金融工程

证券研究报告
2018 年 01 月 31 日

海外文献推荐 第 27 期

作者

吴先兴 分析师
SAC 执业证书编号：S1110516120001
wuxianxing@tfzq.com
18616029821

相关报告

1 《金融工程：金融工程-市场情绪一览 2018-01-30》 2018-01-30
2 《金融工程：金融工程-市场情绪一览 2018-01-29》 2018-01-29
3 《金融工程：金融工程-量化选股策略跟踪》 2018-01-28

桥水基金对风险平价和全天候策略的一些思考

关于风险平价一直存在一些争论，桥水基金作为提出者以及最大的风险平价策略的管理者回答了一些关于风险平价的问题。本期文献推荐我们对该报告进行了翻译。本篇报告首先阐述了风险平价策略的原理，然后介绍了桥水基金的全天候策略，并比较了该策略与传统策略的表现。最后，桥水基金回复了关于风险平价的几种质疑。

风险因子的风险平价

投资组合构建与风险预算是许多学者和从业人员关注的焦点，特别是，分散化投资已经引起了很多人的兴趣。在这篇论文里，我们通过将组合风险分解到不同风险因子上实现投资组合风险分散化的目的：首先，我们推导了风险因子的风险贡献和资产的风险贡献之间的关系，然后我们将基于风险因子的风险平价策略设计成最优化问题，并且尝试使用不同形式的目标函数进行求解。

风险提示：本报告不构成投资建议。

内容目录

图表目录

桥水基金对风险平价和全天候策略的一些思考

文献来源：Ray Dalio, Bob Prince, Greg Jensen (2015), our thoughts about risk parity and all weather, Bridgewater Associates, LP

https://www.bridgewater.com/resources/our-thoughts-about-risk-parity-and-all-weather.pdf（下载地址）

推荐原因：关于风险平价一直存在一些争论，桥水基金作为提出者以及最大的风险平价策略的管理者回答了一些关于风险平价的问题。本期文献推荐我们对该报告进行了翻译。本篇报告首先阐述了风险平价策略的原理，然后介绍了桥水基金的全天候策略，并比较了该策略与传统策略的表现。最后，桥水基金回复了关于风险平价的几种质疑。

1. 1.风险平价概述

1.1. 1.1 风险平价策略的原理

风险平价是一种调整预期风险与预期收益的方法，以满足投资分散化以及提升收益风险比等目标。一旦投资组合的分散化程度以及收益风险比得到提升，投资组合的风险和收益水平就会朝着我们想要的方向变动。

在开始讨论风险以前，我们需要注意：标准差并没有准确地刻画风险。我们主要关心的是收益率降低的风险，而标准差是收益率围绕某个特定数值附近变动的波动性的近似表达，所以它并没有捕捉到期望收益出错以及收益率降低的风险。但不论使用什么形式的风险和风险测度，最需要了解的是：分散化降低了风险，并且可以在不损伤收益的同时降低风险。

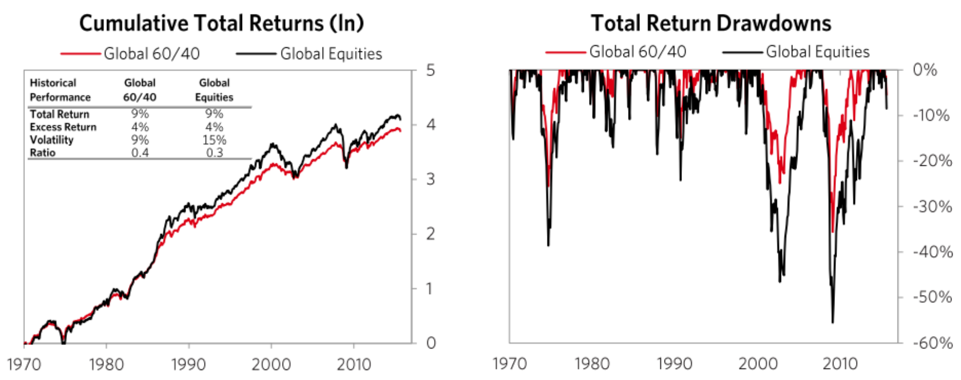
为了理解这个概念，想象你预期股票比债券拥有更高的收益，但是你不希望把一切赌在股票上，因为你可能出错。所以，你希望拥有一个由股票和债券组成的分散化组合。你可能认为在两种资产上各投资一半的钱就对了，但事实并非如此。实际上股票的波动支配着整个组合，因为它波动的幅度是债券的两倍左右。这种组合也会降低你的期望收益，因为你预期债券比股票的期望收益低。

这就是在风险平价诞生以前，绝大多数投资者所面临的两难抉择。换个角度，如果你加大债券的杠杆，以此来获得一个相近的波动性，债券的期望风险和期望收益率就都会增加到一个和股票相当的水平。这样加杠杆将会提高债券的预期收益，因为债券的预期收益比借入现金的成本高，所以借入现金买更多债券会使得收益更多。因此，通过配置 50%股票和 50%加杠杆的债券（类似于在这两者上均配置 50%的风险和收益），你将在股票和债券上等额下注。尽管杠杆给组合的债券部分带来了额外的波动，但是增加的债券风险却降低了整个投资组合的风险。

