Notas sobre Lógica de Primeira Ordem

Licenciatura em Engenharia Informática

2005/06

2009/2010 (Pós-laboral)

Isabel Ferreirim

Departamento de Matemática FCUL

Conteúdo

Nota Introdutória

Estas notas foram preparadas como texto de apoio complementar ao estudo da disciplina de Lógica de Primeira Ordem, do 1º ano da licenciatura em Engenharia Informática. Seguem de perto a estrutura do livro adoptado *Language Proof and Logic* de J. Barwise e J. Etchemendy [**BarEt99**].

A preparação destas notas foi iniciada em Fevereiro de 2006 e interrompida em 15 de Junho de 2006.

Foi retomada em Março de 2010.

Agradeço à Maria João Gouveia e ao Mário Branco a leitura cuidada, as inúmeras correcções e as valiosas sugestões de melhoramento. Todos os erros remanescentes, de adaptação do texto original, são da minha inteira responsabilidade.

Isabel Ferreirim

Parte 1

Cálculo Proposicional

CAPÍTULO 1

Sentenças Atómicas

1.1. Constantes

As **constantes** são símbolos referentes a objectos previamente fixados.

Língua Portuguesa	nome
LPO	constante designação, termo

NOTE BEM 1.1. Numa linguagem de primeira ordem

- Cada nome deve designar um objecto.
- Nenhum nome pode designar mais do que um objecto.
- Um objecto pode ter vários nomes, mas também pode não ter nome.

1.2. Símbolos de Predicados ou Símbolos Relacionais

Os **símbolos de predicado ou relacionais** são símbolos que designam propriedades dos objectos ou relações entre objectos.

EXEMPLO 1.2. (1) Seja o símbolo Estudante, um símbolo de predicado unário (i.e., de aridade **um**), cuja interpretação, no universo dos alunos deste curso, é `ser Estudante de Engenharia Informática`.

Língua Portuguesa	O Pedro é estudante de Eng.Inf.
LPO	$Estudante(Pedro)$

(2) Seja o símbolo <, um símbolo de predicado binário (i.e., de aridade **dois**), cuja interpretação, no universo dos números reais, é `ser menor do que`.

Língua Portuguesa	3 é menor que 2
LPO	$3 < 2$

NOTE BEM 1.3. Numa linguagem de primeira ordem

- A cada símbolo de predicado está associado exactamente um número natural—o número de argumentos que ocorre no predicado, que se designa por **aridade**.
- Cada símbolo de predicado ou relacional é interpretado por uma propriedade ou uma relação, bem determinada, com a mesma aridade que o símbolo.

1.3. Sentenças Atómicas

Uma **sentença atómica** é uma sequência finita de símbolos, escolhidos entre as constantes, os símbolos de predicados, os parênteses "(" e ")" e a vírgula, de forma

$$P(c_1)$$
$$T(c_1, c_2)$$
$$R(c_1, c_2, c_3)$$

onde c_1, c_2, c_3 são constantes e P, T, R são símbolos de predicados num vocabulário fixado.

Exemplo 1.4. (1) $\mathit{MaisAltoQue}(\mathit{joão}, \mathit{maria})$
[em Português, O João é mais alto do que a Maria]
(2) $\mathit{Estudante}(\mathit{catarina})$
[em Português, A Catarina é estudante de Eng. Inf.]

A notação usual é a **prefixa**—o símbolo de predicado escreve-se à esquerda.

Excepções

Com o símbolo de igualdade, =, utiliza-se a notação corrente: $a = b$.
Com os símbolos <, > também se utiliza a notação corrente: $1 < 2$, $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$.

Note Bem 1.5. Numa linguagem de primeira ordem

- As sentenças atómicas são expressões que se obtêm escrevendo um símbolo de predicado de aridade n, seguido de n constantes, delimitadas por parênteses e separadas por vírgulas.

$$P(a_1, \ldots, a_n)$$

  Excepção: Nas sentenças atómicas obtidas a partir da igualdade utiliza-se a notação corrente. Esta excepção pode estender-se a outros símbolos.
- A ordem em que as constantes ocorrem é **fundamental**.

1.4. Linguagens (abstractas) de Primeira Ordem

Especifica-se uma linguagem de primeira ordem fixando as constantes, os símbolos de predicado e os símbolos funcionais. Cada símbolo de predicado e cada símbolo funcional tem uma aridade bem determinada.

Uma linguagem de primeira ordem pode não incluir símbolos funcionais, mas necessita sempre de símbolos relacionais. No entanto, em vários exemplos, o único símbolo relacional considerado é o de igualdade =.

Veremos em devido tempo que é possível escrever sentenças numa linguagem de primeira ordem sem constantes; para tal teremos de recorrer ao uso de quantificadores.

As linguagens de primeira ordem podem assim distinguir-se entre si através das respectivas constantes, símbolos de predicado e símbolos funcionais. Partilham os conectivos — $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ — e os quantificadores — $\forall$, $\exists$ — de que falaremos adiante.

Quando se traduz uma frase em Língua Portuguesa para uma sentença numa linguagem de primeira ordem, tem-se em geral uma linguagem *previamente definida*, em que se conhecem à partida as constantes, os símbolos relacionais e (caso existam) os símbolos funcionais. No entanto, há situações em que há que decidir quais as constantes, os símbolos relacionais e (caso existam) os símbolos funcionais adequados para expressar o que se pretende.

Exemplo 1.6. Considere-se a frase A Clara deu o Pluto ao Miguel.

(a) Tomando o símbolo de predicado binário *DeuPluto* podemos escrever

$$DeuPluto(clara, miguel)$$

(b) Tomando o símbolo de predicado ternário *Deu* podemos escrever

$$Deu(clara, pluto, miguel)$$

O poder expressivo da linguagem (b) é maior do que o da linguagem (a). De facto, considerando a frase A Teresa deu o Rafeiro ao Miguel, esta pode ser traduzida usando o símbolo de predicado ternário *Deu* — teríamos $Deu(teresa, rafeiro, miguel)$ — mas não pode ser traduzida usando o símbolo de predicado *DeuPluto*.

O símbolo de predicado *Deu* é mais versátil do que os símbolos de predicado *DeuPluto* ou *DeuRafeiro*

Exemplo 1.7. Sejam as frases

A Clara deu o Rafeiro ao Marco no sábado

e

No domingo, o Marco deu o Rafeiro ao João.

Podemos considerar um predicado quaternário $Deu(w, x, y, z)$ — que se lê *w deu x a y no z* — e traduzir as duas frases consideradas para l.p.o.

$$Deu(clara, rafeiro, marco, sábado)$$

$$Deu(marco, rafeiro, joão, domingo)$$

1.5. Símbolos Funcionais

Os símbolos funcionais são símbolos que permitem obter outras designações para objectos.

Exemplo 1.8. (1) Jorge é pai do Joaquim.

Supondo que a afirmação é verdadeira, *jorge* e *pai*(*joaquim*) são duas designações diferentes do mesmo indivíduo.

(2) 3 é $((1 + 1) + 1)$.

3 e ((1+1)+1) são duas designações diferentes do mesmo número natural.

pai é um símbolo funcional **unário**.

+ é um símbolo funcional **binário**; as expressões 1, $(1+1)$ e $((1+1)+1)$ são **termos**.

Definição 1.9. **Termos**

- Todas as constantes são **termos**

- Se f é um símbolo funcional de **aridade** n e $t_1, \ldots, t_n$ são n termos, então a expressão seguinte é um termo:

$$f(t_1, \ldots, t_n)$$

- São termos **apenas** as expressões que possam ser obtidas por aplicação dos passos anteriores um número finito de vezes.

NOTE BEM 1.10. Numa linguagem de primeira ordem com símbolos funcionais

- Termos complexos obtêm-se colocando um símbolo funcional n-ário antes de um n-tuplo de n termos.
  Excepção: Certos símbolos funcionais binários escrevem-se entre termos (*notação infixa*), para obter termos mais complexos (*ex*: $(1 + 1)$).
- Termos usam-se como nomes ou designações na formação de sentenças atómicas.

1.6. A Linguagem de Primeira Ordem da Teoria de Conjuntos

Na linguagem de primeira ordem de **Teoria de Conjuntos** tem-se apenas **dois símbolos de predicados**, ambos **binários** :

$$=$$

$$\in$$

As **sentenças atómicas** nesta linguagem são da forma
$a = b$, que se lê *a é igual a b*
$a \in b$, que se lê *o (elemento) a pertence ao (conjunto) b*,
sendo a e b constantes individuais.

