前比较。但这恰恰只有在收益率目标下才能做到，一般的目标函数下则很难。我们以一个最简单的例子来说明原因：

假设只有两个项目（项目 1 和项目 2），它们之间的时间关系如图 10 所示。

图 10：一般目标函数下的简单例子

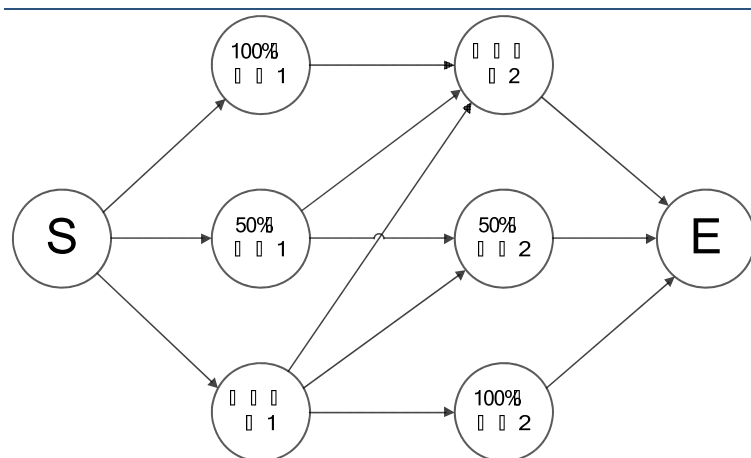
² 如果每个状态都可以再分为 10 份，那么最终的数目是 10^{20} ，但实际上低于这个数目，因为有些状态如 $M=0$ 的状态不能再分，而 $M=0.9$ 的状态只可以再分为 9 份。作为一种保守的估计，我们假设每个状态只能再分成 5 份，最终的状态数目估计为 5^{20} 。



资料来源：长江证券研究部

同时，我们假设最低投资额为初始资金的一半，则决策图如图 11 所示：

图 11：一般目标函数下的决策图



资料来源：长江证券研究部

与收益率目标不同的是，我们无法找到合适的方法对每个节点进行 T 标号和 P 标号。在图 9 收益率目标规划中，在决定项目 4 的时候，不用考虑后续的投资，就可以提前判断出“S→投资 2→投资 4”比“S→投资 1→投资 4”好。而本例中，有两条路径可以到达“50%投资于项目 2”这个节点，但是我们却无法在不考虑后续投资的情况下提前比较出这两条路径哪条更好³。因而也就无法修改 T 标号的值、无法对决策过程进行简化。于是决策的复杂度跟穷举时几乎没有区别。

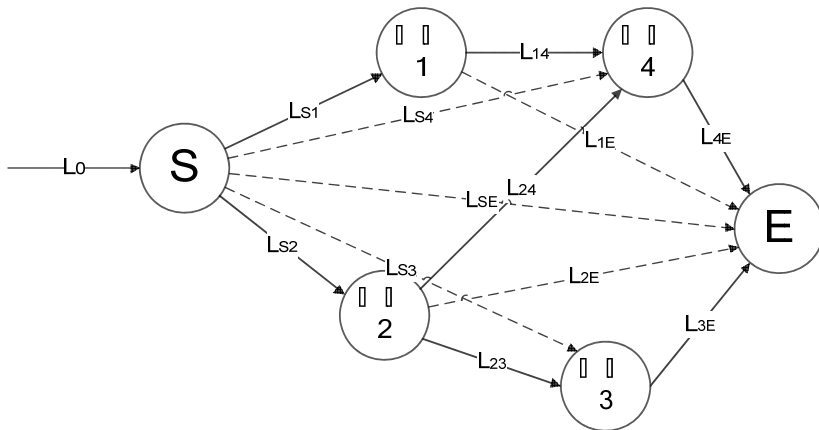
因此，对于复杂时间关系、一般目标函数下的资金规划，我们必须寻找另外的处理方法。如 **Error! Reference source not found.** 所示，我们以顶点 i 表示项目 i ⁴，用由项目 i 指向项目 j 的边表示项目 i 的回收资金中用于项目 j 的部分。