举个例子。如果你过去 20 年将 50%的资金配置在全球的股票市场，50%的资金配置在全球的债券市场。你的组合收益率与股票市场的相关程度将高达 98%，最终收益率为 6.5%。为了实现分散化，你需要使股票和债券对你组合的影响程度相当。你可以通过从股票中拿出更多钱购买债券来实现。因此在这段时期，你需要将资产组合从 50/50 调整为 25%股票和 75%债券。如果你这么做了，你将达到你的分散化目标，同时降低约 3%的风险。但你也会将回报降低大约 0.5%。换个角度，如果你加大债券杠杆，使股票和债券具有相近的风险水平，组合整体的风险将和 50/50 组合几乎一样（即 7%），而收益将提高大约 1.5%（从 6.5%提高至 8.0%）。这是因为风险均衡之后收益风险比得到提升导致的。

另一个例子。一个传统的投资组合配置在股票和债券的资金比例大约是 60/40。这个 60/40 的股票/债券组合看起来比较分散化，但因为股票比债券的波动性要大很多，40%的债券并没有给这个组合带来实质性的分散化效果。这个组合的收益与其股票部分的相关性高达 98%。最终，这个 60/40 组合虽然比 100%的股票组合拥有更小的风险和更低的收益，但从图 1 可以看到，60/40 组合的风险并没有降低太多，回撤也没有发生太大变化。没有考虑风险平价之前，大多数投资组合的风险收益状况都与之相似。

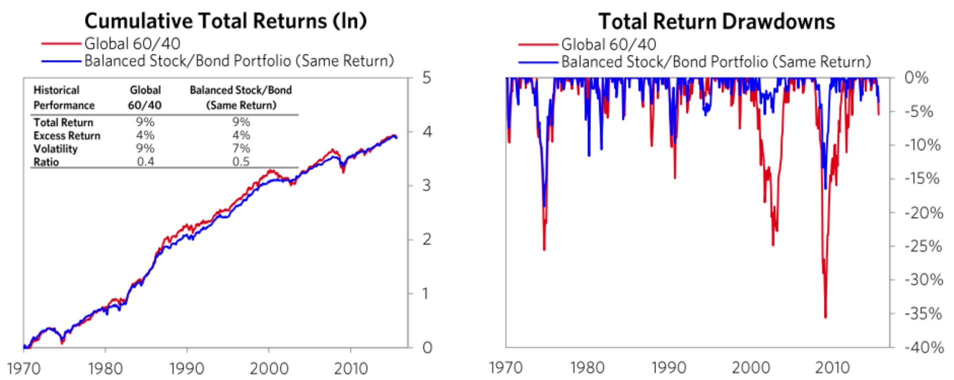
图 1：60/40 组合与纯股票组合的累计收益和回撤



资料来源：天风证券研究所

现在，考虑一个新的组合：借入资金购买债券，使得债券与股票部分有相近的风险水平，并使得组合的期望收益和 60/40 组合的期望收益相同。这个组合将达到与 60/40 相似的收益，而风险下降 2%，组合的回撤明显变小，如图 2。

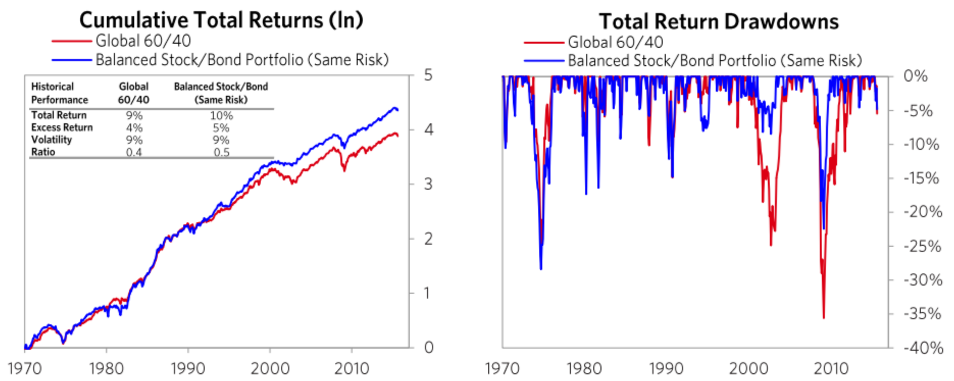
图 2：同等收益条件下 60/40 组合与均衡的股票/债券组合的表现差异



资料来源：天风证券研究所

最重要的是，组合的收益风险比提高了三分之一（从 0.37 提高到 0.5）。如果调整杠杆使得两个组合的风险水平相同，则风险平价组合的收益将比 60/40 组合的高 1%。如图 3，在风险相同的前提下，两个组合回撤情况相近，但是风险平价组合具有更小的尾部风险，因为它的风险暴露在两个资产而不是一个资产上。

