Tarea: analizando los resultados de buscar soluciones numéricas de EDPs vía Python.

Jorge Leonardo López Agredo
Universidad Industrial de Santander Escuela de Física
jorge2218061@correo.uis.edu.co
Maestría en Matemática Aplicada
Docente: Ph.D Juan Carlos Basto Pineda

---

1. Actividad

1. ¿Cómo podemos mejorar las funciones ECL() y ECnL() para no tener que usar dos bucles anidados? Ver [1]

2. Implemente un código que permita tomar el dato inicial de las ECL y ECnL sea la función solución obtenida en $t = 0{,}5$ s, en $t = 1$ s, $t = 1{,}5$ s, y así sucesivamente.

3. Implemente un código que permita, a partir de las funciones dadas mostrar en una sola imagen (3x3) que contenga, el dato inicial $u_0(x, 0)$, el resultado de estudiar la ecuación lineal y el resultado de estudiar la ecuación no lineal. Esto para $nx = 21$ $nx = 41$ y $nx = 81$, Describa sus apreciaciones, y analice el porqué de los resultados obtenidos.

4. En las comparaciones hechas anteriormente, tanto en la parte lineal como la no lineal, son iguales, parecidos o totalmente diferentes los datos obtenidos, ¿por qué? Realice un trabajo similar para la ecuación de difusión y la ecuación de Burgers, ver [2]. ¿Qué apreciaciones le merece?

---

2. Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes (ENS) son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales que describen el movimiento de un fluido viscoso, las cuales expresan matemáticamente la conservación de momento y de la masa para los fluidos newtonianos (fluido cuya viscosidad puede considerarse constante) [5]. Su nombre se debe en honor del físico e ingeniero francés Claude-Louis Navier (1785-1836) y al físico-matemático irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903), los cuales desarrollaron la formulación integral y diferencial aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen de fluido y ciertas consideraciones como lo fue los esfuerzos tangenciales y su relación lineal con el gradiente de velocidad del movimiento del fluido, conocida como Ley de viscosidad de Newton [5].

De las ENS no se dispone de una solución general de manera analítica, salvo para casos particulares, en fluidos específicos y bajo condiciones muy concretas [5, 6]. Es por esto, que es preciso recurrir al análisis numérico, para determinar una solución aproximada que permita modelar problemas más generales. La dinámica de fluidos computacional (CFD) es la rama de la mecánica de fluidos que se ocupa del estudio mediante métodos numéricos de soluciones [4, 6].

3. Algunas ideas teóricas

Para poder estudiar algunas ideas en la discretización de las ecuaciones de Navier-Stokes en una dimensión (1-D) y dos dimensiones (2-D) es importarte comenzar estudiando la ecuación de convección lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

con condiciones iniciales $u(x, 0) = u_0(x)$, dato conocido como onda inicial. La ecuación representa la propagación de la onda inicial con velicidad c. La solución analítica usando variables separables es dada por $u(x, t) = u_0(x - ct)$. Para poder garantizar la existencia de las soluciones y la unicidad en algunos de los casos, de los problemas estudiados aquí, es importante usar resultados fuertes de Ecuaciones diferenciales parciales, para mayor imformación sobre esto vease por ejemplo [6].

Para poder implementar el método numérico, nosotros discretizamos esta ecuación tanto en el tiempo como en el espacio, usando el esquema de diferencias finitas hacia adelante [4, 6] para la derivada en el tiempo y el esquema de diferencias finitas hacia atrás [4, 6] para la derivada en el espacio. La coordenada espacial x se discretiza en N pasos regulares Δx desde $i = 0$ hasta $i = N$. Para la variable temporal t se discretiza tomando intervalos de tamaño Δt.

Por la definición de derivada, removiendo el límite, es posible aproximar

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Así, por nuestra discretización, se sigue que:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

donde n y $n+1$ son dos pasos en el tiempo, mientras que $i - 1$ y i son dos puntos vecinos de la coodenada x discretizada. Si se tienen en cuenta la condiciones iniciales, la única variable desconocida es u_i^{n+1}. Resolviendo la ecuación para u_i^{n+1}, podemos obtener una ecuación que nos permita avanzar en el tiempo de la siguiente manera:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n).$$

De manera análoga, es posible discretizar la ecuación linear de convección 2-D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

como se sigue:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - c\frac{\Delta t}{\Delta y}(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n).$$

Ahora, es posible estudiar la ecuación de convección no lineal 1-D

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

y discretizarla mediante:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_i^n\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n).$$

Generizar esta idea a 2-D nos permite obtener un sistema de dos EDP relacionadas así:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Cuya discretización se define como:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - u_{i,j}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) - v_{i,j}^n\frac{\Delta t}{\Delta y}(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n),$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n - u_{i,j}\frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n) - v_{i,j}^n\frac{\Delta t}{\Delta y}(v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n).$$

Ideas análogas a las descritas anteriormente, nos permiten afrontar otras EDP importantes en el objetivo de poder encontrar soluciones numéricas para las ENS. Entre ellas se destacan la ecuación de difusión 1-D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y su generalización a 2-D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Referencias

[1] López, L. (2021) *Proyecto_Final_EDP-NS*.ecuacion_conveccion.ipynb

[2] López, L. (2021) *Proyecto_Final_EDP-NS*. [ecuacion_difusion_and_burguers.ipynb]

[3] Barba, Lorena A., and Forsyth, Gilbert F. (2018). *CFD Python: the 12 steps to Navier-Stokes equations*. Journal of Open Source Education, 21. [https://doi.org/10.21105/jose.00021]

[4] Barbagroup, (2019). *CFDPython*. [https://github.com/barbagroup/CFDPython]

[5] Achenson, D. J. (1990). *Elementary Fluid Dynamics, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series*. Oxford University Press, ISBN 0-19-859679-0.

[6] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, 1986.