我们对图 12 中的每一条有向边进行标号， L_{ij} 表示项目 i 的回收资金中投资于项目 j 的部分。

³ 一方面目标函数并不是累加或者累乘的形式，单个项目对总体目标函数的贡献不好衡量；另一方面，即使我们能够确定单个项目的对于整体目标函数的贡献，我们也无法直接判断两个目标函数和剩余资金都不相同的路径哪一个更好。

⁴ 这与决策图不同，决策图中的每一个节点表示对项目 i 的投资决策，而这里的节点表示的是项目本身

图 12: 四项目资金流动



资料来源：长江证券研究部

图 12 中假设初始资金量为 $L_0=1$ ，如果将虚线也考虑在内，显然图 11 中的每一个节点都应满足（流入资金总量） $\times (1+r_i)$ =流出资金总量，如果不考虑虚线，那么每一个节点应满足（流入资金总量） $\times (1+r_i) \geq$ 流出资金总量。在图 12

中即：

对起始点： $L_{s1}+L_{s2} \leq L_0=1$

对项目 1： $L_{14} \leq L_{s1} \times (1+r_1)$

对项目 2： $L_{24}+L_{23} \leq L_{s2} \times (1+r_2)$

对项目 3： $L_{3e} \leq L_{23} \times (1+r_3)$

对项目 4： $L_{4e} \leq (L_{14}+L_{24}) \times (1+r_4)$

对所有项目有： $L_{ij} \geq 0$

以每一个项目的投资额度（即流入资金总量） ω_i 为研究对象，

$$\omega_i = \sum_k L_{ki}$$

将上述约束以每个项目的投资额度表示出来，则有：

$$\omega_1 + \omega_2 \leq 1$$

$$\omega_4 \leq \omega_1(1 + r_1) + \omega_2(1 + r_2) - \omega_3$$

$$\omega_3 \leq \omega_2(1 + r_2)$$

$$\omega_i \geq 0$$

投资的目标是项目投资额的函数，因此我们的问题就是在上述约束下的最优化问题。

4. 一般情形的抽象及数值解法

下面我们给出问题的一般化表述。

我们使用初始投资日、资金回收日、预期收益率、预期波动率 4 个特性来描述一个投资机会。一个投资机会被表示为 $[ER_i, \alpha_i, t_{1i}, t_{2i}]$ ，下标 i 用于区分不同的投资机会。用 $A = \{[ER_i, \sigma_i, t_{1i}, t_{2i}] \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ 表示包含 N 个投资机会的集合。需要说明的是，这只是一个一般的形式，我们在后面的分析中可以对这个形式进行修改，可以根据实际需要在投资机会描述中去掉预期收益率、预期波动率因素，也可以加入其它因素。

在投资机会集合给定的情况下，总效用函数是由每个投资机会的投入资金的多少决定。

我们用 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$ 表示每个项目的投入资金量，总效用函数表示为 $g(\omega, A)$ 。

另外，我们考虑在任何时刻都可以有外部资金的流入流出的情况。（即放开了前面讨论中初始资金为 1 且之后没有流入流出的限制）。

未来的外部现金流入用下面的方法表示：

$$\{(t_i^e, CF_i^e) \mid i = 1, 2, \dots, K\}$$

t_i^e 表示第 i 笔流入资金何时流入， CF_i^e 则表示第 i 笔流入资金的量。

资金规划的问题就是在给定投资机会集合 A 和外部资金流入的情况下，以总效用函数 $g(\omega, A)$ 最大化为目标求出各个项目投入资金的最优比例 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$

在考虑资金回收利用的情况下，可以归结为如下的最优化问题：

$$\max_{\omega} g(\omega, A)$$

满足：

$$\omega_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{t_{1j} < t_{1i}} \omega_j \leq \sum_{t_k^e \leq t_{1i}} CF_k^e + \sum_{t_{2j} < t_{1i}} \omega_j (1 + r_j) - \omega_i, i = 1, 2, \dots, N$$