图 3：同等风险条件下 60/40 组合与均衡的股票/债券组合的表现差异



资料来源：天风证券研究所

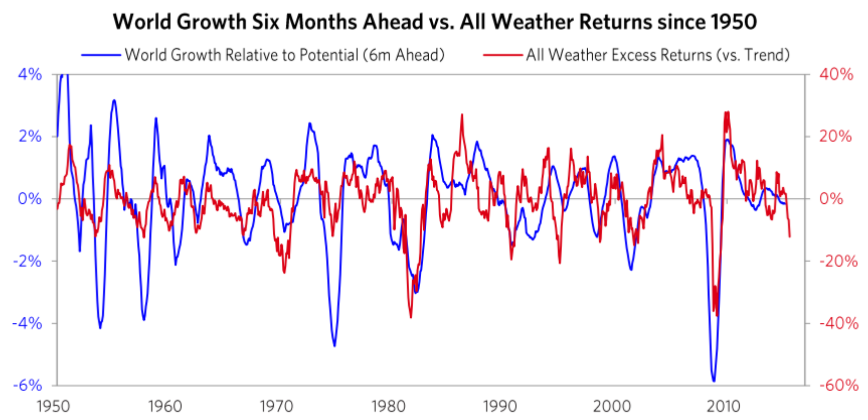
我们通过这个非常简单的例子向您传达了我们的观点，同样的原理适用于所有的资产类别。以这样的方式在投资组合中加入更多类型的资产，可以在保持收益水平不变的条件下，降低组合的风险。换句话说，通过给低风险的资产加杠杆，给高风险的资产减杠杆，从而构建更为均衡的投资组合。这就是风险平价。

1.2. 1.2 风险平价的风险

当这个分散化组合的收益率低于现金借入的成本时，风险平价组合就会带来亏损。只有当央行的紧缩政策将贴现率提升到足以驱使资金从其他资产回流到现金资产时（其他资产的风险溢价不够高），这种现象才会发生。尽管这种现象可能短期存在，但是一个分散化投资组合长期跑输于现金资产是很稀有的事情。因为如此高的折现率是一个经济体不能接受的。一旦出现这种情况，央行会使用宽松的货币政策来刺激投资，如大萧条和 2008 年金融危机期间。在这些表现比较差的时期，风险平价组合的表现仍然优于 60/40，并且比传统组合恢复得更快，因为它有更高的收益风险比。

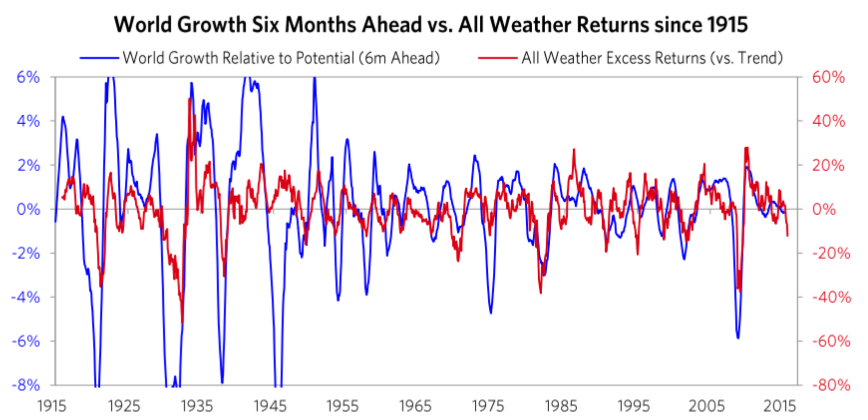
不同的投资经理构建的风险平价组合也不尽相同，我们不能逐一评价。我们仅以我们自己的全天候风险平价组合来说明风险平价的财富效应。图 4 图 5 分别描述了自 1950 年和自 1915 年以来的世界经济增长（未来 6 个月）与桥水全天候策略的超额收益率（组合收益率减现金资产收益率）。可以看到全天候策略的表现在一定程度上可以预测未来 6 个月的经济增长情况。其背后的逻辑为：当全天候组合或者其他较好的风险平价组合跑输于现金资产时，说明当期存在一个负的财富效应，投资活动往往受到抑制，这对经济体是不利的。因此美联储或者其他的央行很可能会采取措施刺激经济增长，防止这种现象一直持续。

图 4：世界经济增长与全天候策略收益（自 1950 年）



资料来源：天风证券研究所

图 5：世界经济增长与全天候策略收益（自 1915 年）



资料来源：天风证券研究所

从风险大小的角度而言，全天候策略表现最坏的时候也没有低于不可恢复的临界点（当恢复所需的收益率高得不现实时称为不可恢复），而使用其他资产配置方法的产品却产生了无法接受的损失。风险平价组合在最坏的时候表现显著优于传统组合，并且长期来看拥有更高的收益。

如果货币政策和财政政策不能有效地修复经济萧条，那对我们来说是非常危险的。如果这种现象发生，我们会比之前更想把资产投入到分散风险的组合中，尤其是我们的全天候策略。它们足够分散化，并且可以抵御这种场景。什么是好的替代品？在这种场景之下，我们不会集中于权益投资，因为我们可以看到经济下行，并且风险溢价提高了很多。我们也不会集中于债券，因为中央银行很可能会大量发行货币，使得货币贬值。我们也不会持有现金，因为现金已经有一个明显的负的收益，并且央行希望让它降得更低。

1.3. 1.3 不同的风险平价策略

尽管我们不是其他风险平价策略的专家，我们仍相信其他投资经理在实现风险平价的途径方面是一致的，但不同也是从这里开始的。例如，某些风险平价投资经理基于他们对市场的认知去主动管理头寸，希望能获得 alpha 超额。在我们的全天候策略中，我们就没有采取主动管理，因为我们想给我们的客户纯 beta 收益。我们也可以理解一些经理追涨杀跌，因为他们认为这种的变化会持续，并且在价格降低的时候，波动会加大。然而我们却会反向操作，因为我们需要再平衡我们的资产组合以保持一个固定的战略配置比例。

