

1. Introduzione

Lorem Ipsum è un testo segnaposto utilizzato nel settore della tipografia e della stampa.

Lorem Ipsum è considerato il testo segnaposto standard sin dal sedicesimo secolo, quando un anonimo tipografo prese una cassetta di caratteri e li assemblò per preparare un testo campione. È sopravvissuto non solo a più di cinque secoli, ma anche al passaggio alla videoimpaginazione, pervenendoci sostanzialmente inalterato.



L'obiettivo di questa lezione introduttiva è di sottolineare il collegamento tra i temi trattati nel corso e quelli studiati in quello di Fisica. Si fa breve cenno ai due possibili modelli che possono descrivere i fenomeni elettromagnetici: quello di Maxwell e quello di Kirchhoff. In questa lezione si mostra, in particolare, come il Modello dei Circuiti (Kirchhoff) possa essere in realtà introdotto anche in modo assiomatico, senza alcun riferimento a quello dei Campi.

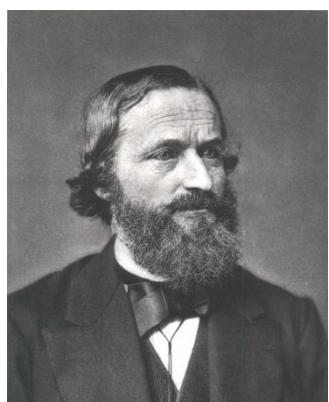
Successivamente si mostra come le stesse leggi possano essere dedotte dalle leggi di Maxwell. Si parte dalla legge di Coulomb e dalla introduzione del concetto di Campo Elettrico. Si riesamina criticamente il concetto di campo e si discutono diverse possibili sue rappresentazioni.

2. Campi e Circuiti

I fenomeni elettrici e magnetici possono essere descritti e studiati utilizzando due modelli distinti: il modello dei Campi, giustamente associato al nome di James Clerk Maxwell ed alle sue celebri equazioni, e quello dei Circuiti o anche modello di Kirchhoff - Gustav Robert

Kirchhoff - e delle sue non meno note due leggi omonime. In realtà i due modelli non sono del tutto equivalenti, anzi il primo è molto più generale del secondo, che da quello può essere ricavato e che addirittura è da considerarsi solo un modello approssimato, nella maggior parte dei casi.

L'approccio più logico allo studio di tali fenomeni dovrebbe essere quello di partire dalle equazioni del campo elettromagnetico di Maxwell, che qui riportiamo nelle due forme possibili: locale o differenziale, cioè valide punto per punto, e integrali cioè leggi che si applicano su volumi e superfici finite.



Notiamo ancora, senza entrare nei particolari, che i due campi E e B - che a questo punto sono solo entità astratte - debbono essere legati ai fenomeni naturali così come noi li vediamo, cioè alla dinamica. È questo il compito della legge di Lorentz che ci dice che una carica q che si trovi a passare con velocità v in un punto P in cui i suddetti campi hanno i valori E e B appunto, sente una forza pari a $F=q(E+vxB)$. Se la carica è libera di muoversi questa forza darà naturalmente luogo ad un'accelerazione secondo la ben nota legge di Newton.

Il modello dei circuiti, invece, di G. R. Kirchhoff è basato su due equazioni: la prima detta anche legge di Kirchhoff ai nodi e la seconda detta Legge di K. alle maglie.

Sorgenti

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_v}{\epsilon_0}$$

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_\gamma} \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{per il vuoto} \quad c = 300.000 \text{ km/sec}$$

nodo $\rightarrow \sum_r I_r = 0$
 maglia $\rightarrow \sum_s V_s = 0$

3. Il Modello dei Circuiti

Proviamo a dare il modello dei circuiti e le leggi che lo caratterizzano in forma assiomatica, cioè partendo da alcuni assiomi – in pratica delle definizioni - che diamo per veri senza alcuna dimostrazione

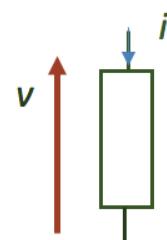
Definiamo il bipolo come un oggetto che comunica con l'esterno esclusivamente attraverso due suoi punti, che diremo morsetti del bipolo, e per il quale sia possibile definire univocamente due grandezze scalari "v" tensione elettrica tra i morsetti ed "i" corrente elettrica che attraversa il bipolo.

Alla tensione v è associato un segno nel senso che essa può essere sia positiva che negativa: in particolare se v è la tensione tra il morsetto 1 e quello 2, allora la tensione tra 2 ed 1 è $-v$. Tutto questo ci obbliga ad indicare con un simbolo, la freccia in rosso in figura, quale è la tensione che indichiamo con il simbolo v . Nel nostro caso evidentemente la tensione v è tra 1 e 2.

Anche alla corrente è associato un segno nel senso che se i è la corrente che attraversa il bipolo nel verso che va da 1 a 2, allora potremo dire che la corrente che lo attraversa da 2 a 1 è $-i$. Anche in questo caso, come nel precedente è implicita una scelta. Prima di parlare di tensioni e correnti in un bipolo dobbiamo aver precisato quali sono i versi delle due grandezze elettriche che stiamo indicando con v ed i , altrimenti queste grandezze non sono univocamente definite.

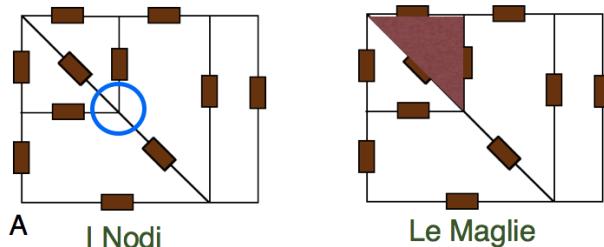
Naturalmente assumiamo di saper come misurare queste grandezze con appositi strumenti di misura. Le rispettive dimensioni sono, Volt, per le tensioni e Amper, per le correnti.

In un bipolo v ed i non sono indipendenti tra di loro. Il loro legame viene detto caratteristica del bipolo. Esso può essere di varia natura: algebrico (lineare o non), differenziale, ecc.. Evidentemente il più semplice legame che possiamo immaginare è quello lineare del tipo $v=Ri$, dove il coefficiente di proporzionalità R viene detto resistenza del bipolo.



4. Circuiti o Reti Elettriche

Dicesi rete elettrica o circuito elettrico (per ora consideriamo le due dizioni perfettamente



equivalenti) un insieme di bipoli collegati attraverso i rispettivi morsetti, come per esempio rappresentato in figura.

Diciamo nodo di una rete un punto in cui convergono più di due morsetti di bipoli

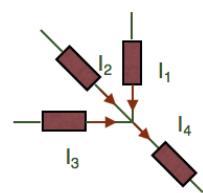
distinti. Potremmo naturalmente ritenere nodo anche il punto in basso a sinistra indicato come "A" in figura. Ma come vedremo ciò è inutile e produrrebbe complicazioni non necessarie. Quindi per fare un nodo ci vogliono più di due morsetti confluenti.

Le leggi di Kirchhoff

Adesso possiamo enunciare la prima legge di Kirchhoff, o legge di Kirchhoff alle correnti (L.K.C.): In ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti o uscenti dal nodo stesso è identicamente nulla. Il significato di quel "entranti o uscenti" è implicitamente chiaro dall'esempio mostrato.

I_1 , I_2 e I_3 sono stati sommati nell'equazione perché le relative correnti sono entranti ed I_4 è stata sottratta perché uscente dal nodo. Naturalmente l'equazione non cambierebbe se mutassimo il segno a tutti i termini, il che corrisponderebbe a considerare negative le correnti entranti e positive quelle uscenti.

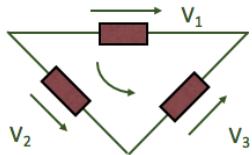
Possiamo ora enunciare la seconda legge di Kirchhoff: In ogni maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto, a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza prescelto, è identicamente



$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

nulla. Anche in questo caso la figura chiarisce con un esempio l'uso dei segni. Evidentemente, avendo scelto di percorrere la maglia indicata nel verso antiorario (freccia nel triangolo),

incontriamo nello stesso verso v_2 e v_3 e in verso opposto v_1 .



Si potrebbe far vedere che con queste due leggi e con la conoscenza delle caratteristiche dei bipoli presenti nella rete è possibile risolvere il problema fondamentale dei circuiti elettrici, e cioè trovare i valori

$$-V_1 + V_2 + V_3 = 0.$$
 delle v su tutti i bipoli e delle i attraverso gli stessi.

Ma quale è il legame tra queste leggi, queste grandezze e le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo? Si può far vedere che in regime stazionario, quando cioè le grandezze v ed i non variano nel tempo, il modello circuitale discende in modo diretto da quello dei campi. In regime dinamico, invece, tale modello è soltanto un'approssimazione di quello dei campi. In particolare l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è il parametro $\beta=L/cT$. Dove L è la dimensione geometrica media dei bipoli, T è il tempo caratteristico della dinamica in esame e c la velocità della luce nel vuoto.

5. I Fenomeni Elettromagnetici

Ritorniamo ora alle equazioni di Maxwell che qui riportiamo nelle due forme: locale o

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{r}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{per il vuoto} \quad c = 300.000 \text{ km/sec}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \iint_{S_\gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_\gamma \\ \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \iint_{S_\gamma} \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}_\gamma\end{aligned}$$

differenziale, valide punto per punto nello spazio di interesse, e integrali, valide su ogni curva, superficie o volume.

Naturalmente dobbiamo in qualche modo collegare i campi E e B ai fenomeni macroscopici che

effettivamente vediamo nella realtà. Questo compito è svolto dalla così detta legge di Lorentz (Hendrik Lorentz 1853 – 1928) che stabilisce che una particella carica q che si trovi a passare per un punto P in cui i valori dei campi sono E e B risentirebbe una forza F data dalla formula $F = q(E + v \times B)$, detta forza di Lorentz.

Generalmente Q e J sono considerate le sorgenti (assegnate!) del campo, rispettivamente carica e densità di corrente. Come sapete, però, le cose possono essere anche più complesse. Ma andiamo con ordine e ripartiamo dall'inizio.

Se volessimo introdurre i fenomeni elettromagnetici in modo molto sintetico e riepilogativo, potremmo cominciare con dire: i corpi materiali possono presentare proprietà particolari che danno luogo alle cosiddette interazioni elettriche e magnetiche.

Elemento chiave di tali interazioni è la carica elettrica, una proprietà individuata da una grandezza scalare q che prende il nome, appunto, di carica elettrica. Per inciso, questa proprietà è "quantizzabile", nel senso che esiste una carica minima pari ad e, tutte le altre essendo multiple di questa. Le cariche elettriche interagiscono tra di loro esercitando forze le une sulle altre. In particolare esistono due diverse "qualità" di cariche: cariche dello stesso tipo si respingono e cariche di tipo opposto si attraggono.

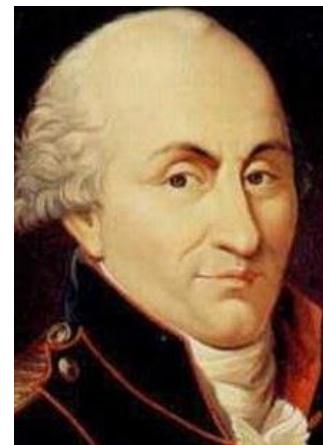
Ciò porta, in modo naturale, a dare a q un segno, negativo o positivo, per distinguere le due possibili alternative. In particolare l'elettrone, uno dei componenti dell'atomo, ha carica negativa pari a $-e$, mentre nel nucleo dell'atomo sono presenti altri elementi, i protoni, che presentano una carica positiva pari a $+e$. Il valore $e=1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ indicato in figura è in Coulomb che è appunto l'unità di misura della carica elettrica nel Sistema Internazionale (S.I.), al quale faremo sempre riferimento anche in seguito. Daremo per implicito che per ogni grandezza che introduciamo si possa immaginare di costruire uno strumento in grado di misurarla.

6. Le Leggi

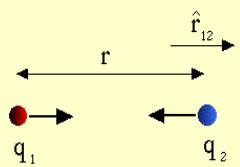
L'interazione elettrica tra i corpi materiali può essere ricondotta ad una legge elementare che prende il nome di legge di Coulomb (1784) (Charles Augustin Coulomb, 1736 – 1806).

Questa legge immagina una situazione ideale in cui i corpi materiali portatori delle cariche si riducono a punti geometrici. Introduciamo così il concetto di carica puntiforme: un corpuscolo che occupa un volume idealmente nullo intorno ad un punto, ma con massa non nulla, e che è portatore di una carica elettrica q (positiva o negativa).

Si tratta certamente di una idealizzazione, ma non del tutto priva di fondamento fisico, se si pensa che i "volumi occupati" dai naturali portatori elementari di cariche, protoni ed elettroni,



sono generalmente molto piccoli rispetto alle dimensioni che caratterizzano il fenomeno particolare che si vuole studiare; gli esperimenti ci dicono che, per esempio, la carica di un protone si può immaginare concentrata in una sfera di 10^{-13} cm di raggio.



$$\bar{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

Orbene, la legge di Coulomb afferma che se due cariche puntiformi, fossero poste (ferme) alla distanza r , su ognuna delle cariche agirebbe una forza; in particolare, quella esercitata dalla carica 1 sulla carica 2 è espressa dalla formula indicata. La forza F_{12} è dunque diretta lungo la congiungente tra le due cariche, è proporzionale al prodotto delle stesse, inversamente proporzionale al quadrato della distanza che le separa ed è diretta nel verso che va da q_1 a q_2 , se entrambe le cariche hanno lo stesso segno.

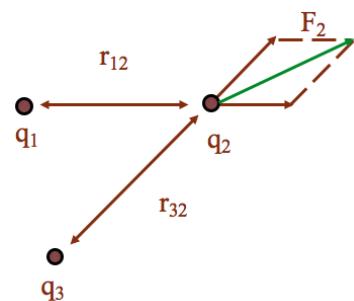
Tale forza è, dunque, attrattiva se le cariche q_1 e q_2 hanno segno opposto, e repulsiva se esse invece hanno lo stesso segno. Sulla carica q_1 agisce una forza eguale ed opposta.

Se le cariche sono libere di muoversi, tali forze producono movimento, secondo le ben note leggi della dinamica newtoniana.

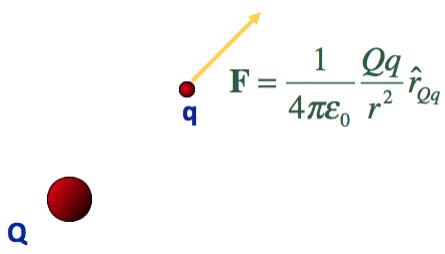
Nel sistema Internazionale di misure (S.I.), $k=1 /4\pi \epsilon_0$, dove ϵ_0 prende il nome di costante dielettrica del vuoto.

Se ci limitassimo a considerare solo cariche ferme ed aggiungessimo, alla legge di Coulomb, la proprietà che tali forze di interazione sono sovrapponibili - in presenza, cioè, di più cariche puntiformi, la forza agente su ognuna di esse è la somma vettoriale delle forze che ogni altra carica produrrebbe sulla stessa carica, in assenza delle altre - potremmo derivare, dalla sola legge di Coulomb, tutte le leggi della interazione elettrica. Le cose si complicano un poco quando consideriamo cariche in movimento: la legge di Coulomb va leggermente modificata, o sostituita con altre leggi ad essa equivalenti.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}_{Qq}$$



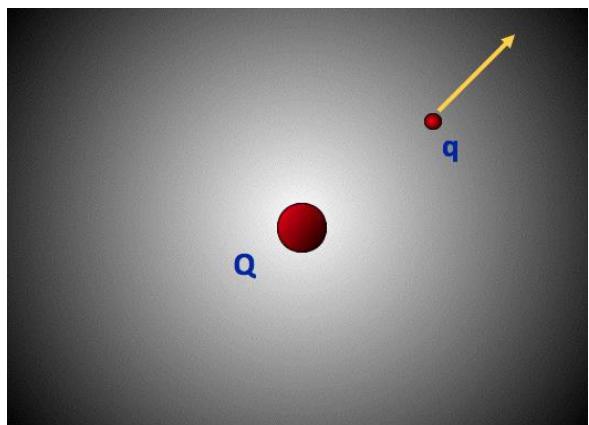
Il Campo Elettrico



Supponiamo di avere, in una regione dello spazio, una “distribuzione” di cariche. Non ci occuperemo delle caratteristiche di tale distribuzione, ma soltanto dell’azione che tali cariche esercitano su altre cariche. Per esempio possiamo immaginare che in realtà si tratti di

una sola carica Q . Supponiamo ancora di poter disporre di una carica puntiforme, e positiva, che goda delle proprietà di non disturbare la posizione o il movimento delle altre cariche. In qualsiasi punto si venga a trovare la carica in questione, che d’ora in poi chiameremo carica di prova, essa risentirà di una forza prodotta dalle altre cariche, che d’ora in poi chiameremo cariche sorgenti.

In effetti avremmo potuto descrivere il fenomeno in una maniera diversa. Se disponiamo



una carica Q in una regione dello spazio, tale spazio si modifica.

Ho rappresentato questa modifica in questa figura con il cambiamento di colore dello spazio circostante alla carica Q . Notate che ho scelto un colore la cui luminosità va sfumando allontanandosi dalla carica sorgente. Forse capite perché!

Orbene una carica q in P risentirebbe una forza $F=qE$, dove E è il campo elettrico. È a questo punto chiaro che quel colore sfumato può essere interpretato come una rappresentazione del campo elettrico, più intenso vicino alla carica.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}_{Qq} = q\mathbf{E}$$

Questo modo di veder le cose consente di separare gli effetti: le cariche sorgenti modificano lo spazio (il telone elastico), cioè creano il campo, ed il campo agisce sulla carica di prova q .

7. Rappresentazioni del Campo Elettrico

Una similitudine, che aiuta molto a comprendere questa separazione, fu immaginata da Helmholtz per spiegare l'azione di un altro campo che per molti aspetti si comporta proprio come il campo elettrico: il campo gravitazionale.

Immaginate di avere un grande telone elastico, teso perché fissato ad una cornice rigida; un po' come nei "jamping" che si utilizzano oggi per un certo tipo di ginnastica o attività fisica. Se poniamo su questo telone, che supponiamo perfettamente in piano, una pallina non molto pesante, essa, se inizialmente ferma, rimarrà tale, se invece dotata di una certa velocità iniziale continuerà a muoversi di moto rettilineo ed uniforme, come ci dicono le leggi di Newton.

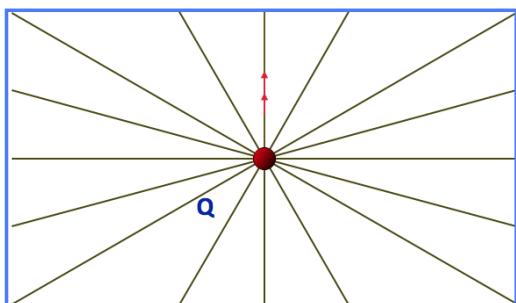
Immaginate ora di mettere sul telone un masso di un materiale molto pesante, per esempio piombo. Per la presenza della massa pesante, il telone si deformerà affossandosi al centro dove la massa si è andata a collocare. Se a questo punto poggiamo sul bordo del telone una sferetta più piccola, ma di un certo peso, essa rapidamente si muoverà verso il centro dove è la sfera grande. Visto dall'alto questo fenomeno, fa pensare che la sferetta è stata attratta dalla massa più grande.

Immaginate ora di lanciare sulla superficie del telone, con un lancio radente, la piccola sferetta. Per effetto della deformazione del telone e della velocità iniziale di lancio della sferetta, essa seguirà una orbita elicoidale che la porterà a girare un certo numero di volte intorno alla massa grande, fino a collidervi definitivamente. La sferetta sembra attratta dalla massa al centro



del telone. Se supponiamo di poter eliminare le perdite per attrito, possiamo anche ipotizzare la possibilità di orbite stazionarie intorno a tale centro; dipende dalla velocità iniziale della sferetta.

Tutto questo, visto dall'alto, ed immaginando di dimenticare il telone, fa pensare che la sferetta orbiti intorno alla massa centrale, attirata da una forza invisibile. Ecco spiegata l'attrazione.



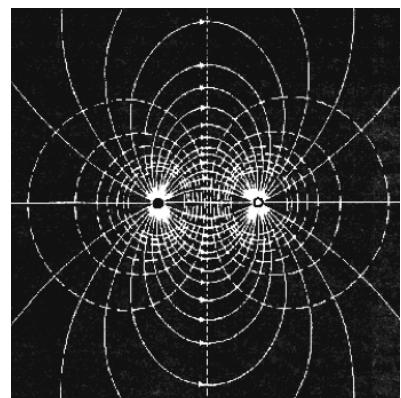
In realtà la prima massa ha prodotto una deformazione (il campo!) che è causa dell'attrazione sulla seconda.

Un modo più semplice ed interessante per rappresentare "la deformazione dello spazio", cioè il campo elettrico, prodotto da una determinata

sorgente, è quello di tracciare per un certo numero di punti le linee sempre tangenti al campo nella regione in esame. Quello rappresentato è il campo, per esempio, di una carica puntiforme Q.

E questa è la rappresentazione del campo prodotto da due cariche di segno opposto, ad una certa distanza d.

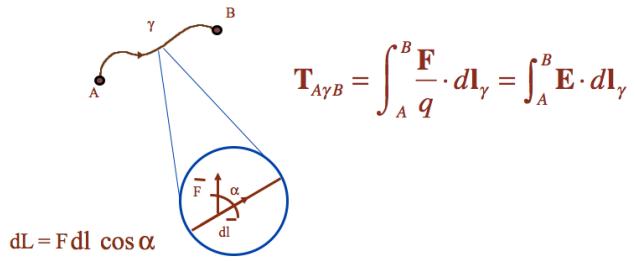
Si pone subito ora un problema: quante linee di forza dobbiamo disegnare? È evidente che per ogni punto potremmo disegnare una nuova linea del campo. Ma se lo facessimo per tutti i punti, riempiremmo lo spazio di linee e la rappresentazione perderebbe ogni significato. Si conviene dunque di disegnare un numero di linee di campo uniformemente distribuito.



Per esempio, per il caso della carica isolata, immaginiamo di considerare la superficie di una sfera centrata nel punto in cui è la carica sorgente Q e dividiamola in tante superfici di area uguale. Per il centro di ognuna di queste superfici facciamo passare una linea del campo. In questo modo abbiamo anche il vantaggio di aver trasformato la rappresentazione essenzialmente qualitativa delle linee di forza in una anche quantitativa. Infatti dove le linee del campo si addensano il campo stesso è più intenso.

1. La tensione

Se in presenza di un campo elettrico, immaginiamo di portare una carica di prova q , da un punto A ad un punto B lungo una linea γ , la forza F che agisce sulla carica compirà un lavoro per unità di carica che potremo calcolare con l'integrale mostrato in figura.



Nell'immagine è ricordato anche il significato dell'integrale: somma di infiniti contributi

$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\gamma$$

$$T_{A\beta B} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_\beta$$

$$T_{A\gamma B} \neq T_{A\beta B}$$

infinitesimi. A tale lavoro viene dato il nome di tensione lungo la linea γ tra i punti A e B, e si misura in volt (V). Lo strumento che la misura verrà detto voltmetro e avremo modo di parlarne nel seguito. Notare che oltre ai pedici che ricordano i punti A e B, estremi del percorso, è

necessario anche indicare la particolare linea lungo la quale ci si è mossi. Si noti anche che per poter parlare di tensione tra due punti bisogna aver specificato non solo linea γ tra gli stessi, ma anche il verso in cui ci si muove sulla linea (da A a B oppure da B ad A); ciò giustifica anche il simbolo utilizzato.

Supponiamo ora di spostare la carica di prova lungo un'altra linea, β , tra gli stessi punti A e B, come mostrato in figura. Anche in questo caso verrà compiuto un lavoro $T_{A\beta B}$, che in generale sarà diverso dal precedente.

2. La differenza di potenziale

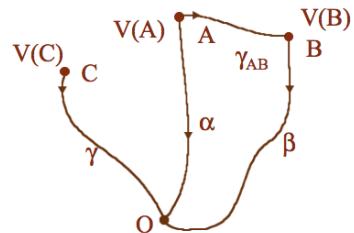
In determinate situazioni accade invece che tale lavoro sia indipendente dal percorso e dipende esclusivamente dai due punti estremi. Sarebbe facile far vedere, utilizzando la legge di Coulomb, che una tale situazione si verifica se le cariche sorgenti sono tutte ferme e la carica di prova si immagina mossa lentissimamente, un processo che in fisica viene definito adiabatico.

Si parlerà in tal caso di differenza di potenziale V e potremo semplificare il simbolo indicando solo gli estremi del percorso visto che tale grandezza solo da essi dipende.

Si osservi che in questo caso il lavoro compiuto dal campo E quando la carica di prova è mossa lungo un percorso chiuso (circuazione di E) - per esempio l'unione di γ e β , quest'ultimo orientato nel verso opposto - è identicamente nullo. Il campo delle cariche ferme è conservativo!

3. Il potenziale

Supponiamo di essere in queste condizioni e di calcolare il lavoro che il campo compie quando la carica di prova si muove da un punto qualsiasi nello spazio ad un punto O fisso. Per ogni punto A prescelto avremo un valore di tale lavoro, indipendentemente dal percorso compiuto per andare da A a O.



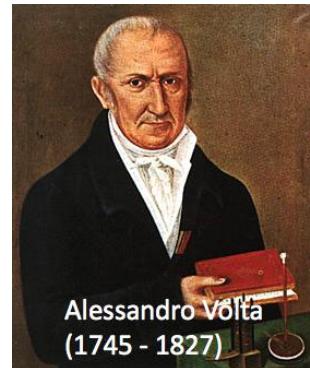
Facciamo lo stesso lavoro, per tutti i punti dello spazio in esame. Abbiamo in pratica costruito una funzione $V(P)$ dei punti dello spazio che chiameremo potenziale del punto P rispetto ad O. In particolare è evidente che la funzione V in O è nulla. Si dice che il punto O è stato scelto come punto di riferimento dei potenziali.

Se ora, per esempio, immaginiamo di voler calcolare la tensione tra A e B, essendo essa indipendente dal percorso, invece di farlo lungo il percorso γ_{AB} segnato in figura, potremmo farlo lungo il percorso che va da A a O lungo γ e da O a B lungo β . Otterremo cioè la differenza dei valori assunti dalla funzione potenziale in A e B. Da ciò il nome di differenza di potenziale.

Nel caso in cui, dunque, il lavoro è indipendente dal percorso esso può essere messo sotto la forma di una differenza di potenziale (d.d.p. nel seguito) tra i due punti in esame. Si noti che tale lavoro è positivo, e quindi le sorgenti compiono effettivamente lavoro sulla carica di prova, se il potenziale di A, $V(A)$, è maggiore di quello di B, $V(B)$. Non si può quindi parlare di una d.d.p. V tra due punti se non si è prima specificato il verso in cui si va tra i due punti in questione.

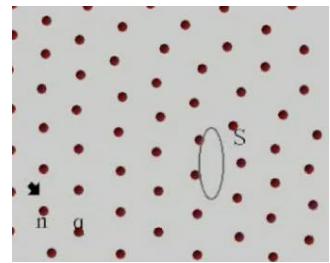
Luciano De Menna - Tensione e Corrente

Nel Sistema Internazionale (S.I.) la d.d.p. si misura in Volt, dal nome del famoso scienziato italiano Alessandro Volta che ebbe il grande merito di inventare una sorgente di differenza di potenziale, di natura chimica, di grande semplicità e affidabilità: la pila di Volta. Si pensi che prima di questa invenzione per fare qualsiasi esperimento di natura elettrica si poteva fare affidamento soltanto su complicati sistemi meccanici di separazione delle cariche. Oltretutto, non essendo l'aria un isolante perfetto, tali d.d.p. avevano il difetto di non durare a lungo.

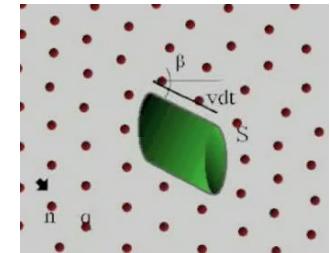


4. La corrente elettrica

Come sappiamo, i portatori di cariche elettriche possono essere in movimento. Supponiamo di avere in una regione dello spazio un gran numero di tali portatori, tutti di egual carica q e tutti con la stessa velocità v . Le cariche siano tanto numerose, ed i loro portatori occupino un volume tanto piccolo - è la solita idealizzazione della carica puntiforme - da poter descrivere la loro distribuzione attraverso una funzione densità n : se dV è un volumetto elementare, i portatori contenuti in tale volume sono, per definizione, $dN = n dV$.



Consideriamo ora una superficie piana S attraverso la quale, nel loro moto, le cariche si trovano a passare. Vogliamo calcolare la quantità di carica che nel tempo dt attraversa detta superficie nel verso che va da sinistra a destra.



Costruiamo - come mostrato in figura - un cilindro con base sulla superficie S e lunghezza, nella direzione parallela a v , pari a vdt . Per costruzione tutte le particelle che, all'istante t , si trovano nel cilindro considerato, nel tempo dt , percorrendo lo spazio vdt , si troveranno a passare attraverso la superficie S , mentre tutti i portatori al di fuori del volume considerato, o "mancheranno" la superficie S , oppure percorreranno una distanza insufficiente ad incontrarla. Se ne deduce che il numero di portatori che attraverseranno la superficie S nel tempo dt è pari al numero di portatori contenuti nel cilindro di volume $S vdt \cos \beta$, cioè $nS vdt \cos \beta$, dove β è l'angolo fra la direzione di v e quella della normale ad S .

Dato che ogni portatore è dotato di carica q , la carica totale che attraversa la superficie S nel tempo dt è $dQ = nq(Svdt\cos\beta)$, e nell'unità di tempo $I = dQ/dt = nqvS\cos\beta = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$. A tale grandezza viene dato il nome di intensità di corrente elettrica. Il vettore \mathbf{J} invece, che descrive il moto delle cariche, prende il nome di densità della corrente elettrica. Naturalmente la definizione di intensità di corrente elettrica che abbiamo illustrato in un caso semplice, può essere estesa al caso in cui i

Luciano De Menna - Tensione e Corrente

portatori siano dotati di carica diversa, non abbiamo tutti la stessa velocità, e la loro densità varia da punto a punto. Si noti che il concetto di intensità di corrente richiede, oltre ad una distribuzione di cariche in movimento, la scelta di una superficie attraverso cui si intende valutare il flusso di cariche e quella di un verso, l'orientazione della normale su S .

Nel seguito parleremo spesso di intensità di corrente senza specificare la superficie attraverso la quale intendiamo calcolarla; ciò accade perché, nei casi in questione, la superficie è implicitamente definita. È il caso in cui il moto dei portatori è obbligato a svilupparsi lungo un percorso determinato, il "conduttore" appunto. Vale la pena di sottolineare che anche il concetto di corrente presuppone la scelta di un verso: la corrente in un verso lungo il percorso stabilito. Ricordiamo infine che l'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica nel Sistema Internazionale è l'ampere (A), pari ad un coulomb al secondo, e che lo strumento che la misura viene detto amperometro.

5. I materiali e le correnti

I corpi materiali si comportano in maniera differente quando ad essi viene applicata una differenza di potenziale. Come sappiamo, tra i costituenti elementari della materia vi sono portatori di cariche elettriche: elettroni e ioni. Tali portatori possono essere più o meno legati alla struttura del corpo materiale e quindi più o meno liberi di muoversi. Sotto l'azione della differenza di potenziale i portatori liberi (ma non completamente liberi, come vedremo), si muovono e danno luogo ad una corrente elettrica.

Da questo punto di vista, e con una classificazione per il momento solo grossolana, potremmo inserire ogni materiale in una scala.

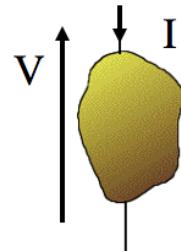
Ad un estremo avremo l'isolante perfetto - un materiale in cui i portatori di cariche o sono completamente assenti, o, se presenti, sono del tutto impediti nel loro moto - ed all'altro il conduttore perfetto in cui i portatori di cariche, sono completamente liberi di muoversi. Il vuoto perfetto, per esempio, fin tanto che rimane tale, è certamente un perfetto isolante, mentre un corpo metallico, rame per esempio, portato a bassissima temperatura può essere considerato una buona esemplificazione di un conduttore perfetto.

La legge di Ohm

Nei materiali metallici, o conduttori di prima specie, in particolare, i portatori di carica

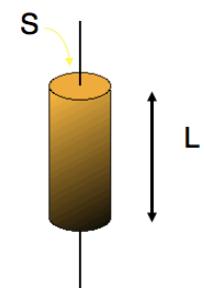
responsabili della corrente sono gli elettroni periferici degli atomi che costituiscono, con il loro reticolo, la struttura del materiale stesso. Tali elettroni, debolmente legati ai rispettivi atomi, formano in effetti una sorta di nube elettronica che, sotto l'azione di una forza prodotta dall'applicazione di una differenza di potenziale, si mette in moto e produce una corrente. Per un gran numero di tali

conduttori, e per un campo di variabilità dei parametri in gioco discretamente ampio, sussiste una relazione di proporzionalità tra la d.d.p. applicata e la corrente prodotta: a tale relazione viene dato il nome di legge di Ohm, dal nome di Georg Simon Ohm, che fu il primo a dedurla da una accurata campagna di esperimenti.



Cerchiamo di approfondire il contenuto della legge di Ohm facendo riferimento ad una configurazione ideale semplice. Supponiamo di avere un corpo materiale e di individuare sulla superficie che lo racchiude due punti ai quali immaginiamo di applicare la d.d.p. V .

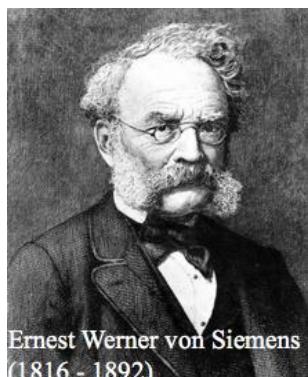
Supponiamo inoltre di essere in grado di portare ad uno dei due punti e di prelevare dall'altro, una qualsiasi corrente I ; non domandiamoci, per il momento, "chi" applica la d.d.p. né "come" portiamo e preleviamo la corrente nei due punti. Una volta fissati i punti di accesso della corrente, il moto delle cariche all'interno del corpo si svilupperà in una ben precisa maniera che non è necessario specificare. Se, in queste condizioni, immaginiamo di applicare agli stessi punti, diverse differenze di potenziale, e misuriamo l'intensità della corrente, verificheremo che: $V=RI$. Alla costante di proporzionalità R , che nel Sistema Internazionale si misura in



Luciano De Menna - Tensione e Corrente

ohm, viene dato il nome di resistenza del corpo in esame, quando alimentato nella maniera indicata.

Questa precisazione è necessaria perché il valore della costante R, in generale, cambia se cambiano i due punti di applicazione della d.d.p., così come cambia ancora, se, invece di due punti ideali pensiamo a due superfici attraverso le quali la corrente viene portata e prelevata; in questo caso R dipende anche dalla forma ed estensione di tali superfici (gli elettrodi). Per questo



motivo ci siamo resi indipendenti dalla forma degli elettrodi supponendoli, in una situazione ideale, addirittura puntiformi.

Naturalmente la stessa legge di proporzionalità può essere espressa nella forma: $I = G V$, dove $G = 1/R$ prende il nome di conduttanza ed è misurata in Siemens (S), dal nome di Ernest Werner von Siemens, altro illustre scienziato di un periodo di poco successivo.

6. La resistività

È interessante approfondire l'analisi del contenuto della legge di Ohm allo scopo di cercare di distinguere in essa la parte che dipende dalla geometria del corpo da quella che invece dipende strettamente dalla natura del materiale. Per semplicità espositiva assumiamo una geometria molto semplice: un cilindro abbastanza lungo rispetto alla sua dimensione trasversale, in modo da poter ritenere che la maniera in cui viene applicata la d.d.p. non possa influenzare in modo significativo la distribuzione del moto delle cariche all'interno del cilindro.

In tali ipotesi una indagine sperimentale mostra che il valore di R dipende essenzialmente dalla geometria del corpo e dal materiale di cui esso è fatto.

Per la precisione $R = \rho L/S$, dove ρ prende il nome di resistività del materiale - il suo inverso σ quello di conducibilità - e dipende solo dalla sua natura e dalle condizioni fisiche in cui si trova ad operare, L è la lunghezza ed S la misura della sezione trasversale del cilindro.

Nel Sistema Internazionale la resistività si misura in Ωm o in $\Omega\text{mm}^2/\text{m}$, e la conducibilità in S/m

• argento	0,015;
• rame	0,017;
• alluminio	0,028;
• piombo	0,80;
• grafite	4 ÷ 20;
• porcellana	$10^{15} \div 10^{19}$.

Nella tabella sono riportati valori indicativi della

resistività di alcuni materiali alla temperatura ambiente.
Come si vede rame ed argento hanno una bassa resistività. Il rame costituisce il miglior compromesso - bassa resistività e basso costo - e per questo motivo è di gran lunga il materiale più usato nelle applicazioni elettriche, tanto che nel

linguaggio comune rame è diventato sinonimo di conduttore elettrico.

7. Il modello di Drude

Il fatto che alcuni materiali - che vengono appunto detti ohmici - sottostanno alla legge di Ohm, ha un significato molto sottile che cercheremo di esaminare sia pure solo qualitativamente. Dalla definizione di intensità di corrente risulta evidente che la stessa è proporzionale alla velocità media dei portatori di carica. D'altra parte la differenza di potenziale, in quanto integrale del campo, deve essere proporzionale alla forza esercitata sui portatori stessi; il campo infatti è la forza per unità di carica. La legge di Ohm, dunque, afferma che la velocità è proporzionale alla forza, in apparente contraddizione con le leggi della dinamica che vogliono quest'ultima proporzionale all'accelerazione: $F = ma$.

In effetti la contraddizione è solo apparente. Infatti la legge di Newton immagina il corpo completamente libero di muoversi. Evidentemente i portatori di carica in un conduttore ohmico non sono completamente liberi di muoversi! Il reticolo che costituisce il corpo materiale in cui i portatori sono costretti a muoversi offre un qualche ostacolo al moto delle cariche. La legge di Ohm, in effetti, ci consente di determinare quale tipo di ostacolo. Supponiamo infatti che l'effetto complessivo delle cariche ferme, costituenti il reticolo, sia equivalente ad un attrito e quindi proporzionale alla velocità; la forza complessiva che agisce sulle cariche sarà allora $F - kv$, dato che l'attrito si oppone all'azione del campo elettrico.

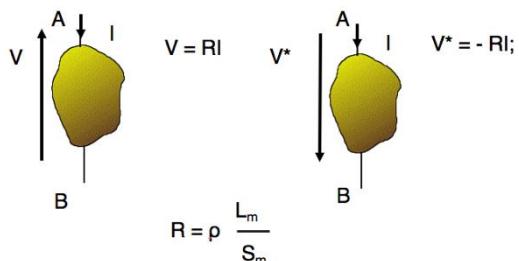
Se si raggiunge una condizione stazionaria, la velocità delle cariche sarà costante, e la loro accelerazione, quindi, nulla: $F - kv = m a = 0$, e quindi $F = kv$. Questo modello della conduzione, attribuito a Drude, che abbiamo esposto solo in maniera qualitativa, può essere approfondito anche ad un livello quantitativo. A noi interessava farne cenno soprattutto per sottolineare il fatto che la validità della legge di Ohm richiede il verificarsi di una condizione abbastanza particolare. Non stupisce quindi che tale legge non sia soddisfatta da tutti i materiali, e che gli stessi materiali ohmici siano tali solo in determinate condizioni.

Luciano De Menna - Tensione e Corrente

Non meno importante è il caso di quei materiali che non sottostanno alla legge di Ohm e che quindi presentano una dipendenza non lineare tra tensione e corrente.

1. Proprietà dei bipoli

Avrete riconosciuto nel bipolo resistore appena introdotto un primo esempio di quei bipoli



che abbiamo introdotto in modo assiomatico in precedenza. Un bipolo resistore, dunque, è una "scatola" chiusa che comunica con l'esterno, dal punto di vista elettromagnetico, solo attraverso due suoi punti ben definiti (morsetti del bipolo). Inoltre la tensione ai

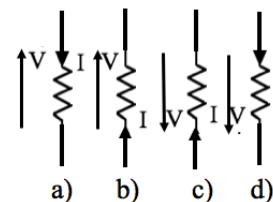
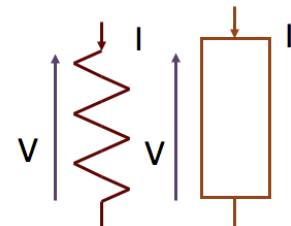
suoi morsetti è una differenza di potenziale, e la corrente che entra in un morsetto è uguale a quella che esce dall'altro. Per il bipolo resistore, esiste un legame di proporzionalità tra differenza di potenziale (d.d.p.) ai suoi morsetti e corrente che lo attraversa.

Con riferimento alla figura, se V è l'integrale di linea del campo tra i punti A e B, nel verso che va da A a B (freccia verso l'alto), ed I è

la corrente nello stesso verso scelto per calcolare la tensione, cioè da A a B, allora la legge di Ohm assume la forma espressa dalla relazione indicata, con R dato da $R=\rho L/S$, e quindi positivo per definizione. Nella figura a lato sono mostrati i più comuni simboli grafici utilizzati per rappresentare il bipolo resistore.

Sono però possibili anche scelte diverse. Si supponga di non conoscere a priori quale dei due morsetti A e B sia quello effettivamente a potenziale maggiore, ma di volere comunque indicare con un simbolo, per esempio V^* , per distinguerlo dal precedente, la differenza di potenziale; non si potrà, evidentemente, che scegliere arbitrariamente uno dei punti - B per esempio - e definire V^* la differenza di potenziale tra B e A. Supponiamo invece di mantenere invariata la scelta per la corrente, e cioè definiamo I la corrente che entra da A ed esce da B. Per quanto detto in precedenza si avrà; $V^* = -RI$.

Occorre dunque precisare che un resistore ha una caratteristica del tipo $V=RI$, con R positivo, se i versi positivi scelti per la tensione e la corrente sono tali che la corrente è positiva



Luciano De Menna - I bipoli

quando entra nello stesso morsetto che, se a potenziale maggiore dell'altro, determina una V positiva. Questo tipo di scelta viene detta dell'utilizzatore per ragioni che saranno chiare in seguito.

In effetti le possibili scelte per i versi di V ed I sono quattro, come indicato in figura.

È facile convincersi che l'alternativa a) coincide con la c) (basta ruotare di 180° il disegno), mentre quella d) coincide con la b).

Le alternative a) e c) le abbiamo già dette dell'utilizzatore. Diremo invece del generatore quelle b) e d). Vediamo perché questa terminologia.

2. La potenza

Come è noto, la tensione tra due punti può anche essere vista come il lavoro compiuto per



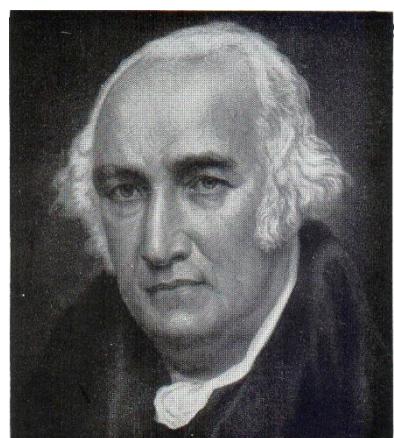
portare una carica unitaria da un punto all'altro. Basta rifarsi alla definizione di tensione e ricordare che $F = q E$. Se nell'unità di tempo vengono portate le cariche da un punto all'altro, tra i quali esiste la differenza di potenziale V , si compirà, dunque, un lavoro per unità di tempo VI , cioè il resistore sarà interessato da una potenza VI . Con le posizioni fatte, è chiaro a questo punto che il prodotto VI , cioè la potenza ai morsetti del resistore, risulterà positivo solo se è stata scelta una convenzione dell'utilizzatore per

la coppia tensione-corrente. Per l'altra convenzione tale prodotto, sempre nel caso del resistore, risulterà negativo.

Consideriamo infatti la convenzione a: per definizione V è positivo se il punto indicato con la freccia delle tensioni è a potenziale maggiore dell'altro. Ma in tali condizioni il campo E farà muovere le cariche positive nel verso che va dal punto in questione (punto in alto) all'altro, e quindi I risulterà positiva. D'altra parte, come è noto, l'energia associata alla potenza VI interessante un resistore, viene "dissipata", o meglio trasformata in un altro tipo di energia: calore. Infatti per un tempo dt si ha: $dW = Pdt = VI dt = RI^2 dt$, che è, appunto, la ben nota legge di Joule (J.P. Joule 1818 – 1889).

Appare quindi naturale parlare di energia e potenza "assorbita" ed "utilizzata" dal bipolo resistore e definire convenzione dell'utilizzatore quella convenzione che fa sì che tale potenza risulti positiva.

Se, dunque, su di un resistore si è fatta la convenzione dell'utilizzatore, la potenza assorbita risulterà sempre positiva.

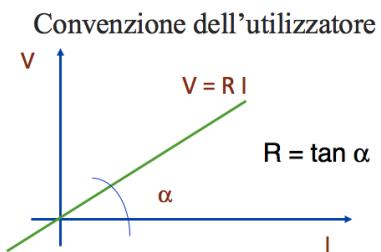


Luciano De Menna - I bipoli

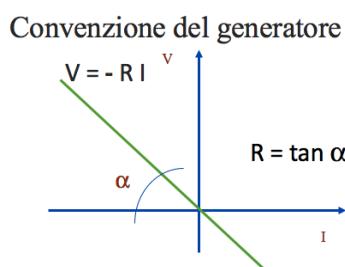
Mentre invece se si fa per un resistore la convenzione del generatore, la potenza, che converrà a questo punto chiamare potenza generata, risulterà sempre negativa. La potenza, nel Sistema Internazionale (S.I.), si misura in watt (James Watt, 1736-1819).

3. Rappresentazione grafica

La caratteristica di un bipolo, almeno di quelli che intendiamo introdurre in questa prima fase, può essere utilmente rappresentata nel piano (I, V). Per un bipolo resistore, tale



rappresentazione è, evidentemente, una retta passante per l'origine degli assi. Nel caso di una convenzione dell'utilizzatore, l'inclinazione α della retta, rispetto all'asse delle correnti, è tale che $\text{tga} = R$.



Si noti la diversa rappresentazione a seconda della convenzione scelta.

Come abbiamo visto, nel piano (I, V) la caratteristica $V=RI$ di un resistore è una retta che passa per l'origine, con inclinazione $\text{tga} = R$. Al variare di R , quindi, la retta sarà più o meno inclinata sull'asse delle I . Si noti che il fatto che la potenza assorbita da un resistore è in ogni caso positiva si riflette nel fatto che la caratteristica dello stesso si trova sempre nel primo e nel terzo quadrante del piano (I, V). Ciò accade, naturalmente, se la convenzione scelta è quella dell'utilizzatore.

4. Altri bipoli

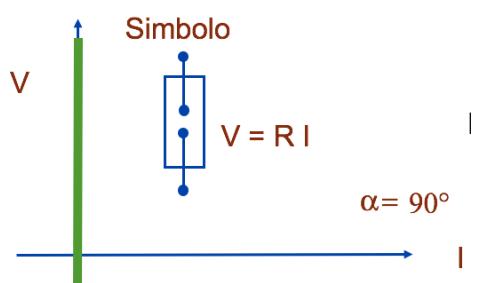
Si pongono in evidenza immediatamente due casi speciali: il caso in cui l'angolo α è nullo e quello in cui esso è pari a 90° .

Nel primo caso si ha $R = 0$ e la caratteristica si sovrappone all'asse delle I . Un tale bipolo, per

qualsiasi valore della corrente che lo attraversa, presenta sempre una differenza di potenziale nulla ai suoi morsetti. Esso prende il nome di bipolo corto circuito e può essere in teoria realizzato con un ideale conduttore perfetto. In un tale conduttore infatti, caratterizzato da una resistività ρ nulla, per qualsiasi valore della corrente si ha sempre una

d.d.p. ai morsetti nulla. Naturalmente un buon conduttore reale può al più approssimare tale comportamento, e l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più "corto" sarà il tratto di conduttore: da ciò il nome "corto circuito".

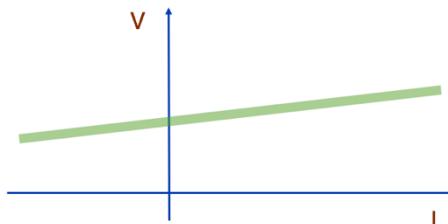
L'altro caso è quello in cui alfa è di 90° , cioè il caso in cui $\sigma = 0$ ($\rho = \infty$). In tale evenienza si ha, al contrario, che per qualsiasi d.d.p. V ai morsetti la corrente che attraversa il bipolo è sempre nulla. Un tale bipolo si potrebbe realizzare frapponendo tra i morsetti un perfetto



"non conduttore", cioè un materiale isolante. Esso prende il nome di bipolo circuito aperto o a vuoto. Le denominazioni di corto circuito, circuito aperto o circuito a vuoto sono in parte autoesplicative ed in parte saranno meglio chiarite in seguito.

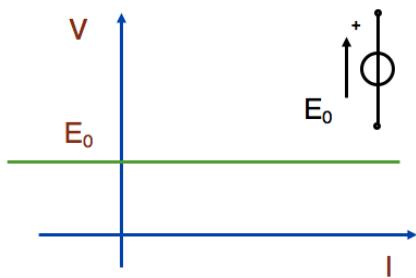
5. Bipoli attivi

Immaginiamo ora un bipolo che sia definito da questa condizione: pur avendo fatto su di



esso la convenzione dell'utilizzatore, la potenza risulta, in alcune condizioni, negativa. Cerchiamo di capire cosa distingue un tale bipolo da un resistore. Nel resistore, il moto delle cariche positive va dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore, secondo il campo. Perciò la

potenza assorbita è sempre positiva. Nel bipolo che stiamo immaginando deve accadere l'opposto: le cariche devono andare dal un punto a potenziale minore ad uno maggiore, contro il campo. Ne consegue che un tale bipolo deve mettere in gioco fenomeni di natura diversa da quelli che producono il campo.



Ipotizziamo per ora l'esistenza di tali bipoli, che d'ora in poi chiameremo generatori ed esaminiamo quali forme può assumere la loro caratteristica. Se abbiamo scelto la convenzione dell'utilizzatore essa dovrà almeno in parte svolgersi nel secondo e nel quarto quadrante: solo in tali

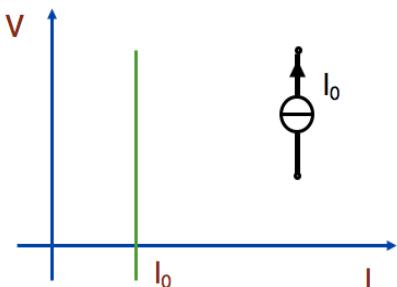
quadranti, infatti, il prodotto VI è negativo. Il caso più semplice, ma ideale, che possiamo immaginare è quello in cui un tale bipolo presenta sempre la stessa d.d.p. E_0 ai suoi morsetti, indipendentemente dalla corrente che lo interessa, o che il bipolo eroga. Un tale generatore prende il nome di generatore ideale di tensione o anche di forza elettromotrice (f.e.m.).

Conveniamo di assumere la convenzione del generatore; in tale ipotesi il bipolo in esame funziona effettivamente come generatore ($VI > 0$) solo per il tratto della sua caratteristica che si trova nel primo quadrante. Nel tratto che interessa il secondo quadrante, esso ha $VI < 0$ e quindi si comporta come uno strano resistore o utilizzatore. Un elemento che certamente distingue tale bipolo da un resistore normale sta nel fatto che, mentre in un resistore normale la caratteristica

passa sempre per l'origine del piano (I, V) (questa proprietà viene detta inerzia del bipolo), nel bipolo generatore ideale anche per $I = 0$ si ha una tensione ai morsetti diversa da zero. Il simbolo generalmente utilizzato per tale generatore è rappresentato in figura.

Un caso del tutto analogo, ma opposto, è quello del bipolo che per qualsiasi valore della tensione ai morsetti eroga sempre la stessa corrente I_0 . È naturale chiamare un tale bipolo generatore ideale di corrente. Il simbolo riservato per un tale generatore e la sua caratteristica sono mostrati in figura.

Si noti il segno che per il generatore di corrente la freccia indica il verso della corrente I fornita dal generatore stesso. I due generatori fin qui mostrati fanno parte di una più ampia classe



di bipoli che per ovvie ragioni si dicono attivi. Essi sono anche generatori indipendenti in quanto la tensione o la corrente, nei due casi, da essi erogata ai morsetti non dipende da alcuna caratteristica del sistema in cui vengono inseriti. Introdurremo in seguito generatori che non godono di tale proprietà

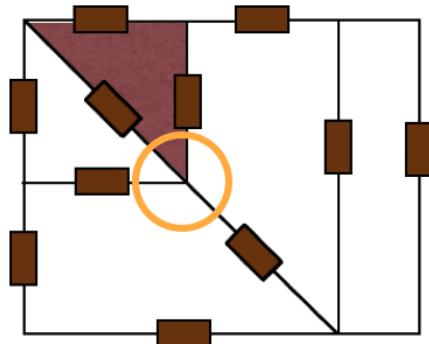
Si noti ancora che mentre la caratteristica di un generatore ideale di tensione può immaginarsi ottenuta traslando verso l'alto la caratteristica di un bipolo corto circuito, quella di un generatore ideale di corrente può essere ottenuta traslando verso destra la caratteristica di un bipolo a vuoto.

6. Circuiti e Reti

Si dice nodo di una rete un punto in cui convergono più di due bipoli della rete stessa e lato o ramo della rete il tratto tra due nodi in cui è inserito il bipolo.

Inoltre ogni insieme di lati della rete che formi un anello chiuso prenderà il nome di maglia della rete.

Orbene, in base alle definizioni ora date ed a quella di bipolo, è facile vedere che per ogni rete è possibile scrivere un certo numero di equazioni che legano tensioni tra i nodi e correnti nei lati fra loro, utilizzando le leggi di Kirchhoff.

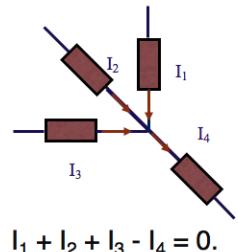


7. Leggi di Kirchhoff

La prima legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le correnti (LKC) afferma: in ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti (o uscenti) nel nodo è identicamente nulla. Il termine "algebrica" sta a indicare che ogni corrente va presa con il suo segno se il verso positivo scelto sul ramo corrispondente è effettivamente entrante nel nodo (o uscente se si è scelto di effettuare la somma delle correnti uscenti dal nodo!), o con il segno opposto nel caso contrario, come è mostrato nell'esempio in figura.

E ora sappiamo anche perché. Infatti la somma algebrica delle correnti entranti nel nodo rappresenta, per definizione di intensità della corrente elettrica, la quantità di carica che nell'unità di tempo viene globalmente portata nel nodo. In regime stazionario tale contributo, per unità di tempo, resta evidentemente costante. In queste condizioni se esso non fosse nullo, a condizione di attendere un tempo sufficientemente lungo, si potrebbe portare nel nodo in questione una carica grande quanto si vuole. Ciò è evidentemente impossibile, non fosse altro per il fatto che i portatori di carica sono dotati di massa non nulla e, quindi, con la carica, crescerebbe indefinitamente anche la massa del nodo.

Allo stesso risultato si giunge se si considerano le equazioni di Maxwell. Infatti se la derivata del campo elettrica è nulla il vettore densità di corrente \mathbf{J} è proporzionale ad un rotore, e quindi il suo flusso attraverso una superficie chiusa è necessariamente nullo.



$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

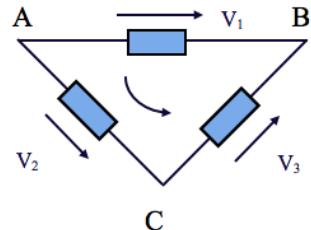
Consideriamo ora una maglia di una rete e supponiamo di percorrerla in uno dei due possibili versi. Sommiamo algebricamente le tensioni su

ogni lato della maglia così come le incontriamo seguendo l'orientazione prescelta. Anche qui "algebricamente" sta a indicare che ogni tensione verrà presa con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il verso prescelto per essa sul singolo

$$-(V_B - V_A) + (V_C - V_A) + (V_B - V_C) = 0.$$

lato coincida o non con quello di orientazione della maglia. Dato che la tensione su ogni ramo è per definizione l'integrale di linea del campo E tra i due morsetti del bipolo inserito nel ramo, ed in virtù della scelta di sommare "algebricamente" le tensioni, tale somma verrà a coincidere con l'integrale di E lungo una linea chiusa.

In regime stazionario tale circuitazione deve essere nulla e tale sarà dunque la somma delle tensioni lungo la maglia e quindi la seconda legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT): in una maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza scelto, è identicamente nulla.

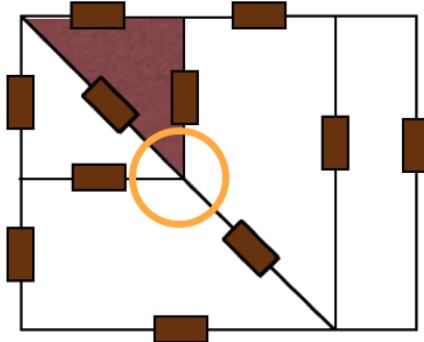


1. Circuiti

Si dice nodo di una rete un punto in cui convergono più di due bipoli della rete stessa e lato o ramo della rete il tratto tra due nodi in cui è inserito il bipolo.

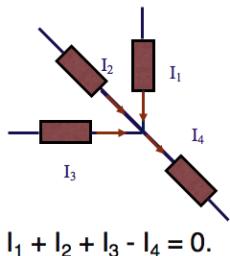
Inoltre ogni insieme di lati della rete che formi un anello chiuso prenderà il nome di maglia della rete.

Orbene, in base alle definizioni ora date ed a quella di bipolo, è facile vedere che per ogni rete è possibile scrivere un certo numero di equazioni che legano tensioni tra i nodi e correnti nei lati fra loro, utilizzando le leggi di Kirchhoff.



2. Leggi di Kirchhoff

La prima legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le correnti (LKC) afferma: in ogni nodo la



somma algebrica delle correnti entranti (o uscenti) nel nodo è identicamente nulla. Il termine "algebrica" sta a indicare che ogni corrente va presa con il suo segno se il verso positivo scelto sul ramo corrispondente è effettivamente entrante nel nodo (o uscente se si è scelto di effettuare la somma delle correnti uscenti dal nodo!), o con il segno opposto nel caso

contrario, come è mostrato nell'esempio in figura.

E ora sappiamo anche perché. Infatti la somma algebrica delle correnti entranti nel nodo rappresenta, per definizione di intensità della corrente elettrica, la quantità di carica che nell'unità di tempo viene globalmente portata nel nodo. In regime stazionario tale contributo, per unità di tempo, resta evidentemente costante. In queste condizioni se esso non fosse nullo, a condizione di attendere un tempo sufficientemente lungo, si potrebbe portare nel nodo in questione una carica grande quanto si vuole. Ciò è evidentemente impossibile, non fosse altro per il fatto che i portatori di carica sono dotati di massa non nulla e, quindi, con la carica, crescerebbe indefinitamente anche la massa del nodo.

Allo stesso risultato si giunge se si considerano le equazioni di Maxwell. Infatti se la derivata del campo elettrico è nulla il vettore densità di corrente \mathbf{J} è proporzionale ad un rotore, e quindi il suo flusso attraverso una superficie chiusa è necessariamente nullo.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

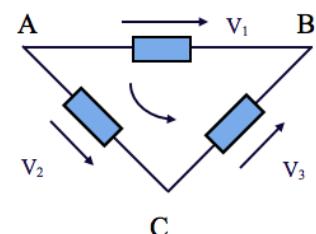
Consideriamo ora una maglia di una rete e supponiamo di percorrerla in uno dei due possibili versi. Sommiamo algebricamente le tensioni su ogni lato della maglia così come le incontriamo seguendo l'orientazione prescelta. Anche qui "algebricamente" sta a indicare che ogni tensione verrà presa con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il verso

prescelto per essa sul singolo lato coincida o non con quello di orientazione della maglia. Dato che la tensione su ogni ramo è per definizione l'integrale di linea del campo E tra i due morsetti del bipolo inserito nel ramo, ed in virtù della scelta di sommare "algebricamente" le tensioni, tale somma verrà a coincidere con l'integrale di E lungo una linea chiusa.

In regime stazionario tale circuitazione deve essere nulla e tale sarà dunque la somma delle tensioni lungo la maglia e quindi la seconda legge di Kirchhoff o legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT): in una maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza scelto, è identicamente nulla.

Possiamo verificare la validità della legge precedentemente enunciata ragionando anche in un altro modo: in regime stazionario ogni tensione è in realtà una differenza di potenziale e potrà essere messa sotto la forma $V_r - V_s$, dove con V_r e V_s si sono indicati i potenziali nei nodi, rispettivamente, r ed s. La somma di cui sopra potrà essere riscritta nella maniera mostrata in figura, ed è, evidentemente, identicamente nulla perché ogni potenziale di nodo compare due volte e con segno opposto. Quindi la LKT è una diretta conseguenza del fatto che la rete si suppone composta da "bipoli" delle cui proprietà già si è detto più volte.

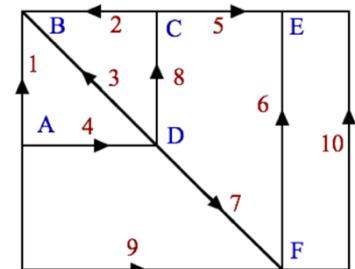
Osserviamo infine che sia le LKT che le LKC impongono legami lineari rispettivamente tra le tensioni e le correnti.



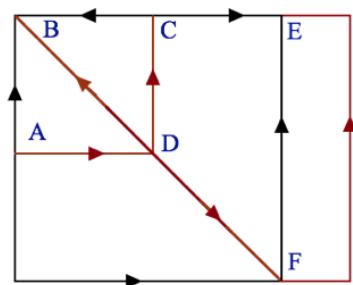
$$-(V_B - V_A) + (V_C - V_A) + (V_B - V_C) = 0.$$

3. Grafo di una rete

Per studiare una rete possiamo per il momento prescindere dalla natura dei vari bipoli che ne costituiscono i diversi rami, e focalizzare la nostra attenzione sulla struttura della rete stessa, cioè sul modo in cui i bipoli sono collegati tra loro. Una tale struttura prende il nome di grafo della rete. In un grafo possiamo individuare L rami e N nodi.

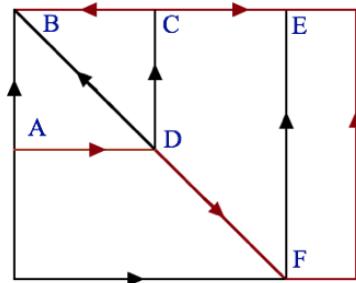


Se poi orientiamo ogni ramo del grafo, scegliendo uno dei due versi possibili, diremo che il grafo è orientato.



Indicheremo i nodi con le lettere e i lati con i numeri arabi. Nel caso in figura dieci lati e sei nodi.

Chiameremo albero di una rete un insieme di rami che unisce fra di loro tutti i nodi della rete senza formare maglie chiuse. Ovviamente esistono in generale più alberi per una rete avente un determinato grafo. In figura è indicato con tratto rosso un possibile albero per la rete che stiamo esaminando.



Nella figura successiva, in rosso, è indicato un altro possibile albero della rete.

Il complemento di un dato albero a tutta la rete, cioè l'insieme dei rami che restano esclusi dall'albero, prende il nome di coalbero della rete. Nelle figure precedenti, ovviamente il coalbero è indicato in nero.

4. Indipendenza delle equazioni

Per un grafo orientato possiamo scrivere n equazioni ai nodi, se n sono i nodi, che derivano dall'applicazione della LKC ad ogni singolo nodo. Supponiamo di scrivere tali equazioni nella forma che esse assumono quando si sceglie di imporre l'annullamento della somma delle correnti entranti (o uscenti!). In queste condizioni nel sistema di equazioni così ottenuto ogni corrente comparirà una volta con il segno "meno" in una equazione ed una volta con il segno "più" in un'altra equazione, dato che ogni ramo collega due nodi ed uno stesso orientamento risulterà entrante per l'uno e uscente per l'altro.

$$\begin{array}{l} \text{-----} = 0 \\ \hline 0 \quad = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Equazione} \quad \text{Identità}$$

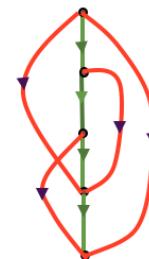
Se, a questo punto, sommiamo tutti i primi membri delle equazioni del sistema abbiamo una espressione algebrica che, per costruzione, è identicamente nulla. La stessa cosa accade per la somma dei secondi membri. Il fatto che dal nostro

sistema di equazioni, sommando membro a membro, si ottiene una identità, ci dice che in realtà almeno una delle equazioni presa a caso potrebbe essere ottenuta con una opportuna combinazione lineare delle altre n-1. Le n equazioni, dunque, non sono tra di loro indipendenti, il che significa che l'informazione contenuta in una delle equazioni è già contenuta nelle altre: essa è in realtà ridondante.

Infatti se invece di sommarne N ne sommassi N-1, evidentemente non avrei una identità ma un'equazione. Questa equazione però dovrebbe essere tale che se poi aggiungessi anche l'ennesima dovrebbe ridarmi l'identità. Ma allora tale equazione ottenuta sommando N-1 equazioni ai nodi non è nient'altro che l'ennesima cambiata di segno. Quindi l'ennesima - in pratica una qualsiasi, perché l'ordine in cui scrivano le equazioni è arbitrario - è combinazione lineare delle rimanenti N-1.

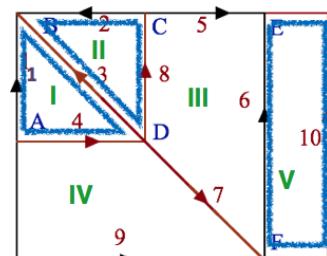
È possibile dimostrare anche che almeno $N - 1$ sono indipendenti. Infatti immaginiamo di scegliere un albero della rete che abbia la caratteristica di non avere più di due rami che confluiscono in ogni singolo nodo. Esso sarà costituito per definizione da $n - 1$ rami. Supponiamo di numerare i nodi del grafo in ordine progressivo così come essi vengono incontrati percorrendo l'albero prescelto. Per ognuno dei primi $N - 1$ nodi scriviamo le equazioni che esprimono la LKC. Numeriamo anche i rami, magari con numeri romani per non creare confusione, così come vengono incontrati percorrendo l'albero della rete. Si avrà dunque che il ramo I dell'albero congiungerà i nodi 1 e 2, il ramo II i nodi 2 e 3 ecc.

Nella figura sono mostrati anche, i rami del coalbero.



$$\begin{aligned}I_I &= f(I_C) \\I_{II} &= g(I_C) \\I_{III} &= h(I_C) \\I_{IV} &= s(I_C)\end{aligned}$$

Orbene dalla equazione che esprime la LKC al primo nodo possiamo ricavare l'incognita i_1 in funzione delle correnti in altri rami non appartenenti all'albero, cioè del coalbero. Nella equazione relativa al secondo nodo compariranno le correnti i_1 ed i_{II} , ma utilizzando la prima equazione si potrà ottenere una equazione in cui i_{II} comparirà in funzione di tutte correnti del coalbero. L'operazione può essere evidentemente ripetuta per tutte le $N - 1$ correnti dei rami dell'albero. Abbiamo così ottenuto un sistema nel quale in ogni equazione compare in esclusiva una corrente di un ramo dell'albero e quindi di equazioni indipendenti



Abbiamo, dunque mostrato che la LKC consente di scrivere $N - 1$ equazioni indipendenti per le correnti della rete. Dimostreremo ora che le LKT consentono invece di scrivere $L - (N - 1)$ equazioni indipendenti tra le tensioni di lato.

Per una rete di L lati non è in generale possibile dire, senza specificare meglio la rete, quante sono le maglie chiuse che in essa si possono formare. E ciò è evidente se si pensa che alcuni nodi possono non essere collegati tra di loro direttamente. Anche in questo caso possiamo però dimostrare che un sottoinsieme di tutte le equazioni che si possono scrivere alle maglie è in realtà costituito da equazioni linearmente indipendenti: per la precisione un numero di $L - (N - 1)$

equazioni. Costruiamo un sistema di $L - (N - 1)$ maglie chiuse aggiungendo, di volta in volta, ai rami dell'albero uno ramo del coalbero, che è composto appunto da $L - (N - 1)$ rami.

Che questa operazione porti alla costruzione di maglie chiuse discende in maniera evidente dalla definizione di albero. Esso, infatti, congiunge tutti i nodi della rete. L'aggiunta di un altro ramo, che collega due nodi a caso, dovrà necessariamente chiudere una maglia - eventualmente con qualche appendice che converremo di non prendere in considerazione. Orbene le equazioni che si ottengono dalla LKT per tali maglie sono necessariamente indipendenti, in quanto in ognuna di esse comparirà una incognita in esclusiva: la tensione del particolare ramo del coalbero che ha contribuito a formare la maglia.

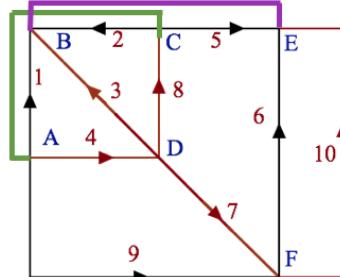
In conclusione, possiamo sempre scrivere $L - (N - 1)$ equazioni indipendenti alle maglie. Il metodo dell'albero e del coalbero non è l'unico metodo che ci consente di determinarle.

Prima di tutto osserviamo che non tutte le reti possono essere disegnate in un piano senza che due o più rami si accavallino. Diremo piane le reti che godono di questa proprietà.

In una rete piana sono immediatamente identificabili delle maglie chiuse che, per intenderci, diremo "i buchi della rete". È facile dimostrare che tali "buchi" sono proprio $L - (N - 1)$.

Orbene le equazioni che si possono scrivere a tali maglie sono indipendenti. Provate a dimostrarlo!

Si noti che nel nostro caso le maglie individuate in precedenza mediante l'albero composta dai rami 3,4,8,7 e 10, non sono i "buchi" della rete, così come è disegnata. Tali buchi potrebbero essere ottenuti da un altro albero, quello composto dai rami 3,4,8,7 e 6.



$N = 6$;
 $L = 10$.

In conclusione, dunque, la LKT ci consente di scrivere un numero di $L - (N - 1)$ relazioni lineari tra le tensioni sui rami della rete. Nel complesso, dunque, attraverso l'applicazione della LKC e della LKT si possono scrivere L relazioni lineari

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

Luciano De Menna - Le leggi dei Circuiti

indipendenti tra le L correnti di lato e le L tensioni di lato. D'altra parte le caratteristiche dei bipoli ci forniscono ancora L relazioni - questa volta non necessariamente lineari - tra le tensioni e le correnti, per cui nel complesso avremo $2L$ equazioni in $2L$ incognite. Se la rete è costituita da generatori indipendenti e da bipoli con caratteristiche lineari, allora le $2L$ equazioni sono anch'esse tutte lineari e forniscono certamente una ed una sola soluzione del problema: le tensioni e le correnti nei rami.

5. Un esempio

Proviamo ad applicare quanto detto ad un esempio con lo stesso grafo di quello precedente e con particolari bipoli tra i rami.

- A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0;$
- B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0;$
- C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$
- D) $I_3 + I_8 - I_4 + I_7 = 0;$
- E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0.$
- F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0.$

In figura abbiamo riportato le equazioni ai nodi nei sei nodi presenti nella rete. Come sappiamo una equazione non va presa in considerazione perché linearmente dipendente dalle altre: sceglieremo di non utilizzare la F!

Le equazioni alle maglie, che immaginiamo di ricavare dall'albero usato in precedenza e formato dai lati 3,4,8,7 e 10, si scrivono semplicemente.

Il complesso delle equazioni risolventi, costituito dalle 5 equazioni ai nodi, dalle cinque equazioni alle maglie (si badi bene: è un puro caso che il numero delle equazioni ai nodi indipendenti coincida con quello delle maglie!) e le 10 caratteristiche dei rami –

- 1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0;$
- 2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0;$
- 3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0;$
- 4) $V_6 - V_{10} = 0;$
- 5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0.$

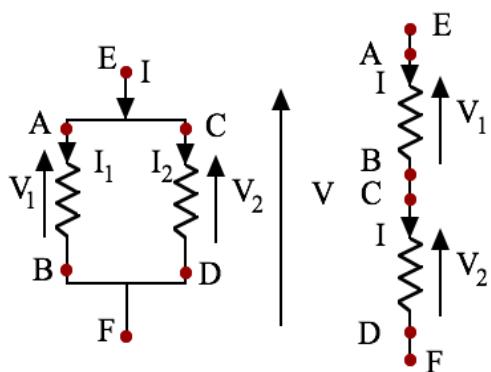
cioè i legami tra tensioni e correnti imposti dai bipoli presenti nella rete, che dobbiamo assumere noti – consente di risolvere la rete: trovare, cioè il valore delle tensioni e delle correnti in ogni ramo. Se tali caratteristiche sono lineari allora la soluzione è anche unica. Infatti abbiamo in totale 20 equazioni lineari per le 20 incognite tensione e corrente nei 10 rami!

Il problema di come si arrivi a trovare la soluzione è a questo punto di puro carattere matematico, risolvibile con diversi metodi: dal semplice metodo di sostituzione, molto conveniente quando il numero di equazioni è ridotto, al più complesso, ma ancora di semplice applicazione, metodo detto di Cramer. Se invece le caratteristiche dei bipoli non sono tutte lineari, allora il problema di trovare una soluzione diventa più delicato; può accadere, per esempio, che esista più di una soluzione. In generale la presenza di bipoli non lineari rende difficile una trattazione generale ed ogni caso va studiato nei suoi aspetti particolari.

1. Parallaelo e serie di resistori

Cominciamo dai casi semplici e vediamo cosa ci consentono di dire le nozioni che abbiamo dato sui più elementari circuiti possibili: quelli con due soli bipoli.

Dati due soli bipoli, sono possibili soltanto due tipi di collegamento e sono mostrati



nell'immagine. Il primo collegamento prende il nome di collegamento in parallelo ed il secondo di collegamento in serie. Se nel primo caso consideriamo un nuovo bipolo i cui morsetti siano non quelli A, B del primo bipolo, né quelli C, D del secondo, bensì quelli indicati con E ed F, possiamo domandarci quale sarà la caratteristica di questo nuovo bipolo; o, con linguaggio specifico, quale è

la caratteristica del bipolo equivalente che si ottiene collegando due bipoli in parallelo.

Evidentemente l'elemento caratterizzante un collegamento in parallelo di due resistori, sta nel fatto che i due bipoli sono, per costruzione, soggetti alla stessa tensione V.

Mentre invece nel collegamento in serie i due bipoli sono attraversati dalla stessa corrente.

Cominciamo dal parallelo: essendo i due bipoli, per costruzione, soggetti alla stessa tensione V, si potrà scrivere, (avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore): $V = R_1 I_1 = R_2 I_2$. D'altra parte la corrente I deve essere la somma delle correnti I_1 ed I_2 , per cui si ha, con facili passaggi, che il bipolo equivalente deve avere una caratteristica individuata dal parametro R indicato.

Per meglio comprendere la formula ottenuta, in figura sono riportati alcuni casi notevoli, quali il parallelo di due resistori uguali (il bipolo equivalente ha una resistenza pari alla metà), il caso in cui uno dei bipoli in parallelo è la metà dell'altro (il risultato è un terzo del più grande), il caso del parallelo con un bipolo c.c. e quello con un bipolo a vuoto. Tutti questi risultati si comprendono facilmente se si ricorda che i due rami sono in "parallelo" e quindi la corrente, per così dire, ha due vie di passaggio e si distribuisce opportunamente tra esse. Si noti che da queste osservazioni ne

consegue immediatamente che il resistore equivalente di un parallelo sarà sempre minore, o al massimo uguale, del più piccolo di quelli in parallelo.

È interessante notare che la corrente in uno dei rami del partitore di corrente - è questo il nome che viene dato spesso alla disposizione in parallelo di due bipoli - si ottiene facilmente, quando sia nota la corrente totale entrante nel parallelo, con la formula: $I_1 = I [R_2/(R_1 + R_2)]$.

Ora il caso della serie di due resistori: questa volta l'elemento caratterizzante il collegamento è dato dal fatto che i due resistori sono attraversati dalla stessa corrente. Si avrà dunque: $I = I_1 = I_2$. D'altra parte, per definizione, si ha che $V = V_1 + V_2$ e quindi ne segue che il bipolo equivalente è ancora un resistore con resistenza pari a $R = R_1 + R_2$.

Analogamente avremo una formula del partitore di tensione che ci fornisce la tensione su di uno dei due bipoli in serie in funzione della tensione sul complesso dei due, e del valore delle rispettive resistenze.