EXEMPLO 1.11. Supondo que a designa 2, b designa o conjunto dos números naturais e c designa o conjunto dos números ímpares, tem-se
$a \in a$ sentença falsa
$a \in b$ sentença verdadeira
$a \in c$ sentença falsa
$b = c$ sentença falsa

1.7. A Linguagem de Primeira Ordem da Aritmética

A linguagem de primeira ordem da **Aritmética** contém
duas constantes 0 e 1
dois símbolos relacionais binários = e <
dois símbolos funcionais binários + e ×

São termos desta linguagem
$0, 1, (1 + 1), ((1 + 1) + 1), (0 \times (1 + 1)), \ldots$

DEFINIÇÃO 1.12. Os **termos** na aritmética de primeira ordem formam-se segundo as regras:

- As constantes 0, 1 são termos
- Se t_1, t_2 são termos, também são termos as expressões

$$(t_1 + t_2), \quad (t_1 \times t_2)$$

- São termos **apenas** as expressões que possam ser obtidas por aplicação dos passos anteriores um número finito de vezes.

As **sentenças atómicas** da aritmética de primeira ordem são as expressões que se podem escrever usando os termos (no lugar das constantes) e os símbolos relacionais =, <.

- Se t_1 e t_2 são termos, são sentenças atómicas da aritmética de primeira ordem as expressões

$$t_1 = t_2$$
$$t_1 < t_2$$

CAPÍTULO 2

A Lógica das Sentenças Atómicas

2.1. Raciocínios válidos e falaciosos

Um objecto fundamental de estudo em Lógica é o conceito de **consequência lógica**.

Exemplo 2.1. Considerem-se os raciocínios (argumentos)

(A) Todo o homem é mortal.
Sócrates é homem.
Logo, Sócrates é mortal.

(B) Lucrécio é homem.
Afinal de contas, Lucrécio é mortal e todo o homem é mortal.

No caso (A), a *conclusão* do raciocínio aparece no fim, após as *premissas*; pelo contrário, no caso (B), a *conclusão* aparece no início, antes das *premissas*. No entanto, a diferença mais significativa entre estes dois raciocínios é o facto de o primeiro ser válido, enquanto o segundo é falacioso: no caso (B), a *conclusão* não é consequência lógica das premissas.

No caso (B) do exemplo anterior, o Lucrécio pode designar o gato do vizinho. Aqui, as premissas são verdadeiras, mas a *conclusão* é claramente falsa.

Este método, que consiste na apresentação de um *contra-exemplo*, serve para mostrar que um dado argumento (ou raciocínio) é falacioso.

Que métodos temos para justificar que um dado argumento é válido?

2.2. Métodos de dedução

O conceito crucial é o de **dedução**. Uma **dedução** de uma certa *conclusão*—digamos S—a partir de *premissas* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é feita passo a passo. Numa dedução, estabelecem-se *conclusões intermédias*, cada uma delas conclusão imediata das premissas e conclusões intermédias anteriores.

Podemos dizer que uma dedução consiste numa sucessão de afirmações, que são premissas ou conclusões intermédias, e que termina, ao fim de um número finito de passos, quando se obtém a conclusão S.

Exemplo 2.2. Queremos mostrar que

S Sócrates preocupa-se às vezes com a morte.
é consequência lógica das premissas
P Sócrates é homem.
Q Todos os homens são mortais.
R Nenhum mortal vive eternamente.
T Todo aquele que vier a morrer preocupa-se às vezes com a morte.

DEMONSTRAÇÃO. De P e Q segue-se

S_1 Sócrates é mortal.

De S_1 e R segue-se

S_2 Sócrates morrerá.

De S_2 e T segue-se

Sócrates preocupa-se às vezes com a morte. □

Cada passo de dedução é *correcto*, i.e., não oferece dúvidas quanto à validade de cada conclusão intermédia, em consequência da validade das premissas e das conclusões intermédias anteriores.

NOTE BEM 2.3. Uma **dedução** de uma afirmação S a partir de premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é uma demonstração passo a passo que permite verificar que S tem que ser verdadeira em **todas** as circunstâncias em que as premissas sejam verdadeiras.

Deduções com o símbolo de igualdade =

São os seguintes os princípios que traduzem dependências lógicas e que regem o uso do símbolo de igualdade =

- **Princípio de substituição**
  Se se sabe que $c = b$ e se c tem o predicado P, então também b tem a predicado P.
- **Princípio de identidade**
  Qualquer sentença da forma $a = a$ é válida (e portanto dedutível de quaisquer premissas).
- **Princípio de simetria**
  Se $a = b$ então $b = a$.
- **Princípio de transitividade**
  Se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$.

No exemplo que se segue usa-se o princípio de substituição.

EXEMPLO 2.4. Seja x um número real arbitrário. Tem-se a equação $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Sabendo que $x^2 > x^2 - 1$, podemos concluir que $x^2 > (x-1)(x+1)$.

EXEMPLO 2.5. Um exemplo de dedução informal

O princípio de simetria é dedutível dos dois princípios anteriores. De facto, supondo $a = b$, sabe-se, pelo princípio da identidade, que $a = a$. Usando o princípio de substituição para substituir a primeira ocorrência de a por b, obtém-se $b = a$, como se pretendia.

O princípio de transitividade, por sua vez, também é dedutível do princípio de substituição.

Deduções com outras sentenças atómicas

Tal como no caso da igualdade, =, há outros exemplos de dependências lógicas entre predicados numa linguagem de primeira ordem. Estas dependências podem ser usadas nas deduções.

EXEMPLO 2.6. A relação binária *MaiorQue* é transitiva (no seu significado usual); portanto $MaiorQue(a,c)$ é consequência de $MaiorQue(a,b)$ e $MaiorQue(b,c)$.

Exemplo 2.7. São frequentes em Matemática argumentos do tipo seguinte:

$$\begin{gathered} k_1 < k_2 \\ k_2 < k_3 \\ k_3 < k_4 \end{gathered}$$

e portanto

$$k_1 < k_4.$$

Neste argumento usa-se implicitamente, por duas vezes, a transitividade da relação $<$.

Note Bem 2.8. Quando se afirma que S é consequência lógica das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ não é necessário que cada uma das premissas seja efectivamente usada numa dedução de S. Por exemplo, se S é consequência lógica de P, também é consequência lógica de P e Q.

CAPÍTULO 3

Os Conectivos Booleanos

Vamos estudar alguns conectivos, que são símbolos partilhados por todas as linguagens de primeira ordem e que permitem a formação de sentenças mais complexas do que as sentenças atómicas. Os conectivos que consideramos, neste capítulo são

- negação $\neg$
- conjunção $\wedge$
- disjunção $\vee$

que correspondem, em Língua Portuguesa, a *não é o caso que*, *ou* e *e*.

Designam-se estes conectivos por *conectivos booleanos*, em homenagem ao lógico britânico George Boole (1815-1864), que se propôs estudar as leis do pensamento usando métodos matemáticos (*ver An Investigation into the Laws of Thought* (1854)).

O valor de verdade de uma sentença escrita com recurso a qualquer destes conectivos **depende apenas** dos valores de verdade das sentenças atómicas de que se partiu e dos conectivos usados. Estes conectivos dizem-se, por isso, **vero-funcionais**.

3.1. O símbolo de negação $\neg$

Se P é uma sentença atómica numa linguagem de primeira ordem, $\neg P$ é uma nova sentença, a negação de P. Mais geralmente, se P é uma sentença, não necessariamente atómica, numa linguagem de primeira ordem, $\neg P$ é uma nova sentença, que se lê *não* P.

Convenção:

Quando se nega uma sentença atómica com os símbolos $=$ e $<$, pode-se escrever $\neg(a = b)$ (resp. $\neg(a < b)$ e abrevia-se $a \neq b$ (resp. $a \nless b$).

Exemplo 3.1. As frases

O João não está em casa
Não é verdade que o João esteja em casa

são negações da frase

O João está em casa

Tomando uma linguagem de primeira ordem com um predicado unário *EmCasa* e uma constante *joão*, a última frase traduz-se pela sentença atómica

$$EmCasa(jo\tilde{a}o)$$

enquanto qualquer das suas formas negativas se traduz pela sentença

$$\neg EmCasa(jo\tilde{a}o)$$

As sentenças que são atómicas ou negações de sentenças atómicas designam--se por **literais**.

Semântica para a negação. Dada uma sentença P numa linguagem de primeira ordem a sua negação $\neg P$ é verdadeira se e só se P for falsa.
É a seguinte a tabela de verdade para a negação:

P	$\neg P$
V	F
F	V

3.2. O símbolo de conjunção $\wedge$

Dadas duas sentenças P, Q numa linguagem de primeira ordem, a expressão $P \wedge Q$ é uma sentença, a conjunção de P e Q, que se lê P *e* Q.

