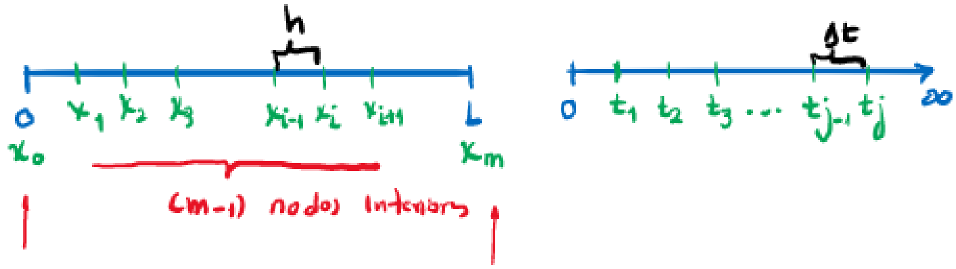
Aproximación por diferencia finitas.

Dado
$$\begin{cases} u_t - k\,u_{xx} = 0 & x \in (0,L) \quad t \in [0,\infty) \\ u(0) = u(L) = 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$



nodos frontera $u(0) = u(L) = u(x_0) = u(x_m) = 0$

Queremos aproximar la solución de la E.D.P en un punto (x_i, t_j)

$$u_t(x_i,t_j) = \frac{u(x_i,t_j) - u(x_i,t_{j-1})}{\Delta t} = \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{\Delta t}$$

Backward Difference

$$u_{xx}(x_i,t_j) = \frac{u(x_{i+1},t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_{i-1},t_j)}{h^2}$$

$$= \frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}$$

Así, aproximación de orden 1 en tiempo y orden 2 en espacio implícito (Backward Difference)

$$\frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{\Delta t} - k\left(\frac{u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}}{h^2}\right) = 0$$

$i = 1, 2, \dots, m-1 \qquad j = 1, 2, \dots$

Sea $\lambda = \frac{k \Delta t}{h^2}$

Entonces

$$u_{ij} - \lambda (u_{i+1 j} - 2 u_{ij} + u_{i-1 j}) = u_{i j-1}$$

$$-\lambda u_{i-1 j} + (1+2\lambda) u_{ij} - \lambda u_{i+1 j} = u_{i j-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ \\ u_{m-1 j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1 j-1} \\ u_{2 j-1} \\ \vdots \\ \\ u_{m-1 j-1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A\, u_j = u_{j-1}}$$ Sistema lineal $j = 1, 2, \ldots$

donde $|A| \neq 0$ por ser una matriz estrictamente dominante!