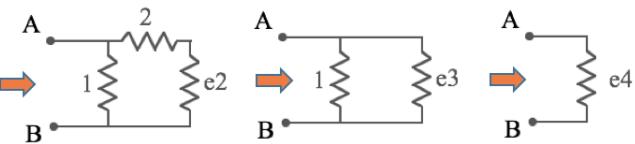
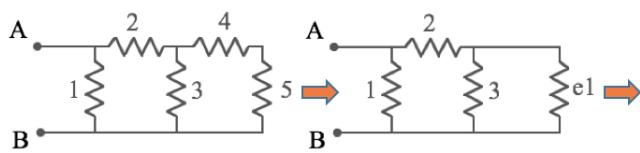
2. Rete vista come bipolo

Come già notato, i collegamenti serie e parallelo sono gli unici possibili quando si dispone di due soli bipoli. Immaginiamo ora di poter disporre di più bipoli resistori e di collegarli fra di loro in una maniera qualsiasi attraverso i loro morsetti, come nell'esempio mostrato.

Se immaginiamo di scegliere due morsetti A e B della rete e assumiamo che tali morsetti siano gli unici punti di comunicazione della rete con l'esterno, la rete stessa ci apparirà come un unico bipolo. La caratteristica di un tale bipolo si può generalmente determinare, una volta nota quella dei bipoli componenti, con un procedimento di "riduzione progressiva".

Con riferimento all'esempio mostrato, infatti, è evidente che i resistori R_4 ed R_5 , essendo attraversati dalla stessa corrente, sono tra di loro in serie.

Ad essi potrà quindi essere sostituito un unico bipolo equivalente di valore R_{e1} , secondo quanto già noto.



Nella rete così ridotta, i bipoli R_3 ed R_{e1} sono ora in parallelo e potranno quindi essere sostituiti da un unico bipolo equivalente R_{e2} . A questo punto R_2 ed R_{e2} sono in serie e quindi equivalenti ad un bipolo di resistenza R_{e3} .

Infine i bipoli R_1 ed R_{e3} appaiono ora in parallelo e quindi la resistenza vista dai morsetti A e B è pari a R_{e4} che, riepilogando, può essere scritta:

$$R_{e4} = R_1 \frac{R_3(R_4+R_5) + R_2(R_3+R_4+R_5)}{R_3(R_4+R_5) + (R_1+R_2)(R_3+R_4+R_5)}$$

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

Questo procedimento di riduzione progressiva della rete è generalmente molto semplice e conduce alla immediata determinazione della caratteristica del bipolo equivalente.

Val la pena però di sottolineare che la resistenza equivalente di una rete di resistori, vista da una coppia di suoi morsetti, dipende dai morsetti prescelti. Nella stessa rete precedente, infatti, scegliendo un'altra coppia di morsetti si ottiene un risultato diverso.

Anche questa volta R_4 ed R_5 sono in serie e possono essere sostituite con un resistore R_{e1} . A questo punto R_{e1} ed R_3 sono in parallelo e quindi sostituibili con un resistore R_{e2} , e infine R_{e2} ed R_1 sono in serie e al loro posto si può sostituire un resistore R_{e3} , che poi risulta in parallelo con R_2 , e quindi, riepilogando il risultato è:

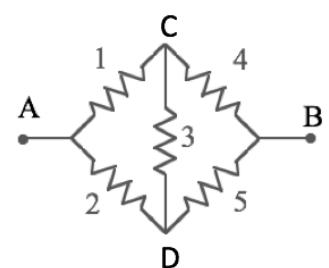
$$R_{e4} = R_2 \cdot \frac{R_3(R_4+R_5) + R_1(R_3+R_4+R_5)}{R_3(R_4+R_5) + (R_1+R_2)(R_3+R_4+R_5)}$$

Confrontando i due risultati ottenuti si vede, che in questo caso, la differenza sta nel fatto che R_1 ed R_2 si scambiano il ruolo nelle due formule.

Si osservi che la chiave di tutto questo procedimento è nel fatto che si è potuto nella rete in esame trovare una prima coppia di resistori che si trovavano in serie o in parallelo.

Bisogna osservare però che non per tutti i circuiti è possibile trovare una prima coppia di resistori che si trovavano o in serie o in parallelo, e quindi non tutti i circuiti, visti da due morsetti, possono essere ricondotti ad un unico bipolo utilizzando soltanto le formule della serie e del parallelo! Ci vuole qualcos'altro.

Un esempio è mostrato nella figura; si tratta di una tipica rete "a ponte" spesso utilizzata in dispositivi di misura per le sue specifiche caratteristiche. La riduzione di una tale rete, per la coppia di morsetti indicata, sarà possibile utilizzando una trasformazione particolare che introdurremo in seguito. Infatti nella rete mostrata non esiste alcuna coppia di bipoli in serie o in parallelo da cui incominciare la riduzione.

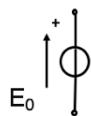


Luciano De Menna - Reti elementari

Val la pena di osservare che, nella stessa rete, questo non accade per una differente scelta dei morsetti A e B, per esempio, C e D. Provate a calcolare la resistenza equivalente vista da questi due morsetti. Aggiungendo la trasformazione di cui si è fatto cenno, vedremo che sarà sempre possibile ridurre una rete di bipoli passivi vista da una coppia di morsetti ad un unico bipolo passivo equivalente.

3. Bipoli attivi

Ritorniamo ora alle reti composte da soli due bipoli e proviamo ad utilizzare anche i bipoli generatori già introdotti. Vi ricorderete che abbiamo definito il generatore ideale di tensione, o



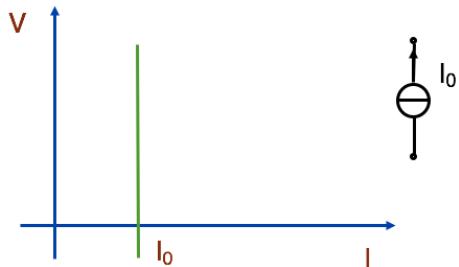
anche di forza elettromotrice (f.e.m.), come quel bipolo che presenta sempre la stessa d.d.p. ai suoi morsetti, indipendentemente dalla corrente che lo interessa, o che il bipolo eroga. Si noti che il generatore ideale di tensione non è pilotabile in

tensione, in quanto non si può fissare ad arbitrio la tensione e la caratteristica $V=f(I)$ non esiste.

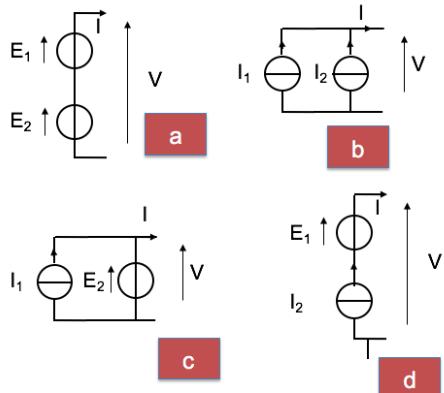
Analogamente, il bipolo generatore ideale di corrente è quel bipolo che fornisce sempre la stessa corrente indipendentemente dalla tensione ai suoi morsetti. Si noti che il generatore ideale di corrente non è pilotabile in corrente, in quanto non si può fissare ad arbitrio la corrente e la caratteristica $I=f(V)$ non esiste.

Proviamo ora a disporli in serie ed in parallelo. Per i casi a) e b) rappresentati in figura è facile convincersi che il bipolo equivalente è ancora un generatore ideale, rispettivamente di tensione pari ad $E_1 + E_2$, e di corrente pari a $I_1 + I_2$. Infatti, nel primo caso, la tensione ai morsetti del bipolo equivalente è sempre la stessa, mentre la corrente può essere qualsiasi.

I casi c) e d) sono leggermente meno evidenti: per comprendere la natura del bipolo equivalente rappresentato nel caso c), per esempio, basta considerare che, per il modo in cui il collegamento è realizzato, il generatore di tensione impone la sua tensione ai morsetti del bipolo equivalente; se ne conclude che tale bipolo, che è in grado di erogare qualsiasi corrente



mantenendo costante la sua tensione ai morsetti, è ancora un generatore ideale di tensione.



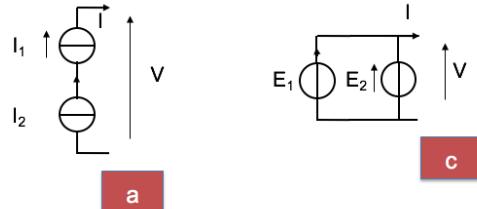
Analogamente nel caso d) avremo un generatore equivalente ideale di corrente.

Di proposito abbiamo lasciato da parte i due casi a e b rappresentati figura a lato. Tali collegamenti danno luogo ad una contraddizione non eliminabile. Infatti, consideriamo per esempio il caso b): i due generatori vorrebbero entrambi imporre la loro tensione ai morsetti del generatore equivalente. D'altra parte tale tensione

non può che essere unica perché i bipoli sono in parallelo.

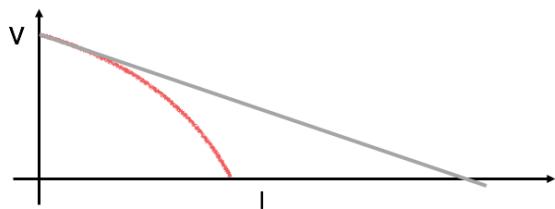
In sintesi si può dire che questo è un caso in

cui entrano in contraddizione due "idealità": quella dei generatori - appunto ideali - che presentano, in quanto tali, sempre la stessa tensione ai loro morsetti, e quella dei conduttori di collegamento che, essendo anche essi ideali, non possono produrre una caduta di tensione. È un caso di contrasto non raro quando in un modello vengono introdotti elementi "ideali". Si noti che se E_1 ed E_2 sono uguali la contraddizione scompare. Il caso a) si analizza in maniera analoga.

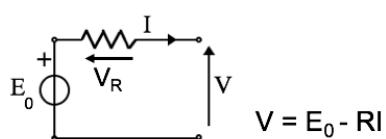


4. I generatori reali

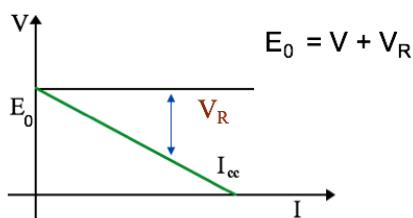
Abbiamo già osservato che “l’idealità” di un generatore ideale di tensione è nel fatto che esso è, per definizione, in grado di fornire ai suoi morsetti una potenza infinita. Nessun generatore “reale” potrà mai comportarsi in tal modo. In un generatore reale all’aumentare della corrente erogata, la tensione ai morsetti non potrà rimanere costante, come, per esempio, nella caratteristica in rosso mostrata in figura. Se prescindiamo dalla sua non linearità, potremmo dire che una tale caratteristica è meglio rappresentata da quella in verde.



D’altra parte, se prendiamo in considerazione i possibili collegamenti serie-parallelo che si possono realizzare utilizzando un bipolo generatore ideale ed un bipolo resistore, ci rendiamo conto che una tale caratteristica è proprio quella della serie di un generatore di tensione ed un resistore. Infatti, la tensione V ai morsetti del bipolo equivalente sarà pari alla tensione E del generatore diminuita della tensione V_R che “cade” sulla resistenza R.



$$V = E_0 - RI$$



E quindi la caratteristica in figura. Come si vede, dunque, il bipolo equivalente in esame è ancora un bipolo attivo, ma la potenza che esso è in grado di fornire non può più essere illimitata. È ancora dunque un bipolo “ideale” - nessun generatore reale avrà mai una caratteristica rappresentabile rigorosamente con una retta - ma il suo comportamento è indubbiamente più

vicino a quello di un generatore reale: potremmo chiamare un tale bipolo generatore reale idealizzato.

Per il caso del generatore di corrente con un resistore in parallelo si possono fare analoghe considerazioni.

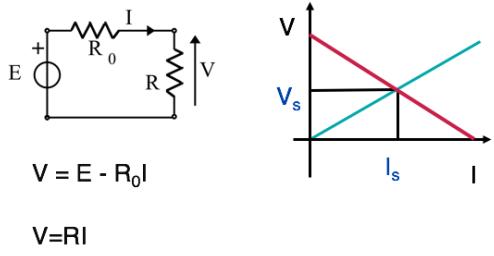
Fin qui abbiamo descritto bipoli la cui caratteristica può essere individuata da una relazione tra V ed I del tipo $V=al+b$. Tali bipoli prendono il nome di bipoli "normali". Se $b=0$, se cioè il bipolo è anche "inerte", si parla di "bipolo lineare".

5. Circuito elementare

Affrontiamo, infine, il caso della serie di un bipolo generatore reale idealizzato e di un resistore. Se assumiamo le convenzioni indicate in figura, possiamo immaginare di riportare entrambe le caratteristiche dei due bipoli sullo stesso piano (I, V).

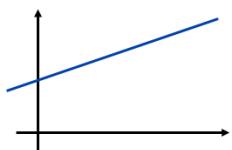
Questa rappresentazione consente una soluzione grafica del problema della determinazione della corrente e della tensione comune ai due bipoli. Infatti, dovendo il punto caratterizzato dalle coordinate I_s e V_s - soluzioni del nostro problema - necessariamente

appartenere sia alla caratteristica del generatore che a quella del resistore, esso non potrà che essere il punto di intersezione tra le due caratteristiche. Tale punto prende il nome di punto di lavoro e la caratteristica del bipolo passivo R , è detta retta di carico del bipolo attivo.

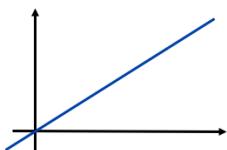


Naturalmente la soluzione è può essere trovata anche analiticamente, ricavando I dalla seconda e sostituendola nella prima: $I = E/(R+R_0)$

6. Classificazione dei bipoli



Bipoli lineari

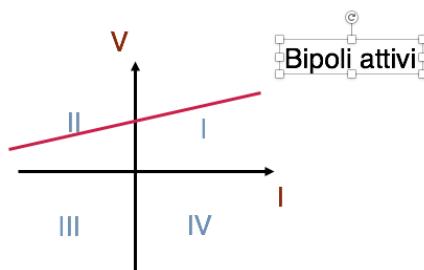


Bipoli normali.

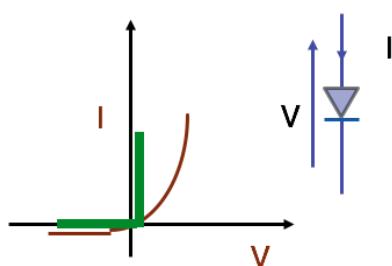
Fin qui abbiamo descritto bipoli la cui caratteristica può essere individuata da una relazione tra V ed I del tipo $V=al+b$. Tali bipoli prendono il nome di bipoli normali. Se $b=0$, se cioè il bipolo è anche inerte, si parla di bipolo lineare

Abbiamo già visto invece che se la caratteristica - avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore - giace tutta nel primo e terzo quadrante, si parla di bipoli passivi.

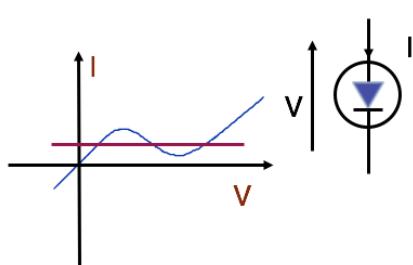
Naturalmente se la convenzione fatta è del generatore, per la passività occorre che la caratteristica sia nel II e IV quadrante



Mentre se la caratteristica ha tratti nei quadranti adiacenti, per esempio primo e secondo, si dice che il bipolo è attivo.



Questa definizione di passività ed attività del bipolo - che è adeguata in regime stazionario, altrimenti detto anche regime di corrente continua (c.c.) - dovrà essere opportunamente modificata quando introdurremo i bipoli in regime dinamico.

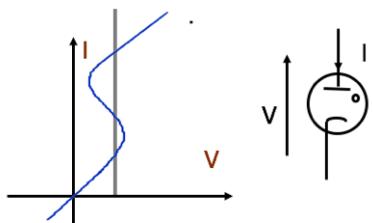


È possibile però concepire anche bipoli la cui caratteristica sia "non normale", e quindi anche non lineare. Un esempio classico è quello del bipolo diodo nella sua forma reale ed idealizzata mostrate in figura in verde.

Ma si possono presentare anche altre tipologie di

caratteristiche, come quelle del bipolo diodo tunnel, che è ancora un bipolo passivo, nel senso

definito precedentemente. Si osservi che per il diodo tunnel la

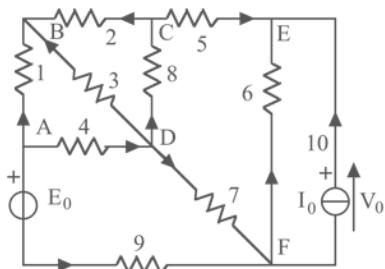


caratteristica $I=I(V)$ è una funzione ad un sol valore, quella $V=V(I)$ è, in alcuni tratti, a più valori. Per questa proprietà si dice che il diodo tunnel è controllato in tensione.

Oppure del diodo a gas, mostrata anche essa, qualitativamente, in figura. Anche il diodo a gas è un bipolo passivo, ma in questo caso la caratteristica $V=V(I)$ è una funzione ad un sol valore, mentre quella $I=I(V)$ è, in alcuni tratti, a più valori. Per questa proprietà si dice che il diodo a gas è controllato in corrente. Come è noto i bipoli non lineari sono di estrema importanza nelle pratiche applicazioni. Naturalmente la loro non linearità introduce notevoli difficoltà nella soluzione di problemi in cui essi sono coinvolti. Si noti che la soluzione grafica di cui si è parlato in precedenza è applicabile anche quando uno dei bipoli non è lineare, o anche quando entrambi non sono lineari, a condizione però che il punto di intersezione tra le due caratteristiche sia unico, come nel caso in figura.

In presenza di intersezioni multiple occorrerà avere un criterio, che esula dall'attuale modello, per determinare quale dei diversi punti possibili sia quello di lavoro effettivo.

1. Incognite tensioni e correnti



Affrontiamo ora il problema generale di una rete qualsiasi per la quale, come sappiamo, è possibile scrivere un sistema di $2L$ equazioni indipendenti in $2L$ incognite: le correnti e le tensioni in ogni ramo.

In figura sono riportate la rete su cui vogliamo esemplificare le nostre considerazioni e le equazioni ottenute imponendo le leggi di Kirchhoff.

Si noti che la corrente I_{10} non è incognita perché è la corrente del generatore di corrente I_0 , che deve considerarsi assegnata, ma questo è compensato dal fatto che non è nota V_0 , in quanto non c'è legame tra tensione e corrente in un generatore di corrente.

Quindi una incognita scompare, ma anche una equazione scompare e quindi il conto torna. Cosa analoga accadrebbe se ci fosse anche un generatore di tensione isolato, per esempio se non fosse presente nessun resistore in serie ad E_0 .

Domandiamoci se si può fare di meglio che scrivere le equazioni nelle incognite correnti e tensioni. Se immaginiamo di avere tutte caratteristiche del tipo $V=f(I)$, potremmo ridurre il numero delle equazioni a 10, semplicemente sostituendo nelle equazioni alle maglie le espressioni delle stesse tensioni in funzione delle correnti fornite dalle caratteristiche. Le incognite saranno le correnti nei rami.

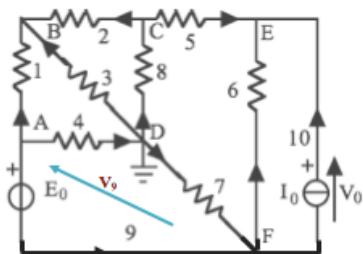
- A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0$; 1) $V_1 - V_3 - V_4 = 0$;
- B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0$; 2) $V_3 - V_2 - V_8 = 0$;
- C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0$; 3) $V_8 + V_5 - V_{10} - V_7 = 0$;
- E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0$; 4) $V_6 - V_{10} = 0$;
- F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0$. 5) $V_4 + V_7 - V_9 = 0$.

+ le equazioni caratteristiche!

$$V_x = R_x I_x \quad V_9 = E_0 + R_9 I_9 \quad - V_{10} = V_0$$

2. Incognite correnti

Per tutti i bipoli passivi la caratteristica è semplicemente $V_x = R_x I_x$, e quindi non è difficile



eliminare le V a favore delle I . La presenza del resistore R_9 , rende anche la caratteristica del ramo 9 invertibile facilmente fornendo la V_9 in funzione della I_9 . In assenza di R_9 invece non sarebbe stato possibile avere un legame tra E_0 ed I_9 .

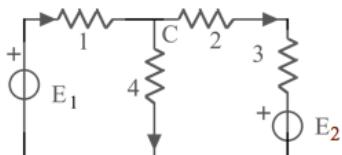
Per quanto riguarda invece il generatore di corrente non ci sono difficoltà in questo caso. Infatti, anche se non è possibile eliminare V_0 - che quindi resta incognita - la corrente I_{10} non è più tale, essendo assegnata come corrente del generatore di corrente I_0 , e quindi pareggia il numero delle incognite.

- A) $I_1 + I_4 + I_9 = 0$; 1) $R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$;
- B) $I_1 + I_3 + I_2 = 0$; 2) $R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 = 0$;
- C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0$; 3) $R_8 I_8 + R_5 I_5 + V_0 - R_7 I_7 = 0$;
- E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0$; 4) $R_6 I_6 + V_0 = 0$;
- F) $I_9 + I_7 - I_6 - I_{10} = 0$ 5) $R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) = 0$.

La presenza di generatori di tensione isolati, in questo caso, non costituirebbe un problema.

Infatti se, nel nostro caso, supponessimo che nel lato 9 non ci sia la resistenza R_9 , non potremmo esprimere la tensione sul generatore in funzione della corrente che esso eroga. Non potremmo quindi eliminare la tensione V_9 in funzione della corrente I_9 . Ma questo non costituisce un problema dato che E_0 (e quindi V_9) è assegnata, e non incognita.

Notiamo che in questo caso I_0 è nota e V_0 incognita!



$$\begin{aligned} E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_4 &= 0; \\ E_2 + R_3 I_2 + R_2 I_2 - R_4 I_4 &= 0; \\ I_1 - I_2 - I_4 &= 0. \end{aligned}$$

Un altro esempio

$$\begin{aligned} R_1 &= 5 \Omega; \\ R_2 &= 10 \Omega; \\ R_3 &= 15 \Omega; \\ R_4 &= 5 \Omega; \\ E_1 &= 90 \text{ V}; \\ E_2 &= 100 \text{ V}. \end{aligned}$$

Proviamo a sviluppar un altro

esempio e a portarlo fino in fondo.

Abbiamo due maglie (scegliamo i "buchi della rete") e due nodi, quindi due equazioni alle maglie e una equazione ai nodi.

Risolviamo con il metodo di sostituzione: prima ricaviamo I_4 dalla terza e sostituiamo nelle altre due.

Poi ricaviamo I_1 dalla seconda e sostituiamo nella prima. Otteniamo così una equazione nella sola I_2 , che risolata ci fornisce:

$$I_2 = - \frac{E_1 + (R_1 + R_2) \frac{E_2 - E_1}{R_1}}{R_1 + (R_1 + R_4) \frac{R_3 + R_2}{R_1}} = -2A$$

Che, con i valori assegnati dei parametri, ci da, appunto, un valore di -2A.

Dalla conoscenza di I_2 è facile ricavare $I_1 = 8A$, e poi $I_4 = 10A$.

3. Incognite potenziali ai nodi

Abbiamo visto che è possibile ridurre il numero delle equazioni risolventi del circuito eliminando le incognite tensioni o correnti.

Vediamo ora come si possa ulteriormente ridurre il numero delle incognite e delle equazioni. Esistono due possibilità duali: o si sceglie un sistema di incognite che per definizione soddisfa alle equazioni alle maglie, o uno che soddisfa quelle ai nodi. Si può, per esempio, scegliere, come incognite del problema, invece delle tensioni sui lati o delle correnti nei rami, i potenziali relativi ai nodi della rete.

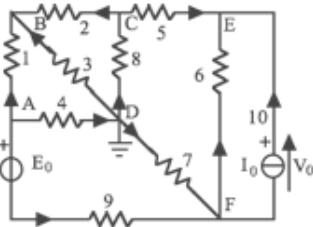
A tale scopo, possiamo porre ogni tensione di lato nella forma $V_r - V_s$, dove V_r e V_s sono, evidentemente, i potenziali dei nodi r ed s rispetto ad un riferimento che, come è noto, è arbitrario. Se in particolare scegliamo come riferimento per i potenziali quello assunto da uno dei nodi, ci ritroveremo con $n - 1$ incognite V_i , potenziali assunti dai restanti nodi della rete rispetto al nodo prescelto.

Il sistema di $n - 1$ equazione nelle $n - 1$ incognite (i potenziali ai nodi) che ci occorre per risolvere la rete, si può facilmente ottenere scrivendo le equazioni dettate dalla LKC ad $n - 1$ nodi, esprimendo però le correnti nei singoli rami in funzione delle differenze di potenziale $V_i - V_j$. Osserviamo che per le incognite V_i non occorre scrivere le equazioni che esprimono la LKT; esse infatti, per definizione, le soddisfano, trattandosi appunto di potenziali.

L'automatica riduzione delle equazioni rende pertanto conveniente la scelta dei potenziali ai nodi come incognite. Naturalmente la conoscenza dei potenziali in ogni nodo equivale ad aver risolto la rete. Infatti, la differenza dei due potenziali relativi ad un determinato ramo fornisce la tensione sul lato, e da questa, mediante la caratteristica del lato, si può risalire alla corrente che lo interessa.

In definitiva ecco le equazioni per il circuito mostrato in figura:

- A) $I_9 + I_1 + I_4 = 0;$
- B) $I_1 + I_2 + I_3 = 0;$
- C) $I_2 + I_5 - I_8 = 0;$
- D) $I_3 - I_4 + I_7 + I_8 = 0;$
- E) $I_5 + I_6 + I_{10} = 0;$



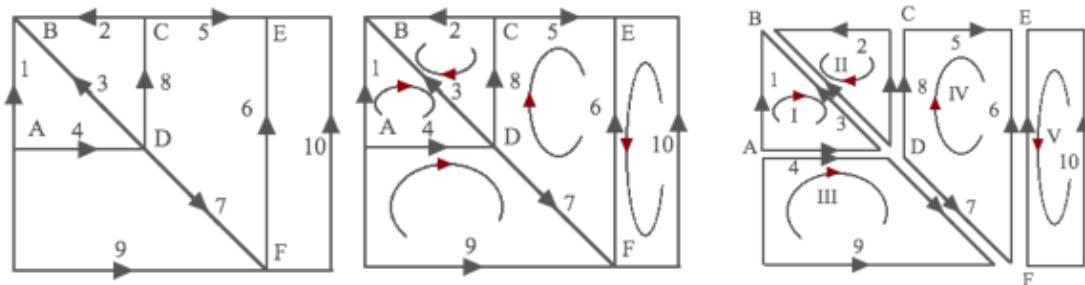
- A) $\frac{V_A - V_F - E_0}{R_9} + \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} = 0$
- B) $\frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{-V_B}{R_3} = 0$
- C) $\frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{V_C - V_E}{R_5} - \frac{-V_C}{R_8} = 0$
- D) $\frac{-V_B}{R_3} + \frac{-V_A}{R_4} + \frac{-V_F}{R_7} + \frac{-V_C}{R_8} = 0$
- E) $\frac{V_C - V_E}{R_5} + \frac{V_F - V_E}{R_6} + I_0 = 0$

Come si vede la presenza di un generatore isolato di corrente non comporta difficoltà. Ma anche la presenza di un generatore isolato di tensione si può facilmente gestire. Supponiamo infatti che R_9 sia nulla.

In tal caso la corrente I_9 non può essere ottenuta dalla caratteristica del bipolo e deve quindi essere considerata come incognita. D'altra parte però alle equazioni si aggiunge la relazione imposta dal generatore di tensione e quindi il numero di equazioni aumenta di una unità.

4. Incognite correnti di maglia

Il metodo duale prende il nome di metodo delle correnti di maglia. Si tratta di trovare



$$\begin{aligned} I_1 &= I_1; & I_6 &= -I_{IV} - I_V; \\ I_2 &= -I_{II}; & I_7 &= I_{III} - I_{IV}; \\ I_3 &= I_{II} - I_1; & I_8 &= I_{IV} - I_{II}; \\ I_4 &= I_{III} - I_1; & I_9 &= -I_{III}; \\ I_5 &= I_{IV}; & I_{10} &= I_V. \end{aligned}$$

questa volta un insieme di incognite che soddisfi per definizione le equazioni ai nodi.

Per costruire un tale sistema consideriamo un insieme di maglie indipendenti della rete in esame. Per esempio i buchi della rete. Associamo ora ad ogni maglia una corrente di maglia ed esprimiamo la corrente in ogni lato come la somma o differenza di correnti di maglia - di cui il lato in questione rappresenta la parte in comune - a seconda dei versi scelti per le correnti di maglia.

Per capire le correnti di maglia basta immaginare i lati comuni a più maglie effettivamente divisi in due, come mostrato nella figura. Con questa schematizzazione appare evidente come, per esempio, la corrente I_3 sia la differenza della corrente I_{II} che circola nella maglia II e quella che circola nella maglia I.

E così per le altre correnti di lato.

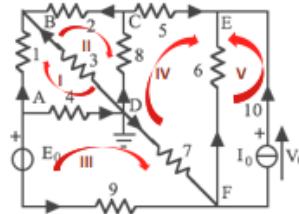
È evidente che tali incognite correnti di maglia godono, per costruzione, della proprietà di soddisfare la LKC ai nodi. Infatti in ogni nodo una corrente di maglia entra ed esce e quindi le LKC ai nodi, scritte in termini di correnti di maglia, si riconducono a pure identità.

A questo punto sostituiamo questi valori nelle equazioni alle maglie:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 &= 0; \\ R_3 I_3 - R_2 I_2 - R_8 I_8 &= 0; \\ R_8 I_8 + R_5 I_5 - R_6 I_6 - R_7 I_7 &= 0; \\ + R_6 I_6 + V_0 &= 0; \\ R_4 I_4 + R_7 I_7 - (E_0 + R_9 I_9) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_3 (I_{II} - I_I) - R_4 (I_{III} - I_I) &= 0; \\ R_3 (I_{II} - I_I) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) &= 0; \\ R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_V) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) &= 0; \\ - R_6 (I_{IV} + I_V) + V_0 &= 0; \\ R_4 (I_{III} - I_I) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) &= 0. \end{aligned}$$

$$I_0 = I_V$$



Le equazioni così ottenute sono indipendenti e in numero pari alle incognite e quindi sono un sistema risolvente per il circuito in esame.

Si noti il ruolo del generatore di corrente. Per la sua presenza la corrente di maglia I_V non è incognita, ma assegnata. D'altra parte la tensione sul generatore di corrente non è nota e non si può eliminare dalle equazioni.

Quindi la presenza di una incognita in più è compensata da quella di una equazione in più:

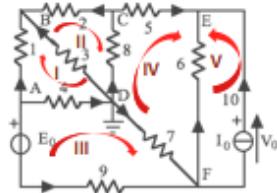
$$I_0 = I_V.$$

Naturalmente era possibile scegliere anche un diverso insieme di maglie indipendenti.

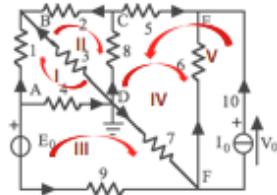
Vediamo questo cosa comporta:

Posiamo, per esempio, scegliere le maglie derivanti dall'albero 3,4,8,7,10. Le maglie e le relative correnti di maglia sono segnate in figura (secondo caso, mentre il primo è quello

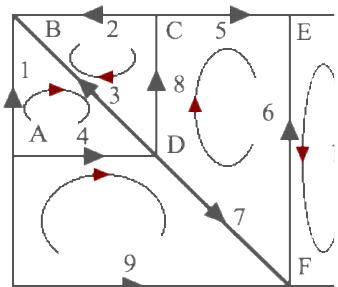
- I) $R_1 I_1 - R_3 (I_{II} - I_1) - R_4 (I_{III} - I_1) = 0;$
- II) $R_3 (I_{II} - I_1) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0;$
- IV) $R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_0) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) = 0;$
- V) $-R_6 (I_{IV} + I_0) + V_0 = 0;$
- III) $R_4 (I_{III} - I_1) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$



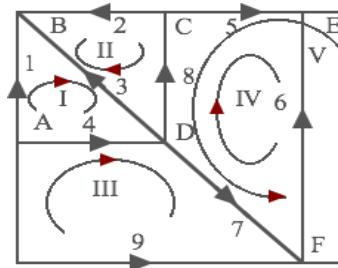
- I) $R_1 I_1 - R_3 (I_{II} - I_1) - R_4 (I_{III} - I_1) = 0;$
- II) $R_3 (I_{II} - I_1) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_V) = 0;$
- IV) $R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_V) + R_5 (I_{IV} - I_V) + V_0 - R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_V) = 0;$
- V) $-R_6 I_{IV} + V_0 = 0;$
- III) $R_4 (I_{III} - I_1) + R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_V) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0.$



precedente), dove i termini che cambiano nei due casi sono segnalati in rosso. Le equazioni sono diverse perché le incognite sono diverse! Si noti che la corrente $I_0=I_V$ sembra interessare rami diversi da quelli di prima.



$$\begin{aligned} &R_1 I_1 - R_3 (I_{II} - I_1) - R_4 (I_{III} - I_1) = 0; \\ &R_3 (I_{II} - I_1) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0; \\ &R_8 (I_{IV} - I_{II}) + R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_0) - R_7 (I_{III} - I_{IV}) = 0; \\ &R_4 (I_{III} - I_1) + R_7 (I_{III} - I_{IV}) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &R_1 I_1 - R_3 (I_{II} - I_1) - R_4 (I_{III} - I_1) = 0; \\ &R_3 (I_{II} - I_1) + R_2 I_{II} - R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) = 0; \\ &R_8 (I_{IV} - I_{II} - I_0) + R_5 (I_{IV} - I_0) + V_0 - R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) = 0; \\ &R_4 (I_{III} - I_1) + R_7 (I_{III} - I_{IV} + I_0) - (E_0 - R_9 I_{III}) = 0. \end{aligned}$$

Mentre in precedenza la corrente I_0 sembrava interessare solo il ramo 6, oltre a quello del generatore, ora invece interessa i rami 5,8 e 7, come se tale corrente abbia scelto un diverso percorso nella rete. Ma ciò naturalmente così non è: in realtà siamo noi che abbiamo scelto di chiudere diversamente l'ultima maglia.

Se poi, come spesso si fa, non si disegna il generatore di corrente, ma solo il suo punto di ingresso e quello di uscita, allora anche l'equazione alla maglia V diventa non necessaria. e ci

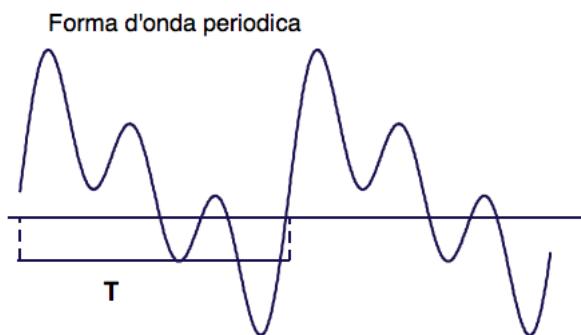
troviamo con quattro equazioni nelle quali, nei due casi, sembra che la corrente del generatore faccia due percorsi distinti: ramo 6 nel primo e rami 5,8 e 7 nel secondo.

Non sorprendono quindi le seguenti affermazioni: In presenza di rami con un generatore di corrente, volendo utilizzare il metodo delle correnti di maglia, basta scegliere ad arbitrio (!) un percorso per la corrente del generatore di corrente. Tale scelta equivale ad una particolare scelta dell'insieme di maglie indipendenti.

Con un po' di esercizio sarà facile scrivere le equazioni direttamente in funzione delle correnti di maglia come illustrato nei due esempi di figura!

5. Generatori variabili e “reti resistive”

Come abbiamo accennato, estenderemo la teoria dei circuiti anche a regimi dinamici in cui le grandezze in gioco non si mantengono costanti, e accetteremo che anche in questi regimi



le leggi di Kirchhoff siano valide; sarà allora un'approssimazione, ma un'approssimazione molto soddisfacente.

Tra le diverse forme d'onda che si possono immaginare rivestono grande importanza - e vedremo poi perché - quelle di

tipo periodico, cioè forme d'onda che si ripetono dopo un certo intervallo di tempo T , detto periodo.

In queste condizioni bisognerà ridefinire il concetto di generatore ideale di tensione e di corrente: diremo generatore ideale di tensione un generatore la cui tensione ai morsetti ha un andamento nel tempo che non dipende dalla corrente erogata. Si parlerà di “forma d'onda” della tensione.

Analogamente, per i generatori di corrente, si parlerà di forma d'onda della corrente indipendente dalla tensione ai morsetti.

Orbene in queste condizioni tutto quello che abbiamo detto finora per i bipoli descritti da caratteristiche di tipo algebrico continuerà ad essere valido. Si parlerà di “reti resistive”.

Converremo sempre di indicare le grandezze relative ai regimi dinamici con le lettere piccole e quelle dei regimi stazionari con le lettere grandi. In questo modo possiamo evitare di aggiungere la notazione “(t)” che indica la variabilità temporale.

6. Proprietà delle reti elettriche

Continuando l'esame generale di una rete dal punto di vista del suo grafo, vogliamo illustrare ora una notevole proprietà caratteristica delle reti di bipoli: la proprietà descritta dal teorema che va sotto il nome di Teorema di Tellegen.

Consideriamo due reti che abbiano lo stesso grafo, cioè due reti in cui bipoli diversi sono collegati alla stessa maniera tra di loro. Consideriamo per la prima rete un sistema di tensioni V_k sui rami che soddisfi la LKT e per la seconda rete un sistema di correnti I_k^* che soddisfi la LKC. Con V_k intendiamo la tensione positiva nel nodo in cui entra la corrente I_k^* positiva - convenzione dell'utilizzatore per ogni ramo della rete!

Per ogni ramo del grafo consideriamo il prodotto $V_k I_k^*$ e sommiamo tali prodotti per tutti i rami della rete:

$$\sum_k V_k I_k^*$$

$$\sum_k V_k^* I_k^*$$

Il teorema di Tellegen afferma che tale sommatoria è identicamente nulla.

$$\sum_k V_k I_k^* = 0$$

C'è qualche difficoltà ad esprimere, in generale, questa sommatoria in termini dei nodi r ed s perché non sappiamo a priori quali rami, tra due nodi (r,s) , effettivamente sono presenti nella rete; in un grafo, infatti, non tutti i nodi sono direttamente collegati tra loro.

Possiamo, però, facilmente superare l'ostacolo aggiungendo al grafo i rami di collegamento che mancano tra i nodi, assumendo però che nelle due reti particolari considerate

tali rami aggiunti siano in realtà dei "bipoli a vuoto". È chiaro che una tale modifica non cambia in nulla la rete, né modifica la sommatoria di cui sopra, in quanto per tali rami sarà $I_{rs}^*=0$. A questo punto la sommatoria può essere estesa a tutti i valori possibili di r e di s.

Il fattore un mezzo è necessario, altrimenti ogni ramo è preso due volte in considerazione; per esempio il ramo tra i nodi 1 e 2 sarà incluso per r=1 ed s=2 nonché per s=1 ed r=2! Se le V_{rs} soddisfano la LKT sarà possibile metterle sotto la forma di differenza di potenziale $V_{rs} = V_r - V_s$.

D'altra parte nella prima sommatoria V_r può essere portato fuori della sommatoria su s, mentre nella seconda sommatoria si può fare una cosa analoga per V_s se prima si scambiano le sommatorie su r e su s.

$$\begin{aligned}\sum_k V_k I_k^* &= \frac{1}{2} \sum_{rs} V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s V_{rs} I_{rs}^* = \frac{1}{2} \sum_r \sum_s (V_r - V_s) I_{rs}^* \\ &= \frac{1}{2} \sum_r V_r \sum_s I_{rs}^* - \frac{1}{2} \sum_s V_s \sum_r I_{rs}^* = 0\end{aligned}$$

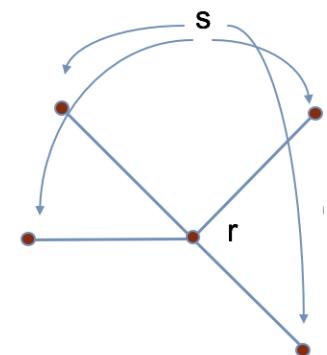
In entrambe le sommatorie compaiono termini del tipo $\sum_s I_{rs}^*$ per un fissato r o $\sum_r I_{rs}^*$ per un fissato s. Tali termini esprimono la somma delle correnti uscenti dal nodo r o entranti nel nodo s. Si osservi che quanto affermato è vero solo se si è avuto la cura di usare sempre la stessa convenzione su ogni bipolo. Le sommatorie suddette sono dunque nulle in base alla LKC. E quindi il teorema, che è valido anche in presenza di bipoli non lineari.

Si noti che se le due reti coincidono, il teorema si riduce a confermare un teorema della conservazione dell'energia, e quindi della potenza.

1. Proprietà di non amplificazione

Un'altra proprietà delle reti di bipoli che discende dal mero fatto che per tali reti valgono la LKT e la LKC, è il così detto principio di non amplificazione delle tensioni. Esso afferma che, se in una rete di bipoli esiste un solo ramo attivo, allora il potenziale dei due nodi a cui il lato attivo si appoggia sono l'uno il massimo e l'altro il minimo tra tutti i potenziali dei nodi della rete.

La dimostrazione è immediata se ci si convince prima della seguente affermazione: se per un nodo r di una rete tutti i prodotti $V_{rs}I_{rs}$ delle tensioni e correnti di tutti i lati che convergono nel nodo stesso - con le convenzioni implicite nell'ordine dei pedici - sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo della rete.



Infatti dato che nel nodo r $\sum_s I_{rs}=0$ per la LKC, alcune delle I_{rs} - per r fissato - saranno positive ed altre negative. Ciò comporta che, nella ipotesi che tutti i prodotti $V_{rs}I_{rs}$ siano maggiori di zero - sempre per un fissato r -, anche tra le V_{rs} ve ne saranno alcune positive ed altre negative; ciò equivale a dire che il potenziale del nodo r non è né il minimo né il massimo della rete.

Ritornando ora al nostro teorema iniziale, nel caso sia presente un solo lato attivo, i suoi nodi sono gli unici per i quali non si può affermare che $V_{sr}I_{rs}>0$ per ogni s , per la presenza del generatore. Per i nodi interni, a cui fanno capo solo bipoli passivi, questa proprietà è invece certamente verificata. D'altra parte in ogni rete deve pur esserci un nodo a potenziale minimo ed uno a potenziale massimo; se ne conclude che tali potenziali sono assunti dai due nodi dell'unico lato attivo.

Si può dimostrare anche il seguente teorema duale del precedente:

Se in una rete di bipoli esiste un solo ramo attivo, allora la corrente che circola in tale ramo è la più grande in valore assoluto tra tutte le correnti dei rami della rete.

Val la pena di ricordare che entrambi questi teoremi sono validi solo in regime stazionario (c.c.). Provate a dimostrarlo da voi.

2. Sovrapposizione degli effetti

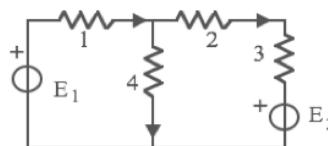
Un'altra proprietà delle reti – questa volta però valida solo per le reti lineari – è la sovrapponibilità degli effetti. È questa una proprietà del tutto generale dei sistemi lineari, sistemi, cioè, in cui l'effetto è linearmente dipendente dalla causa. Essa si può esprimere affermando che una particolare combinazione lineare di cause produce la stessa combinazione lineare degli effetti che ognuna delle cause produrrebbe se si trovasse ad agire da sola.

Si potrebbe utilizzare la precedente affermazione quale definizione di sistema lineare, tanto i due fatti sono intimamente legati. In particolare consideriamo una rete con più generatori; se individuiamo nei singoli generatori le cause e nelle correnti e nelle tensioni sui rami gli effetti, siamo portati ad affermare che le correnti o le tensioni sui lati di una tale rete possono essere calcolate come somma di quelle indotte sugli stessi rami dai singoli generatori.

È necessario qualche commento su quest'ultima affermazione: per far sì che un generatore agisca da solo occorre evidentemente “eliminare” gli altri. Cosa significhi “eliminare un generatore” dipende evidentemente dal tipo di generatore. Un generatore di tensione ideale, per esempio, per sua natura si lascia percorrere da una qualsiasi corrente e produce ai suoi morsetti sempre la stessa tensione. Per eliminare i suoi effetti bisogna ridurre la sua tensione a zero senza impedire il passaggio della corrente. Questo, in realtà, equivale a sostituire il generatore ideale di tensione con un bipolo corto circuito.

Un ragionamento del tutto analogo porta alla conclusione che i generatori ideali di corrente, invece, debbono essere sostituiti con dei bipoli a vuoto. Nel linguaggio corrente si parla di cortocircuitare i generatori di tensione ed aprire i generatori di corrente, il che, preso alla lettera non è corretto; un generatore ideale di tensione, per definizione, non consente che la sua tensione venga annullata da un corto circuito in parallelo.

Analogo discorso si può fare per il generatore ideale di corrente. Ciò nonostante l'espressione sintetica è molto comoda e largamente usata; essa va intesa nel senso prima specificato di sostituire i bipoli in questione rispettivamente con bipoli corto circuito ed a vuoto. Il



$$\begin{aligned}R_1 &= 5 \Omega; \\R_2 &= 10 \Omega; \\R_3 &= 15 \Omega; \\R_4 &= 5 \Omega; \\E_1 &= 90 \text{ V}; \\E_2 &= 100 \text{ V}.\end{aligned}$$

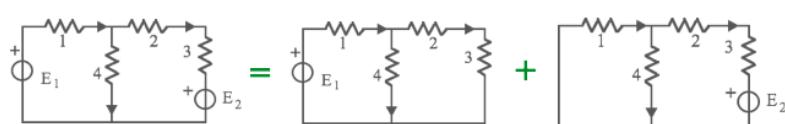
$$\begin{aligned}I_1 &= 8 \text{ A.} \\I_3 &= I_2 = -2 \text{ A.} \\I_4 &= 10 \text{ A.}\end{aligned}$$

principio di sovrapposizione degli effetti è di grande utilità sia dal punto di vista pratico che dal punto di vista puramente speculativo.

Dal punto di vista pratico esso fornisce, se vogliamo, il più elementare metodo di soluzione di una rete. Il principio ci consente infatti di affermare che la soluzione di una rete

comunque complessa, con più generatori, è riconducibile alla soluzione di più reti in ognuna delle quali agisce un solo generatore.

Per meglio comprendere il significato di questa proprietà, facciamo riferimento al circuito mostrato in figura.



$$R_1 = 5 \Omega; R_2 = 10 \Omega; R_3 = 15 \Omega; R_4 = 5 \Omega; E_1 = 90 \text{ V}; E_2 = 100 \text{ V}.$$

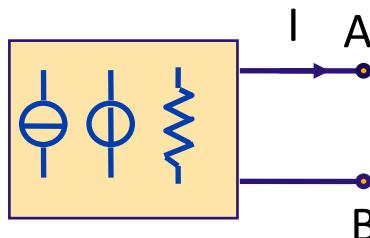
$$\begin{array}{lll}I'_1 = 9,82 \text{ A;} & I''_1 = -1,82 \text{ A;} & I_1 = 8 \text{ A;} \\I'_3 = I'_2 = 1,64 \text{ A;} & I''_3 = I''_2 = -3,64 \text{ A;} & I_2 = -2 \text{ A;} \\I'_4 = 8,18 \text{ A.} & I''_4 = 1,82 \text{ A.} & I_4 = 10 \text{ A.}\end{array}$$

La sovrapposizione degli effetti ci consente di risolvere la rete in questione risolvendo due reti con un solo generatore, come mostrato

in figura, dove si è utilizzato un simbolismo grafico molto utile per indicare l'applicazione della

sovraposizione degli effetti. Il simbolo + tra i due circuiti sottintende sovrapposizione. Provate a risolverlo da voi; i risultati dovrebbero essere quelli mostrati.

3. Caratterizzazione esterna di una rete

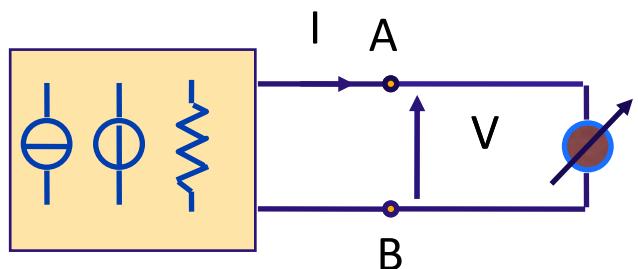


Abbiamo visto che una rete passiva vista da due

nodi è sempre riconducibile ad un unico bipolo equivalente. È possibile una riduzione simile anche per una rete che contenga bipoli attivi. Per dimostrarlo, consideriamo una qualsiasi rete attiva e scegliamo su di

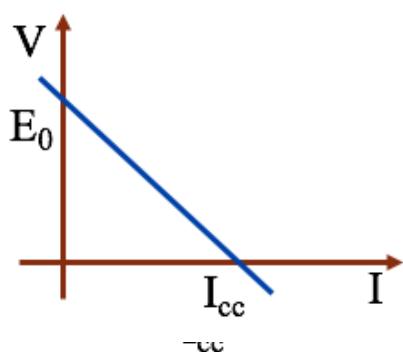
essa due nodi che prolunghiamo al di fuori della scatola che contiene la rete. I simboli stanno a ricordare che nella rete sono presenti generatori di tensione e di corrente e bipoli passivi.

Ovviamente, che si tirati di un bipolo, questo è fuor di dubbio: quella che non conosciamo è la sua caratteristica.



Se avessimo a disposizione un laboratorio,

potremmo fare una serie di misure su di uno specifico circuito, alimentandolo, per esempio da i morsetti A e B, con un generatore di corrente variabile – come abbiamo mostrato in figura - in modo da poter misurare per ogni valore di I il corrispondente valore di V e disegnare poi un diagramma di $V=f(I)$. Qualcosa del genere. Si noti che tra i morsetti A e B - dal punto di vista della rete - abbiamo fatto la convenzione del generatore.



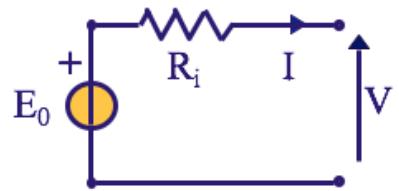
Ma, in effetti, non abbiamo bisogno in questo caso, di un Laboratorio, perché possiamo agevolmente anticipare il risultato delle nostre misure. Infatti, essendo la rete per definizione di bipoli lineari, non c'è motivo di pensare che la caratteristica equivalente non sia anche essa

lineare. Nel piano (I, V) dunque, la caratteristica sarà una retta che in generale non passa per l'origine degli assi, essendo presenti anche bipoli attivi.

Per individuare una retta occorrono, naturalmente, due suoi punti. Si propongono a tale scopo, in maniera molto evidente, i due punti in cui la caratteristica interseca gli assi.

Il primo punto di coordinate $V=E_0$ ed $I=0$ corrisponde alle condizioni in cui il bipolo non è attraversato da corrente. Appare naturale indicare E_0 con il termine "tensione a vuoto" del bipolo. L'altro punto è quello individuato da $V=0$ ed $I=I_{cc}$. In tali condizioni tra i morsetti A e B c'è tensione nulla, come se il bipolo fosse "chiuso su di un corto circuito". e quindi il nome "corrente di corto circuito" dato alla corrente I_{cc} .

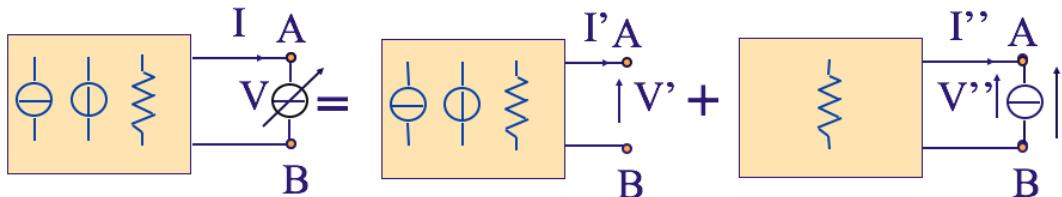
Data la rete, si possono calcolare sia E_0 che I_{cc} e quindi la caratteristica del bipolo equivalente, che sarà rappresentata da una equazione del tipo:



$$V = E_0 - \frac{E_0}{I_{cc}} I = E_0 - R_i I$$

dove si è posto $R_i = E_0/I_{cc}$.

Ma questa è la caratteristica di un bipolo costituito da un generatore di tensione $E = E_0$



$$I = I' + I'' = I'' = -\frac{V''}{R_e} \quad V = V' + V'' = E_0 + V'' = E_0 - R_e I$$

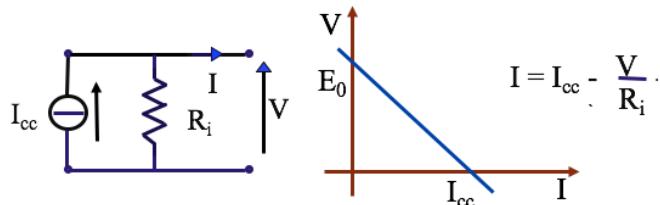
Ma questa è la caratteristica di un bipolo costituito da un generatore di tensione $E = E_0$ con in serie un bipolo passivo R_i , come mostrato in figura.

In effetti, però, la R_i può avere anche un'altra definizione, che è data appunto dalla seconda parte del teorema di Thévenin.

Infatti applicando la sovrapposizione degli effetti alla rete originaria, avendo cura di conservare le stesse convenzione dei segni, si ottiene facilmente la stessa relazione già dedotta in precedenza, $V=E_0-R_iI$, ma questa volta R_i , è la resistenza equivalente vista dai morsetti A e B della rete resa passiva.

E quindi il teorema di Thévenin o del generatore equivalente di tensione, nella sua prima parte e nella seconda.

Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete con un generatore ideale di f.e.m. con in serie un resistore. Il generatore di f.e.m. ha una tensione ai morsetti pari alla tensione a vuoto E_0 nella rete originaria.



Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e

quelli di corrente da bipoli a vuoto.

Un discorso del tutto analogo si può fare per il teorema di Norton, che stabilisce l'equivalenza ad un circuito del tipo mostrato.

Una rete attiva vista da due suoi morsetti A e B è equivalente ad una rete costituita da un generatore ideale di corrente con in parallelo un resistore.

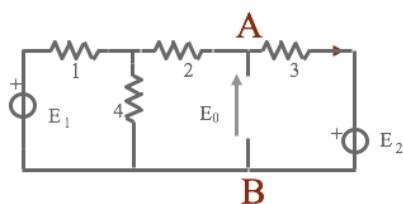
Il generatore di corrente eroga una corrente pari alla corrente di corto circuito I_{cc} ai morsetti A e B nella rete originaria.

Il resistore ha una resistenza pari a quella vista dai morsetti A e B quando la rete è stata resa passiva, e cioè i generatori di f.e.m. sono stati sostituiti da corto circuiti e quelli di corrente da bipoli a vuoto.

Si noti che quella fornita dal teorema di Norton è una caratteristica pilotata in tensione $I=f(V)$. Come bisognerà alimentare la nostra scatola chiusa dall'esterno per dimostrare il teorema?

I teoremi appena dimostrati non costituiscono soltanto un importante risultato teorico, ma possono fornire anche un aiuto sul piano pratico per la risoluzione delle reti. Consideriamo per esempio la rete in figura che abbiamo già risolto per altre vie, e supponiamo di voler applicare il teorema di Thévenin ai morsetti C ed O.

La tensione a vuoto in questo caso sarà la tensione tra i punti C ed O in una rete ad una



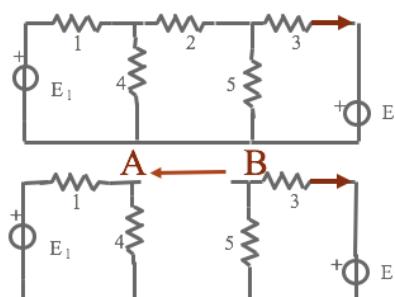
$$E_0 = 219,83 \text{ V}; \\ R_i = 7,24 \Omega .$$

$$\begin{aligned} R_1 &= 4,5 \Omega; \\ R_2 &= 10 \Omega; \\ R_3 &= 15 \Omega; \\ R_4 &= 35 \Omega; \\ R_5 &= 200 \Omega; \\ E_1 &= 290 \text{ V}; \\ E_2 &= 180 \text{ V}. \end{aligned} \quad I_5 = 1,06 \text{ A.}$$

sola maglia; sarà facile quindi calcolarla applicando la seconda legge di Kirchhoff. Altrettanto facile sarà calcolare la resistenza R_i nella rete resa passiva.

Un altro esempio un po' più complesso. Come vedete abbiamo

scelto i morsetti A e B per applicare il teorema del generatore equivalente di f.e.m..



$$E_0 = 89,52 \text{ V}; \quad R_i = 17,94 \Omega;$$

$$\begin{aligned} R_1 &= 4,5 \Omega; \\ R_2 &= 10 \Omega; \\ R_3 &= 15 \Omega; \\ R_4 &= 35 \Omega; \\ R_5 &= 200 \Omega; \\ E_1 &= 290 \text{ V}; \\ E_2 &= 180 \text{ V}. \end{aligned} \quad I_2 = 3,20 \text{ A.}$$

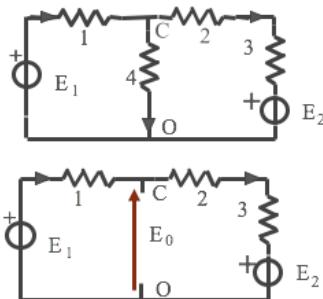
I valori di E_0 ed R_i calcolati sono in figura

E quindi il risultato.

Per calcolare E_0 potremmo applicare la sovrapposizione degli effetti.

I risultati sono indicati in

figura. A questo punto conosciamo tutti i dati per calcolare I_5 .



$$E_0 = 91,67 \text{ V}; \quad R_e = 4,17 \Omega.$$

$$R_1 = 5 \Omega; \quad R_2 = 10 \Omega; \quad R_3 = 15 \Omega; \quad R_4 = 5 \Omega;$$

$$E_1 = 90 \text{ V}; \quad E_2 = 100 \text{ V}.$$

$$E_0 = E_1 - R_1 I_1 = E_1 - R_1 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 91,67 \text{ V}$$

$$R_e = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = 4,17 \Omega.$$

con la scelta fatta dei due nuovi punti A e B, è molto semplificato. Infatti nel nuovo circuito i due generatori agiscono separatamente e quindi è molto facile calcolare sia la corrente $I_1=I_4$ che la $I_3=I_5$, come pure la $R_i=(R_1//R_4)+(R_3//R_5)$, e quindi ottenere il valore I_2 . In conclusione i risultati mostrati in figura.

Ma perché solo il teorema di Thevenin? Si potrebbe applicare anche quello di Norton.

Proviamo ai morsetti A e B, per esempio. Bisognerà calcolare la corrente di cortocircuito, applicando ancora una volta la sovrapposizione degli effetti.

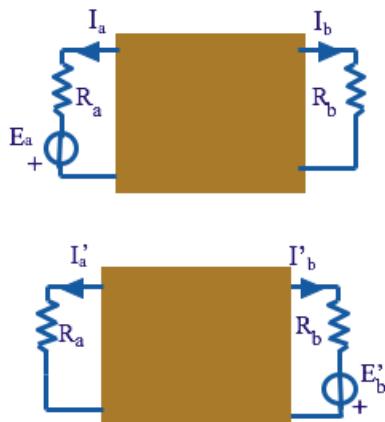
E quindi il risultato indicato in figura. La R_i , naturalmente è la stessa di prima.

Naturalmente, la scelta di dove applicare il teorema di Thevenin non è unica. Possiamo provare con due nuovi punti, quelli indicati con A e B nella nuova figura.

Si noti che sia il calcolo analitico di E_0 che quello di R_i ,

4. Altre proprietà delle reti lineari

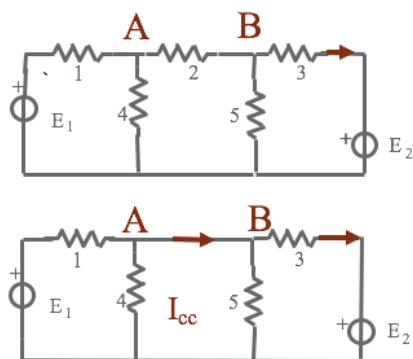
Teorema di reciprocità



$$\frac{E_a}{I_b} = \frac{E'_b}{I'_a}$$

Un'altra proprietà generale delle reti è quella descritta dal cosiddetto principio di reciprocità. Si consideri una rete passiva qualsiasi e si individuino in essa due rami, diciamo il ramo a ed il ramo b. Alimentiamo la rete ponendo un generatore di tensione E_a nel ramo a e indichiamo con I_b la corrente, in un determinato verso, che circola nel ramo b in conseguenza dell'inserimento del generatore E_a nel ramo a.

Viceversa sia I'_a la corrente prodotta nel ramo a quando un generatore E'_b è inserito nel



$$\begin{aligned} R_1 &= 4,5 \Omega; \\ R_2 &= 10 \Omega; \\ R_3 &= 15 \Omega; \\ R_4 &= 35 \Omega; \\ R_5 &= 200 \Omega; \\ E_1 &= 290 \text{ V}; \\ E_2 &= 180 \text{ V}. \end{aligned}$$

$$I_{cc} = 4,99 \text{ A.}$$

ramo b della rete passiva. Orbene il teorema afferma che: $E_a/I_b = E'_b/I'_a$. Cioè, in sintesi, il rapporto tra causa in a ed effetto in b è uguale al rapporto tra causa in b ed effetto in a. Da ciò il nome di reciprocità.

La dimostrazione è immediata se si applica il teorema di Tellegen alle due reti mostrate in fig. 8.7. Nelle scatole c'è,

evidentemente, una rete passiva. Il teorema di Tellegen afferma che:

$$\begin{aligned} \sum V_k I'_k &= 0 \\ \sum V'_k I_k &= 0 \end{aligned}$$

Cioè, evidenziando il ramo attivo, e tenendo conto che per ogni ramo della rete passiva è:

$$V_k = R_k I_k \quad \text{e} \quad V'_k = R'_k I'_k$$

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

mentre per i soli lati attivi si ha:

$$V_a = R_a I_a - E_a \quad \text{e} \quad V'_b = R_b I'_b - E'_b$$

otterremo:

$$\sum_k V_k I'_k = -E_a I'_a + R_a I_a I'_a + \sum_{k \neq a} R_k I_k I'_k = 0$$
$$\sum_k V'_k I_k = -E'_b I_b + R_b I'_b I_b + \sum_{k \neq b} R_k I_k I'_k = 0$$

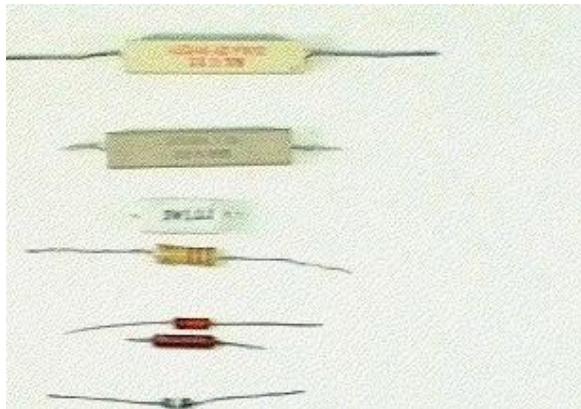
Inserendo di nuovo i termini relativi ai lati a e b nelle sommatorie, si ottiene:

$$\sum_k V_k I'_k = -E_a I'_a + \sum_k R_k I_k I'_k = 0$$
$$\sum_k V'_k I_k = -E'_b I_b + \sum_k R_k I'_k I_k = 0$$

Le sommatorie sono ora estese a tutti i rami della rete. Dalla eguaglianza di tali sommatorie deriva $E_a/I_a = E'_b/I_b$, che è quanto volevasi dimostrare.

1. I resistori nella realtà

Nella immagine sono mostrati alcuni resistori di dimensioni molto diverse. Si potrebbe



pensare che ciò corrisponda al fatto che essi hanno valori di resistenza molto diversi tra loro. Ma nel caso particolare tutti i resistori mostrati hanno la stessa resistenza. Il valore in ohm della resistenza di un resistore non è quindi l'unico parametro sufficiente a caratterizzare il bipolo "fisico" resistore. Vediamo brevemente per quali motivi.

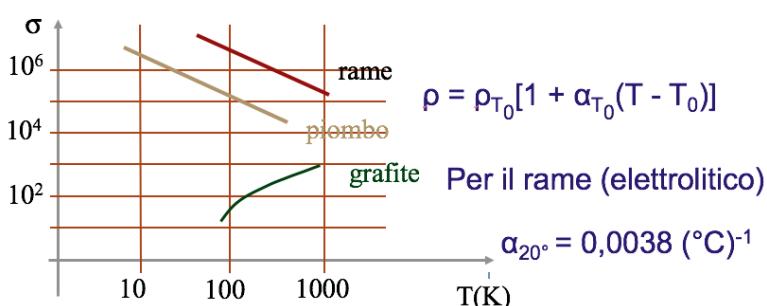
Quando abbiamo introdotto il bipolo resistore, abbiamo sottolineato come la sua resistenza dipenda anche dal materiale di cui il bipolo è fatto. Nella formula tale ruolo è svolto dalla resistività ρ . Abbiamo anche visto che il modello di Drude dà una giustificazione microscopica di questa dipendenza lineare tra tensione e corrente. D'altra parte, abbiamo anche visto che la potenza dissipata nel resistore, RI^2 , si trasforma tutta in calore, con la conseguenza che il dipolo deve aumentare la sua temperatura.



Se la resistività non dipendesse dalla temperatura, questo non avrebbe alcuna conseguenza sul funzionamento del resistore e la sua temperatura potrebbe essere calcolata con un semplice bilancio termico: la temperatura di regime si avrà quando la potenza fornita al dipolo

$$P = R I^2 = k S (T - T_0)$$

sarà uguale alla quantità di calore ceduta nell'unità di tempo al mezzo circostante, che come è noto è proporzionale alla differenza di temperatura con l'ambiente circostante.



Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

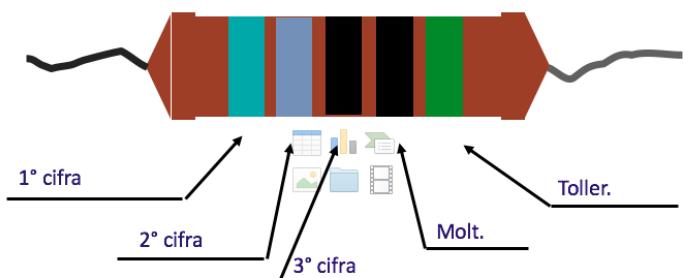
Ma la resistività dipende dalla temperatura!

Del resto lo stesso modello di Drude ci aveva già indotti a pensare che l'attrito opposto al moto delle cariche non potesse essere indipendente dalla temperatura. Nell'immagine sono riportate qualitativamente in un diagramma alcune tipiche dipendenze della conducibilità $\sigma = 1/\rho$ in funzione della temperatura, per tre materiali diversi. Come si vede mentre la conducibilità del rame e del piombo diminuisce al crescere della temperatura, quella della grafite aumenta.

Osserviamo che la dipendenza $\rho(T)$ non è in generale lineare. In figura le scale sono logaritmiche. Ciò nonostante se il campo di variazione delle temperature è limitato, possiamo approssimare tale dipendenza con la relazione lineare mostrata in figura, dove ρ_0 è la resistività alla temperatura T_0 e a_0 un opportuno coefficiente di temperatura. Un osservatore attento riconoscerà in questa relazione il semplice sviluppo in serie di potenze della funzione $\rho(T)$ con punto iniziale T_0 . Il termine $\rho_0 a_0$ è il valore di $d\rho/dT$ valutato in T_0 , e perciò dipende dal punto iniziale.

Il bilancio energetico per determinare la temperatura di regime diventa ora più complesso. Una volta raggiunta la temperatura, anche il valore di R resta costante pur se diverso da quello iniziale. Ma c'è di più. Se la temperatura di regime che si dovrebbe raggiungere è troppo elevata, le caratteristiche del materiale possono cambiare totalmente: al limite, per correnti troppo elevate, il resistore, può fondersi localmente.

Naturalmente per consentire ad un resistore di dissipare una maggiore potenza il metodo più immediato è quello di aumentare la sua superficie di contatto con l'ambiente esterno. Ecco spiegato il motivo per cui i resistori in figura pur avendo lo stesso valore sono così diversi: sono progettati per dissipare potenze diverse. Ecco il nuovo parametro che occorre specificare: valore della resistenza e valore della potenza



Per resistori di dimensioni abbastanza ridotte, può risultare difficile riportare sulla loro superficie esterna il valore della resistenza da essi offerta. Si è convenuto quindi di segnalare tali valori mediante un codice a barre colorate,

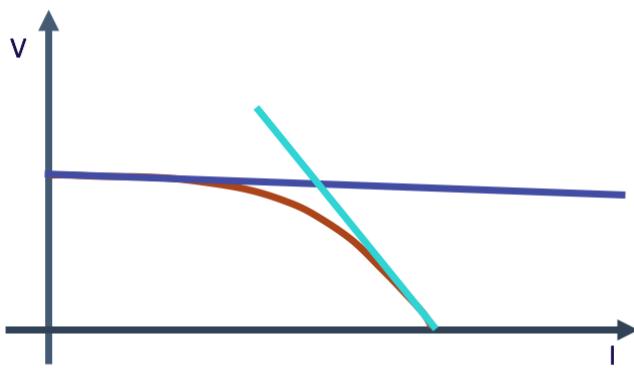
che risulta per altro anche molto più visibile ed evidente. Il significato dei vari colori è riportato in tavole che si possono trovare in qualsiasi manuale specialistico.

Un altro fattore che può influenzare le dimensioni di un bipolo resistore è la tensione di lavoro per cui esso è costruito. Fino ad ora abbiamo implicitamente assunto il resistore immerso in un mezzo isolante - l'aria tipicamente - di modo che il moto delle cariche fosse obbligato a svilupparsi esclusivamente attraverso il resistore stesso. In effetti qualsiasi mezzo isolante si comporta come tale solo se la forza che agisce sulle cariche in esso presenti, che è proporzionale al campo E , non supera determinati limiti.



Oltre tali limiti l'isolante perde le sue caratteristiche, si sviluppa una scarica al suo interno ed il passaggio di cariche non è più interdetto. Per l'aria, per esempio, tale valore, che prende il nome di rigidità dielettrica, si aggira intorno ai 25 kV/cm, e dipende dalle sue condizioni fisiche. È chiaro dunque che non sarebbe possibile realizzare un bipolo resistore, atto a sopportare una tensione di 25kV, che non abbia tra i suoi morsetti una distanza sufficientemente maggiore di un centimetro. Questo spiega la differenza di dimensione dei resistori mostrati in figura: sono costruiti per diverse tensioni di lavoro.

2. I generatori reali e gli strumenti di misura!

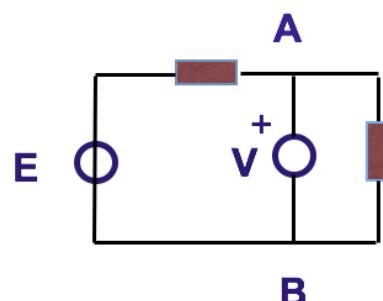


tensione a vuoto, che sarà la massima possibile, ed una corrente di cortocircuito, valore che in generale non è concretamente raggiungibile, a meno che non si voglia rischiare di distruggere il dispositivo.

Qualche considerazione ora su gli strumenti di misura "reali" che abbiamo fin qui introdotto. Un Voltmetro, per esempio, dovrà disporre di due sonde - o morsetti - che dovranno essere posti in contatto elettrico con i punti tra i quali si desidera misurare la differenza di potenziale. Se si prescinde dalla sua specifica funzione e si focalizza l'attenzione sul suo inserimento nella rete, si può vedere un

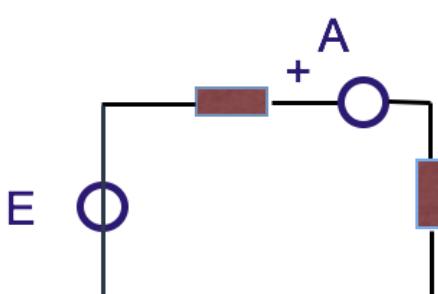
Dei generatori "reali" abbiamo già fatto cenno in precedenza e del come essi debbano necessariamente avere una caratteristica del tipo mostrato in figura in cui con l'aumentare della corrente erogata, la tensione ai morsetti, come suol dirsi, "si siede". Avremo dunque una

La corrente derivata dal voltmetro



voltmetro come un bipolo; in tal senso esso sarà caratterizzato da una sua resistenza interna R_i .

Una caratteristica fondamentale di ogni strumento di misura è ovviamente che esso deve "disturbare" quanto meno è possibile il sistema in cui esso viene inserito. Uno sguardo allo schema di



Luciano De Menna - I bipoli reali

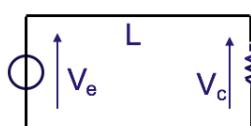
principio mostrato (notare il simbolo del voltmetro) fa subito comprendere che un voltmetro ideale deve presentare ai suoi morsetti una resistenza infinita; solo in tal caso infatti la corrente derivata dal voltmetro è nulla e quindi la tensione ai morsetti del carico risulta indipendente dalla presenza del voltmetro stesso.

Discorso analogo si può fare per un amperometro che deve avere, invece, una resistenza di ingresso praticamente nulla.

3. Il proporzionamento dei conduttori

Abbiamo sempre immaginato di poter connettere i nostri generatori al carico mediante conduttori perfetti. Naturalmente ciò non è possibile nella realtà; le connessioni al carico sono realizzate con materiali che, per quanto buoni conduttori, presentano sempre una certa resistività.

La resistenza dei conduttori dipende dalla loro lunghezza e dalla sezione oltre che, naturalmente, dalla resistività del materiale di cui sono fatti.



$$R = 2 \rho L / S$$

- La tensione V_c non è uguale a V_e !
- La potenza fornita dal generatore è in parte dissipata dalla linea!
- Per effetto di tale potenza i conduttori si riscaldano!

di problema.

Primo problema: la tensione sul carico non sarà uguale a quella del generatore; è facile calcolare la caduta di tensione, tenendo conto che la lunghezza complessiva del collegamento è $2L$. Appare chiaro che, se immaginiamo fissata la distanza L , la caduta di tensione può essere ridotta attraverso l'utilizzo di un miglior materiale conduttore (generalmente più costoso), oppure riducendo J , ovvero aumentando S . Generalmente si considera accettabile una densità di $5-6$ A/mm^2 .

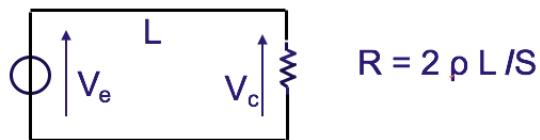
Secondo problema: la corrente I che attraversa i conduttori produce una dissipazione di potenza. Volendo ridurre tale potenza dissipata è possibile agire sulla sezione S .

Con riferimento allo schema riportato a lato, immaginiamo che la distanza tra carico e generatore sia L e che la sezione del conduttore sia S . Quali conseguenze dovremo attenderci da queste circostanze?

Si possono porre tre diversi tipi

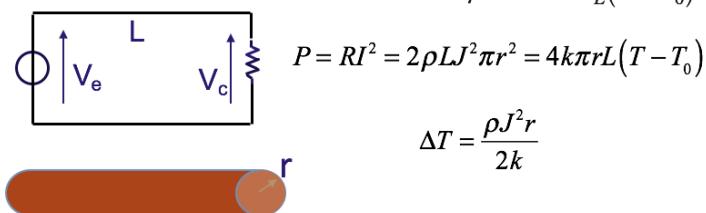
Ma non è tutto, e veniamo al terzo problema: la potenza dissipata nel conduttore produce un innalzamento della temperatura T del conduttore rispetto alla temperatura ambiente T_0 e quindi un cambio del valore di R , e quindi della potenza dissipata e così via. È chiaro che si raggiungerà una condizione di regime.

**La potenza fornita dal generatore
è in parte dissipata dalla linea!**



$$\Delta P = 2\rho \frac{L}{S} I^2 = 2\rho \frac{L}{S} (JS)^2 = 2\rho LSJ^2$$

Per effetto della potenza dissipata i conduttori si riscaldano!



$$P = RI^2 = 2\rho LJ^2 S = kS_L(T - T_0)$$

$$P = RI^2 = 2\rho LJ^2 \pi r^2 = 4k\pi r L(T - T_0)$$

$$\Delta T = \frac{\rho J^2 r}{2k}$$

$$P = RI^2 = \rho_{T_0} [1 + a_{T_0}(T - T_0)] \frac{2L}{\pi r^2} (J\pi r^2)^2 = 4k\pi r L S_L (T - T_0)$$

La temperatura di regime che si raggiunge sarà fissata dalla condizione di equilibrio tra la potenza elettrica dissipata e la quantità di calore che, nell'unità di tempo, viene trasferita all'ambiente esterno. Quest'ultima è proporzionale al salto di temperatura $\Delta T = T - T_0$ ed all'area della superficie di

contatto tra corpo conduttore ed ambiente esterno. Per esempio, ammettendo una geometria cilindrica del resistore, si possono ricavare le formule riportate nella figura.