其中， ω 、 A 、 $g(\omega, A)$ 的含义如前面所述，分别表示投入资金、投资机会集合和效用函数。第二个约束即在第 i 个投资机会投资之前已经进行了投资（ $t_{1j} < t_{1i}$ ）并且资金尚未回收（ $t_{2j} \geq t_{1i}$ ，等号表示当期回收的资金下一期才可以使用）的投资机会的总投资额加上第 i 个投资的权重不能超过已经流入（ $t_k^e \leq t_{1i}$ ）的外部资金与已经回收项目的回收资金的和。即任何时刻将要花出去的资金不能超过实际持有的资金。

以图 4 中所示的四项目为例，其外部资金流入为：

$$\{(t_{11}, 1)\}$$

即只有最初有资金 1 流入，我们设定其流入时间与第一个项目的投资开始时间相同。投资过程中没有其他的资金流入

$$\max_{\omega} g(\omega, A)$$

$$\omega_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

对约束

$$\sum_{t_{1j} < t_{1i}} \omega_j \leq \sum_{t_k^c \leq t_{1i}} CF_k^e + \sum_{t_{2j} < t_{1i}} \omega_j (1 + r_j) - \omega_i, i = 1, 2, \dots, N$$

可以具体的写成：

$$0 \leq 1 - \omega_1$$

$$\omega_1 \leq 1 - \omega_2$$

$$\omega_1 + \omega_2 \leq 1 + \omega_2(1 + r_2) - \omega_3$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \leq 1 + \omega_1(1 + r_1) + \omega_2(1 + r_2) - \omega_4$$

上面的约束与我们使用图 12 推导出的约束是完全一致的。

我们采用序列二次规划算法（Sequential Quadratic Programming, SQP）⁵可以求得上述问题的数值解。SQP 方法是解决非线性不等式约束下的非线性规划问题最有效的一类方法，该方法通过解二次规划问题来获得原始非线性规划问题的解的最速下降路径，以这个路径来搜索非线性问题的最优解。SQP 方法自 1963 年被提出以来，很多学者对其进行了大量的推广和研究，直至现在对于该方法的研究仍然很活跃（《Sequential Quadratic Programming Methods》，Philip E. Gill, UCSD Department of Mathematics, August 2010）。当然，我们使用的是现成的软件包，在我们试过的几种目标函数下，SQP 方法都较快地获得了满足条件的解。另外，我们最初也使用了传统的“内点法”，与 SQP 方法相比，内点法获取解的耗时更长，而且在“边角解”（约束边界上的解）附近的表现也不如 SQP 方法好。

三、现实投资中的其它问题

1、相同项目的合并

由于不同的项目之间的相互影响是他们在投资时间上的相互重叠导致的，因此如果有两个项目的初始投资日和资金回收日均相等，那么他们对于其他项目的影响是一致的。而且有

⁵ SQP 方法中的“二次”指的是其最优值的搜索方法，并不是要求目标函数是二次函数。

时候这样的项目会导致解的不确定。比如以收益率为目标时，如果这两个投资机会不仅初始投资日和资金回收日相同，预期收益率也相同，那么这两个项目的投资额的总和才对目标函数有影响，它们各自的权重都有一定的任意性。这会导致问题的解的不确定。因此对于这样的项目，我们需要先通过一定方法决定这些投资机会内部最优投资比例，以这个内部最优投资比例将这些投资机会组合成一个整体，再与其他投资机会放在一起考虑连续性投资的规划。合并的方法可以根据投资者个人的喜好或者根据目标函数决定，我们这里默认使用夏普比率最大的方法对这类投资机会进行合并。

即，假设我们初始观察到的项目集合为：

$$A_0 = \{[ER_i, \sigma_i, t_{1i}, t_{2i}] \mid i = 1, 2, \dots, N\}$$

不妨假设待合并的项目正好排在前 k 个，即

$$t_{11} = t_{12} = \dots = t_{1k} \text{ 且 } t_{21} = t_{22} = \dots = t_{2k} = t_2$$