Exemplo 3.2. As frases

O João e a Maria estão em casa
O João está em casa e a Maria está em casa

têm ambas a mesma tradução numa linguagem de primeira ordem adequada:

$$EmCasa(joão) \wedge EmCasa(maria)$$

Semântica para a conjunção. Dadas duas sentenças P, Q a sua conjunção $P \wedge Q$ é verdadeira se e só se P e Q forem simultaneamente verdadeiras.
É a seguinte a tabela de verdade para a conjunção:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3.3. O símbolo de disjunção $\vee$

Dadas duas sentenças P, Q numa linguagem de primeira ordem, a expressão $P \vee Q$ é uma sentença, a disjunção de P e Q, que se lê P *ou* Q.

Exemplo 3.3. As frases

O João está em casa ou a Maria está em casa
Entre o João e a Maria, um deles está em casa

têm ambas a mesma tradução numa linguagem de primeira ordem adequada:

$$EmCasa(joão) \vee EmCasa(maria)$$

Semântica para a disjunção. Dadas duas sentenças P, Q a sua disjunção $P \vee Q$ é verdadeira se e só se pelo menos uma das sentenças P ou Q for verdadeira. Note-se que o conectivo de disjunção não tem a interpretação de disjunção exclusiva que às vezes damos à expressão *ou* em Língua Portuguesa.

É a seguinte a tabela de verdade para a disjunção:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3.5. Ambiguidade e parênteses

As regras de construção de novas sentenças que acabámos de enunciar necessitam de refinamento. De facto, quando combinamos os diferentes conectivos para construir sentenças complexas, há que garantir que não há ambiguidade na sua leitura e consequente interpretação.

EXEMPLO 3.4. Como interpretar a frase
O Marco está em casa ou a Clara está em casa e o Carlos está feliz?
Podemos admitir duas interpretações possíveis:

- Entre o Marco e a Clara, um deles está em casa; e o Carlos está feliz
- O Marco está em casa ou então a Clara está em casa e o Carlos está feliz

Na primeira *interpretação*, a frase é verdadeira apenas no caso de o Carlos estar feliz e alguém (entre o Marco e a Clara) estar em casa. Na segunda *interpretação*, basta que o Marco esteja em casa, para que a frase seja verdadeira, mesmo que o Carlos não esteja feliz.

A ambiguidade ilustrada no exemplo é eliminada, na Língua Portuguesa, pela pontuação e eventual reescrita das frases; e, na lógica de primeira ordem, pelo recurso ao uso de parênteses, tal como se faz em expressões algébricas envolvendo várias operações.

As interpretações consideradas acima correspondem às seguintes sentenças numa linguagem de primeira ordem adequada:

- $[EmCasa(marco) \vee EmCasa(clara))] \wedge Feliz(carlos)$
- $EmCasa(marco) \vee [EmCasa(clara) \wedge Feliz(carlos))]$

Também se usam parênteses para indicar o *alcance* de uma negação.

EXEMPLO 3.5. A sentença

$$\neg EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco)$$

traduz-se para A Clara não está em casa mas o Marco está em casa.

Por outro lado, a sentença

$$\neg(EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco))$$

traduz-se para Não é o caso que a Clara e o Marco estejam ambos em casa.

Note Bem 3.6. Sejam P, Q sentenças numa linguagem de primeira ordem.

- $\neg P$ é verdadeira se e só se P é falsa.
- $P \wedge Q$ é verdadeira se e só se P, Q são simultaneamente verdadeiras.
- $P \vee Q$ é verdadeira se e só se P é verdadeira ou Q é verdadeira (ou ambas são verdadeiras).
- O uso de parênteses é **obrigatório** na construção de sentenças que combinem vários conectivos, de modo a eliminar ambiguidade na leitura. Na prática, deve-se fechar com um par de parênteses externos qualquer sentença em que ocorram os conectivos $\wedge$ ou $\vee$, se essa sentença for parte de uma sentença mais complexa.

3.6. Equivalência lógica

Diz-se que duas sentenças P, Q numa linguagem de primeira ordem são **logicamente equivalentes** se são ambas verdadeiras nas mesmas circunstâncias; i.é, se P é verdadeira sempre que e somente quando Q é verdadeira. Escreve-se $P \Leftrightarrow Q$.

Proposição 3.7. *Sejam P, Q, R sentenças numa linguagem de primeira ordem. Tem-se*

(1) **Leis associativas**

$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
Em face das leis associativas, podemos omitir os parênteses e escrever apenas $P \wedge Q \wedge R$ e $P \vee Q \vee R$.

(2) **Leis de idempotência**

($\wedge$) *Uma conjunção de sentenças em que uma sentença P ocorre repetida uma ou mais vezes é logicamente equivalente à conjunção que se obtém mantendo apenas uma ocorrência de P.*
($\vee$) *Uma disjunção de sentenças em que uma sentença P ocorre repetida uma ou mais vezes é logicamente equivalente à disjunção que se obtém mantendo apenas uma ocorrência de P.*

(3) **Leis comutativas**

($\wedge$) *Qualquer arranjo na ordem por que ocorrem as sentenças numa conjunção é logicamente equivalente à conjunção inicial.*
($\vee$) *Qualquer arranjo na ordem por que ocorrem as sentenças numa disjunção é logicamente equivalente à disjunção inicial.*

Exemplo 3.8. $P \wedge P \Leftrightarrow P$ (idempotência de $\wedge$)
$P \wedge P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge Q$ (idempotência de $\wedge$)
$P \vee P \vee P \Leftrightarrow P$ (idempotência de $\vee$)
$P \vee P \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$ (idempotência de $\vee$)
$P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow Q \wedge R \wedge P$ (comutatividade de $\wedge$)
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ (comutatividade de $\vee$)

PROPOSIÇÃO 3.9. *Sejam P, Q, R sentenças numa linguagem de primeira ordem. Tem-se*

(1) **Lei da dupla negação** $\neg\neg P \Leftrightarrow P$.

(2) **Leis de De Morgan**

i. *A negação da conjunção de duas sentenças é logicamente equivalente à disjunção das negações das sentenças consideradas.*

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

ii. *A negação da disjunção de duas sentenças é logicamente equivalente à conjunção das negações das sentenças consideradas.*

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

Observe-se que sempre que duas sentenças são logicamente equivalentes, cada uma delas é consequência lógica da outra. Assim, numa dedução informal, podemos sempre substituir uma sentença por outra que lhe seja logicamente equivalente.

CAPÍTULO 4

A Lógica dos Conectivos Booleanos

Recorde-se que o valor de verdade de uma sentença P construída com os conectivos $\neg, \wedge, \vee$ depende apenas dos conectivos usados e dos valores de verdade das sentenças atómicas que ocorrem em P. Assim, temos ao nosso dispor o **método das tabelas de verdade**, que permite calcular todos os valores de verdade da sentença P a partir da atribuição de valores de verdade a cada uma das sentenças atómicas que ocorrem em P.

Neste capítulo estudaremos essencialmente três conceitos

- verdades lógicas e tautologias
- equivalência lógica e tautológica de sentenças
- consequência lógica

4.1. Tautologias e verdades lógicas

Diz-se que uma sentença é uma **possibilidade lógica** se há alguma circunstância logicamente possível ($ex:$ um mundo) em que essa sentença seja verdadeira.

Exemplo 4.1. Possibilidades lógicas

(1) Considere-se a sentença $Between(b, a, c)$ (que se lê *b está entre a e c*). Esta sentença é uma possibilidade lógica, tal como se pode comprovar no mundo de *Leibniz*.
(2) No entanto a sentença $Between(b, a, c) \wedge \neg Between(b, a, c)$ não é possibilidade lógica. (Porquê?)

Diz-se que uma sentença é uma **verdade lógica** se é verdadeira em qualquer circunstância logicamente possível. Diz-se que uma sentença é uma **falsidade lógica** se a sua negação é uma verdade lógica.

Exemplo 4.2. Verdades lógicas

(1) $a = a$
(2) Lei do terceiro excluído: $A \vee \neg A$
(3) Princípio da não contradição: $\neg(B \wedge \neg B)$

Note-se que

- Uma sentença é uma verdade lógica se e só se a sua negação não é possibilidade lógica.
- Uma sentença é uma possibilidade lógica se e só se a sua negação não é verdade lógica.

Tabelas de verdade. Vamos ilustrar de seguida como se constroem tabelas de verdade para sentenças obtidas a partir de sentenças atómicas com recurso aos conectivos $\neg, \wedge, \vee$.

Seja uma sentença (complexa) S numa linguagem de primeira ordem.