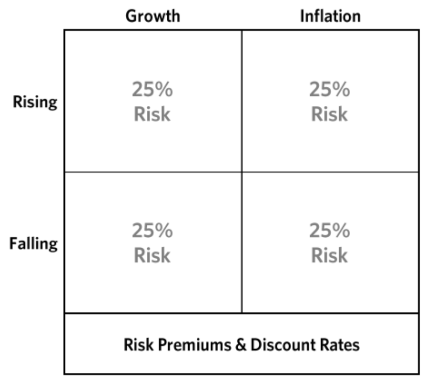
2. 2.桥水全天候策略

我们对资产进行调整使得他们满足风险平价，然后我们将 25%的资金配置在经济增长超预期时会表现好的资产上，25%配置在经济增长低于预期时表现好的资产上， 25%配置在通货膨胀超预期时表现好的资产上，25%配置在通货膨胀低于预期时表现好的资产上。

这种做法看似简单，但其背后的考虑却不那么简单。资产的价值等于该资产能够带来的未来现金流的现值。众多投资者在不同的资产进行比较以实现高买低卖的目的。因为如此多的人在努力地做这件事，所以市场通常是比较有效的。这是在创造 alpha，我们只在我们的纯 alpha 策略里这么操作。在我们的全天候策略里，我们假设我们不知道所有资产的相对表现。所以我们试图按合适比例购买所有的股票、债券、大宗商品，从而实现分散化的目的。

因为所有的资产是按照它们未来现金流量现值来定价的，所以资产定价需要依据未来的经济情景进行折现，因为不同的宏观情景会影响未来现金流。例如，股票的价格约等于风险溢价调整后其未来收益的现值，隐含在这个定价格式中的变量包括预期的收益/现金流的增长率以及折现率。如果实际增长率高于预期增长率或者实际折现率低于预期，股价会上升，反之则反是。而增长率和折现率与经济增长、通货膨胀以及货币政策的紧缩程度息息相关。类似的，经济增长、通货膨胀以及货币政策的紧缩程度以同样的方式影响着债券和其他资产的表现。了解了这些，比如股票在经济上行的时候表现好，债券在经济下行或者通货膨胀率降低的时候表现好，商品在增长率高、通货膨胀率高的时候表现好等等，我们可以平衡投资组合，使其在不同情境下有相近的暴露。因为经济增长和通货膨胀是未来现金流量变化最大的两个驱动因素，所以我们想把 25%风险均衡后的资产放入图 6 的每一个盒子中。根据我们的研究结果，这种组合构建方法相比 60/40 组合降低了三分之一的风险，这意味着一个人可以在承担相同风险的情况下多获得大约 50%的超额收益。自从 1996 我们构建这个策略以来，它承受住了各个国家的压力测试并且表现良好，它的表现与我们的预期基本一致。

图 6：桥水全天候策略



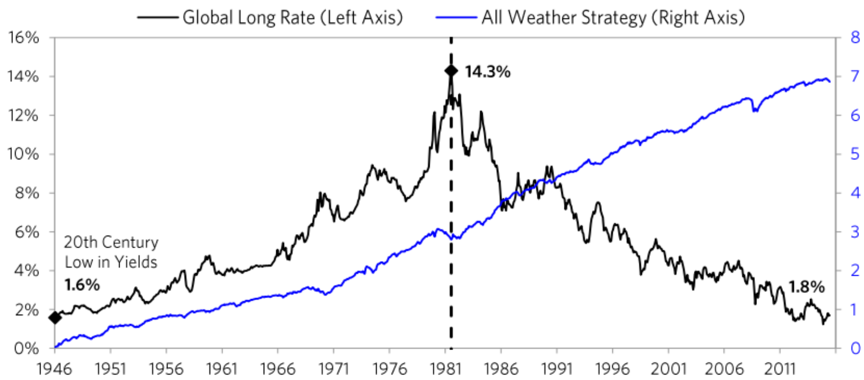
资料来源：天风证券研究所

3. 3.对风险平价的质疑

3.1. 3.1 全天候策略是否会对债市变动更加敏感

虽然投资组合中投资于债券的比例高于其他波动性更强的资产，但是这并不意味该投资组合对于债市的变动更加敏感。因为投资组合已经实现了很好的分散化，当利率上升或者下降时，它的表现没有系统性的偏向。例如，当债券从它的最低点走到最高点，这个分散化组合的年化收益率是 8.7%，而一个 60/40 的股票债券组合的年化收益率是 7.6%。在 20 世纪 70 年代的通胀严重的时期，债券是一个很差的投资工具，此时分散化投资组合的表现与它在 20 世纪 80 年代（通货紧缩时期）的表现相近，如图 7。这是因为这个资产组合是分散化的，以至于不会暴露于任何特定的经济环境。