Naturalmente se si vuole tenere conto anche della variabilità della resistività al crescere della temperatura T , allora l'equazione diventa un po' più complessa.

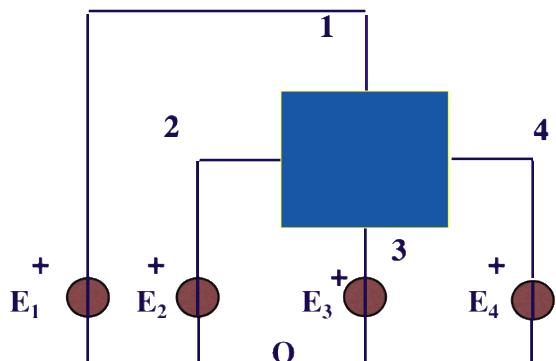
$$P = RI^2 = r_{T_0} [1 + a_{T_0}(T - T_0)] \frac{2L}{\rho r^2} (J\rho r^2)^2 = 4k\rho r L S_L (T - T_0)$$

Abbiamo implicitamente fatto l'ipotesi che il meccanismo principale di trasferimento del calore sia quello della convezione.

1. Caratteristica di un N-polo

Fin'ora ci siamo limitati a bipoli. Esistono però anche dispositivi che non sono riconducibili a bipoli, nel senso che non interagiscono con l'esterno attraverso due soli poli. In figura è rappresentato un quadripolo, ma si può pensare, in generale, a N-poli. Si pone il problema a questo punto di estendere il concetto di "caratteristica" a tali dispositivi.

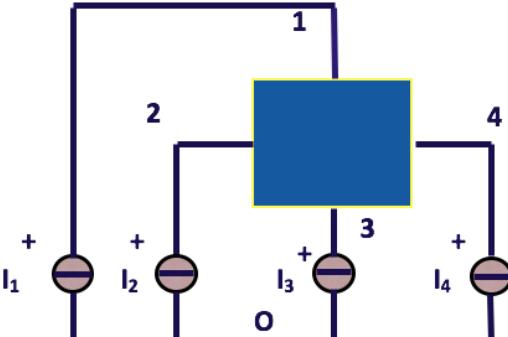
Supponiamo di alimentare ogni polo con un generatore ideale di tensione E_r e supponiamo ancora che il dispositivo (o la rete che possiamo immaginare nella scatola!) sia lineare. In tal caso potremo usare il teorema di sovrapposizione e affermare che la corrente i_r nel ramo del generatore iesimo è la somma



delle correnti i_{ir} che si ottengono nel ramo iesimo quando di volta in volta lasciamo operare il solo generatore nel ramo erresimo.

Si noti che l'N polo non può essere alimentato in corrente. N correnti arbitrarie, infatti, non necessariamente rispetterebbero la LKI al nodo O.

D'altra parte in ognuna delle reti così ottenute, a causa della linearità, la corrente i_i dovrà risultare proporzionale alla tensione E_r . Chiamiamo G_{ir} tale fattore di proporzionalità, che ha appunto le dimensioni dell'inverso di una resistenza, cioè di una conduttanza.



In conclusione sommando l'effetto di tutti i generatori presenti avremo N relazioni (quattro nel nostro esempio!) che legano le N correnti alle N differenze di potenziale applicate tra i poli del dispositivo ed il nodo comune O

$$\begin{aligned} I_1 &= G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + G_{13} E_3 + G_{14} E_4 \\ I_2 &= G_{21} E_1 + G_{22} E_2 + G_{23} E_3 + G_{24} E_4 \\ I_3 &= G_{31} E_1 + G_{32} E_2 + G_{33} E_3 + G_{34} E_4 \\ I_4 &= G_{41} E_1 + G_{42} E_2 + G_{43} E_3 + G_{44} E_4 \end{aligned}$$

In altri termini l'N-polo invece di essere individuato da un solo parametro G come un bipolo, è individuato da N^2 parametri G_{rs} cioè da una matrice di ordine N di conduttanze che prende appunto il nome di matrice delle conduttanze. Come vedremo, in realtà, i parametri indipendenti da cui realmente dipende la matrice delle conduttanze non sono N^2 , bensì in numero molto minore.

$$I_1 = G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + \dots + G_{1s} E_s \dots + G_{1N} E_N$$

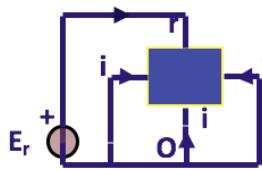
$$\dots \dots \dots$$

$$I_r = G_{r1} E_1 + G_{r2} E_2 + \dots + G_{rs} E_s \dots + G_{rN} E_N$$

$$\dots \dots \dots$$

$$I_N = G_{N1} E_1 + G_{N2} E_2 + \dots + G_{Ns} E_s \dots + G_{NN} E_N$$

Conduttanze proprie



$$G_{rr} = \left. \frac{I_r}{E_r} \right|_{\substack{E_i=0 \\ i \neq r}}$$

Per ora osserviamo che tra le G_{rs} ve ne sono alcune che si distinguono dalle altre: quelle del tipo G_{rr} con pedici eguali, e cioè gli elementi della diagonale della matrice. Esse infatti, per costruzione, sono derivate da schemi circuitali del tipo mostrato. Risulta evidente che esse sono delle "reali conduttanze equivalenti" del bipolo (questa volta è un vero bipolo) che si ottiene prendendo in considerazione un polo dell'n-polo e come altro estremo l'insieme di tutti gli altri $n - 1$ poli collegati in corto circuito tra di loro.

Natura diversa hanno invece le G_{rs} che rappresentano semplicemente il rapporto tra la corrente nel ramo r e la tensione nel ramo s , quando tutti gli altri poli, tranne l'essesimo, sono collegati in corto circuito. Si tratta certamente di grandezze che hanno le dimensioni di conduttanze, ma non sono conduttanze mostrate dalla rete a particolari coppie di morsetti. Per

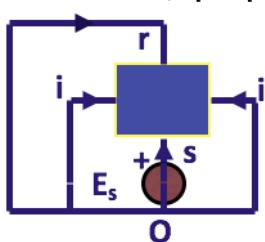
questa ragione si distinguono le due grandezze con nomi diversi: conduttanze proprie o autoconduttanze, le prime e conduttanze mutue, le seconde.

2. Matrice delle conduttanze

Vediamo ora di quali proprietà godono gli elementi di una matrice di conduttanze. Osserviamo in primo luogo che avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore a tutti i poli, dovrà necessariamente essere, per la passività della rete, $G_{rr} \geq 0$, in quanto effettive conduttanze di bipoli equivalenti.

$$\begin{aligned} I_1 &= G_{11} E_1 + G_{12} E_2 + \dots + G_{1s} E_s \dots + G_{1N} E_N \\ &\dots \\ I_r &= G_{r1} E_1 + G_{r2} E_2 + \dots + G_{rs} E_s \dots + G_{rN} E_N \\ &\dots \\ I_N &= G_{N1} E_1 + G_{N2} E_2 + \dots + G_{Ns} E_s \dots + G_{NN} E_N \end{aligned}$$

Conduttanze in proprie



$$G_{rs} = \left| \frac{I_r}{E_s} \right| \begin{array}{l} | \\ E_s \neq 0 \\ i \neq s \end{array}$$

Le G_{rs} invece non sono necessariamente positive; anzi è possibile dimostrare facilmente che deve risultare $G_{rs} \leq 0$. Infatti perché si abbia $G_{rs} > 0$ dovrebbe essere $I_r > 0$ con $E_s > 0$; ma in tal caso all'interno della rete, alimentata dalla sola E_s tra il nodo s ed il nodo O dovrebbe esistere un nodo a potenziale minore di quello di O; ma ciò è impossibile per il principio di non amplificazione delle tensioni.

Ma c'è di più. Se proviamo ad applicare il teorema di reciprocità alle due reti che hanno portato all'individuazione di G_{rs} e G_{sr} troviamo immediatamente che esse debbono essere eguali. La matrice G è necessariamente simmetrica. Questo significa che degli N^2 parametri che la compongono, solo $N^2 - (N^2 - N)/2$ sono indipendenti.

Se infine proviamo ad applicare la LKC al nodo O troviamo che la somma delle I_r deve essere nulla.

Il che, essendo le E_s qualsiasi, comporta che $\sum_r G_{rs} = 0$, per ogni s .

E quindi anche $G_{ss} = -\sum_{r \neq s} G_{rs}$.

Una volta note le mutue conduttanze, dunque, lo sono anche le autoconduttanze.

In conclusione i parametri indipendenti nella matrice G sono $N(N-1)/2$.

Per assegnare, dunque, una matrice di conduttanza non si possono scegliere N^2 numeri qualsiasi, anzi il modo più immediato per farlo è quello di assegnare $N(N-1)/2$ grandezze, negative naturalmente, che rappresentano le $N(N-1)/2$ mutue conduttanze dell' N -polo! In ogni caso queste condizioni, che debbono sempre essere soddisfatte, vengono dette condizioni di fisica realizzabilità.

E facile estendere quanto detto a N -poli che contengano anche elementi attivi. Infatti, applicando la sovrapposizione degli effetti, come abbiamo fatto per definire la caratteristica del N polo passivo, basterà aggiungere un'ultimo termine che sarà la corrente prodotta dai generatori interni quando tutti i poli sono cortocircuitati con il punto O.

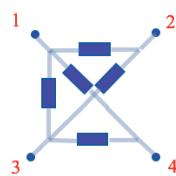
3. Stella e Poligono

Delle infinite reti che possono dare luogo ad un N-polo se ne distinguono immediatamente

due di tipo particolare: la rete a poligono, completo o meno, e quella a stella.



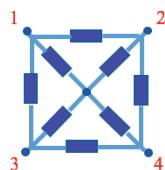
Un N-polo a stella è caratterizzato dal fatto di avere un solo nodo interno e nessuna maglia chiusa.



Un N-polo a poligono è caratterizzato dal fatto di non avere nodi interni.

interno.

L'Npolo a stella è costituito da N lati ognuno collegato tra uno degli N poli ed un nodo interno O comune, come mostrato in figura. Un n-polo a stella, dunque, ha un solo nodo



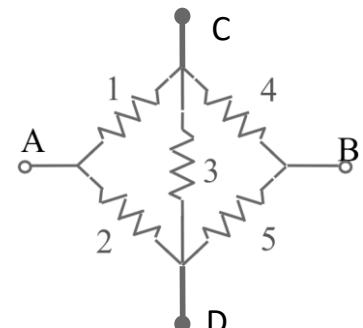
Mentre l'Npolo a poligono è caratterizzato da non aver nodi interni.

Se poi in un Npolo a poligono tutte le coppie di nodi sono collegate con un bipolo, esso prende il nome di Npolo a poligono completo.

È facile verificare che il numero di lati di una tale rete è pari ad $N(N-1)/2$; le combinazioni, cioè, di N oggetti a due a due senza ripetizione.

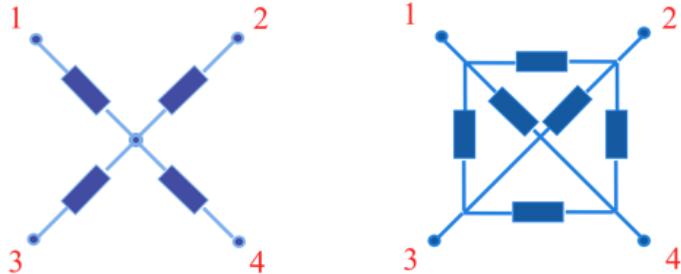
Si noti che non tutti gli Npoli sono o a stella o a poligono.

Ricorderete la classica rete a ponte mostrata in figura, che abbiamo utilizzato per mostrare come non tutte le reti si possono ridurre ad un unico bipolo utilizzando solo accoppiamenti serie e parallelo. La difficoltà era dovuta alla presenza nella rete di strutture del tipo a triangolo o a poligono come 1, 2, 3 e 3, 4, 5 o equivalentemente a stella come 2, 3, 4, che non sono riconducibili ad un sistema a due morsetti e cioè ad un bipolo. Ora siamo in grado di risolvere il problema.



Domandiamoci, infatti, in quali condizioni due N-poli – dello stesso numero di poli – possono considerarsi equivalenti. Come logica estensione dell'equivalenza dei bipoli, potremo dire che essi

possono ritenersi equivalenti quando, sottoposti alla stessa ennupla di tensioni, assorbono la stessa ennupla di correnti. In particolare cerchiamo le concrete condizioni di equivalenza tra un N-polo a poligono ed uno a stella.



Consideriamo in primo luogo un N-polo a stella e cerchiamo la relazione che lega la generica corrente I_i nel ramo iesimo alla ennupla di potenziali V_r ai poli.

Si avrà:

$$I_i = \frac{V_i - V_o}{R_i}$$

D'altra parte, applicando la LKC al nodo O si ottiene:

$$\sum_r \frac{V_r - V_o}{R_r} = 0$$

Da questa relazione è facile ricavare la V_o in funzione dei potenziali dei diversi nodi V_r

$$V_o = \frac{1}{G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

dove si è posto:

$$G_0 = \sum_r \frac{1}{R_r}$$

Utilizzando questa V_o ora nella espressione della I_i , si ottiene facilmente:

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{G_0 R_i} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

o anche, estraendo dal segno di sommatoria il termine iesimo, in modo da separare la parte di I_i che dipende esclusivamente da V_i da quella che dipende da tutti gli altri valori di V_r :

$$I_i = V_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{G_0 R_i^2} \right) - \frac{1}{G_0 R_i} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r}$$

Consideriamo ora il caso del poligono di $N(N-1)/2$ lati mostrato in figura. In questo caso si avrà:

$R_{ir} = R_i G_0 R_r$	$\frac{N(N-1)}{2}$	relazioni
Stella-poligono	$\xrightarrow{\text{sempre}} \frac{N(N-1)}{2}$	incognite
Poligono-stella	$\xrightarrow{N=3} N$	incognite
	$N \geq \frac{N(N-1)}{2}$	$N = 3$

Per $N > 3$, nella trasformazione Poligono-Stella, il numero delle equazioni è superiore al numero delle incognite ed il problema, quindi, non ammette soluzione!

$$R_{ri} = R_i G_0 R_r$$

In tal caso infatti si ha:

$$I_i = \frac{V_i}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_r} - \frac{1}{G_0 R_i} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} = V_i \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i^2 G_0} \right) - \frac{1}{G_0 R_i} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r}$$

Se dunque si ha un N -polo a stella, è sempre possibile costruire un N -polo a poligono completo le cui $N(N-1)/2$ resistenze di lato R_{ri} siano date dalle $N(N-1)/2$ relazioni trovate, che risulta equivalente alla stella di partenza. Il caso opposto, invece, in cui siano note le $N(N-1)/2$ resistenze in un poligono completo, e si voglia costruire un poligono a stella equivalente, è risolvibile solo nel caso in cui il numero delle equazioni, $N(N-1)/2$, è pari al numero di incognite N , cioè solo nel caso $N=3$!

$$I_i = \sum_{r \neq i} \frac{V_i - V_r}{R_{ir}}$$

Confrontando le due espressioni, (10.14) e (10.16), delle I_i così determinate, si verifica facilmente che esse sono identiche per qualsiasi ennupla di V_r se:

4. Analisi e Sintesi

Osserviamo che un Npolo a poligono potrebbe anche essere definito come un Npolo che non possiede nodi interni. Questo ci consente di dimostrare che in realtà ogni Npolo è sempre riconducibile ad un Npolo a poligono completo.

Pensiamo ad un Npolo che non sia né a poligono né a stella, e che quindi abbia dei nodi interni da cui si diparte una stella di bipoli. Con successive trasformazioni stella poligono – ognuna delle quali elimina una stella interna del nostro Npolo – noi possiamo immaginare di eliminare tutti i

nodi interni ed ottenere quindi un Npolo a poligono. Naturalmente tale poligono potrebbe essere non completo, ma questo non costituisce un problema perché è sempre possibile completarlo collegando le coppie di nodi non collegate, con un bipolo circuito aperto che non modifica in alcun modo la rete dal punto di vista elettrico.

$$G_{rr} = \frac{I_r}{E_r} \left| \begin{array}{l} E_i = 0 \\ i \neq r \end{array} \right. \geq 0 \quad G_{rs} = \frac{I_r}{E_s} \left| \begin{array}{l} E_i = 0 \\ i \neq s \end{array} \right. \leq 0 \quad G_{sr} = G_{rs}$$

$$G_{ss} = - \sum_{r \neq s} G_{rs}$$

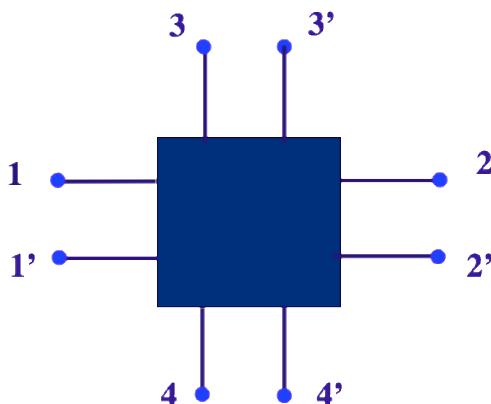
In conclusione: ogni Npolo può essere ricondotto ad un N-pololo a poligono completo

Nella pratica si possono porre due tipologie di problemi per un N-pololo: l'analisi e la sintesi.

Si chiama analisi il procedimento per cui, data la rete, se ne determina la matrice delle conduttanze dell'N-pololo. Il processo inverso, prende il nome di sintesi dell'N-pololo: data cioè una matrice quadrata N che soddisfi alle condizioni di cui in precedenza, che giustamente ora possono prendere il nome di condizioni di fisica realizzabilità, determinare un N-pololo che presenti appunto quella data come matrice delle conduttanze.

1. N-porte

Una rete passiva con un certo numero di poli può anche essere considerata da un altro punto di vista. Se, infatti, scegliamo N coppie di poli e conveniamo di collegare sempre tale



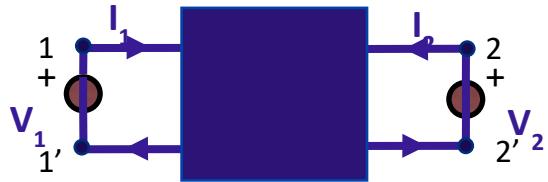
dispositivo al "resto del mondo" avendo cura che la corrente che entra in un polo di ogni singola coppia sia uguale a quella che esce dall'altro, la struttura così ottenuta godrà evidentemente di speciali proprietà. Vogliamo evidenziare tali proprietà del sistema descritto che d'ora in poi chiameremo N-bipolo o N-porte.

figura e sarà caratterizzato da N porte costituite dalle n coppie di morsetti associati.

La teoria generale del N-bipolo lineare ricalca quella dello N-polo. Anche per un N-bipolo,

alimentato con N generatori di tensione, si può applicare alle N porte - come al solito assumeremo la convenzione dell'utilizzatore per ogni porta - il principio di sovrapposizione ed ottenere un sistema del tipo

mostrato.



$$I_1 = G_{11}V_1 + G_{12}V_2$$

$$I_2 = G_{21}V_1 + G_{22}V_2$$

Anche per l'N-bipolo, alimentato con N generatori di tensione, avremo quindi una matrice $N \times N$ delle conduttanze, che nel seguito indicheremo con il simbolo \mathbf{G} .

Utilizzando il formalismo matriciale le relazioni precedenti prendono la forma:

$$|\mathbf{I}| = |\mathbf{G}| |\mathbf{V}|$$

dove $|\mathbf{V}|$ ed $|\mathbf{I}|$ sono rispettivamente i vettori colonna (o riga) delle tensioni e delle correnti e $|\mathbf{G}|$ la matrice dei parametri \mathbf{G} .

$$I_1 = G_{11}V_1 + \dots + G_{ir}V_r + \dots + G_{1N}V_N$$

$$\dots$$

$$I_s = G_{s1}V_1 + \dots + G_{sr}V_r + \dots + G_{sN}V_N$$

$$\dots$$

$$I_N = G_{N1}V_1 + \dots + G_{Nr}V_r + \dots + G_{NN}V_N$$

In generale per un N-porte, avremo il sistema a lato dove G_{rr} è il rapporto tra la corrente I_r e la tensione V_r quando tutte le altre porte sono state cortocircuitate. Analogamente per G_{rs} . Questa volta la porta alimentata è la esesima e la corrente va

valutata alla porta erresima, quando tutte le altre eccetto la esesima sono in corto.

Anche in questo caso la matrice sarà simmetrica per la reciprocità.

Naturalmente avremo che G_{rr} dovrà essere necessariamente positiva in quanto reale conduttanza all'unica porta alimentata, alla quale si è fatta la convenzione dell'utilizzatore. Nulla si può dire invece a priori sul segno delle G_{rs} .

In base alla sua simmetria la matrice delle G avrà solo $N(N+1)/2$ termini indipendenti. Non sarà valida l'altra proprietà che per l'N-polo abbiamo ottenuto applicando la LKC al nodo O, perché in questo caso non c'è un nodo O.

Per le G_{rs} , invece si può dedurre un'altra proprietà più debole di quella equivalente dell'N-polo, applicando i teoremi di non amplificazione come mostrato in figura. Ogni conduttanza mutua G_{rs} deve essere minore in modulo di qualsiasi conduttanza propria della matrice, almeno in continua.

$$G_{ss} = \frac{I_s}{V_s} \left| \begin{array}{c} V_i = 0 \\ i \neq s \end{array} \right| \geq \frac{|I_r|}{|V_s|} \left| \begin{array}{c} V_i = 0 \\ i \neq s \end{array} \right| = |G_{rs}|$$

Un fatto sostanzialmente diverso per l'N-porte è che esso può essere alimentato anche in corrente, contrariamente a quanto accade per l'N-polo, come è facile comprendere confrontando le due situazioni diverse.

Ancora una volta si applica la sovrapposizione, tenendo conto che i generatori debbono questa volta essere aperti, perché sono generatori di tensione.

Si ottiene così una matrice delle R.

Luciano De Menna - N-bipoli o N-porte

Ancora una volta per la reciprocità dedurremo che la matrice è simmetrica e che le resistenze proprie sono necessariamente positive, e, dai teoremi di non amplificazione, che ogni resistenza mutua deve essere minore in modulo di qualsiasi resistenza propria della matrice.

In conclusione i parametri indipendenti anche per le R saranno solo $N(N+1)/2$

2. Due porte

È interessante indagare come si possa passare dalla conoscenza della matrice delle G, per esempio, a quella delle R. Ovviamenre non è vero che ogni parametro R sia l'inverso del corrispondente parametro G. Sarebbe un grave errore. Per ricavare la relazione corretta possiamo ragionare in questo modo.

Se dalle equazioni delle I in funzione di V voglio ottenere quelle delle V in funzione delle I, debbo evidentemente risolvere il primo sistema di equazioni, immaginando che le V sono le

$$\begin{aligned} I_1 &= G_{11}V_1 + G_{12}V_2 && \text{incognite e le I i termini noti. Con la regola di Cramer si ottiene} \\ I_2 &= G_{21}V_1 + G_{22}V_2 && \text{facilmente il risultato cercato, dove } \det \mathbf{G} \text{ è il determinante della matrice} \end{aligned}$$

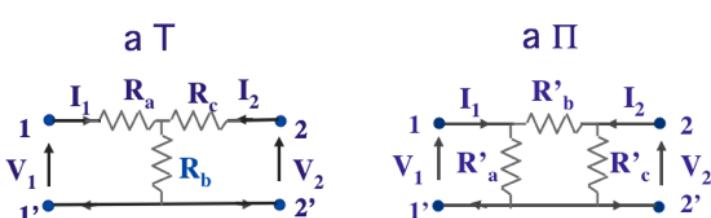
delle conduttanze e A_{sr} il minore aggiunto dei termini di posto s,r. In altri termini la matrice delle G è

$$(11.5) \quad R_{rs} = \frac{A_{rs}}{\det \mathbf{G}} \quad \text{la inversa della matrice delle R e viceversa.}$$

Due porte a T e a Π

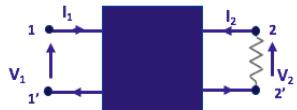
Dovendo il doppio bipolo dipendere da soli tre parametri, si potrà realizzarlo con almeno tre resistori.

E tre bipoli possono essere collegati a fare un doppio bipolo in solo due modi diversi. Il primo prende il nome di doppio bipolo a T ed il secondo a Π , per l'evidente somiglianza grafica dei corrispondenti schemi elettrici classici.



Nello schema indicato, in cui la porta secondaria è chiusa su di un carico R, domandiamoci qual è la resistenza vista dalla porta primaria.

È facile ricavare il risultato indicato in figura. In questo caso si dice che il doppio bipolo fa



$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} = \mathbf{R}_{11} - \frac{\mathbf{R}_m^2}{\mathbf{R} + \mathbf{R}_{22}}$$

da filtro, o adattatore, modificando la resistenza
eventualmente vista da un generatore collegato
alla porta primaria.

La potenza assorbita dal doppio bipolo è,
naturalmente la somma di quelle assorbite alle due

porte.

$$p = V_1 I_1 + V_2 I_2 = R_{11} I_1^2 + 2R_m I_1 I_2 + R_{22} I_2^2$$

Proviamo a calcolare i parametri R e G per i due doppi bipolo a T ed a Π .

I parametri R del doppio bipolo a T

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_a + R_b \\ R_{22} &= R_c + R_b \\ R_{12} &= R_b \end{aligned}$$

I parametri G del doppio bipolo a T

$$\begin{aligned} G_{11} &= \left(R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c} \right)^{-1} \\ G_{22} &= \left(R_c + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a} \right)^{-1} \\ G_{12} &= -\frac{R_b}{R_a (R_b + R_c) + R_b R_c} \end{aligned}$$

E ancora, i parametri R del doppio bipolo a Π

$$\begin{aligned} R'_{11} &= \frac{R'_a (R'_b + R'_c)}{R'_a + R'_b + R'_c} \\ R'_{22} &= \frac{R'_c (R'_b + R'_a)}{R'_a + R'_b + R'_c} \\ R'_{12} &= \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c} \end{aligned}$$

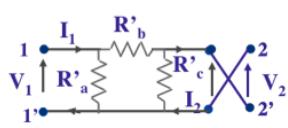
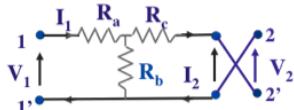
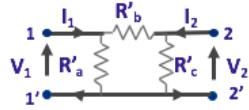
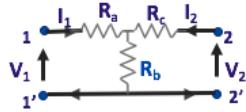
E i parametri G del doppio bipolo a Π

$$G'_{11} = \frac{R'_a + R'_b}{R'_a R'_b}$$

$$G'_{21} = \frac{R'_c + R'_b}{R'_c R'_b}$$

$$G'_{12} = -\frac{1}{R'_b}$$

Guardando l'espressione dei parametri mutui nei diversi casi, si potrebbe pensare che, per



$$\begin{aligned} R_m &= R_b \\ G_m &= -\frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c} \\ R'_m &= \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c} \\ G'_m &= -\frac{1}{R'_b} \end{aligned}$$

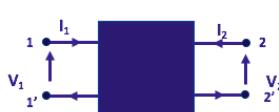
$$\begin{aligned} R_m &= R_b \\ G_m &= -\frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c} \\ R'_m &= \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c} \\ G'_m &= -\frac{1}{R'_b} \end{aligned}$$

esempio, non sia possibile sintetizzare una matrice delle conduttanze con una mutua positiva, con un doppio bipolo a T. Infatti la formula trovata nel caso in questione fornisce un mutua necessariamente negativa.

Una semplice inversione dei morsetti secondari risolve immediatamente il problema, dato che con tale inversione le nuove formule sono quelle indicate.

3. I parametri ibridi

Facciamo ora un brevissimo cenno ad altre possibili rappresentazioni dell'n-bipolo ed, in



$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$$

$$h_{12} = -h_{21}$$

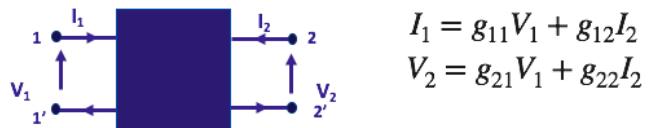
particolare, del doppio bipolo o due porte. Invece di esprimere le tensioni alle porte in funzione delle correnti, o viceversa, è possibile esprimere, per esempio, la V_1 e la I_2 in funzione della V_2 e della I_1 .

I parametri h così definiti prendono il nome di parametri ibridi; si noti, infatti, che essi non hanno tutti

le stesse dimensioni. Mentre h_{11} ha le dimensioni di una resistenza ed h_{22} ha quelle di una conduttanza,

h_{12} ed h_{21} hanno le dimensioni di numeri puri. Si noti infine che per i parametri h la reciprocità è espressa dalla relazione $h_{21} = -h_{12}$. Sapete dimostrarlo?

La rappresentazione ibrida analoga, in cui V_2 e I_1 sono espressi in funzione di V_1 ed I_2 , viene detta dei parametri g e di essa diamo le definizioni. Evidentemente mentre g_{11} è una conduttanza, g_{22} è una resistenza.



$$I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2$$

E ancora, g_{12} e g_{21} sono numeri puri. Il primo viene detto guadagno in corrente ed il secondo fattore di amplificazione in tensione.

$$g_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} \quad g_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0}$$

Un cenno infine alla descrizione del doppio bipolo con la cosiddetta matrice di trasmissione



$$V_1 = t_{11}V_2 + t_{12}I_2 \\ I_1 = t_{21}V_2 + t_{22}I_2$$

$$U' = TU$$

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix}$$

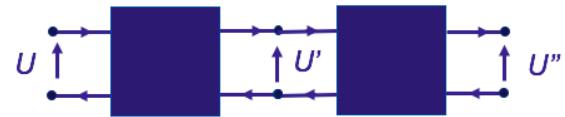
che mette in relazione le grandezze ad una porta con quelle all'altra. Si noti la scelta della convenzione del generatore alla porta secondaria; il motivo di tale scelta sarà chiarito successivamente. Naturalmente, t_{11} e t_{21} sono

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

numeri puri. Mentre t_{12} è una resistenza e t_{21} una conduttanza.

La rappresentazione con la matrice di trasmissione è molto utile quando si hanno due doppi bipoli in cascata. Infatti utilizzando un simbolismo matriciale, si può caratterizzare il primo doppio bipolo con la matrice T ...

e con T' il secondo. Grazie alle convezioni fatte sulle porte secondarie si potrà affermare che la matrice di trasmissione di due doppi bipoli in cascata è il prodotto delle singole matrici dei doppi bipoli.

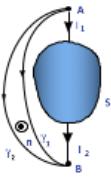


$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{U} = \mathbf{T} \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}' = \mathbf{T}' \mathbf{U}'' \end{array} \right\} \quad \mathbf{U} = \mathbf{T} \mathbf{T}' \mathbf{U}''$$

1. Maxwell e Kirchhoff

In questa lezione cercheremo di estendere la gran parte dei concetti che abbiamo sviluppato per il regime stazionario al caso in cui le grandezze in gioco non sono più costanti nel tempo.

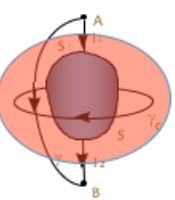
La prima domanda da porsi è se sia possibile anche in regime non stazionario parlare di bipoli. A rigore la risposta è negativa. Infatti in un regime non stazionario non è più possibile parlare di differenza di potenziale, né è lecito assumere che la corrente entrante in un morsetto di un resistore sia eguale a quella uscente dall'altro: due affermazioni che, come sappiamo, sono alla base della definizione di bipolo.



$$\int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} - \int_{\gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{d}{dt} \iint_{S_\gamma} \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

$$\left| \int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} \right| \gg \frac{d}{dt} \iint_{S_\gamma} \bar{B} \cdot d\bar{S}$$

Quando il campo elettrico (e magnetico) varia nel tempo, il suo integrale di linea tra due punti dipende dalla linea che si percorre per andare da un punto all'altro. Se però la differenza tra i due integrali è sufficientemente piccola, come indicato dalla relazione in figura, allora potremo ancora parlare di tensione indipendente dal percorso e quindi di d.d.p.



$$I_1 - I_2 = \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \iint_{S_{\gamma_c}} \mu_0 \bar{J} \cdot d\bar{S}$$

$$\left| \oint \frac{\bar{B}}{\mu_0} \cdot d\bar{l} \right| \gg \epsilon_0 \left| \frac{d}{dt} \iint_{S_{\gamma_c}} \bar{E} \cdot d\bar{S} \right|$$

Analogamente, la quantità di carica elettrica che entra in una superficie chiusa non è necessariamente eguale, istante per istante, alla quantità di carica che ne esce. Ciò comporta, naturalmente, che la quantità di carica contenuta nella superficie stessa si

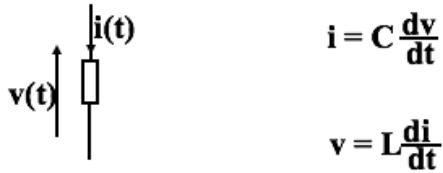
modifichi nel tempo: cresca in un determinato intervallo di tempo per poi diminuire in un intervallo successivo. Se però, anche qui tale differenza è sufficientemente piccola allora potremo ancora ritenere valida la prima legge di K.

Luciano De Menna - I bipoli dinamici

Per fortuna questi fenomeni sono tanto più rilevanti quanto più grande è la rapidità di variazione nel tempo delle grandezze elettriche. Così accade che, se le variazioni sono sufficientemente lente, l'errore che si commette nel trascurare tali fenomeni è sufficientemente piccolo. È questo un enunciato puramente qualitativo che può lasciare largamente insoddisfatti. Si rimanda coloro che fossero interessati ad una trattazione più approfondita del problema alla seconda appendice integrativa del libro indicato in bibliografia.

2. Nuovi bipoli lineari

Anche in regime dinamico, dunque, parleremo di differenza di potenziale ai morsetti di un



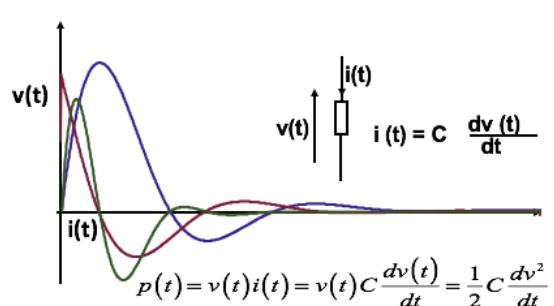
resistore e di un unico valore, in ogni istante, della corrente che lo attraversa; il legame tra queste due grandezze sarà fornito dalla caratteristica del bipolo che scriveremo (convenzione dell'utilizzatore) $v=RI$, dove l'uso delle lettere minuscole v ed i serve

appunto a ricordare, per convenzione, che si tratta di grandezze variabili nel tempo.

In regime dinamico il bipolo resistore non è l'unico bipolo lineare e passivo che possiamo introdurre; si può pensare, per esempio, ad una relazione di proporzionalità tra corrente e derivata della tensione o tra tensione e derivata della corrente. Essendo l'operatore derivata lineare, tali caratteristiche saranno anche esse lineari. Siamo così portati ad introdurre due nuove tipi di bipoli. Il condensatore C e l'induttore L . Le relative costanti di proporzionalità prendono il nome, rispettivamente, di capacità del condensatore e di induttanza, o coefficiente di autoinduzione, dell'induttore. Nel Sistema Internazionale la capacità si misura in farad e l'induttanza in henry e sono entrambe definite positive, se si assume una convenzione dell'utilizzatore sul bipolo.

Si osservi che le caratteristiche dei due nuovi bipoli lineari introdotti non possono essere

descritte, come accadeva per il resistore, in un piano (i,v) . È questo soltanto il riflesso di differenze ben più significative che vogliamo ora cercare di porre in evidenza.

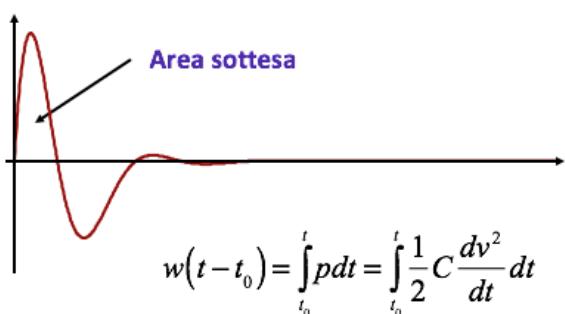


Nell'immagine a lato sono rappresentati gli andamenti di tensione e corrente in un condensatore

per un caso particolare: si noti che, essendo la corrente proporzionale alla derivata della tensione, essa è nulla dove la tensione ha un massimo o un minimo.

D'altra parte v , per definizione, è il lavoro svolto per portare una carica unitaria attraverso il salto di potenziale pari appunto a v . Per "i" cariche al secondo la potenza, istante per istante, sarà data dalla espressione indicata.

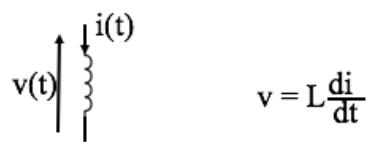
Avendo assunto una convenzione dell'utilizzatore, tale potenza è una potenza assorbita dal bipolo. Dall'andamento nel tempo della potenza riportata in figura si vede che essa è, per alcuni intervalli di tempo, negativa. Ma una potenza assorbita negativa corrisponde ad una potenza generata positiva; questo vuol dire che il condensatore in alcuni intervalli di tempo è in grado di fornire potenza ai suoi morsetti piuttosto che assorbirla. Il comportamento è dunque radicalmente differente da quello del bipolo resistore che invece è solo in grado di assorbire potenza.



Per approfondire ancora l'argomento proviamo a calcolare l'energia fornita al bipolo in un intervallo di tempo (t_0, t) . Graficamente tale energia sarà rappresentata dall'area sottesa alla curva.

Sviluppando l'integrale si ottiene l'energia assorbita in questa forma. Se per esempio scegliamo t_0 nell'istante in cui $v=0$, possiamo affermare che l'energia assorbita fino all'istante t , dipende soltanto dal valore della tensione ai capi del condensatore allo stesso istante t ed è, per la precisione, pari a $Cv^2/2$.

Una conseguenza immediata di tale affermazione è che, se il condensatore fino all'istante iniziale t_0 ha assorbito una energia nulla ($v=0$), l'energia che verrà assorbita in un successivo intervallo (t_0, t) sarà sempre positiva ($Cv^2/2$). In altri termini un condensatore è in grado di fornire energia ai suoi morsetti soltanto se tale energia è stata assorbita in un intervallo precedente. Si dice che l'energia è stata in precedenza immagazzinata dal condensatore e per questo motivo essa può successivamente essere restituita.



Per ora limitiamoci a questa osservazione e notiamo che, non essendo il condensatore in grado di produrre energia elettrica, ma soltanto di immagazzinarla, esso va considerato a tutti gli effetti un bipolo passivo; il suo comportamento, però, ci consiglia di modificare la definizione fin qui usata di passività di un bipolo. Diremo che

un bipolo è passivo se l'energia da esso assorbita - convenzione dell'utilizzatore, quindi - dall'origine dei tempi ($-\infty$) fino ad un qualsiasi istante t è non negativa

Il simbolo grafico che useremo per indicare questo tipo di bipolo è quello mostrato. Con la convenzione dell'utilizzatore la costante C , capacità del condensatore, è definita positiva, almeno nei limiti della nostra trattazione.

Ragionamenti analoghi per l'induttore ci portano a concludere che anche in questo caso c'è una energia immagazzinata, ma questa volta dipendente dalla corrente:

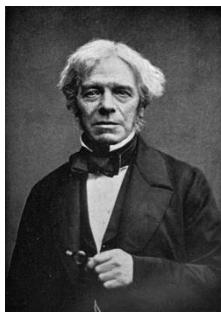
$$w(t) = \frac{1}{2} Li^2$$

Il fatto che sia l'induttore che il condensatore abbiano in generale una energia immagazzinata, ha come conseguenza che essi sono bipoli che, in un certo senso, posseggono una "memoria". In ogni istante il valore di energia da essi posseduto dipende dalla loro storia passata e condizionerà la loro storia futura. È dunque una memoria a tutti gli effetti e

Nel S.I. La capacità C si misura in Farad

vedremo quanto ciò condizionerà il loro comportamento dinamico.

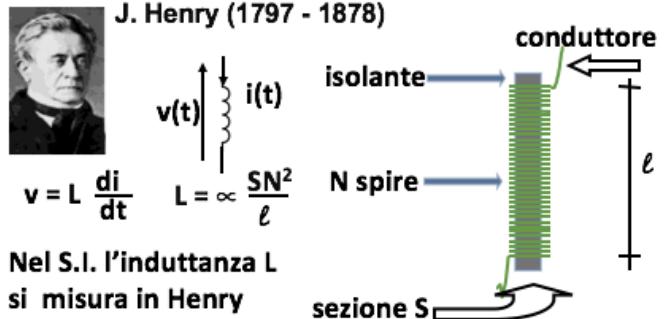
Sarebbe facile verificare sperimentalmente che un sistema costituito da due lamine conduttrici di superficie S , con interposto uno strato isolante di spessore d , entro buoni limiti delle grandezze in gioco (correnti e tensioni) si comporta come un condensatore e la sua capacità è data dalla formula indicata.



La capacità nel Sistema Internazionale si misura in Farad. Pur se con le loro specificità, i bipoli induttore e condensatore, se inseriti in una rete insieme ad altri bipoli, devono anche loro sottostare alle leggi di Kirchhoff: la LKC e la LKT, istante per istante. La conseguenza immediata di questa constatazione è che tutte le proprietà delle reti che abbiamo potuto dimostrare valide in regime stazionario basandoci sulle sole leggi di Kirchhoff, restano valide, istante per istante, anche in regime dinamico. Fanno eccezione i teoremi di non amplificazione.

Possiamo dunque costruire una rete di bipoli non più solo resistivi, e scrivere per tale rete delle relazioni tra tensioni e correnti dettate dalle leggi di Kirchhoff

Analogamente si potrebbe verificare che un avvolgimento di N spire di sezione S , avvolte su di un supporto isolante, di lunghezza l , si comporta come un induttore. La sua induttanza L è data dalla formula mostrata. Nel S.I. di misura l'induttanza si misura in Henry, dal nome dello scienziato J.Henry.



3. Le leggi dei circuiti

Resta da vedere come da queste equazioni si giunge alla determinazione delle grandezze elettriche, tensione e corrente, nel loro andamento temporale. Tratteremo questo aspetto partendo da casi particolari estremamente semplici fino a giungere ai casi più complessi.

Cominciamo con osservare che non pone alcun problema una rete costituita o da soli induttori o da soli condensatori. È infatti molto facile ricavare regole di equivalenza per i quattro casi indicati negli schemi riportati nelle immagini a lato. Si ha infatti per la serie di due induttori, che il bipolo risultante è ancora un induttore e ha una induttanza pari a L_1+L_2

Per la serie di due condensatori si ha che il bipolo equivalente è ancora un condensatore, ma la sua capacità è data dal prodotto delle due capacità dei condensatori in serie diviso la loro somma.

Mentre per il parallelo di due condensatori si ottiene facilmente che la capacità risultante è pari alla somma delle due in parallelo. Analogamente, per il parallelo di due induttori, si ha che il

bipolo equivalente è ancora un induttore la cui

$$\begin{array}{c} i(t) \\ \parallel \\ v_1(t) \\ | \\ \parallel \\ v(t) \\ | \\ \parallel \\ v_2(t) \\ | \\ i_2(t) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} = \left(\frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} \right) = i \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \\ C = \left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \end{array} \right.$$

induttanza è data dal prodotto delle due induttanze in parallelo diviso la loro somma.

Se nella rete sono presenti anche resistori, le cose si complicano. Consideriamo il caso della serie di un condensatore e di un resistore. Se fossimo in regime stazionario, per la presenza del condensatore che non consente il passaggio di una corrente stazionaria, la soluzione sarebbe banale: $i=0$. Se invece le grandezze variano nel tempo, diventa necessario precisare quando il fenomeno ha inizio.

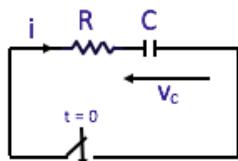
Come abbiamo visto, infatti, i nuovi bipoli introdotti sono in grado di immagazzinare energia; è evidente, quindi, che il comportamento dell'intero circuito sarà necessariamente condizionato dal livello di energia posseduto all'istante iniziale. In un caso concreto l'istante iniziale

Luciano De Menna - I bipoli dinamici

è chiaramente definito dalla procedura che si mette in opera per collegare i bipoli. Per esempio, dopo aver collegato il morsetto B, collego il morsetto A nell'istante ecc. ecc. Com'è noto, per effettuare concretamente tali collegamenti si utilizzano dispositivi che chiamiamo interruttori.

4. Serie RC

Conviene a questo punto introdurre un'opportuna idealizzazione di tali dispositivi e, precisamente, un bipolo che abbia la caratteristica di essere del tutto simile ad un circuito aperto



prima di un determinato istante t_0 , che viene detto istante di chiusura dell'interruttore, e viceversa si comporti come un bipolo corto circuito per tutti gli istanti $t \geq t_0$. Ovviamente, dove è possibile, conviene porre $t_0 = 0$, coincidente con l'arbitraria origine dei tempi!

Il bipolo così definito è un interruttore in chiusura; in maniera del tutto analoga si potrà definire un interruttore in apertura.

Completiamo, dunque, il circuito precedentemente preso in considerazione inserendo appunto un bipolo interruttore ideale. Il simbolo è quello mostrato nelle figure, dove la freccia indica chiaramente che si tratta di interruttore in chiusura. Notiamo che nella rete non esistono generatori. Questo non vuol dire che la corrente in essa sia necessariamente nulla, perché, come abbiamo visto, in generale c'è dell'energia immagazzinata nel condensatore C all'istante iniziale. Fissiamo il livello di tale energia assegnando il valore V_0 che la tensione sul condensatore ha all'istante $t=0$.

È questo il solo parametro che occorre dare in quanto tutta la storia passata del condensatore è racchiusa nella sua energia immagazzinata all'istante considerato; energia che dipende in maniera univoca dal valore della tensione ai suoi capi: $w=Cv^2/2$. Scriviamo ora l'equazione che esprime la LKT all'unica maglia presente: $v_R+v_C=0$. Con facili passaggi si giunge all'equazione risolvente in forma canonica:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$

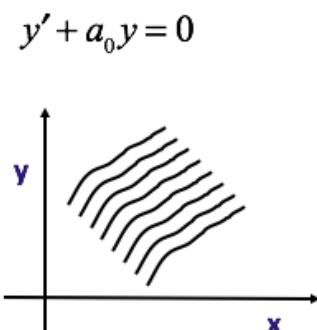
L'equazione in questione è una equazione differenziale ordinaria, omogenea, lineare, del primo ordine, a coefficienti costanti nella incognita $v_C(t)$. È una equazione differenziale, perché

l'incognita compare con le sue derivate; ordinaria, perché tali derivate sono appunto ordinarie e non parziali; omogenea, perché non vi compare un termine indipendente dalla incognita a secondo membro; del primo ordine, perché questo è il massimo ordine di derivazione presente; a coefficienti costanti, infine, perché i coefficienti dei vari termini non sono funzioni del tempo.

Il caso più generale è quello di una equazione di ordine n , dove abbiamo scelto di indicare con la lettera x la variabile indipendente e con la y la funzione incognita.

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}y^{n-2} + \dots + a_1y^1 + a_0y = 0$$

Un classico capitolo dell'Analisi Matematica ci fornisce una metodologia del tutto generale per la sua soluzione; proviamo a ricordare, sinteticamente, le basi su cui tale metodologia si fonda. Cominciamo con l'equazione di primo ordine e osserviamo che se $y_1(x)$ è una soluzione dell'equazione, allora anche $y_2(x) = ky_1(x)$, dove k è una costante arbitraria, è soluzione della stessa equazione. Questo vuol dire che non esiste una unica soluzione, bensì una famiglia di soluzioni che differiscono per una costante moltiplicativa. Vedremo subito che tale famiglia comprende anche tutte le soluzioni possibili.



Possiamo immaginare di rappresentare tutte le soluzioni dell'equazione nel piano (x,y) ottenendo così una famiglia di curve. È facile rendersi conto che tali curve non possono intersecarsi; infatti, se due curve avessero un punto in comune, in quel punto esse dovrebbero avere in comune anche la derivata prima, come si deduce immediatamente perché la nostra equazione mette in relazione il valore della funzione in un punto con quello della sua derivata nello stesso punto.

Derivando poi l'equazione si vede immediatamente che un tale ragionamento è estendibile alle derivate di ordine superiore: se è nota la derivata prima in un punto è nota anche la derivata seconda nello stesso punto. Si noti che tutto ciò è possibile in quanto il coefficiente a_0 è costante! In definitiva si conclude che se due soluzioni avessero un punto in comune, nella

rappresentazione nel piano (x,y), esse dovrebbero avere anche tutte le derivate in comune in quel punto, e quindi dovrebbero essere coincidenti.

Le osservazioni fatte portano a due ulteriori conclusioni. In primo luogo, per individuare una sola soluzione all'interno della famiglia di soluzioni, basta fissare il valore che essa assume in un punto, diciamo x_0 . In secondo luogo, poiché se è noto il valore in x_0 sono noti i valori di tutte le derivate nello stesso punto, è possibile esprimere la soluzione cercata sotto forma di uno sviluppo in serie di potenze di punto iniziale x_0 .

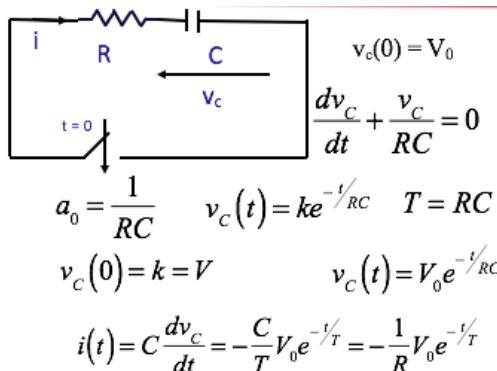
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = y(x_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a_0)^n}{n!} (x-x_0)^n$$

Un osservatore attento avrà riconosciuto che lo sviluppo ottenuto è quello dell'esponenziale

Abbiamo dunque determinato la soluzione dell'equazione, attraverso un suo sviluppo in serie; proviamo a ritrovare lo stesso risultato guardando le cose da un altro punto di vista. Supponiamo che qualcuno ci abbia suggerito che la soluzione debba essere del tipo $ke^{\alpha x}$. L'ipotesi non è poi tanto peregrina: la stessa forma dell'equazione ci dice che la sua soluzione deve avere una derivata che coincida, a meno di una costante moltiplicativa, con la soluzione stessa. È immediato pensare alla funzione esponenziale! Volendo determinare a basta sostituire la soluzione ipotizzata nell'equazione ed ottenere $a = -a_0$. L'equazione $a + a_0 = 0$, prende il nome di equazione caratteristica della equazione di partenza.

Proviamo ad applicare questa tecnica all'equazione del nostro circuito. In primo luogo l'equazione caratteristica, la cui soluzione è $a = -1/RC$. L'integrale generale sarà dunque $v_C(t) = ke^{-t/T}$. La soluzione dipende da una costante arbitraria; il che è naturale perché non abbiamo ancora imposto la condizione che il condensatore all'istante iniziale abbia la tensione V_0 . Imponendo tale condizione si ottiene il risultato cercato:

La costante di tempo $T = RC$, che caratterizza il decadimento della tensione sul condensatore, ha una interessante interpretazione geometrica. Se si considera infatti la tangente



alla curva che rappresenta l'andamento della tensione nel punto $t = 0$, e la si prolunga fino ad intersecare l'asse dei tempi, si verifica facilmente che tale intersezione individua un intervallo di tempo pari a T . Si noti che, a causa dell'andamento esponenziale, il valore finale è raggiunto, a rigore, solo

dopo un tempo infinito. In pratica, però, dopo un tempo pari ad alcune volte la costante di tempo, il valore della tensione è già molto vicino a quello finale; per $t = 3T$, per esempio, si ha $v_c(3T) = V_0 e^{-3} = 0,05V_0$.

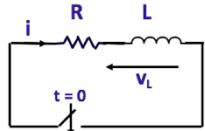
Ricordando che $i = C \frac{dv_c}{dt}$ si calcola anche la corrente.:

Siamo ora in grado di effettuare una verifica molto interessante: il risultato trovato ci dice che la rete è sede di una corrente che, partendo dal valore $-V_0/R$, va a 0 con legge esponenziale. Dato che la corrente i attraversa una resistenza R , essa produrrà una dissipazione di energia che possiamo calcolare, ottenendo $W = CV_0^2/2$.

$$W = R \int_0^\infty i^2 dt = R \int_0^\infty \left[-\frac{1}{R} V_0 e^{-t/T} \right]^2 dt = \frac{V_0^2}{R} \frac{T}{2} \int_0^\infty e^{-2x} dx = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Cioè l'energia dissipata nel resistore da $t=0$, inizio del fenomeno, a $t=\infty$, è pari a quella inizialmente immagazzinata nel condensatore, a conferma del fatto che tale energia era effettivamente immagazzinata nel condensatore all'istante $t=0$.

1. Circuito RL



$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \quad \alpha = -\frac{R}{L}$$

$$i(t) = ke^{-\frac{t}{T}} \quad T = L/R \quad i(0) = k = I_0$$

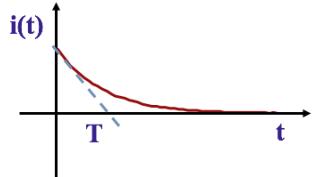
$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

Esaminiamo ora un caso simile al precedente in cui al posto del condensatore sia presente un induttore L; la storia è la stessa, cambiano solo i protagonisti. Ci limiteremo ad elencare un certo numero di passaggi che dovrebbero essere di per sé chiari!

In primo luogo l'equazione all'unica maglia

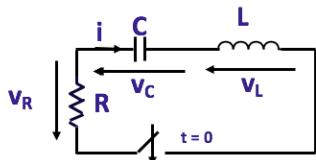
presente. Anche in questo caso siamo in presenza di una equazione differenziale ordinaria e omogenea, che può essere risolta con la tecnica dell'equazione caratteristica.

Se $i(0) = I_0$, se cioè l'induttore aveva una energia magnetica $W_m = L I_0^2 / 2$ immagazzinata all'istante $t=0$, o anche, mutuando il linguaggio introdotto per il condensatore, se l'induttore era inizialmente carico alla corrente I_0 , il circuito è sede di una corrente che ha un andamento esponenziale decrescente con costante di tempo $T=L/R$. La costante di tempo ha anche in questo caso il significato rilevato per la scarica del condensatore.



2. Circuito RLC

A questo punto possiamo provare a mettere insieme i due nuovi bipoli in un circuito RLC



$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C + LC \frac{d^2v_C}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$$

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$v_R + v_C + v_L = 0$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} \quad i = C \frac{dv_C}{dt}$$

serie.

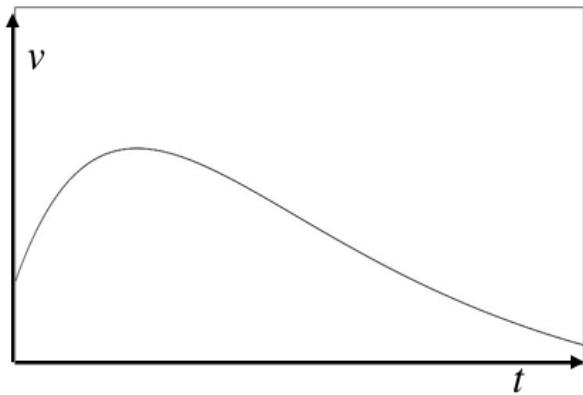
Naturalmente, la legge di K all'unica maglia presente fornisce questa volta un'equazione del secondo ordine in v_C : basta sostituire la corrente i presente nelle due caratteristiche dell'induttore e del resistore con l'espressione ricavata dalla

caratteristica del condensatore e usare le espressioni trovate nell'equazione alla maglia. Si ottiene così un'equazione nella v_C .

L'equazione così ottenuta è un'equazione differenziale ordinaria, lineare, omogenea, di secondo ordine a coefficienti costanti. Ragionamenti del tutto analoghi a quelli esposti per il caso dell'equazione di primo ordine ci porterebbero a costruire una soluzione sotto forma di sviluppo in serie di potenze. Più semplicemente possiamo generalizzare il metodo dell'equazione caratteristica. Esistono dunque due valori di a che rendono l'esponenziale e^{at} soluzione della nostra equazione, e tali valori sono le radici dell'equazione caratteristica. Per la linearità dell'equazione, possiamo affermare che la famiglia di soluzioni dell'equazione è data dalla espressione mostrata in figura, dove α_1 ed α_2 sono le radici e k_1 e k_2 due costanti arbitrarie.

D'altra parte, la struttura stessa dell'equazione ci dice che, se sono noti in un punto il valore della incognita e quello della sua derivata prima, sono noti anche i valori assunti nello stesso punto da tutte le derivate, di ogni ordine, della funzione stessa: il valore della derivata seconda è, infatti, direttamente valutabile dall'equazione, mentre quello delle derivate di ordine superiore si ottiene facilmente derivando di volta in volta l'equazione stessa.

Resta ora da esaminare i vari casi che la natura dell'equazione caratteristica può presentare. A seconda del valore del discriminante dell'equazione, le radici possono essere reali e distinte, reali e coincidenti ed immaginarie coniugate, dato che i coefficienti dell'equazione sono, per ipotesi, reali.



Partiamo dal caso in cui le radici siano distinte. La soluzione è somma di due esponenziali decrescenti e quindi la tipologia di

forma d'onda è quella mostrata in figura, dove si riconosce facilmente la presenza di due costanti di tempo.

Se il discriminante dell'equazione caratteristica è negativo, le soluzioni dell'equazione sono complesse. Esse sono anche coniugate in quanto i coefficienti dell'equazione sono reali. La soluzione generale è, dunque, una combinazione lineare, con due costanti arbitrarie, delle funzioni esponenziali $e^{(\alpha+j\beta)x}$ e $e^{(\alpha-j\beta)x}$. D'altra parte, invece di tali funzioni è possibile prendere in considerazione le funzioni $e^{\alpha x} \cos \beta x$ e $e^{\alpha x} \sin \beta x$ che come è noto sono combinazioni lineari delle precedenti.

Come del resto mostrano questi passaggi algebrici che non richiedono ulteriori commenti

$$v_C(t) = (A + jB)e^{(\alpha+j\beta)t} + (A - jB)e^{(\alpha-j\beta)t} = e^{\alpha t} \left[A(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + jB(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) \right]$$

$$v_C(t) = e^{\alpha t} \left[A(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + jB(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) \right] = e^{\alpha t} \left[2A \frac{(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t})}{2} - 2B \frac{(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t})}{2j} \right]$$

Quindi nel caso di soluzioni complesse dell'equazione caratteristica, l'integrale generale

della nostra equazione può porsi nella forma:

$$v_c(t) = e^{at} [2A \cos bt - 2B \sin bt]$$

O anche in quest'ultima forma, dove è evidente che la soluzione è di tipo oscillatorio smorzato.

$$v_c(t) = k e^{at} \sin(bt + f)$$

Il caso delle due radici

coincidenti è in realtà solo un caso limite: non ci troveremo mai nelle condizioni di poter affermare che il discriminante è esattamente nullo. Comunque, anche in questo caso si può costruire l'integrale generale ricavando una seconda soluzione con il ragionamento seguente: partendo dalla condizione di radici distinte, poniamo $a_1 = a$ ed $a_2 = a + \Delta a$ e consideriamo la combinazione lineare delle due soluzioni $e^{(a+\Delta a)t}/\Delta a - e^{at}/\Delta a$ che è ancora una soluzione. Facendo tendere Δa a zero, e quindi a_2 ad a_1 , per ritrovare la condizione di radici coincidenti, si vede chiaramente che la nuova soluzione tende alla derivata di e^{at} rispetto ad a e cioè a $t e^{at}$

$$v_c(t) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{e^{(a+\Delta a)t} - e^{at}}{\Delta a} = \frac{d e^{at}}{da} = t e^{at}$$

In definitiva, riassumendo quanto abbiamo detto, si ottiene, che nel caso delle due radici coincidenti, o critico, due soluzioni indipendenti sono: $t e^{at}$ ed e^{at}

E quindi l'integrale generale:

$$v_c(t) = k_1 e^{at} + k_2 t e^{at}$$

Con alcune nuove posizioni formali che rendono più chiara la casistica, e cioè definendo T e ω_0 :

$$T = \frac{2L}{R}; \quad \sqrt{-} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Luciano De Menna - Dinamica del secondo ordine

Con il ché il discriminante diventa:

$$D = \frac{4}{T^2} (1 - \omega_0^2 T^2)$$

Possiamo elencare i tre casi individuati alla maniera seguente:

Il caso aperiodico o smorzato o sovraccritico ($\omega_0 T < 1$)

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t}$$

Il caso periodico o oscillante o subcritico ($\omega_0 T > 1$)

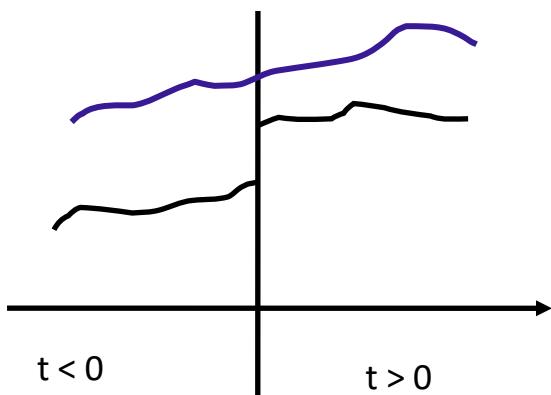
$$v_C(t) = k e^{\alpha t} \sin(bt + f)$$

Ed il caso critico ($\omega_0 T = 1$).

$$v_C(t) = k_1 e^{\alpha t} + k_2 t e^{\alpha t}$$

3. Le condizioni iniziali

Le costanti k_1 e k_2 , o k e ϕ , sono da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali. Infatti, essendo presenti nel circuito due elementi a memoria, per determinarne univocamente l'evoluzione occorrerà conoscere il loro livello energetico all'istante iniziale; in altri termini occorrerà conoscere il valore della tensione sul condensatore, diciamo V_0 , e quello della corrente nell'induttore, diciamo I_0 , all'istante iniziale.



Si noti che mentre ogni altra grandezza nel nostro modello può avere una discontinuità all'atto della chiusura o dell'apertura di un interruttore, la tensione sui condensatori e le correnti negli induttori non possono avere tali comportamenti. Una loro discontinuità infatti implicherebbe una discontinuità

dell'energia immagazzinata, il che non è possibile in assenza di generatori o dissipatori di potenza infinita.

Per esempio, nel caso di oscillazioni smorzate, la prima condizione ci fornisce facilmente il valore di $k \sin \phi$, mentre dall'espressione della corrente si ottiene $k \cos \phi$. Il loro rapporto ci dà $\tan \phi$ e quindi la prima ci consente di calcolare k .

$$i(t) = C \frac{dv_C}{dt} = \alpha k C e^{\alpha t} \sin(bt + f) + b k C e^{\alpha t} \cos(bt + f)$$

$$i(0) = \alpha k C \sin(f) + b k C \cos(f) = I_0$$

Avendo determinato la corrente dell'induttore e la tensione sul condensatore possiamo provare a fare un bilancio energetico per verificare che effettivamente tutta l'energia dissipata nel resistore tra 0 ad infinito è proprio uguale a quella inizialmente immagazzinata nei due componenti a memoria.

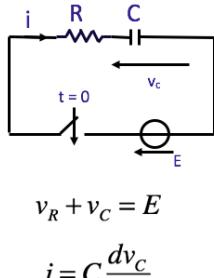
Luciano De Menna - Dinamica del secondo ordine

Oppure possiamo calcolare la somma di W_1 e W_2 e verificare che la loro somma è costante in tutto il processo e pari all'energia inizialmente immagazzinata nel circuito

$$W_1(t) + W_2(t) = \frac{1}{2}LI_0^2 + \frac{1}{2}CV_0^2$$

4. RC con forzamento

I circuiti in regime dinamico che abbiamo fino ad ora studiato contenevano esclusivamente bipoli passivi. La dinamica che tali circuiti mostrano è dovuta alla presenza di una

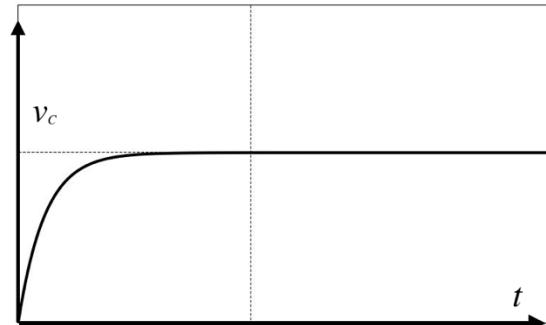


$$\begin{aligned} v_C(0) &= V_0 \\ v_R &= Ri = RC \frac{dv_C}{dt} \\ v_C + RC \frac{dv_C}{dt} &= E \\ \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} &= \frac{E}{RC} \end{aligned}$$

certa energia inizialmente immagazzinata nei componenti con memoria. Vogliamo ora introdurre, anche in regime dinamico, i bipoli attivi, cominciando da un generatore di tensione costante E_0 , che inseriamo nel circuito RC serie già studiato nel paragrafo precedente.

Applicando la LKT alla unica maglia presente si ottiene, facilmente l'equazione risolvente.

L'equazione ottenuta è ancora una equazione differenziale, ordinaria, a coefficienti costanti, ma a differenza delle precedenti, non è più omogenea per la presenza di un termine assegnato, o noto, a secondo membro. Ci viene in aiuto a questo punto, ancora una volta, la teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti che ci assicura che l'integrale generale dell'equazione può ottenersi aggiungendo a quello dell'omogenea associata una soluzione



dell'equazione completa. Quest'ultima si ottiene facilmente cercando una soluzione che abbia lo stesso andamento del forzamento (il generatore), cioè, nel nostro caso, costante. Per v_C costante la derivata si annulla e si trova immediatamente che la soluzione cercata è $v_C = E$.

E quindi nel nostro caso, la soluzione, che può essere messa nelle due forme equivalenti.

$$v_C(t) = (V_0 - E)e^{at} + E \quad \text{e} \quad v_C(t) = V_0e^{at} + E(1 - e^{at})$$

5. RLC con forzamento

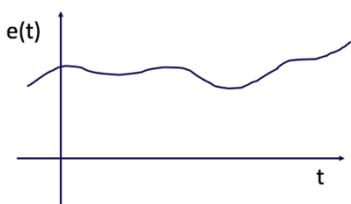
Passiamo ora ad esaminare il caso del circuito RLC serie in presenza di un forzamento costante. È facile ricavare l'equazione nella incognita v_C . Anche in questo caso essendo l'integrale generale della omogenea associata già noto, occorrerà determinare soltanto la soluzione particolare. Essendo il forzamento costante, è possibile utilizzare la stessa tecnica usata per l'equazione del primo ordine: si assume che la soluzione particolare sia una costante e si ricava immediatamente che $v_{C_0} = E_0$. Si noti che in questo modo si è automaticamente scelto come soluzione particolare quella di regime. Utilizzeremo questa tecnica in seguito anche quando il forzamento non è più costante nel tempo; naturalmente la soluzione di regime non potrà essere costante ma dovrà ricalcare l'andamento del forzamento.

Come nel caso dell'evoluzione libera avremo i tre casi possibili: aperiodico, o smorzato, o sovraccritico, critico e oscillatorio, o subcritico.

Evidentemente, le costanti k_1 , k_2 , o k e ϕ sono da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali.

Gli andamenti di tensioni e correnti ricalcheranno quelli visti per il circuito senza forzamento, ma il valore di regime della tensione sul condensatore non sarà più nullo ma sarà uguale a quello della tensione del generatore.

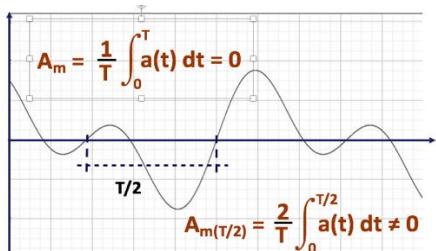
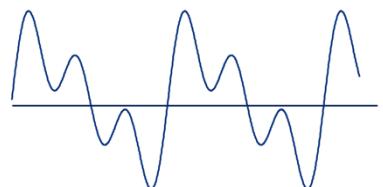
1. Generatori variabili



Fino a questo punto abbiamo preso in considerazione esclusivamente generatori di tensione e di corrente costanti. Essendo ora il nostro modello in grado di descrivere anche regimi dinamici, possiamo prendere in considerazione anche generatori di

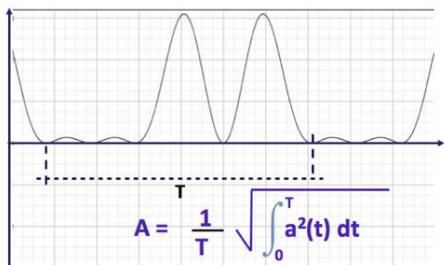
tensione e di corrente variabili nel tempo. Si tratterà sempre di generatori ideali nel senso che si assume che l'andamento nel tempo della grandezza erogata non dipenda in alcun modo dalle condizioni in cui il generatore lavora.

La forma d'onda della tensione non dipende dalla corrente!
La forma d'onda della corrente non dipende dalla tensione!



Per ora ricordiamo qualche definizione che ci sarà necessaria nel seguito. Una variazione temporale che si ripeta identicamente dopo un certo intervallo di tempo T viene detta periodica; l'intervallo T viene detto periodo della grandezza periodica. Nel periodo T la funzione periodica $a(t)$ assumerà un massimo che indicheremo con il simbolo A_m .

Definiremo ancora, per $a(t)$, A_m il valore medio in un periodo. In generale il valor medio di una funzione periodica non è nullo: l'area sottesa dalla funzione nella sua parte positiva



non è eguale alla corrispondente area della sua parte negativa.

La condizione di valor medio nullo individua una particolare classe di funzioni periodiche.

Per esse potrà essere utile a volte definire il valor medio in un semiperiodo.

Più interessante è in questi casi il valore efficace A definito come la radice quadrata del valore quadratico medio:

$$A = \frac{1}{T} \sqrt{\int_0^T a^2(t) dt}$$

Luciano De Menna - Regimi sinusoidali

Quindi, facendo attenzione al simbolismo, di una grandezza variabile nel tempo $a(t)$, indicheremo con A_M il suo valor massimo, con A_m il suo valor medio in un periodo e con A il suo valor efficace.

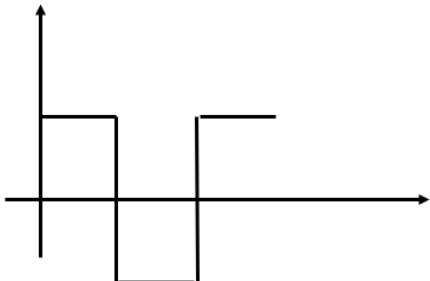
2. Generatori sinusoidali

Particolari funzioni periodiche a valor medio nullo sono le ben note funzioni sinusoidali e cosinusoidali:

È facile verificare che il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari al suo valor massimo diviso la radice di 2 e che il suo valor medio in un semiperiodo è pari al valor massimo moltiplicato per $2/\pi$. L'argomento della funzione sinusoidale viene detto fase istantanea della funzione stessa mentre ϕ prende il nome di fase iniziale.

Per le funzione periodiche si può dimostrare un'importante proprietà che prende il nome di sviluppo in serie di Fourier. Tale proprietà consente di porre

una qualsiasi funzione periodica $a(t)$ come somma di infiniti termini del tipo $A_n \sin(n\omega t)$ ed $B_n \cos(n\omega t)$, con n intero ed $\omega = 2\pi/T$ = frequenza angolare, o spesso, per brevità, solo frequenza.



$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega t + \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(\omega t + \phi)$$

In realtà si preferisce conservare al termine frequenza il significato di inverso del periodo per cui $f=1/T=\omega/2\pi$; da cui il nome di frequenza angolare per ω . Dalla formula dello sviluppo di Fourier si può facilmente calcolare che il coefficiente A_0 è il valore medio della grandezza periodica.

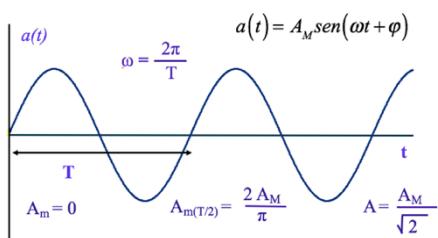
$$A_0 = \int_0^T a(t) dt$$

E che i coefficienti A_n e B_n sono, rispettivamente, le medie pesate secondo le funzioni seno e coseno della funzione periodica da sviluppare.

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \sin n\omega t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \cos n\omega t dt$$

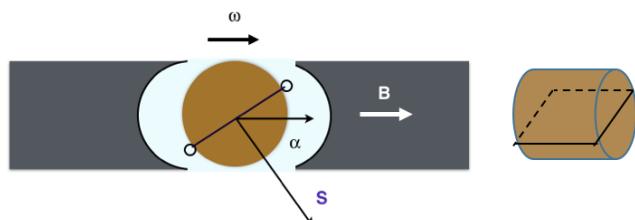
Per la funzione rettangolare mostrata in figura, per esempio, lo sviluppo in serie è, come si può facilmente dimostrare:



$$a(t) = \frac{4}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{2n+1}$$

Se siamo in regime lineare, se cioè è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, una volta noto il comportamento di un sistema quando in esso tutte le

grandezze variano con legge sinusoidale, è possibile ricavare il comportamento del sistema, utilizzando appunto la sovrapposizione degli effetti, in condizioni di variabilità temporale diverse.



$$\Phi(t) = BS \cos \alpha = BS \cos(\omega t) \quad e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$e(t) = -\omega BS \sin(\omega t)$$

Un altro motivo che ci spinge a focalizzare la nostra attenzione sui generatori

ideali di tipo sinusoidale, altrettanto importante, è, potremmo dire, di carattere essenzialmente pratico. Infatti sarebbe facile far vedere, utilizzando la legge di Faraday-Neumann, che il modo più naturale, in linea di principio, per costruire un generatore di f.e.m. è quello di far ruotare una spira conduttrice in un campo magnetico. Se il campo è uniforme, e la velocità angolare di rotazione della spira è costante, la forza elettromotrice che ne scaturisce è di forma d'onda sinusoidale. Naturalmente, le cose sono molto più complesse di quanto una descrizione così sintetica possa far immaginare; ma, al fondo, è questo uno dei principali motivi per cui la produzione della energia elettrica si realizza in regime sinusoidale.

3. RL con forzamento sinusoidale

Consideriamo, per esempio, il circuito RL serie che abbiamo già preso in considerazione, e supponiamo che esso sia alimentato da un generatore di tensione sinusoidale $e(t) = E_M \sin(\omega t + \eta)$. È necessario assumere una fase iniziale $\eta \neq 0$ in quanto l'origine dei tempi è già stata fissata quando si è assunto che l'interruttore viene chiuso a $t=0$.

È facile scrivere l'equazione che esprime la LKT all'unica maglia presente.

La soluzione dell'omogenea associata sarà ancora del tipo $ke^{-Rt/L}$, ma non possiamo più supporre che la soluzione particolare sia costante, in quanto il forzamento non è costante. Possiamo, però, utilizzare lo stesso modo di ragionare che ci ha portato a trovare la soluzione particolare quando il generatore di tensione era continua. In fondo nel caso del forzamento costante abbiamo cercato una soluzione particolare che avesse le stesse caratteristiche del forzamento, e cioè costante. Nel caso del forzamento sinusoidale possiamo cercare una soluzione particolare che sia dello stesso tipo, cioè sinusoidale:

$$i_r = I_M \sin(\omega t + h - j)$$

Basterà inserire tale espressione nell'equazione e ottenere:

$$\omega I_M \sin\left(\omega t + h - j + \frac{p}{2}\right) + \frac{R}{L} I_M \sin(\omega t + h - j) = \frac{E_M}{L} \sin(\omega t + h)$$

Ben note formule trigonometriche, (formula dell'angolo aggiunto),

$$A_M \sin(\omega t + a) + B_M \sin(\omega t + b) = C_M \sin(\omega t + g)$$

con

$$C_M^2 = A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(a - b)$$

$$g = \arctg\left(\frac{A_M \sin a + B_M \sin b}{A_M \cos a + B_M \cos b}\right)$$

ci permettono di scrivere la soluzione nella forma:

$$i_r = I_M \sin(\omega t + h - j)$$

con

$$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (WL)^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{WL}{R}$$

A questo punto si determina il valore della costante di integrazione imponendo la condizione iniziale:

$$i(0) = k + I_M \sin(\varphi - \varphi_0) = I_0$$

La soluzione trovata è ancora una volta somma di un termine che tende a zero ed un termine che, invece, si ripete periodicamente: la soluzione a regime permanente.

$$i(t) = k e^{-\frac{R}{L}t} + I_M \sin(Wt + \varphi - \varphi_0)$$

Anche il regime stazionario, da cui abbiamo preso le mosse, può dunque essere interpretato come un regime permanente in cui i generatori, stazionari appunto, abbiano preso il sopravvento, e si sia persa traccia di un termine transitorio ormai estintosi nel tempo.