- Se em S ocorre apenas uma sentença atómica A, a tabela de verdade de S tem o aspecto seguinte

A	S
V	$\dots$
F	$\dots$

- Se em S ocorrem duas sentenças atómicas A, B a tabela de verdade de S tem o aspecto seguinte

A	B	S
V	V	$\dots$
V	F	$\dots$
F	V	$\dots$
F	F	$\dots$

- Mais geralmente, se em S ocorrem n sentenças atómicas $A_1, A_2, \dots, A_n$ a respectiva tabela de verdade tem 2^n linhas abaixo da primeira, correspondendo aos 2^n $n-$tuplos de todos os valores de verdade que se podem atribuir às sentenças $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Vamos ver alguns exemplos de construção de tabelas de verdade.

Exemplo 4.3. Considerem-se sentenças atómicas A, B e a sentença $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Passo 1. Por baixo de cada literal (i.e., sentença atómica ou negação de sentença atómica) escreve-se em cada linha o respectivo valor de verdade.

A	B	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\vee$	$(\neg A$	$\wedge$	$B)$
V	V	V		F		F		V
V	F	V		V		F		F
F	V	F		F		V		V
F	F	F		V		V		F

Passo 2. Por baixo de cada conectivo $\wedge$, $\vee$ ligando duas sentenças cujos valores foram calculados no passo anterior, escreve-se, em cada linha, o respectivo valor de verdade.

A	B	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\vee$	$(\neg A$	$\wedge$	$B)$
V	V	V	**F**	F		F	**F**	V
V	F	V	**V**	V		F	**F**	F
F	V	F	**F**	F		V	**V**	V
F	F	F	**F**	V		V	**F**	F

Passo 3 e seguintes. Repete-se o passo 2 até se calcular os valores de verdade da sentença considerada inicialmente.

A	B	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\vee$	$(\neg A$	$\wedge$	$B)$
V	V	V	F	F	**F**	F	F	V
V	F	V	V	V	**V**	F	F	F
F	V	F	F	F	**V**	V	V	V
F	F	F	F	V	**F**	V	F	F

Neste exemplo, a tabela de verdade ficou completamente construída ao fim de 3 passos. A sentença considerada é verdadeira se e só se *exactamente uma* das sentenças A ou B é verdadeira. Descreve a *disjunção exclusiva*, que se abrevia por $A \dot{\vee} B$.

OBSERVAÇÃO 4.4. Para facilitar a leitura, pode-se evitar o preenchimento das colunas que correspondem às sentenças atómicas, na parte direita da tabela de verdade.

EXEMPLO 4.5. Considere-se a sentença $S := \neg[(B \vee C) \wedge \neg B \wedge \neg C]$, com B, C sentenças atómicas. A sua tabela de verdade é

B	C	$\neg$	$[(B \vee C)$	$\wedge$	$\neg B$	$\wedge$	$\neg C]$
V	V	**V**	V	F	F	F	F
V	F	**V**	V	F	F	F	V
F	V	**V**	V	F	V	F	F
F	F	**V**	F	F	V	V	V

Note-se que, quaisquer que sejam os valores de verdade atribuídos a B e C, a sentença S é sempre verdadeira.

Uma sentença diz-se uma **tautologia** se em todas as linhas da tabela de verdade o seu valor é V (*verdadeiro*).

Qualquer tautologia é uma verdade lógica. No entanto, há verdades lógicas que não são tautologias.

EXEMPLO 4.6. Uma verdade lógica que não é tautologia é a sentença $a = a$. Como se trata de uma sentença atómica, a sua tabela de verdade contém dois valores V e F. Mas $a = a$ nunca é falsa. O método da tabela de verdade não é adequado neste caso; não é suficientemente refinado para reconhecer o caso que não é logicamente possível.

EXEMPLO 4.7. Considerando a interpretação usual do predicado binário *MaiorQue*, também $\neg(MaiorQue(a,b) \wedge MaiorQue(b,a))$ é uma verdade lógica, que não é tautologia. Como $MaiorQue(a,b)$ e $MaiorQue(b,a)$ não podem ser simultaneamente verdadeiras, a sua conjunção é falsa em todas as circunstâncias possíveis. Trata-se de uma falsidade lógica, donde resulta que $\neg(MaiorQue(a,b) \wedge MaiorQue(b,a))$ é verdadeira em todas as circunstâncias possíveis.

Uma sentença diz-se tt−**satisfazível** se há pelo menos uma linha da tabela de verdade em que o seu valor é V (*verdadeiro*).

Qualquer possibilidade lógica é uma sentença tt−satisfazível. No entanto, há sentenças tt−satisfazíveis que não são possibilidades lógicas.

Exemplo 4.8. A sentença $LeftOf(a, b) \wedge LeftOf(b, a)$ é tt–satisfazível (basta atribuir a ambas as sentenças atómicas $LeftOf(a, b)$ e $LeftOf(b, a)$ o valor V). No entanto, atendendo à interpretação usual do predicado *LeftOf*, a sentença considerada não é uma possibilidade lógica.

Note Bem 4.9. Seja S uma sentença numa linguagem de primeira ordem, construída a partir de sentenças atómicas com recurso aos conectivos $\neg, \wedge, \vee$. Uma tabela de verdade para S demonstra que os valores de verdade de S dependem apenas dos valores de verdade atribuídos às sentenças atómicas e dos conectivos usados.

(1) S é uma tautologia *sse* em todas as linhas da tabela de verdade para S, S tem valor V.
(2) Se S é uma tautologia então é uma verdade lógica.
(3) Algumas verdades lógicas não são tautologias.
(4) S é tt–satisfazível *sse* há pelo menos uma linha da tabela de verdade para S em que S tem valor V.
(5) S é uma possibilidade lógica se há alguma circunstância logicamente possível na qual ela seja verdadeira.
(6) Se S é uma possibilidade lógica, então é tt–satisfazível.

4.2. Equivalência lógica e tautológica

Recorde-se que duas sentenças se dizem **logicamente equivalentes** *sse* têm os mesmos valores de verdade em quaisquer circunstâncias logicamente possíveis.

De modo mais preciso, diz-se que duas sentenças P, Q são **tautologicamente equivalentes (t.e.)** se, construída uma tabela de verdade conjunta para P e Q, em todas as linhas, as entradas correspondentes a cada uma das sentenças P e Q têm o mesmo valor de verdade.

Assim, um método para verificar a equivalência tautológica de duas sentenças consiste na construção de uma tabela de verdade conjunta.

Tabelas de verdade conjuntas. Todas as equivalências lógicas enunciadas nas proposições 3.7 e 3.9, são de facto equivalências tautológicas. Registamos aqui dois exemplos.

Exemplo 4.10. $P \Leftrightarrow \neg\neg P$ (Lei da dupla negação)

P	P	$\neg\,\neg\, P$
V	**V**	**V** F
F	**F**	**F** V

As colunas dos valores de verdade de P e $\neg\neg P$ são iguais. Portanto $P \Leftrightarrow \neg\neg P$.

EXEMPLO 4.11. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ (Lei de De Morgan)

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
V	V	$\mathbf{F}$ V	F $\mathbf{F}$ F
V	F	$\mathbf{F}$ V	F $\mathbf{F}$ V
F	V	$\mathbf{F}$ V	V $\mathbf{F}$ F
F	F	$\mathbf{V}$ F	V $\mathbf{V}$ V

As duas colunas a negrito, em que estão registados os valores de verdade de $\neg(P \vee Q)$ e $\neg P \wedge \neg Q$, são iguais, pelo que está verificada a equivalência tautológica entre $\neg(P \vee Q)$ e $\neg P \wedge \neg Q$.

Note-se que se duas sentenças são tautologicamente equivalentes então são logicamente equivalentes. No entanto, há sentenças que são logicamente equivalentes mas não são tautologicamente equivalentes.

EXEMPLO 4.12. As sentenças $a = b \wedge Cube(a)$ e $a = b \wedge Cube(b)$ são logicamente equivalentes, mas não são tautologicamente equivalentes.

DEMONSTRAÇÃO. (informal)

Supondo que $a = b \wedge Cube(a)$ é verdadeira, então a é cubo e a é b. Portanto, b é cubo e a sentença $a = b \wedge Cube(b)$ é verdadeira.

O recíproco também é válido: de facto, se $a = b \wedge Cube(b)$ é verdadeira, então a é b e b é cubo. Mas então b é a (por simetria) e portanto a é cubo.

Logo a sentença $a = b \wedge Cube(a)$ é verdadeira.

Podemos assim concluir que, em quaisquer circunstâncias logicamente possíveis, as duas sentenças têm os mesmos valores de verdade, logo são logicamente equivalentes. □

No entanto, não são tautologicamente equivalentes, pois na tabela de verdade conjunta tem-se a seguinte linha:

$a = b$	$Cube(a)$	$Cube(b)$	$a = b \wedge Cube(a)$	$a = b \wedge Cube(b)$
V	V	F	V	F

NOTE BEM 4.13. Sejam S e S' sentenças numa linguagem de primeira ordem construídas a partir de sentenças atómicas, com recurso aos conectivos $\neg, \wedge, \vee$. Para verificar se S e S' são tautologicamente equivalentes constrói-se uma tabela de verdade conjunta, referente a todas as sentenças atómicas que ocorrem em S ou S'.