我们首先使用最大化组合夏普比率的方法求出这 k 个项目的最优相对权重：

$$\max_{\omega^*} \frac{\omega^{*'} ER^* - r_f}{\sqrt{\omega^{*'} \Omega^* \omega^*}}$$

其中：

$$\omega^* = (\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1k})', ER^* = (ER_1, ER_2, \dots, ER_k)'$$

$$\Omega^* = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2)$$

满足：

$$\sum_{i=1}^k \omega_{1i} = 1$$

求出权重 ω^* 之后，我们将得到的组合作为一个投资机会 $[\omega^{*'} ER^*, \sqrt{\omega^{*'} \Omega^* \omega^*}, t_1, t_2]$ 与

A_0 中的其他投资机会一起构成新的投资组合：

$$A_1 = \{[\omega^{*'} ER^*, \sqrt{\omega^{*'} \Omega^* \omega^*}, t_1, t_2]\} \cup \{[ER_i, \sigma_i, t_{1i}, t_{2i}] \mid i = k+1, k+2, \dots, N\}$$

如果 A_1 中还有其他的可以合并的投资机会，则重复上面的步骤，直到得到的投资机会集合中没有任何两个投资机会的初始投资日和资金回收日都相同。

对于合并后的投资机会，如果我们在后面的计算中认为其投资权重为 ω_1 ，那么相应的初始

实际投资机会权重应为 $\omega_1 * \omega_{11}, \omega_1 * \omega_{12}, \dots, \omega_1 * \omega_{1k}$ 。

2、连续投资项目的起止

对于经过了上述合并之后的项目集合，我们将对项目集合作进一步的预处理。

记经过了上述合并之后的项目集合为

$$A = \{B_i \mid B_i = [ER_i, \sigma_i, t_{1i}, t_{2i}], i = 1, 2, \dots, M\}$$

其中， B_i 表示第 i 个项目，对任意 $i \neq j$ 有：

$$t_{1i} \neq t_{1j} \text{ 或 } t_{2i} \neq t_{2j}$$

独立项目：对于两个项目 B_i, B_j ，如果

$$[t_{1i}, t_{2i}] \cap [t_{1j}, t_{2j}] = \phi$$

就称项目 B_i, B_j 相互独立。

独立项目集合：两个项目集合 A_1, A_2 ，如果 A_1 中的任一个项目都与 A_2 中的所有项目独立，

那么称项目集合 A_1 与项目集合 A_2 相互独立，记为 $A_1 \perp A_2$ 。

项目集合的划分：对于项目集合 A ，如果存在一组项目集合 $A_1, A_2, \dots, A_k, k \geq 2$ ，满足：

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = A$$

$$A_i \perp A_j, i \neq j$$

则称 A_1, A_2, \dots, A_k 是 A 的一个划分。

最大划分：上述定义中，如果 A_1, A_2, \dots, A_k 都不能继续划分，那么称 A_1, A_2, \dots, A_k 是 A 的最大划分。最大划分情况下， A_i 中的任意一个项目必有另一个同属于 A_i 的项目与它不独立。容易证明最大划分是唯一的。