Resta il fatto che il calcolo della soluzione permanente in regime sinusoidale è più complicato sul piano operativo.

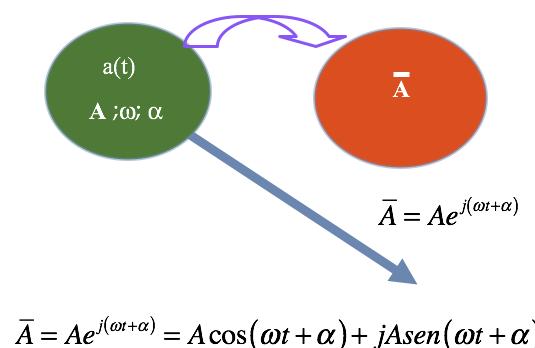
4. Il metodo simbolico

Siamo dunque alla ricerca di una tecnica che ci consenta di semplificare le operazioni sulle grandezze sinusoidali. Osserviamo che nelle equazioni relative alla LKC ed alla LKT intervengono essenzialmente le seguenti operazioni: a) moltiplicazione per una costante, come nella caratteristica di un resistore, b) somma, come nella somma dei vari termini in una equazione, c) derivata, come nelle caratteristiche di induttori e condensatori.

Immaginiamo ora di trovare un insieme di grandezze, che chiameremo insieme delle \bar{A} - mentre chiameremo "a" l'insieme delle funzioni sinusoidali di pulsazione ω - e supponiamo che esista una corrispondenza biunivoca che metta in relazione ogni elemento di a con uno di \bar{A} .

Supponiamo anche che tale corrispondenza conservi le operazioni che abbiamo in precedenza elencato.

Con questa affermazione intendiamo che se il risultato di una determinata operazione - per



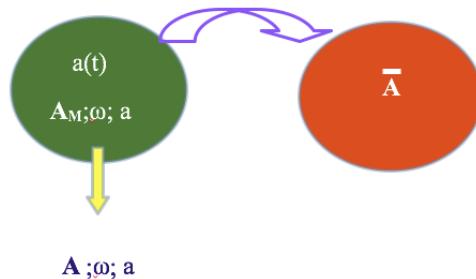
esempio la somma - fatta su elementi di "a" è un certo elemento "c", allora il risultato della operazione corrispondente - simbolo \oplus - fatta sugli elementi corrispondenti di \bar{A} fornisce proprio l'elemento di \bar{A} associato a "c". Dunque, se esiste un tale insieme ed una tale applicazione, e se operare su \bar{A} risulta più agevole che operare

su "a", si potrà in ogni caso trasformare tutte le grandezze di "a" nelle corrispondenti di \bar{A} , operare su queste e, una volta ottenuto il risultato, ritornare in "a" mediante l'applicazione inversa.

Orbene, facciamo vedere che l'insieme di tutte le funzioni complesse di variabile reale del tipo $Ae^{j(\omega t + \alpha)}$ è un possibile candidato insieme \bar{A} . Infatti, dato che ogni elemento di "a" del tipo $a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$ dipende da tre parametri, e precisamente A_m , ω ed α , e che lo stesso accade per ogni elemento di \bar{A} (perché $\bar{A} = Ae^{j(\omega t + \alpha)}$), è evidente che tra gli insiemi "a" e \bar{A} descritti esiste

una corrispondenza biunivoca se ad ogni valore A_M facciamo corrispondere un opportuno valore A . Naturalmente la scelta più immediata sarebbe di porre $A = A_M$. Per motivi che saranno chiari in seguito, si preferisce porre $A = A_M/\sqrt{2}$, cioè pari al valore efficace della corrispondente grandezza sinusoidale invece che al suo valore massimo.

Notiamo che, per la formula di Eulero, si può affermare che l'applicazione introdotta fa corrispondere ad ogni elemento di \bar{A} un elemento di "a" che, a meno del fattore $\sqrt{2}$, coincide con il coefficiente della parte immaginaria di \bar{A} .



Che una tale applicazione conservi le operazioni che abbiamo elencato in precedenza, è cosa semplice da dimostrare.

Per quanto riguarda la moltiplicazione per una costante, il fatto è di per sé evidente:

$$R\bar{A} = RAe^{j(\omega t + \alpha)} = RA \cos(\omega t + \alpha) + jRA \sin(\omega t + \alpha)$$

Come pure per la somma:

$$a(t) + B(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) + B_M \sin(\omega t + \beta) + j(A \sin(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \beta))$$

Ma anche per quel che riguarda la derivazione la corrispondenza si mantiene. Infatti si ha:

$$\frac{d}{dt} A_M \sin(\omega t + \alpha) = \omega A_M \cos(\omega t + \alpha)$$

e

$$\frac{d}{dt} Ae^{j(\omega t + \alpha)} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) + j\omega A \cos(\omega t + \alpha)$$

Notiamo che, invece, la moltiplicazione tra due elementi di \bar{A} , non si conserva. Si ha infatti

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} B e^{j(\omega t + \beta)} = A \cos(\omega t + \alpha) B \cos(\omega t + \beta) - A \sin(\omega t + \alpha) B \sin(\omega t + \beta) + \\ j[A \cos(\omega t + \alpha) B \sin(\omega t + \beta) + B \cos(\omega t + \beta) A \sin(\omega t + \alpha)]$$

Luciano De Menna - Regimi sinusoidali

In conclusione in regime sinusoidale si può così operare: in primo luogo si trasformano tutte le grandezze - tensioni e correnti che variano con legge sinusoidale - nelle corrispondenti funzioni complesse del tipo $Ae^{j(\omega t+\alpha)}$. D'ora in poi useremo il termine fasori per tali grandezze e conserveremo il simbolo \bar{A} per indicarle.

Successivamente si scrivono le equazioni che rappresentano le condizioni imposte dalla LKC e dalla LKT, tenendo conto delle caratteristiche dei singoli bipoli - espresse in termini di fasori - e ricordando che ogni operazione di derivazione equivale ad una moltiplicazione per $j\omega$. Così facendo le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche ed è, dunque, semplice risolverle, ricavando i fasori rappresentativi delle grandezze incognite. A questo punto si può ritornare alle funzioni sinusoidali e determinare le grandezze incognite nel dominio del tempo.

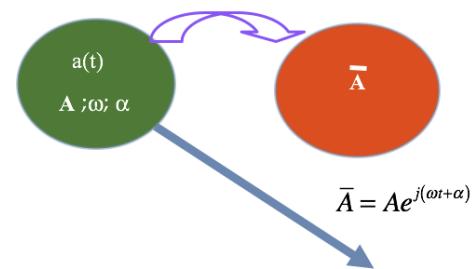
Val a pena di osservare che non ha senso compiere operazioni che coinvolgano elementi di a e di \bar{A} , come, per esempio $a(t) + \bar{A}$.

1. Vettori rotanti

Notiamo che, per la formula di Eulero, si può affermare che l'applicazione introdotta fa corrispondere ad ogni elemento di \bar{A} un elemento di "a" che, a meno del fattore $\sqrt{2}$, coincide con il coefficiente della parte immaginaria di \bar{A} .

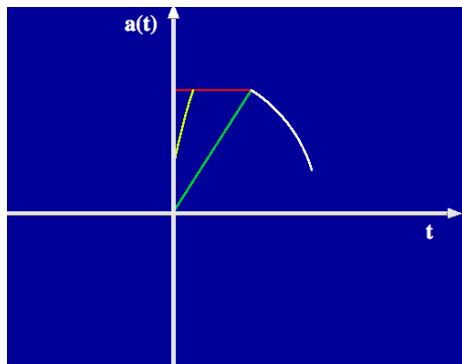
Che una tale applicazione conservi le operazioni che abbiamo elencato in precedenza, è stato già dimostrato.

Prima di procedere oltre, facciamo vedere



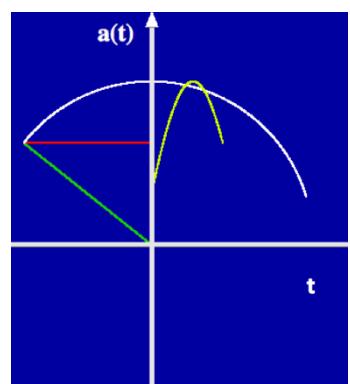
$$\bar{A} = Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha)$$

perché il termine "fasori". La parte reale ed il coefficiente dell'immaginario delle grandezze \bar{A}



variano nel tempo con legge sinusoidale, mentre il modulo di \bar{A} resta costante nel tempo. Di conseguenza nel piano di Gauss il punto rappresentativo della funzione complessa di variabile reale \bar{A} si muove lungo una circonferenza (in bianco in figura). Se consideriamo un vettore (in verde in figura) che congiunge l'origine delle coordinate con il punto rappresentativo di \bar{A} , potremo dire che le grandezze in esame sono rappresentate da vettori rotanti nel piano di Gauss: perciò il termine "fasori".

Come si vede, la tecnica che abbiamo costruito semplifica notevolmente tutte le operazioni. In pratica, per un circuito in regime sinusoidale, basterà scrivere direttamente le equazioni relative alla LKC ed alla LKT in termini di fasori, esprimendo anche le caratteristiche dei bipoli presenti nella rete come relazioni tra fasori, così come mostrato nelle immagini. Il rapporto tra i due fasori rappresentativi della tensione e della corrente prende il nome di impedenza e verrà indicato d'ora in poi con il simbolo Z.



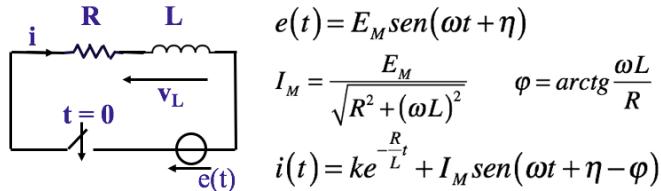
2. RL con forzamento

Proviamo ad applicare il metodo dei fasori al circuito RL serie già risolto in precedenza. Si scrive l'equazione all'unica maglia presente in termini di fasori. Con facili passaggi si ricava immediatamente il fasore della corrente. Il modulo del numero complesso rappresentativo della corrente è, dunque, il rapporto tra il modulo del fasore di $e(t)$ e del numero complesso $R + j\omega L$ e la sua fase è la differenza tra le fasi del numeratore e del denominatore. I risultati sono in perfetto accordo, se si tiene conto della relazione tra valor massimo e valor efficace di una funzione sinusoidale, con i risultati già trovati.

3. RLC a regime

Proviamo ad applicare il metodo dei fasori per calcolare la soluzione di regime in un caso più complesso: il circuito RLC serie con forzamento sinusoidale. La soluzione dell'omogenea

associata è già nota; limitiamoci quindi a calcolare la soluzione a regime con il metodo dei fasori.



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L} \rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \quad \eta - \arctg \frac{\omega L}{R} = \eta - \varphi$$

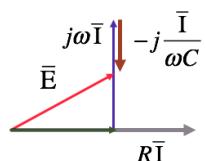
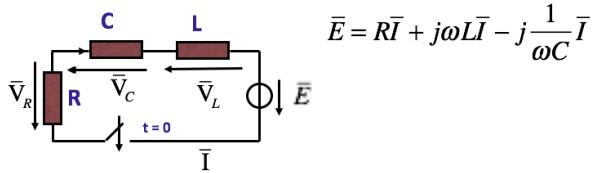
Dall'equazione alla maglia scritta in termini fasoriali si ricava immediatamente, con semplici passaggi algebrici, il fasore della corrente.

E quindi il valore massimo della i e la sua fase iniziale.

Da cui l'integrale generale della completa.

4. Impedenze

In conclusione, la soluzione nel regime sinusoidale si trova facilmente se si introduce il

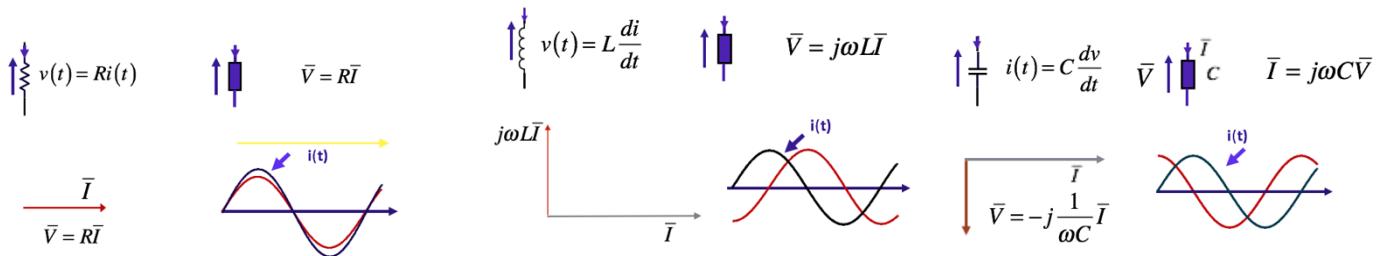


concetto di impedenza: un numero complesso la cui parte reale chiameremo resistenza e quella immaginaria reattanza. In termini fasoriali l'impedenza gioca lo stesso ruolo che in continua giocava la sola resistenza.

Invece della impedenza potremo utilizzare

l'ammettenza, che giocherà lo stesso ruolo che in continua giocava la sola conduttanza.

Il diagramma fasoriale del circuito RLC si costruisce partendo dal fasore della corrente.



Riepiloghiamo nella figura le caratteristiche dei diversi componenti nei rispettivi ambiti: nel dominio del tempo, quello dei fasori e dei fasori come vettori. Aggiungiamo anche il grafico dell'andamento nel tempo di tensione e corrente. Si noti che per il resistore le due sinusoidi sono in fase!

Per l'induttore, la tensione "anticipa" di $\pi/2$ rispetto alla corrente, e per il condensatore, la tensione "ritarda" di $\pi/2$ rispetto alla corrente.

5. Proprietà delle reti in a.c.

Con la sola eccezione dei teoremi di non amplificazione, tutte le proprietà dimostrate in regime continuo restano valide in regime sinusoidale, ma in termini di fasori.

Bisognerà, naturalmente, ricordare che i fasori e le impedenze o ammettenze sono numeri complessi, e quindi bisognerà operare di conseguenza.

Ricordiamo le operazioni fondamentali nella rappresentazione cartesiana, ed in quella polare.

In forma cartesiana

$$(a + jb) + (c + jd) = a + c + j(b + d)$$

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

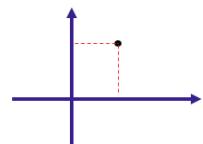
$$\frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

In forma polare

$$(a + jb) = Ae^{j\alpha}, \text{ con } A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$Ae^{j\alpha}Be^{j\beta} = AB e^{j(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}$$



Serie

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$Y = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

Avremo dunque le formule per la serie ed il parallelo di due impedenze.

Parallelo

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

E naturalmente, anche per le ammettenze!

Potremo estendere quindi al campo dei fasori le diverse tecniche ed i teoremi studiati per il regime continuo.

Potremo definire N-poli ed n-bipoli di impedenze, e avremo quindi, per il doppio dipolo per esempio, la matrice delle Z e quella delle Y.

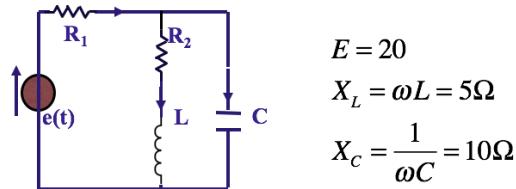
N-poli ed n-bipoli di impedenze.

Matrice delle impedenze Matrice delle ammettenze

$$\begin{array}{ll} \bar{V}_1 = Z_{11}\bar{I}_1 + Z_{12}\bar{I}_2 & \bar{I}_1 = Y_{11}\bar{V}_1 + Y_{12}\bar{V}_2 \\ \bar{V}_2 = Z_{21}\bar{I}_1 + Z_{22}\bar{I}_2 & \bar{I}_2 = Y_{21}\bar{V}_1 + Y_{22}\bar{V}_2 \end{array}$$

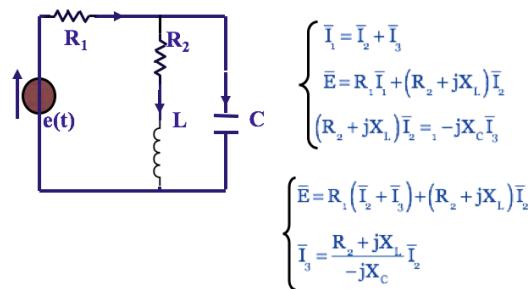
6. Esercizi

Proviamo a fare un esempio: il circuito.



**Due equazioni alle maglie;
Una equazione ai nodi.**

Le leggi di K, e le equazioni:

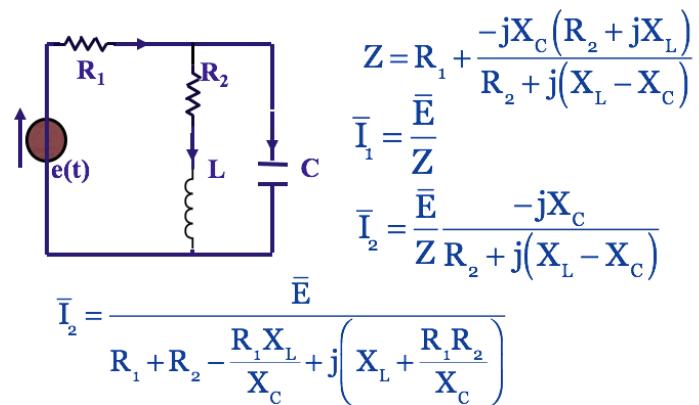


Eliminando i_1 si riducono a due.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \left[R_1 + R_2 - \frac{R_1 X_L}{X_C} + j \left(X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C} \right) \right] \bar{I}_2 & E &= 20 \\ & X_L & X_L &= \omega L = 5\Omega \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{E}}{\left[R_1 + R_2 - \frac{R_1 X_L}{X_C} + j \left(X_L + \frac{R_1 R_2}{X_C} \right) \right]} & X_C &= \frac{1}{\omega C} = 10\Omega \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{E}}{10 + j10} = \frac{\bar{E}}{10\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} & i_2(t) &= 2 \sin\left(100t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Eliminando poi i_3 si ottiene il fasore di i_2 e quindi il suo andamento temporale.

Avremmo anche potuto usare la riduzione ad una unica impedenza, vista dal generatore, per poi ripartire la corrente per ottenere la corrente cercata.



A regime

1. Potenza in regime sinusoidale

Anche in regime sinusoidale, naturalmente, il prodotto $v(t)i(t)$ della tensione ai morsetti di un

bipolo e della corrente che lo attraversa rappresenta, istante per istante, la potenza assorbita dal bipolo - convenzione dell'utilizzatore. Si noti che solo per il resistore tale potenza - che d'ora in poi chiameremo potenza istantanea - è sempre positiva; per l'induttore e per il condensatore, invece, la potenza è positiva in un semiperiodo -

$$\begin{aligned} \sum_k v_k(t) i_k(t) &= 0 && \text{Tellegenn} \\ p(t) &= v(t)i(t) = V_M \sin(\omega t) I_M \sin(\omega t - \phi) = \\ &= VI [\cos\phi + \sin(2\omega t - \phi - \pi/2)] \\ P &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt = VI \cos\phi && \text{Potenza attiva} \\ P &= \bar{V} \cdot \bar{I} \end{aligned}$$

pari ad un quarto del periodo di tensione e corrente - e negativa nel successivo.

In virtù del teorema di Tellegen la somma di tali prodotti estesa a tutti i rami di una rete è identicamente nulla.

Il che ci dice che in ogni istante la potenza assorbita è uguale a quella generata o fornita - si ricordi che ora nella rete ci sono bipoli passivi che sono in grado di fornire energia per un intervallo di tempo, a patto che l'abbiano assorbita in un intervallo precedente.

Nel caso particolare di un regime sinusoidale si ottiene facilmente che la potenza è la somma di un termine costante, pari al prodotto del valore efficace di tensione e corrente per il coseno dell'angolo ϕ tra i due fasori, più un termine oscillante di frequenza 2ω . Dato che il termine oscillante ha valor medio nullo, il valore medio della potenza istantanea è pari a $VI\cos\phi$. Ciò giustifica la nostra scelta di utilizzare il valore efficace quale modulo del fasore rappresentativo di tensioni e correnti. Con questa scelta, se si dà all'operatore prodotto scalare tra due fasori l'usuale significato di prodotto dei moduli dei vettori per il coseno dell'angolo che essi formano, si può affermare che in regime sinusoidale la potenza media è pari al prodotto scalare del fasore della tensione per quello della corrente. La potenza media viene anche detta potenza attiva.

Poiché però il sistema dei fasori rappresentativi delle tensioni sui lati e delle correnti nei rami soddisfano anche essi alle leggi di Kirchhoff, si può affermare che anche la somma di tutti i prodotti

tra i fasori di tensione e corrente, estesa all'intera rete, deve essere identicamente nulla. Con facili passaggi si può sviluppare il generico termine, ma il risultato non è particolarmente significativo. Più interessante è invece il caso in cui al posto dei fasori rappresentativi delle correnti si utilizzano i rispettivi coniugati. È evidente infatti che anche tali coniugati - in cui, si ricorderà, cambia solo il segno della parte immaginaria - debbono sottostare alla prima legge di Kirchhoff. Si definisce in questo modo una "potenza complessa" la cui somma è globalmente nulla.

Si noti che la parte reale di tale potenza

$$\sum_k \bar{V}_k \tilde{I}_k = \sum_k V_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} I_k e^{-j(\omega t + \alpha_k - \varphi_k)} = 0$$

$$\bar{V}_k \tilde{I}_k = V_k I_k (\cos \varphi_k + j \sin \varphi_k)$$

$$P_k = V_k I_k \cos \varphi_k \quad \text{Potenza attiva}$$

$$Q_k = V_k I_k \sin \varphi_k \quad \text{Potenza reattiva}$$

$$\sum_k V_k I_k \cos \varphi_k = 0 \quad \sum_k V_k I_k \sin \varphi_k = 0$$

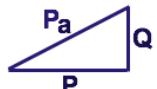
complessa è pari alla potenza media o attiva, che per questo viene detta anche potenza reale. Il coefficiente dell'immaginario è invece un nuovo tipo di potenza che incontriamo per la prima volta. La chiameremo potenza reattiva. Poiché l'annullamento di una somma di numeri complessi richiede che separatamente la somma delle parti reali e dei coefficienti delle parti immaginarie si annullino, si ottiene che non solo la potenza media deve conservarsi, cosa che già sapevamo, ma anche la potenza reattiva Q.

Chiameremo invece potenza apparente il semplice prodotto dei valori efficaci di tensione e corrente. Tre segmenti - non vettori, si badi bene - proporzionali a potenza attiva, potenza reattiva e potenza apparente rispettivamente, formano il così detto triangolo delle potenze.

La potenza apparente non si conserva, come risulta evidente da questo semplice esempio.

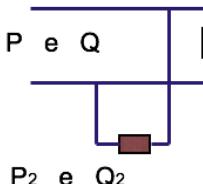
Potenza apparente

$$P_a = VI \quad P_a = \sqrt{P^2 + Q^2}$$



P_1 e Q_1

Triangolo delle potenze



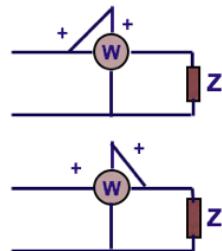
$$P_{1a} + P_{2a} = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$$

$$P_a = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2}$$

Abbiamo già visto come in regime dinamico si renda necessario un nuovo strumento di misura: l'oscillografo o oscilloscopio. Ma possiamo avere anche strumenti che misurano un aspetto particolare della forma d'onda della grandezza in esame: il valor massimo, il valor medio o il valore efficace.

Anche in regime sinusoidale i voltmetri vanno messi in parallelo e gli amperometri in serie.

Esistono però anche altri strumenti che misurano la potenza attiva wattmetri (più raramente quella reattiva varmetri).



Wattmetro
Varmetro

2. Sistemi di ordine superiore

Abbiamo già esaminato gli aspetti salienti della soluzione di una rete elettrica in regime dinamico qualsiasi; proviamo qui a riepilogarli. Sia data una rete con L lati ed N nodi, alimentata da generatori di tensione e corrente con evoluzione temporale qualsiasi, composta da bipoli resistivi, induttori e capacitivi le cui caratteristiche non variano nel tempo - la rete è tempo-invariante. Per determinare l'evoluzione temporale di tensioni e correnti dei singoli bipoli, a partire da un determinato istante iniziale t_0 - istante in cui sono note le tensioni sui condensatori e le correnti negli induttori - si scrivono $N-1$ equazioni ai nodi ed $L-(N-1)$ equazioni alle maglie imposte dalle leggi di Kirchhoff. Poiché le caratteristiche dei bipoli, in generale, esprimono legami differenziali tra tensioni e correnti, il sistema che ne deriva sarà di L equazioni differenziali lineari, se i bipoli presenti sono appunto lineari.

Mediante successive operazioni di sostituzione, ed eventuale differenziazione, si ricava dal sistema di partenza una unica equazione differenziale in una delle incognite in precedenza scelta; il grado dell'equazione sarà pari al numero di bipoli "a memoria" - induttori e condensatori - presenti nella rete. Quest'ultima affermazione andrebbe dimostrata; noi la consideriamo tale sulla base di una semplice considerazione di carattere fisico: se ciò non fosse vero il numero di condizioni iniziali assegnate non sarebbe adeguato alla soluzione del problema.

Naturalmente due condensatori in parallelo, o due induttori in serie, vanno contati come un unico componente; del resto, nei due casi, la condizione iniziale è unica!

L'integrale generale dell'omogenea associata, se le radici sono tutte distinte, sarà:

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^n A_r e^{\alpha_r t}$$

In presenza di radici coincidenti, la soluzione dell'omogenea ha una espressione diversa.

Nella formula riportata, per esempio, la radice k-esima ha molteplicità g_k .

$$y_0(t) = \sum_{r=1}^p A_r e^{\alpha_r t} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{g_k} B_{kr} t^{r-1} e^{\beta_k t}$$

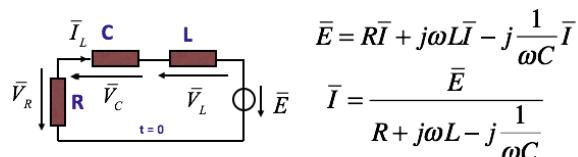
Naturalmente alcune di queste radici possono essere complesse coniugate, dando luogo ad oscillazioni.

La soluzione dell'equazione completa si ottiene aggiungendo all'integrale generale della equazione omogenea associata, una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per quanto riguarda la soluzione particolare della completa, abbiamo già visto come sia possibile determinarla quale soluzione a regime nei due casi in cui i generatori sono tutti costanti - regime continuo - o di tipo sinusoidale, tutti con la stessa frequenza - regime sinusoidale. Naturalmente il procedimento può essere esteso a regimi periodici di altro tipo. La soluzione generale così ottenuta, somma di quella dell'omogenea e della soluzione particolare, dipende dalle costanti A_r presenti nella soluzione della omogenea. A questo punto entrano in gioco le condizioni iniziali sulle grandezze di stato che, essendo proprio in numero pari al grado dell'equazione differenziale risultante, forniscono un adeguato numero di equazioni per determinare le costanti A_r .

3. Il circuito risonante

Abbiamo visto che in un circuito RLC serie, alimentato da un generatore di forza elettromotrice sinusoidale di frequenza angolare ω , si può verificare la condizione per cui la caduta capacitiva compensa perfettamente la caduta induttiva ed il circuito appare al generatore come puramente ohmico. Per assegnati valori di L e C, ciò accade quando $\omega L = 1/\omega C$, cioè per una frequenza del generatore pari ad $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, che è proprio la frequenza alla quale il circuito, in assenza di cause dissipative ($R = 0$), sarebbe in grado di oscillare liberamente. Siamo dunque nella già menzionata condizione di risonanza tra la frequenza del forzamento e quella



Al variare dei parametri L, R e C

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

propria del sistema. Un circuito di tal genere è detto anche circuito risonante.

Il fenomeno della risonanza, caratteristico di

qualsiasi sistema che abbia la capacità di oscillare su frequenze proprie, è molto importante anche dal punto di vista applicativo, specialmente nel campo

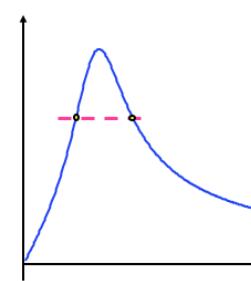
dei circuiti. Esaminiamolo dunque in maggior dettaglio. Supponiamo che, nel circuito risonante serie, il generatore di tensione sia a frequenza variabile; si possa cioè variare a piacimento tra 0 ed ∞ la frequenza della tensione che esso eroga.

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f(\omega) = \frac{I}{I_{\max}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Al variare della frequenza del generatore



$$\bar{E} = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

Riportiamo in un diagramma la curva del modulo della corrente I in funzione della frequenza; evidentemente tale diagramma è anche il diagramma dell'inverso del modulo della impedenza. Per $\omega = 0$, $I = 0$ perché il

condensatore a tale frequenza presenta una impedenza infinita; analogamente per ω che va all'infinito la corrente è nulla, questa volta per merito dell'induttore.

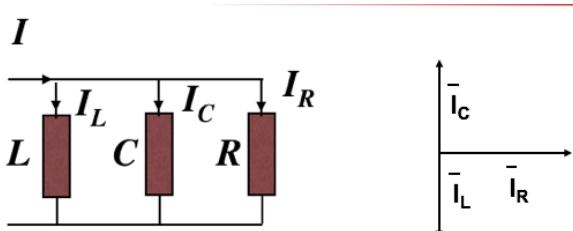
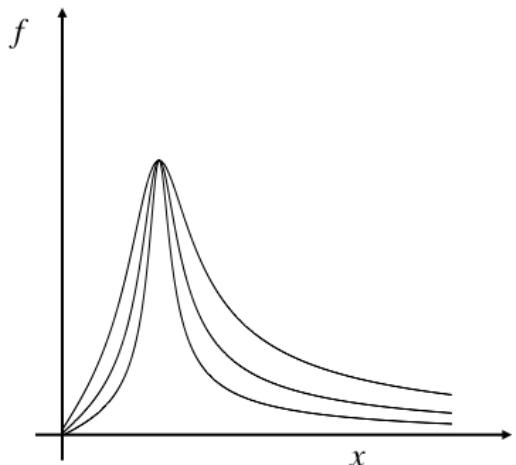
Con qualche semplice passaggio, con le posizioni fatte, possiamo trovare l'espressione della funzione $f(\omega/\omega_0) = f(x) = I/I_{\max}$, il cui diagramma prende il nome di curva di risonanza.

Infatti, introducendo il fattore $Q = \omega_0 L/R$ e inserendolo nella espressione di $f(\omega)$, ponendo $x = \omega/\omega_0$ si trova agevolmente la funzione $f(x)$ cercata.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

Il parametro Q , prende il nome di fattore di qualità o di merito del circuito. All'aumentare del fattore di qualità del circuito, la curva di risonanza diventa sempre più ripida nell'intorno della frequenza di risonanza ω_0 , come mostrato in figura, dove sono disegnate curve di risonanza per diversi valori di Q .

Perché Q venga detto "fattore di qualità", lo si comprende facilmente considerando la seguente situazione. Si immagini che la tensione del generatore non sia sinusoidale ma periodica. Una tale tensione può essere scomposta in una somma di infiniti termini sinusoidali di frequenza diversa. Vediamo il circuito come un doppio bipolo che abbia in ingresso il generatore e dal quale si prelevi in uscita la tensione sul



$$Y = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} + j \omega C$$

$$f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{I_R}{I}$$

resistore R . Evidentemente, per la sovrapponibilità degli effetti, anche la tensione in uscita può essere vista come somma delle risposte alle singole armoniche. D'altra parte ogni armonica della tensione in ingresso vede una diversa impedenza a causa della diversa frequenza. Se ne conclude che le ampiezze

Luciano De Menna - Potenza e Risonanza

delle armoniche con frequenze vicine a quella di risonanza risulteranno amplificate rispetto alle altre e quindi il circuito funziona come filtro e la sua "qualità" come tale è misurata proprio dal fattore Q.

Del tutto equivalente è il caso del circuito RLC parallelo, a volte detto anche antirisonante.

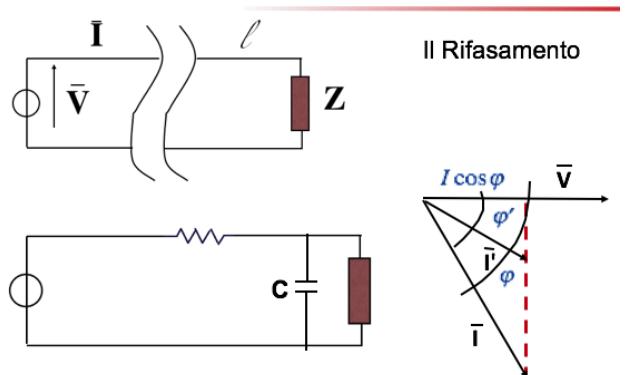
In esso la corrente erogata dal generatore, che è somma delle tre correnti rispettivamente nell'induttore, nel resistore e nel condensatore, è uguale alla sola corrente nel resistore perché le altre due si compensano, essendo eguali ed opposte. Mentre nel circuito serie, in assenza della resistenza R, l'impedenza risultante è nulla, nel circuito parallelo, in assenza di resistenza (questa volta R è infinitamente grande), l'impedenza è infinita. Si noti che nel circuito antirisonante senza perdite, pur essendo la corrente totale fornita dal generatore identicamente nulla, non sono nulle le correnti nell'induttore e nel condensatore, che si calcolano agevolmente come rapporto tra tensione applicata e relativa impedenza.

La curva di "antirisonanza" sarà in questo caso quella della funzione $f(x)=I_R/I$.

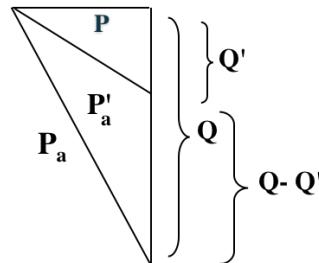
4. I componenti reali in A.C.

La necessità di lunghe linee di trasmissione dell'energia elettrica che collegano i luoghi della generazione con quelli della utilizzazione e la presenza di una inevitabile dissipazione in linea dovuta alla resistenza dei conduttori, ha anche altre interessanti conseguenze che cercheremo ora di illustrare in maniera molto elementare.

Consideriamo un carico che sotto una determinata tensione \bar{V} , assorbe una potenza attiva P ed una potenza reattiva Q . Supponiamo ancora che la fase della impedenza equivalente del carico, $\phi = \arctg(Q/P)$, sia positiva (carico prevalentemente induttivo), come in realtà si verifica nella maggioranza dei carichi industriali. Il diagramma fasoriale corrispondente alla situazione descritta è rappresentato a lato.



Nella figura è rappresentata anche una diversa condizione di



funzionamento in cui la stessa potenza attiva P è assorbita con una differente potenza reattiva Q' . La potenza attiva è la stessa nei due casi perché la componente $I \cos \phi$ del fasore rappresentativo della corrente, non è variata. Il fatto è ancora più chiaro se si considera il triangolo delle potenze nei due casi considerati, così come mostrato in figura. È evidente però che, nei due casi, è diverso il modulo della corrente I , e quindi diverse sono le potenze dissipate lungo la linea che collega il carico ai generatori che lo alimentano. Tali potenze, infatti, sono proporzionali al quadrato del modulo della corrente secondo un fattore R che rappresenta, appunto, la resistenza equivalente della linea.

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

Queste perdite potrebbero, dunque, essere ridotte se si disponesse in parallelo al carico un secondo carico, puramente reattivo - nelle nostre ipotesi, capacitivo - in grado di assorbire una potenza reattiva pari a $(Q - Q')$; ciò senza variare in alcun modo la potenza attiva assorbita dal carico stesso. In tali condizioni il carico si dirà rifasato da $\cos\varphi$ a $\cos\varphi'$. In pratica con il rifasamento si evita che l'energia immagazzinata nel carico, che, come è noto, oscilla tra un punto di massimo ed uno di nullo, venga continuamente trasferita lungo la linea, avanti ed indietro, con le conseguenti perdite; l'aver disposto un "serbatoio di energia" in controfase in prossimità del carico, consente che tale scambio di energia avvenga tra il "serbatoio" ed il carico e non tra i generatori ed il carico stesso.

Gli Enti produttori di energia elettrica, interessati a questo risparmio di energia, cercano di favorire l'uso di tale tecnica adottando opportune politiche contrattuali e tariffarie. In pratica l'energia utilizzata viene fatturata a prezzi diversi a seconda del $\cos\varphi$, quando esso scende al di sotto di un certo valore. In Italia tale valore è $\cos\varphi = 0,9$.

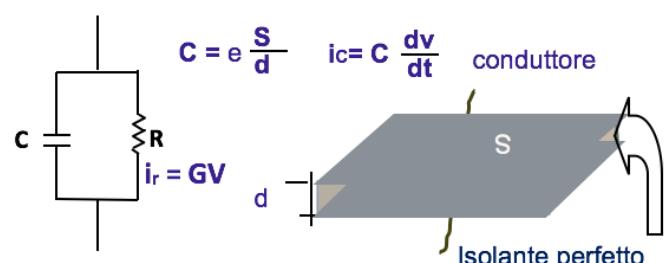
In conclusione il problema del rifasamento si riduce al calcolo della capacità del banco di condensatori da disporre in parallelo al carico per assorbire la richiesta potenza reattiva e quindi ottenere il voluto rifasamento.

Abbiamo già visto come si può realizzare un condensatore. Anche in questo caso avremo problemi simili a quelli del resistore: useremo bande colorate per indicarne il valore, avremo dimensioni e costi diversi per le diverse precisioni richieste. C'è però una ulteriore considerazione da fare. Il dielettrico interposto tra le armature del condensatore non potrà certo essere perfetto. Ne consegue che dovremo tener conto di una corrente che lo attraversa e quindi

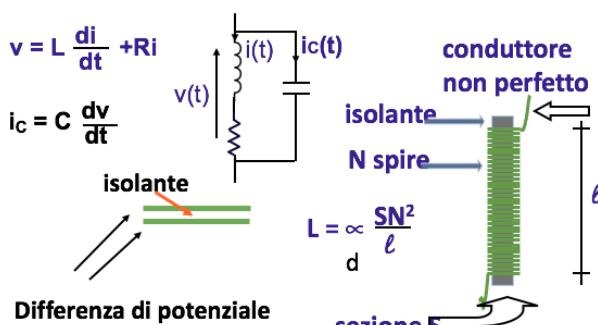
$$Q_c = -(Q - Q') = -P(\tan\varphi - \tan\varphi')$$

$$Q_c = -\frac{V^2}{X_c} = -\omega CV^2$$

$$C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega V^2}$$



di una certa dissipazione. Converrà allora prendere in considerazione un circuito equivalente del condensatore del tipo mostrato in figura.



Analogamente per l'induttore dovremo tenere in conto una resistenza in serie perché il conduttore di cui è fatto l'avvolgimento non potrà essere perfetto.

Inoltre le spire che compongono l'avvolgimento, dovendo essere isolate le une

dalle altre - altrimenti la corrente segue il percorso dell'avvolgimento - daranno luogo ad una capacità tra spira e spira, come mostrato in figura, dove sono rappresentate due spire ed il relativo isolante interposto. E quindi il circuito equivalente dell'induttore sarà quello mostrato. Naturalmente, di regola R e C saranno di valore molto ridotto.

I realtà, quindi, un induttore è sempre un circuito R, L e C e per questo motivo è lecito parlare del fattore Q di un induttore.

1. Il grafo orientato della rete

Come abbiamo più volte rilevato, le informazioni contenute in una rete elettrica sono di due tipologie distinte. In primo luogo la rete descrive un particolare modo di connettere bipoli tra

$$a_{ij} = \begin{cases} = +1 & \text{se il ramo } j \text{ esce dal nodo } i; \\ = -1 & \text{se il ramo } j \text{ entra nel nodo } i; \\ = 0 & \text{se il ramo } j \text{ non interessa il nodo } i. \end{cases}$$

di loro; tale descrizione è contenuta in quello che abbiamo detto grafo della rete. In secondo luogo deve essere fornita la particolare natura di ogni bipolo presente nei rami della rete; in altre parole debbono

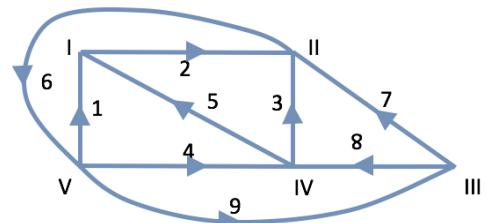
essere note le caratteristiche dei bipoli. Queste informazioni contenute nello schema di una rete possono essere mantenute distinte e trattate separatamente.

Cominciamo dal grafo della rete e poniamoci il problema di fornire le informazioni in esso contenute in una maniera diversa. Costruiamoci una matrice A_c , di n righe ed L colonne, il cui generico elemento a_{ij} sia così come mostrato nella figura a lato.

È chiaro che una tale matrice, che prende il nome di matrice d'incidenza completa della rete, definisce univocamente il grafo orientato della rete stessa.

Non è difficile infatti costruire tale matrice per il grafo mostrato.

Né d'altra parte è difficile disegnare il grafo della rete in base alle informazioni contenute nella matrice.



2. Le leggi di Kirchhoff

Facendo uso della matrice di incidenza si possono esprimere le equazioni di Kirchhoff per la rete in forma matriciale. È facile verificare che il sistema di equazioni simbolicamente espresso dalla relazione $A_{cl} = 0$, (dove I è naturalmente il vettore colonna delle correnti nei rami), è il sistema di equazioni che esprime l'applicazione della prima legge di Kirchhoff agli N nodi della rete. Infatti in ognuna delle equazioni - per esempio quella relativa al nodo r (riga eresima) - la generica corrente I_k comparirà con il segno positivo, negativo o non comparirà affatto, a seconda che il ramo orientato k rispettivamente esca, entri o non interessi affatto il nodo r .

Una semplice applicazione al caso descritto dal grafo che stiamo usando come esempio potrà meglio chiarire quanto affermato.

Per esempio il prodotto della prima riga della matrice A_C con la colonna del vettore corrente fornisce:

$$\begin{vmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{vmatrix} \begin{matrix} T \\ E_I \\ E_{II} \\ E_{III} \\ E_{IV} \\ E_V \end{matrix} = \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{matrix}$$

$$-I_1 + I_2 - I_5 = 0$$

che è appunto l'equazione al nodo I.

Come sappiamo le equazioni di un tale sistema non sono tutte linearmente indipendenti; basta però eliminare una delle equazioni per ottenere $N-1$ equazioni indipendenti ai nodi. Ciò

equivale ad eliminare una riga della matrice di incidenza completa, per esempio quella relativa al nodo IV negli schemi mostrati, e considerare la matrice A di dimensioni $(N-1) \times L$. Tale matrice prende il nome di matrice di incidenza ridotta o semplicemente matrice di incidenza.

Con questo formalismo le equazioni indipendenti agli $N-1$ nodi saranno espresse dalla relazione $AI=0$.

Per quanto riguarda le LKT, abbiamo più volte osservato che esse risultano automaticamente soddisfatte se si esprimono le tensioni sui lati come differenza di potenziale nei nodi. Se il lato k, per esempio, insiste tra il nodo r ed il nodo s, si avrà $V_k = E_r - E_s$, dove E_r ed E_s sono i potenziali dei nodi r ed s rispetto ad un riferimento preso ad arbitrio. In particolare possiamo scegliere, come riferimento, il potenziale del nodo per il quale si è scelto di non scrivere la corrispondente equazione ai nodi. In tal modo le L tensioni di lato V_k saranno esprimibili attraverso

$$\begin{array}{c} \text{Diagram showing a network with 9 nodes (I-IX) and 8 branches. Nodes I, II, III, IV, V are arranged in a circle, while VI, VII, VIII, IX are internal. Arrows indicate branch directions. Below the diagram is a matrix equation } \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \end{array} \right] = \mathbf{A}^T \mathbf{I} = 0 \end{array}$$

gli $N-1$ potenziali ai nodi E_r . Definiamo, a questo punto, il vettore colonna E dei potenziali degli $N-1$ nodi, per i quali abbiamo scritto le LKC, rispetto al restante nodo preso come riferimento.

È facile convincersi che, in queste condizioni, le L relazioni, che esprimono le

tensioni di lato in funzione dei potenziali ai nodi, hanno l'espressione matriciale indicata, dove A^T è la matrice, di dimensioni $L \times (N-1)$, trasposta di A . Infatti nella espressione della generica V_k , fornita dalla (III.13), compariranno i potenziali dei due nodi a cui il lato k afferisce, con il segno positivo o negativo a seconda dell'orientazione del lato k stesso; se, in particolare il lato k è connesso al nodo di riferimento, nella sua espressione comparirà soltanto il potenziale dell'altro nodo, essendo il nodo di riferimento a potenziale 0 per costruzione. Si noti che nella figura, per comodità grafica, si è indicata la matrice trasposta individuandola con quel simbolo T a esponente questo significa che nella matrice disegnata bisogna immaginare di scambiare righe con colonne.

Anche in questo caso la semplice verifica delle affermazioni fatte per il caso della rete descritta dal grafo in esame, potrà essere illuminante. Si ricordi che la matrice trasposta di A_C ha L righe (nel nostro caso 9) e N colonne (nel nostro caso 5).

In simboli, dunque, la seconda legge di K. ci fornisce le equazioni alle maglie espresse da $A_C^T E = V$.

Che può anche essere scritte in funzione della matrice A ridotta se si tiene conto che il potenziale di uno dei nodi (nel nostro caso il nodo IV) è stato posto uguale a zero.

In conclusione, ecco le equazioni di Kirchhoff in forma matriciale:

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{A}^T\mathbf{E} = \mathbf{V}$$

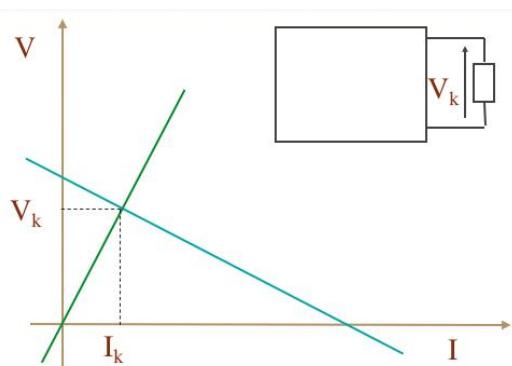
3. I bipoli

Affrontiamo ora il problema della descrizione della generica caratteristica di lato. I teoremi del generatore equivalente di f.e.m. e di corrente ci consentono di assumere che ogni lato della rete sia riconducibile, indifferentemente, o ad un generatore ideale di f.e.m. con una resistenza in serie, o ad un generatore ideale di corrente con una conduttanza in parallelo, così come mostrato. È facile infatti passare dall'una all'altra espressione applicando il teorema di Thevenin o quello di Norton.

In altri termini per passare da una rappresentazione all'altra basta porre $I_{0k} = E_{0k}/R_k$ ed $G_k = 1/R_k$. Quest'ultima osservazione evidenzia, in realtà, un problema: esistono due casi limiti in cui la trasformazione non è possibile ed i teoremi di equivalenza non consentono di passare da un ramo con generatore ideale di f.e.m. ad un ramo con generatore ideale di corrente. Sono evidentemente i due casi del generatore ideale di f.e.m. senza resistenza in serie e quello del generatore ideale di corrente senza conduttanza in parallelo. Nel primo caso, infatti, l'applicazione del teorema di Norton ci porterebbe alla necessità di porre il generatore ideale di f.e.m. in corto circuito, per calcolare la corrente di corto circuito ai morsetti AB, il che, come sappiamo, è contraddittorio. Del resto la stessa relazione $G_k = 1/R_k$ perde di significato se il denominatore è nullo.

Se ne conclude che non è possibile trasformare un generatore ideale di f.e.m. in uno di corrente e viceversa, quando essi siano da soli nel

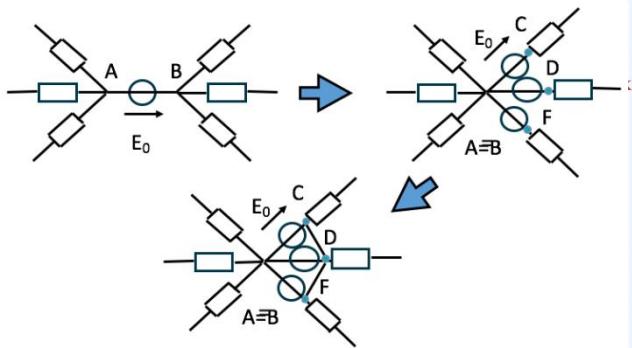
ramo in esame. Poiché nel seguito ci sarà utile poter assumere per il generico lato k indifferentemente una delle due caratteristiche, facciamo vedere come tali situazioni limiti siano in realtà non essenziali ed eliminabili. Ci sarà utile allo scopo fare uso del così detto teorema di sostituzione. Tale teorema afferma



Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

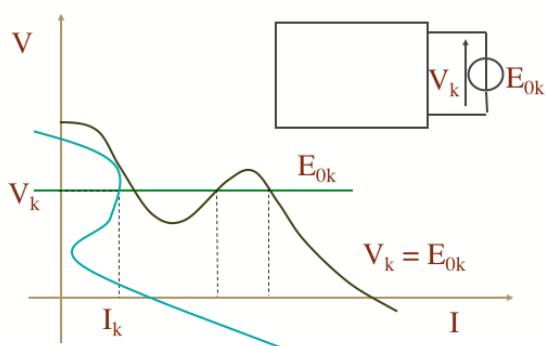
che se in una rete di bipoli lineare si sostituisce, ad un ramo interessato dalla tensione V , un generatore ideale di f.e.m. $E_0 = V$, nulla cambia nella restante parte della rete.

È facile convincersi della veridicità di tale affermazione se si considera che la "restante parte della rete" è in realtà anche essa rappresentabile come un bipolo lineare - ossia con un legame caratteristico tensione-corrente di tipo lineare e, quindi, anche ad un sol valore: ad ogni valore della corrente corrisponde un valore, ed uno solo, della tensione e viceversa.



Se quindi la tensione imposta ai morsetti dal generatore è identica a quella V esistente agli

stessi morsetti nella rete originaria, la corrente erogata dal bipolo equivalente alla restante parte della rete non può che essere identica a quella presente nel ramo in esame nella rete di partenza, come chiaramente mostrato dalle due figure a lato.



In effetti è possibile allentare il vincolo sulla linearità della rete e richiedere soltanto che la rete sia pilotabile in tensione, altrimenti potremmo avere più soluzioni, come è chiaramente illustrato nella figura successiva.

Naturalmente è facile dimostrare anche il teorema duale, e cioè: se in una rete si sostituisce il bipolo presente in un ramo, attraversato da una corrente I_0 , un generatore ideale di corrente che eroga la stessa corrente I_0 , nulla cambia nella restante parte della rete.

E ciò è vero anche se il bipolo in questione è non lineare, purché sia pilotabile in corrente.

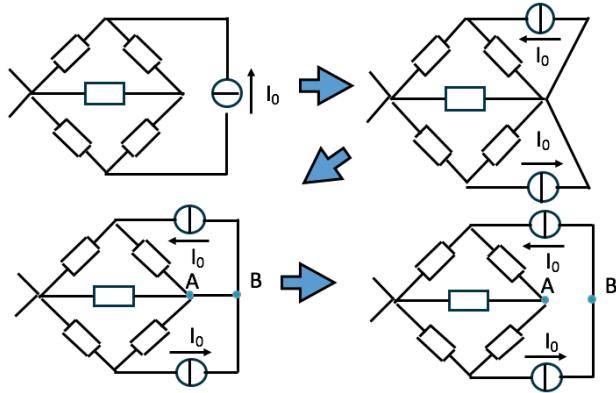
Dalle due forme enunciate del teorema di sostituzione discendono immediatamente due corollari che dicono, se due nodi di una rete lineare sono allo stesso potenziale, è possibile collegarli con un corto circuito senza che nulla cambi nella rete, e, dualmente, Se in un ramo di

una rete lineare non circola alcuna corrente, tale ramo può essere aperto senza che nulla cambi nella rete.

Tali corollari appaiono subito evidenti se si considera che un generatore di f.e.m. ideale di tensione nulla equivale ad un bipolo corto circuito e che un generatore ideale di corrente che eroghi una corrente nulla equivale ad un bipolo circuito aperto.

Facendo uso di questi risultati si vede facilmente che un ramo di una rete in cui sia presente un solo generatore ideale di f.e.m. può essere eliminato modificando la rete, come è mostrato nella slide successiva.

Infatti, in tale rete modificata, i punti C,D ed F sono allo stesso potenziale per costruzione; ne consegue che essi possono essere cortocircuitati, così come è mostrato nella successiva immagine.

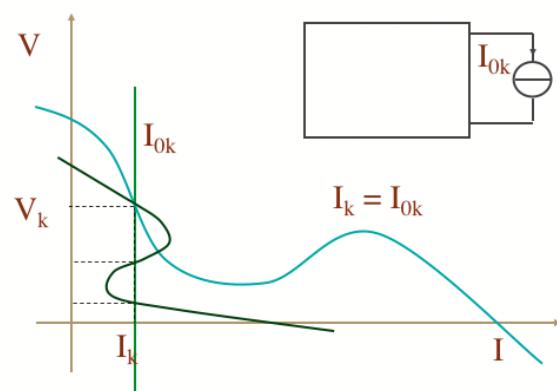


È evidente, a questo punto, che la rete così ottenuta è equivalente a quella di partenza, perché i tre generatori ideali di egual f.e.m. in parallelo possono essere sostituiti con un solo generatore.

Analogo è il caso del generatore ideale di corrente senza una conduttanza in parallelo.

Dalla rete mostrata si passa facilmente a quella modificata, considerando che esse sono identiche salvo per il fatto che si è usato l'artificio di scomporre un nodo in due nodi, A e B.

Avendo eliminato in questo modo tutti i lati singolari di una rete possiamo a questo punto supporre che nel generico lato siano presenti o un generatore ideale di f.e.m. con una resistenza in serie o un generatore di corrente con una conduttanza in parallelo; per mantenere aperte



tutte le possibilità possiamo addirittura supporre che in ogni ramo siano presenti entrambi i generatori, così come è mostrato nella slide, nelle due configurazioni equivalenti.

In conclusione, senza perdere alcuna generalità, si può assumere che la generica caratteristica di lato sia in una delle due forme equivalenti.

Possiamo descrivere le caratteristiche di lato in una forma molto sintetica utilizzando il formalismo matriciale. Sia infatti \mathbf{G} la matrice

delle conduttanze di lato, definita come la matrice quadrata e diagonale, di dimensioni $L \times L$, il cui generico elemento G_{rk} è nullo se $r \neq k$
ed è pari a G_k se $r = k$, e siano I_0 , E_0 , I e V i vettori colonne (o righe) rispettivamente dei generatori di corrente di lato, dei generatori

di tensione di lato, delle correnti di lato e delle relative tensioni, allora si ottiene la formula generale mostrata, che descrive la generica caratteristica di lato.

Sostituendo poi in questa espressione del vettore I , per esempio, le V in funzione delle E :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{E} = \mathbf{V},$$

si ottiene:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \mathbf{G} \mathbf{A}^T \mathbf{E} - \mathbf{C} \mathbf{E}_0$$

E quindi l'equazione ai nodi in forma matriciale diventa:

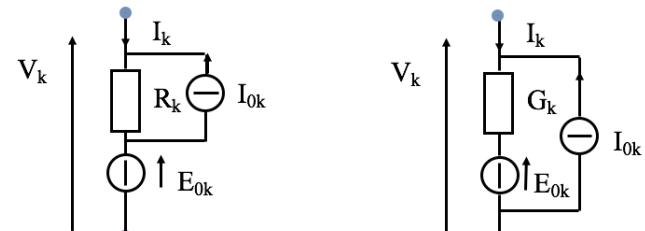
$$\mathbf{A} \mathbf{I} = -\mathbf{A} \mathbf{I}_0 + \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{A}^T \mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$$

O anche, ponendo $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{Y} \mathbf{E} = \mathbf{A} \mathbf{I}_0 + \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{E}_0 = \mathbf{J}_0$$

In conclusione, il problema della soluzione di una rete diventa quello di trovare la matrice inversa della \mathbf{Y}

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{J}_0$$



$$V_k = E_{0k} + R_k I_k + R_k I_{0k};$$

$$I_k = -I_{0k} + G_k V_k - G_k E_{0k}.$$

Dove:

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_0 - \mathbf{AG}\mathbf{E}_0 = \mathbf{J}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{AGA}^T.$$

La matrice \mathbf{Y} , di dimensioni $(N-1) \times (N-1)$, prende il nome di matrice delle conduttanze ai nodi. Il sistema di equazioni rappresentato, nelle incognite potenziali ai nodi, è il sistema risolvente della rete.

Si noti che, in pratica, ci siamo ridotti ad applicare il metodo dei potenziali ai nodi!

Eliminiamo ora il vincolo del regime stazionario. Dovremo introdurre i bipoli a



memoria. Consideriamo la caratteristica di tali bipoli in forma discreta: il condensatore ci appare avere una caratteristica che potremmo assimilare a quella di un generatore

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} & v(t) &= L \frac{di}{dt} \\ v(t) &= v(t-\Delta t) + \frac{i(t)}{C} \Delta t & i(t) &= i(t-\Delta t) + \frac{v(t)}{L} \Delta t \\ v(t) &= k_0 + R_C i(t) & i(t) &= k_0 + G_L v(t) \end{aligned}$$

di tensione di valore $k_0=v(t-\Delta t)$ con una resistenza in serie pari a $\Delta t/C$ - si ricordi che abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore. Analogamente l'induttore ci appare come un generatore di corrente $i(t-\Delta t)$ con una conduttanza in parallelo pari $\Delta t/L$.

4. Codici numerici

Esistono numerosi codici numerici che affrontano egregiamente il problema della soluzione delle reti elettriche. In effetti l'uso di codici numerici si giustifica per due ordini di motivi diversi. Da una parte, per reti lineari ma molto estese, cioè con un gran numero di nodi e di lati, la soluzione analitica, anche se semplice in linea di principio, può richiedere tempi di elaborazione proibitivi. Dall'altra parte, la presenza di bipoli non lineari può rendere difficile, se non impossibile, una soluzione analitica. Naturalmente la presenza di entrambi questi elementi, come accade nei circuiti integrati di grandi dimensioni, rende la soluzione numerica l'unica via praticabile.

Uno dei codici più diffuso, sia in ambiente di ricerca che in quello di produzione, è SPICE, acronimo che sta per "Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis". SPICE fu sviluppato al "Electronic Research Laboratory" dell'Università della California, e reso disponibile al pubblico, nel 1975.

I motivi della grande diffusione di tale codice vanno ricercati, naturalmente, nella sua qualità e funzionalità, ma anche nella intelligente politica seguita dalla Università della California che ha consentito la diffusione gratuita del prodotto, in una versione ridotta, per scopi educativi. La differenza tra la versione completa e quella ridotta è nella consistenza della biblioteca di componenti prevista: mentre nella versione completa sono contemplate le caratteristiche di circa 5000 componenti diversi, la versione distribuita gratuitamente ne prevede solo 300; ma per scopi didattici è più che sufficiente.

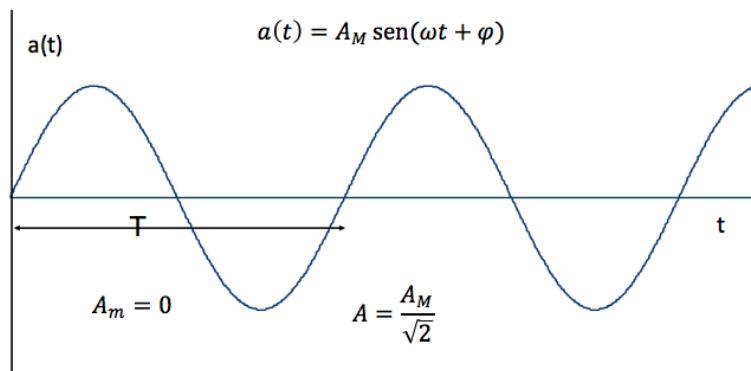
1. Introduzione

L'obiettivo di questa lezione è spiegare perché la produzione, la distribuzione e l'utilizzo dell'energia elettrica avvengano oggi praticamente sempre in regime sinusoidale – AC, dall'inglese “Alternate Current” - e non in D.C (Direct Current, la nostra “Corrente Continua”). Le cose non sono sempre state così chiare e all'inizio dello sviluppo delle tecnologie elettriche – fine diciannovesimo secolo – questa problematica fu molto sentita e diede luogo a quella che fu definita la “guerra delle correnti”, che vedeva, da una parte Thomas Edison e la sua industria - la Edison, appunto – e dall'altra George Westinghouse, con la sua Westinghouse Electric, con un formidabile alleato: Nikola Tesla. Vinse la Corrente Alternata e vediamo di capire perché.

Vedi anche¹

¹ Luciano De Menna, Elettrotecnica, cap VI Regimi sinusoidali, 1998, Vittorio Pironti Editore, Napoli, pag. 196-207

2. Perché i regimi sinusoidali



Se nella rete agiscono solo generatori che producono tensioni e correnti il cui andamento nel tempo è di tipo sinusoidale, e ogni transitorio iniziale può ritenersi esaurito, si

dice che la rete è in regime sinusoidale. Per trattare reti di questo tipo è molto utile il così detto metodo fasoriale.

Ricordiamo la simbologia utilizzata e le convenzioni adottate: il valor medio di una funzione sinusoidale in un periodo T è nullo, mentre il suo valore efficace (la media quadratica) è pari al valor massimo diviso la radice di 2. L'argomento della funzione sinusoidale viene detto fase istantanea della funzione stessa mentre φ prende il nome di fase iniziale e $\omega = 2\pi/T$ è la frequenza angolare. Vogliamo domandarci ora perché un trattamento tanto speciale per andamenti di questo tipo.

Un motivo di tipo teorico e molto generale è che per le funzione periodiche si può dimostrare un'importante proprietà che prende il nome di sviluppo in serie di Fourier. Tale proprietà consente di porre una qualsiasi funzione periodica $a(t)$ come somma di infiniti termini del tipo $A_n \sin(n\omega t)$ ed $B_n \cos(n\omega t)$, con n intero ed $\omega = 2\pi/T$ = frequenza angolare, o spesso, per brevità, solo frequenza. In realtà si preferisce conservare al termine frequenza il significato di inverso del periodo per cui $f=1/T=\omega/2\pi$; da cui il nome di frequenza angolare per ω . Dalla formula dello sviluppo di Fourier si può facilmente calcolare che il coefficiente A_0 è il valore medio della grandezza periodica e che i coefficienti A_n e B_n sono, rispettivamente, le medie pesate, secondo le funzioni seno e

$$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t + \varphi)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \sin n\omega t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \cos n\omega t dt$$

coseno, della funzione periodica da sviluppare. I diversi termini dello sviluppo di Fourier vengono detti anche armoniche.

Ora, se siamo in regime lineare, se cioè è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, se è noto il comportamento di un sistema quando in esso tutte le grandezze variano con legge sinusoidale, è possibile ricavare il comportamento del sistema, utilizzando appunto la sovrapposizione degli effetti, in condizioni di variabilità temporale diverse, purché periodica, sommando i risultati della rete quando sollecitata dalle singole armoniche. In teoria, risolvere la rete in regime sinusoidale ci fornisce informazioni sul suo funzionamento in un regime periodico qualunque.

3. Perché i Generatori in AC

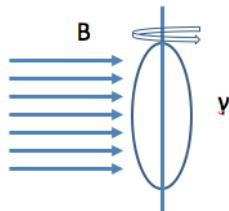
Un altro motivo che ci spinge a focalizzare la nostra attenzione sui generatori di tipo sinusoidale, altrettanto importante, è, potremmo dire, di carattere essenzialmente pratico.

Infatti, in base alla legge di Faraday-Neumann – quella che generalmente occupa il secondo rigo nel sistema di Equazioni di Maxwell – la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa γ è uguale alla derivata – con il segno cambiato - del flusso del campo \mathbf{B} attraverso una superficie che si appoggi sulla linea in questione (flusso concatenato alla linea). A questa circuitazione diamo il nome di forza elettromotrice (f.e.m. in sigla) in quanto, se diversa da zero,

Legge di Faraday-Neumann

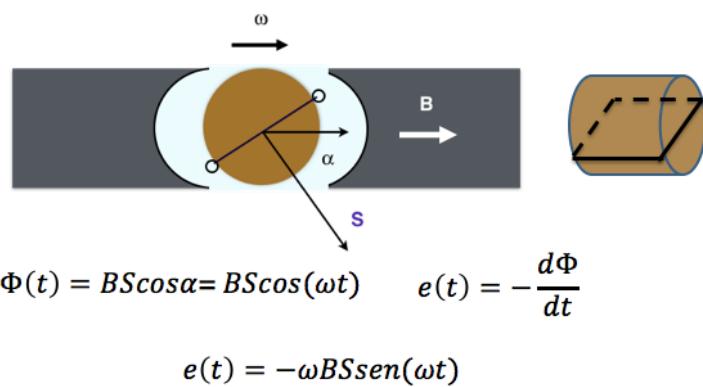
$$\oint_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_{S_{\gamma}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt}$$

$$e(t) = - \frac{d\Phi_{\gamma}}{dt}$$



essa può compiere lavoro sulle cariche elettriche. Perché ci sia un f.e.m., dunque, la derivata del flusso concatenato deve essere diversa da zero, e questo è certamente vero se il campo magnetico è variabile nel tempo.

Ma la variabilità del flusso concatenato nel tempo si può anche ottenere con un campo \mathbf{B} costante ed una spira che si muove nello spazio interessato dal campo. Ora è evidente che perché si tratti di un dispositivo fisicamente realizzabile il movimento deve svilupparsi necessariamente in uno spazio limitato, il che fa pensare immediatamente ad un movimento di rotazione intorno ad un asse, come mostrato nella figura, dove B è il campo magnetico costante (che nella figura si è immaginato anche uniforme) e γ è la spira che ruota intorno ad un asse verticale. Quando la spira, nel suo moto, si troverà ad essere ortogonale al campo, il flusso sarà massimo, mentre dopo una rotazione di 90° avremo invece un flusso minimo.



Per essere soltanto un po' più concreti, possiamo immaginare che il campo magnetico sia prodotto dalle due espansioni polari (Nord e Sud) - mostrate in figura - di un magnete, e che la spira sia poggiata su di un cilindretto - nel disegno è indicata dai

due cerchietti sulla superficie del "rotore" - e ruoti con velocità angolare costante ω intorno ad un asse verticale al piano della figura.

In queste condizioni la spira avrà forma rettangolare, come mostrato in figura. Se il campo B è uniforme, per una determinata posizione della spira caratterizzata dall'angolo α tra la normale S alla superficie della spira, il flusso di B attraverso la superficie sarà dato da $\Phi(t) = BS \cos \alpha = BS \cos(\omega t)$, dove ω è la velocità angolare di rotazione della spira (per semplicità si è assunto $\alpha = 0$ per $t=0$).

Come si vede, derivando il flusso concatenato, se la spira ruota a velocità angolare costante, la forza elettromotrice che ne scaturisce è di forma d'onda sinusoidale. Naturalmente, le cose sono molto più complesse di quanto una descrizione così sintetica possa far immaginare; ma, al fondo, è questo uno dei principali motivi per cui la produzione della energia elettrica si realizza prevalentemente in regime sinusoidale. In altre parole: sarebbe complicato produrla con una forma d'onda diversa!

4. Perché la distribuzione in AC

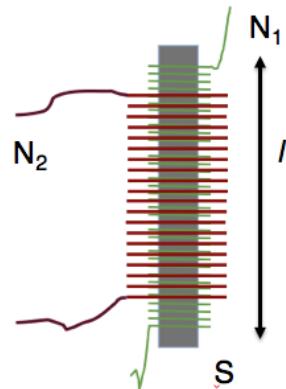
Un terzo motivo che rende estremamente conveniente la distribuzione dell'energia elettrica in regime sinusoidale è la possibilità di costruire in modo estremamente semplice un dispositivo che prende il nome tecnico di "trasformatore"! Come è noto, se invece di disporre un solo avvolgimento su di un supporto isolante – il che ci fornisce un bipolo che abbiamo chiamato induttore – ne aggiungiamo un secondo, otteniamo un doppio bipolo, o due porte, le cui equazioni caratteristiche sono quelle mostrate, e prende il nome di accoppiamento mutuo. Motivi di compatibilità energetica richiedono che i due coefficienti di mutua induzione (M) siano uguali.

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2$$



Infatti la potenza istantanea assorbita (convenzioni dell'utilizzatore ad entrambe le porte) dal doppio bipolo è data dalla somma delle potenze assorbite alle due porte.

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} i_1 \frac{di_2}{dt} + M_{21} i_2 \frac{di_1}{dt} + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt}$$

Moltiplicando per dt si ottiene quindi l'energia dW assorbita in un intervallo di tempo infinitesimo.

$$dW = pdt = L_{11} i_1 di_1 + M_{12} i_1 di_2 + M_{21} i_2 di_1 + L_{22} i_2 di_2$$

D'altra parte la variazione infinitesima di energia deve essere un differenziale esatto: solo in tal caso infatti la variazione finita di energia che si ottiene integrando quella infinitesima tra due "punti" (i_{1-}, i_{2-}) ed (i_{1+}, i_{2+}) del piano delle correnti $[i_1, i_2]$, sarà indipendente dal "percorso", cioè dal modo in cui si è andati dalla condizione in cui le correnti erano (i_{1-}, i_{2-}) a quella in cui esse erano (i_{1+}, i_{2+}) .

Perché ciò sia vero occorre che $M_{12}=M_{21}=M$ e, in tal caso, dW è il differenziale esatto della funzione W :

$$W = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + Mi_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2$$

L'aver trovato l'espressione della energia magnetica immagazzinata in ogni istante ci consente ulteriori deduzioni; infatti, tale energia deve, evidentemente, essere positiva per definizione. Tale sarà dunque anche il rapporto tra l'energia immagazzinata ed il quadrato della corrente alla porta primaria.

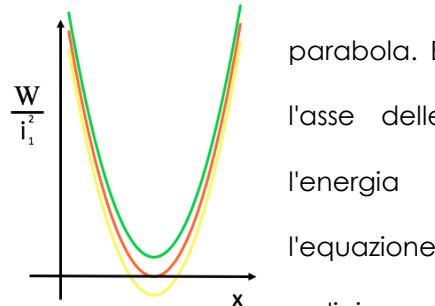
$$\frac{W}{i_1^2} = \frac{1}{2}L_{11} + M\frac{i_2}{i_1} + \frac{1}{2}L_{22}\frac{i_2^2}{i_1^2}$$

Che può scriversi anche:

$$\frac{W}{i_1^2} = \frac{1}{2}L_{11} + Mx + \frac{1}{2}L_{22}x^2$$

dove x è il rapporto tra le due correnti.

L'espressione trovata, nel piano $[x, W]$, rappresenta una parabola. È evidente che, solo nel caso in cui la parabola non interseca l'asse delle x , non esisterà alcuna coppia di valori delle correnti per cui immagazzinata risulti negativa - il che corrisponde al fatto che che si ottiene annullando l'espressione di W/i_1^2 , deve avere complesse. Questa condizione si verifica quando $L_1L_2=M^2$



parabola. È
l'asse delle
l'energia
l'equazione,
radici

Tale condizione si dice di accoppiamento perfetto; infatti se essa è verificata, esiste una coppia di valori di i_1 ed i_2 per i quali risulta $W = 0$. Ma dato che per annullare l'energia magnetica associata ad un campo magnetico bisogna necessariamente annullare lo stesso campo magnetico in ogni punto dello spazio, l'affermazione precedente equivale alla seguente: se l'accoppiamento è perfetto, è possibile annullare completamente il campo prodotto dalla corrente in uno dei due circuiti, facendo circolare nell'altro una opportuna corrente. E ciò giustifica evidentemente il fatto che tale condizione si dica di accoppiamento perfetto.

Al coefficiente k , viene dato il nome di coefficiente di accoppiamento; esso varia tra -1 ed

1.

In particolare, se il doppio accoppiamento mutuo è in regime

sinusoidale, si potrà fare uso del simbolismo vettoriale e parlare di impedenza propria o autoimpedenza

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

$$\bar{V}_1 = Z_{11} \bar{I}_1 + Z_{12} \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = Z_{21} \bar{I}_1 + Z_{22} \bar{I}_2$$

bipolo

$$\bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2$$

$$M^2 = L_1 L_2$$

$$\bar{V}_2 = j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2$$

ed

impedenza mutua. Le equazioni saranno quelle mostrate. Il doppio bipolo accoppiamento magnetico in regime sinusoidale è dunque caratterizzato globalmente dai valori delle tre impedenze, corrispondenti ai tre parametri indipendenti che lo individuano L_1 , L_2 ed M – abbiamo semplificato il doppio pedice 11 e 22 per le due autoinduttanze riducendoli ad uno solo, L_1 ed L_2 . È possibile, però, costruire un circuito equivalente del doppio bipolo in esame, nel quale la dipendenza da tre parametri indipendenti è messa in particolare evidenza. Cominciamo dal caso dell'accoppiamento perfetto; sarà allora $M^2 = L_1 L_2$ e quindi $L_1/M = M/L_2$.

A tale quantità daremo il nome di rapporto di trasformazione e lo indicheremo con il simbolo a . Riscriviamo ora le equazioni dell'accoppiamento mutuo mettendo in evidenza nella prima equazione il fattore $j\omega L_1$ e nella seconda $j\omega M$.

$$\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1} \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

$$\frac{\bar{V}_2}{j\omega M} = \bar{I}_1 + \frac{L_2}{M} \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a}$$

Per descrivere il funzionamento dell'accoppiamento perfetto potremmo usare, invece delle due equazioni trovate, la prima, lasciata immutata, e quella che si ottiene dividendo membro a membro le due equazioni:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a$$

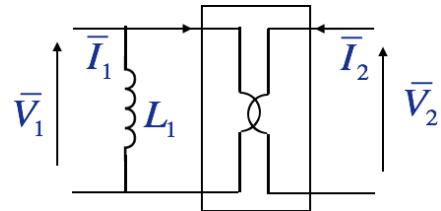
$$\bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1}$$

Si ottiene così una nuova forma delle equazioni dell'accoppiamento perfetto che ci consente di sviluppare alcune considerazioni.

Nella ipotesi che L_1 sia molto grande, al limite per L_1 che tende all'infinito, la seconda equazione si semplifica considerevolmente e diventa simile alla prima.

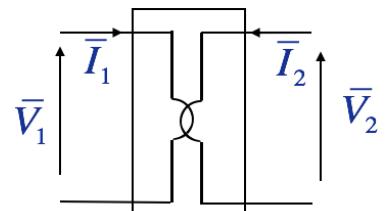
$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a$$

$$\bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a}$$



Possiamo immaginare che le equazioni così trovate definiscano un nuovo doppio bipolo ideale, che chiameremo trasformatore ideale, e che rappresenteremo con il simbolo mostrato. Esso è ideale in quanto descrive un doppio bipolo accoppiamento magnetico perfetto solo nel limite in cui l'induttanza primaria di tale accoppiamento vada all'infinito. Il trasformatore ideale è caratterizzato da un solo parametro: il suo rapporto di trasformazione a .

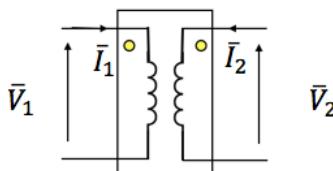
Se ora ritorniamo alle equazioni originarie, che descrivono il doppio bipolo accoppiamento perfetto, vediamo che mentre la prima di esse afferma che le tensioni sono nello stesso rapporto che avrebbero in un trasformatore ideale, la seconda ci dice che la corrente al primario può essere vista come somma di una corrente, che è la stessa che si avrebbe in un trasformatore ideale, più la corrente che circola nell'induttanza L_1 quando essa è sottoposta alla tensione primaria.



Si può facilmente mostrare che il due-porte così costruito, sotto condizioni non molto restrittive, può essere immaginato avere una caratteristica semplificata del tipo mostrata in figura, con l'aggiunta di due induttori in serie al primario ed al secondario, per tenere in conto il fatto che l'accoppiamento non è in realtà perfetto.