(1) S e S' são tautologicamente equivalentes *sse* em cada linha da tabela de verdade conjunta S e S' têm o mesmo valor de verdade.
(2) Se S e S' são tautologicamente equivalentes, então são logicamente equivalentes.
(3) Há sentenças que são logicamente equivalentes mas não são tautologicamente equivalentes.

4.3. Consequência lógica e tautológica

As tabelas de verdade permitem definir com rigor o conceito de consequência tautológica. Sejam P, Q sentenças construídas a partir de sentenças atómicas com recurso aos conectivos $\neg, \wedge, \vee$. Para decidir se Q é consequência tautológica de P, podemos construir uma tabela de verdade conjunta para P e Q. De seguida identificamos cada linha da tabela de verdade em que P é verdadeira. Se em **todas** as linhas em que P é verdadeira, Q também for verdadeira, concluímos que Q **é consequência tautológica de** P.

PROPOSIÇÃO 4.14. *Se Q é consequência tautológica de P então também é consequência lógica de P.*

DEMONSTRAÇÃO. (por contra-recíproco)
Suponhamos que Q não é consequência lógica de P. Então há pelo menos uma circunstância possível em que P é verdadeira e Q é falsa. Esta circunstância determina os valores de verdade das sentenças atómicas que ocorrem na construção de P, Q e portanto corresponde a uma linha na tabela de verdade conjunta, em que P é verdadeira e Q é falsa. Logo, Q não é consequência tautológica de P. □

EXEMPLO 4.15. Sendo A, B sentenças atómicas, será que $\neg A \vee \neg B$ é consequência tautológica de $\neg A \wedge B$? Tem-se a seguinte tabela conjunta:

A	B	$\neg A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	**V**	**V**
F	F	F	V

A única linha da tabela de verdade conjunta em que $\neg A \wedge B$ é verdadeira é a terceira, com A falsa e B verdadeira. Nesta linha, também $\neg A \vee \neg B$ é verdadeira. Logo $\neg A \vee \neg B$ é consequência tautológica de $\neg A \wedge B$.

Note-se que uma sentença pode ser consequência lógica de outra, sem que seja consequência tautológica.

EXEMPLO 4.16. (1) A sentença $a = c$ é consequência lógica de $a = b \wedge b = c$. De facto, se $a = b \wedge b = c$ é verdadeira, então a é b e b é c. Portanto a é c (por transitividade), i.e., $a = c$ é verdadeira. Portanto, $a = c$ é verdadeira em todas as circunstâncias em que $a = b \wedge b = c$ é verdadeira. No entanto, na tabela de verdade conjunta, temos a linha (que não corresponde a nenhuma circunstância logicamente possível):

$a = b$	$b = c$	$a = c$	$a = b \wedge b = c$	$a = c$
V	V	F	**V**	**F**

(2) A sentenca $b = a$ é consequência lógica de $a = b$, pois (por simetria) $b = a$ é verdadeira em todas as circunstâncias possíveis em que $a = b$

é verdadeira. No entanto, $b = a$ não é consequência tautológica de $a = b$, tal como podemos verificar na tabela de verdade conjunta.

$a = b$	$b = a$	$a = b$	$b = a$
V	F	**V**	**F**

O método das tabelas de verdade, para verificar consequência tautológica, pode ser aplicado a qualquer raciocínio com premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ e conclusão Q.

- Constrói-se uma tabela de verdade conjunta das sentenças $P_1, P_2, \ldots,$ P_n, Q.
- Identificam-se todas as linhas da tabela em que as premissas $P_1, P_2,$ $\ldots, P_n$ são simultaneamente verdadeiras.
- Verifica-se se em todas essas linhas Q toma o valor V. Se assim for, Q é consequência tautológica das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Se, pelo contrário, há pelo menos uma linha em que as premissas são simultaneamente verdadeiras e Q é falsa, conclui-se que Q não é consequência tautológica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Exemplo 4.17. (exercício 4.23 no livro, 30(4) nas folhas) Vamos verificar se a sentença $A \vee \neg D$ é consequência tautológica das premissas $A \vee \neg B$, $B \vee C$ e $C \vee D$.

A	B	C	D	$A \vee \neg B$	$B \vee C$	$C \vee D$	$A \vee \neg D$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	**V**	**V**	**V**	**F**
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	F	V

As premissas são simultaneamente verdadeiras nas linhas 1, 2, 3, 5, 6, 13 e 14. Em todas elas, excepto na linha 13, $A \vee \neg D$ é verdadeira. Como, na linha 13, $A \vee \neg D$ é falsa, concluímos que esta sentença não é consequência tautológica das premissas.

NOTE BEM 4.18. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ sentenças numa linguagem de primeira ordem, construídas a partir de sentenças atómicas e dos conectivos $\neg, \wedge, \vee$. Construa-se uma tabela conjunta para estas sentenças.

(1) Q é consequência tautológica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *sse* em todas as linhas da tabela de verdade em que $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são simultaneamente verdadeiras, Q também é verdadeira.
(2) Se Q é consequência tautológica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, então também é consequência lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
(3) Algumas consequências lógicas não são consequências tautológicas.

4.4. Forma Normal Negativa (NNF)

Claramente, se duas sentenças são logicamente equivalentes, então são consequência lógica uma da outra. Esta observação permite-nos, numa dedução informal, deduzir uma sentença a partir de outra que lhe seja logicamente equivalente. Por exemplo, as leis de De Morgan, bem como a dupla negação são instrumentos amplamente usados em deduções informais. A sua utilidade é ainda maior porque podemos substituir sentenças equivalentes no contexto de sentenças mais complexas. Mais precisamente,

Princípio de Substituição de Equivalentes. Se P e Q são sentenças logicamente equivalentes (resp. tautologicamente equivalentes), $S(P)$ é uma sentença complexa em que P ocorre, e $S(Q)$ é uma sentença que resulta de substituir, por Q, algumas ocorrências de P em $S(P)$, então $S(P)$ e $S(Q)$ são sentenças logicamente equivalentes (resp. tautologicamente equivalentes).

EXEMPLO 4.19. Considere-se a sentença

$$\neg(\mathit{Cube}(a) \wedge \neg\neg \mathit{Small}(a)).$$

Pela lei da dupla negação, $\neg\neg \mathit{Small}(a) \Leftrightarrow \mathit{Small}(a)$.

Podemos então substituir $\neg\neg \mathit{Small}(a)$ por $\mathit{Small}(a)$, na sentença considerada inicialmente, e obter a sentença logicamente equivalente

$$\neg(\mathit{Cube}(a) \wedge \mathit{Small}(a)).$$

Uma das muitas aplicações das leis de De Morgan e da dupla negação fornece-nos um método para, dada uma sentença P, construída com recurso aos conectivos $\neg, \wedge, \vee$, obter uma sentença logicamente equivalente a P tal que, em todas as ocorrências do conectivo de negação, $\neg$, este alcance apenas as sentenças atómicas.

DEFINIÇÃO 4.20. Diz-se que uma sentença P numa linguagem de primeira ordem está na **Forma Normal Negativa (NNF)** se em todas as ocorrências do conectivo de negação, $\neg$, em P, este alcança apenas as sentenças atómicas que entram na construção de P.

EXEMPLO 4.21. NNF

Sejam A, B, C sentenças atómicas numa linguagem de primeira ordem. Tem-se

$$\begin{array}{rcll} \neg((A \vee B) \wedge \neg C) & \Leftrightarrow & \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C & \text{(De Morgan)} \\ & \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C & \text{(De Morgan)} \\ & \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \vee C & \text{(dupla negação)} \end{array}$$

A sentença $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$ está na forma normal negativa (NNF).

Exemplo 4.22. NNF

Sejam A, B, C sentenças atómicas numa linguagem de primeira ordem e a sentença $(\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B)$. Vamos usar as equivalências lógicas anteriores para encontrar uma sentença na forma normal negativa, logicamente equivalente à sentença dada.

$$\begin{array}{lll} (\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow & & \\ \quad \Leftrightarrow & ((\neg\neg A \vee \neg\neg B) \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B) & \text{(De Morgan)} \\ \quad \Leftrightarrow & ((A \vee B) \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B) & \text{(dupla negação)} \end{array}$$

A sentença $((A \vee B) \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B)$ é uma forma normal negativa da sentença inicial $(\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B)$.