图 7：全球长期利率与全天候策略累计收益



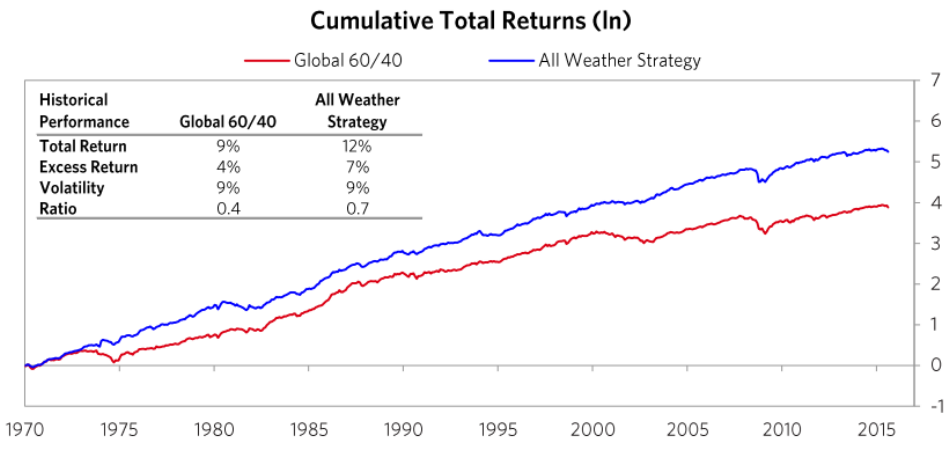
资料来源：天风证券研究所

3.2. 3.2 为什么近期全天候策略比传统策略的表现差

当环境恰好对某种资产有利，并且一个不够分散的投资组合集中于此项资产时，该组合就会比一个分散化组合表现好。过去三年，股票是表现最好的资产。结果，集中于股票投资的传统投资组合比均衡后的投资组合表现好。

自 1970 年起，分散化投资组合相较于同等风险的传统投资组合，收益率增加了大约 3%。如图 8。同样的，这个效率上的提升可以表现为同等收益水平下组合风险的减小。

图 8：60/40 组合与全天候策略的累计收益率



资料来源：天风证券研究所

被动型分散化组合的表现再好，也无法保证在每一个时间段都能比传统投资组合表现好。传统组合的暂时性占优并没有超出我们的预料，风险平价组合的持有者们也应该预期到这种情况的发生。为了让投资者有一个合理的期望，图 9 展示了全天候策略在不同时间框架下战胜一个典型的传统投资组合的频率。任意给定一年，全天候策略跑赢 60/40 策略的频率都大于 50%。随着时间长度的增加，全天候组合跑赢传统投资组合的可能性也在增加。这是因为一个传统投资组合的表现依赖于单项资产，然而任何单项资产的收益率都不可能一直高于其他资产。

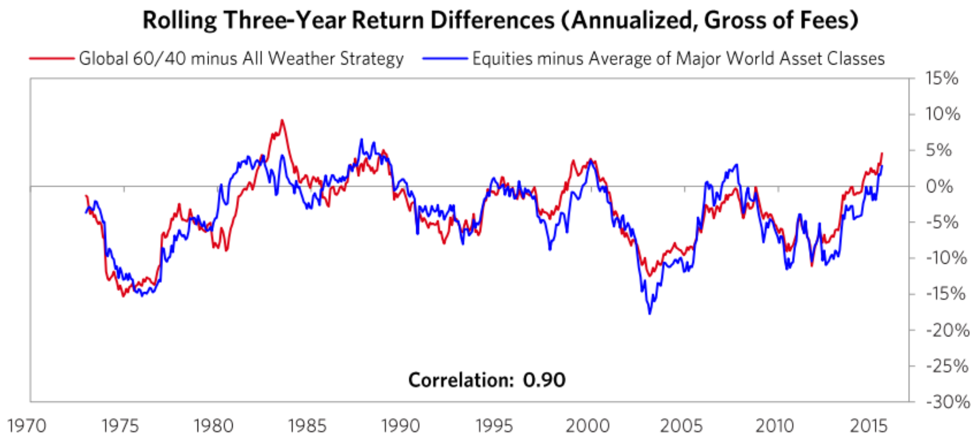
图 9：自 1925 年起全天候策略相比 60/40 组合的胜率

% of Periods since 1925 that All Weather Strategy Outperformed Global 60/40	
Rolling 1-Year Returns	58%
Rolling 3-Year Returns	62%
Rolling 5-Year Returns	65%
Rolling 10-Year Returns	72%
Rolling 20-Year Returns	80%

资料来源：天风证券研究所

我们已经听闻了很多关于为什么近些年全天候策略跑输于传统策略的理论，但是真正的原因其实很简单。像我们说的，如果集中化的资产组合中的某个重要单项资产恰好表现最佳，那么这个集中化的资产组合当然会跑赢一个更加分散化的组合。图 10 说明了这一点。红线是 60/40 组合收益率与全天候策略的收益率之差，正值表示 60/40 组合的表现优于全天候组合，蓝线是股票收益率与所有资产收益率的均值之差，正值表示股票收益率高于所有资产的平均收益率。可以看到，集中化组合相对于全天候策略的表现可以完全由股票相对于所有资产收益率均值的表现来解释。

图 10：60/40 组合与全天候策略收益率差异 vs 纯权益与各类资产收益率均值的差异



资料来源：天风证券研究所

4. 4.结论

投资者关心如何在现有的环境中投资是可以理解的。现金是一种投资选择，但无疑现金资产的收益性太差，并且控制着现金流通量的中央银行正试图使它的收益更低。非均衡的组合也是一种选择，但是需要投资者知道在当前环境之下哪种资产会表现更好。另一种选择就是分散化投资组合。

我们不喜欢任何一种选择，但是我们不能将它们随意捏造成我们想要的样子。我们研究了低收益率环境下的风险溢价、资产定价以及两者如何与经济环境、货币政策、流动性以及货币政策周期性终点联系起来，正是这些研究让我们创造了我们的“最优组合策略”。在这个策略中，我们将更加均衡的 beta 和风险更低的 alpha 结合起来，以适应当前的投资环境并获得更好的长期收益。

我们认为最好的选择是：以一个均衡的投资组合作为 beta 部分，可能的话，以一个大小适当、均衡的 alpha 进行补充。对那些持有集中化组合的投资者，转向均衡组合是最有效的。值得一提的是，在金融危机来临的时候（1929 年或 2008 年），一个分散化的投资组合比传统的集中化组合要安全得多。

风险因子的风险平价

文献来源：Thierry, R. and Guillaume, W. (2013). Risk Parity Portfolios with Risk Factors. MPRA Paper No. 44017.