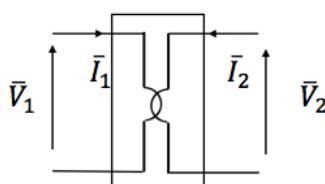
Non avendo noi ipotizzato nessuna causa dissipativa in questo dispositivo, esso deve essere

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = Z_1 \bar{I}_1 + Z_M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = Z_M \bar{I}_1 + Z_2 \bar{I}_2 \end{cases}$$



Trasformatore ideale

$$\begin{cases} \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a \\ \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = -1/a \end{cases}$$



trasparente alle potenze: quindi la potenza in ingresso (porta uno) dovrà essere uguale a quella in uscita (porta due). Ma, se il parametro a – che grosso modo può considerarsi uguale al rapporto tra il numero di spire primarie ed il numero di spire secondarie – è

maggiore di 1 la tensione secondaria sarà minore di quella primaria, mentre la corrente secondaria dovrà essere maggiore di quella primaria (o viceversa se a è minore di 1), e questo, come vedremo immediatamente, è di enorme importanza tecnica ed economica.

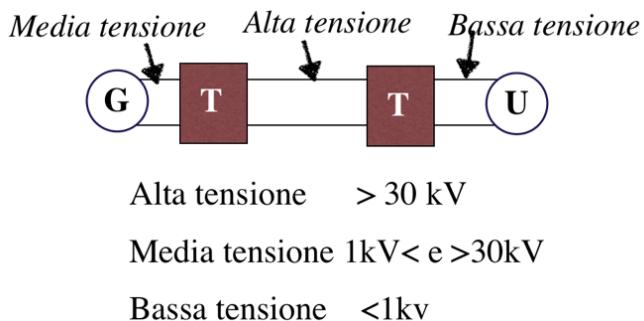
Motivi di sicurezza degli operatori, e ragioni di ordine economico, consigliano l'uso di tensioni relativamente basse per la distribuzione capillare dell'energia elettrica. È abbastanza intuitivo infatti comprendere che il danno prodotto sugli organismi viventi, a parità di condizioni, è tanto maggiore quanto maggiore è la tensione, perché maggiore sarà anche la corrente che attraversa l'organismo vivente! Inoltre gli "isolamenti", sempre necessari in un dispositivo elettrico, diventano sempre più costosi e delicati quando la tensione cresce. Nell'Europa continentale, come è noto, il valore efficace della tensione alla distribuzione è di 220 V. D'altra parte il trasporto dell'energia elettrica, dal punto di produzione a quello di utilizzo, avviene mediante conduttori che, naturalmente, non essendo perfetti, presentano una certa resistenza e producono, quindi, una certa dissipazione di potenza che dipende soltanto dal quadrato del valore efficace della corrente richiesta dal carico!

È evidente che se a monte dell'utilizzatore disponessimo un trasformatore riduttore di tensione in modo da mantenere bassa la tensione sul carico, ma da elevare quella sulla linea di trasporto, potremmo nel contempo ridurre la corrente di linea e quindi le perdite su di essa. Se si pensa ai chilometri e chilometri di linee di trasmissione elettrica che caratterizzano il panorama di

un qualsiasi paese sviluppato, si comprende la convenienza del trasportare l'energia elettrica, sulle grandi tratte, ad alta tensione e relativamente bassa corrente.

Si potrebbe pensare di produrre l'energia elettrica direttamente a tale tensione elevata. Ma anche questo non è conveniente economicamente perché, come si è detto, la complicazione ed il costo di un qualsiasi dispositivo elettrico - e quindi anche di un generatore - cresce notevolmente al crescere della tensione alla quale deve operare. Le dimensioni stesse del dispositivo, per evidenti

motivi, devono necessariamente aumentare al crescere della tensione di isolamento.

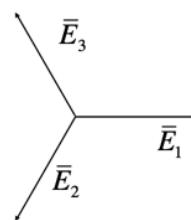
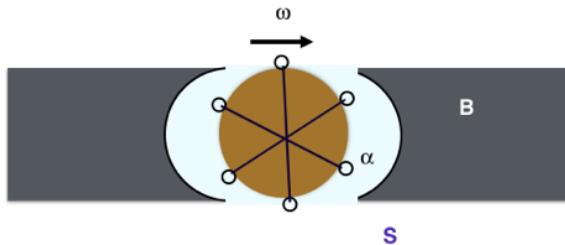


Ciò porta al classico schema mostrato in figura, che prevede un trasformatore elevatore di tensione a valle dei generatori ed a monte della linea, ed un trasformatore riduttore a monte del carico. Naturalmente le cose sono in realtà molto più complesse ed articolate di quanto queste semplici considerazioni possano far credere; si pensi, per esempio, al semplice fatto che supporre un trasformatore privo di perdite è chiaramente una idealizzazione, non foss'altro perché gli avvolgimenti di cui esso è costituito presentano necessariamente una certa resistenza e quindi introducono una dissipazione aggiuntiva. Queste ed altre problematiche sono oggetto di studio di altre discipline che si occupano in modo specifico delle macchine elettriche e degli impianti elettrici; a noi basta qui aver evidenziato, in linea di principio, il fondamentale ruolo svolto nella tecnica dal dispositivo "trasformatore".

1. Perché i Generatori Trifasi

Come sappiamo, è in linea di principio, molto semplice immaginare un generatore di tensione sinusoidale costruito in base ai principi generali della interazione elettromagnetica: una semplice spira rotante in un campo magnetico ne è la concreta esemplificazione.

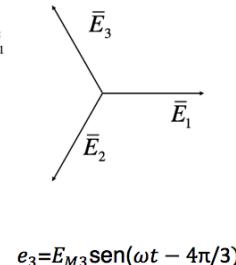
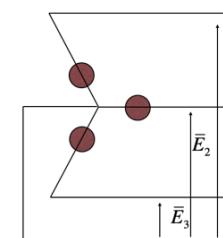
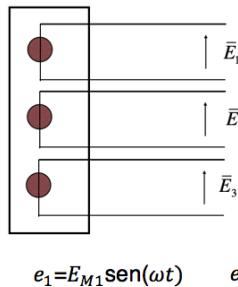
È immediato osservare che, una volta prodotto il campo magnetico, appare logico sfruttarlo in maniera più completa disponendo più spire rotanti nella regione in cui esso agisce. Si



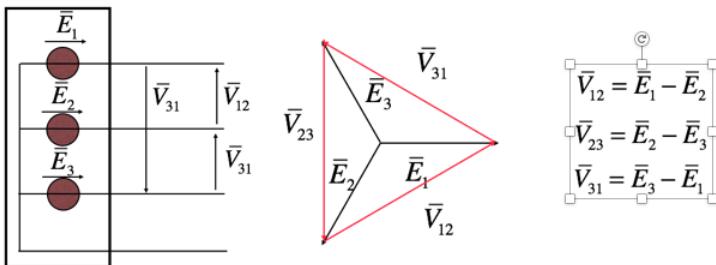
$$e_1 = E_{M1} \sin(\omega t) \quad e_2 = E_{M2} \sin(\omega t - 2\pi/3) \quad e_3 = E_{M3} \sin(\omega t - 4\pi/3)$$

giunge dunque a uno schema di principio del tipo mostrato in figura, dove si è scelto di immaginare tre avvolgimenti distanziati tra loro di angoli uguali. Si osservi che a nulla

servirebbe distribuire un unico avvolgimento lungo tutta la periferia del rotore, un'unica spirale che lo ricopra completamente; riuscite a capire il perché? il motivo vi apparirà immediatamente chiaro in seguito. Il



generatore, che stiamo qui descrivendo solo in linea di principio, produrrà, invece di una sola, più tensioni sinusoidali che risulteranno tra di loro sfasate nel tempo di angoli corrispondenti agli angoli che separano nella disposizione spaziale le singole spire. Infatti, nella sua rotazione, una spira sperimenterà le stesse condizioni di quella che la precede dopo un tempo pari a quello necessario a percorrere l'angolo che le separa. Un sistema di tensioni di tale tipo prende il nome di sistema trifase. In particolare se le tensioni sono eguali in modulo (stesso numero di spire in ogni avvolgimento) e sfasate tra di loro di uno stesso angolo (il che corrisponde ad una disposizione



spaziale delle spire perfettamente simmetrica) il sistema si dirà simmetrico; nel caso contrario esso si dirà dissimmetrico. Ragioni pratiche consigliano in generale di limitarsi al caso di tre sole tensioni; avremo, dunque, sistemi di tensioni

trifasi simmetrici o non, a secondo del caso. I segni delle fasi utilizzati in figura, dipendono dal fatto che si è supposto che l'avvolgimento due segue quello 1 e quello 3 quello 2 nel senso di rotazione del rotore. Il sistema si dirà in questo caso simmetrico diretto. Nel caso opposto si avrà un sistema simmetrico inverso.

Un generatore trifase si può sempre immaginare realizzato con tre generatori monofase, del tipo già introdotto, e disposti come mostrato. Naturalmente è inutile far uscire 6 conduttori dal generatore: il conduttore di ritorno dei tre può essere messo in comune. Tale disposizione si dice, per ovvie ragioni, a stella.

Si noti che dal punto di vista elettrico un tale sistema può anche essere disegnato come mostrato nell'immagine.

Le tensioni tra i conduttori di linea prendono il nome di tensioni concatenate e vengono di regola indicate utilizzando la lettera V, mentre si riserva la lettera E per le tensioni tra i conduttori ed il punto comune dei tre generatori che prende il nome di centro stella dei generatori. Tali tensioni vengono dette stellate o di fase.

Le relazioni tra tensioni di fase e tensioni concatenate sono quelle mostrate e descritte graficamente nel diagramma vettoriale riportato: il triangolo delle tensioni concatenate ha per vertici i tre punti 1, 2 e 3, estremi dei vettori rappresentativi delle rispettive tensioni di fase.

Supponiamo ora di collegare i tre generatori a tre impedenze di carico, come descritto nell'immagine. Il sistema così ottenuto si distingue da quello che si otterebbe collegando i tre generatori sui

rispettivi carichi separatamente, solo per il fatto che il conduttore di ritorno dei tre generatori è in comune. Quindi le tre correnti avranno le espressioni fasoriali mostrate.

Supponiamo anche, però, che il sistema, oltre ad essere simmetrico diretto (o inverso, non ha importanza) sia anche caratterizzato dall'avere le tre impedenze di carico eguali tra di loro: un tale sistema si dirà equilibrato nelle correnti (o anche nel carico).

In queste condizioni le tre correnti i_1 , i_2 ed i_3

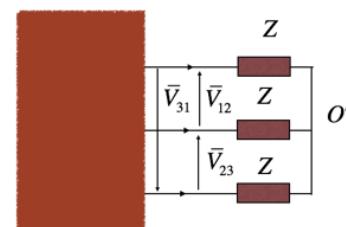
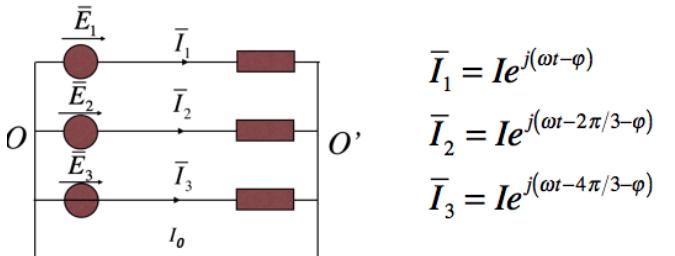
sono uguali in modulo e sfasate di $2\pi/3$ l'una dall'altra.

Per convincersene basta considerare le maglie formate da ogni singola fase ed il conduttore neutro che è un corto circuito.

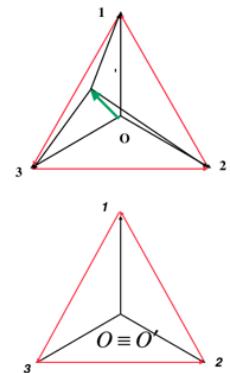
È facile verificare che nel caso descritto la somma dei tre fasori delle correnti si annulla. I tre fasori rappresentativi, infatti, messi uno dietro l'altro, formano un triangolo (equilatero): la loro somma è dunque identicamente nulla.

Ma allora la LKC al nodo comune delle tre impedenze, O' , ci dice che la corrente nel conduttore comune di ritorno deve essere nulla.

Ne consegue, per una nota proprietà delle reti, che tale conduttore può essere eliminato ed i due punti O ed O' sono allo stesso potenziale anche se non sono collegati da un conduttore!



$$E = V / \sqrt{3}$$



2. Perché le Linee Trifasi

Immaginiamo ora il complesso dei generatori racchiusi in una scatola chiusa; fuoriescono soltanto i tre fili di linea tra i quali sussistono le tensioni concatenate. È la situazione che si può immaginare se verifichi quando l'alimentazione è fornita da un unico generatore trifase.

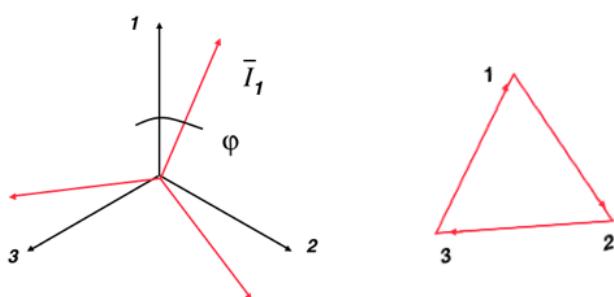
O anche la condizione in cui ci si trova se si guarda la linea trifase ad una certa distanza sia dai generatori che dai carichi. Si vedono solo

tre fili le cui tensioni tra di loro sono appunto le tensioni concatenate. Non abbiamo accesso né all'eventuale punto O né a quello O'. Anche perché tali punti potrebbero anche non esistere fisicamente come si evince dalla considerazioni successive.

Si osservi, infatti, che lo stesso sistema di alimentazione si può immaginare prodotto da tre generatori, di tensione pari alla tensione concatenata e con gli opportuni sfasamenti, collegati come mostrato; si parlerà in questo caso di sistema di generatori collegati a triangolo perché i generatori stessi possono idealmente immaginarsi disposti lungo i lati di un triangolo. In un collegamento a triangolo non c'è spazio per un eventuale filo neutro in quanto manca il punto O a cui collegarlo.

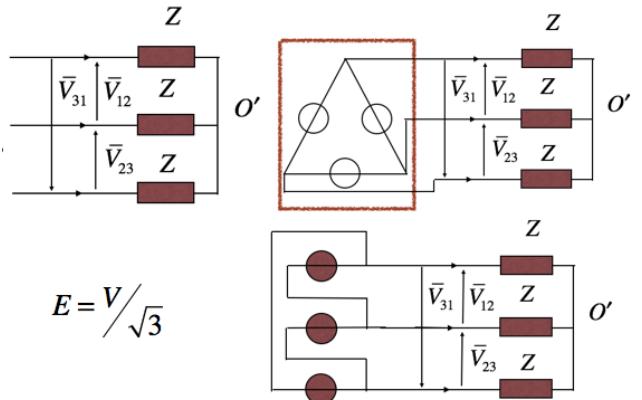
Per generatori o carichi a triangolo si preferisce la notazione grafica mostrata, dove,

almeno graficamente il triangolo è nascosto.



Naturalmente, sono possibili le altre combinazioni: generatori a stella e carico a triangolo o generatori a

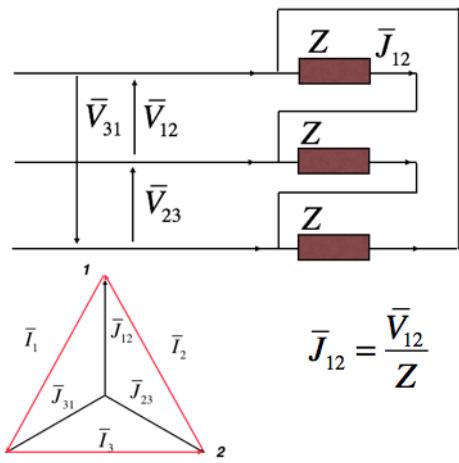
Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).



triangolo e carico a stella. Nel caso di carico a triangolo le singole impedenze saranno attraversate da correnti diverse da quelle di linea (simbolo I); tali correnti verranno dette correnti di fase (simbolo J). Le relazioni tra correnti di linea e correnti di fase si ricavano facilmente applicando la prima legge di Kirchhoff ai nodi del triangolo delle impedenze e ricalcano quelle tra tensioni concatenate e tensioni stellate.

È facile però rendersi conto che, in una situazione in cui non si conosce la reale disposizione dei generatori, deve essere comunque possibile prescindere da tale disposizione e poter determinare le correnti nei conduttori sulla base della conoscenza delle sole tensioni concatenate. In effetti, assegnato un triangolo di tensioni concatenate, possiamo immaginare tali tensioni prodotte da una qualsiasi terna di generatori disposti a stella con tensioni tali che i loro vettori rappresentativi costituiscano una stella – con il centro diverso dal punto O - con gli estremi coincidenti con i vertici del triangolo delle tensioni.

Naturalmente, se la terna di tensioni concatenate è simmetrica, sarà molto conveniente supporre la terna di tensioni stellate anche essa simmetrica; in tal caso si avrà, $E = V/\sqrt{3}$, dove si è indicato con E e V rispettivamente, il valore efficace comune delle tensioni stellate e delle tensioni concatenate.



3. Confronto Trifase Monofase

Dalle cose dette fin ora si può facilmente intuire che il vantaggio nell'uso dei sistemi polifasici per la distribuzione vada ricercato nel risparmio di conduttori. Quanto grande sia però tale risparmio non è ancora chiaro. Un semplicissimo confronto ce ne fornirà immediatamente l'entità.

Come abbiamo visto, nel caso di carico equilibrato a stella e di terna di tensioni simmetrica, anche in assenza di conduttore neutro, il potenziale O' del centro stella del carico coincide con il potenziale del baricentro O del triangolo delle tensioni concatenate. Ciò vuol dire che, se si immagina il sistema di tensioni concatenate prodotto da una terna di generatori a stella che fornisce una terna simmetrica di tensioni stellate, il potenziale di O' coincide con quello del centro stella dei generatori. In tali condizioni le correnti nelle singole impedenze di carico si calcolano agevolmente come rapporto tra le tensioni stellate e le relative impedenze del carico. Calcoliamo, in queste condizioni, la potenza fornita dal sistema dei generatori come somma delle potenze erogate da tre generatori collegati a stella che siano in grado di fornire l'assegnata terna di tensioni concatenate.

In particolare, se la terna delle V è simmetrica, scegliendo anche la terna delle E simmetrica, e se il carico è equilibrato, con facili calcoli trigonometrici si ottiene che la potenza istantanea è costante e pari a $3EI\cos\varphi$.

Si conclude, dunque, che, nel caso di terna delle tensioni simmetrica e terna delle correnti equilibrata, la sola potenza che si trasferisce al carico è quella media, che abbiamo anche detto attiva, e la potenza "fluttuante" è nulla.

Sulla base delle nozioni introdotte possiamo a questo punto precisare meglio la convenienza dell'uso di sistemi trifasi. Confrontiamo due sistemi di alimentazione, l'uno monofase e

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t)$$

$$3EI\cos\varphi$$

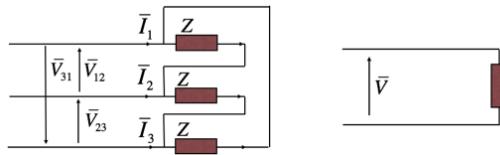
La potenza istantanea è uguale alla potenza media

La potenza media è pari a $3EI\cos\varphi$ o $\sqrt{3}VI\cos\varphi$.

l'altro trifase senza neutro, che siano del tutto equivalenti per quello che concerne l'utilizzatore, cioè il carico. Supponiamo che detto carico, nel caso del sistema trifase, sia disposto a triangolo come mostrato nello schema - ad un risultato identico si giunge se lo si suppone a stella - e che sia inoltre equilibrato. La potenza fornita al carico si calcola agevolmente. Un sistema monofase che sia equivalente a quello trifase deve fornire la stessa potenza sotto la stessa tensione e con lo stesso fattore di potenza; dal confronto tra le due potenze si deduce che la corrente in tale sistema monofase deve essere $\sqrt{3}$ volte più grande di quella nel singolo conduttore di linea del sistema trifase.

Fino ad ora abbiamo supposto che i conduttori di linea che collegano i generatori al carico siano di resistenza nulla. In effetti, come abbiamo già sottolineato, se pensiamo ad una rete di collegamento di dimensioni ragguardevoli, in cui i generatori siano a chilometri e chilometri di distanza dagli utilizzatori, come in effetti accade in una complessa rete elettrica nazionale od internazionale, si capisce facilmente come anche una piccola resistività dei conduttori di linea può provocare notevoli potenze dissipate lungo la linea stessa. Paragoniamo le potenze dissipate dei due casi precedentemente descritti. Naturalmente ρ è la resistività del materiale dei conduttori di linea, L la distanza del carico dai generatori ed S_{1f} ed S_{3f} le sezioni dei conduttori nei due casi esaminati. Perché le due potenze siano eguali occorre che sia $S_{3f}=S_{1f}/2$.

In termini di volume di materiale impiegato, e quindi di costo della linea, a parità di tutti gli altri fattori, ciò significa che il volume di rame nel caso trifase è 3/4 di quello del caso monofase, con un risparmio globale di un quarto di materiale.



$$P = \sqrt{3}VI_{3f} \cos\varphi \quad P = VI_{1f} \cos\varphi \quad I_{1f} = \sqrt{3}I_{3f}$$

$$P_{3f}^d = 3\rho \frac{L}{S_{3f}} (I_{3f})^2 \quad P_{1f}^d = 2\rho \frac{L}{S_{1f}} (I_{1f})^2 \quad S_{3f} = \frac{S_{1f}}{2}$$

Luciano De Menna - Sistemi Polifasici

Questo semplice confronto basterebbe a giustificare la scelta della trasmissione con sistemi trifasi; naturalmente ci sono altri aspetti del problema che non abbiamo esaminato in quanto non congruenti con il livello di approfondimento al quale riteniamo di doverci mantenere.

4. Trifasi Squilibrati

Ritornando al problema del calcolo delle correnti in un sistema trifase, come abbiamo visto, se le tensioni concatenate costituiscono una terna simmetrica (diretta per esempio), le correnti si calcolano agevolmente come se si trattasse di tre circuiti monofasi distinti anziché di un unico sistema trifase. Le cose si complicano leggermente se, pur restando la terna delle tensioni concatenate simmetrica, le tre impedenze di carico non sono più uguali. In tal caso anche supponendo le tre tensioni dei generatori disposti a stella simmetriche, il potenziale del centro stella dei generatori non coincide con quello del centro stella del carico; il punto O nella rappresentazione vettoriale, non coincide con il punto O'. Con O'O indicheremo il vettore rappresentativo della differenza di potenziale tra il centro stella del carico e quello dei generatori; tale vettore individua il cosiddetto spostamento del centro stella.

D'altra parte, dal diagramma vettoriale, si ottiene facilmente il valore della generica corrente di linea in funzione della corrispondente tensione stellata e dello spostamento del centro stella. La conoscenza dello spostamento del centro stella consente, quindi, di calcolare le tensioni che insistono sui relativi carichi e, di conseguenza, le correnti.

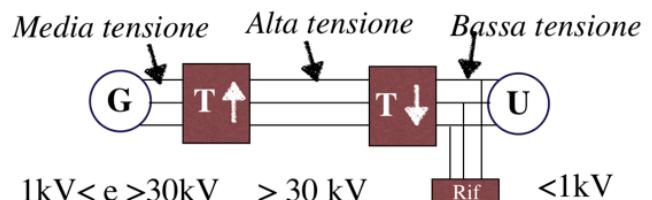
$$\bar{E}_1 = \bar{E} - \bar{V}_{oo}; \quad \bar{E}_2 = \bar{E} - \bar{V}_{oo}; \quad \bar{E}_3 = \bar{E} - \bar{V}_{oo}. \quad \bar{I}_r = \frac{\bar{E}_r}{Z_r} = \frac{\bar{E} - \bar{V}_{oo}}{Z_r}$$

Il calcolo dello spostamento del centro stella, è poi molto agevole; basta applicare il metodo dei potenziali ai nodi, scrivendo l'equazione che esprime la LKC ad uno dei due nodi presenti nella rete. Si ottiene facilmente il valore dello spostamento del centro stella: in pratica stiamo applicando quello che prende il nome di teorema di Millman.

$$\bar{V}_{oo} = \frac{\sum_r \frac{\bar{E}_r}{Z_r}}{\sum_r \frac{1}{Z_r}}$$

Il nostro schema di principio di un sistema di produzione, distribuzione e utilizzazione di energia elettrica, sarà dunque del tipo rappresentato in figura.

Un generatore trifase che produce la terna di tensioni necessarie in media tensione, seguito da un trasformatore elevatore, anche esso trifase, che collega la stazione di generazione alla linea di trasmissione, ed infine un trasformatore riduttore, sempre trifase, che porta la tensione a livelli più accettabili (bassa tensione) per l'utente o l'operatore. Le utenze poi potranno essere ancora trifasi o anche monofasi.



1 Riduzione di una rete

In questa lezione affronteremo la soluzione di alcune reti molto semplici che ci consentiranno però di sottolineare alcune proprietà generali ed interessanti della teoria dei circuiti elettrici. Cominciamo dal circuito di Fig.1 che abbiamo già affrontato. Si vuole calcolare la resistenza equivalente del circuito visto dai morsetti A e B: la risposta è mostrata nello stesso riquadro della figura. Essa nasce dall'osservazione che i due resistori R_2 ed R_0 , essendo attraversati dalla stessa corrente sono certamente in serie, e quindi alla loro serie è possibile sostituire un unico resistore la cui resistenza è pari a $R_2 + R_0$. A questo punto è facile riconoscere che tale resistore è in parallelo a R_3 e che il tutto è ancora in serie all'ultimo resistore R_1 , da cui la soluzione.

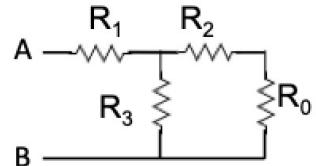
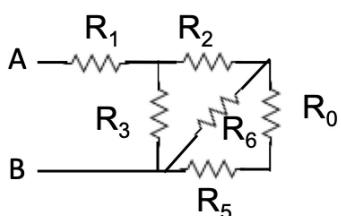


Fig.1

$$R = \frac{R_3(R_2 + R_0)}{R_2 + R_0 + R_3} + R_1$$

Come si vede, è necessario avere un punto di partenza – cioè una coppia di resistori o in serie o in parallelo – per poter iniziare questa procedura di “riduzione di una rete vista da due morsetti ad un unico resistore equivalente”, ed è anche necessario che la stessa condizione si verifichi ad ogni successivo passaggio (riduzione!).

Come classico esempio di una tale situazione, possiamo considerare il circuito di Fig.2, nel quale abbiamo aggiunto due resistori R_4 ed R_6 ed abbiamo modificato uno dei morsetti dai quali vediamo la rete.



degli n-

Fig.2

In queste condizioni è chiaro che non esiste una coppia di resistori in serie o in parallelo da cui cominciare la riduzione.

Viene in aiuto a questo punto la trasformazione stella/triangolo

poli. Infatti nel circuito in esame possiamo

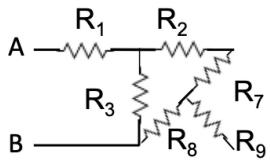


Fig.3

trasformare il tripolo in un triangolo costituito dai resistori

R_0 , R_3 ed R_4 in una stella equivalente. In questo modo il circuito si trasforma nella maniera rappresentata nella Fig.3

In questa nuova versione R_3 e R_8 sono in serie come R_2 e R_7 ed il loro parallelo è in serie con R_9 ed R_1 . Con semplici passaggi si ottiene:

$$R_{eq} = \frac{(R_2 + R_7)(R_3 + R_8)}{R_2 + R_7 + R_3 + R_8} + R_7 + R_9 \quad (1)$$

Quanto abbiamo detto con riferimento ad un circuito di resistori si può ripetere anche per un circuito in regime sinusoidale, a condizione, naturalmente, di parlare di impedenze Z e non solo di resistenze R . In una dinamica qualsiasi invece le cose si complicano perché il circuito non può in generale ritenersi “passivo” a causa della presenza di condizioni iniziali, che possono essere considerate equivalenti a particolari generatori.

2 Circuito “infinito”

Un altro caso interessante, che a prima vista può sembrare impossibile da risolvere è quello rappresentato in Fig.4. Se il circuito è solo quello mostrato nello schema e se i morsetti terminali (a destra) sono effettivamente aperti, è molto facile calcolare la resistenza vista dai morsetti A e B. Partendo da destra la prima coppia di resistori di 1Ω e 2Ω sono in serie e la loro serie è in parallelo al nuovo resistore verticale di 2Ω , e il loro parallelo è in serie al nuovo resistore di 1Ω e così via, fino ad arrivare ad un solo resistore tra i morsetti A e B, che è la risposta cercata. Nel caso mostrato la risposta $43/21 \Omega$

Ma immaginate che la rete si ripeta all'infinito a destra: un'altra coppia di resistori di 1Ω e di 2Ω , e poi un'altra e così via all'infinito, una serie infinita di celle identiche. Pensate di poter calcolare la resistenza vista dai morsetti A e B in queste condizioni? Verrebbe forse istintivo di dire no! Oppure di dare una risposta non ragionata: se la rete è infinita la resistenza deve essere infinita! Ricordate però che se un resistore in serie aumenta la resistenza, uno in parallelo la diminuisce! E allora? Come si può calcolarla? Ecco la risposta che si basa su di un tipo di ragionamento che può essere usato anche in altre situazioni in cui c'è “qualcosa” che va all'infinito!

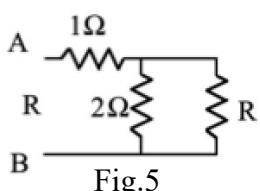


Fig.5

La chiave del ragionamento è nel fatto che se misuro la resistenza tra A e B o la misuro tra i due morsetti analoghi della cella successiva, evidentemente il risultato dovrà essere lo stesso. In entrambi i casi infatti, a valle ho una catena di infinite celle uguali! In conseguenza, possiamo immaginare che il circuito possa essere rappresentato nella maniera mostrata nella figura 5. A questo punto possiamo dedurre che la resistenza R vista tra A e B deve essere uguale al parallelo di se stessa (cioè R) e 2Ω , con in serie 1Ω , cioè:

$$R = \frac{2R}{2+R} + 1 \quad (2)$$

Con facili calcoli dalla (2) si ottiene un'equazione nell'incognita R:

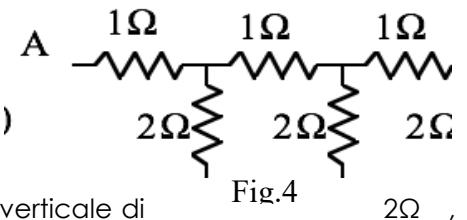


Fig.4

2Ω

$$R^2 - R - 2 = 0$$

Tale equazione di secondo grado ha due radici 2 e -1, ma solo la prima è fisicamente significativa perché la seconda è negativa. E quindi il valore cercato della resistenza vista dai due morsetti A e B di una rete infinita di celle del tipo mostrato in Fig.4 è $R=2\Omega$.

3 Adattamento in potenza

Un altro aspetto interessante che possiamo mettere in luce con un semplicissimo circuito è quello dell'adattamento in potenza. Il circuito che ci interessa è mostrato in Fig.6.

Immaginiamo che R_0 sia assegnata e sia in qualche modo legata indissolubilmente al generatore f.e.m E . In pratica potete immaginare che essa sia rappresentativa delle resistenza interna del generatore reale di cui E è l'idealizzazione.

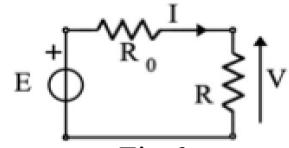


Fig.6

Ci si domanda quale sia il valore di R per il quale si ha il massimo trasferimento di potenza dal generatore al carico R . Che un massimo ci debba essere ne siamo sicuri, perché per R infinita la potenza trasferita in R (cioè RI^2) è nulla perché la corrente è nulla, e per R nulla ancora la potenza si azzerà perché R è zero. Quindi c'è un massimo (o un minimo!) nell'intervallo. Per trovarlo basta esplicitare la dipendenza di questa potenza da R e derivare rispetto a R , cioè:

$$P = RI^2 = R \left(\frac{E}{R + R_0} \right)^2 \quad (3)$$

Da cui:

$$\frac{dP}{dR} = \left(\frac{E}{R + R_0} \right)^2 \left[1 - \frac{2R}{R + R_0} \right] = 0 \quad (4)$$

E quindi $R=R_0$, cioè la resistenza di carico deve essere uguale alla resistenza interna del generatore perché si abbia il massimo trasferimento di potenza tra generatore e carico. È utile sottolineare che in queste condizioni però la stessa potenza che è trasferita al carico viene dissipata all'interno del generatore, con un rendimento (rapporto tra potenza utilizzata e potenza generata), quindi, di $\frac{1}{2}$. Che non è certo un valore soddisfacente. È lo scotto che si paga se si vuole massimizzare il trasferimento di potenza da un generatore ad un carico.

Tenuto conto di quanto scoperto con l'esercizio precedente, si potrebbe pensare – quando la resistenza del carico non è uguale a quella del generatore - di adeguare il carico alla resistenza interna del generatore frapponendo un circuito adattatore fra i due. Come per esempio è

mostrato in Fig.7, dove il circuito in questione è un doppio bipolo a T che, per semplicità abbiamo immaginato assemblato con 3 resistori uguali - La resistenza R_0 vista dai due morsetti A e B sarà:

$$R_0 = \frac{(R_1 + R)R_1}{2R_1 + R} + R_1 \quad (5)$$

Basterà dunque scegliere R_1 in modo tale che R_0 sia proprio uguale alla resistenza interna del generatore. È evidente però che questo non potrà giovare al rendimento del trasferimento di potenza al carico! In questo caso, infatti, bisognerà tener conto anche della potenza dissipata nel doppio bipolo di accoppiamento.

Un altro semplice circuito per aiutarci a sviluppare una sempre miglior comprensione di questo modello dei circuiti. È mostrato in Fig.8 ed è un banale partitore di corrente, che ormai sappiamo ben gestire e calcolarne la effettiva ripartizione delle correnti nei due rami.

Ma questa volta vogliamo affrontarlo in una maniera diversa: immaginate di voler applicare una sola delle leggi di Kirchhoff, per esempio quella delle correnti, e sostituire la seconda (che in questo semplice caso si riduce a dirci che le due tensioni sui rami debbono essere uguali) con la condizione che la potenza dissipata nel partitore sia minima. Cioè sappiamo che $I=I_1+I_2$ e vogliamo imporre che la potenza sia minima. Basterà esprimere tale potenza in funzione di una sola delle correnti nei rami, visto che l'altra ci è immediatamente data dalla relazione $I=I_1+I_2$. Abbiamo:

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 (I - I_1)^2 \quad (5)$$

e derivando:

$$\frac{dP}{dI_1} = 2R_1 I_1 - 2R_2 (I - I_1) \quad (6)$$

e quindi annullando la derivata:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad (7)$$

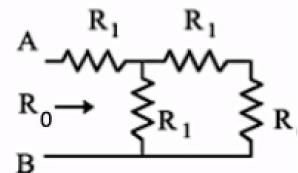


Fig 7

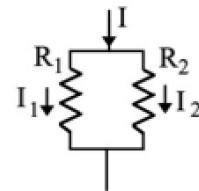


Fig.8

che è proprio la ripartizione che avremmo ottenuto dall'applicazione della seconda legge di Kirchhoff. In pratica le leggi di Kirchhoff impongono una sorta di equilibrio sui minimi valori della potenza dissipata.

4 Ponte di Wheatstone

Una delle applicazioni più interessanti del circuito a ponte di cui abbiamo parlato in precedenza è

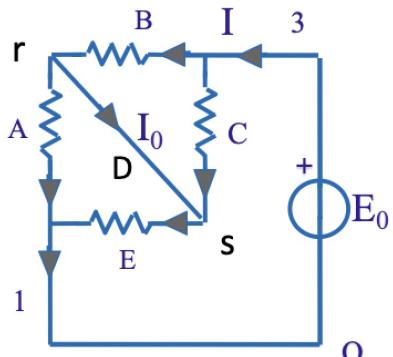


Fig. 9

quella del così detto Ponte di Wheatstone, che ha diverse versioni e applicazioni nel campo delle misure elettriche.

Il principio è il seguente: immaginiamo un circuito come quello dello schema di Fig. 9, in cui una struttura a "ponte" è alimentata da una sua diagonale. Nell'altra diagonale (D) immaginiamo di inserire uno strumento di misura, un amperometro. Ci domandiamo se esistono condizioni alle quali le quattro resistenze del ponte devono sottostare perché la corrente nella diagonale non alimentata del ponte sia nulla.

Fig. 9 Possiamo ragionare così: se la corrente nel ramo D è nulla vuol dire che i nodi di questo ramo debbono essere allo stesso potenziale e quindi è come se il ramo fosse un cortocircuito, ed i rami B e C e quelli A ed E fossero in parallelo. È facile quindi ricavare le espressioni delle correnti nei rami del ponte.

$$I_B = I \frac{R_C}{R_B + R_C} \quad I_A = I \frac{R_E}{R_A + R_E}$$

$$I_C = I \frac{R_B}{R_B + R_C} \quad I_E = I \frac{R_A}{R_A + R_E}$$

A questo punto perché sia I_0 nulla devono essere $I_B = I_A$ e $I_C = I_E$ altrimenti la legge di Kirchhoff ai nodi r ed s non sarebbe soddisfatta, e da qui la condizione di equilibrio del ponte:

$$R_A R_C = R_B R_E$$

Ne consegue che se una delle resistenze è nota con grande precisione - e variabile - dalla sua conoscenza si può ricavare quella di un'altra resistenza del ponte non nota. Abbiamo quindi

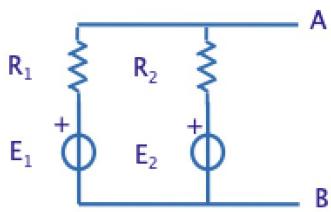
Luciano De Menna – Alcuni Circuiti interessanti

realizzato uno strumento di misura delle resistenze! Ma qual è il vantaggio? Il vantaggio è nel fatto che la misura ha la stessa precisione di quella con cui abbiamo misurato lo zero dell'amperometro e, come potete immaginare, gli strumenti per le misure di “zero” di grande precisione sono molto più facili da costruire.

5 Formula di Millman

Immaginiamo di avere due generatori di tensione, di diverso valore, che per qualche motivo desideriamo mettere in parallelo. Se sono generatori ideali di tensione, la cosa è letteralmente impossibile per una evidente contraddizione che si verificherebbe tra la natura del generale di

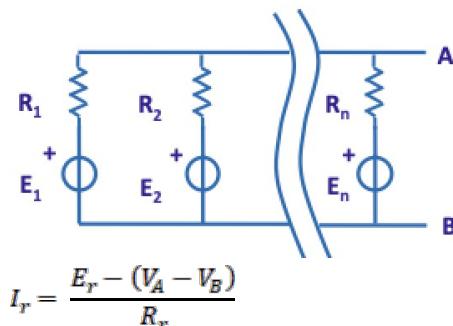
tensione ideale, che è obbligato ad erogare sempre la stessa tensione, e la definizione di parallelo tra due bipoli che richiede che gli stessi abbiano la stessa tensione. Sono due "idealità" del nostro modello che entrano in contraddizione! Ma questo non ci sorprende in un "mondo ideale"!



Se invece i generatori non sono ideali ma reali, la cosa si può discutere. Immaginiamo di rappresentare i due generatori "reali" con due generatori ideali, ognuno con una sua resistenza in serie, come rappresentato nello schema di Fig. 10. È il modello del generatore ideale che abbiamo imparato ad usare. La domanda che ci poniamo è quale sarà la tensione ai morsetti del parallelo.

La risposta è immediata se si applica il metodo dei potenziali ai nodi. Si ha infatti:

$$V_{AB} = \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Naturalmente la formula in questione, che prende il nome di formula di Millman, può essere generalizzata ad N generatori. Si ha:

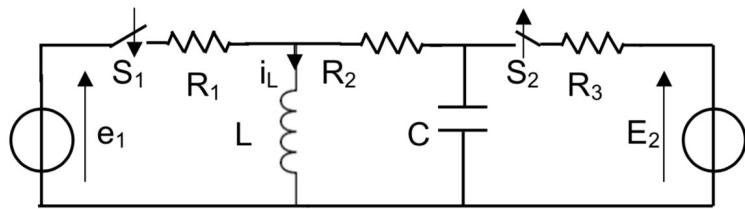
$$I_r = \frac{E_r - (V_A - V_B)}{R_r}$$

E sommando su r ed azzerando il risultato, per il rispetto della legge di Kirchhoff ad uno dei due nodi:

$$V_A - V_B = \frac{\sum_r \frac{E_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}}$$

Si noti che, dato che il rapporto tra la singola tensione di ogni ramo e la sua resistenza è nient'altro che la corrente di cortocircuito del particolare generatore, la formula di Millman ci dice che la tensione ai capi del parallelo di più generatori "reali" è data dal rapporto tra la somma algebrica delle correnti di cortocircuito dei singoli generatori e la somma delle conduttanze di ognuno di essi

1 Il Circuito

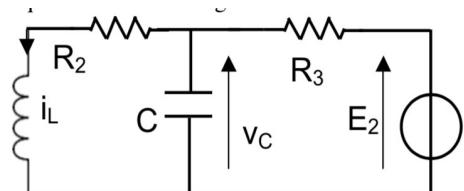


$R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$, $R_3 = 7 \Omega$, $C = 10/3 \text{ mF}$, $L = 300 \text{ mH}$

$e_1 = 100 \sin(40t - \pi/4) \text{ V}$, $E_2 = 20 \text{ V}$.

Il circuito è modificato all'istante $t=0$ dai due interruttori.

Per $t \leq 0$ il circuito si riduce a quello mostrato in figura.



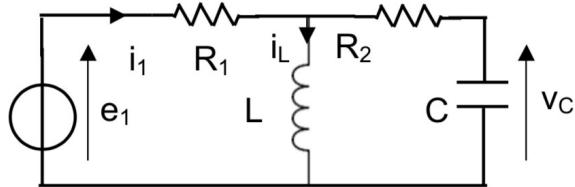
Poiché il condensatore in c.c. equivale ad un circuito aperto, la corrente in L per $t \leq 0$ è quella che circola in R_2 e quindi quella erogata dal generatore. In queste condizioni il generatore E_2 vede la serie di R_3 e di R_2 e quindi la tensione sul condensatore per $t \leq 0$ si ottiene ripartendo la tensione del generatore sulla serie di R_3 e di R_2 :

$$i_L(0) = \frac{E_2}{R_2 + R_3} = 2 \text{ A}$$

$$v_C(0) = R_2 \frac{E_2}{R_2 + R_3} = 6 \text{ V}$$

2 Regime dinamico

Per $t \geq 0$ il circuito è quello mostrato in figura.



Le equazioni che reggono il circuito sono:

$$e_1 = R_1 i_1 + v_L \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$v_L = R_2 i_C + v_C \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$i_1 = i_C + i_L$$

Eliminando i_1 utilizzando l'equazione ai nodi ed i_C ed i_L , utilizzando la caratteristica del condensatore e dell'induttore, si ottiene:

$$e_1 = R_1 \left(C \frac{dv_C}{dt} + i_L \right) + L \frac{di_L}{dt}$$

$$L \frac{di_L}{dt} = R_2 C \frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Ricavando $C dv_C / dt$ dalla seconda e sostituendolo nella prima si ottiene:

$$\begin{aligned} e_1 &= R_1 \left(\frac{1}{R_2} \left(L \frac{di_L}{dt} - v_C \right) + i_L \right) + L \frac{di_L}{dt} \\ L \frac{di_L}{dt} &= R_2 C \frac{dv_C}{dt} + v_C \end{aligned} \tag{2}$$

E ricavando v_C dalla prima

$$v_C = L \frac{di_L}{dt} - R_2 \left(\frac{1}{R_1} \left(e_1 - L \frac{di_L}{dt} \right) - i_L \right) \tag{3}$$

e quindi anche, derivando:

$$\frac{dv_C}{dt} = L \frac{d^2 i_L}{dt^2} - R_2 \left(\frac{1}{R_1} \left(\frac{de_1}{dt} - L \frac{d^2 i_L}{dt^2} \right) - \frac{di_L}{dt} \right)$$

Sostituendo ora i valori trovati di v_C e della sua derivata nella seconda delle (2) si ottiene l'equazione cercata:

$$L \frac{di_L}{dt} = R_2 C \left[L \frac{d^2 i_L}{dt^2} - R_2 \left(\frac{1}{R_1} \left(\frac{de_1}{dt} - L \frac{d^2 i_L}{dt^2} \right) - \frac{di_L}{dt} \right) \right] + L \frac{di_L}{dt} - R_2 \left(\frac{1}{R_1} \left(e_1 - L \frac{di_L}{dt} \right) - i_L \right)$$

Riordinando si ottiene:

$$CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{di_L}{dt} \left(R_2 C + \frac{L}{R_1} \right) + i_L = \frac{R_2}{R_1} C \frac{de_1}{dt} + \frac{e_1}{R_1}$$

ed in forma canonica

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} \left(\frac{R_e}{L} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \right) + \frac{i_L}{LC} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{R_1 + R_2} \frac{1}{LC} \left(R_2 C \frac{de_1}{dt} + e_1 \right)$$

dove si è posto

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

3 Equazione omogenea

L'equazione omogenea è:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} \left(\frac{R_e}{L} + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \right) + \frac{i_L}{LC} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0$$

e inserendo i valori numerici:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2} + 40 \frac{di_L}{dt} + \frac{2}{3} 10^3 i_L = 0$$

Le radici dell'equazione caratteristica sono, quindi:

$$\alpha \pm j\beta = \pm 20 \pm j16,33$$

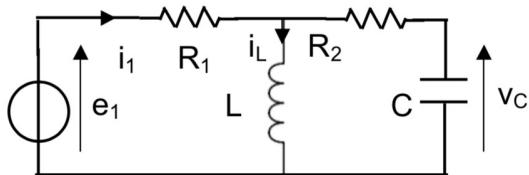
L'integrale generale dell'omogenea ha, dunque, la forma:

$$i(t) = A e^{\pm 20t} \sin(16,33t + \varphi)$$

4 Regime sinusoidale

Per determinare le costanti A e φ abbiamo bisogno anche della soluzione di regime.

[SEP] Passando al dominio dei fasori si ottiene facilmente l'impedenza vista dal generatore:



$$Z = R_1 + \frac{jX_L(R_2 - jX_C)}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

con $X_L = 12 \Omega$ e $X_C = 7.5 \Omega$

La corrente nell'induttore L si ottiene ripartendo nei due rami:

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{E}_1}{Z} \frac{R_2 - jX_C}{R_2 + j(X_L - X_C)}$$

$$Z = 20.77 - j10.15$$

Inserendo i valori numerici si ottiene (convenzione del valor efficace);

$$\bar{I}_1 = \frac{50\sqrt{2}(1-j)}{20,77 - j10,50} = \frac{5,77 - j1,90}{\sqrt{2}} = 4,08 - j1,34$$

ed

$$\bar{I}_L = \bar{I}_1 \frac{(6 - j7,5)}{6 + j4,50} = -1,55 - j5,28 = 5,50e^{-j1,86}$$

e quindi:

$$i_{LP}(t) = 5,50 \sqrt{2} \sin(40t + 1,86)$$

Luciano De Menna – Esercitazione

L'integrale generale dell'equazione completa è dunque:

$$i_L(t) = Ae^{-20t} \sin(16,33t + \varphi) + 5,50\sqrt{2} \sin(40t + 1,86)$$

5 Condizioni iniziali

Bisogna ora impostare le condizioni iniziali. Poiché la corrente i_L è una variabile di stato, abbiamo già la condizione sul suo valore all'istante 0⁺:

$$i_L(0^+) = i_L(0^{\square}) = 2 \text{ A}$$

 Bisogna calcolare la condizione iniziale sulla sua derivata.

Dall'equazione (3), valutata all'istante 0⁺

$$v_c(0^+) = L \frac{di_L}{dt} \Big|_{0^+} - R_2 \left(\frac{1}{R_1} \left(e_1(0^+) - L \frac{di_L}{dt} \Big|_{0^+} \right) - i_L(0^+) \right)$$

si ottiene facilmente il valore cercato:

$$\frac{di_L}{dt} \Big|_{0^+} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{1}{L} \left(v_c(0^+) + \frac{R_2}{R_1} e_1(0^+) - R_2 i_L(0^+) \right) = -\frac{1}{9\sqrt{2}} 10^3$$

D'altra parte della soluzione trovata si ricava, all'istante 0⁺:

$$i_L(0^+) = -A \sin \varphi - 5,50\sqrt{2} \sin(1,86) = 2$$

$$\frac{di_L}{dt} \Big|_{0^+} = 20 A \sin \varphi + 16,33 A \cos \varphi + 40 \left(5,50\sqrt{2} \cos(1,86) \right) = -\frac{1}{9\sqrt{2}} 10^3$$

Imponendo queste condizioni iniziali si trova il sistema:

$$Asen \varphi = \square 9,45$$

$$20Asen \varphi + 16,33Acos \varphi = -10$$

e quindi:

$$\varphi = \square 0,71$$

$$A = 14,50$$

In conclusione, la soluzione cercata è:

$$i_L(t) = 14,50e^{-20t} \sin(16,33t + 0,71) + 5,50\sqrt{2} \sin(40t - 1,86)$$

1 Spice

In effetti l'uso di codici numerici si giustifica per due ordini di motivi diversi. Da una parte, per reti lineari ma molto estese, cioè con un gran numero di nodi e di lati, la cui soluzione analitica, anche se semplice in linea di principio, può richiedere tempi di elaborazione proibitivi.

Dall'altra parte, la presenza di bipoli non lineari può rendere difficile, se non impossibile, una soluzione analitica. La presenza di entrambi questi elementi, come accade nei circuiti integrati di grandi dimensioni, rende spesso la soluzione numerica l'unica via praticabile.

Uno dei codici più diffuso, sia in ambiente di ricerca che in quello di produzione, è SPICE, acronimo che sta per "Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis".

Spice fu sviluppato al "Electronic Research Laboratory" dell'Università della California, e reso disponibile al pubblico, nel 1975. I motivi della grande diffusione di tale codice vanno ricercati, naturalmente, nella sua qualità e funzionalità, ma anche nella intelligente politica seguita dalla Università della California che ha consentito fin dall'inizio la diffusione gratuita del prodotto, in una versione ridotta, per scopi educativi. La differenza tra la versione completa e quella ridotta è nella consistenza della *biblioteca* di componenti prevista: mentre nella versione completa sono contemplate le caratteristiche di circa 5000 componenti diversi, la versione distribuita gratuitamente ne prevede solo 300. Dal punto di vista didattico questo, però, non costituisce una seria limitazione. Così anche le successive versioni di SPICE, elaborate da società di software commerciali, prevedono generalmente una edizione didattica gratuita. È il caso, per esempio, di LTspice, prodotto dalla *Linear Technology*, ora parte della *Analog Devices*, di cui esistono versioni per ogni tipo di *personal computers* o *work stations* e che rappresenta oggi, forse, l'edizione più evoluta di SPICE. Questa sua larghissima diffusione fa sì che oggi ogni casa produttrice che voglia mettere sul mercato un nuovo componente elettronico (si pensi per esempio a complessi circuiti integrati) ne prevede da subito una sua simulazione accurata integrabile con Spice.

2 Input di Spice

Per interagire con Spice occorre, naturalmente, utilizzare un linguaggio specifico del quale bisogna impadronirsi. Come per tutti i linguaggi, la via più efficiente per apprenderli è di provare a "parlarli". Una volta acquisita una iniziale base di conoscenza pratica, lo studio della "grammatica", cioè del "manuale", consentirà di approfondire la conoscenza del linguaggio in tutte le sue possibilità comunicative.

Naturalmente i manuali sono in rete, come pure ci sono diversi corsi video per imparare ad usare Spice (vedi bibliografia). Non tento neanche di consigliarne qualcuno: sono tutti buoni. Scegliete da voi. In queste brevi note mi limito a fornirvi soltanto i rudimenti per cominciare ad usare il programma utilizzando alcuni esempi semplici.

È il caso di sottolineare, però, che le grandi potenzialità di LTspice emergono chiaramente solo quando si affrontano circuiti complessi ed in presenza di non linearità dei componenti. Dovendoci limitare ai semplici circuiti trattati in un corso introduttivo come il nostro, tali potenzialità non sempre verranno sfruttate; si potrà avere a volte l'impressione di sparare ad un uccellino con il proverbiale cannone. Altre volte invece si sarà costretti a delle piccole forzature per indurre LTspice a fornire risposte indubbiamente molto elementari. Si ricordi che SPICE è stato progettato, come dice l'acronimo, con "enfasi ai circuiti integrati".

Come sappiamo, le informazioni che caratterizzano un circuito sono di due tipologie diverse: il grafo del circuito e le caratteristiche dei bipoli in esso presenti. Abbiamo anche fatto vedere che il grafo del circuito è tutto contenuto in una matrice, detta matrice di incidenza A, e le caratteristiche non sono altro che relazioni funzionali tra le tensioni e le correnti nei singoli bipoli, che non c'è alcuna difficoltà a dare ad un computer. L'input di un tale software potrebbe esser quindi un semplice file di testo contenente queste informazioni che consentirebbero al software, invertendo una opportuna matrice, di trovare la soluzione cercata, per esempio nella forma dei potenziali ai nodi della rete istante per istante. E così era nelle versioni originali di Spice. Ma la

Luciano De Menna – SPICE e LTSPICE

sorprendente evoluzione delle capacità grafica dei computer ha consentito di realizzare dei software aggiuntivi – di pre e post elaborazione – che ci consentono letteralmente di “disegnare” il circuito sullo schermo del computer e di visionare direttamente sullo stesso schermo l’andamento delle grandezze d’interesse. Naturalmente questi due software di pre e post elaborazione non hanno nulla a che fare con la soluzione vera e propria della rete sulla base delle leggi che abbiamo studiato: sono semplicemente degli strumenti grafici aggiuntivi, anche se di grandissima utilità!

Facciamo qualche esempio.

3 Carica di un condensatore

Vogliamo cominciare da un semplicissimo circuito di carica di un condensatore, mostrato in Fig.1: il condensatore, all'istante $t=0$ viene collegato ad un generatore di tensione costante E tramite un interruttore in chiusura e all'istante del collegamento il condensatore è scarico cioè $v_C(0)=0$.

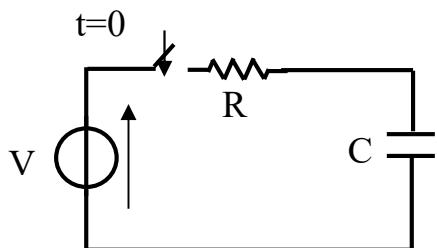


Fig. 1

Come esempio di utilizzo di un programma di pre-elaborazione per SPICE, nella lezione video abbiamo usato uno dei più diffusi, Schematic (<https://www.schematics.com/>) e “disegnato” un circuito di carica di un condensatore.

Proviamo a disegnare il circuito!

Quando si apre LTspice viene chiesto se si intende lavorare su di un circuito già “disegnato” in precedenza o se ne vuole creare uno nuovo; supponiamo di essere in quest’ultimo caso. Viene presentata allora una pagina bianca – in realtà grigia, ma comunque vuota – sulla quale dobbiamo disegnare il nuovo circuito. Nella lezione video io ho utilizzato la versione base di LTspice per Mac che è veramente poco friendly, bisogna lavorare solo col mouse e i due tasti, destro e sinistro. Altre versioni sono in vece dotate di tasti a video che permettono di attivare le stesse funzioni. Siamo comunque nell’ambito di quel software di pre-elaborazione di cui abbiamo parlato che, nel nostro caso, si chiama Schematics.

Volendo lavorare su di un circuito di carica di un condensatore, come mostrato in Fig.1, cominciamo con inserire un condensatore – o “capacitor”, termine inglese per condensatore, appunto. Bisogna attivare il menu a tendina con il tasto destro e poi scegliere “component” e

cercare "capacitor". Una volta trovato basta trascinarlo sullo schermo e sistemarlo dove si vuole, giocando sui tasti destro e sinistro del mouse. Poi cerchiamo, dallo stesso menù "wire", che sta per conduttore, e cominciamo a collegare il condensatore. A un certo punto ci fermiamo per lasciare spazio al resistore R, che cerchiamo sotto "resistor" nel solito menù a tendina. In questo caso il bipolo ci appare disposto verticalmente, ma premendo "control" + R contemporaneamente si ottiene la rotazione di 90° del bipolo stesso.

Poi andiamo avanti per disporre il generatore, che troviamo sotto V, per "voltage", e infine chiudiamo il circuito.

Spice – come è giusto che sia, non solo nel disegno del circuito, ma anche nella realtà – richiede che uno dei nodi sia a potenziale zero, nodo che chiamerà appunto nodo "0". Gli altri nomi dei nodi, come pure i nomi dei componenti, sono scelti ad arbitrio ed in sequenza (C1, C2 ecc., se ce ne fosse bisogno), ma comunque è possibile cambiare questi nomi a piacimento. Noi abbiamo

scelto il morsetto negativo del generatore come "ground" o nodo zero e questo triangolo è il simbolo che Schematics usa per segnalarlo.

Trovandoci, cambiamo anche tutti i nomi dei componenti come più ci aggrada – il solito giochetto di tasto destro tasto sinistro per richiamare e attivare i relativi menù.

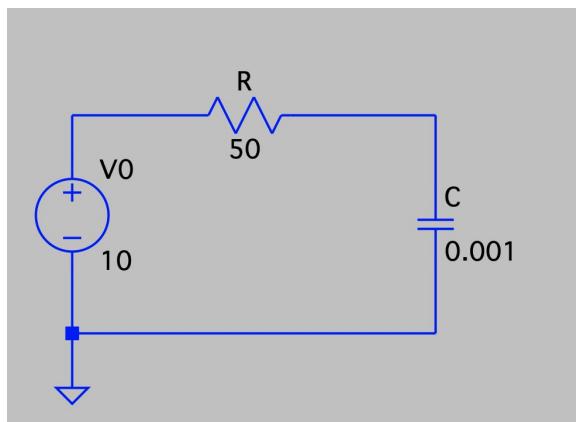


Fig.2

Con analogo sistema diamo le caratteristiche, in pratica i valori dei diversi componenti:

un condensatore di 1 mF, un resistore di 50Ω ed un generatore di 10 Volt.

Il risultato è, mostrato in Fig. 2.

Naturalmente mentre noi "disegniamo" il circuito Schematic si costruisce la matrice d'incidenza, quella delle conduttanze di lato e i vettori colonna dei generatori, in vista di una successiva inversione della matrice Y, ad ogni istante di tempo. Nel nostro caso questa è la "Netlist" che

Schematics ha preparato:

* Carica di C

C 2 0 0.001

R 2 1 50

V\$E 1 0 10

Come vedete, per ogni componente sono indicati i nodi tra i quali essi sono collocati ed il valore che ne individua la caratteristica: capacità in Farad, resistenze in Ohm e tensioni in Volt. Tutti questi campi sono semplicemente separati da uno spazio vuoto... veramente una codifica molto spartana ma efficiente.

Ed in modo altrettanto semplice Spice risolve il problema delle convenzioni dei versi, assumendo sempre la convenzione dell'utilizzatore per tutti i lati. Inoltre, per esempio per il resistore R2 del nostro caso, la tensione $V(R)$ è $V(2) - V(1)$ e la corrente $I(R)$ è quella che va da 2 a 1, perché 2 è il primo nodo indicato per la collocazione del bipolo in questione.

Noterete subito una fondamentale differenza tra il circuito che avevamo disegnato in precedenza e quello prodotto da Schematics: manca l'interruttore! In effetti quando c'è una sola dinamica da studiare (cioè un unico istante in cui nel circuito cambia qualcosa in modo da giustificare lo studio del transitorio) l'interruttore non è necessario, perché è sufficiente la conoscenza delle condizioni iniziali sui componenti a memoria – in questo caso il solo condensatore. Nel caso in cui non fossero indicate le condizioni iniziali, esse vengono assunte tutte nulle. Sono tali condizioni che ci individuano l'istante iniziale che per convenzione assumeremo $t=0$. Solo se durante questa prima dinamica dovesse intervenire una seconda modifica delle condizioni di funzionamento del circuito, sarebbe necessario un nuovo interruttore, che in effetti è previsto in LTspice come pure sono previsti interruttori più articolati, pilotati in tensione o in corrente. Ma questo argomento esula dal livello a cui abbiamo scelto di attenerci in questo corso,

Sul come funziona Schematics c'è poco altro da aggiungere: si tratta di imparare come "muoversi" sullo schermo del computer per costruire il circuito desiderato. Tra l'altro molto dipende dal sistema operativo utilizzato.

Luciano De Menna – SPICE e LTSPICE

I vari bipoli, attivi e passivi, vengono scelti dalla “Biblioteca” di Spice, quella ridotta.

Una volta disegnato il circuito bisognerà specificare a Spice quale tipo di elaborazione si desidera e questo si fa con dei comandi speciali che troverete in qualsiasi manuale di Spice in rete. Nel nostro specifico caso, utilizzando ancora una volta il menù a tendina e la opzione “spice directves” io scrivo due comandi che poi commenteremo dopo.

Diamo un’occhiata al file di testo che Schenatics fornisce a SPICE, per il semplice circuito di carica del condensatore che stiamo considerando.

* Carica di C

C 2 0 0.001

R 2 1 50

V\$E 1 0 10

.Tran 0.001 0.5 UIC

.backanno

.end

Questo semplice file di testo contiene tutte le informazioni necessarie. Il primo rigo, contraddistinto dall’asterisco iniziale è un commento, che Spice ignora. Le righe in nero descrivono il circuito: tra il nodo N001 ed il nodo 0 c’è un generatore di tensione – la prima lettera V del nome lo testimonia – del valore di 10 Volt, tra i nodi N002 ed N001 c’è una resistenza (prima lettera R) di 50 Ohm e così via. Infine in blu i comandi – contraddistinti da un puntino iniziale - che descrivono quello che vogliamo ci venga fornito. Il comando .TRAN in particolare ha questa sintassi:

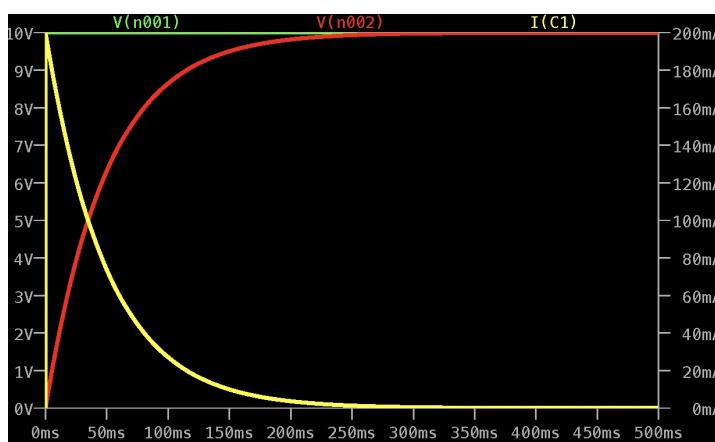
.TRAN Tstep Tstop <Tstart<Tmax>>

Che potremmo tradurre così: simula il transitorio a partire dall’istante zero – che è quello per il quale abbiamo fornito le condizioni iniziali – fino a Tstop e mostrami i risultati per tutte le grandezze in gioco a partire dall’istante Tstart e di Tstep in Tstep, cioè con un passo Tstep, che non è il passo di elaborazione ma solo il passo di esposizione dei risultati. Il passo d’integrazione Spice lo valuta indipendentemente secondo suoi criteri che tengono conto della rapidità di evoluzione del fenomeno simulato. Gli si può al più dire di non fare passi superiori a Tmax. Se quest’ultimo non è

indicato, viene assunto pari a $(T_{stop} - T_{start})/50$.

L'espressione .UIC indica a Spice di utilizzare le condizioni iniziali; in particolare, nel nostro caso, non essendo state indicate tali condizioni iniziali - con un comando del tipo .IC(C) o .IC(L) seguito da un valore - sono da ritenersi tutte nulle.

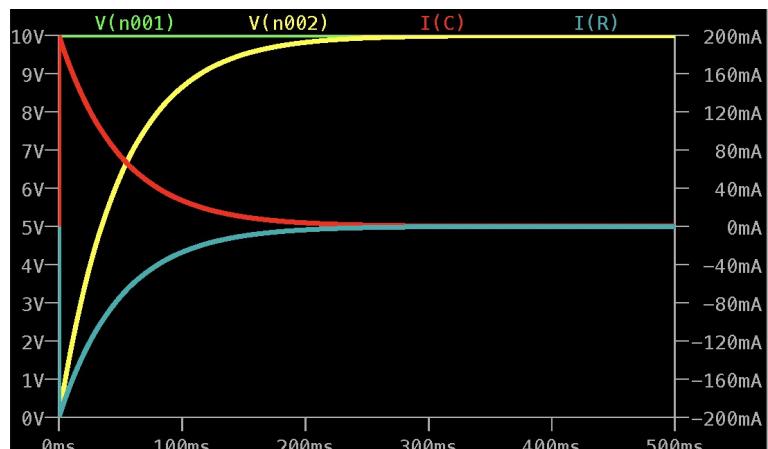
Il comando .end segnala, naturalmente, solo il termine dell'elenco dei dati, mentre il comando .backanno è una istruzione interna di Schematics che consente di mantenere la connessione tra lo schema e i risultati elaborati, in modo tale che alla fine dell'elaborazione sia possibile visionare gli andamenti delle grandezze semplicemente passando con il mouse sui diversi punti del circuito.



E infine i risultati dell'elaborazione in forma grafica: in verde la tensione sul generatore, che per definizione è costante, in rosso la tensione sul condensatore che mostra il caratteristico andamento della carica di un condensatore, e in giallo quello della corrente.

corrente. Possiamo valutare la costante di tempo sul tracciato: circa 50 msec, che è appunto il valore di RC nel nostro caso. Si noti il valore iniziale della corrente di carica che è pari a 200mA (scala a destra del disegno), valore che non era fornito in quanto la corrente, non essendo variabile di stato non è assegnata!

In questa seconda immagine ho soltanto aggiunto ai diagrammi già esistenti quello della corrente nel resistore. Che strano! Non dovrebbe essere uguale a quella del condensatore? Sono in serie. E poi il diagramma ha cambiato sensibilmente il suo aspetto. C'è



Luciano De Menna – SPICE e LTSPICE

qualcosa di sbagliato? No è tutto giusto. Se riuscite a spiegare perché siete a buon punto per capire come "ragiona" Spice.

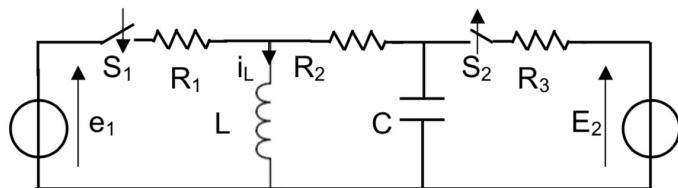
4 Verifica dei risultati dell'esercitazione

A questo punto possiamo verificare con Spice i risultati ottenuti nella esercitazione sul circuito RLC con due interruttori.

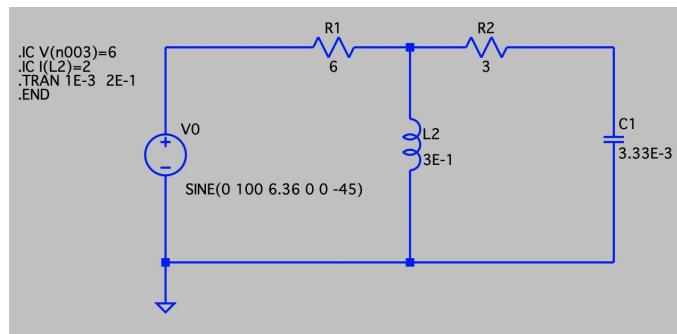
Si ricorderà che il circuito era quello mostrato, e i dati

$$R_1 = 6 \Omega, R_2 = 3 \Omega, R_3 = 7 \Omega, C = 10/3 \text{ mF}, L = 300 \text{ mH}$$

$$e_1 = 100 \text{ sen}(40t - \pi/4) \text{ V}, E_2 = 20 \text{ V}.$$



Abbiamo fornito a LTspice i dati del problema per $t \geq 0$ ed ecco il circuito:



e la corrispondente Netlist di Spice

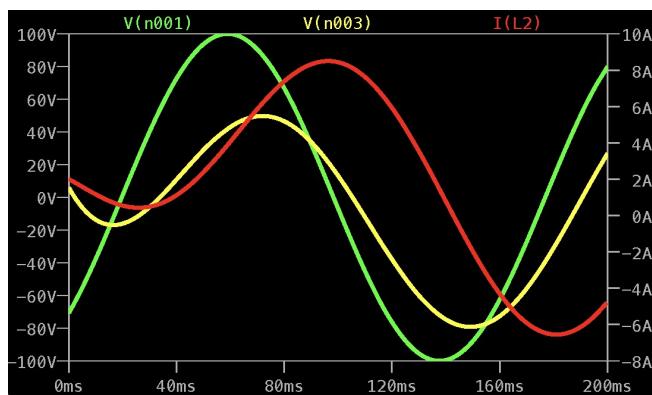
```
* /Users/lucianodemenna/Desktop/Materiali x Lezioni nMer/Dati LTSpice/
Tran 4.asc
R1 N002 N001 6
C1 N003 0 3.33E-3
L2 N002 0 3E-1
V0 N001 0 SINE(0 100 6.36 0 0 -45)
R2 N003 N002 3
.IC V(n003)=6
.IC I(L2)=2
.TRAN 1E-3 2E-1
.END
.backanno
.end
```

Si noti il comando che definisce il tipo di generatore presente:

V0 N001 0 sine(0 100 6.36 0 0 -45)

Che potrebbe essere tradotto così: tra i nodi N001 e 0 c'è un generatore sinusoidale di valor medio nullo (il primo 0 nella parentesi), valore massimo 100 (attenzione il valor massimo non il valor efficace!), e frequenza 6.36 Hz ($f = \omega/2\pi$). La forma d'onda ha ritardo 0 (cioè parte da $t=0$) e si attenua con un coefficiente di dumping (decadimento esponenziale) che nel nostro caso è anch'esso 0.

Ed ecco gli andamenti delle tensioni (in verde quella del generatore, in giallo quella del condensatore) e della corrente nell'induttore, in rosso. Si può facilmente effettuare qualche verifica numerica con l'espressione da noi trovata analiticamente:



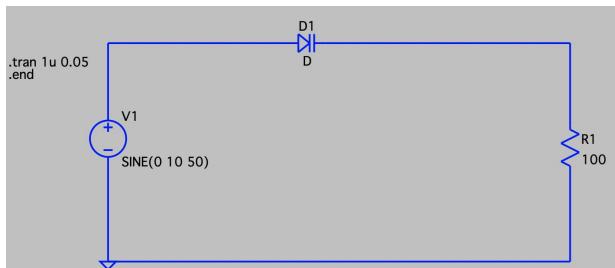
$$i_L(t) = 14,50e^{-20t} \sin(16,33t + 0,71) + 5,50\sqrt{2}\sin(40t - 1,86)$$

È immediato, per esempio, verificare che le condizioni iniziali di 2 A per la corrente nell'induttore, e di 6 V per la tensione sul condensatore sono rispettate.

5 Bipoli non lineari

Ma le vere potenzialità di Spice si apprezzano in particolar modo in presenza di bipoli non lineari.

Nel circuito mostrato nella seguente figura è presente un diodo, bipolo di cui abbiamo solo fatto

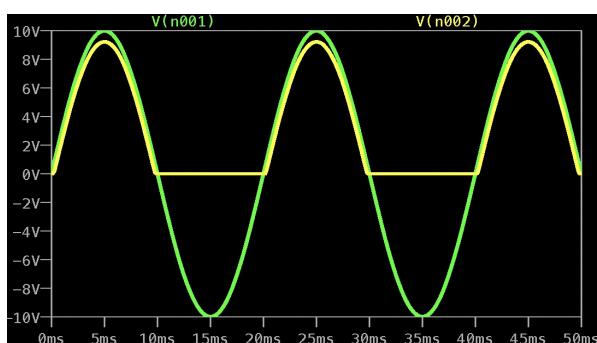


cenno, perché ci siamo limitati ai bipoli lineari. In ogni caso il diodo, almeno nel modello che vogliamo utilizzare, ha una caratteristica molto semplice: fa passare corrente solo per tensione positiva applicata ai suoi morsetti. Il simbolo da

una chiara indicazione su quale sia il verso consentito per le correnti. Ecco la Netlist di LTspice per questo circuito.

```
* /Users/lucianodemenna/Desktop/Cartelle da sistemare/Mercator/Lezioni
NewMod/Lezione_21/Dati LTSMerc/Diodo 1.asc
V1 N001 0 SINE(0 10 50)
D1 N001 N002 D
R1 N002 0 100
.model D D
.lib /Users/lucianodemenna/Library/Application Support/LTspice/lib/cmp/
standard.dio
.tran 1u 0.05
.end
.backanno
.end
```

Si noti che la caratteristica del diodo era già presente nella biblioteca di LTspice e quindi non abbiamo dovuto fare altro che richiamarla (standard.dio, model D).

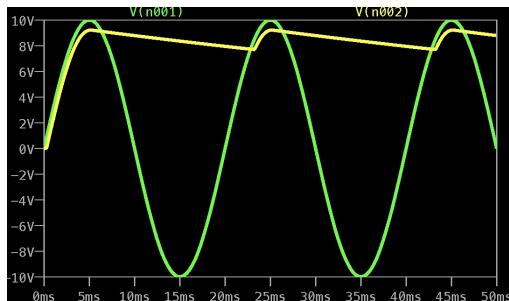
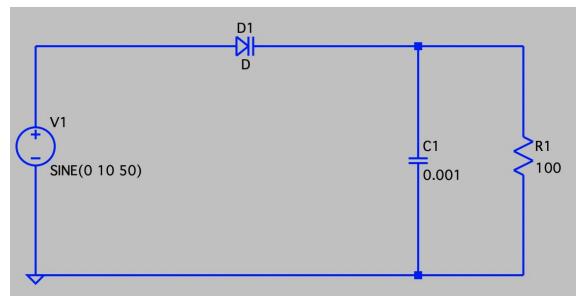


Ed ecco l'andamento della tensione del generatore (traccia verde), e quello della tensione sulla resistenza (traccia gialla). Questo è un elementare esempio di circuito raddrizzatore, che ha trasformato una tensione sinusoidale in una quasi "Unidirezionale". Le cose possono ancora migliorare

se s'inserisce un condensatore opportuno in parallelo al carico come nel circuito mostrato.

Nel tracciato corrispondente è ancora in giallo la nuova tensione sul carico R_1 .

È facile capire cosa accade. Nella semionda positiva della tensione del generatore il diodo si comporta come un c.c.- idealmente, naturalmente - e quindi il



generatore vede il parallelo del condensatore e del resistore. La corrente, seguendo l'andamento della tensione, cresce e carica il condensatore fin quasi al massimo della tensione. Quando quest'ultima comincia a diminuire il condensatore prende a scaricarsi con

costante di tempo R_1C fin quando la sua tensione non incontra di nuovo quella del generatore. A quel punto riprende a caricarsi per un successivo ciclo uguale al precedente.

In pratica il condensatore agisce come serbatoio di energia che interviene negli intervalli di tempo in cui il diodo non consente il passaggio della corrente.

1 Applicazioni Elettromeccaniche

Le applicazioni elettromeccaniche sono quelle in cui si producono trasformazioni di energia: da elettromagnetica a meccanica e viceversa. Perché venga messa in gioco un'energia meccanica è evidentemente necessario che una forza produca degli spostamenti: in pratica una tale forza deve spostare dei "pesi". Per questo motivo le forze elettromagnetiche in grado di produrre tali spostamenti vengono dette "ponderomotrici", dal latino "pondus", peso.

Come ben sappiamo esse sono di due tipi: forza dovuta al campo elettrico $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$, e forza dovuta al campo magnetico, $\mathbf{F}=q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, che agisce soltanto sulle cariche in movimento.

In primo luogo osserviamo che il campo magnetico in realtà non può direttamente compiere "lavoro" sulle cariche in movimento. Infatti la corrispondente forza della legge di Lorentz, $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, è diretta ortogonalmente alla velocità e quindi allo spostamento. Per uno spostamento infinitesimo

$d\mathbf{s}=\mathbf{v}dt$ il lavoro del campo di induzione magnetica \mathbf{B} sarebbe $q\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ e quindi nullo per le note proprietà del prodotto triplo. Si potrebbe dedurne erroneamente che il campo magnetico non sia utilizzabile in applicazioni elettromeccaniche. Erroneamente, perché in realtà il campo magnetico può fare lavoro sulle correnti. La differenza tra le due affermazioni si

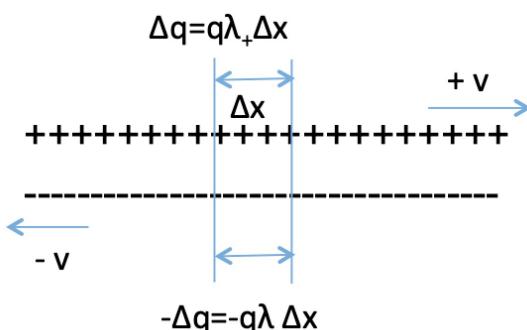


Fig. 1

può illustrare con il seguente esempio teorico.