如果我们需要对项目的独立性的定义添加更多的约束，比如项目收益率不相关等等，关于划分和最大划分的定义不需要发生改变。

3、规划项目的可拆分性

我们使用下面的方法产生一个随机的项目集合：

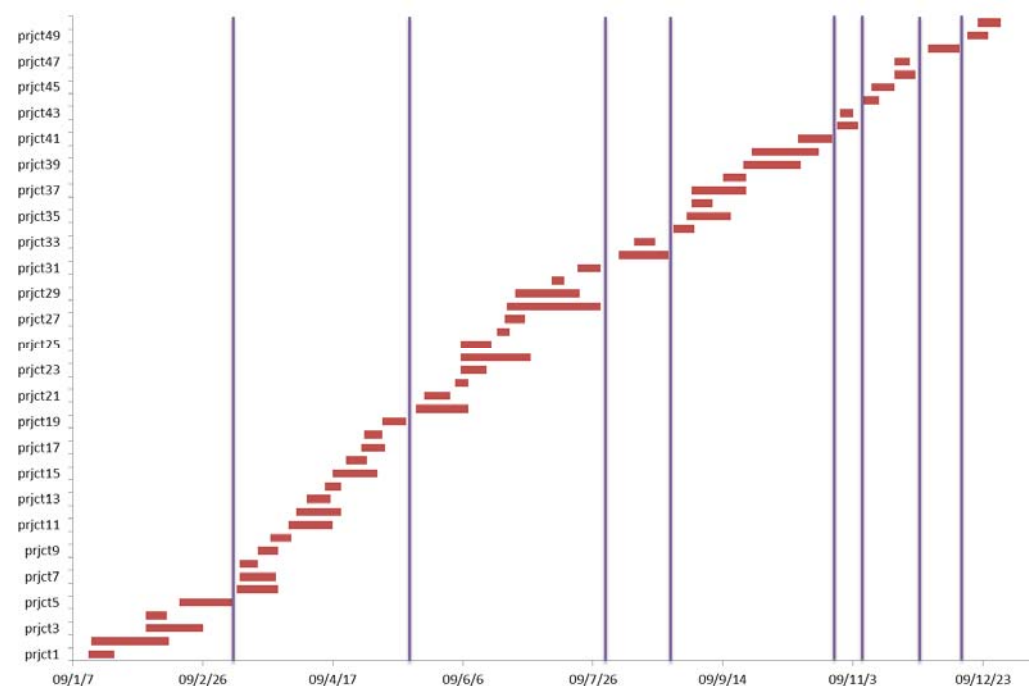
■ 使用参数为 $(-1, 0.5)$ 的对数正态分布产生预期收益率，其均值和方差分别为 0.42 和

0.22

- 使用 $[0.1, 0.3]$ 上的均匀分布产生预期波动率；
- 使用离散均匀分布产生初始投资时间 t_1 ，并令卖出时间 $t_2 = t_1 + 5 + X$ ，其中 X 是服从参数为 0.1 的几何分布的随机变量

项目的总个数为 50，按 t_1 排序之后的项目集合如图 13 所示

图 13：投资机会时间上的相互关联



资料来源：长江证券研究部

如果我们将每个项目认为是一个顶点，不独立的顶点之间是连通的⁶（即 $[t_{1i}, t_{2i}] \cap [t_{1j}, t_{2j}] \neq \emptyset$ ）。则求最大划分的问题就是求解图的连通问题。我们使用经典的图的深度优先遍历算法求解得到如下最大划分：

{1,2,3,4,5}

{6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18,19}

{20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31}

{32,33}

{34,35,36,37,38,39,40,41}

{42,43}

{44,45,46,47}

{48}

⁶ 这里关于顶点的连通的定义与之前正好相反，之前是以资金是否可以流动作为连通与否的标准，而这里则是认为时间上重叠的项目是连通的。

{49,50}

最大划分的每个子集中的项目实际上是连续编号的。⁷如果利用这个性质，可以找到更简单的寻找最大划分的方法。如直接对所有的 t_1, t_2 进行一次比较等等。

这种简便划分方法有两个前提，即：

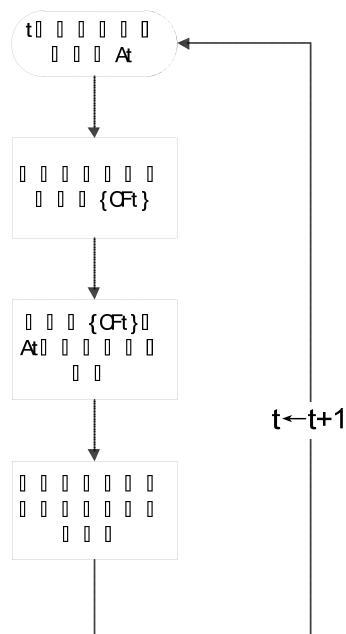
- 项目是按照 t_1 的大小排序进行编号的， t_1 最小的编号为 1， t_1 最大的编号为 50；
- 目前关于项目的独立性的定义仅仅考虑了时间的因素。