推荐原因：投资组合构建与风险预算是许多学者和从业人员关注的焦点，特别是，分散化投资已经引起了很多人的兴趣。在这篇论文里，我们通过将组合风险分解到不同风险因子上实现投资组合风险分散化的目的：首先，我们推导了风险因子的风险贡献和资产的风险贡献之间的关系，然后，我们将基于风险因子的风险平价投资策略设计成最优化问题，并且尝试使用不同形式的目标函数进行求解。

5. 1.简介

虽然 Markowitz 的投资组合理论仍然有较多的应用，但这种方法的可操作性较差。近年来等权重组合、最小方差组合、最大多样化组合、风险平价组合、风险预算或多样化风险平价组合策略相继兴起，这些策略为构建分散化投资组合风险提供了更加美妙和系统的方法。

然而不幸的是，以上投资组合构建方法很可能将投资组合的风险集中在几种主要的风险因子上。Meucci（2009）使用主成分分析对投资组合风险分散化的研究为解决这一问题提供了线索。本文中我们把 Meucci（2009）的方法与 Bruder and Roncalli（2012）的风险预算方法结合起来，探究基于风险因子的风险分散化策略。当最大化风险分散程度时，我们的做法等价于分散化“真正的”风险来源，并且通常会得出各个风险因子的风险贡献率相等的最优解。因此，我们将这种方法称之为“风险因子的风险平价”策略。风险因子的风险平价是通过将风险平均分配到每种风险因子上，避免投资组合的风险暴露在单一类别的风险敞口上，从而实现风险分散化的目的。

以等权重组合为例。假设风险资产的数量大于风险因子（$n > m$），如有 4 种风险资产和 3 个风险因子，线性因子模型（$R_t = A\mathcal{F}_t + \mathcal{E}_t$，$R_t$为资产收益率矩阵，$\mathcal{F}_t$的为风险因子收益率矩阵）的载荷矩阵 A 为：

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.5 \\ 1.1 & 0.5 & 0 \\ 1.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

三个风险因子之间没有相关性并且它们的波动率分别为 20%，10%和 10%，特异质波动（线性因子模型的残差）的协方差矩阵为 10%，15%，10%和 15%的对角矩阵$\mathbf{D}$。风险资产收益的相关系数矩阵为$\boldsymbol{\rho}$（单位：百分比），且它们的波动率分别为 21.19%，27.09%，26.25%和 23.04%：

$$\rho = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 & 0 \\ 69 & 100 & 0 & 0 \\ 79.5 & 76.4 & 100 & 0 \\ 66.2 & 57.2 & 66.3 & 100 \end{pmatrix}$$

在图 11 中，我们注意到虽然等权重组合中的各个风险资产的风险贡献率近似相同，但是其风险因子的风险贡献相差很大（第一个风险因子占了 80%的风险贡献）：

图 11：等权重资产组合的风险分解

Risk decomposition of the equally-weighted

(a) Along assets $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$

$\sigma(x) = 21.40\%$	x_i	$\mathcal{MR}(\mathcal{A}_i)$	$\mathcal{RC}(\mathcal{A}_i)$	$\mathcal{RC}^*(\mathcal{A}_i)$
$\mathcal{A}_1$	25.00%	18.81%	4.70%	21.97%
$\mathcal{A}_2$	25.00%	23.72%	5.93%	27.71%
$\mathcal{A}_3$	25.00%	24.24%	6.06%	28.32%
$\mathcal{A}_4$	25.00%	18.83%	4.71%	22.00%

(b) Along factors $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_m$ and $\tilde{\mathcal{F}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{F}}_{n-m}$

$\sigma(y) = 27.45\%$	y_i	$\mathcal{MR}(\mathcal{F}_i)$	$\mathcal{RC}(\mathcal{F}_i)$	$\mathcal{RC}^*(\mathcal{F}_i)$
$\mathcal{F}_1$	100.00%	17.22%	17.22%	80.49%
$\mathcal{F}_2$	22.50%	9.07%	2.04%	9.53%
$\mathcal{F}_3$	35.00%	6.06%	2.12%	9.91%
$\tilde{\mathcal{F}}_1$	2.75%	0.52%	0.01%	0.07%

资料来源：天风证券研究所

本文中，我们首先推导了风险因子的风险贡献和资产的风险贡献之间的关系；然后，我们将基于风险因子的风险平价策略设计成最优化问题，并且尝试使用不同形式的目标函数进行求解。