Immaginiamo che la corrente sia costituita da due densità lineari λ_+ e λ_- , rispettivamente di cariche positive e negative, che si muovono con la stessa velocità, ma in direzione opposta, così come illustrato sinteticamente nella Fig. 1

In queste condizioni la carica positiva presente in un tratto di lunghezza Δx è $q\lambda_+ \Delta x = \Delta q$, mentre quella negativa $-q\lambda_- \Delta x = -\Delta q$, e se le due distribuzioni lineari hanno la stessa densità $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$, la carica totale sul tratto Δx di conduttore è nulla.

Ma a, causa delle opposte velocità delle due distribuzioni, non è nulla l'intensità della corrente I , cioè la quantità di carica che attraversa, nell'unità di tempo, la sezione del nostro conduttore. Infatti in un tempo Δt le distribuzioni si spostano rispettivamente di $v\Delta t$ e $-v\Delta t$, e quindi la carica che attraversa nello stesso intervallo di tempo la sezione del conduttore è $q \lambda v\Delta t - q \lambda (-v\Delta t) = 2q \lambda v\Delta t$ e quindi, nell'unità di tempo $2q \lambda v$, che per definizione è l'intensità della corrente I .

Veniamo ora alla forza esercitata da un campo magnetico - che per semplicità supponiamo ortogonale alla direzione della corrente - che si trovasse ad agire su queste cariche. Per la distribuzione di cariche positive in un tratto Δx si ha $q\lambda\Delta x(vB)$ e per la distribuzione di cariche negative $-q\lambda\Delta x(-vB)$, e tale forza è ortogonale sia a v (e quindi alla direzione del moto delle cariche) che a B . Nel complesso quindi la forza totale sarà $2 q \lambda \Delta x v B = I \Delta x B$ ed è diretta ortogonalmente sia a v che a B . Se il moto delle cariche avviene lungo un percorso obbligato, per esempio un filo conduttore, tale forza agirà sul conduttore nel suo complesso.

Proviamo a ricavare una formula un po' più generale: immaginiamo che in una spira conduttrice vi sia una densità di cariche relativamente libere di muoversi pari ad n tutte dello stesso valore $-q$ (è quello che in pratica avviene nei conduttori così detti di prima specie). La neutralità di ogni tratto di conduttore è assicurata dal reticolo degli ioni positivi (fissi), di egual densità, che costituiscono la struttura del conduttore. Per semplicità assumiamo che le cariche $-q$ abbiano tutte la stessa velocità v in modo da poter affermare che nel conduttore circola una densità di corrente $J = -q n v$. Distribuzioni più complesse delle velocità delle cariche complicano solo la matematica da adoperare, ma non mutano il risultato. Supponiamo ancora che nello spazio in cui il conduttore si trova, agisca un campo di induzione magnetica B . La forza che tale campo eserciterà su di un tratto di lunghezza dl della spira – e quindi di volume Sdl , se S è la sezione del conduttore – sarà dunque $-n(Sdl)qvxB = SdlJxB$.

Per calcolare la forza totale sulla spira bisognerà integrare a tutta la spira, ottenendo:

$$\mathbf{F} = \oint_{\gamma} S \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\mathbf{l} = \oint_{\gamma} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

Dove abbiamo semplicemente “passato” il segno di vettore da \mathbf{J} a $d\mathbf{l}$, dato che hanno la stessa direzione, e posto $SJ= I$ intensità della corrente, nel nostro caso semplificato.

Con un ragionamento solo un po' più formale avremmo potuto, dalle equazioni di Maxwell, dedurre direttamente che la forza ponderomotrice su di una spira conduttrice attraversata da una corrente di intensità I è data dalla relazione (1).

2 Confronto tra campo E e B

In effetti le "macchine" elettriche sono tutte basate sulle forze prodotte dal campo di induzione magnetica **B**.

Una prima indicazione del perché ciò accada si può ricavare calcolando il rapporto tra la densità di energia associata al campo elettrico $\epsilon_0 E^2/2$ e quella associata al campo magnetico $B^2/2\mu_0$ (naturalmente stiamo immaginando di essere nel vuoto o nell'aria):

$$\alpha = \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{E}{B}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{E}{B}\right)^2 \quad (2)$$

Il massimo valore ammissibile di campo elettrico nell'aria (rigidità dielettrica) è di circa 30 kV/cm; per campi più elevati l'aria perde le sue proprietà isolanti, perché le cariche in essa presenti si separano e quindi rendono conduttore il mezzo. Assumendo un fattore di sicurezza di circa 3, il valore massimo del campo che possiamo ipotizzare è di 10 kV/cm.

Per il campo magnetico invece, assumendo una densità di corrente

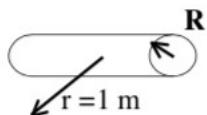


Fig.2

di 10 A/mm^2 - che è facilmente sopportabile da un buon conduttore - e usando la formula di Biot e Savart del campo prodotto da un conduttore rettilineo indefinito per semplificare i calcoli, dato che siamo interessati solo agli ordini di grandezza - si ottiene:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J\pi R^2}{2\pi r} = 2\pi \frac{R^2}{r} \quad (3)$$

dove R è il raggio del conduttore cilindrico, r è la distanza alla quale valutiamo B e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ è la permeabilità magnetica del vuoto (o aria). Calcolando il campo subito a ridosso del conduttore ($R=r$) e per $R=10 \text{ cm}$ (si pensi non al singolo conduttore ma ad un fascio di conduttori, facenti parte di un avvolgimento, di raggio equivalente di dieci centimetri), si ottiene un campo di circa 0.5 Tesla. In realtà con bobine massicce e sfruttando le proprietà dei materiali magnetici, è relativamente facile ottenere campi dell'ordine di grandezza di alcuni Tesla. In queste condizioni si ottiene che α è di circa 10^{-5} . In pratica la densità di energia che si può raggiungere con il campo

magnetico è molto maggiore di quella ottenibile con il campo elettrico.

3 Levitazione di un corpo conduttore

Per meglio concretizzare questa idea, immaginiamo di voler sostenere una sferetta di rame sospesa in aria contro la forza peso esercitata dal campo gravitazionale, sfruttando un campo elettrico, come mostrato nella Fig.3. Poiché il peso specifico del rame è di circa 10^4 Kg/m^3 , occorrerà una densità di forza di circa 10^5 N/m^3 . Anche ammettendo un campo di 30 kV/cm , cioè pari alla rigidità dielettrica dell'aria, sarebbe necessaria una densità di carica nella sferetta di circa:

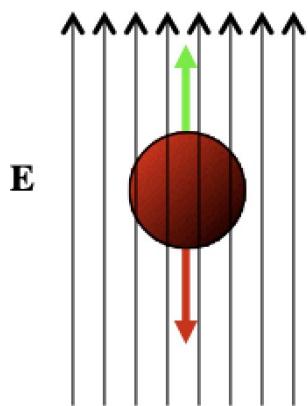


Fig. 3

$$\rho = \frac{F_d}{F} = \frac{10^5}{3 \cdot 10^6} \approx 3 \cdot 10^2 \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \quad (4)$$

Che questa densità non sia fisicamente realizzabile, con dimensioni ragionevoli, si comprende immediatamente se si calcola il campo E prodotto dalla carica complessiva sulla sferetta di rame immediatamente sulla sua stessa superficie:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{rp}{3\epsilon_0} \approx 10^7 \text{ V/m} \quad (5)$$

che è più di tre volte superiore alla rigidità dielettrica dell'aria. Il motivo fondamentale, quindi, per il quale il campo elettrico non è concretamente utilizzabile nelle applicazioni elettromeccaniche, sta nel fatto che il mezzo circostante, l'aria tipicamente, non è in grado di sostenere i campi che sarebbero richiesti dalle densità di forza necessarie. Infatti il campo elettrico agisce anche sulle cariche ferme, e quindi anche sulle cariche contenute nel mezzo circostante, provocandone, eventualmente la separazione.

Questo problema non è presente per il campo magnetico che come abbiamo visto agisce solo sulle cariche in movimento; infatti la densità di forza prodotta da un campo magnetico su di una densità di corrente \mathbf{J} è pari a $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ (che si ottiene immediatamente moltiplicando la forza sulla singola carica $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ per il numero di cariche dell'unità di volume n) e quindi per ottenere una

Luciano De Menna – Forze Ponderomotrici

densità di forza di 10^5 N/m³, anche ammettendo una densità di corrente di soli 5 A/mm², bastano pochi centesimi di Tesla.

Nel caso del campo B, il limite alla sua intensità è imposto dagli sforzi che si producono negli avvolgimenti che creano il campo.

1 I materiali ed il campo magnetico

Fino ad ora abbiamo sempre immaginato il campo elettromagnetico agire nel vuoto e per questo motivo abbiamo sempre utilizzato ϵ_0 , costante dielettrica, e μ_0 , permeabilità magnetica, i due parametri che caratterizzano il comportamento del vuoto dal punto di vista elettromagnetico. A questo punto però – dovendo parlare delle macchine – dobbiamo necessariamente fare un cenno ad altri materiali e ai loro comportamenti quando sottoposti a un campo elettromagnetico. Per la stragrande maggioranza dei casi, i comportamenti dei materiali non sono dissimili da quelli del vuoto, tanto che basta – non sempre, ripeto – assegnare loro un diverso valore della costante dielettrica e della permeabilità magnetica e trattarli in maniera analoga a quanto facciamo per il vuoto. Per esempio, l'aria, si può dire che abbia una ϵ ed una μ poco diverse da ϵ_0 e μ_0 , e definire una costante dielettrica relativa $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ e $\mu_r = \mu / \mu_0$, prossime ad 1, per caratterizzarla. Naturalmente nei dielettrici dei condensatori abbiamo bisogno che la costante dielettrica relativa sia molto maggiore di 1, ma non è necessario complicare in altra maniera la loro descrizione.

Anche per il comportamento magnetico, e per la stragrande maggioranza dei materiali, accade la stessa cosa. Ma c'è però una famiglia di materiali che invece fa eccezione e, non solo non basta prendere in considerazione una μ_r molto elevata, ma viene a mancare anche la possibilità di una descrizione semplice della relazione tra causa – le correnti – ed effetto, il campo magnetico. Vengono detti materiali ferromagnetici perché in generale sono materiali che contengono ferro, ma non solo.

2 Il campo **B** ed il campo **H**

Cerchiamo di spiegare semplicemente questi fenomeni e da dove prendono origine.

Che un elettrone orbitante attorno al suo nucleo sia equivalente ad una piccola spira attraversata da corrente, è facile da comprendere. Meno evidente è il fatto che anche il moto di rotazione di un elettrone intorno al suo asse sia equivalente ad una spira di corrente: l'aver immaginato l'elettrone come carica puntiforme non ci aiuta in questo caso. È comunque evidente che, qualunque sia l'origine di queste sorgenti elementari, noi possiamo sempre e immaginarle come piccole spire di corrente, agenti nel vuoto, e scrivere quindi la terza equazione di Maxwell alla maniera seguente:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \mathbf{J}_m \quad (6)$$

Dove con \mathbf{J}_m abbiamo indicato la densità di corrente equivalente a tutte queste correnti atomiche della quali, a differenza di \mathbf{J} , non abbiamo noi il controllo diretto.

Per la conservazione della carica, appare del tutto evidente che bisogna chiedere a questo vettore densità equivalente di corrente \mathbf{J}_m di avere divergenza nulla e che quindi possa essere messo sotto forme di un rotore di un altro vettore \mathbf{M} che chiamiamo densità di magnetizzazione.

In conclusione la 6 può anche essere scritta:

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \quad (7)$$

dove si è posto: $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ ed implicitamente definito un nuovo vettore $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ il cui rotore dipende solo da noi in quanto pari alle correnti esterne che creano il campo, da noi direttamente controllate. Il vettore \mathbf{M} , come si è detto, prende il nome di densità di magnetizzazione ed il vettore $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$ quello di campo magnetico, mentre a \mathbf{B} resta il nome di campo di induzione magnetica.

In forma integrale, la relazione (7) è:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S_{\gamma}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}_{\gamma} = I \quad (8)$$

dove I è il flusso totale della densità di corrente \mathbf{J} che attraversa una superficie che si appoggia al contorno di integrazione γ . Nel contesto dei campi magnetici creati da correnti che circolano in avvolgimenti, spesso al posto della I totale figura Nl dove N è il numero di spire dell'avvolgimento in questione, come per esempio nella condizione della Fig.5

Nel vuoto \mathbf{B} e \mathbf{H} sono proporzionali, perché \mathbf{M} è nulla, e la costante di proporzionalità è μ_0 , e questo è vero anche, come si diceva, per la stragrande maggioranza dei materiali, senza neanche dover cambiare di molto il valore della costante di proporzionalità.

3 Diamagnetici, Paramagnetici e Ferromagnetici

Permeabilità relativa di materiali ferromagnetici	
Ghisa	70
Ferro puro	25.000
Lega Fe-Si	30.000
Supermalloy	100.000

Fig. 4

A voler essere più precisi tutti i materiali potrebbero essere divisi in due grandi categorie: i *diamagnetici* con una μ_r relativa leggermente minore di uno, e quelli *paramagnetici* con una μ_r relativa poco maggiore di uno.

A titolo di esempio di materiali

paramagnetici, si ricorda che la permeabilità relativa dell'aria è di circa 1,0000004 – dipende dalle condizioni fisiche e chimiche del mezzo – e quella del platino è di 1,0003. Mentre, come esempi di materiali diamagnetici, possiamo ricordare il rame, $\mu_r = 0,999991$, ed il bismuto, $\mu_r = 0,99984$.

C'è però una terza categoria di materiali, che, se potesse essere descritta con un solo parametro, avrebbe un valore estremamente elevato della μ_r relativa: valori di alcune decine di migliaia ed anche più. Alcuni esempi sono riportati nella tabella di Fig.4.

In effetti, però, il comportamento di questi materiali non è descrivibile in modo così semplice. Anzi non è neanche più possibile parlare di una vera relazione funzionale tra **B** e **H**.

Per comprendere tale affermazione si può immaginare di magnetizzare un provino di un materiale di tale tipo, che non abbia mai subito in precedenza l'azione di un campo magnetico, o come si dice, vergine. Questa non è solo un'ipotesi astratta: si può far vedere che è possibile ricondurre alle condizioni di materiale vergine, anche un provino che abbia già subito in precedenza una magnetizzazione.

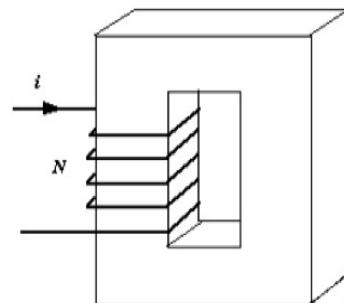
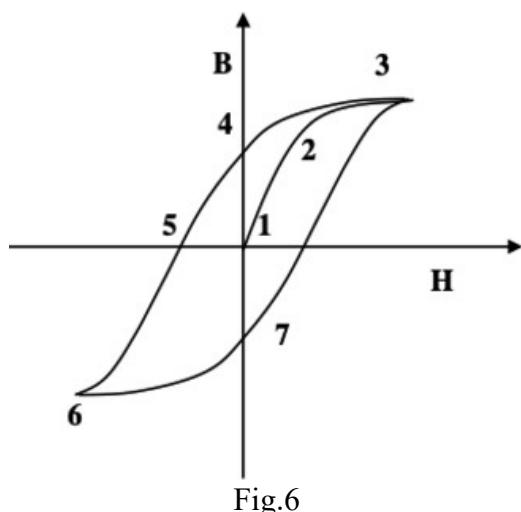


Fig.5



Dei due campi, \mathbf{H} e \mathbf{B} , quello che è direttamente da noi controllabile è \mathbf{H} ; infatti la circuitazione di \mathbf{H} deve sempre essere uguale alla forza magnetomotrice Ni . Quindi, per una stessa configurazione geometrica, aumentando la corrente i il campo \mathbf{H} deve crescere proporzionalmente. Per indagare quindi il comportamento di un provino di materiale ferromagnetico, possiamo immaginare di variare la corrente in un avvolgimento che si concatena con il

provino stesso, come mostrato in figura 5.

Immaginando di partire dalle condizioni di campi \mathbf{B} ed \mathbf{H} nulli (materiale vergine), cioè il punto 1 nella fig. 2, per un primo tratto il legame (H,B) è praticamente lineare.¹ Successivamente la pendenza della curva diminuisce fino a diventare quasi orizzontale; in effetti, per valori elevati di H la pendenza della caratteristica (H,B) è tale che $\tan\beta=\mu_0$. In questo tratto della caratteristica si dice che il materiale è in saturazione.

Se a partire dalle condizioni di saturazione, si diminuiscono i valori del campo H , la caratteristica non passa per gli stessi punti precedenti, ma percorre il tratto 3-4, presentando quindi una induzione B "residua", anche in assenza di campo H (punto 4).

Invertendo il campo fino a raggiungere il punto 5 (dove B è stato ricondotto a zero, ed il valore di \mathbf{H} in grado di far questo prende il nome di *forza coercitiva*), e poi fino ad un valore di \mathbf{H} simmetrico rispetto a quello raggiunto nel punto 3, la caratteristica percorre il tratto 5-6 e, successivamente, invertendo ancora il campo H , raggiunge il punto 7 ed infine il punto 3, disegnando un ciclo simmetrico che viene detto *ciclo d'isteresi*. Naturalmente, quello descritto è il caso di ciclo simmetrico, ma si possono avere cicli non simmetrici che complicano ulteriormente la situazione.

¹ In effetti il primissimo tratto di questa curva, che prende il nome di curva di prima magnetizzazione, non è lineare, ma parabolico, con tangente iniziale quasi orizzontale.

Come si capisce facilmente, il comportamento di tali materiali, è estremamente complesso e di difficile caratterizzazione. In pratica non si potrebbe parlare neanche di una dipendenza funzionale di B da H , visto che i valori di B che si ottengono per uno stesso valore di H dipendono

dalla storia delle magnetizzazioni precedenti subite dal materiale.

Noi non possiamo, in questa sede, addentrarci in questa problematica che richiederebbe molto più tempo e rimandiamo per questo ad altri testi.

Dal nostro punto di vista ci basta notare che, se il materiale presenta un comportamento caratterizzabile con un ciclo d'isteresi abbastanza stretto, tale

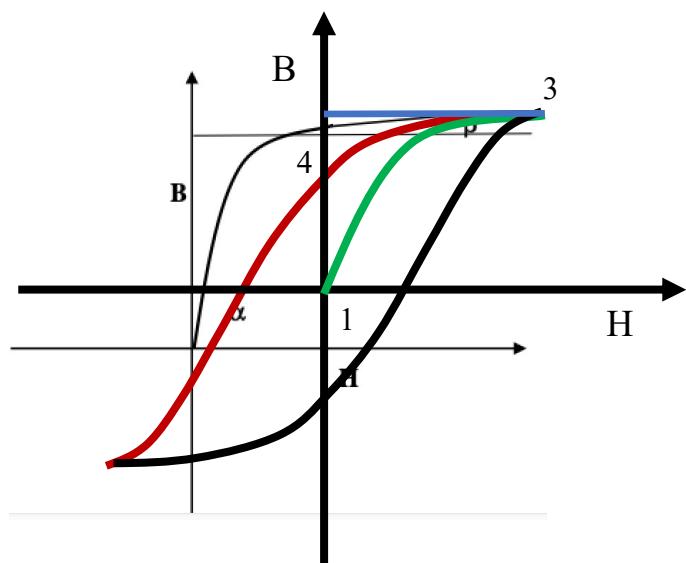


Fig.7

ciclo può essere approssimato dalla sua linea mediana e quindi si può trattare il materiale come se avesse una caratteristica del tipo mostrato nella Fig. 7. Nel primo tratto il materiale è praticamente lineare, ma con una $\mu_r = \tan \alpha$ molto elevata, mentre nell'ultimo tratto la caratteristica è praticamente orizzontale con una $\mu_r = \tan \beta$ praticamente uguale a μ_0 .

Nel seguito, quando parleremo di materiali ferromagnetici lineari, intenderemo appunto riferirci a tali materiali e supporremo di essere nel primo tratto della caratteristica.

C'è però un aspetto importante che in questa approssimazione si rischia di perdere completamente e che invece ha delle conseguenze pratiche non trascurabili: la presenza di un ciclo di isteresi, infatti, comporta una dissipazione di energia, che puntualmente si ritrova in calore nei materiali coinvolti, nel nostro caso i materiali ferromagnetici di cui la macchina è fatta.

Per convincersene basta ricordare che l'energia per unità di volume necessaria per portare il campo B da un valore nullo ad un valore assegnato B_s è data da

$$\int_0^{B_s} H dB$$

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

Luciano De Menna - I materiali magnetici

È cioè pari all'area sottesa dalla curva $H(B)$ percorsa per andare da $B=0$ a $B=B_s$. Ora, dalla figura è evidente che tale area per il tratto di prima magnetizzazione, dal punto 1 al punto 3 (e quindi energia fornita al materiale) è maggiore di quella relativa al tratto di ritorno, dal punto 3 al punto 4, (e quindi energia restituita dal materiale). Si comprende anche che, se si percorresse un intero ciclo fino a ritornare al punto 1, l'energia non restituita, e quindi dissipata in calore, sarebbe proporzionale all'area del ciclo d'isteresi stesso. Di quest'energia bisognerà tenere conto nelle "perdite", e quindi nel rendimento delle diverse macchine.

1 I materiali ferromagnetici

Per comprendere il ruolo giocato nelle applicazioni dai materiali ferromagnetici – che in questo paragrafo assumeremo sempre lineari - supponiamo di fare un'ulteriore approssimazione radicale: visto che la μ del materiale in questione è enormemente più grande di quella del mezzo circostante, assumiamo addirittura che essa sia infinita. Naturalmente, quello che dedurremo in questo modello a $\mu=\infty$ sarà solo indicativo del comportamento di tali materiali.

Dovremo distinguere due casi:

Caso a: la regione dello spazio occupata dal materiale ferromagnetico è tale che non sia possibile ridurre una qualsiasi linea chiusa al suo interno ad un punto

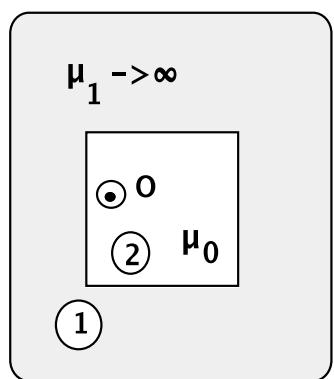


Fig. 1a

senza uscire dal dominio stesso, ed inoltre tale regione concatena delle correnti, come schematicamente mostrato in Fig 1a, dove il punto indicato con O

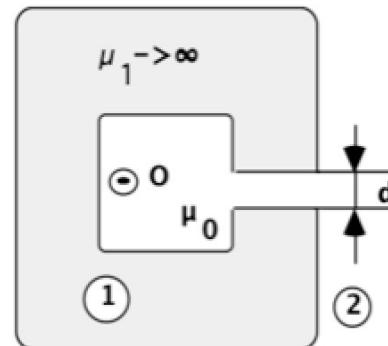


Fig. 1b

rappresenta, appunto, la traccia della corrente concatenata.

In matematica si parla di dominio "non a connessione lineare

semplice". Per dirla in modo "brutale" il dominio ha dei buchi al suo interno.

In queste condizioni, come vedremo, possiamo supporre che le linee del campo B siano intrappolate all'interno del materiale ferromagnetico e non ne possano uscire fuori.

Caso b: la regione dello spazio occupata dal materiale ferromagnetico costituisce un dominio a connessione lineare semplice a causa di un piccolo taglio – che verrà detto *traferro* nel seguito – praticato nel materiale stesso. In questo caso, schematicamente rappresentato in Fig 1b, come vedremo si deve ritenere che il campo B nel traferro sia molto più grande del campo B in

qualsiasi altra parte dello spazio circostante non occupato dal materiale ferromagnetico. In pratica il materiale convoglia le linee del campo verso il traferro e si può, in prima approssimazione trascurare il campo all'esterno.

2 Condizioni di raccordo dei campi

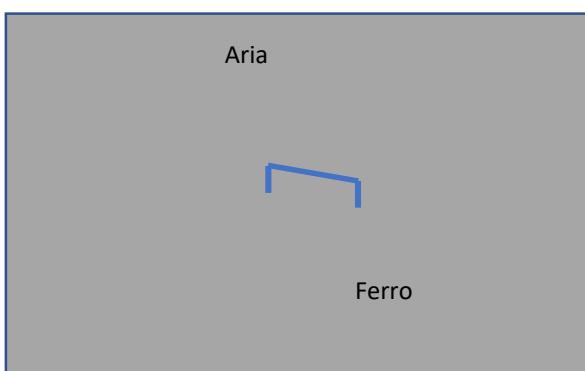
Nell'esaminare i due casi indicati dovremo tener conto delle condizioni di raccordo tra i campi sulla superficie di discontinuità tra due mezzi, che affermano che la componente normale del campo B e la componente tangenziale del campo H debbono conservarsi nel passaggio da un mezzo all'altro.



Infatti dato che la divergenza di B è nulla il flusso di B attraverso una superficie chiusa deve essere necessariamente nullo.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Applichiamo questa condizione ad una superficie infinitesima a forma di moneta disposta a cavallo della superficie di separazione tra due mezzi diversi, immaginando di far tendere a zero lo spessore della "moneta" in questione, in modo che il flusso uscente di B dalla superficie laterale tenda a zero, perché la superficie laterale tende a zero. Dato che il flusso uscente complessivo dalla superficie a moneta deve essere nullo dovremo richiedere che il contributo al flusso della



faccia superiore sia uguale e opposto a quello della faccia inferiore, il che implica che le componenti normali di B , da una parte e dall'altra della superficie di separazione dei due mezzi, debbano essere necessariamente uguali. La divergenza di H , invece, non è nulla e quindi la componente

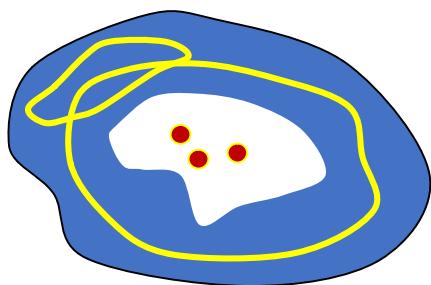
normale di \mathbf{H} può essere discontinua sulla superficie di separazione.

In maniera del tutto analoga, dato che la circuitazione di \mathbf{H} lungo una linea chiusa deve essere uguale alla corrente concatenata dalla linea, se applichiamo questa proprietà ad una linea a forma di piccolo rettangolo a cavallo tra i due mezzi, sempre con l'idea di far tendere a zero i lati ortogonali alla superficie del rettangolo, e in assenza di correnti superficiali, tale circuitazione dovrà

necessariamente essere nulla, perché non concatena alcuna corrente. Di conseguenza la componente tangenziale di **H** alla superficie di separazione tra i due mezzi devrà essere continua.

3 Il modello a permeabilità infinita

Tornando al nostro modello a permeabilità infinita, avendo portato all'infinito il valore della μ_r nel ferro, non possiamo escludere che alcune componenti dei campi vadano anch'esse all'infinito; dobbiamo però escludere che il campo B nel vuoto (o aria) in cui il materiale è immerso, possa divergere. Infatti, se in un punto P dello spazio circostante si dovesse avere un campo B infinito, questo comporterebbe una forza infinita su di una particella carica che si trovasse a passare per quel punto con una velocità finita. Forza infinita significa accelerazione infinita e quindi un salto nell'energia cinetica della particella che non possiamo accettare se vogliamo che il nostro modello, anche se estremo, sia però energeticamente coerente e conservi l'energia, appunto. Un campo B infinito nel ferro, invece, si può accettare perché in quel punto non può "passare" una particella libera di muoversi e la forza di Lorentz in quel caso non ha più lo stesso significato. Ricordate che stiamo ragionando in una situazione ideale in cui la permeabilità relativa del materiale ferromagnetico sia infinita, per poter ricavare una indicazione su come debbono comportarsi i campi nelle condizioni in cui la permeabilità relativa sia "solo" molto grande!



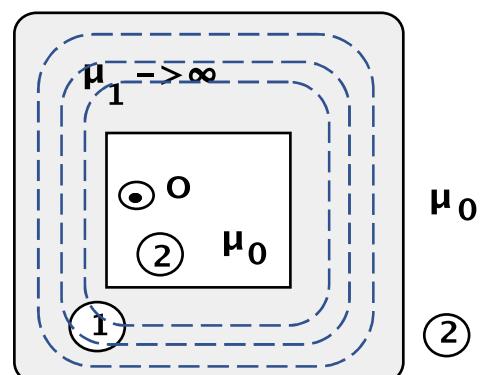
Da questa considerazione si ricava immediatamente che la componente normale alla superficie di separazione del campo H , nei punti della superficie stessa, deve essere necessariamente nulla; se infatti così non fosse sarebbe infinita la componente normale di B nel ferro e quindi, per

continuità, anche quella di B nell'aria, il ché noi abbiamo escluso.

Passiamo ora ad esaminare i due casi:

Caso a)

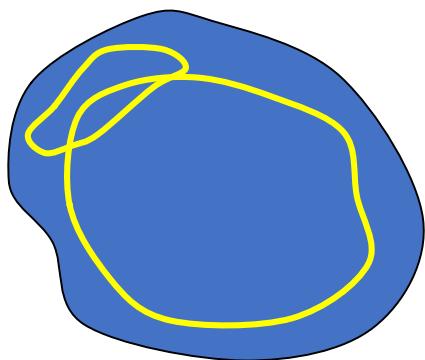
In questo caso H nel ferro non può essere identicamente nullo, perché altrimenti la sua circuitazione lungo una linea chiusa tutta nel ferro sarebbe anch'essa nulla, il ché è in contraddizione con il



fatto che tale linea, per le ipotesi fatte, potrebbe concatenare una corrente – di cui i puntini rossi in figura sarebbero la traccia. Se ne conclude che in questo caso nel ferro il campo **B** è illimitato, perché il campo **H** deve essere finito, e le sue linee, avvicinandosi alla superficie di separazione, debbono tendere a diventare tangenti ad essa, perché la componente normale di **H** deve annullarsi sulla superficie, altrimenti avremmo una componente normale di **B** infinita che si conserverebbe anche all'esterno: Il campo si comporta proprio come se le sue linee fossero intrappolate nel ferro.

Questa configurazione geometrica può essere denominata “del trasformatore”, perché è quella normalmente usata per consentire un accoppiamento migliore tra due avvolgimenti disposti, in punti diversi, attorno al materiale ferromagnetico (nucleo).

Caso b)



In questo caso, essendo il dominio a connessione lineare semplice, la presenza della corrente non obbliga a ritenere **H** diverso da zero nel ferro; tutte le linee chiuse interamente nel ferro, infatti, non concatenano nessuna corrente. Anzi sarebbe facile far vedere che in queste condizioni **H** deve essere necessariamente nullo nel ferro.

Il quadro che il nostro modello fornisce in questo caso è quello di un campo **B** limitato nel ferro, perché **H** è nullo, le cui linee di forza emergono, nel mezzo circostante, normalmente alla superficie, come schematicamente mostrato nella Figura 2 e 3.

Il materiale ferromagnetico in questo caso, tende a concentrare le linee del campo nel traferro, producendo in esso un campo molto più forte di quello che ci sarebbe in assenza di ferro.

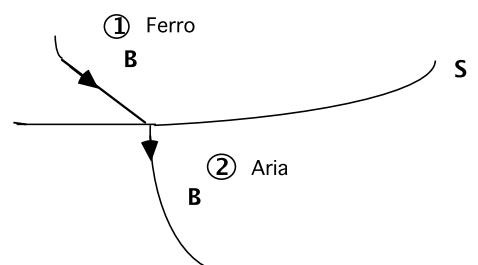


Fig.2

Infatti consideriamo la situazione geometrica descritta in Fig.3, dove l'ampiezza d del traferro è stata esagerata per ragioni di chiarezza espositiva. Le due linee γ e γ_1 concatenano la stessa forza magnetomotrice e quindi la circuitazione del campo \mathbf{H} lungo tali linee deve dare lo stesso valore Ni.

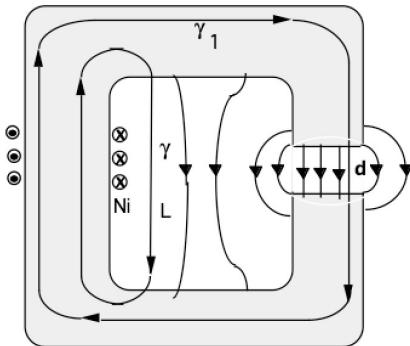


Fig.3

Ma dato che il campo \mathbf{H} nel ferro è nullo (approssimazione della permeabilità infinita), tali circuitazioni si riducono a \mathbf{H}_{mL} e \mathbf{H}_{fd} rispettivamente, dove H_m e H_f rappresentano i campi medi lungo le due linee. Poiché $L \gg d$, se ne deduce $H_f \gg H_m$. La configurazione di cui al caso b) può dirsi del "motore" o del "generatore" in quanto è appunto quella tipica di tali dispositivi. In essi infatti, la presenza di un traferro è evidentemente necessaria per consentire il movimento di alcune parti rispetto ad altre.

4 I Circuiti Magnetici

Le considerazioni appena svolte possono portare ad un'interessante analogia.

Dalla relazione $Ni = H_f \delta$ moltiplicando e dividendo il secondo membro

per $\mu_0 S$, dove S è la sezione del traferro, si ottiene:

$$Ni = \frac{\mu_0 S}{\mu_0 S} H_f \delta = B_f S \frac{\delta}{\mu_0 S} = R \Phi \quad (1)$$

che ricorda la relazione $E = RI$ che rappresenta l'equazione all'unica maglia di un circuito elettrico del tipo mostrato in figura 4. Il termine $R = \delta / \mu_0 S$, che gioca il ruolo della resistenza R , prende il nome di riluttanza.

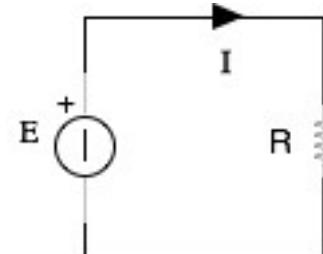


Fig. 4

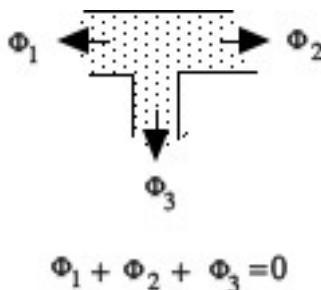


Fig.5

Si può quindi immaginare di presentare le due leggi fondamentali del campo magnetico stazionario in forma "circuitale". Infatti, la solenoidalità del campo B , che impone che il flusso uscente da una superficie chiusa sia identicamente nullo, se si trascura completamente il campo fuori del ferro, può essere vista come una sorta di legge di Kirchhoff ai nodi, come schematicamente mostrato in Fig.5, mentre la legge di Ampère sulla circuitazione di H può essere

vista, in base alla (1) - che per questo motivo prende il nome di legge di Ohm per i circuiti magnetici o legge di Hopkinson - come l'espressione di una seconda legge di Kirchhoff, nella quale le riluttanze dei traferri prendono il posto delle resistenze e le forze magnetomotrici Ni quello dei generatori ideali di tensione. Quindi, per esempio, il circuito magnetico di Fig.6 può essere, in prima approssimazione, studiato considerando il circuito elettrico associato di Fig. 7 in cui sono state stabilite le seguenti corrispondenze:

$$E \square Ni; \quad R_1 \square R_1 = \delta_1 / \mu_0 S_1; \quad R_2 \square R_2 = \delta_2 / \mu_0 S_2;$$

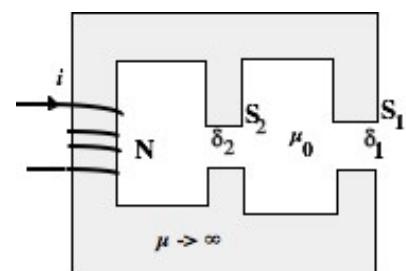
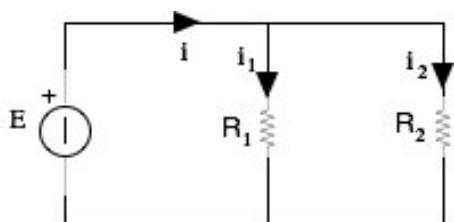


Fig.6

i_1 ; i_2 ; $i_1 i_1$; $i_2 i_2$



dove, rispettivamente, \square è il flusso che interessa la colonna sulla quale sono avvolte le Ni amperspire e \square_1 e \square_2 i flussi nelle due colonne verticali.

Fig.7

Per riassumere questo sintetico quadro si può dire che le macchine elettriche, e più in generale qualsiasi dispositivo elettromeccanico, può essere visto come l'insieme di parti in rame, per portare le correnti necessarie a produrre i campi magnetici, di parti in ferro necessarie per "portare" e "concentrare" il flusso del campo magnetico, senza eccessive dispersioni, nelle zone - i traferri - in cui l'azione elettromeccanica deve avere luogo, e di materiali isolanti necessari per tenere separate le diverse parti tra di loro ed al loro interno.

1 L'Accoppiamento Mutuo ed il Trasformatore

Abbiamo già introdotto il doppio bipolo accoppiamento mutuo: due avvolgimenti disposti in maniera tale che le linee del campo **B** prodotte da uno di essi si concatenino anche con il secondo.

Le equazioni caratteristiche di questo due-porte sono riportate nella Fig.1.

Sappiamo anche che motivi di compatibilità energetica richiedono che i due coefficienti di mutua induzione (*M*) siano uguali e che l'energia immagazzinata dal doppio bipolo in questione è pari a:

$$W = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

Inoltre dividendo tale energia per il quadrato della corrente i_1 si ottiene la funzione di x (rapporto tra le due correnti) che è plottata in Fig.2.

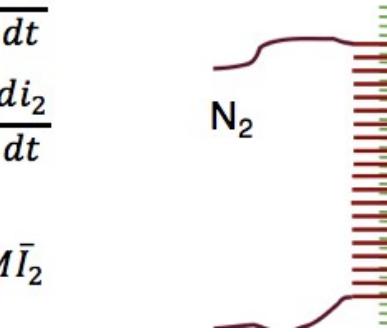


Fig. 1

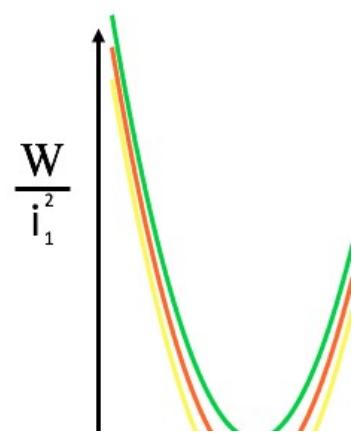


Fig.2

$$\frac{W}{i_1^2} = \frac{1}{2} L_{11} + Mx + \frac{1}{2} L_{22} x^2$$

$$\frac{i_2}{i_1}$$

$$\bar{V}_1 = Z_{11} \bar{I}_1 +$$

$$\bar{V}_2 = Z_{21} \bar{I}_1 +$$

Fig.3

È evidente che la curva gialla va necessariamente scartata in quanto comporterebbe valori negativi dell'energia immagazzinata,

mentre la curva rossa, tangente all'asse delle x, corrisponde al caso in cui $M^2 = L_1 L_2$, che viene detto accoppiamento perfetto; infatti se essa è verificata, esiste una coppia di valori di i_1 ed i_2 per i quali risulta $W = 0$.

Ma dato che per annullare l'energia magnetica associata ad un campo magnetico bisogna necessariamente annullare lo stesso campo magnetico in ogni punto dello spazio, l'affermazione precedente equivale alla seguente: se l'accoppiamento è perfetto, è possibile annullare completamente il campo prodotto dalla corrente in uno dei due circuiti, facendo circolare nell'altro una opportuna corrente. E ciò giustifica evidentemente il fatto che tale condizione si dica di accoppiamento perfetto.

Il coefficiente $k = M / \sqrt{L_1 L_2}$, è detto coefficiente di accoppiamento, esso varia tra -1 ed 1.

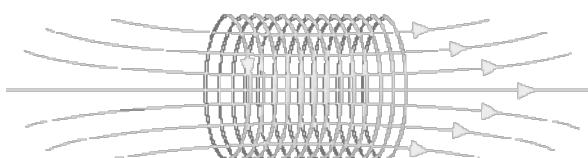


Fig.4

In particolare, se il doppio bipolo accoppiamento mutuo è in regime sinusoidale, si potrà fare uso del simbolismo vettoriale e parlare di impedenza propria o autoimpedenza ed impedenza mutua. Le equazioni saranno quelle

mostrate in Fig 1.

Osserviamo che la condizione di accoppiamento perfetto, proprio per la sua definizione, implica che quando $k^2=1$, cioè $M^2 = L_1 L_2$, ogni linea del campo prodotto da un avvolgimento si

concateni anche con l'altro avvolgimento, altrimenti non sarebbe possibile annullare il campo prodotto dalla prima corrente con un opportuno valore della seconda corrente. Se si pensa al campo prodotto da un avvolgimento in (vedi Fig.4) si capisce immediatamente che questa condizione si può verificare al limite

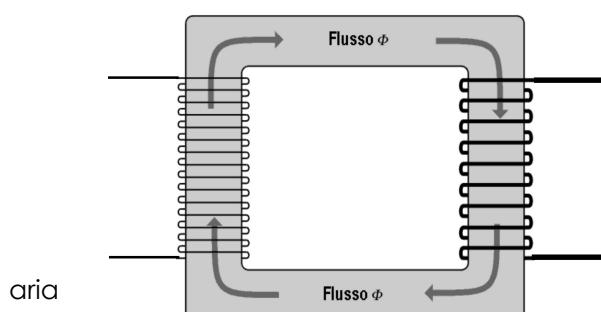


Fig. 5

soltanto quando i due avvolgimenti sono praticamente sovrapposti. A questo punto può aiutarci il

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

materiale ferromagnetico nella sua configurazione che abbiamo detto del “trasformatore”, che come si è visto riesce a incanalare le linee del campo, come mostrato in Fig. 5. In questo modo i due avvolgimenti possono essere disposti alla opportuna distanza senza dover perdere in qualità dell'accoppiamento.

Limitiamoci per ora all'accoppiamento perfetto, allora $M^2 = L_1 L_2$ e

$$\frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1} = \bar{I}_1 + \frac{M}{L_1} \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a} \quad \text{quindi } L_1/M = M/L_2 = a.$$

$$\frac{\bar{V}_2}{j\omega M} = \bar{I}_1 + \frac{L_2}{M} \bar{I}_2 = \bar{I}_1 + \frac{\bar{I}_2}{a} \quad \text{A tale quantità daremo il nome di rapporto di trasformazione..}$$

Fig. 6

Riscriviamo ora le equazioni dell'accoppiamento
mutuo dividendo la prima per il fattore $j\omega L_1$ e la

seconda per $j\omega M$.

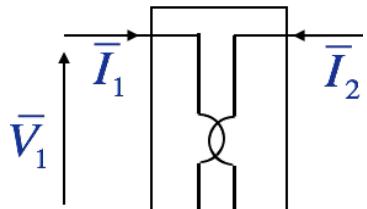
$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = a$$

$$\bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a} + \frac{\bar{V}_1}{j\omega L_1}$$

Per descrivere il funzionamento dell'accoppiamento perfetto potremmo quindi usare, invece delle due equazioni di partenza, la prima, lasciata immutata, e quella che si ottiene dividendo membro a membro le due equazioni (vedi figura a lato).

2 Circuito equivalente dell'accoppiamento mutuo

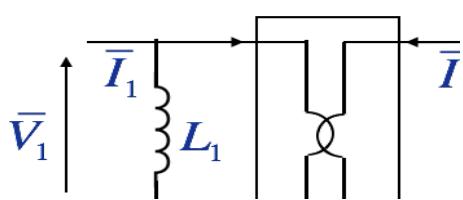
Introducendo poi il doppio bipolo trasformatore ideale la cui caratteristica è fornita dalle



relazioni mostrate nella figura, abbiamo potuto costruire (vedi Lez. 17) un circuito equivalente del doppio bipolo accoppiamento mutuo, che nel caso

dell'accoppiamento perfetto si riduce a quello di Fig.7.

Con le notazioni descritte, le equazioni caratteristiche dell'accoppiamento perfetto diventano quelle indicate nella stessa Fig.7, dove abbiamo semplificato il doppio pedice 11 e 22



per le due autoinduttanze riducendolo ad uno solo, L_1 ed L_2 .
Esaminando le equazioni trovate per l'accoppiamento perfetto, vediamo che mentre la prima di esse afferma che le tensioni

Fig.7

sono nello stesso rapporto che avrebbero in un trasformatore ideale, la seconda dice che la corrente al primario può essere vista come somma di una corrente, che è la stessa che si avrebbe in un trasformatore ideale, più la corrente che circola nell'induttanza L_1 quando essa è sottoposta alla tensione primaria, come schematicamente indicato nella Fig.7.

Il caso dell'accoppiamento non perfetto si risolve ora con grande semplicità. Supponiamo, infatti, di scomporre le due induttanze L_1 ed L_2 in due parti L_1' ed L_1'' , e L_2' ed L_2'' tali che $L_1'' L_2'' = M^2$.

Si noti che le tre equazioni definiscono i quattro parametri L con un grado di libertà

$$L_1' + L_1'' = L \quad \text{in quanto le equazioni che li determinano sono solo tre. Esistono dunque infinite}$$

$$L_2' + L_2'' = L \quad \text{scelte possibili per la scomposizione descritta;}$$

per ottenerne una basterà fissare ad arbitrio uno dei parametri

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= j\omega L_1' \bar{T}_1 + (j\omega L_1'' \bar{T}_1 + j\omega M \bar{T}_2) \\ \bar{V}_2 &= j\omega L_2' \bar{T}_2 + (j\omega M \bar{T}_1 + j\omega L_2'' \bar{T}_2) \end{aligned}$$

ed ottenere gli altri dalle relazioni.

Introduciamo ora le posizioni fatte nelle equazioni. È evidente che i termini in parentesi, per come li abbiamo costruiti, descrivono un accoppiamento perfetto. Per ottenere il circuito

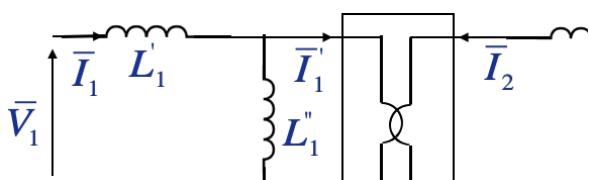


Fig. 8

equivalente di un accoppiamento non perfetto, basterà aggiungere, a quello di un accoppiamento perfetto, le due cadute di tensione sulle induttanze L_1' e L_2' rispettivamente al primario ed al secondario e quindi il circuito

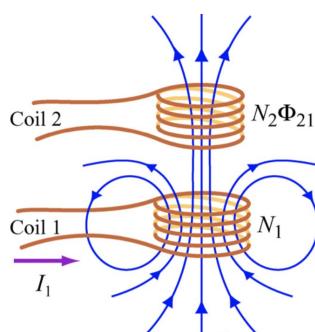
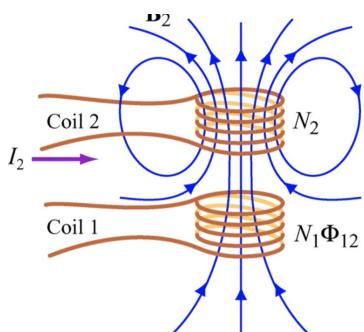
mostrato in Fig.8

Naturalmente, come abbiamo detto, data l'arbitrarietà della scelta nella scomposizione di L_1 ed L_2 , si possono costruire infiniti circuiti equivalenti dell'accoppiamento dato. Uno di essi in particolare è molto significativo.

Se facciamo riferimento ai flussi concatenati dagli avvolgimenti possiamo dare una diversa definizione di accoppiamento perfetto.

Se diciamo $\Phi_{11}=L_1i_1$ il flusso prodotto dalla corrente i_1 che si concatena con tutte le N_1 spire primarie, Φ_{11}/N_1 sarà il flusso che interessa la sezione della colonna di materiale magnetico dove è avvolto il primo avvolgimento (vedi Fig. 5). Per lo stesso motivo sarà $\Phi_{12}/N_2=M_1/N_2$ il flusso prodotto dalla stessa corrente i_1 che interessa la colonna del secondo avvolgimento. Un ragionamento analogo a partire dal secondo avvolgimento ci porta a definire un $\Phi_{22}/N_2=L_2i_2/N_2$, flusso prodotto dalla corrente i_2 che interessa la sezione del secondo avvolgimento, e un flusso $\Phi_{21}/N_1=M_2/N_1$, sempre prodotto dalla corrente i_2 , ma che interessa la sezione del primo avvolgimento.

È facile vedere che se si impone l'egualanza di questi flussi, cioè che sia $\Phi_{11}/N_1 = \Phi_{12}/N_2$ e



$\Phi_{22}/N_2 = \Phi_{21}/N_1$, si ritrova la condizione di accoppiamento perfetto $M^2 = L_1 L_2$.

Da quanto detto risulta anche che, quando queste condizioni non sono verificate,

allora $\Phi_{11}/N_1 - \Phi_{12}/N_2 = \Phi_{1d}$ è il flusso nella prima colonna del ferro, prodotto da i_1 , che non si ritrova nella seconda colonna, è cioè il flusso disperso del primo avvolgimento. Siamo indotti dunque a definire un coefficiente L_{1d} , tale che $L_{1d} i_1 = N_1 \Phi_{1d}$, che, insieme all'equivalente del secondo circuito $L_2 i_2 = N_2 \Phi_{2d} = N_2 (\Phi_{22}/N_2 - \Phi_{21}/N_1)$, rappresentano lo scostamento dall'accoppiamento perfetto del circuito in esame.

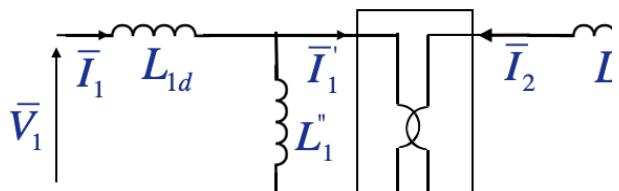


Fig. 9

In conclusione un possibile circuito equivalente dell'accoppiamento magnetico – e quindi del trasformatore, almeno nei limiti di un dispositivo ideale senza perdite – è quello rappresentato in Fig.9, dove $L''_1 = L_1 - L_{1d}$.

3 Perdite nel Trasformatore

Ma un trasformatore reale non può naturalmente essere senza perdite. Proviamo ad esaminare che tipo di perdite dobbiamo aspettarci.

In primo luogo, per quanto gli avvolgimenti primario e secondario possano essere realizzati con materiale buon conduttore, essi presenteranno comunque una certa dissipazione. Per tenerne conto possiamo inserire due resistenze - R_{1d} ed R_{2d} - in serie alle induttanze di dispersione così come

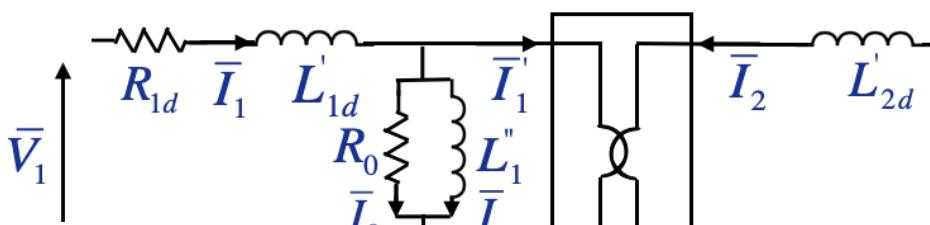


Fig.10

indicato in Fig.10, in modo che esse siano percorse rispettivamente dalle correnti I_1 ed I_2 .

Nella stessa

Fig.10 abbiamo inserito

un resistore R_0 in parallelo all'induttanza "a vuoto" primaria L''_1 , per tener conto delle perdite per isteresi nel nucleo magnetico (vedi Lez. 21) e per le perdite per correnti parassite, che sono le perdite dovute alle correnti indotte nei materiali magnetici dalle variazioni di B nei circuiti: infatti tali materiali, contenendo ferro, sono anche essi conduttori, anche se non buoni conduttori. Proprio per ridurre tali perdite il nucleo magnetico dei trasformatori non è massiccio ma costituito da numerosi lamierini sottili di materiale ferromagnetico, elettricamente separati tra loro, in modo da impedire il passaggio di correnti trasversali, così come indicato in figura.

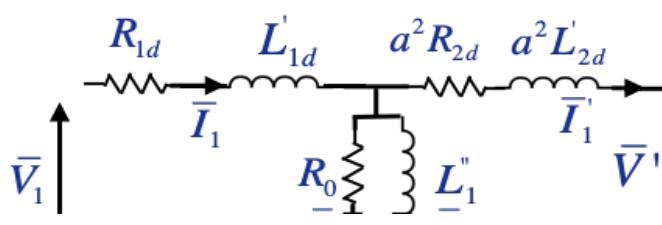
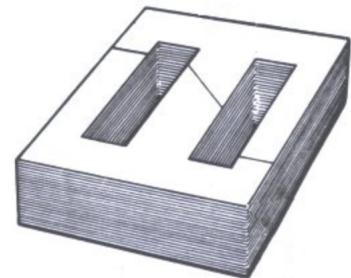


Fig.11

Osserviamo che una impedenza che si trovi al secondario di un trasformatore ideale può essere spostata al primario

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

moltiplicandola per a^2 dove $a = N_1/N_2$ è il rapporto di trasformazione. Infatti:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \frac{a\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = -a^2 \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = a^2 Z$$

Perché con le nostre convenzioni al secondario, chiuso su di una impedenza Z , avremo

$$\bar{V}_2 = -Z\bar{I}_2.$$

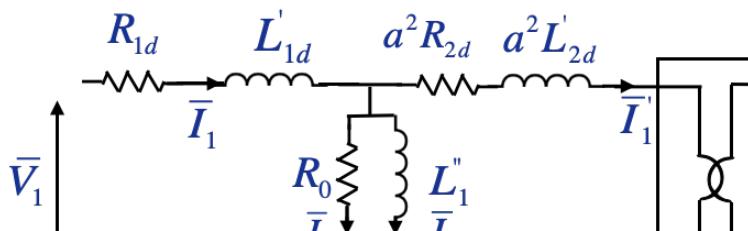


Fig.12

Questo vuol dire che nel circuito equivalente del trasformatore, ai fini dell'analisi ingresso/uscita del dispositivo, noi possiamo sempre immaginare tutti i carichi riportati al

primario come mostrato nel circuito di Fig.11. Oppure limitarci a riportare al primario solo i parametri di dispersione e dissipativi del secondario, come nella Fig.12.

1 Diagramma fasoriale del trasformatore

Nel diagramma di Fig. 1 sono riportati i fasori delle diverse grandezze che possiamo individuare nel circuito equivalente di cui alla Fig 10. Abbiamo indicato con E_1 ed E_2 le tensioni

primarie e secondarie del trasformatore ideale, con I_m la corrente nell'induttore L_1'' , detta anche corrente magnetizzante, e con I_0 la corrente nel resistore R_0 , che tiene conto delle perdite per isteresi e per correnti parassite: la loro somma ($I_m + I_0$) è la corrente $I_1 - I'_1$ che viene derivata dal parallelo di L_1'' ed R_0 . Naturalmente le cadute ohmiche e induttive sono state esagerate per chiarezza espositiva.

Nella stessa figura è indicato anche il flusso Φ di mutua tra i due circuiti, che essendo anch'egli una grandezza variabile sinusoidalmente con la stessa

frequenza può essere rappresentato nello stesso diagramma fasoriale. Provate a ricostruire da voi tale diagramma partendo dai due vettori rappresentativi di E_1 e E_2 .

Un dato importante di un trasformatore è quello che viene detto "caduta di tensione": in sostanza, la differenza tra le tensione secondaria a vuoto e quella sotto carico. Nel disegno – dove abbiamo immaginato di riportare tutti i parametri al secondario - sarebbe il segmento AD, ma viene generalmente approssimato a quello AC – si ricordi che nella figura le proporzioni delle cadute ohmiche ed induttive sono esagerate per

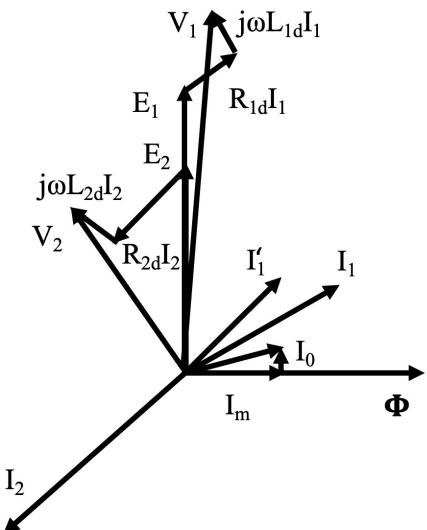
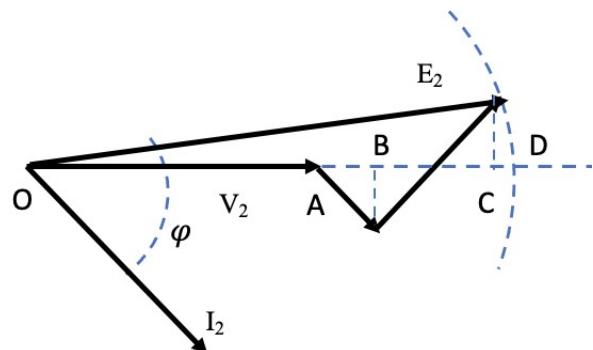


Fig. 1



Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

chiarezza espositiva. Se si trascura la differenza tra i segmenti BC e BD, la caduta di tensione può essere calcolata come:

$$\Delta V = AD = R_{2d} \cos \varphi I_2 + \omega L_{2d} \sin \varphi I_2$$

La caduta di tensione dipende, naturalmente dal carico, ed è naturalmente nulla se il secondario è aperto. Essa è però nulla anche per un angolo φ del carico che sia uguale a $\arctan(-R_{2d}/\omega L_{2d})$. Un trasformatore, evidentemente, lavora in condizioni di lavoro ottimali con una bassa caduta di tensione. Il diagramma semplificato di cui alla figura prende il nome di diagramma di Kapp.

2 Perdite e Rendimento

Dato che il trasformatore reale ha delle perdite di potenza è opportuno definire un rendimento η del dispositivo, come il rapporto tra la potenza in uscita alla porta secondaria e quella in ingresso alla porta primaria, $\eta = P_u/P_i$, dove, naturalmente la differenza tra le due potenze è la somma di P_r (potenza persa nel rame per effetto Joule) e P_m potenza persa per isteresi e correnti parassite nel ferro. Di solito il rendimento di un trasformatore è molto alto, praticamente quasi 1, per questo motivo – visto che P_u è praticamente uguale a P_i - si preferisce calcolarlo come:

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_{\text{rame}} + P_{\text{ferro}}}$$

Raffreddamento dei trasformatori

Naturalmente le perdite in un qualsiasi dispositivo elettromagnetico si trasformano in calore e quindi producono un aumento della temperatura del dispositivo stesso. Gli elementi più sensibili a questo aumento di temperatura sono, naturalmente, i materiali isolanti che con il tempo possono

vedere ridotte le loro fondamentali proprietà, con effetti disastrosi. Non dimenticate che ogni “bobina” del trasformatore è costruita da spire sovrapposte di condutture, isolate dalle altre spire solo da una verniciatura esterna!

Ne consegue che a volte, specialmente nei trasformatori di potenza, la semplice ventilazione naturale non è sufficiente ad asportare il calore in eccesso e contenere l'aumento di temperatura.

Occorre quindi predisporre altri sistemi di raffreddamento, come per esempio una ventilazione forzata con ventole opportunamente disposte in modo far circolare aria nel “cassone” che contiene il dispositivo, magari “alettando” il cassone stesso per aumentarne la superficie di scambio



Fig.2

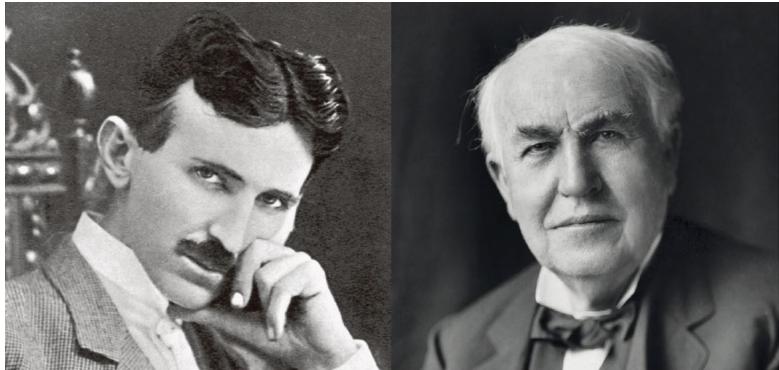
Luciano De Menna – Caratteristiche dei Trasformatori

termico (vedi Fig.2). A volte neanche questi accorgimenti sono sufficienti e allora bisogna adoperare un diverso fluido refrigerante, come olio minerale o altro liquido non infiammabile.

Per indicare il sistema di refrigerazione adoperato, sulla targa del dispositivo si usano le lettere N per circolazione naturale, F per circolazione forzata e D per forzata e guidata, mentre il refrigerante usato è individuato dalle lettere O, per olio minerale non infiammabile, L, per altro liquido non infiammabile, G, per gas e W, per acqua.

3 Trasformatori di potenza

Abbiamo già discusso la grande utilità del trasformatore nella distribuzione dell'energia elettrica. Si può certamente dire che



fu la causa principale della vittoria di Tesla (allora alla Westinghouse) - sostenitore della distribuzione in alternata - nella guerra che, all'inizio del secolo scorso, lo vide opposto a Edison (fondatore della omonima

Edison Electric Light Company) – sostenitore di quella in continua.

Il fatto è che nell'uso dell'energia elettrica ci sono tre fasi distinte – generazione, trasmissione ed utilizzo - ognuna delle quali richiede valori diversi di tensioni e correnti. Come abbiamo già fatto notare, a parità di potenza trasmessa P , è più conveniente che nella estesissima rete elettrica totale circolino basse correnti, con anche elevatissime tensioni, in modo tale che le perdite in linea, che sono proporzionali al quadrato della corrente, siano relativamente ridotte. D'altra parte più si sale con la tensione più la pericolosità dei dispositivi elettrici aumenta, e non solo: in generale un dispositivo che debba funzionare ad elevata tensione ha bisogno di una maggior quantità di materiale isolante e quindi deve essere necessariamente di volume maggiore. Da questo punto di vista, quindi, sarebbe impensabile mettere nelle mani dell'utenza un dispositivo che funzioni a tensione elevata. Abbiamo bisogno dunque di elevate tensioni nella distribuzione ma relativamente basse tensioni nell'utilizzo. E il trasformatore questo fa appunto, e lo fa con un rendimento elevatissimo, e nei due versi: trasformatori elevatori all'ingresso della rete e riduttori all'uscita. In continua questo sarebbe molto più complicato da realizzare.

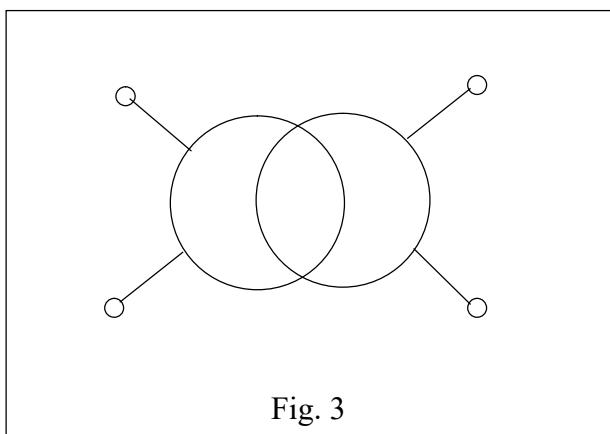
In conseguenza di questo discorso dobbiamo aspettarci che anche alla generazione si debba utilizzare un trasformatore (elevatore questa volta) perché non è detto che le tensioni

convenienti per la distribuzione sulle grandi linee possano essere sostenute dalle macchine generatrici. Anzi, certamente no, perché alte tensioni, come si è già detto, comportano dimensioni più grandi e non sono generalmente facilmente adattabili ad una macchina che deve avere delle complesse articolazioni, con parti in movimento rispetto ad altre.

Nelle Centrali Elettriche avremo dunque grandi trasformatori di potenza che portano la tensione alla generazione – ordine di migliaia di Volt o massimo decine di migliaia – alle centinaia di migliaia di Volt delle linee ad alta tensione. Mentre alla distribuzione avremo bisogno di trasformatori riduttori per portare la tensione ai 220 V (quasi tutti i continenti!), o 115V (essenzialmente il continente americano) dell'utenza finale. Questa riduzione generalmente viene frazionata in più stadi: alta tensione, media tensione (a volte anche in più fasi) e bassa tensione.

Ogni dispositivo, non solo elettrico, viene costruito ed ottimizzato per lavorare in determinate condizioni, con i parametri che ne determinano il funzionamento compresi in opportuni intervalli. Nel caso particolare del trasformatore tali parametri sono: tensione primaria e secondaria, corrente primaria e secondaria, fattore di potenza secondario. Questi parametri, e non solo questi, vengono indicati su di una targa fissata sul dispositivo e per questo semplice

motivo, prendono a volte il nome di "dati di targa", o anche di grandezze nominali. Così parliamo di tensione primaria nominale V_{1n} , di corrente primaria nominale I_{1n} , di tensione secondaria nominale V_{2n} , di corrente secondaria nominale I_{2n} e di fattore di potenza secondario nominale φ_{2n} . Sono queste le grandezze dalle quali è bene non discostarsi in maniera



significativa durante il funzionamento, pena il rischio di danneggiare anche gravemente il dispositivo. Dalla conoscenza di queste grandezze e dai risultati di due misure che vengono dette a vuoto ed in corto circuito, è possibile poi risalire alle perdite nel rame e nel ferro e quindi anche al

Luciano De Menna – Caratteristiche dei Trasformatori

rendimento del trasformatore, nonché ai valori delle impedenze in serie ed in parallelo del circuito equivalente de. Il simbolo del trasformatore è quello mostrato in Fig.3.

4 Prova a vuoto e in corto

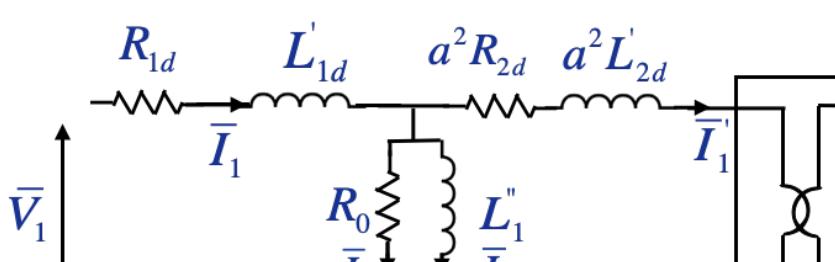


Fig.4

Consideriamo il circuito equivalente del trasformatore con tutti i parametri al primario, e immaginiamo di essere nelle condizioni in cui il secondario è a vuoto. Se misuriamo la

potenza assorbita in ingresso in questa condizione, essa ci fornirà la misura della potenza assorbita essenzialmente dal ramo in parallelo, cioè quella dissipata nel ferro. Infatti con il secondario a vuoto la corrente primaria sarà molto più bassa di quella nominale e quindi la potenza dissipata in R_{1d} decisamente trascurabile. Avremo dunque:

$$P_v = V_{1v} I_{1v} \cos \varphi_v$$

Dove il pedice v è stato aggiunto per ricordare che si tratta di grandezze misurate con il secondario a vuoto.

Se oltre alla potenza in ingresso misuriamo anche i valori (efficaci) della tensione e della corrente primaria, possiamo calcolare $\cos \varphi_v$ e quindi φ_v nonché I_0 e I_m e quindi R_0 e L''_1 :

$$R_0 = V_{1v} \cos \varphi_v / I_{1v} \quad \text{e} \quad \omega L''_1 = V_{1v} \sin \varphi_v / I_{1v}$$

In questo modo la prova a vuoto ci ha consentito di misurare (e calcolare!) i parametri trasversali del circuito equivalente del trasformatore.

Per calcolare i parametri

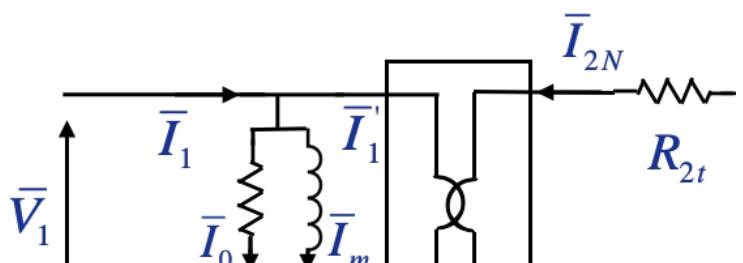


Fig.5

longitudinali occorrerà fare un'altra misura: la prova in corto circuito al secondario. Naturalmente

non è possibile far funzionare il trasformatore con il secondario in cortocircuito alla tensione primaria nominale: sarebbe estremamente pericoloso e porterebbe sicuramente alla distruzione il nostro dispositivo. Si può però mettere il secondario in c.c., con una barra in rame di sezione sufficientemente grande, se la tensione di alimentazione al primario è sufficientemente bassa. In pratica si parte da zero e si aumenta la tensione fino a raggiungere la corrente nominale nel secondario in corto. Come potete immaginare basterà una tensione sufficientemente piccola – circa il 6 - 7% di quella nominale – per raggiungere lo

In queste condizioni è evidente che le perdite nel ferro saranno molto ridotte e quindi le si potrà trascurare. Allora, misurando potenza assorbita e tensione al primario potremo scrivere:

$$P_{ac} = R_{2t} I_{2N}^2$$

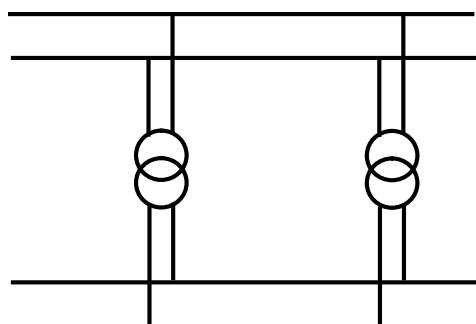
$$V_{2ac} = I_{2N} \sqrt{R_{2t}^2 + (\omega L_{2t})^2}$$

E da queste relazioni ricavare i parametri longitudinali riportati al secondario.

Per ottenere da questi separatamente i parametri primari e secondari basta impostare che sia i valori delle resistenze che quelle delle induttanze siano nel rapporto $(N_1/N_2)^2$.

Parallelo dei trasformatori

Molto frequentemente c'è l'esigenza di disporre più trasformatori in parallelo. Anzi, in linea di principio sarebbe sempre consigliabile disporre di due trasformatori in parallelo per alimentare un determinato carico, sia per poter far fronte a eventuali guasti di uno dei dispositivi – in tale evenienza l'altro può assicurare, per un breve periodo, l'alimentazione dell'utenza – sia perché, come abbiamo visto, ogni dispositivo funziona in maniera ottimale se lavora in un intorno dei suoi valori nominali di targa. D'altra parte qualsiasi utenza non è costante nel tempo (basta pensare alle differenze di consumo giorno/notte!) e quindi aver la



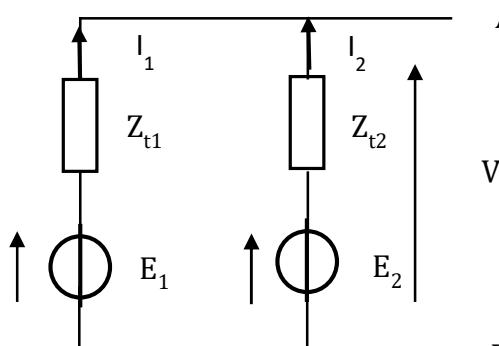


Fig.6

A possibilità di escludere magari il trasformatore più grande durante i periodi di consumo ridotto, può migliorare il rendimento totale. Ma la distribuzione delle potenze nei due dispositivi in parallelo è determinata dalle caratteristiche dei singoli trasformatori: è un problema simile a quello che abbiamo affrontato e risolto con la così detta formula di Milmann. Infatti, rappresentiamo ogni singolo trasformatore con il circuito equivalente in cui

abbiamo ricondotto tutte le grandezze al secondario, il parallelo è descritto dal circuito in Fig.6. , dove i pedici 1 e 2 stanno ad indicare i due trasformatori.

Se vogliamo evitare che a carico scollegato nella maglia dei due secondari in parallelo continui a circolare una corrente, dovremo avere $E_1=E_2=E$, e dato che $V=E_1/a'=E_2/a''$ (dove V è la tensione primaria comune a' e a'' i rispettivi rapporti di trasformazione) dovrà essere $a'=a''$, e questo era già abbastanza scontato-

Ma non basta: se vogliamo che i due dispositivi funzionino al meglio e cioè con correnti prossime alla rispettive correnti nominali, dobbiamo richiedere che per i valori di dette correnti nominali si verifichi la relazione $Z_{t1}I_{1N}=Z_{t2}I_{2N}$, perché questo impone la seconda legge di Kirchhoff alla maglia di Fig.6 per le correnti che interessano i due rami, e quindi non potremmo mai avere le correnti nominali nei due trasformatori se questa relazione non fosse verificata anche per tali correnti. D'altra parte la relazione trovata significa che le tensioni di corto circuito secondario V_{cc1} e V_{cc2} dei due dispositivi debbono essere uguali, e questa è una informazione aggiuntiva che non era a prima vista evidente

1 Trasformatori trifasi

Naturalmente, visto che, per i motivi che abbiamo già indicato, la distribuzione è trifase in

tutto il mondo, avremo per questi scopi essenzialmente trasformatori trifasi.

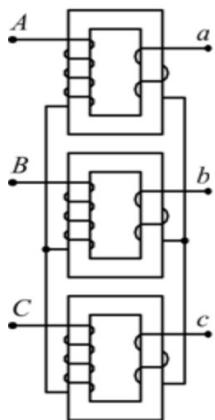


Fig. 3

In effetti è possibile utilizzare in ogni caso un trasformatore distinto per ogni fase, senza predisporre trasformatori speciali – come schematicamente indicato in Fig. 3 - ma motivi di efficienza e risparmio consigliano spesso l'uso di un unico dispositivo. In effetti la parte comune è, ovviamente, solo quella magnetica, come per esempio è mostrato in

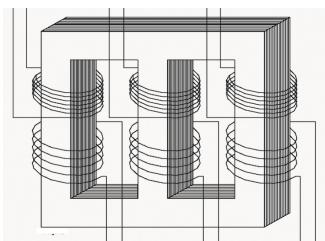


Fig. 4. In effetti la struttura mostrata si può

meglio comprendere partendo da una soluzione del tipo mostrato in

Fig.4

Fig. 5, dove i tre nuclei separati della Fig.3 sono stati messi insieme con un lato in comune, la

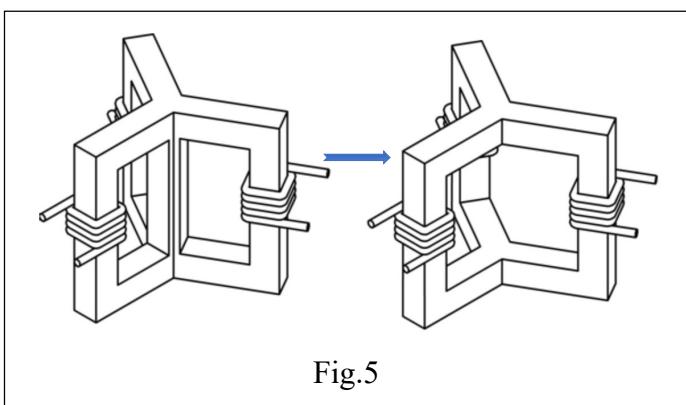


Fig.5

colonna centrale. Successivamente tale colonna è stata eliminata, essendo essa attraversata da un flusso nullo in base alla prima legge di Hopkins per i circuiti magnetici, se si assume che le tre correnti che alimentano i tre avvolgimenti costituiscano una terna equilibrata. Infine

la geometria è stata trasformata - come mostrato in Fig.4 - mettendo le tre colonne in piano in modo da risparmiare spazio. Si può obiettare che con tale operazione si è persa la simmetria, ma bisogna tener conto che le riluttanze delle tre colonne sono estremamente basse per la presenza del materiale ferromagnetico e quindi la perdita di simmetria ha un effetto trascurabile. Il risultato finale è un dispositivo del tipo mostrato in Fig. 6.

Non volendo rinunciare ad una certa simmetria si può prendere in considerazione un trasformatore a 5 colonne, come mostrato in Fig. 6: le due colonne laterali offrono ulteriori percorsi per il flusso di B e hanno anche un effetto benefico sulla solidità della struttura del dispositivo che anche per questo viene detto "trasformatore corazzato".