由于这两个前提并不总是满足的，因此我们没有采用简便方法而是将其作为图的连通问题来处理。

4、新旧项目集合的衔接

实际投资中，投资机会并不是一下子全部出现的。可能在投资的过程中会观察到新的投资机会。例如在 **Error! Reference source not found.** 所示的例子中，在 t_{11} 时刻，我们需要决定项目 1 的投资额度，但这个时候我们可能没有观察到全部的 4 个投资机会，而只是观察到了项目 1、项目 2、项目 3，在 t_{11} 之后的某个时刻，才观察到第四个投资机会项目 4，而此时，项目 1 已经进行了投资。对于这种情况，我们的处理方法是每次总是按照当前能够观察到的最新项目集合进行规划，不断对之前的决策进行更新。如图 14 流程所示：

图 14：项目不断被观察到时的处理流程



资料来源：长江证券研究部

⁷ 投资机会是可以任意排序的，所以第一个前提总是可以通过一定的变换得到满足。而第二个则显得更为重要，因为一旦我们考虑其他形式的“独立”，则最大子集的这种性质将不复存在，不能通过简单的变换来满足这个前提。

四、 资金规划效果举例和对比

正如报告的开头所提到的，超额收益的来源是正确的投资理念，配置方案的任务是把正确的理念尽可能高效地转化为实际收益。因此我们假设已经对投资机会有了完全正确的预测，以此来检验配置策略对预测信息的利用效率。

我们考虑三种不同的效用函数下的连续投资资金配置结果，并与非连续投资情况配置策略以及简单的“用完所有钱”的策略作比较。项目集合使用上面的一个不可再分子集{6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18,19}。

非连续投资的资金配置方案（我们采用夏普比例为目标）：

$$\max_{\omega} \frac{\omega ER - r_f}{\sqrt{\omega' \Omega \omega}}$$

其中

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T, ER = (ER_1, ER_2, \dots, ER_N)^T$$

$$\Omega = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2)$$

满足

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$$

r_f 取为 5%。

连续投资时的资金配置方案：

$$\max_{\omega} g(\omega, A)$$

满足

$$\omega_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{\substack{t_{1j} < t_{1i} \\ t_{2j} > t_{1i}}} \omega_j \leq 1 - \omega_i, i = 1, 2, \dots, N$$