2.风险因子的风险贡献和资产的风险贡献之间的关系

设有 n 个资产$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$和 m 个风险因子$\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_m\}$，$R_t$为（n*1）种资产 t 时刻的收益率矩阵，其协方差为Σ，$\mathcal{F}_t$为（m*1）种风险因子 t 时刻的收益率矩阵，其协方差为Ω。则有以下线性因子模型式（1）:

$$R_t = A\mathcal{F}_t + \mathcal{E}_t \qquad (1)$$

其中$\mathcal{F}_t$与$\mathcal{E}_t$无相关性，并且$\mathcal{E}_t$服从于（n*1）维的独立同分布，并且协方差为 D。A 是（n*m）的载荷矩阵。根据式（1），很容易推导出二阶等式关系为：

$$\Sigma = A\Omega A^T + D$$

在投资组合层面上，我们用 n×1 的向量 x 表示资产的暴露，用 m×1 的向量 y 表示投资组合风险因子的暴露。则 t 时刻的收益损失函数（P&L）（2）为

$$\Pi_t = x^T R_t = x^T A\mathcal{F}_t + x^T \varepsilon_t = y^T \mathcal{F}_t + \eta_t \qquad (2)$$

根据$y = A^T x$和$\eta_t = x^T \varepsilon_t$，我们用B表示A的转置，$B^+$表示B的广义逆矩阵，e 为 B 的核，等于$(I_n - B^+ \mathrm{B})x$。这样我们可以得到（3）:

$$x = B^+ y + e \qquad (3)$$

现在考虑一个凸的风险度量$\mathcal{R}$，我们有$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y, e)$，其中扰动项$e$表示在投资组合中每个资产所具有的特定的风险。因此对于某一个资产i，其边际风险贡献可以表示为：

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \mathcal{R}(y,e)}{\partial y} B\right)_i + \left(\frac{\partial \mathcal{R}(y,e)}{\partial e}(I_n - B^+ B)\right)_i \qquad (4)$$

公式（4）的分解法并不是很简便，因为它将 x 分解为y和e，x也可被分解为式（5），其中$\tilde{B}^+$是B^+的左零空间：

$$\mathcal{X} = \left(B^+ \ \tilde{B}^+\right)\begin{pmatrix} y \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \bar{B}^T \bar{y} \qquad (5)$$

现在我们可以得到结论：资产的边际风险贡献和因子的边际风险贡献有如下关系：

$$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y} B + \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}} \tilde{B} \qquad (6)$$

可继续推导出第j个风险因子的边际风险为$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial y_j} = \left(A^+ \frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x^T}\right)_j$，第$j$个残差因子的边际风

险为$\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial \tilde{y}_i}=(\tilde{B}\frac{\partial \mathcal{R}(x)}{\partial x^T})_j$。

如果再考虑到资产组合的波动$\sigma=\sqrt{x^T\sum x}$，可以通过欧拉分解法获取每个因子的风险贡献：

第j个风险因子 $\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j)=\frac{(A^Tx)_j\cdot(A^+\sum x)_j}{\sigma(x)}$ 第j个残差因子 $\mathcal{RC}(\tilde{\mathcal{F}}_j)=\frac{(\tilde{B}x)_j\cdot(\tilde{B}\sum x)_j}{\sigma(x)}$

易证上述风险贡献满足欧拉分解原则，即：

$$\mathcal{R}(x)=\sum_{j=1}^{m}\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j)+\sum_{j=1}^{n-m}\mathcal{RC}(\tilde{\mathcal{F}}_j) \quad (7)$$

第j个风险因子的贡献率：

$$\mathcal{RC}_j=\frac{\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j)}{\mathcal{R}(x)}=\frac{(A^Tx)_j\cdot(A^+\sum x)_j}{x^T\sum x} \quad (8)$$

3.优化问题求解

5.1. 3.1 匹配风险贡献率

接下来，我们先考虑使用风险因子的风险预算来构建资产投资组合，风险因子的风险平价仅需要将所有风险因子的风险贡献设为相等即可。多样化的难点在于怎么将风险贡献率匹配到对应的风险因子上。我们倾向于构建一个目标公式（9）：

$$\boldsymbol{\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j)=b_j\mathcal{R}(x)} \quad (9)$$

然后将（9）转化为类似于 Bruder 和 Roncalli（2012）的二次规划问题（10）：

$$\boldsymbol{(y^*,\tilde{y}^*)=\arg min\sum_{j=1}^{m}(\mathcal{RC}(\mathcal{F}_j)-b_j\mathcal{R}(y,\tilde{y}))^2} \quad (10)$$

$$\mathbf{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{1^T(B^+y+\tilde{B}^+\tilde{y})=1}\\ \boldsymbol{0\preceq B^+y+\tilde{B}^+\tilde{y}\preceq 1}\end{cases}$$

符号$\preceq$表示元素之间的不等关系。由于（10）的一阶条件中包含偏微分方程，（10）较难求解。现在我们再附加两个条件：风险因子权重非负限制，风险因子风险资产的权重都非负的限制，从而简化目标函数的求解。当风险因子权重为正时，我们只需要将风险因子反向旋转，从而保证风险因子的权重为非负。

5.2. 3.2 风险因子的配置权重非负

Bruder 和 Roncalli（2012）证明了：

$$\boldsymbol{x^*=\arg min\,R(x)}\quad \mathbf{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{\mathcal{RC}(A_j)=b_j\mathcal{R}(x)}\\ \boldsymbol{1^Tx=1}\\ \boldsymbol{x\succeq 0}\end{cases}$$

这个问题的求解可以转换成以下的形式：

$$\boldsymbol{z^*=\arg min\,R(z)}\quad \mathbf{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m}b_i lnz_i\geq c}\\ \boldsymbol{z\succeq 0}\end{cases}$$