Ricordando il modello dei circuiti magnetici è facile comprendere che nella struttura a tre colonne l'annullamento della somma dei flussi magnetici è imposto dalla geometria, con le conseguenti possibili lievi asimmetrie nei flussi; un po' come accade in un sistema trifase a stella senza filo neutro (spostamento del centro stella). Nella struttura

a 5 colonne invece, le due colonne finali svolgono il ruolo che svolgerebbe il filo neutro nel caso della linea trifase di cui all'esempio precedente, ruolo che favorisce il mantenimento della simmetria. Un simmetria completa si può avere solo con la struttura di fig.5, che però può essere troppo ingombrante.

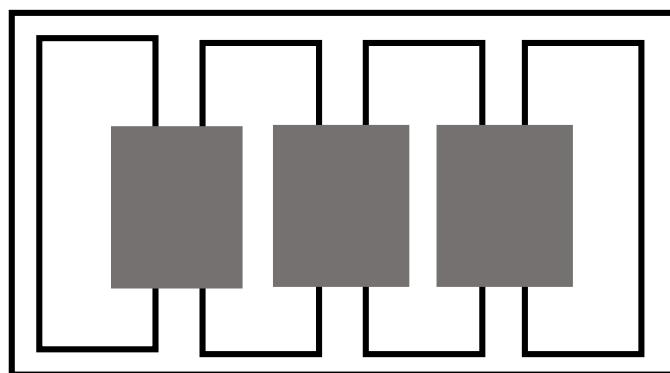
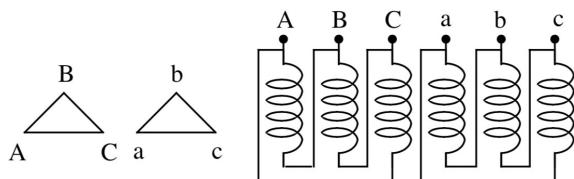


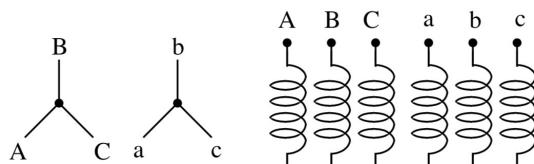
Fig.6

Gli avvolgimenti, poi, possono essere connessi a stella o a triangolo, indipendentemente: potremo avere dunque un primario connesso a stella e un secondario anche esso a stella, ma anche a triangolo! Tutte le combinazioni sono possibili, e ogni combinazione può avere delle caratteristiche particolari che la rendono più o meno adatta allo specifico scopo. Ricordate, infatti che in una disposizione stella triangolo, per esempio, quella che al primario è la tensione di fase E corrisponde nel rapporto di trasformazione a quella che nel secondario è una tensione V concatenata, e quindi c'è un $\sqrt{3}$ che interviene.

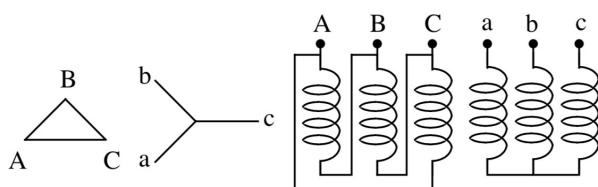
Citiamo espressamente solo i collegamenti più utilizzati che sono il Dd0



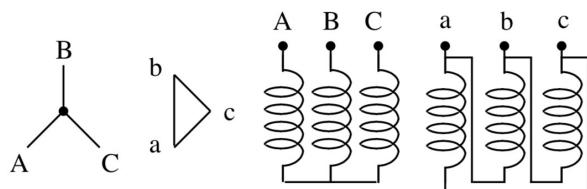
Il Yy0:



Il Dy11



Ed il Yd11



Dove la prima lettera grande della sigla e la seconda lettera minuscola indicano il tipo di connessione: D, d = triangolo, Y, y = stella e l'ultimo numero indica lo sfasamento delle corrispondenti tensioni stellate (o concatenate) diviso 30° . Il gruppo 0 indica uno sfasamento di 0° (i

primi due casi in figura) ed il gruppo 11 uno sfasamento di 330° (gli ultimi due casi). Infatti, anche dal semplice esame degli schemi in figura, si capisce che, nella combinazione Yd11, E_A (stellata primaria) è in fase con V_{ac} e quindi in ritardo di 330° gradi con la corrispondente stellata secondaria E_A'' .



Fig.7

Il simbolo per un trifase triangolo stella, con neutro al secondario, è mostrato in Fig. 7.

Con un unico trasformatore trifase si risparmia, rispetto alla scelta di tre trasformatori indipendenti, in manutenzione, in quantità di ferro ecc. D'altra parte se c'è un guasto su di una fase, occorre sostituire l'intero trasformatore, mentre, nel caso dei tre distinti, basta sostituire solo quello difettoso. C'è spazio quindi per una ottimizzazione della scelta a seconda delle specifiche esigenze.

2 Trasformatori di misura

Uno dei grandi pregi del trasformatore è che esso realizza il completo isolamento elettrico tra primario e secondario. Questo è naturalmente molto conveniente quando bisogna lavorare su tensioni elevate o comunque si vuol garantire l'operatore contro l'eventualità di fulminazioni. Così tutti gli utensili elettrici che debbono essere maneggiati da un operatore, magari non particolarmente informato sui pericoli, richiedono che a monte abbiano un trasformatore riduttore.

Fig. 8

Un caso particolare è quello degli strumenti di misura – tensione e corrente – per le alte tensioni o comunque per tensioni elevate. Trattandosi di misure essi debbono essere realizzati con particolare cura per la precisione. Avremo i trasformatori di corrente (TA) per i quali si richiede che la corrente secondaria sia rigorosamente proporzionale a quella primaria. Il primario va naturalmente inserito in serie alla linea, come mostrato in Fig. 8. Dalla relazione fondamentale del primario di un trasformatore

$$\bar{I}_1 - (\bar{I}_0 + \bar{I}_m) = -I_2/a$$

Si deduce che sia la corrente di magnetizzazione (\bar{I}_m), che quella dovuta alle perdite nel

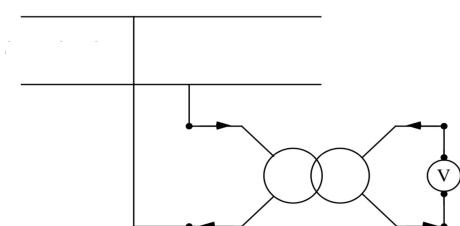


Fig. 9

ferro (\bar{I}_0) devono essere molto piccole.

Ma avremo anche i TV, i trasformatori di tensione, che invece richiederanno che le impedenze longitudinali, cioè quelle dovute ai flussi dispersi, siano trascurabili. L'inserzione nel circuito è mostrata in Fig.9..

3 Autotrasformatore

All'opposto abbiamo trasformatori che non realizzano l'isolamento elettrico tra primario e secondario, ma anzi il loro funzionamento si basa proprio su questa mancanza: gli autotrasformatori.

La Fig.10 mostra chiaramente come essi siano fatti. Non ci sono due avvolgimenti, ma uno solo di N_1 spire, delle quali il secondario utilizza solo una parte, N_2 spire. Naturalmente le spire sono avvolte su di un nucleo magnetico che assicura la confluenza di una gran parte del flusso in tutto l'avvolgimento.

Visto dalla porta 11', così come lo abbiamo disegnato, ricorda un partitore di tensione e quindi si potrebbe pensare che il suo funzionamento sia basto su quel principio. Ma non è così: per rendersene conto basta considerare che il dispositivo funziona anche se alimentato dalla porta con un numero minore di spire. L'accoppiamento tra le due porte non è di tipo resistivo, ma induttivo: attraverso il flusso del campo B presente nel nucleo su cui l'avvolgimento è disposto.

In Fig.11 il simbolo dell'autotrasformatore negli schemi elettrici.

Per trovare le equazioni che reggono il funzionamento di questo doppio bipolo possiamo ragionare alla maniera seguente: se diciamo Φ il flusso di B nella sezione S del nucleo magnetico, e quindi il flusso concatenato con ogni spira, il flusso concatenato con le N_1 spire primarie sarà $N_1 \Phi$ e quello con le N_2 spire secondarie $N_2 \Phi$. Dato che le tensioni nei rispettivi avvolgimenti è proporzionale alla derivata di tale flusso il rapporto tra le tensioni sarà pari ad $a = N_1/N_2$.

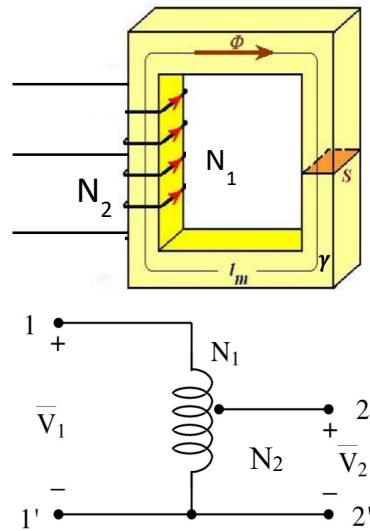


Fig 10



Fig.11

Per quanto riguarda le correnti possiamo dire che la forza magnetomotrice totale è uguale

a

$N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_2 = \mathfrak{R}\Phi$ e quindi, se la riluttanza è trascurabile come solitamente accade avremo:

$$V_1 = a V_2 \quad \text{e} \quad I_1 = -I_2/a$$

Sono queste le equazioni che reggono il funzionamento di un autotrasformatore, cioè le equazioni di un trasformatore ideale! Naturalmente abbiamo ipotizzato trascurabili le cadute longitudinali e quindi i flussi dispersi.

Per comprendere l'utilità di un autotrasformatore paragoniamolo ad un trasformatore avente lo stesso numeri di spire.

La potenza dissipata nel rame del trasformatore – avendo supposto trascurabili le perdite nel ferro - è $P_T^{cu} = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1 + \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2$, mentre quella nell'autotrasformatore si può scrivere:

$$(\bar{V}_1 - \bar{V}_2) \cdot \bar{I}_1 + \bar{V}_2 \cdot (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1 \left(1 - \frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right) + \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2 \left(\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} + 1\right)$$

perché, si guardi la Fig. 10, le prime N_1-N_2 spire sono sottoposte alla tensione $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$ e percorse dalla corrente \bar{I}_1 , e le seconde N_2 spire sono sottoposte alla tensione \bar{V}_2 e percorse dalla corrente $\bar{I}_1 + \bar{I}_2$ avendo noi fatto la convenzione dell'utilizzatore a entrambe le porte. Tenendo conto delle equazioni dell'autotrasformatore si ottiene:

$$\bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1 \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2 \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \left(1 - \frac{1}{a}\right) P_T^{cu}$$

c.v.d.

Che poi l'autotrasformatore consenta di risparmiare in volume di rame, è di per sé evidente se si pensa che le N_2 spire secondarie – per così dire - che nel trasformatore sono duplicate nell'autotrasformatore sono presenti una sola volta. Ma in realtà a parità di densità di corrente c'è un risparmio maggiore dovuto al fatto che la gran parte dell'avvolgimento è percorso da una

corrente minore, e quindi le sezioni possono essere diminuite. Si può dimostrare che anche il volume di rame necessario si riduce dello stesso fattore $1-1/a$.

Verrebbe da domandarsi allora, perché non si usano solo autotrasformatori? I motivi sono due essenzialmente: in primo luogo i vantaggi che sono racchiusi in quel numero $1-1/a$ sono significativi per a non troppo grande, in pratica per a compreso tra 1 e 3.

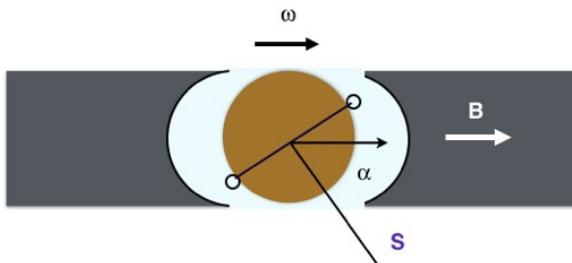
In secondo luogo c'è il problema della mancanza di isolamento tra primario e secondario che ne confina l'uso essenzialmente ai basse tensioni.



Un tipo particolare di autotrasformatore in cui il contatto intermedio – vedi Fig.10 – è, entro determinati limiti, mobile, ha molte applicazioni nei laboratori. Il nucleo su cui sono disposti gli avvolgimenti è generalmente toroidale in modo da consentire al collegamento intermedio, realizzato con un contatto strisciante, mediante una manopola, di spaziare su tutto l'avvolgimento e di variare con continuità - entro certi limiti - il rapporto di trasformazione e quindi la tensione secondaria. Per questi motivi esso prende il nome di Variac.

1 Principi generali

Immaginiamo una situazione del genere mostrato schematicamente in Fig.1: un cilindro di supporto su cui è avvolta una spira, di cui vediamo solo uno dei suoi lati. Nel successivo disegno a lato la posizione della spira è meglio specificata. Essa avrà una forma rettangolare a causa del suo supporto. Supponiamo che il cilindro abbia la possibilità di ruotare, con la velocità angolare ω nella direzione oraria, all'interno di un "traferro" di una struttura in materiale ferromagnetico, di cui sono mostrate solo le parti affacciate che diremo "espansioni polari". Ricorderete che questa è la topologia che abbiamo già studiato e che abbiamo battezzato appunto delle "macchine rotanti". In realtà dato che anche il nucleo cilindrico è di materiale ferromagnetico il vero traferro è in effetti lo spazio tra il cilindro e le espansioni polari, spazio che dovete immaginare molto ridotto, giusto quanto basta al cilindro con il suo avvolgimento per ruotarvi dentro. In un primo momento possiamo anche immaginare che le espansioni polari siano di un magnete permanente, che quindi non ha alcun bisogno di una corrente per generare un campo B all'interno della struttura. Ma non c'è alcuna difficoltà a supporre anche che da qualche parte della struttura che non si vede ci sia un avvolgimento che attraversato da una corrente I produca un'opportuna forza magnetomotrice Nl responsabile del campo. Quello che però sappiamo è che se il materiale ferromagnetico è ad elevata permeabilità, a ciclo d'isteresi molto stretto e lavora nella sua zona di linearità della caratteristica magnetica, praticamente tutte le linee del campo B sono incanalate nel ferro e nel traferro si sperimenterà un elevato campo d'induzione magnetica.



$$\Phi(t) = BS \cos \alpha = BS \cos(\omega t) \quad e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Fig.1

In questo nostro “mondo ideale”, che però dopo ci affretteremo subito a “sporcare” con un pizzico di “realismo”, possiamo anche immaginare che le espansioni polari siano sagomate in maniera tale da rendere il campo \mathbf{B} nel traferro perfettamente uniforme. Se c’è un campo, allora la spira rettangolare concatenerà un flusso che potremmo calcolare integrando il flusso elementare $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ ad una superficie che si appoggi sul contorno della spira stessa. Nelle nostre condizioni geometriche – create ad arte – il problema è estremamente semplice perché il campo è uniforme e la superficie a cui integrare è rettangolare: l’integrale si ridurrà al prodotto di \mathbf{B} per la superficie S per il coseno dell’angolo che la normale alla superficie stessa forma con la direzione di \mathbf{B} , indicato con a in figura.

In un primo tempo supponiamo che la spira rotante sia aperta e quindi in essa non circoli corrente, e immaginiamo che il cilindro cominci a ruotare con velocità angolare ω costante. L’angolo cambierà nel tempo secondo una legge del tipo $\alpha(t) = \omega t + \alpha_0$, dove α_0 è l’angolo iniziale all’istante zero. Per semplificare i conti imponiamo anche che $\alpha_0 = 0$, cioè che il moto cominci quando la normale alla superficie è parallela al campo \mathbf{B} . Avremo allora: $\Phi(t) = B S \cos \omega t$.

Ma, per la legge di Faraday-Neumann, un flusso concatenato variabile di \mathbf{B} produce una forza elettromotrice pari alla sua derivata cambiata di segno e quindi l’espressione mostrata in figura:

$$e(t) = -\omega B S \sin(\omega t).$$

2 La reazione d'indotto

Naturalmente, le cose sono molto più complesse di quanto una descrizione così sintetica possa far immaginare; ma, al fondo, questo è il principio di funzionamento di un generatore elettrico.

Cerchiamo di sottolineare gli aspetti generali. In primo luogo, per prelevare la f.e.m. prodotta, - anche solo per misurarne il valore - dovremo collegare la "spira" ruotante ad una coppia di morsetti, che eventualmente servirà anche a collegarla successivamente ad un carico. Bisognerà utilizzare degli accorgimenti particolari: essenzialmente un sistema di contatti o spazzole,

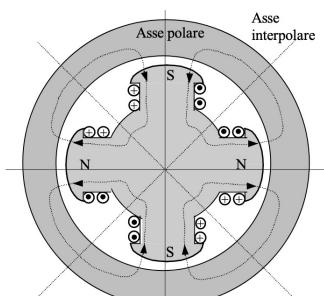


Fig. 2

che strisciano su due anelli che ruotano solidali con l'asse del rotore. Ma al momento questo non ci riguarda perché stiamo immaginando la spira aperta e quindi in essa non circola corrente: la sola responsabile del campo è la corrente inducente, quella che genera i due poli, che viene detta anche corrente di eccitazione.

Nel caso del nostro esempio schematizzato abbiamo immaginato che l'elemento inducente, quello che crea il campo

B, sia fermo, sia, come si dice in gergo, lo statore, mentre l'avvolgimento indotto sia il rotore. Ma naturalmente quello che conta è il moto relativo e quindi potremmo scambiare i ruoli e fare dell'induttore, il rotore e dell'indotto lo statore.

Come si è visto la pulsazione angolare della f.e.m. prodotta è uguale alla velocità angolare di rotazione che è imposta dal motore primo che mette in rotazione il rotore e fornisce l'energia meccanica che viene potenzialmente trasformata in energia elettrica in uscita. Questo dispositivo, dunque, trasforma energia meccanica in energia elettrica: è un generatore che si dice sincrono perché la velocità angolare del motore primo è uguale alla pulsazione della tensione in uscita.

In effetti non necessariamente uguale: si guardi la disposizione di Fig.2; lungo la periferia del rotore si incontrano due coppie di poli e quindi in un giro completo l'indotto – in questo caso lo

statore – incontrerà due volte la stessa configurazione di campo. In pratica è come se la velocità del rotore fosse doppia, e quindi la pulsazione della f.e.m. prodotta fosse doppia. In generale quindi il legame tra velocità angolare del rotore e la pulsazione della f.e.m. prodotta è $\omega = p \omega_m$, dove p è il numero di coppie polari della macchina e ω_m la velocità angolare del rotore. Si badi che a volte si preferisce indicare con p il numero di poli e non delle coppie polari. In termini di numero di giri al minuto, invece della velocità angolare ω_m , e di frequenza f delle tensione prodotta, la formula è: $f = p n/60$.

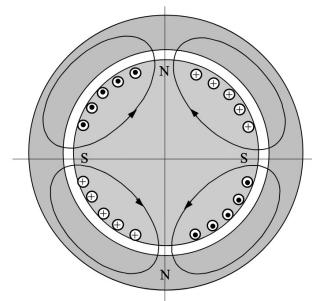


Fig.3

Ma naturalmente non c'è bisogno di espansioni polari per creare le coppie di poli lungo il traferro, basta disporre opportunamente gli avvolgimenti che le producono, come mostrato in Fig. 3, dove è anche in maggior evidenza la uniforme spessore ridotto del traferro lungo tutta la periferia del rotore. Nel primo caso si parla di macchina a poli salienti e nel secondo di macchina a poli lisci.

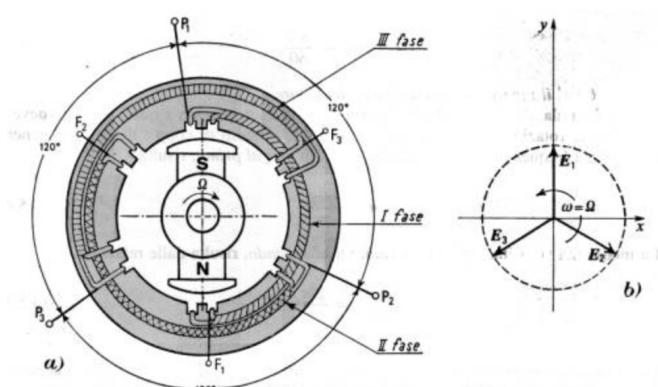


Fig. 4

Per spiegare in modo semplice il funzionamento di queste macchine ci conviene focalizzare la nostra attenzione su di un generatore sincrono a poli salienti con una sola coppia di poli e con il rotore che svolge il ruolo di induttore e l'indotto quello di statore, come mostrato in Fig. 4. Supponiamo anche che l'avvolgimento statorico sia

trifase e che si chiuda quindi su di una rete alla quale è supposto fornire una terna simmetrica diretta di tensioni E_1, E_2, E_3 . La differenza sostanziale rispetto alla precedente situazione presa in considerazione è che ora non c'è più soltanto l'avvolgimento induttore a produrre il campo **B**, ma anche gli avvolgimenti statorici sono percorsi da correnti. Per rendersi conto pienamente della

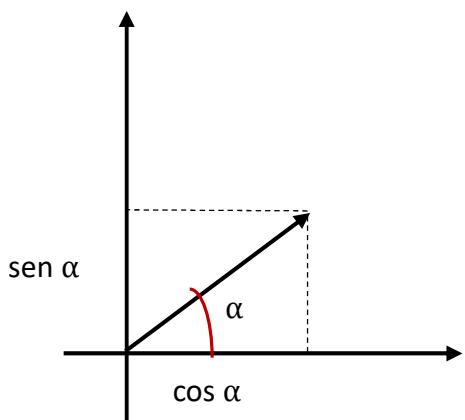
differenza, conviene pensare ad una analogia con il trasformatore con secondario chiuso su di un carico: il flusso concatenato con gli avvolgimenti statorici è solo in parte dovuto alla corrente di eccitazione presente sul rotore, ci sarà anche il flusso auto-concatenato prodotto dalle stesse correnti statoriche. Per comodità diamo un nome a questi flussi: sarà Φ_{12} il flusso concatenato con l'avvolgimento statorico (pedice 2), prodotto dalla corrente rotorica, (pedice 1), e Φ_{22} il flusso prodotto dalla stessa corrente statorica e concatenato con il suo stesso avvolgimento. Proprio come nel secondario e primario di un trasformatore, ma in questo contesto si preferisce parlare di "reazione d'armatura" o "reazione d'indotto". C'è però una aggravante: le variazioni di questi flussi, che sono all'origine delle f.e.m. indotte, non sono più solo dipendenti dalla diretta evoluzione temporale delle correnti, ma anche dal movimento dei due avvolgimenti l'uno rispetto all'altro! Dobbiamo, quindi, necessariamente porci la domanda: ma che tipo di campo producono le correnti statoriche?

3 Il campo rotante

Vogliamo dimostrare che un sistema di tre avvolgimenti del tipo descritto in Fig.4, disposti a 120° gradi l'uno rispetto agli altri, percorso da tre correnti simmetriche e equilibrate produce, nella zona del traferro, un campo magnetico rotante con velocità angolare:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi p n/60$$

Prima ricordiamo che introducendo i fasori nel piano complesso di Gauss abbiamo



implicitamente dimostrato che un vettore, rotante con velocità angolare ω costante, in un piano – non necessariamente di Gauss – ha come componenti, lungo l'asse x e y , che variano nel tempo come seno e coseno di un angolo del tipo $\omega t + \alpha_0$, dove α_0 è l'angolo al tempo 0 formato dal vettore con l'asse delle x . Ne deduciamo che due campi che variano in modo sinusoidale, l'uno

diretto lungo x e l'altro lungo y , danno luogo ad un campo totale, di ampiezza costante, rotante con velocità ω nel piano: la fase iniziale dei due campi componenti determina la posizione iniziale del vettore. Ne consegue che due avvolgimenti disposti a 90° alimentati da correnti sinusoidali di pulsazione ω , producono nel loro centro un campo rotante con velocità ω .

Non è sorprendente che si possa estendere questa proprietà a situazioni più complesse come quella di tre avvolgimenti disposti a 120° con correnti sfasate di 120°, appunto. Fu la grande intuizione di Galileo Ferraris.

La dimostrazione del "teorema" in questione, non è difficile ma noiosa per cui non la faremo (in rete ne trovate diverse versioni). Ci

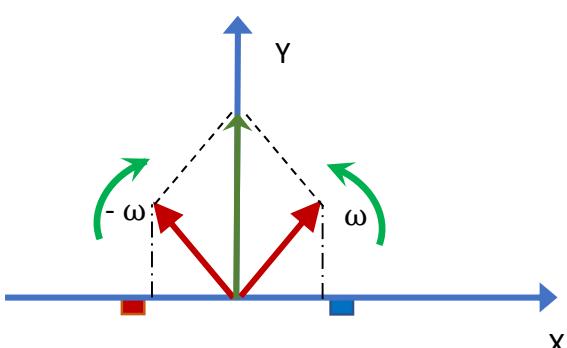


Fig.5

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

limiteremo ad accennare ad una dimostrazione grafica molto semplice e intuitiva.

In primo luogo facciamo vedere che un campo alternativo di pulsazione ω , diretto lungo una determinata direzione y , può essere scomposto in due campi rotanti l'uno con velocità angolare ω (verso antiorario) e l'altro con velocità angolare $-\omega$ (verso orario). Il fatto è evidente

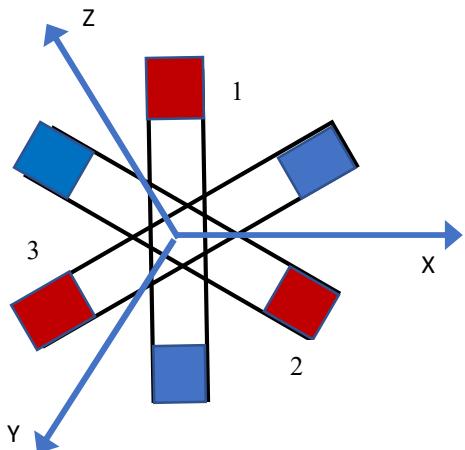


Fig.6

dalla semplice analisi del disegno di Fig.5: le due componenti lungo x dei vettori rotanti sono sempre in opposizione, e si annullano. Le componenti lungo y sono sempre dello stesso segno e proporzionali a $\sin(\alpha) = \sin(\omega t)$.

A questo punto possiamo considerare i tre avvolgimenti disposti a 120° , come schematicamente mostrato in Fig. 6., dove sono rappresentate le tre bobine che creano il campo, con i loro relativi assi: X per la bobina

1, Y per la bobina 2 e Z per la bobina 3. I colori rosso e blu rappresentano i versi delle correnti: rosso uscente dal foglio e blu entrante.

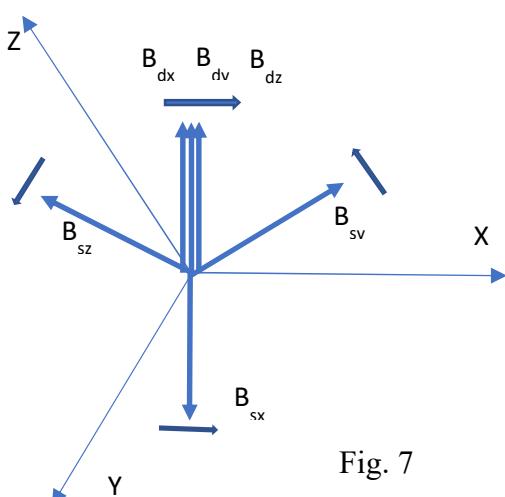


Fig. 7

Nella Fig. 7 è mostrata la scomposizione di ognuno dei tre campi alternativi a 120° nei due campi rotanti (s per sinistrorso, cioè antiorario, e d per destrorso, cioè orario).

Come si vede chiaramente, i tre campi sinistrorsi (antiorari) costituiscono una terna di vettori solidalmente rotanti, uguali e disposti a 120° , e quindi hanno somma nulla. I tre campi destrorsi, invece, sono sempre in fase e, sommati, costituiscono un unico

campo rotante con velocità ω nel verso orario (in Fig. 7 sono mostrati distinti per chiarezza espositiva). Basta cambiare la sequenza delle correnti per ottenere che il campo ruoti in verso antiorario.

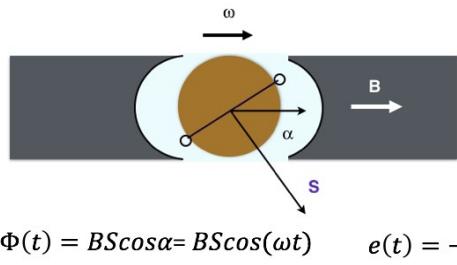
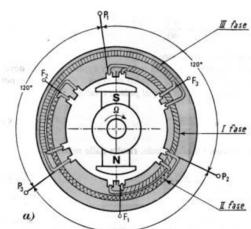
Luciano De Menna – Macchine rotanti

Si noti, guardando il disegno, che nell'istante preso in considerazione, la corrente dell'avvolgimento 1, quello il cui asse è X, è nulla; infatti i due vettori rotanti B_{sx} e B_{dx} sono in opposizione. Quindi aspettando un quarto di giro – orario per B_{dx} e antiorario per B_{sx} – gli stessi componenti rotanti si troveranno in concordanza di direzione e verso e in concordanza con l'asse X dell'avvolgimento 1. In queste condizioni il campo prodotto dall'avvolgimento 1 (non quello totale!), sarà massimo, e di conseguenza anche la corrente nell'avvolgimento 1 sarà massima. Questa situazione si verificherà, al momento opportuno, anche per gli altri avvolgimenti.

Si potrà quindi affermare che quando il campo rotante passe per uno degli assi delle bobine, allora la corrente di quella bobina raggiunge il suo massimo valore. Questa osservazione ci sarà molto utile in seguito per capire il funzionamento della macchina sotto carico.

1 Generatore

Con riferimento ad un generatore con una sola coppia di poli sul rotore, che svolge il ruolo



di induttore, e un avvolgimento trifase di statore, abbiamo fatto vedere che a causa della variabilità dei flussi concatenati - dovuti al movimento relativo - ogni

singolo avvolgimento è sede di una f.e.m. sinusoidale di pulsazione ω uguale alla velocità angolare del motore che muove il rotore. In effetti per introdurre l'argomento abbiamo immaginato prima una macchina in cui il rotore era l'indotto e lo statore l'induttore, ma visto che tutto deve dipendere solo dal moto relativo delle due parti, ne abbiamo dedotto che anche nel caso

dell'induttore/rotore gli effetti non possono essere diversi.

Se gli avvolgimenti sono disposti a 120° e chiusi su di un carico equilibrato, allora anche le correnti saranno sfasate di 120° tra di loro. Ma un tale sistema di correnti, abbiamo visto, crea a sua volta un campo rotante con la stessa velocità di rotazione. Ne consegue che i due campi – quello inducente e quello indotto – debbono ruotare alla stessa velocità e

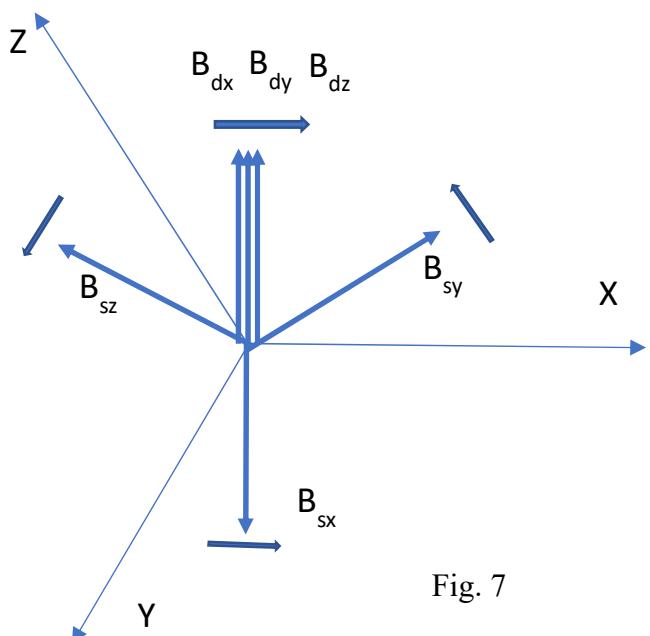


Fig. 7

quindi sono fermi l'uno rispetto all'altro: sono sincroni, appunto. Ma qual è l'angolo fra i due campi, nel piano geometrico? A questa domanda, in realtà non si può rispondere se non si precisa prima quale tipo di carico il generatore è chiamato ad alimentare: infatti il carico determina lo

Luciano De Menna – Macchina Sincrona

sfasamento tra le tensioni indotte e le relative correnti che sono quelle che creano la reazione d'indotto.

In tutta quest'analisi intervengono due distinti piani: quello fisico di rotazione del rotore, ortogonale al suo asse di rotazione, e quello delle fasi, dove dei vettori, che chiamiamo fasori, appunto, si collocano mostrando gli sfasamenti gli uni rispetto agli altri: il piano di Gauss dei numeri complessi. Bisogna fare attenzione a non confonderli, anche se essi sono in qualche modo connessi!

Noi sappiamo che le forze elettromotrici indotte negli avvolgimenti sono proporzionali alle derivate dei flussi concatenati $\bar{E} = -j\omega\bar{\Phi}$ (fasori!) e quindi ritardano di 90° rispetto ai flussi (piano delle fasi!). Ricordiamo che abbiamo implicitamente fatto l'ipotesi che i flussi concatenati con le singole spire siano sinusoidali, il che naturalmente non è detto sia vero, dipendendo il tutto dalla sagomatura della periferia del rotore e dello statore. Saranno comunque periodici di pulsazione ω e al massimo il loro scostamento da una sinusoide introdurrà delle armoniche (di ordine dispari!) che in questo contesto non prenderemo in esame.

2 Campo Rotante e Campo Induttore

Noi abbiamo già evidenziato una proprietà del campo rotante che può aiutarci a capire quale sia la posizione relativa dei due piani: abbiamo scoperto che quando il campo rotante passa per uno degli assi delle bobine, allora la corrente di quella bobina raggiunge il suo massimo valore. Per giustificare questa affermazione basta notare che in quell'istante particolare la direzione della componente destrogira del campo da essa prodotto deve coincidere con l'asse della bobina, insieme con la componente levogira, altrimenti non si potrebbe avere un massimo di B e quindi della corrente. Questo è un elemento che mette in relazione i due piani a cui facevamo cenno in precedenza: "la corrente nella bobina è massima", è una informazione che riguarda l'andamento temporale della corrente, mentre il fatto che "il campo rotante si posizioni lungo l'asse della specifica bobina" è qualcosa che attiene alla geometria della configurazione. Ammettiamo per cominciare che il carico sia puramente ohmico: allora le correnti sono in fase con le relative tensioni! Quindi quando la corrente in un avvolgimento raggiunge il suo massimo valore anche la relativa tensione lo dovrà fare mentre il flusso sarà in anticipo di $\pi/2$. Ma un anticipo di fase di 90° corrisponde nel nostro caso – una sola coppia polare! - ad una rotazione di 90° nel piano geometrico. Questo vuol dire che, rappresentando, per maggior chiarezza, i campi come magneti Nord-Sud, la situazione deve essere quella descritta nella Fig.2°a), dove si vede che il campo di reazione si colloca nella mezzeria dei poli inducenti. Rotando in senso orario, perché questo fa il motore che muove il rotore, il campo inducente deve compiere un lavoro per allontanare il polo Nord del campo di reazione e per portarsi dietro il polo Sud: questo lavoro si ritrova ai morsetti come potenza attiva fornita dal generatore.

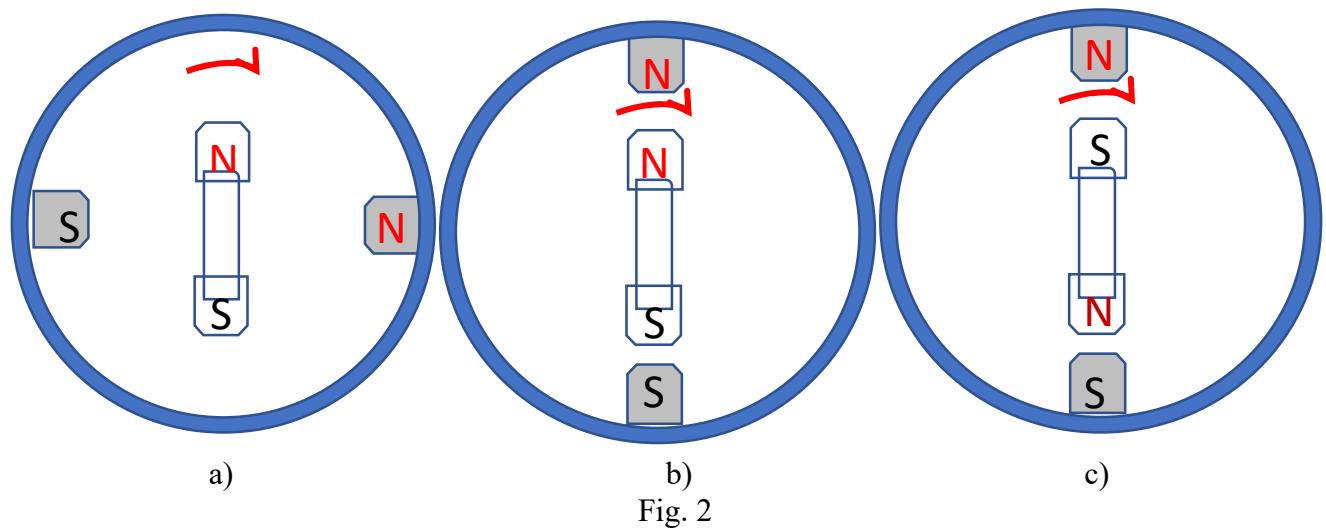
Il caso b) è quello relativo al carico puramente induttivo, mentre quello c) al carico puramente capacitivo. Nel primo caso il campo di reazione riduce il campo induttore, opponendosi, mentre nel secondo caso lo favorisce. In conclusione l'angolo che il campo rotante della reazione d'armatura forma (rotazione oraria nel piano geometrico) con l'asse neutro

(mezzeria dei poli) sarà compreso tra -90° (carico puramente induttivo) e $+90^\circ$ (carico puramente capacitivo). In effetti tale angolo non potrà mai essere $\pm 90^\circ$ perché comunque il generatore deve necessariamente sopperire alle sue proprie perdite!

Noi abbiamo già evidenziato una proprietà del campo rotante che può aiutarci a capire quale sia la posizione relativa dei due piani: abbiamo scoperto che quando il campo rotante passa per uno degli assi delle bobine, allora la corrente di quella bobina raggiunge il suo massimo valore. Per giustificare questa affermazione basta notare che in quell'istante particolare la direzione della componente destrogira del campo da essa prodotto deve coincidere con l'asse della bobina, insieme con la componente levogira, altrimenti non si potrebbe avere un massimo di B e quindi della corrente. Questo è un elemento che mette in relazione i due piani a cui facevamo cenno in precedenza: "la corrente nella bobina è massima", è una informazione che riguarda l'andamento temporale della corrente, mentre il fatto che "il campo rotante si posizioni lungo l'asse della specifica bobina" è qualcosa che attiene alla geometria della configurazione. Ammettiamo per cominciare che il carico sia puramente ohmico: allora le correnti sono in fase con le relative tensioni! Quindi quando la corrente in un avvolgimento raggiunge il suo massimo valore anche la relativa tensione lo dovrà fare mentre il flusso sarà in anticipo di $\pi/2$. Ma un anticipo di fase di 90° corrisponde nel nostro caso – una sola coppia polare! - ad una rotazione di 90° nel piano geometrico. Questo vuol dire che, rappresentando, per maggior chiarezza, i campi come magneti Nord-Sud, la situazione deve essere quella descritta nella Fig.2°a), dove si vede che il campo di reazione si colloca nella mezzeria dei poli inducenti. Rotando in senso orario, perché questo fa il motore che muove il rotore, il campo inducente deve compiere un lavoro per allontanare il polo Nord del campo di reazione e per portarsi dietro il polo Sud: questo lavoro si ritrova ai morsetti come potenza attiva fornita dal generatore.

Il caso b) è quello relativo al carico puramente induttivo, mentre quello c) al carico puramente capacitivo. Nel primo caso il campo di reazione riduce il campo induttore, opponendosi, mentre nel secondo caso lo favorisce. In conclusione l'angolo che il campo rotante della reazione d'armatura forma (rotazione oraria nel piano geometrico) con l'asse neutro

(mezzeria dei poli) sarà compreso tra -90° (carico puramente induttivo) e $+90^\circ$ (carico puramente capacitivo). In effetti tale angolo non potrà mai essere $\pm 90^\circ$ perché comunque il generatore dovrà necessariamente sopperire alle sue proprie perdite!



3 Perdite nel Generatore

Questa tipologia di macchina è largamente la più diffusa come generatore nelle centrali elettriche e per sistemi di potenza, nonostante una sua certa rigidità: la condizione di sincronismo comporta per esempio qualche difficoltà

all'avviamento e conseguente messa in rete. Il generatore deve prima essere portato a regime, alla velocità corrispondente alla frequenza della rete, e poi inserito. Ma in generale alcune limitazioni che un tempo erano critiche per le diverse macchine, sono oggi facilmente superate per merito della moderna elettronica di potenza o di controllo.



Il rendimento di tali macchine è molto buono. Le perdite sono essenzialmente perdite ohmiche, nel ferro e meccaniche. Definiamo:

- a) P_J = perdite nel rame, dovute alle correnti che circolano negli avvolgimenti; sono, naturalmente, proporzionali al quadrato della corrente (valore efficace se alternata!)
- b) P_{Fe} = perdite nel ferro dovute sia alle correnti parassite, P_{Fep} , che a quelle per isteresi P_{Fei} ; per valutarle si usa la così detta "Cifra di perdita" che rappresenta la perdita in potenza per Kg di materiale sottoposto a magnetizzazione alternativa con frequenza di 50 Hz e B massimo di 1 Tesla o 1,5 T, a seconda dei casi. Naturalmente si usano lamierini per ridurre le perdite per correnti passite. I lamierini più comuni al momento nelle costruzioni elettromeccaniche hanno una cifra di perdita intorno ad 1 W/Kg.
- c) P_m = perdite meccaniche, dovute a perdite per attrito nei cuscinetti, perdite per ventilazione che le parti mobili della macchina necessariamente producono (in generale

Luciano De Menna – Macchina Sincrona

dominanti tra le perdite meccaniche!) e perdite per attrito al collettore, ove ve ne sia la necessità.

A volte è necessario tener conto di perdite addizionali, non presenti nel precedente elenco, e di difficile valutazione teorica: vengono misurate sperimentalmente come differenza tra le perdite misurate e quelle calcolate. Il rendimento sarà:

$$\eta = \frac{P_{\text{in}} - (P_J + P_{\text{Fe}} + P_m)}{P_{\text{in}}}$$

Tutte le perdite si trasformano naturalmente in calore, e quindi innalzamento di temperatura. Anche se le perdite sono basse, conviene prevedere dei sistemi di prelievo del calore in eccesso, essenzialmente con uso di ventilazione aggiuntiva. Il maggior danno che l'aumento di temperatura può comportare è, a lungo andare, il deterioramento delle proprietà degli isolanti e, di conseguenza, cortocircuiti che possono gravemente danneggiare la macchina.



Oltre che nelle Centrali di potenza il generatore sincrono è molto diffuso anche nelle automobili, naturalmente per potenze molto più piccole. In questo contesto il generatore sincrono viene comunemente detto alternatore e garantisce la ricarica (!) continua delle batterie tradizionali. A valle dell'alternatore è

previsto un raddrizzatore a doppia semionda con un condensatore di livellamento, per ottenere la tensione continua necessaria.

4 Il Motore Sincrono

Come quasi tutti i dispositivi elettromeccanici, il generatore sincrono è “reversibile”, nel senso che è utilizzabile anche come motore. Alimentato da una opportuna tensione sinusoidale è in grado di sostenere il moto del rotore. Ho usato questa espressione perché è evidente che il motore sincrono non può avviarsi da solo, infatti la sua caratteristica meccanica e quella mostrata in Fig.3. Per farlo funzionare bisogna primo portarlo alla sua velocità di sincronismo legata alla frequenza di alimentazione ed al numero di coppie polari. Questa è la principale motivazione dello scarso uso di questa tipologia di macchine come motore. Naturalmente nel tempo si sono usati diversi accorgimenti per far partire il motore e portarlo alla velocità di sincronismo e solo successivamente collegarlo al carico. Uno dei più diffusi era quello di far partire il motore con un motore asincrono, magari calettato sullo stesso asse, che come vedremo non ha gli stessi problemi alla partenza. Oggi l'elettronica di potenza consente di avviare il motore con una terna di tensioni a frequenza variabile (0÷20 Hz) forniti da un inverter alimentato a frequenza di rete. Con lo stesso sistema si può ottenere anche una soddisfacente regolazioni della velocità.

1 Principio di Funzionamento

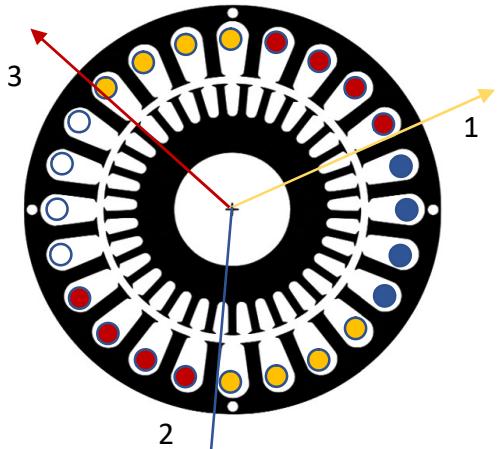


Fig.1

Nel Generatore Sincrono il motore che muove il rotore è la causa prima della variazione dei flussi concatenati, che a loro volta inducono le forze elettromotrici, e quindi le correnti, nello statore. Ma una volta capito come sia possibile produrre un campo rotante, con semplici correnti alternate in avvolgimenti opportunamente disposti, possiamo pensare di usare questo campo come "motore primo". In realtà dato che questa macchina, che chiameremo d'ora in poi "Asincrona", dà i suoi migliori servigi come motore

piuttosto che come generatore, introduciamola direttamente in questa veste.

Supponiamo di avere uno statore al cui interno sono inseriti tre avvolgimenti con gli assi disposti a 120° l'uno dall'altro, e di alimentare tali avvolgimenti con una terna simmetrica di tensioni di una rete trifase. Nella camera interna di questo statore si produrrà un campo rotante (rotazione oraria se la disposizione e l'ordine delle f.e.m. è quello indicato in Fig. 1, dove sono indicati gli assi dei tre avvolgimenti) con velocità angolare uguale alla pulsazione angolare della terna di tensioni applicate. Supponiamo anche che all'interno della camera ci sia un rotore con un avvolgimento chiuso in cortocircuito, che sia libero di ruotare – in figura sono indicate solo le cave rotoriche e non i conduttori. Per effetto delle variazioni dei flussi concatenati con gli avvolgimenti del rotore (ricordate che il campo statorico è rotante!), in essi si produrranno delle correnti che interagiranno con le correnti statoriche producendo il movimento del rotore stesso. Poiché la Legge di Neumann-Faraday-Lenz predice che gli effetti di tale interazione debbano essere tali da opporsi alle variazioni che li hanno prodotti, il rotore non può che muoversi all'inseguimento del campo rotante. La legge citata come sapete ha vari "padri", ma certamente quando si fa riferimento

Luciano De Menna – Motore Asincrono

all'aspetto dell'opposizione alle cause che hanno prodotto il cambiamento, si fa sempre il nome di Lenz! Fin tanto che il rotore non arrivi a ruotare alla stessa velocità del campo rotante, la legge di Lenz ci predice un aumento della velocità del rotore. D'altra parte se il rotore arrivasse ad essere sincrono con il campo rotante non ci sarebbero più variazioni di flussi, e quindi correnti, e quindi forze. Questo, naturalmente, nel nostro dispositivo ideale. Quello che accade in una macchina reale è che man mano che la velocità aumenta la coppia che agisce sul rotore diminuisce fino ad arrivare ad un'velocità che compensa esattamente le perdite meccaniche del rotore, e lì resta!

2 Caratteristiche del Motore Asincrono

In conclusione questo motore per sua natura non potrà mai lavorare al numero di giri corrispondente alla velocità del campo rotante: per questo motivo viene detto motore asincrono.

Invece di ragionare in termini velocità angolare del rotore e di velocità angolare del campo rotante – e quindi pulsazione angolare dell'alimentazione trifase, per una macchina con una sola coppia di poli – si preferisce definire lo scorrimento $s = (n_0 - n)/n_0$ dove n ed n_0 sono rispettivamente il numero di giri al minuto (!) del rotore e del campo rotante. Quindi per una

macchina ad una sola coppia di poli sarà $\omega_r = \text{velocità angolare del rotore} = 2\pi n/60$, mentre se la macchina ha più coppie polari si avrà $\omega_r = 2\pi np/60$, con p numero delle coppie polari!

La condizione $s = 1$ è quella del rotore fermo, mentre $s=0$ è il sincronismo, che come abbiamo visto il rotore non raggiungerà mai, almeno con le sue proprie forze. Nella Fig.2 è riportato il diagramma della coppia esercitata sul

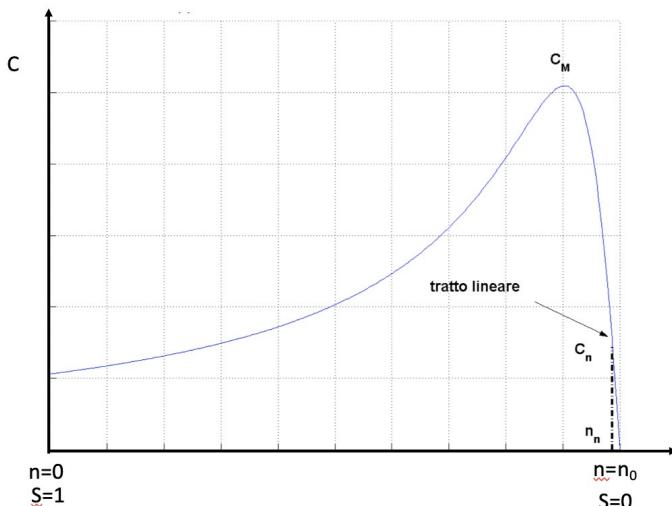


Fig.2

rotore in funzione dello scorrimento. Come si vede c'è una coppia massima che per i rotori in corto è abbastanza vicina ad $s=0$. Si noti che solo il tratto che va dalla coppia massima (s_M) ad $s=0$ – cioè sincronismo – può considerarsi stabile. Infatti se il motore lavora in questo tratto, ad ogni eventuale aumento della coppia resistente si ha uno spostamento verso sinistra del punto di lavoro, cioè per s più grandi e quindi velocità più basse. Dopo qualche eventuale oscillazione, specialmente se l'aumento di coppia resistente è stato rapido, il motore si porterà a funzionare in un altro punto di lavoro che gli consenta di fornire la nuova coppia motrice. Sull'altro tratto della

caratteristica, quello tra $s=1$ e lo scorrimento s_M di coppia massima, ad ogni aumento della coppia il motore rallenta e si sposta in un punto in cui la coppia è ancora più bassa, con un conseguente nuovo rallentamento, fino a fermarsi definitivamente. Un'altra osservazione importante che l'esame della caratteristica meccanica $C(s)$ ci induce a fare, è che la coppia di spunto - la coppia a rotore fermo - è generalmente bassa almeno per i motori in cc. All'avviamento quindi il

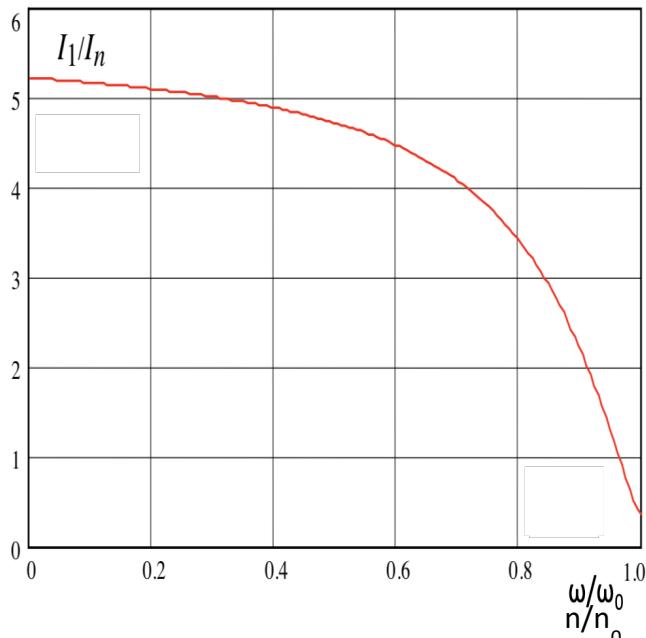


Fig.3

motore asincrono potrebbe avere difficoltà specialmente se costretto a partire sotto carico. Discuteremo in maggior dettaglio questo punto, ma naturalmente una possibile soluzione sarebbe quello di farlo partire scarico e poi, con una opportuna frizione, metterlo sotto carico.

In Fig.3 è rappresentata un'altra curva interessante che descrive il comportamento elettromeccanico del

motore in esame, la curva che ripota in ascisse il numero di giri ed in ordinate la corrente assorbita: come vedete la corrente (valore efficace) è rapportata alla corrente nominale ed il numero di giri al numero di giri del campo rotante. L'aspetto da rilevare è che la corrente allo spunto è molto elevata, anche sei o sette volte più grande di quella nominale. Questo pone un grosso problema per la rete che deve alimentare il motore. Affronteremo anche questo punto nel seguito

3 Il Rotore del Motore Asincrono

Ricordiamo in primo luogo quali sono i principali “dati di targa” di un motore asincrono trifase:

- La tensione nominale V_n , cioè la tensione concatenata statorica di progetto.
- La frequenza nominale f_n della rete di alimentazione.
- La velocità angolare del rotore $\omega_0 = 2\pi f_n p$, con p numero coppie polari.
- La potenza meccanica (in kW) in condizioni nominali (in c.n.), disponibile all'asse.
- La corrente nominale I_n assorbita dallo statoro per fase in c.n.
- Il $\cos\phi_n$ di sfasamento tra corrente e tensione in ogni fase statorica in c.n.
- Il rendimento η_n in c.n.
- La coppia nominale C_n all'asse in Nm in c.n.
- Il numero delle coppie polari p .

La targa contiene anche altre informazioni quali le grandezze elettriche e meccaniche di spunto e il tipo di avvolgimenti rotorici (motori avvolti, a gabbia o a doppia gabbia) e se e come essi possono essere modificati, argomenti che tratteremo in seguito.

Abbiamo inizialmente ipotizzato che l'avvolgimento rotorico fosse in corto e quindi con un basso valore della resistenza. Per

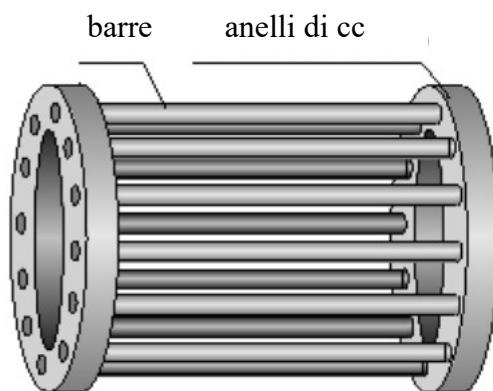


Fig.4

macchine di dimensioni non troppo grandi si utilizza una soluzione molto solida e compatta per realizzare un rotore di questo tipo, soluzione che prende il nome



Il materiale didattico è per uso personale e privato. È vietata la riproduzione o la diffusione a più persone. È vietata la vendita. Si ricorda che la legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941, n. 636) prevede severe sanzioni penali e civili.

Luciano De Menna – Motore Asincrono

di "gabbia di scoiattolo" ed è mostrata in Fig. 4. Sono barre longitudinali di materiale buon conduttore, cortocircuitate da anelli trasversali. Questa soluzione è molto conveniente sotto numerosi punti di vista ma presenta qualche problema per la fase di avviamento. Un modo per ovviare a questa "rigidità" della struttura a "gabbia di scoiattolo" consiste nell'utilizzare una "doppia gabbia di scoiattolo" con una seconda struttura di barre e con una sezione ed una profondità diversa come mostrato in Fig. 6, dove è rappresentata una sola delle cave rotoriche. Si può dimostrare che le due gabbie hanno ruoli dominanti in fasi diverse della dinamica del motore: la gabbia più interna predomina nella fase di avviamento del motore, e quindi a basse velocità, mentre la più esterna domina in fase di regime con valori di scorrimento prossimi a quelli nominali.

L'altro tipo di soluzione è quella di realizzare il rotore con veri e propri avvolgimenti di rame disposti nella configurazione desiderata – corrispondente a quella dello statore - su di un supporto solidale all'asse, come mostrato in Fig.5. In questo caso, in genere, i terminali degli avvolgimenti vengono portati all'esterno e collegati a dei contatti strisciante che consentono di modificare la tipologia dell'avvolgimento o di inserire in serie opportune resistenze, per favorire la fase di avviamento.

1 Avviamento del Motore Asincrono

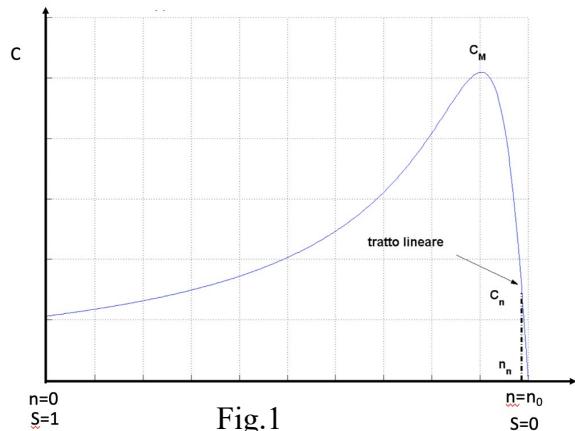


Fig.1

La macchina asincrona è il motore elettrico più semplice, affidabile, solido e economico che si possa concepire. Elenchiamone i vantaggi, tenendo presente la sua caratteristica meccanica che abbiamo già introdotto. In primo luogo è, in linea di principio, auto avviante, come si evince dal fatto che la coppia all'avvio, per $n = 0$, non è nulla, a causa del magnetismo residuo che

interessa il rotore. Non ha bisogno di una eccitazione esterna e a parità di potenza è più economico e leggero di altri tipi di motori. Si alimenta direttamente dalla linea trifase (o anche monofase, vedremo più avanti!) Guardando il tratto stabile della caratteristica si vede che il motore asincrono è in grado di fornire, ad una velocità praticamente costante, un largo intervallo di coppie motrici e la coppia nominale è generalmente tra un terzo e la metà di quella massima. È una macchina ad alto rendimento e richiede una ridotta manutenzione. A fronte di queste grandi qualità il motore asincrono ha tre difetti: la coppia all'avvio - coppia di spunto - può essere troppo bassa per le esigenze, la regolazione della velocità, senza accorgimenti speciali, può essere limitata e la corrente di spunto assorbita dallo statore può essere troppo grande, anche 5 – 7 volte la corrente nominale, come si evince dal diagramma di Fig.2.

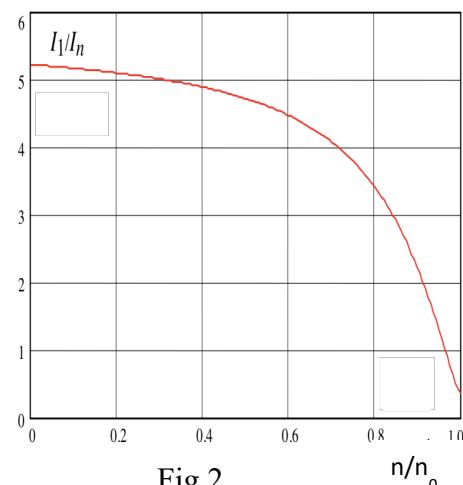


Fig.2

Ma a questi difetti si può porre rimedio in svariati modi. Cominciamo dalla coppia allo spunto.

2 Coppia allo spunto

In Fig.3 sono riportate tre curve elettromeccaniche del motore asincrono, per diversi valori della resistenza dell'avvolgimento rotorico. Come si vede aumentando la resistenza rotorica si può

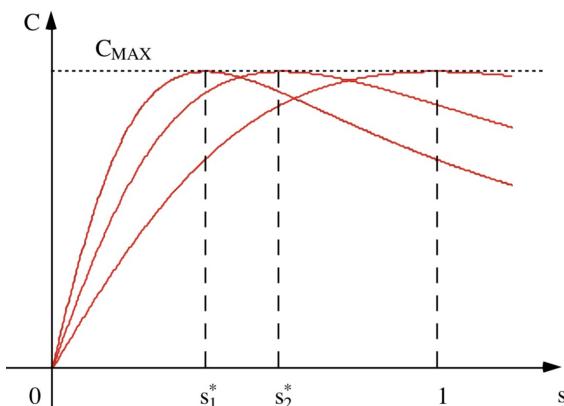


Fig.3

variare in modo consistente la coppia allo spunto ($s=1$). Per un rotore avvolto la cosa non presenta particolari difficoltà se i capicorda dei tre avvolgimenti sono stati portati all'esterno per mezzo di un sistema di contatti strisciante, come schematicamente mostrato in Fig.4. in tal caso si possono inserire in serie ad ogni avvolgimento dei reostati (resistori variabili) che allo spunto vengono

totalmente o parzialmente inseriti e a regime totalmente esclusi. La totale esclusione è necessaria perché, ovviamente, l'aumento della resistività rotorica va tutto a discapito del rendimento della macchina. Per questo stesso motivo il metodo descritto non è usato per la regolazione della velocità, che pure potrebbe realizzare tecnicamente.

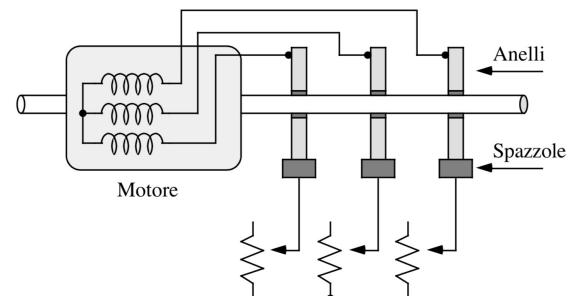
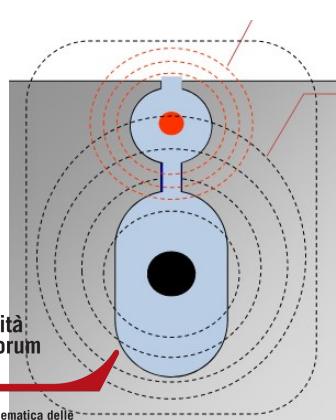


Fig.4

Nel caso di un rotore a gabbia, tale metodo non può evidentemente essere utile. In questo caso si può però utilizzare la doppia gabbia di scoiattolo di cui si è fatto cenno in precedenza. Si tratta di un rotore costruito in modo da avere una doppia serie di cave di alloggiamento per le barre conduttrici: una più profonda ed una più superficiale. Quella più

questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da
è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e
della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).



esterna alloggia barre che offrono una resistenza elettrica maggiore, sia per la sezione più piccola che per il materiale di cui sono fatte le barre. Nel contempo la gabbia esterna ha un minor coefficiente di autoinduzione dispera L di quella interna, che a sua volta ha una resistenza più bassa. Allo spunto, quando la frequenza delle correnti rotoriche è quella di rete, la reattanza offerta dalle due gabbie è molto diversa (ricordare che la reattanza è $X = \omega L$) e quindi la corrente "preferirà" la gabbia esterna. Man mano che lo scorrimento diminuisce, e la frequenza cresce, il ruolo delle due gabbie si invertirà e quella interna, a bassa resistenza prevarrà.

Un'altra tecnica per ovviare ad una insufficiente coppia di spunto è quella di passare da

una connessione a stella ad una a triangolo dell'alimentazione statorica. Infatti, come si vede dalla Fig.6, la coppia dipende anche dalla tensione di alimentazione - grosso modo varia con il quadrato della tensione a velocità fissata. Se quindi, in un rotore avvolto noi alimentiamo lo statore, nella fase di avvio, collegando ai tre avvolgimenti la tensione concatenata invece di quella stellata, avremo un conseguente aumento

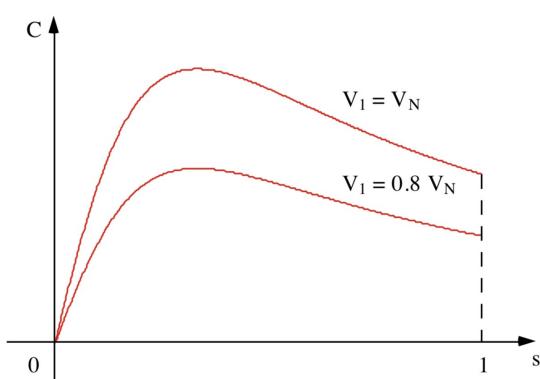


Fig.6

della coppia di spunto. Una volta avviato il motore si potrà ritornare alla stellata $\sqrt{3}$ volte più piccola.

Come si è detto, la corrente assorbita da fermo dal motore asincrono può essere molto elevata, e procurare disturbo alla rete. Purtroppo alcune delle tecniche usate per aumentare la coppia di spunto hanno la conseguenza di aumentare anche la corrente di spunto. Per questo motivo le due esigenze vanno opportunamente contemperate. Il passaggio da triangolo a stella, per esempio può essere utilizzato per ridurre la corrente allo spunto quando la coppia da fermo non desta preoccupazione.

3 Regolazione della velocità

Alcuni dei metodi per aumentare la coppia di spunto, possono essere utilizzati anche per la regolazione della velocità. Per esempio, l'uso di resistenze addizionali rotoriche, cambiando lo scorrimento – vedi Fig. 3 – consente anche di variare la velocità, cioè il numero di giri al secondo del motore $n = 60 f (1-s)/p.$

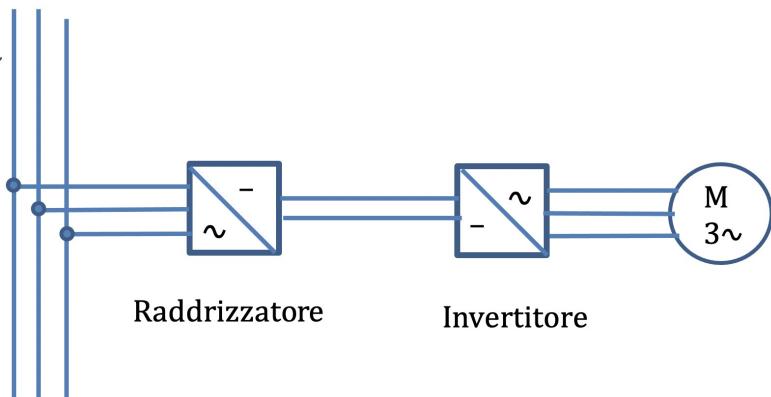


Fig.7

Ma si può anche pensare di variare la frequenza di alimentazione. Un tempo questo era problematico, soprattutto a potenza consistente. Oggi invece è

agevole realizzare una coppia raddrizzatore/invertitore come mostrato in Fig.7. Il raddrizzatore trasforma la terna di tensioni sinusoidali in una tensione continua che viene fornita in ingresso ad un inverter che la trasforma prima in un'onda quadra di frequenza e ampiezza voluta e poi in una sinusoide che viene trasformata a sua volta in una terna di tensioni di alimentazione del motore, di frequenza e valor massimo voluto.

L'alimentazione a frequenza variabile non può essere eseguita senza variare la tensione (o il flusso), infatti visto che approssimativamente possiamo ritenere che la tensione sia proporzionale al prodotto frequenza flusso e dato che il flusso non può aumentare oltre un certo limite, per il rischio di entrare in zone di non linearità, quando si diminuisce la frequenza bisogna diminuire anche la tensione. Quando invece si aumenta la frequenza si può lasciare invariata la tensione, consentendo così al flusso di diminuire.

La velocità può essere variata anche usando degli autotrasformatori che consentono di alimentare il motore a tensione variabile, ma a frequenza di rete. Le variazioni di tensione debbono

in questo caso essere compatibili con la permanenza del materiale magnetico nel tratto di linearità della sua caratteristica. Naturalmente questa soluzione comporta l'uso di un dispositivo aggiuntivo, l'autotrasformatore trifase appunto, che verrebbe utilizzato solo per periodi di tempo limitato.

La variazione della tensione di alimentazione può essere ottenuta anche con regolatori elettronici di tensione ed è questa oggi la soluzione più praticata.

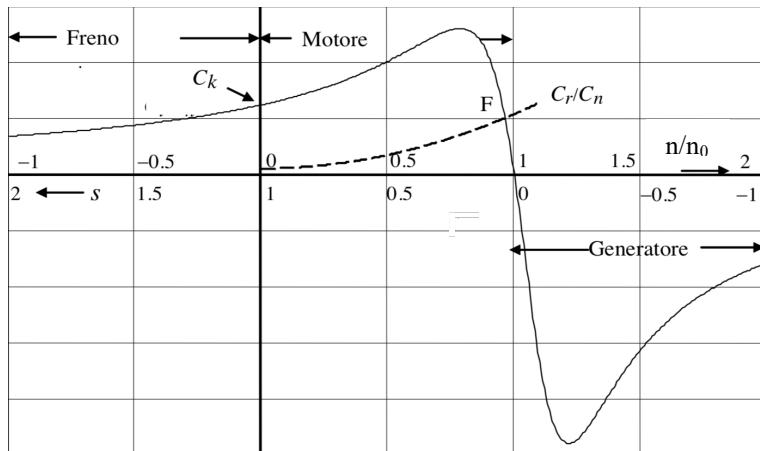
Va rilevato che nel motore asincrono la regolazione di velocità può arrivare fino alla totale inversione della stessa: basta infatti invertire la fase di due delle tre correnti di statore per ottenere un campo rotante che viaggia nel verso opposto, trascinando con se il rotore!

4 Asincrono Monofase

Il motore asincrono può essere anche monofase! Ricorderete infatti che abbiamo dimostrato che un campo alternativo, prodotto da una avvolgimento alimentato con una corrente sinusoidale, può essere visto come la somma di due campi rotanti con velocità ω (pulsazione angolare della corrente), uno destrogiro e l'altro levogiro. Quindi il motivo per cui un motore asincrono così alimentato non si mette in moto è semplicemente il fatto che il rotore è soggetto a due coppie contrapposte perfettamente uguali che si fanno equilibrio. Se però noi immaginiamo di avviare il rotore, anche magari con una spinta, supponiamo nella direzione oraria, vedremo questo muoversi e raggiungere gradualmente un'velocità poco discosta dal sincronismo in quella direzione. Il campo rotante levogiro vedrà invece il rotore muoversi in direzione opposta e quindi agirà come freno.

Per meglio comprendere questa dinamica riportiamo nel diagramma di Fig.1 la caratteristica meccanica totale della macchina asincrona e notiamo che se diciamo s_D lo scorrimento del rotore rispetto al campo magnetico rotante destrogiro ed s_I quello rispetto al campo magnetico levogiro avremo:

$$s_D = \frac{n_0 - n}{n_0} = 1 - \frac{n}{n_0} = 1 + \frac{(-n)}{n_0} = 1 + \frac{n}{(-n_0)} = 2 - 1 + \frac{n}{(-n_0)} = 2 - \left(1 - \frac{n}{(-n_0)}\right) = 2 - \left(1 - \frac{-n_0 - n}{(-n_0)}\right) = 2 - s_I$$



E quindi $s_I = 2 \div s_D$, cioè quando s_D spazia nell'intervallo $(0 \div 1)$, s_I si ritrova in quello $(2 \div 1)$. In conclusione l'effetto della coppia resistente equivale ad una nuova caratteristica meccanica del motore

Fig.8

Il diritto d'autore appartiene esclusivamente al titolare o al proprietario dell'opera personale dello studente ed è coperto da tutti i diritti di esclusività, compresa la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

che si può ottenere facilmente ribaltando la curva caratteristica nell'intervallo (2 ÷ 1) attorno all'asse $s=1$ e sottraendo i valori corrispondenti nella curva diretta, come mostrato nella Fig.9.

Resta comunque il problema della "spinta iniziale" di cui il motore monofase ha assolutamente bisogno, ma naturalmente ci sono diversi metodi per ottenerla. Facciamo cenno solo al più diffuso che consiste nel prevedere un secondo avvolgimento statorico disposto a 90° rispetto al precedente e facendovi circolare una corrente sfasata di 90° rispetto alla corrente dell'avvolgimento principale. Si ottiene così un campo rotante bifase iniziale che è sufficiente a far partire il motore. A regime il condensatore può essere eventualmente disinserito.

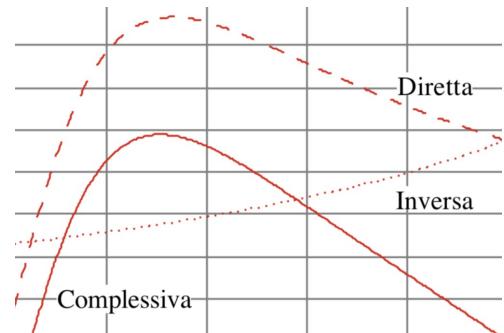


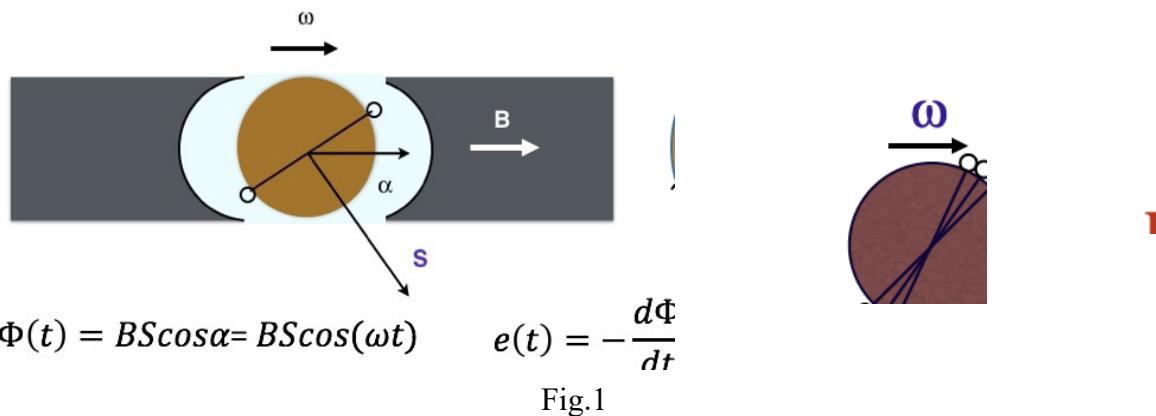
Fig.9

5 Il Generatore Asincrono

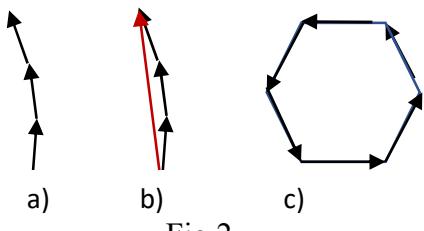
Come tutte le macchine elettriche rotanti anche quella asincrona è reversibile, nel senso che è possibile costruire un generatore asincrono, come del resto già evidente nel diagramma di Fig. 8, dove il tratto di curva per s negativo è indicati come "Generatore". Infatti per s negativo il rotore deve sopravanzare il campo rotante e "trascinarlo" con se. Quindi oltre al motore primo che mette in moto il rotore del generatore, occorre che gli avvolgimenti statorici siano alimentati ad una determinata tensione e frequenza. In questo senso l'impiego più congeniale per un generatore asincrono è quello di dare un contributo ad una rete già funzionante ad una determinata tensione e frequenza, alimentata da generatori sincroni. Nel caso di generatore isolato si utilizzano di regola banchi di condensatori che debbono fornire l'energia reattiva inizialmente necessaria.

1 Il Collettore

Ritorniamo alla macchina idealizzata da cui siamo partiti per spiegare il motore ed il



generatore sincrono ed asincrono, che riportiamo in Fig 1. Abbiamo già osservato che sfruttare con



una sola spira tutta la periferia del cilindro/rotore, sembrava un po' poco. E infatti ne abbiamo messe di più: un avvolgimento, come idealmente mostrato nella stessa Fig.1. Se queste spire sono tutte in serie e l'intero avvolgimento è aperto, cioè non circola corrente, allora

potremo dire che, quando il rotore si metterà in moto, la tensione ai morsetti dell'avvolgimento sarà la somma delle tensioni nelle singole spire. Naturalmente tenendo conto che si tratta di forme d'onda sinusoidali cioè fasori. Infatti in ogni spira le f.e.m. sarà uguale in modulo, ma sfasata del piccolo angolo che c'è tra l'asse della singole spire. Sul piano di Gauss sarà qualcosa del genere di quello mostrato in Fig.2 a). In Fig. 2b) è mostrata anche la somma, cioè la risultante. Ora si può capire perché quando abbiamo introdotto questo discorso abbiamo detto che a nulla sarebbe valso coprire tutta la periferia del rotore con una unica spira: la f.e.m. prelevata sarebbe stata nulla come mostra la Fig.2 c), dove per semplificare la rappresentazione si sono immaginati solo sei spire.