分别取三种效用函数。

预期收益率最大化目标下，取

$$g(\omega, A) = \sum \omega_i ER_i$$

资金利用率最大目标下，取

$$g(\omega, A) = \sum \omega_i$$

夏普比率最大化目标下，取

$$g(\omega, A) = \frac{\omega' ER - r_f}{\sqrt{\omega' \Omega \omega}}$$

r_f 取为 5%。

“用完所有钱”策略不考虑各投资机会的差异，每遇到投资机会就将持有的资金全部投入。

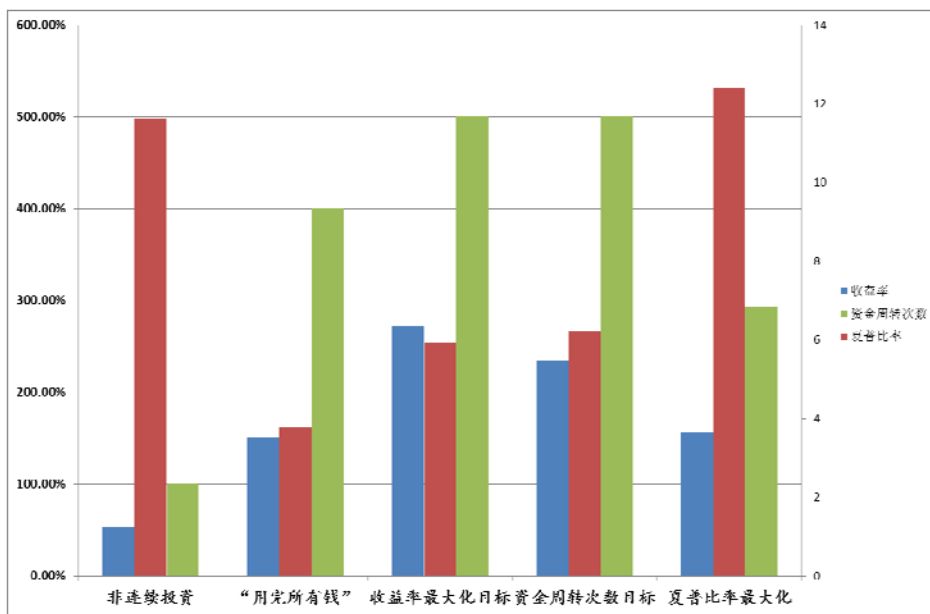
结果如下表所示：

表 2：传统配置方法与连续投资下资金配置方法的比较

| | 收益率 | 夏普比率 | 资金周转次数 |
|-----------|---------|---------|--------|
| 非连续投资策略 | 53.85% | 11.6295 | 1 |
| “用完所有钱”策略 | 150.6% | 3.78 | 4 |
| 收益率最大化目标 | 272.64% | 5.9312 | 5 |
| 夏普比率最大化 | 156.00% | 12.4047 | 2.9396 |
| 资金周转次数目标 | 234.58% | 6.2272 | 5 |

数据来源：长江证券研究部

图 15：传统配置方法与连续投资下的资金配置方法的比较



资料来源：长江证券研究部

可以看出，非连续投资方案的收益率由于对资金的利用不够充分，其收益率明显低于连续投资时的情况；连续投资下，目标明确的配置方案也优于简单的“用完所有钱”策略。

权重配置的具体信息如下：

表 3: 资金配置权重

| 投资机会编号 | 预期收益率 | 收益标准差 | 初始投资日 | 资金回收日 | 非连续规划 | “用完所有钱” | 收益最大 | 资金利用率 | 夏普比率最大 |
|---------|--------|--------|----------|-----------|--------|---------|------|--------|--------|
| prjct6 | 0.5856 | 0.1979 | 2009/3/1 | 2009/3/27 | 0.0482 | 1 | 0 | 0 | 0.1326 |
| prjct7 | 0.3756 | 0.1143 | 2009/3/1 | 2009/3/26 | 0.0926 | 0 | 0 | 0 | 0.2550 |
| prjct8 | 0.4383 | 0.1745 | 2009/3/1 | 2009/3/19 | 0.0464 | 0 | 1 | 1 | 0.1277 |
| prjct9 | 0.6677 | 0.1105 | 2009/3/1 | 2009/3/27 | 0.1760 | 0 | 0 | 0 | 0.4847 |
| prjct10 | 0.4183 | 0.2314 | 2009/3/2 | 2009/4/1 | 0.0252 | 0 | 1 | 1 | 0.0693 |
| prjct11 | 0.6874 | 0.1396 | 2009/3/3 | 2009/4/17 | 0.1136 | 1 | 0 | 0 | 0.3127 |
| prjct12 | 1.0119 | 0.2319 | 2009/4/3 | 2009/4/20 | 0.0606 | 0 | 1 | 0.2857 | 0.1669 |
| prjct13 | 0.6065 | 0.2601 | 2009/4/7 | 2009/4/16 | 0.0289 | 0 | 0 | 0.4286 | 0.0795 |
| prjct14 | 0.4332 | 0.1121 | 2009/4/1 | 2009/4/20 | 0.1111 | 0 | 0 | 0.2857 | 0.3058 |
| prjct15 | 0.2657 | 0.1834 | 2009/4/1 | 2009/5/4 | 0.0255 | 0 | 0 | 0.4286 | 0.0701 |
| prjct16 | 0.3626 | 0.2425 | 2009/4/2 | 2009/4/30 | 0.0199 | 1 | 1 | 0.5714 | 0.0547 |
| prjct17 | 0.1596 | 0.1266 | 2009/4/2 | 2009/5/7 | 0.0321 | 0 | 0 | 0 | 0.0883 |
| prjct18 | 0.3679 | 0.1031 | 2009/4/2 | 2009/5/6 | 0.1115 | 0 | 0 | 0 | 0.3070 |
| prjct19 | 0.4952 | 0.1212 | 2009/5/6 | 2009/5/15 | 0.1085 | 1 | 1 | 1 | 0.2988 |