这种形式就可以求出一个唯一解$\boldsymbol{z^*}$，从而求出投资组合风险资产的最优解$\boldsymbol{x^*}$，即$\boldsymbol{z^*/(1^Tz^*)}$。而根据公式（5），我们还可以将$\boldsymbol{x}$分解为风险因子暴露$\boldsymbol{(y^*,\tilde{y}^*)}$，从而得到

$$\boldsymbol{(y^*,\tilde{y}^*)=\arg min\,R(y,\tilde{y})}\quad \mathbf{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{\sum_{j=1}^{m}b_j lny_j\geq c}\\ \boldsymbol{y\succeq 0}\end{cases}。$$

5.3. 3.3 风险资产的权重非负

在风险因子的配置权重非负的基础上，我们还可以加上资产权重非负的限制条件，即：

$$(y^*,\tilde{y}^*) = \arg min\, R(y,\tilde{y}) \quad s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} b_j ln y_j \geq c \\ y \geq 0 \\ B^+ y + \tilde{B}^+ \tilde{y} \geq 0 \end{cases}$$

解决了上述问题后，我们证明了带有风险因子的风险平价组合解决了两个重要的不变性问题：重复不变性和 Polico 不变性。Choueifaty 等人(2011)表明，资产的风险平价(ERC)没有解决重复不变性问题，即如果一个资产重复出现，ERC 组合就会发生变化；并且他们还表示一个多样化组合应该具有另一个理想性质——Polico 不变性——即在一个已有的资产池中增加一个资产，如果该资产是已有资产的正的线性组合，则不会影响到投资组合原有的权重。

6. 4.结论

本文将 Bruder 和 Roncalli（2012）中资产的风险平价方法扩展到风险因子的风险平价方法。当最优化问题存在多个解时，这个问题变得更加棘手，特别是当我们加入非负限制之后，并不一定能够得到最优解。因此我们讨论了多种风险因子的风险平价中的最优化问题的求解方法。

本文还展示了风险因子的风险平价/风险预算在资产定价模型、分散化对冲基金的投资组合以及养老金的资产配置等问题上的应用。我们研究的初步结果，打开了一扇重新考量养老基金的长期投资政策的大门。

分析师声明

本报告署名分析师在此声明：我们具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格或相当的专业胜任能力，本报告所表述的所有观点均准确地反映了我们对标的证券和发行人的个人看法。我们所得报酬的任何部分不曾与，不与，也将不会与本报告中的具体投资建议或观点有直接或间接联系。

一般声明

除非另有规定，本报告中的所有材料版权均属天风证券股份有限公司（已获中国证监会许可的证券投资咨询业务资格）及其附属机构（以下统称“天风证券”）。未经天风证券事先书面授权，不得以任何方式修改、发送或者复制本报告及其所包含的材料、内容。所有本报告中使用的商标、服务标识及标记均为天风证券的商标、服务标识及标记。

本报告是机密的，仅供我们的客户使用，天风证券不因收件人收到本报告而视其为天风证券的客户。本报告中的信息均来源于我们认为可靠的已公开资料，但天风证券对这些信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告中的信息、意见等均仅供客户参考，不构成所述证券买卖的出价或征价邀请或要约。该等信息、意见并未考虑到获取本报告人员的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对任何人的个人推荐。客户应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求，必要时就法律、商业、财务、税收等方面咨询专家的意见。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，天风证券及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本报告所载的意见、评估及预测仅为本报告出具日的观点和判断。该等意见、评估及预测无需通知即可随时更改。过往的表现亦不应作为日后表现的预示和担保。在不同时期，天风证券可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。

天风证券的销售人员、交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。天风证券没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。天风证券的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

特别声明

在法律许可的情况下，天风证券可能会持有本报告中提及公司所发行的证券并进行交易，也可能为这些公司提供或争取提供投资银行、财务顾问和金融产品等各种金融服务。因此，投资者应当考虑到天风证券及/或其相关人员可能存在影响本报告观点客观性的潜在利益冲突，投资者请勿将本报告视为投资或其他决定的唯一参考依据。

投资评级声明

类别	说明	评级	体系
股票投资评级	自报告日后的 6 个月内，相对同期沪深 300 指数的涨跌幅	买入	预期股价相对收益 20%以上
		增持	预期股价相对收益 10%-20%
		持有	预期股价相对收益-10%-10%
		卖出	预期股价相对收益-10%以下
行业投资评级	自报告日后的 6 个月内，相对同期沪深 300 指数的涨跌幅	强于大市	预期行业指数涨幅 5%以上
		中性	预期行业指数涨幅-5%-5%
		弱于大市	预期行业指数涨幅-5%以下

天风证券研究

北京	武汉	上海	深圳
北京市西城区佟麟阁路 36 号	湖北武汉市武昌区中南路 99 号保利广场 A 座 37 楼	上海市浦东新区兰花路 333 号 333 世纪大厦 20 楼	深圳市福田区益田路 4068 号卓越时代广场 36 楼
邮编：100031	邮编：430071	邮编：201204	邮编：518017
邮箱：research@tfzq.com	电话：(8627)-87618889	电话：(8621)-68815388	电话：(86755)-82566970
	传真：(8627)-87618863	传真：(8621)-68812910	传真：(86755)-23913441
	邮箱：research@tfzq.com	邮箱：research@tfzq.com	邮箱：research@tfzq.com