Podemos prosseguir a simplificação:

$$\begin{array}{lll} ((A \vee B) \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow & & \\ \quad \Leftrightarrow & (A \vee B \vee A) \wedge C \wedge (A \vee B) & \text{(associatividade de } \vee) \\ \quad \Leftrightarrow & (A \vee A \vee B) \wedge C \wedge (A \vee B) & \text{(comutatividade de } \vee) \\ \quad \Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge C \wedge (A \vee B) & \text{(idempotência de } \vee) \\ \quad \Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee B) \wedge C & \text{(comutatividade de } \wedge) \\ \quad \Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge C & \text{(idempotência de } \wedge) \end{array}$$

4.5. Formas Normais Disjuntiva (DNF) e Conjuntiva (CNF)

Vamos obter novas formas normais—importantes em certas aplicações da lógica à computação. Para obter estas formas precisamos das leis distributivas.

Recorde-se, da aritmética elementar, que

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, ou, em notação mais usual, $a(b + c) = ab + ac$.

Para os conectivos $\wedge, \vee$ são válidas leis formalmente análogas.

Proposição 4.23. *Sejam P, Q, R sentenças numa linguagem de primeira ordem.*

(1) **Lei distributiva da conjunção em relação à disjunção**

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

(2) **Lei distributiva da disjunção em relação à conjunção**

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

No caso da aritmética elementar, a lei distributiva da multiplicação em relação à adição permite transformar qualquer expressão algébrica usando $\times$ e $+$ numa expressão que é *uma soma de produtos.*

Exemplo 4.24. $(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

De modo análogo, a lei distributiva da conjunção ($\wedge$) em relação à disjunção ($\vee$) permite, dada uma sentença S construída a partir de literais por meio de conjunções e disjunções, encontrar uma sentença S', logicamente equivalente a S, que é uma disjunção de conjunções de literais.

Definição 4.25. Diz-se que uma sentença numa linguagem de primeira ordem está na **Forma Normal Disjuntiva (DNF)** se é uma disjunção de uma ou conjunções de um ou mais literais.

Exemplo 4.26. Sejam A, B, C, D sentenças atómicas numa linguagem de primeira ordem e seja a sentença $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$. Tem-se

$$\begin{array}{lcl} (A \vee B) \wedge (C \vee D) \Leftrightarrow & & \\ \Leftrightarrow & [(A \vee B) \wedge C] \vee [(A \vee B) \wedge D] & \text{(lei dist. da } \wedge \text{ em rel. a } \vee) \\ \Leftrightarrow & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee [(A \vee B) \wedge D] & \text{(lei dist. da } \wedge \text{ em rel. a } \vee) \\ \Leftrightarrow & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D) & \end{array}$$

Note-se que, na segunda equivalência, se usou a lei distributiva (da conjunção em relação à disjunção) à direita; podemos fazê-lo pois quer a conjunção quer a disjunção têm a propriedade comutativa.

Por outro lado, supondo que T é uma sentença na forma normal negativa (i.e., construída a partir de literais usando conjunções e disjunções), e usando a lei distributiva da disjunção ($\vee$) em relação à conjunção ($\wedge$), é possível encontrar uma sentença T', logicamente equivalente a T, que é uma conjunção de disjunções de literais.

Definição 4.27. Diz-se que uma sentença numa linguagem de primeira ordem está na **Forma Normal Conjuntiva (CNF)** se é uma conjunção de uma ou mais disjunções de um ou mais literais.

Note Bem 4.28. Recorde-se que, dada qualquer sentença T, se tem, por idempotência, $T \Leftrightarrow T \vee T$ e $T \Leftrightarrow T \wedge T$. Este facto permite-nos considerar alguns casos especiais das formas normais DNF e CNF, em que algumas das disjunções/conjunções podem ser de uma sentença apenas.

Exemplo 4.29. Sejam A, B, C sentenças atómicas e seja a sentença $\neg((A \vee B) \wedge \neg C)$. Tem-se:

$$\begin{array}{lcl} \neg((A \vee B) \wedge \neg C) \Leftrightarrow & & \\ \Leftrightarrow & \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C & \text{(De Morgan)} \\ \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg\neg C & \text{(De Morgan)} \\ \Leftrightarrow & (\neg A \wedge \neg B) \vee C & \text{(dupla negação)} \end{array}$$

A sentença $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$, logicamente equivalente à primeira, está na *forma normal negativa* NNF. Como é uma disjunção de conjunções de literais, está também na *forma normal disjuntiva* DNF. Vamos agora determinar uma sentença na *forma normal conjuntiva* CNF, logicamente equivalente à sentença $(\neg A \wedge \neg B) \vee C$ e, portanto, logicamente equivalente à primeira sentença considerada, $\neg((A \vee B) \wedge \neg C)$.

$(\neg A \wedge \neg B) \vee C \Leftrightarrow (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ (lei distributiva da $\vee$ em rel. à $\wedge$).

A sentença $(\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$ é uma conjunção de disjunções de literais e portanto está na forma normal conjuntiva (CNF).

Uma sentença pode estar simultaneamente na DNF e na CNF.

Exemplo 4.30. A sentença

$$EmCasa(clara) \wedge \neg EmCasa(marco)$$

está na CNF pois é uma conjunção (de disjunções) de literais e está na DNF pois é a disjunção de **uma** sentença, que é uma conjunção de literais.

Suponhamos que uma sentença S não tem parênteses desnecessários e foi construída apenas com recurso aos conectivos $\neg, \wedge, \vee$. Uma forma simples de testar se S está na DNF, consiste em verificar se todas as negações têm como alcance apenas sentenças atómicas e se todas as conjunções se aplicam directamente a literais. Se a resposta for *sim* em ambos os casos, a sentença S está na DNF.

Analogamente, para testar se S está na CNF, basta verificar se todas as negações têm como alcance apenas sentenças atómicas e se todas as disjunções se aplicam directamente a literais. Se a resposta for *sim* em ambos os casos, a sentença S está na CNF.

Note Bem 4.31.

(1) Uma sentença está na DNF se é uma disjunção de (uma ou mais) conjunções de (um ou mais) literais.
(2) Uma sentença está na CNF se é uma conjunção de (uma ou mais) disjunções de (um ou mais) literais.
(3) A lei distributiva da conjunção ($\wedge$) em relação à disjunção ($\vee$) permite transformar qualquer sentença na NNF numa sentença, logicamente equivalente, na DNF.
(4) A lei distributiva da disjunção ($\vee$) em relação à conjunção ($\wedge$) permite transformar qualquer sentença na NNF numa sentença, logicamente equivalente, na CNF.
(5) Algumas sentenças estão simultaneamente na DNF e na CNF.

Exemplo 4.32. Sejam A, B, C, D sentenças atómicas e seja a sentença $\neg[(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge D)]$.

Tem-se:

$$
\begin{array}{lll}
\neg[(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge D)] \Leftrightarrow & & \\
\Leftrightarrow & \neg[\neg(A \vee B) \vee (\neg C \wedge D)] & \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow & \neg\neg(A \vee B) \wedge \neg(\neg C \wedge D) & \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow & \neg\neg(A \vee B) \wedge (\neg\neg C \vee \neg D) & \text{(De Morgan)} \\
\Leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (C \vee \neg D) & \text{(dupla negação)}
\end{array}
$$

A sentença $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$ está na NNF; além disso, como é uma conjunção de disjunções de literais, está na CNF. Vamos agora determinar uma sentença na DNF, logicamente equivalente a $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D)$ e, portanto a $\neg[(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge D)]$.

$$
\begin{array}{lll}
(A \vee B) \wedge (C \vee \neg D) \Leftrightarrow & & \\
\quad \Leftrightarrow & [(A \vee B) \wedge C] \vee [(A \vee B) \wedge \neg D] & \text{(distrib. de } \wedge \text{ rel. a } \vee) \\
\quad \Leftrightarrow & [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)] \vee [(A \vee B) \wedge \neg D] & \text{(distrib. de } \wedge \text{ rel. a } \vee) \\
\quad \Leftrightarrow & [(A \wedge C) \vee (B \wedge C)] \vee [(A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg D)] & \text{(distrib. de } \wedge \text{ rel. a } \vee) \\
\quad \Leftrightarrow & (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg D) & \text{(associatividade de } \vee)
\end{array}
$$

A sentença $(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge \neg D) \vee (B \wedge \neg D)$ é uma disjunção de conjunções de literais. Está na DNF.

Note Bem 4.33. A lei da Dupla Negação, as leis de De Morgan, as leis distributivas (bem como a associatividade, comutatividade e idempotência de $\wedge$ e $\vee$) são, de facto, equivalências tautológicas. Assim, as formas normais obtidas a partir de uma sentença previamente fixada são tautologicamente equivalentes à sentença de que se partiu.