数据来源：长江证券研究部

以收益率为效用函数时，给出的结果就是在不可再分的子集中选择收益率大、与其他投资机会时间冲突少的；以资金利用率为目标时，选出的就是与其他项目时间冲突少的；以夏普比率为效用函数时，相对于传统投资方案每个项目的投入资金都有大幅度的提高。

分析师介绍

俞文冰，CFA，同济大学数学系统计学专业本科，上海财经大学统计学研究生，曾在中海基金投资研究部工作，目前长江证券研究部担任金融工程首席分析师。

汪鑫，中国科学技术大学近代物理系本科，金融工程硕士，目前在长江证券研究部从事金融工程研究。

对本报告的评价请反馈至长江证券机构客户部

| 姓名 | 分工 | 电话 | E-mail |
|-----|---------|-----------------|------------------------------------|
| 伍朝晖 | 副主管 | (8621) 68752398 | 13564079561 wuzh@cjsc.com.cn |
| 甘 露 | 华东区总经理 | (8621) 68751916 | 13701696936 ganlu@cjsc.com.cn |
| 鞠 雷 | 华南区总经理 | (8621) 68751863 | 13817196202 julei@cjsc.com.cn |
| 程 杨 | 华北区总经理 | (8621) 68753198 | 13564638080 chengyang1@cjsc.com.cn |
| 李劲雪 | 上海私募总经理 | (8621) 68751926 | 13818973382 lijx@cjsc.com.cn |
| 张 晖 | 深圳私募总经理 | (0755) 82766999 | 13502836130 zhanghui1@cjsc.com.cn |

投资评级说明

| | |
|------|---|
| 行业评级 | 报告发布日后的 12 个月内行业股票指数的涨跌幅度相对同期沪深 300 指数的涨跌幅为基准，投资建议的评级标准为： 看好： 相对表现优于市场 中性： 相对表现与市场持平 看淡： 相对表现弱于市场 |
| 公司评级 | 报告发布日后的 12 个月内公司的涨跌幅度相对同期沪深 300 指数的涨跌幅为基准，投资建议的评级标准为： 推荐： 相对大盘涨幅大于 10% 谨慎推荐： 相对大盘涨幅在 5%~10%之间 中性： 相对大盘涨幅在-5%~5%之间 减持： 相对大盘涨幅小于-5% 无投资评级： 由于我们无法获取必要的资料，或者公司面临无法预见结果的重大不确定性事件，或者其他原因，致使我们无法给出明确的投资评级。 |

重要声明

长江证券股份有限公司具有证券投资咨询业务资格，经营证券业务许可证编号：Z24935000。

本报告的作者是基于独立、客观、公正和审慎的原则制作本研究报告。本报告的信息均来源于公开资料，本公司对这些信息的准确性和完整性不作任何保证，也不保证所包含信息和建议不发生任何变更。本公司已力求报告内容的客观、公正，但文中的观点、结论和建议仅供参考，不包含作者对证券价格涨跌或市场走势的确定性判断。报告中的信息或意见并不构成所述证券的买卖出价或征价，投资者据此做出的任何投资决策与本公司和作者无关。

本公司及作者在自身所知情范围内，与本报告中所评价或推荐的证券不存在法律法规要求披露或采取限制、静默措施的利益冲突。

本报告版权仅仅为本公司所有，未经书面许可，任何机构和个人不得以任何形式翻版、复制和发布。如引用须注明出处为长江证券研究部，且不得对本报告进行有悖原意的引用、删节和修改。刊载或者转发本证券研究报告或者摘要的，应当注明本报告的发布人和发布日期，提示使用证券研究报告的风险。未经授权刊载或者转发本报告的，本公司将保留向其追究法律责任的权利。