Il tipo di "collettore" della f.e.m. a cui stiamo pensando in questo ragionamento è mostrato in Fig.3:

due soli anelli collegati agli estremi dell'unica spira con due contatti strisciante, o spazzole.

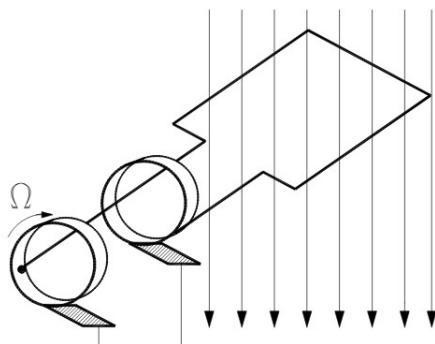


Fig.3 a)

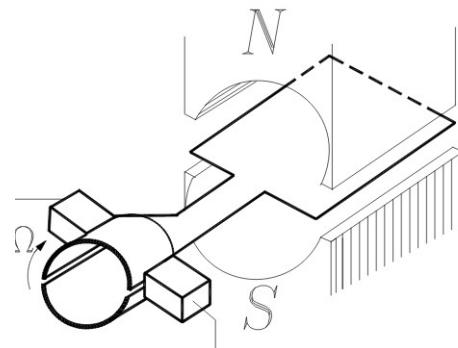


Fig.3b)

Ma si può fare di meglio. Si immagini un collettore del tipo di quello mostrato in Fig.3b. Come

vedete non sono due anelli distinti ma due semi-anelli sui quali strisciano le due spazzole che prelevano le f.e.m. Durante la metà di un giro la spazzola A è collegata con il semianello superiore e quella B con quello inferiore. Durante il semigiro successivo le cose si invertono: A è collegata con il semianello inferiore mentre B con quello superiore. In

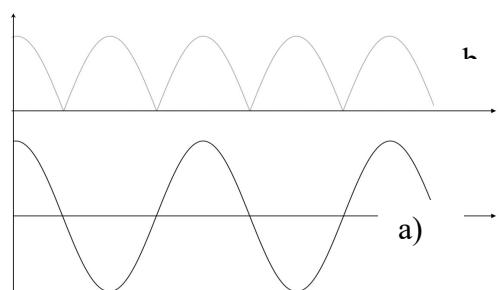


Fig. 4

altri temini per metà periodo le spazzole prelevano $e(t)$ e per il periodo successivo $-e(t)$, dove $e(t)$ è naturalmente la f.e.m. nella spira. Notate anche che la posizione che abbiamo scelto è proprio quella per cui questa "commutazione" da $e(t)$ a $-e(t)$ avviene quando il flusso concatenato con la spira è massimo (si controlli posizione della spira e direzione del campo B), cioè, come sappiamo, la f.e.m. $e(t)$ passa per lo zero. In Fig.4a) è

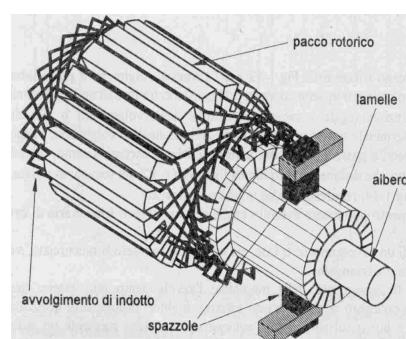


Fig.5

rappresentata la tensione che si preleva alle spazzole del collettore di Fig.3a), ed in Fig. 4b) quella che troveremmo alle spazzole di Fig.3b). Come vedete la tensione è “unidirezionale”.

A questo punto è facile capire cosa accade se aumentiamo il numero di suddivisioni dell'anello del collettore, come per esempio è mostrato in Fig.5. e quindi predisponiamo un più numeroso insieme di avvolgimenti separati o “matasse”.

La tensione prelevata alle spazzole sarà del tipo mostrato in Fig.6, dove si sono immaginati 3 avvolgimenti collegati alle relative lamelle del collettore. E ancora per 6 avvolgimenti avremmo un andamento del tipo descritto in Fig.7: In pratica una tensione quasi continua!

Questo è il principio generale di funzionamento di un generatore in continua, o Dinamo, come si dice anche. Si comprende facilmente che l'elemento critico, dal quale dipende essenzialmente il buon funzionamento del dispositivo, è il collettore.

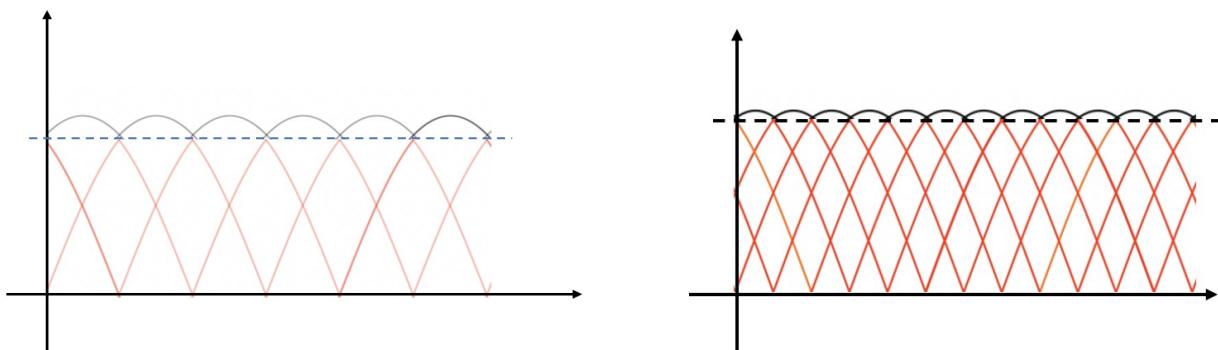
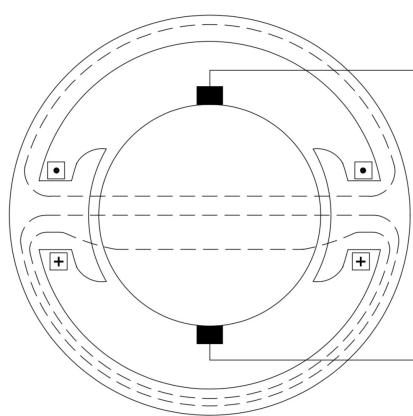
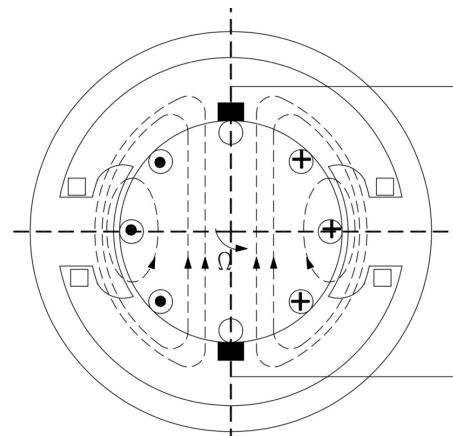


Fig.6

2 Reazione d'Armatura



a)



b)

Fig.7

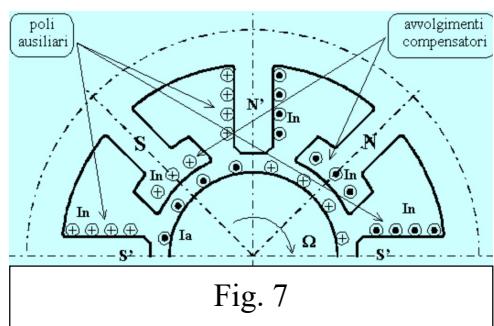
Fino ad ora abbiamo supposto il generatore a vuoto, e quindi nessuna corrente attraversava i circuiti rotorici; se invece assumiamo che il generatore sia collegato ad un carico, la corrente da esso assorbita (corrente continua, si ricordi!) circolerà anche nelle "matasse" rotoriche e contribuirà quindi anche lei al campo magnetico.

Nella Fig.7 sono rappresentati i due campi: a) quello creato dai soli avvolgimenti dell'induttore e b) quello creato all'indotto.

Senza entrare in troppi particolari, possiamo dire che questa "reazione d'armatura" – anche in questo caso si usa questo termine per indicare quello che è un "effetto di mutua", anche se di tipo particolare, perché causato dal movimento – ha un effetto deformante sull'andamento del campo sotto le scarpe polari: per descriverlo si usa la metafora del "vento polare", perché la deformazione sembra prodotta da una sorta di trascinamento del campo a seguito del rotore, proprio come se fosse mosso da un vento prodotto dal rotore stesso nel suo movimento. In ogni caso questo effetto produce uno spostamento dell'asse neutro - l'asse ortogonale a quello delle scarpe polari (Nord-Sud) – di modo che le spazzole possono trovarsi non più nella posizione

ottimale per la commutazione. Se questo effetto fosse costante, non ci sarebbe problema a riposizionare le spazzole lungo il nuovo asse neutro equivalente, ma non è costante perché dipende dall'intensità della corrente richiamata dal carico e quindi si sarebbe costretti ad accettare questa posizione non ottimale, che però può avere effetti dannosi. Infatti, all'atto della commutazione le spazzole abbandonano una lamella del collettore per passare alla successiva e la corrente che attraversava la lamella "precedente" deve interrompersi, per dare spazio alla seguente. Questo può produrre scariche - qualcosa di simile alle extracorrenti di un interruttore in apertura su di un circuito induttivo - che possono, a lungo andare, rovinare il collettore.

Per compensare gli effetti negativi sulla commutazione della reazione d'armatura si usano due accorgimenti costruttivi che hanno lo scopo in qualche modo di correggere o compensare la



deformazione dell'andamento del campo B sotto la scarpa polare. Il primo è quello di prevedere degli avvolgimenti compensatori nelle stesse scarpe polari, che, attraversati dalla stessa corrente di indotto, possano contrastare il campo prodotto dalla corrente di armatura, (vedi Fig.7).

Questa soluzione risulta essere però abbastanza costosa e quindi usata solo in casi speciali. Un altro metodo più economico è quello di aggiungere due poli ausiliari, detti poli di commutazione, nella mezzeria dei poli principali, come mostrato nella stessa Fig. 7. La presenza di questi poli, con scarpa polare di ridotte dimensioni, è in grado di facilitare la commutazione.

3 Sistemi di Eccitazione

Naturalmente il campo inducente, quello delle due scarpe polari per intenderci, non necessariamente deve essere prodotto da magneti permanenti; può essere l'effetto di una corrente in un avvolgimento predisposto allo scopo. In tal caso si parlerà di circuito di eccitazione, e potrà essere un circuito indipendente, alimentato da un'altra fonte di energia (eccitazione indipendente), oppure potrà sfruttare la stessa tensione della macchina che deve eccitare. Si

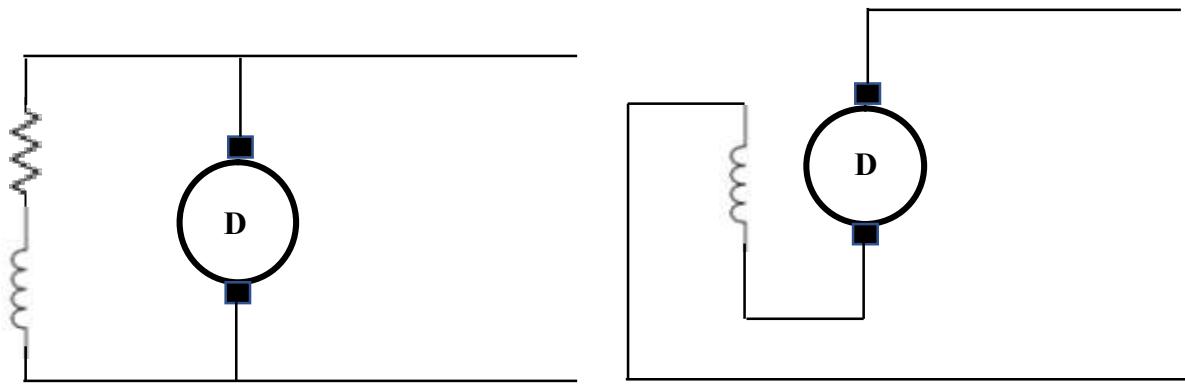
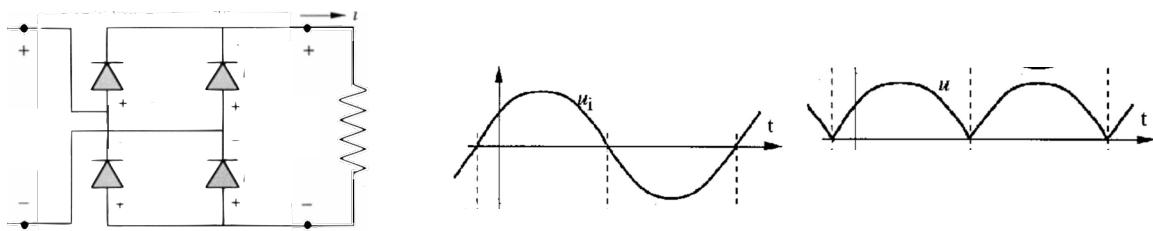


Fig.8

potrà avere allora una eccitazione in parallelo e una eccitazione in serie come mostrato in Fig. 8.

L'avvio iniziale è assicurato dalla presenza di un lieve magnetismo residuo nelle due scarpe polari, che assicura l'induzione di una piccola tensione iniziale ai morsetti della macchina. Quest'ultima, a sua volta, produce una piccola corrente di eccitazione. Il fenomeno gradualmente si amplifica fino ad arrivare ai valori nominali di regime. Si noti che l'eccitazione in parallelo non si distingue dall'eccitazione indipendente, salvo che nella fase iniziale. Naturalmente la dinamo eccitata in parallelo può partire a "vuoto", ma anche sotto "carico", quindi collegata ad altra rete preesistente. Per quella in serie, invece, la partenza a vuoto sarebbe impossibile perché non avrebbe l'eccitazione richiesta essendo il circuito di induttore aperto.

La dinamo oggi non è molto usata come generatore di corrente continua, perché si preferisce di solito usare un alternatore o un generatore asincrono con in uscita un raddrizzatore, per esempio come quello a ponte Graetz mostrato in Fig.9



Oppure, avendo a disposizione una terna simmetrica di tensioni, un ponte di Graetz trifase come mostrato in Fig. 10

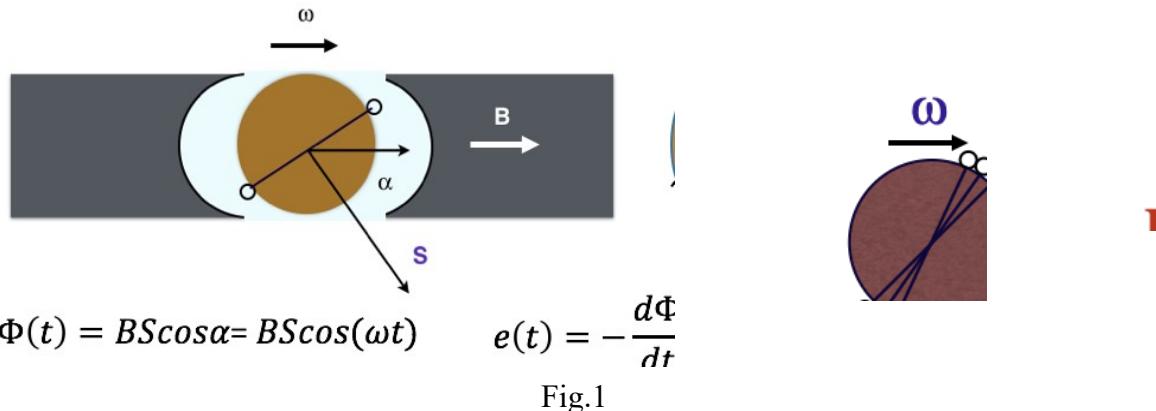


Fig.10

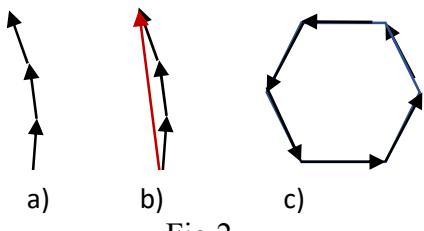
Il risultato finale è analogo a quello prodotto dal collettore di una dinamo.

1 Il Collettore

Ritorniamo alla macchina idealizzata da cui siamo partiti per spiegare il motore ed il



generatore sincrono ed asincrono, che riportiamo in Fig 1. Abbiamo già osservato che sfruttare con



una sola spira tutta la periferia del cilindro/rotore, sembrava un po' poco. E infatti ne abbiamo messe di più: un avvolgimento, come idealmente mostrato nella stessa Fig.1. Se queste spire sono tutte in serie e l'intero avvolgimento è aperto, cioè non circola corrente, allora

potremo dire che, quando il rotore si metterà in moto, la tensione ai morsetti dell'avvolgimento sarà la somma delle tensioni nelle singole spire. Naturalmente tenendo conto che si tratta di forme d'onda sinusoidali cioè fasori. Infatti in ogni spira le f.e.m. sarà uguale in modulo, ma sfasata del piccolo angolo che c'è tra l'asse della singole spire. Sul piano di Gauss sarà qualcosa del genere di quello mostrato in Fig.2 a). In Fig. 2b) è mostrata anche la somma, cioè la risultante. Ora si può capire perché quando abbiamo introdotto questo discorso abbiamo detto che a nulla sarebbe valso coprire tutta la periferia del rotore con una unica spira: la f.e.m. prelevata sarebbe stata nulla come mostra la Fig.2 c), dove per semplificare la rappresentazione si sono immaginati solo sei spire.

Il tipo di "collettore" della f.e.m. a cui stiamo pensando in questo ragionamento è mostrato in Fig.3:

due soli anelli collegati agli estremi dell'unica spira con due contatti strisciante, o spazzole.

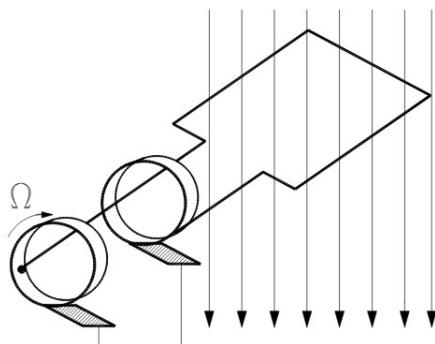


Fig.3 a)

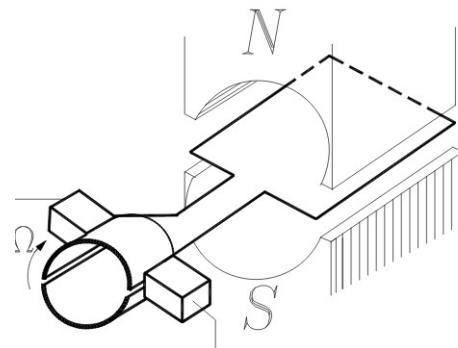


Fig.3b)

Ma si può fare di meglio. Si immagini un collettore del tipo di quello mostrato in Fig.3b. Come

vedete non sono due anelli distinti ma due semi-anelli sui quali strisciano le due spazzole che prelevano le f.e.m. Durante la metà di un giro la spazzola A è collegata con il semianello superiore e quella B con quello inferiore. Durante il semigiro successivo le cose si invertono: A è collegata con il semianello inferiore mentre B con quello superiore. In

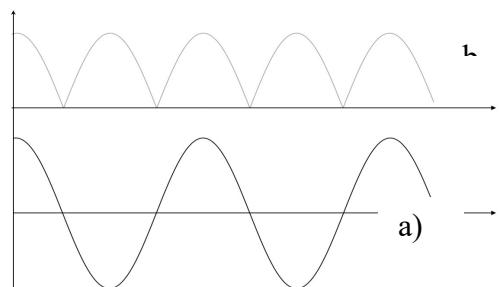


Fig. 4

altri temini per metà periodo le spazzole prelevano $e(t)$ e per il periodo successivo $-e(t)$, dove $e(t)$ è naturalmente la f.e.m. nella spira. Notate anche che la posizione che abbiamo scelto è proprio quella per cui questa "commutazione" da $e(t)$ a $-e(t)$ avviene quando il flusso concatenato con la spira è massimo (si controlli posizione della spira e direzione del campo B), cioè, come sappiamo, la f.e.m. $e(t)$ passa per lo zero. In Fig.4a) è

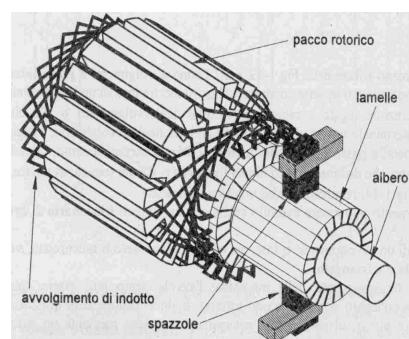


Fig.5

rappresentata la tensione che si preleva alle spazzole del collettore di Fig.3a), ed in Fig. 4b) quella che troveremmo alle spazzole di Fig.3b). Come vedete la tensione è “unidirezionale”.

A questo punto è facile capire cosa accade se aumentiamo il numero di suddivisioni dell'anello del collettore, come per esempio è mostrato in Fig.5. e quindi predisponiamo un più numeroso insieme di avvolgimenti separati o “matasse”.

La tensione prelevata alle spazzole sarà del tipo mostrato in Fig.6, dove si sono immaginati 3 avvolgimenti collegati alle relative lamelle del collettore. E ancora per 6 avvolgimenti avremmo un andamento del tipo descritto in Fig.7: In pratica una tensione quasi continua!

Questo è il principio generale di funzionamento di un generatore in continua, o Dinamo, come si dice anche. Si comprende facilmente che l'elemento critico, dal quale dipende essenzialmente il buon funzionamento del dispositivo, è il collettore.

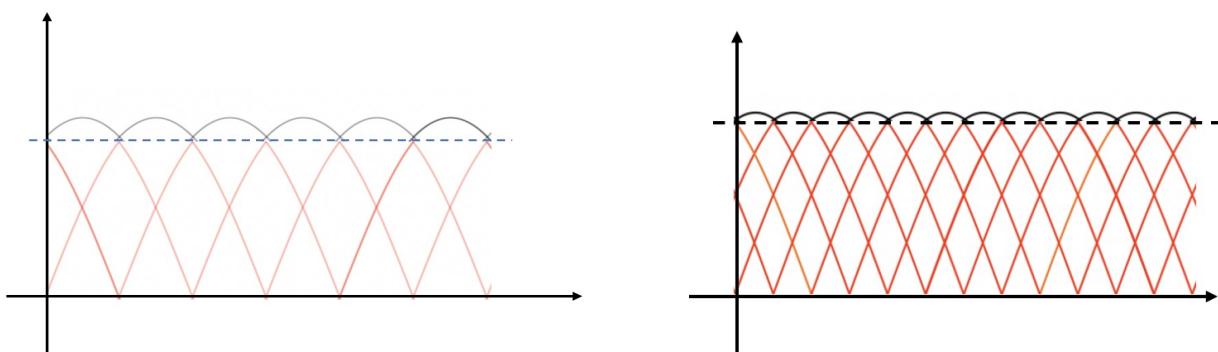
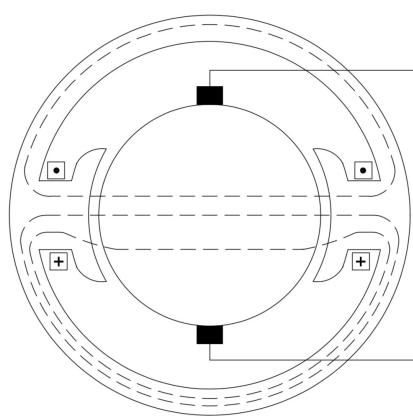
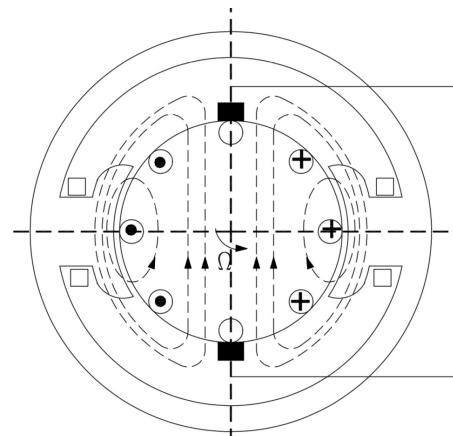


Fig.6

2 Reazione d'Armatura



a)



b)

Fig.7

Fino ad ora abbiamo supposto il generatore a vuoto, e quindi nessuna corrente attraversava i circuiti rotorici; se invece assumiamo che il generatore sia collegato ad un carico, la corrente da esso assorbita (corrente continua, si ricordi!) circolerà anche nelle "matasse" rotoriche e contribuirà quindi anche lei al campo magnetico.

Nella Fig.7 sono rappresentati i due campi: a) quello creato dai soli avvolgimenti dell'induttore e b) quello creato all'indotto.

Senza entrare in troppi particolari, possiamo dire che questa "reazione d'armatura" – anche in questo caso si usa questo termine per indicare quello che è un "effetto di mutua", anche se di tipo particolare, perché causato dal movimento – ha un effetto deformante sull'andamento del campo sotto le scarpe polari: per descriverlo si usa la metafora del "vento polare", perché la deformazione sembra prodotta da una sorta di trascinamento del campo a seguito del rotore, proprio come se fosse mosso da un vento prodotto dal rotore stesso nel suo movimento. In ogni caso questo effetto produce uno spostamento dell'asse neutro - l'asse ortogonale a quello delle scarpe polari (Nord-Sud) – di modo che le spazzole possono trovarsi non più nella posizione

ottimale per la commutazione. Se questo effetto fosse costante, non ci sarebbe problema a riposizionare le spazzole lungo il nuovo asse neutro equivalente, ma non è costante perché dipende dall'intensità della corrente richiamata dal carico e quindi si sarebbe costretti ad accettare questa posizione non ottimale, che però può avere effetti dannosi. Infatti, all'atto della commutazione le spazzole abbandonano una lamella del collettore per passare alla successiva e la corrente che attraversava la lamella "precedente" deve interrompersi, per dare spazio alla seguente. Questo può produrre scariche - qualcosa di simile alle extracorrenti di un interruttore in apertura su di un circuito induttivo - che possono, a lungo andare, rovinare il collettore.

Per compensare gli effetti negativi sulla commutazione della reazione d'armatura si usano due accorgimenti costruttivi che hanno lo scopo in qualche modo di correggere o compensare la

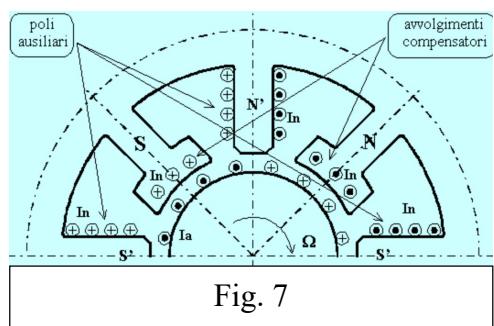


Fig. 7

deformazione dell'andamento del campo B sotto la scarpa polare. Il primo è quello di prevedere degli avvolgimenti compensatori nelle stesse scarpe polari, che, attraversati dalla stessa corrente di indotto, possano contrastare il campo prodotto dalla corrente di armatura, (vedi Fig.7).

Questa soluzione risulta essere però abbastanza costosa e quindi usata solo in casi speciali. Un altro metodo più economico è quello di aggiungere due poli ausiliari, detti poli di commutazione, nella mezzeria dei poli principali, come mostrato nella stessa Fig. 7. La presenza di questi poli, con scarpa polare di ridotte dimensioni, è in grado di facilitare la commutazione.

3 Sistemi di Eccitazione

Naturalmente il campo inducente, quello delle due scarpe polari per intenderci, non necessariamente deve essere prodotto da magneti permanenti; può essere l'effetto di una corrente in un avvolgimento predisposto allo scopo. In tal caso si parlerà di circuito di eccitazione, e potrà essere un circuito indipendente, alimentato da un'altra fonte di energia (eccitazione indipendente), oppure potrà sfruttare la stessa tensione della macchina che deve eccitare. Si

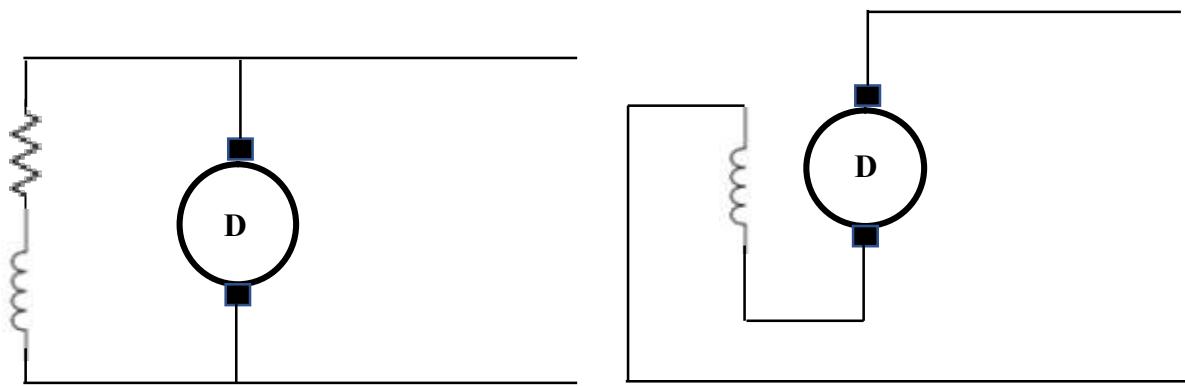
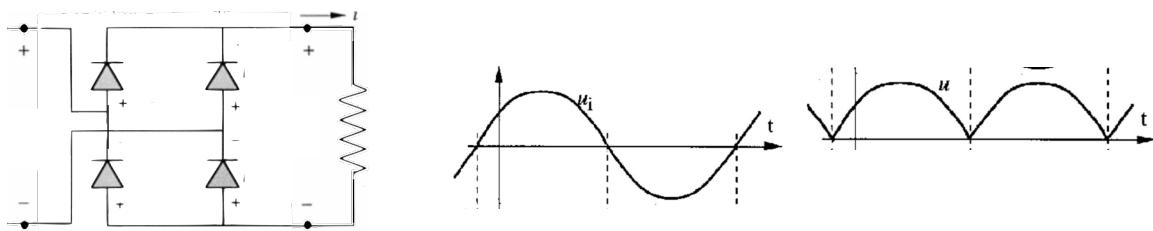


Fig.8

potrà avere allora una eccitazione in parallelo e una eccitazione in serie come mostrato in Fig. 8.

L'avvio iniziale è assicurato dalla presenza di un lieve magnetismo residuo nelle due scarpe polari, che assicura l'induzione di una piccola tensione iniziale ai morsetti della macchina. Quest'ultima, a sua volta, produce una piccola corrente di eccitazione. Il fenomeno gradualmente si amplifica fino ad arrivare ai valori nominali di regime. Si noti che l'eccitazione in parallelo non si distingue dall'eccitazione indipendente, salvo che nella fase iniziale. Naturalmente la dinamo eccitata in parallelo può partire a "vuoto", ma anche sotto "carico", quindi collegata ad altra rete preesistente. Per quella in serie, invece, la partenza a vuoto sarebbe impossibile perché non avrebbe l'eccitazione richiesta essendo il circuito di induttore aperto.

La dinamo oggi non è molto usata come generatore di corrente continua, perché si preferisce di solito usare un alternatore o un generatore asincrono con in uscita un raddrizzatore, per esempio come quello a ponte Graetz mostrato in Fig.9



Oppure, avendo a disposizione una terna simmetrica di tensioni, un ponte di Graetz trifase come mostrato in Fig. 10



Fig.10

Il risultato finale è analogo a quello prodotto dal collettore di una dinamo.

1 Le Centrali Elettriche

L'energia elettrica si può trasmettere a grande distanza con grande semplicità e perdite molto ridotte. Essa può essere distribuita capillarmente nel territorio e facilmente trasformata, con un alto rendimento, in tutte le altre forme di energia possibile. Essa è poi insostituibile nel campo delle telecomunicazioni e dell'informatica. Il suo unico grande difetto allo stato attuale è che non essa non è facilmente immagazzinabile in quantità industriali: deve essere prodotta quando viene richiesta! Dalla fine del diciannovesimo secolo, lo sviluppo della produzione, della distribuzione e dell'utilizzo dell'energia elettrica è stato considerato il miglior indice del livello di sviluppo di una nazione.

La Centrale Elettrica è appunto il luogo in cui si produce energia elettrica trasformandola da un'altra fonte di energia primaria. In questo senso la Centrale può avere caratteristiche molto diverse in dipendenza della particolare fonte primaria che essa ha il compito di trasformare. In alcuni casi essa non è neanche concentrata in uno specifico luogo, ma è distribuita in un'area che può anche essere abbastanza estesa: si pensi alle centrali eoliche, per esempio.

Una prima classificazione si può fare proprio basandoci sulla fonte di energia primaria. Avremo:

- Energia idraulica (caduta d'acqua, maree ecc.)
- Energia Termica (a combustibile fossile, geotermiche, termonucleari – fusione e fissione)
- Energia eolica
- Energia solare (fotovoltaiche)

Noi vogliamo, molto sinteticamente, esaminare solo la parte "elettrica" della centrale, immaginando che la fonte di energia primaria sia stata già trasformata in energia meccanica mediante turbine, motori a combustibile liquido, motori a gas o altro.

Nella centrale avremo, naturalmente, i generatori, che trasformano energia meccanica in energia elettrica. Saranno fondamentalmente Generatori Sincroni e Trifasi, per i diversi motivi che

abbiamo già messo in evidenza. Casi speciali con generatori elettrici di altro tipo sono possibili, ma meno frequenti, soprattutto per elevate potenze. La tensione nominale dei generatori sarà nel campo delle medie tensioni, tipicamente da 10 a 20 kV, e deve quindi essere trasformata in alta tensione, 220 ÷ 380 kV, mediante trasformatori, che a loro volta si collegano alla rete in alta tensione, secondo lo schema di Fig.1

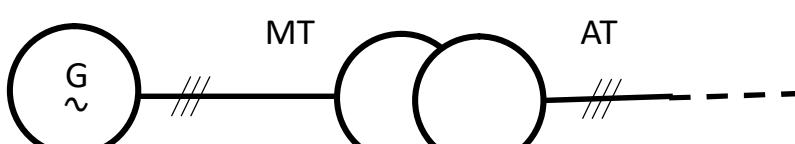


Fig.1

In tale schema si è usata la convenzione di rappresentare le tre linee del sistema trifase con una sola linea, con l'aggiunta di quei tre trattini obliqui che ricordano, appunto, che di una linea trifase si tratta. Convenzione che consente una maggior chiarezza e comprensibilità degli schemi elettrici.

A questo indirizzo web si possono trovare tutti simboli per gli schemi elettrici accettati dal Comitato Elettrotecnico Italiano: <http://www.cospe.com/extra/CEI-Simboli-impianto-elettrico.pdf>

Per adeguare la potenza richiesta a quella generata, si cerca in primo luogo di raggruppare un gran numero di utenze in modo da assicurare una maggior uniformità della richiesta. Ciò nonostante il diagramma di carico (energia utilizzata in funzione del tempo) presenta una certa variabilità stagionale ed una giornaliera, come mostrato in due casi tipici (in rosso giorno festivo) in Fig.2, dove si evidenziano due punte di carico, durante la giornata, ed un minimo notturno.

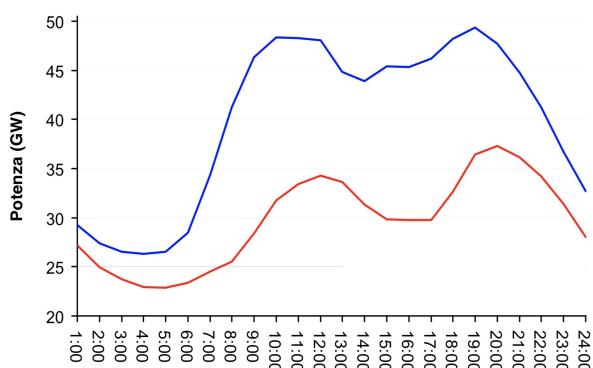


Fig.2

Per far fronte a questa variabilità si preferisce fornire un servizio di "base" - quindi una potenza media nella giornata P_m , con le grandi centrali termiche che sono le più lente ad "accendersi", e sopperire alle punte di richiesta con centrali più piccole e di tipo idraulico che sono le

più rapide a partire. Nei periodi in cui invece la potenza richiesta è minore di quella di base, si usa

la potenza in eccesso per portare su, nei bacini in quota, acqua dal fondo valle in centrali speciali dette Centrali di Recupero. In pratica è un modo per immagazzinare energia “gravitazionale” da utilizzare durante il giorno nei periodi picco.

La gestione di tutte queste attività, che nel loro complesso costituiscono il “dispacciamento”, è sostenuta da un Centro di Controllo del Servizio Elettrico Nazionale (SEN) estremamente automatizzato.

Del SEN fanno parte, oltre alle Centrali di Produzione, le linee di potenza, le Stazioni (o Cabine) di trasformazione e naturalmente l'utenza finale.

Come si è già detto le linee di potenza vengono classificate in categorie, secondo la loro tensione nominale:

Categoria	Tensioni alternate	Tensioni continue
0	$V_n \leq 50 \text{ V}$	$V_n \leq 120 \text{ V}$
1	$50 \text{ V} < V_n \leq 1000 \text{ V}$	$120 \text{ V} < V_n \leq 1500 \text{ V}$
2	$1000 \text{ V} < V_n \leq 30000 \text{ V}$	$1500 \text{ V} < V_n \leq 30000 \text{ V}$
3	$V_n \geq 30000 \text{ V}$	$V_n \geq 30000 \text{ V}$

Sopravvive però anche la vecchia classificazione: Bassa Tensione (bt, $V_n \leq 1000 \text{ V}$), Media Tensione (MT, $1000 \text{ V} < V_n \leq 30000 \text{ V}$), Alta Tensione (AT, $30000 \text{ V} < V_n \leq 150000 \text{ V}$), Altissima Tensione (AAT, $V_n \geq 150000 \text{ V}$)

2 Le Linee Elettriche

Dalla Stazione di Trasformazione MT/AT della Centrale si va alla linea di distribuzione stessa

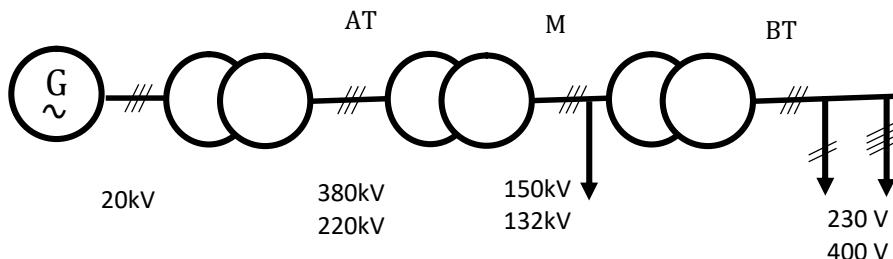


Fig.3

Grandi Utenti
Piccoli Utenti

che può essere aerea,
sostenuta da piloni in
acciaio, o "interrata".
Per ovvie ragioni nel
caso delle Alte Tensioni
l'interramento della linea
è quasi escluso, se non in

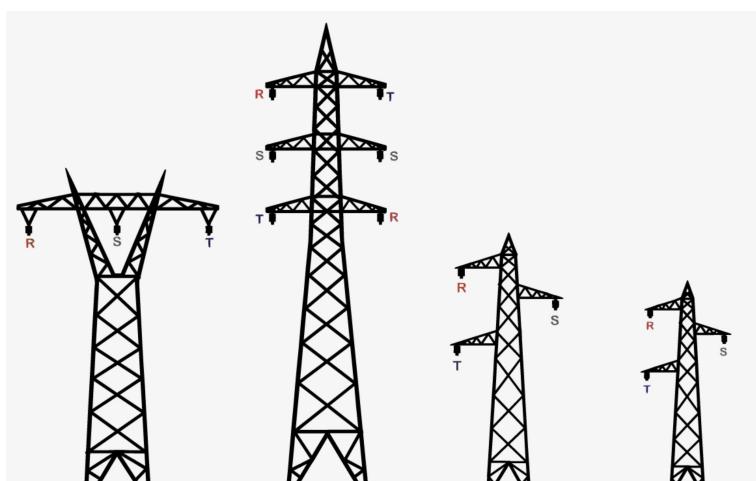
casi speciali come quello dei cavi sottomarini che, bisognerebbe dire, vengono appunto "affogati".

Il SEN include un collegamento alle reti confinanti della Francia, della Svizzera, dell'Austria e della Slovenia e due collegamenti sottomarini in cavo ed in continua con la Sardegna (500kV) e con Corsica e Sardegna dalla Toscana (200kV).

Il passaggio dalla Media Tensione alla Bassa Tensione può prevedere gradini intermedi in

Stazioni o Cabine di
Trasformazione secondo le
esigenze.

Nel caso delle linee aeree
ogni singolo cavo è nudo, cioè
senza isolante esterno, ma
opportunamente distanziato
dagli altri cavi ed isolato rispetto
al pilone di sostegno. Per i cavi
"interrati" invece, che



Trifase tipo A Esafase tipo B Trifase tipo C Trifase tipo D
Per AAT Per AAT Per AT Per AT

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).

naturalmente sono più frequenti nel caso delle Basse Tensioni, e a volte anche, Medie Tensioni, il conduttore deve essere rivestito con materiale isolante.

I pali o “sostegni” delle linee aeree, che debbono rispondere a esigenze di affidabilità statica e meccanica e di isolamento, possono essere di diverso tipo, come mostrato in Fig.2, dove AAT sta per Altissima Tensione (380 kV) e AT per Alta Tensione (220kV).

I conduttori sono appesi a catene di isolatori, che debbono garantire l’isolamento dal sostegno, che a sua volta è, naturalmente, messo a terra

Le catene di isolatori sono costituiti da singoli elementi di materiale isolante – vetro, porcellana o resine speciali – di forma e contorni caratteristici (vedi Fig.3) che hanno lo scopo fondamentale di allungare un eventuale percorso di scarica sulla superficie dell’isolatore stesso, magari quando esso si trovi ad essere ricoperto da uno strato di acqua, causato da piogge o umidità.

Sulla sommità del sostegno si trova frequentemente un altro cavo, detto fune di guardia, che ha lo scopo di proteggere i conduttori da eventuali scariche atmosferiche: tale cavo, che si intravede nella Fig.3, è ovviamente connesso a terra.



Fig.3

3 I Conduttori

I conduttori sono in rame o alluminio rinforzati, perché per lunghe tratte il peso del conduttore stesso può essere rilevante. Si utilizza quindi un cavo d'acciaio al quale sono avvolti i conduttori in rame o alluminio. In quest'ultimo caso, per ottenere la stessa potenza dissipata in quello in rame, e quindi la stessa resistenza, bisogna aumentare la sezione di circa il 60%. Ciò nonostante il risparmio in peso è di circa il 50%. L'aumento della sezione del conduttore ha effetti positivi anche per un altro fenomeno. In condizioni di umidità eccessiva si può vedere attorno al conduttore su di un sostegno di alta tensione, una luminosità di colore azzurro, a causa di un fenomeno che prende il nome di "effetto corona".



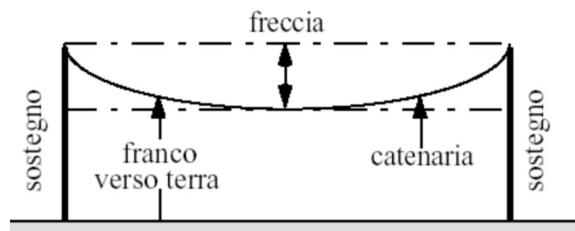
Si tratta di una ionizzazione del manicotto di aria intorno al conduttore dovuto all'elevato campo elettrico. Tale fenomeno, se non contrastato, può portare alla creazioni di condizioni favorevoli a reali scariche tra i conduttori o sulle superfici degli isolatori. Il modo più semplice per diminuire il campo elettrico sulla superficie del conduttore è quello di aumentare il raggio

del conduttore stesso, perché il campo E diminuisce con il quadrato della distanza dalla sorgente, e quindi in questo caso il quadrato del raggio.

Una volta appeso agli isolatori alle due estremità, un cavo elettrico si dispone lungo una curva piana che ricorda una parabola che viene detta "catenaria". Si tratta della curva lungo la quale si dispone qualsiasi "catena" – da ciò il nome - sostenuta agli estremi, a causa del suo peso ed in quanto omogenea, flessibile e non estensibile. Matematicamente si tratta dell'andamento della funzione:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Attenzione! Questo materiale didattico è per uso personale dello studente ed è coperto da copyright. Ne è severamente vietata la riproduzione o il riutilizzo anche parziale, ai sensi e per gli effetti della legge sul diritto d'autore (L. 22.04.1941/n. 633).



Tale andamento ha un minimo, che nel nostro caso rappresenta la minima distanza dal suolo. Si è verificato che questo è il punto di più elevato campo elettrico al suolo e quindi il punto che va maggiormente indagato per evitare danni alla salute degli utenti.

Si noti che, se la distanza tra i sostegni è grande, tale punto può essere anche molto distante dai sostegni stessi, che, ad un approccio ingenuo possono sembrare i punti più critici.

Per quanto riguarda l'estensione in Italia della rete ad Alta e Altissima tensione, le rilevazioni più aggiornate parlano di circa 68000 Km, a fronte di una lunghezza complessiva di circa 350000 Km per la rete di Media Tensione e di circa 780000 Km per quella di Bassa Tensione.

Tornando alla pericolosità della esposizione a campi elettrici e magnetici per gli organismi viventi, alle basse frequenze, come quelle della rete di distribuzione dell'energia elettrica, bisogna rilevare che molto è stato detto ma poco provato. Certo ci sono limiti oltre i quali non avrebbe proprio senso andare, ma sono molto lontani dai livelli ai quali siamo abitualmente sottoposti. I valori limiti che anche il nostro paese ha accettato di inserire nella normativa, in pieno accordo con gli altri paesi europei, sono più il frutto di considerazioni prudenziali, che reali risultati confermati dalle indagini. Anche in questo caso è sempre il campo B il più insidioso, per quella sua capacità di agire sulle correnti senza bisogno di separare la cariche. I valori limiti assunti per le basse frequenze, nel DPCM 8.7.2003, sono di $100\mu\text{T}$ per il campo di induzione magnetica e di 5 kV/m per il campo E (vedi tabella). Si consideri che il campo magnetico terrestre sulla superficie del pianeta - che però non è variabile nel tempo - varia da 25 a $65 \mu\text{T}$.

Soglie di riferimento	Campo B (μT)	Campo E (kV/m)
Limite di esposizione	100	5

Valore di attenzione	10	Non previsto
Obiettivo di qualità	3	Non previsto

Campo B (μT)

E in effetti è proprio la variabilità di B che lo rende più pericoloso per eventuali effetti a lungo tempo. Infatti un flusso variabile di B comporta la capacità di indurre correnti elettriche che potrebbero avere effetti negativi sugli organismi viventi.

Ben diverso è il problema della sicurezza negli impianti elettrici tradizionali. In Italia ogni anno avvengono più di 400 incidenti elettrici mortali – per elettrocuzione, è questo il termine corretto – ogni milione di abitanti, che è più del doppio della media europea. Questo dato denuncia un problema non da poco, di cui parleremo in seguito

1 Manovra e Protezione

In una Centrale Elettrica saranno presenti, ovviamente, numerosi apparecchi di manovra e protezione, che servono a svolgere tutte le manovre necessarie al funzionamento della Centrale in piena sicurezza per gli operatori. Si tratta di interruttori, teleruttori, relè di vario tipo, che non differiscono in linea di principio da quelli che possiamo incontrare nella nostra vita quotidiana, se non per le dimensioni, dovute alle alte tensioni, e per i valori nominali di tensione e corrente che debbono essere capaci di gestire.

In ogni caso anche in bassa tensione si avrà bisogno di dispositivi dello stesso tipo e quindi volendo discuterne soltanto gli aspetti di principio, possiamo accumunarli in una unica trattazione.

La prima distinzione da fare è tra dispositivi manuali e automatici: i primi naturalmente sono azionati, magari anche a distanza, da un operatore, mentre i secondi debbono intervenire automaticamente al verificarsi di una condizione. Questi ultimi sono dotati di un relè, apparecchio in grado di verificare l'occorrenza della specifica condizione e far intervenire il dispositivo.

Le anomalie che possono verificarsi in un impianto sono essenzialmente sovratensioni e sovraccorrenti, rispetto, naturalmente ai valori nominali dell'impianto stesso. Essi possono rientrare in una casistica di normale funzionamento o essere prodotti da eventi eccezionali: nel primo caso l'intervento può anche essere manuale e se automatico non riveste quel carattere di urgenza perché, evidentemente, il progetto dell'impianto stesso deve in qualche modo averli previsti.

Nel secondo caso invece l'intervento deve essere automatico e tempestivo, ma anche selettivo. L'interruzione di una fornitura di energia comporta comunque dei danni, che possono essere anche gravi: occorre dunque non si verifichino eccessivi disservizi non strettamente necessari.

Le sovratensioni diciamo "previste", possono essere: manovre sull'impianto, variazioni improvvise del carico, fenomeni di risonanza, ecc. Mentre quelle accidentali sono dovute a fenomeni di induzione elettromagnetica o elettrostatica, a scariche atmosferiche ecc. A lungo

andare questi fenomeni possono mettere in pericolo la tenuta degli isolanti con gravi danni all'intero impianto.

Anche le sovraccorrenti possono rientrare in una casistica analoga: quelle "previste" o "prevedibili" sono dovute a manovre sulla rete, come per esempio l'inserimento di un motore asincrono, che come abbiamo visto può richiamare correnti anche 8 volte superiori a quelle nominali, o quello di un trasformatore a vuoto (correnti anche 30 volte superiore alla corrente nominale). È chiaro che in questi casi le protezioni non debbono intervenire, e l'impianto deve essere in grado di sostenere tali sovraccarichi. Ci sono però anche casi in cui le sovraccorrenti sono per così dire "endemiche", dovute cioè ad un cattivo utilizzo dell'impianto stesso, con correnti stabilmente superiori a quelle nominali. In questi casi gli elementi di protezione debbono intervenire per evitare che il surriscaldamento che ne consegue possa deteriorare gli isolanti. In questi casi le protezioni debbono essere in grado di valutare la durata del malfunzionamento e agire di conseguenza.

Le sovraccorrenti "anomale" possono verificarsi per contatti accidentali che creano corti circuiti. In tal caso l'intervento deve essere tempestivo.

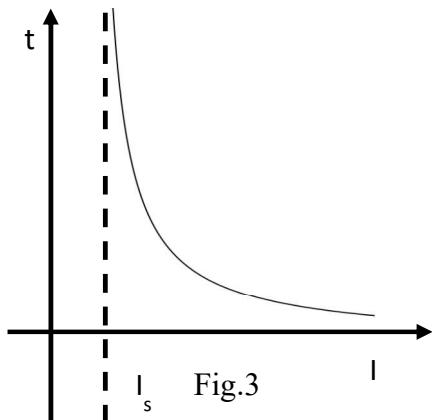
Come si capisce l'intervento delle protezioni consiste, nella maggioranza dei casi, nell'apertura di un interruttore sotto carico, nominale o eccezionale che sia. Nella maggioranza dei casi si desidera che l'interruzione sia reversibile, cioè che consista nell'allontanamento di due elettrodi, che poi possano eventualmente essere riaccostati. Per le aperture non reversibili, e tempestive, si possono utilizzare i fusibili, dispositivi che, messi in serie, a causa del calore eccezionale prodotto dalla sovraccorrente, fondono per un loro tratto e interrompono la conduzione.

2 Interruttori automatici

A seconda della tipologia di relè ai quali sono collegati avremo diverse tipologie di interruttori:

- Interruttore termico
- Interruttore di massima corrente
- Interruttore di massima tensione
- Interruttore eletromagnetico
- Interruttore magnetotermico
- Interruttore differenziale

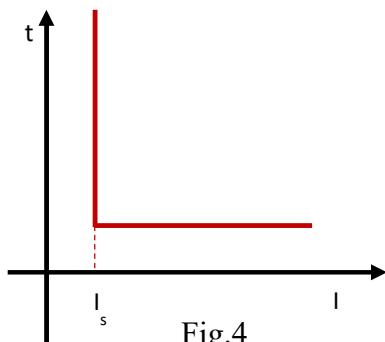
L'interruttore termico ha un comportamento simile a quello di un fusibile: interviene quando la temperatura raggiunge livelli troppo elevati per tempi eccessivamente lunghi, ma a differenza del fusibile è reversibile. Per rappresentare questa dipendenza dal tempo dell'intervento



di apertura, si utilizzano diagrammi che prendono il nome di "caratteristica d'intervento" dello specifico dispositivo. Per un interruttore termico tale caratteristica è indicata in Fig.3. Come ben si capisce dal diagramma, per correnti inferiori a I_s , l'interruttore non interviene, mentre per correnti superiori l'intervento è tanto più rapido quanto più elevata è la corrente. Val la pena di osservare che l'interruttore termico è una particolare tipologia di interruttore a massima corrente.

Per interruttore a massima corrente si intende, più propriamente, un interruttore che si aziona quando la corrente ha raggiunto un determinato valore di soglia; la corrente viene valutata attraverso la misura della caduta di tensione su di una resistenza percorsa dalla corrente da interrompere. La resistenza in questione è variabile e quindi il valore di soglia è regolabile.

L'interruttore a massima tensione ha un comportamento analogo, ma comandato dal valore della tensione.



L'interruttore elettromagnetico utilizza un elettromagnete per tenere in tensione una molla che comanda i due eletrodi dell'interruttore: quando la forza esercitata dall'elettromagnete raggiunge quella di richiamo della molla, quest'ultima scatta e interrompe il circuito. Il diagramma della caratteristica d'intervento di questo interruttore è mostrato in Fig. 4.

L'interruttore magnetotermico è la combinazione di un interruttore termico ed uno elettromagnetico: per bassi valori della corrente, ma sempre superiori ad un valore di soglia, si comporta come un interruttore termico, mentre per valori più alti della corrente l'azionamento è comandato dal relè elettromagnetico.

Infine l'interruttore differenziale – comunemente detto "salva vita" -, che si aziona quando rileva una differenza tra la corrente di andata e quella di ritorno. In generale l'elemento sensibile è costituito da un avvolgimento su di un nucleo toroidale sul quale sono avvolti anche due altri avvolgimenti, simmetricamente disposti e attraversati dalla corrente principale in andata e in ritorno. Il tutto è fatto in modo che se le due correnti sono uguali, allora il flusso che si concatena con l'avvolgimento sensibile è nullo. In caso contrario quest'ultimo comanda l'azionamento del relè.

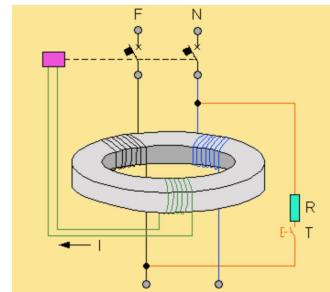


Fig.5

3 Effetti della Corrente Elettrica sul Corpo Umano

Gli effetti del passaggio della corrente nel corpo umano sono molteplici e vanno dalla tetanizzazione (contrazione dei fasci muscolari), al blocco respiratorio e alla fibrillazione ventricolare, oltre che, naturalmente, alla possibilità di ustioni nei punti d'ingresso e di uscita della corrente. Tali effetti possono essere anche mortali, mentre sarebbero in gran parte evitabili se ci fosse maggiore attenzione e rispetto delle norme di sicurezza. È un vero peccato che l'Italia detenga in Europa il triste primato di vittime per elettrocuzione, quando poi basterebbe poco per rientrare nella media "fisiologica".

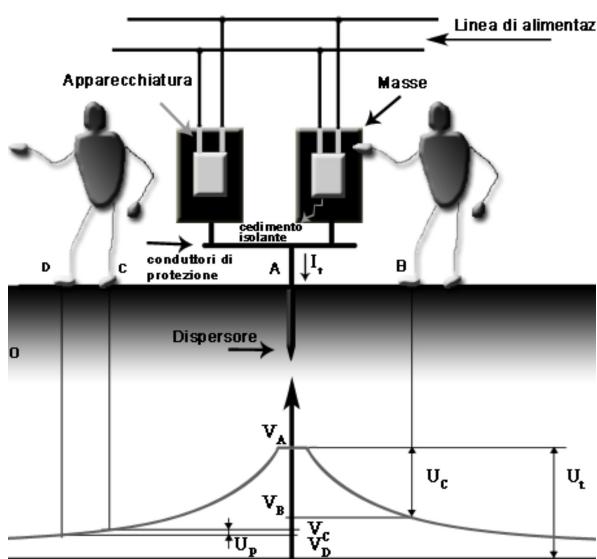
Come si è detto, i danni principali sono dovuti al passaggio della corrente, la quale a sua volta dipende dalla tensione, ma non in maniera semplice perché la resistenza complessiva del corpo umano varia notevolmente al variare della tensione e anche al variare della frequenza. In linea di massima si ritiene ragionevole assumere che il corpo umano abbia, in condizioni normali, una resistenza di circa 2000 Ω . Di conseguenza, se si considerano non pericolose correnti dell'ordine di 25 mA, si giunge ad un limite di circa 50 V per le tensioni.

Come è facile immaginare la situazione più frequente è quella del contatto delle mani con punti in tensione, sia nel caso di contatto diretto (il punto di contatto è normalmente in tensione), che di contatto indiretto (il punto di contatto è accidentalmente in tensione).

In entrambi i casi è di vitale importanza che l'impianto preveda la messa a terra di tutte la parti accessibili (le masse) e che preveda inoltre un interruttore differenziale a monte, oltre che, naturalmente, l'interruttore magnetotermico generale.

4 Impianti di terra

Con riferimento al disegno di Fig.6, se assumiamo che tutte le masse dell'apparecchio elettrico in questione siano state messe allo stesso potenziale della superficie su cui poggiano i piedi dell'operatore, anche in caso di una accidentale contatto tra la fase dell'alimentazione e le masse stesse, l'operatore sarebbe protetto dal passaggio di corrente per la presenza di un percorso parallelo di più bassa resistenza.



Ci sarebbe quindi un tempo adeguato perché le protezioni differenziali possano intervenire in quanto la corrente di andata non sarebbe uguale a quella di ritorno a causa della parte derivata dal collegamento a terra. In effetti la presenza dell'interruttore differenziale si farebbe sentire già da prima, all'atto dell'istituirsi del contatto accidentale della massa con la fase. Molto spesso infatti si ha difficoltà ad inserire una protezione differenziale in un impianto vecchio, proprio a causa delle numerose dispersioni che l'impianto stesso manifesta.

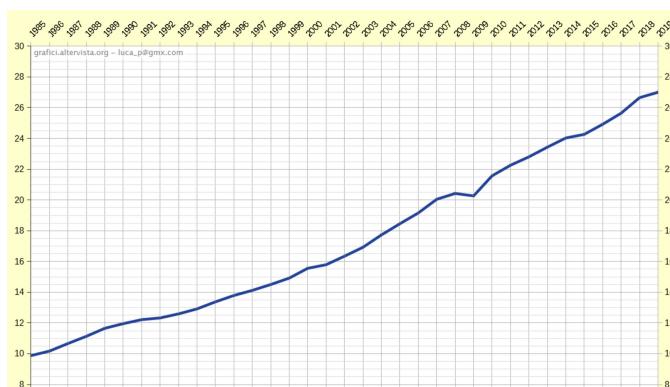
La messa a terra si effettua con un dispersore, generalmente a forma di palo, che infilato nel terreno realizzi un contatto quanto più intimo è possibile con il terreno stesso. La natura del terreno e le sue effettive condizioni chimico fisiche possono a volte rendere molto difficile aver un dispersore di terra con valori accettabili della resistenza. In queste situazioni si può arrivare a scavare ad una certa profondità una vasta area in cui seppellire una rete metallica che va poi connessa al dispersore. Nella stessa Fig.6, nella parte bassa è disegnato l'andamento del potenziale nel terreno nel caso che in cui il dispersore venga accidentalmente messo a potenziale V_A rispetto ai punti lontani. Quindi nell'immediato intorno di un paletto dispersore, la superficie del terreno non è

equipotenziale: può accadere anche che un operatore nella posizione indicata nella sinistra della Fig.6, con i piedi nei punti D e C, sia sottoposto ad una tensione tra i due piedi (tensione di passo) non indifferente. Le norme prevedono che il progetto valuti anche questa tensione di passo, prendendo come distanza standard tra i due piedi un metro.

1 Produzione di Energia Elettrica

Come abbiamo visto le Centrali Elettriche sono luoghi di trasformazione dove una energia primaria viene trasformata in energia elettrica.

Nel 2019 il totale dell'energia elettrica prodotta, proveniente dalle diverse fonti, è stato di circa 27000 TWh e dal diagramma di Fig 1 si vede che il tasso di crescita è pressocchè costante e pari circa 500 TWh all'anno. Nel periodo rappresentato, la distribuzione delle fonti energetiche primarie utilizzate si è modificata nella voce "petrolio", che è stato via via sostituito dal "gas naturale", in quella "nucleare", in costante diminuzione dopo l'incidente in Giappone, e in quella delle "rinnovabili", in crescita dalla prima decade del nostro secolo.



È evidente che il nostro mondo industrializzato ha continuo bisogno di energia elettrica e

che, con lo sviluppo dei paesi Asiatici e Africani, la richiesta sarà sempre maggiore.

Ma il problema non è solo questo: da tempo l'umanità si è interrogata sulla reale entità delle nostre scorte di fonti classiche, quale il carbone, il petrolio e i gas naturali.

La risposta non è facile, ma in ogni

caso sembra che non sia lontana la data in cui questo catastrofico evento – l'esaurimento dei giacimenti – potrebbe effettivamente verificarsi.

Luciano De Menna – Le Fonti Energetiche

Si è sviluppato allora un certo interesse per le energie così dette “rinnovabili”, cioè quelle energie che per fenomeni naturali ricostituiscono i loro “giacimenti” senza che noi si debba fare alcunché. L’energia idraulica, una delle più antiche, è certamente una di quelle, ma anche l’eolica, non meno antica, e la solare. Si hanno però dubbi sulla reale possibilità che queste fonti possano effettivamente sopperire ad una buona fetta del fabbisogno mondiale in continua crescita. Si era pensato che il nucleare tradizionale (Reattore a Fissione) potesse almeno costituire l’ancora di salvataggio a cui agganciarsi in una transizione verso altre potenziali fonti allo stato solo immaginate, ma alcuni incidenti accaduti in Centrali Nucleari nel mondo (Chernobyl, Fukushima, ecc.) hanno spaventato la popolazione che ha richiesto un momento di riflessione: in Italia con il referendum del 2011 si è addirittura deciso di abbandonare completamente questa strada. Ad aggravare la problematica c’è che l’uso pacifico dell’energia nucleare è strettamente connesso a quello “non pacifico”: l’uranio arricchito e il plutonio sono i componenti essenziali di terribili armi di morte di cui abbiamo avuto prova alla fine della Seconda Guerra Mondiale. Questo ha indotto le popolazioni a chiedere che si evitasse assolutamente la proliferazione di armi di questo tipo, per evitare di aumentare la probabilità di un loro uso effettivo. Questo ha incontrato l’incondizionato favore di quelle Nazioni che di tali armi erano già dotate, e che quindi venivano a trovarsi in condizioni di vantaggio militare (e non solo) rispetto alle altre.

2 Energie Ecosostenibili

Dalla fine del secolo scorso un altro fattore ha contribuito a complicare ancora la problematica: il riscaldamento del pianeta. In molti ormai credono che le mutazioni climatiche che stiamo verificando da diversi anni - che comportano il riscaldamento delle acque del mare, la desertificazioni di alcune aree nella fascia equatoriale e il verificarsi di eventi metereologici catastrofici in aree che in precedenza non ne avevano mai sperimentato - non rientri in un quadro complessivo di mutazioni cicliche del clima del pianeta terra, quali si sono verificate nelle passate e di cui abbiamo testimonianze storiche e anche fossili, ma bensì sia il frutto dell'estendersi della fascia di alcuni gas che circonda il nostro pianeta. È il così detto "effetto serra" che in condizioni normali svolge la funzione benefica di trattenere parte del calore che ci arriva dal sole, riducendo l'uscita di radiazione infrarossa dovuta alla riflessione sulla superficie terrestre, ma che attualmente starebbe avendo un effetto negativo incontrollato. I gas responsabili di questa azione vengono detti appunto "gas serra", e tra loro uno dei principali è l'anidride carbonica, che è prodotta da molte attività delle nostre civiltà industrializzate.

In estrema sintesi quello che si può certamente dire è che l'aumento della presenza di gas



serra nell'atmosfera, va di pari passo con l'industrializzazione del nostro pianeta. Non sembra ancora pienamente dimostrato invece il fatto che questa sia l'unica causa del surriscaldamento globale della terra.

In ogni caso negli ultimi anni è fortemente aumentata la sensibilizzazione della popolazione

sull'argomento, anche per la fantastica azione di testimonianza di molti esponenti delle giovani generazioni.

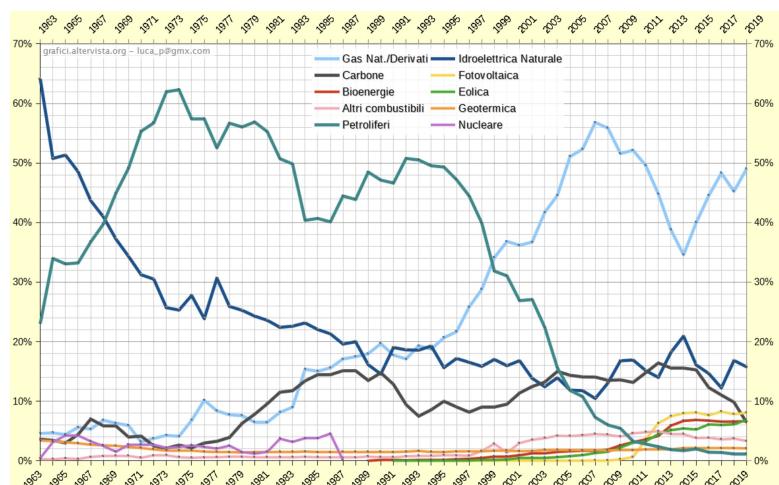
Questo significa che si è imposta nei fatti una nuova classificazione delle fonti energetiche primarie che vede da una parte quelle ecosostenibili e dall'altra tutte le altre. Sono ecosostenibili lo sfruttamento dell'energia idraulica, delle maree, di quella solare, della eolica e della nucleare. Non sono ecosostenibili le energie che provengono dal carbone, dal petrolio, dai gas naturali; tutte quelle insomma che prevedono di "bruciare" qualcosa, perché il processo di "ossidazione" che ne è alla base produce anidride carbonica (CO_2). Basta un'occhiata al diagramma della Fig. 2 per convincersi che si tratta di più del 60% di quelle utilizzate oggi!

Naturalmente ottenere dai governi nazionali un impegno concreto alla riduzione dell'uso delle energie inquinanti non è facile. Inoltre se è concepibile che uno sforzo in questa direzione possa essere chiesto ai paesi avanzati, che per altro fanno uno spreco di energie non indifferente, non è proprio sperabile che lo facciano i paesi poveri in via di sviluppo.

In questo contesto l'Italia da parte sua consuma più energia elettrica di quanta ne produca. Dati 2016, sono 277,2 (TWh) quelli prodotti rispetto ad un fabbisogno di 314,3 TWh. Importa quindi circa il 12% del suo fabbisogno e lo importa da Francia, Svizzera, Austria e Slovenia, che sono poi i paesi confinanti.

Da questo punto di vista uno sguardo alla distribuzione delle Centrali Nucleari in Europa, mostrato in Fig. 3, può essere utile: certo non c'è da sperare che le nostre Alpi possano essere uno schermo efficace contro un disastro nucleare (Dio non voglia!) ai nostri confini.

In Fig.4 sono mostrati i dati relativi alla produzione Italiana nel 2019, divisa per tipologia di fonte primaria. Siamo ancora dipendenti per un 60% da fonti non eco sostenibili.



Luciano De Menna – Le Fonti Energetiche

Il futuro, come dire, è complesso, anche perché lo sviluppo delle energie ecosostenibili quali l'eolico ed il solare, non è sicuro. Anche se il rendimento delle celle fotovoltaiche è cresciuto in modo notevole, la domanda è: quale frazione del fabbisogno mondiale potrà essere coperto da queste fonti? Inoltre lo sfruttamento intensivo di esse può comportare inconvenienti di altra natura non facilmente immaginabili. In California dove si è sperimentato un intensivo impianto di eolico, si è dovuto constatare un impatto negativo sulle migrazione di insetti, il cui ruolo è essenziale per la impollinazione.

3 Fissione e Fusione

Molte speranze sono state poste, da tempo, nel “Nucleare Pulito”, cioè la Fusione, invece che la Fissione, che è alla base degli attuali reattori.

Nella fissione un atomo pesante – e quindi già di per sé alquanto instabile per il grande numero di protoni e neutroni presenti nel suo nucleo – si frantuma, spontaneamente o perché colpito da un proiettile (neutron, per esempio) che viene dall'esterno. Se sommiamo le masse dei prodotti di questa “fissione” otteniamo una massa leggermente più bassa di quella dell'atomo originario: è il così detto difetto di massa. Ma nella teoria della relatività di Albert Einstein è previsto che una quantità di massa può scomparire solo se compare in sua vece una corrispondente quantità di energia e la corrispondenza è data dalla più famosa formula della fisica moderna, $E=mc^2$, cioè energia uguale alla massa per il quadrato della velocità della luce nel vuoto. In altri termini, massa ed energia possono essere visti come due aspetti della stessa ‘cosa’!

D'altra parte, dato che “c” è, in qualsiasi contesto ci si voglia mettere, una velocità molto grande (300.000 km al secondo), è evidente che basta un piccolissimo “difetto di massa” per ottenere una grande energia.

Ma da dove viene fuori questo ‘difetto di massa’ e dove ritroviamo l'energia equivalente? Per rispondere alla prima domanda è utile il paragone del grappolo d'uva: infatti anche se pesiamo un grappolo d'uva e poi confrontiamo questo peso con quello dei chicchi staccati dal raspo e messi tutti insieme sul piatto della bilancia, ritroviamo un ‘difetto di massa’, che è naturalmente pari proprio al peso del raspo, e cioè di ciò che teneva insieme il grappolo. Accade lo stesso nella fissione: per tenere insieme il pesante atomo di uranio, per esempio, ci voleva una certa energia che ora, una volta frantumato l'atomo, si è resa libera e non ci appare più come ‘massa’.

La risposta alla seconda domanda è altrettanto semplice. Le parti in cui l'atomo pesante si divide non ‘nascono’ ferme: è pur sempre una esplosione! Esse vengono proiettate nello spazio

con velocità diverse e, in particolare, le più piccole, in generale neutroni, possono avere una grande velocità e quindi una grande energia, che cedono all'ambiente circostante riscaldandolo e, eventualmente, innescando altre fissioni in altri atomi.

L'uranio che si trova in natura non fa spontaneamente tutto questo, perché è sostanzialmente composto dall'isotopo 238, relativamente stabile, e non dal 235, che è invece più disponibile a fissionarsi. Quindi il primo passo è arricchire la miscela di uranio aumentando la presenza in percentuale dell'isotopo 235.

E qui, naturalmente sorge un problema: se la concentrazione è tale che i neutroni prodotti da ogni reazione - nel tempo che impiegano ad attraversare tutta la massa di combustibile (uranio) - sono in grado di indurre la fissione di più di un altro atomo di uranio (reazione a catena), allora la reazione può autosostenersi o addirittura diventare esplosiva. A questo punto le due strade si separano, intendo quella per la produzione di uranio per alimentare le centrali nucleari e quella per produrre bombe. Mentre per la seconda abbiamo bisogno di un uranio molto arricchito, tanto che, per farlo esplodere, possa bastare una ulteriore concentrazione aggiuntiva (vogliamo infatti che l'esplosione avvenga a comando e non spontaneamente) – prodotta magari con una compressione meccanica dovuta ad un esplosivo tradizionale - per la prima ci basta che la concentrazione sia tale da poter governare la reazione a catena inserendo dei materiali in grado di assorbire neutroni: si chiamano 'moderatori'. In questo modo possiamo accendere e spegnere, per così dire, la reazione a nostro piacimento.

Naturalmente questa descrizione è sommaria e molto semplificata; ci sono una infinità di altri aspetti da prendere in considerazione, ma in ogni caso penso sia sufficiente a spiegare questo punto: in un reattore nucleare a fissione, gli unici attualmente esistenti, la massa di combustibile (uranio) presente nel reattore ha una concentrazione tale da poter produrre una reazione a catena che però noi controlliamo, introducendo delle barre di "moderatori".

Sorprendentemente anche nella 'fusione' di atomi molto leggeri in atomi più pesanti si trova un difetto di massa. Per esempio, dalla fusione di un atomo di deuterio (isotopo di peso atomico 2 dell'idrogeno) ed un atomo di trizio (isotopo di peso atomico 3 ancora dell'idrogeno) si

ottiene un atomo di elio 4 ed un neutrone. Anche in questo caso facendo il bilancio si ritrova un difetto di massa. Stavolta la metafora del grappolo d'uva non ci aiuta molto a comprendere quello che succede! Resta il fatto che, evidentemente, l'energia che occorre per tenere insieme i due protoni ed i due neutroni nel nucleo dell'atomo di elio 4 è minore di quella necessaria per tenere insieme i due nucleoni (un protone ed un neutrone) nell'atomo di deuterio ed i tre nucleoni (un protone e due neutroni) nell'atomo di trizio. Naturalmente l'energia corrispondente al difetto di massa si ritrova nel neutrone, sotto forma di energia cinetica dello stesso: ben 14.1 MeV.

Il fatto è che per indurre un atomo di deuterio a fondersi con uno di trizio, occorre che essi giungano ad interagire a distanza molto ravvicinata, vincendo le forze di natura elettrica che naturalmente si opporrebbero ad una tale promiscuità! La soluzione è quella di dotare queste particelle di una tale velocità da trasformarle in veri e propri proiettili che superano le barriere repulsive e, eventualmente, si 'fondono'. Ciò significa che bisogna portare il gas di deuterio e trizio ad altissime temperature - la temperatura essendo nient'altro che la misura della velocità media quadratica delle particelle. A queste temperature il miscuglio di deuterio-trizio non è più un gas nel senso tradizionale del termine, perché tutte le sue particelle hanno perso almeno gli elettroni periferici, e quindi sono cariche elettricamente. Un tale gas viene denominato 'plasma' - il quarto stato della materia, dopo solido, liquido e gassoso - ed è, per intenderci, la materia di cui sono fatte le stelle, che proprio dalle reazioni di fusione che avvengono al loro interno ricavano l'energia irradiata nello spazio.

Non è difficile immaginare che un 'gas' di tale tipo non possa essere contenuto da pareti materiali: le stelle fanno uso della loro grande massa e confinano il plasma mediante la forza di gravità. Noi sulla terra possiamo contare solo sulle forze elettromagnetiche. Come pure non è difficile immaginare che il plasma non abbia molta voglia di farsi confinare: è altamente instabile.

Questo è il grande tema della fusione termonucleare controllata: come contenere con pareti immateriali (forze), in uno spazio limitato, un plasma a temperature elevatissime, per il tempo necessario affinché un ragionevole numero di reazioni di fusione possano avvenire e produrre quei neutroni veloci che portano con sé la loro energia.

Luciano De Menna – Le Fonti Energetiche

Da qui in poi – dalla produzione dei neutroni - fissione e fusione procedono allo stesso modo: artificiale ulteriore concentrazione per la bomba – per le prime bombe all'idrogeno fu usata una bomba atomica per innescarle - e controllo, riscaldamento del fluido, turbina e generatore elettrico, per il reattore a fusione, come per quello a fissione.

La differenza con la fissione sta nel fatto che nella fusione il combustibile è fuori dalla camera di combustione – cosa che è intrinsecamente impossibile nella fissione - e viene aggiunto a piacimento usando un ‘rubinetto’, proprio come in un motore a scoppio!

Ma non è ancora ben chiaro quando tutto questo sarà realizzato. In ogni caso, da quel momento in poi, “queste” diventeranno “Macchine Elettriche” al pari delle altre.

In questa ultima lezione abbiamo discusso – a volo d'uccello - di argomenti complessi, per i quali non è possibile proporre risposte semplici e univoche: sono coinvolti aspetti per i quali non ci sono “modelli scientifici” completi di previsione. Ciò non significa che non sia possibile parlarne: l'importante è mantenere sempre un atteggiamento aperto e razionale e non dare risposte ideologiche. In ogni caso se qualcuno di voi ha interesse ad approfondire questi argomenti, troverete in me un interlocutore interessato.