CAPÍTULO 5

Métodos de Dedução para a Lógica Booleana

Os métodos de verificação de verdade associados às tabelas de verdade são fundamentais. No entanto, dependem do carácter funcional dos conectivos Booleanos, com respeito à verdade. Além disso, as tabelas de verdade têm crescimento exponencial relativamente ao número de sentenças atómicas que intervêm no argumento. Outra desvantagem das tabelas de verdade, que também já observámos em alguns exemplos, é que só servem para testar a consequência tautológica, não fornecendo métodos suficientemente sofisticados para testar a consequência lógica em geral. Assim, há necessidade de explorar outras formas de obter deduções informais (e formais).

Cada novo conectivo na linguagem está na origem de novos padrões válidos de dedução. Se, por exemplo, tivermos $P \wedge Q$, então claramente podemos deduzir P e podemos deduzir Q. Este padrão simples de dedução designa-se por *passo válido de inferência*.

Mais importantes ainda que os novos passos válidos de inferência são os novos *métodos de dedução* que estão associados às sentenças mais complexas que podemos construir usando os conectivos.

5.1. Passos válidos de inferência

Enunciamos de seguida alguns passos válidos de inferência.

1. Uma vez deduzida uma sentença P e sabendo-se que Q é consequência lógica de P, deduz-se Q.

Exemplo.

i. De $\neg\neg P$ deduz-se P.
ii. De P deduz-se $\neg\neg P$.

Como caso particular, numa sentença, pode-se substituir uma sua parte por uma parte que lhe seja logicamente equivalente.

Exemplo. De $P \wedge \neg\neg Q$ deduz-se $P \wedge Q$.

2. Se Q é uma sentença logicamente válida, pode-se inserir Q em qualquer passo de dedução.

Exemplo.

i. O princípio da identidade $a = a$.
ii. Qualquer tautologia, tal como $P \vee \neg P$.

3. *Eliminação da conjunção.* Deduzida a sentença $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$, pode-se deduzir cada uma das sentenças $P_1, P_2, \ldots P_n$.

4. *Introdução da conjunção.* Deduzidas as sentenças $P_1, P_2, \ldots P_n$, pode-se deduzir $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$.

5. *Introdução da disjunção.* Deduzida uma sentença P_i, para algum i,$1 \leq i \leq n$, pode-se deduzir qualquer disjunção de sentenças $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$.

Nos exemplos que se seguem vamos considerar algumas *inferências* e decidir se são válidas.

EXEMPLO 5.1. De $P \vee Q$ e $\neg P$ deduz-se Q. Comecemos por construir a tabela de verdade conjunta para as sentenças $P \vee Q$, $\neg P$ e Q.

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	Q
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

A única linha da tabela de verdade em que as premissas $P \vee Q$ e $\neg P$ são simultaneamente verdadeiras é a terceira. Nesta linha, Q também é verdadeira. Logo Q é consequência tautológica das premissas consideradas e, portanto, é consequência lógica daquelas premissas. Usando o primeiro passo válido de inferência que enunciámos, conclui-se que de $P \vee Q$ e $\neg P$ se deduz Q. Assim, a *inferência* considerada é **válida**.

EXEMPLO 5.2. De $P \vee Q$ e Q deduz-se $\neg P$. Espera-se, de uma dedução, que seja correcta, i.e., que de premissas verdadeiras só se possam deduzir conclusões verdadeiras. Considere-se, na linguagem da aritmética com predicados unários adicionais *Primo* e *Par*, as sentenças $Primo((1+1))$ e $Par((1+1))$. Claramente, no universo dos números naturais, as sentenças $Primo((1+1)) \vee Par((1+1))$ e $Par((1+1))$ são verdadeiras. No entanto, a sentença $\neg Primo((1+1))$ é falsa. Portanto, a *inferência* que considerámos é necessariamente **falaciosa**.

5.2. Método de dedução por casos

Os conectivos Booleanos estão na base de dois métodos de dedução que são aplicados explicitamente em todos os tipos de raciocínio rigoroso. O primeiro deste métodos é o *método de dedução por casos*.

Considere-se o seguinte resultado:

TEOREMA 5.3. *Existem números irracionais $b > 0$, c, tais que b^c é racional.*

DEMONSTRAÇÃO. Recorde-se:

(1) Se $b > 0$ é um número real então $b^c = e^{c \log b}$
(2) Todo o número *racional* é da forma $\frac{p}{q}$, em que p, q são inteiros e $q \neq 0$.
(3) Um número real diz-se *irracional* se não é racional.

(4) $\sqrt{2}$ é irracional (veremos a demonstração adiante).

Considere-se

$$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

O número a é necessariamente racional ou irracional (porquê?). Se a for racional, estão encontrados irracionais b, c tais que b^c é racional; basta tomar $b = c = \sqrt{2}$. Caso contrário, tome-se

$$b = a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \quad c = \sqrt{2}.$$

Tem-se que $b^c = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\times\sqrt{2})} = \sqrt{2}^{2} = 2.$

Logo, b^c é racional.

Portanto, quer a seja racional, quer seja irracional, sabe-se que existem irracionais b, c tais que b^c é racional. Está demonstrado o teorema, e a demonstração é independente de se saber se a é ou não racional[1].

□

A estrutura do raciocínio que acábamos de apresentar é a seguinte: começamos com um objectivo a deduzir—uma sentença R—e uma disjunção $P \vee Q$, que já conhecemos. Depois deduzimos que

de P se infere R
de Q se infere R.

Como se sabe que $P \vee Q$ é válida, conclui-se R.

Este padrão de raciocínio designa-se por *método de dedução por casos.*

Mais geralmente, se num dado passo de dedução se obtém uma disjunção $P_1 \vee P_2 \ldots \vee P_n$, podemos considerar n casos $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Se de cada um dos casos P_i, $1 \leq i \leq n$, se infere R, então pode-se deduzir R a partir da disjunção $P_1 \vee P_2 \ldots \vee P_n$.

NOTE BEM 5.4. (Dedução por casos) Para deduzir R a partir da disjunção $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$, basta deduzir R a partir de cada uma das sentenças P_i, $1 \leq i \leq n$.

No exemplo que se segue vamos fazer uma dedução por casos, usando também a introdução da disjunção.

EXEMPLO 5.5. Sejam as sentenças

A *EmCasa*(*marco*)
B *Feliz*(*carlos*)
C *EmCasa*(*clara*)
D *Feliz*(*rafeiro*).

Considere-se a inferência com premissa $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$ e conclusão $B \vee D$ (i.e., *Feliz*(*carlos*) $\vee$ *Feliz*(*rafeiro*)). Trata-se de uma inferência válida; vejamos porquê.

[1]Veja-se [**Ribenboim**] para uma discussão sobre a natureza do número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

Suponhamos $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$. Como a premissa é uma disjunção de duas sentenças, vamos considerar os dois casos. No caso $A \wedge B$, tem-se por eliminação da conjunção, B; e por introdução da disjunção, tem-se $B \vee D$. No caso $C \wedge D$, tem-se por eliminação da conjunção, D; e por introdução da disjunção, tem-se $B \vee D$. Assim, em ambos os caso obtivémos $B \vee D$. Portanto, tem-se $B \vee D$ a partir da premissa $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$.

5.3. Método de dedução por redução ao absurdo

Este é um dos métodos de dedução mais importantes.

Suponha-se que se quer deduzir uma sentença na forma $\neg S$, a partir de premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Pode-se supor, com vista a um absurdo, que se tem S. Se da premissa temporária S e de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se deduzir uma contradição, então $\neg S$ deduz-se das premissas iniciais $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

De facto, a dedução da contradição mostra que S e $P_1, P_2, \ldots, P_n$ não podem ser simultaneamente verdadeiras. Logo, se $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são simultaneamente verdadeiras (em alguma circunstância logicamente possível), S tem que ser falsa e consequentemente $\neg S$ é verdadeira. Portanto $\neg S$ é consequência lógica das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, donde resulta que $\neg S$ se deduz a partir das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Exemplo 5.6. (Uma dedução por redução ao absurdo).
Considerem-se as premissas:
$\mathit{Cube}(c) \vee \mathit{Dodec}(c)$
$\mathit{Tet}(b)$
para se deduzir a conclusão $c \neq b$.

Demonstração. Com vista a um absurdo, suponhamos $c = b$ e as premissas $\mathit{Cube}(c) \vee \mathit{Dodec}(c)$, $\mathit{Tet}(b)$.
Da primeira premissa deduz-se que $\mathit{Cube}(c)$ ou $\mathit{Dodec}(c)$.
No primeiro caso, $\mathit{Cube}(c)$, como $c = b$, obtemos $\mathit{Cube}(b)$, o que contradiz $\mathit{Tet}(b)$.
No segundo caso, $\mathit{Dodec}(c)$, como $c = b$, obtemos $\mathit{Dodec}(b)$, o que contradiz $\mathit{Tet}(b)$.
Assim ambos os casos conduzem a uma contradição, que resultou de termos suposto $c = b$.
Logo, conclui-se, das premissas dadas, que $c \neq b$. □

Outro exemplo, mais interessante, de dedução por redução ao absurdo:

Teorema 5.7. *$\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração. Antes de mostrarmos que $\sqrt{2}$ é irracional, recorde-se:

(1) Todo o número racional se escreve na forma $\frac{p}{q}$, onde p, q são números inteiros e $q \neq 0$. Além disso, se considerarmos a fracção reduzida, p é ímpar ou q é ímpar (pois p, q não podem ser simultaneamente pares).
(2) O quadrado de um número ímpar é ímpar:
$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$
Consequentemente, se n^2 é par então também n é par. Daqui resulta:

(3) Se n^2 é par, então n^2 é divisível por 4.

Podemos agora demonstrar que $\sqrt{2}$ é irracional (i.e., que não é racional).

Com vista a um absurdo, suponha-se que $\sqrt{2}$ é racional. Sejam p, q inteiros com $q \neq 0$, em que p é ímpar ou q é ímpar, e

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Tem-se, elevando ao quadrado,

$$2 = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2}$$

e multiplicando por q^2,

$$2q^2 = p^2.$$

Assim, 2 divide p^2, i.e., p^2 é par. Daqui resulta que p é par e que p^2 é divisível por 4. Mas então $2q^2 = 4t$, para algum t, e portanto $q^2 = 2t$. Logo 2 divide q^2, i.e., q^2 é par e, portanto, q é par. Assim, p, q são simultaneamente pares, o que contradiz o facto de pelo menos um deles ser ímpar. Esta contradição resultou de termos suposto que $\sqrt{2}$ é racional. Por consequência, $\sqrt{2}$ não é racional,*i.e.* , é irracional. □

Observe-se que, combinando o método de redução ao absurdo com a lei de dupla negação, é possível deduzir uma sentença que não esteja negada. Para tal, tome-se como premissa temporária $\neg S$. Obtida uma contradição, pode-se deduzir, por redução ao absurdo, $\neg\neg S$. Usando a lei da dupla negação, pode-se então deduzir S.

No teorema que acabámos de demonstrar, a contradição que obtivémos é do tipo P e $\neg P$ (onde P é a sentença *p, q são simultaneamente pares*).

Intuitivamente, uma *contradição* é uma afirmação que não pode ser verdadeira; ou um conjunto de afirmações que não podem ser simultaneamente verdadeiras, em nenhuma circunstância logicamente possível.

Alguns exemplos de contradições:

(1) um par de sentenças P e $\neg P$;

(2) um par de sentenças do tipo *Cube*(a) e *Tet*(a), ou $x < y$ e $y < x$;

(3) a negação de uma sentença logicamente válida, tal como $a \neq a$.

Mais precisamente, diz-se que um conjunto Γ de sentenças é **contraditório** (ou **inconsistente**), se não há nenhuma circunstância logicamente possível em que as todas sentenças de Γ sejam simultaneamente verdadeiras.

Usa-se o símbolo $\perp$ (*t invertido*) para indicar que se obteve uma contradição.

Seja $\Gamma = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ um conjunto de sentenças. Se, em cada linha da tabela de verdade conjunta para as sentenças de Γ, há pelo menos uma sentença P_i com valor F, podemos concluir que Γ é contraditório. Assim, o método das tabelas de verdade fornece um teste (parcial, pois é apenas suficiente) para deduzir inconsistência.

Note Bem 5.8. (Redução ao absurdo). Tome-se S como premissa temporária e obtenha-se uma contradição $\perp$. Daqui deduz-se $\neg S$.

5.4. Inferências com premissas contraditórias

Qualquer sentença S é consequência lógica de um conjunto inconsistente de premissas.

De facto, se um conjunto de sentenças, Γ, for inconsistente (ou contraditório) não é logicamente possível que todas as sentenças de Γ sejam simultaneamente verdadeiras. Assim, de modo trivial, S é verdadeira em todas as circunstâncias logicamente possíveis em que as sentenças de Γ sejam simultaneamente verdadeiras.

Exemplo 5.9. Considere-se as premissas

(1) $a = 2 \lor b = 0$
(2) $a \neq 2$
(3) $b \neq 0$

Das premissas consideradas pode-se deduzir qualquer sentença, por exemplo $a \neq a$.

Note-se que qualquer conclusão obtida a partir de um argumento com base em premissas inconsistentes não tem interesse. O que nos interessa na noção de consequência lógica é a a sua relação com o valor de verdade. Se as premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras, não há forma de saber se a conclusão é verdadeira ou falsa.

CAPÍTULO 6

Deduções formais com os conectivos Booleanos

Em contraste com as deduções informais, cuja estrutura é flexível, regendo-se por princípios simples de senso comum, uma **dedução formal** assenta num conjunto fixo de regras de dedução e tem uma apresentação rígida—um pouco à semelhança dos programas escritos numa dada linguagem de programação.

6.1. O sistema $\mathcal{F}$

Fixamos aqui o sistema $\mathcal{F}$, que é um sistema formal de dedução natural, designado *sistema dedutivo de Fitch*, em homenagem ao filósofo norte-americano Frederic Fitch (1908-1987).

Uma dedução no sistema dedutivo $\mathcal{F}$, com premissas P, Q, R (por exemplo) e conclusão S, tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{|l}
P \\
Q \\
R \\
\hline
\\
\vdots \\
S
\end{array}$$

A linha **vertical** indica uma única dedução.

A linha **horizontal** – a **barra de Fitch** – separa as premissas das conclusões delas deduzidas. Em exemplos concretos de deduções numera-se cada um dos passos (cada uma das linhas de dedução).

Vamos começar a apresentar algumas regras do sistema $\mathcal{F}$, que correspondem aos princípios de raciocínio válido já enunciados para os conectivos Booleanos.

6.2. Regras para a conjunção

Regra da eliminação da conjunção ($\wedge$ Elim)

Da conjunção $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ pode-se deduzir P_i, para qualquer i, $1 \leq i \leq n$.

O esquema da regra é:

$$\begin{array}{r|l}
 & P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \\
 & \vdots \\
\triangleright & P_i
\end{array}$$

O símbolo $\triangleright$ usa-se na *descrição de cada regra*, para indicar qual o passo na dedução validado pela regra.

Regra da introdução da conjunção ($\wedge$ Intro)

Deduzidas todas as sentenças $P_1, P_2, \ldots, P_n$, pode-se deduzir a conjunção $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$. O esquema da regra é:

$$
\begin{array}{r|l}
 & P_1 \\
 & \vdots \\
 & P_n \\
 & \vdots \\
\triangleright & P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n
\end{array}
$$

Exemplo 6.1. Dedução de $B \wedge C$ a partir da premissa $A \wedge B \wedge C$:

$$
\begin{array}{|lll}
1. & A \wedge B \wedge C & \\
\hline
2. & B & \wedge \text{ Elim: } 1 \\
3. & C & \wedge \text{ Elim: } 1 \\
4. & B \wedge C & \wedge \text{ Intro: } 2,\ 3
\end{array}
$$

Este exemplo serve sobretudo para ilustrar a utilização das regras e a forma de fazer as justificações em cada linha de dedução em que tal seja necessário.

Note Bem 6.2. O uso de parênteses é obrigatório sempre que a sua omissão conduza a ambiguidade na leitura das sentenças.

É, por exemplo, o caso de numa das sentenças a que se aplica a regra da introdução da conjunção ($\wedge$ Intro) ocorrer uma disjunção.

Exemplo 6.3. As duas deduções que se seguem são ambas aplicações **correctas** da regra ($\wedge$ Intro).

1.

$$
\begin{array}{|lll}
1. & P \wedge Q & \\
2. & R & \\
\hline
3. & (P \wedge Q) \wedge R & \wedge \text{ Intro: } 1,\ 2
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{|lll}
1. & P \wedge Q & \\
2. & R & \\
\hline
3. & P \wedge Q \wedge R & \wedge \text{ Intro: } 1,\ 2
\end{array}
$$

No entanto, das duas *deduções* que se seguem, só a primeira está correcta.

3.

$$
\begin{array}{|lll}
1. & P \vee Q & \\
2. & R & \\
\hline
3. & (P \vee Q) \wedge R & \wedge \text{ Intro: } 1,\ 2
\end{array}
$$

4.

$$
\begin{array}{|lll}
1. & P \vee Q & \\
2. & R & \\
\hline
3. & P \vee Q \wedge R & \wedge \text{ Intro: } 1,\ 2
\end{array}
$$

A *conclusão* na *dedução* 4. não é uma sentença, por omissão de parênteses essenciais.

6.3. Regras para a disjunção

Regra da introdução da disjunção (∨ Intro)

Deduz-se a disjunção $P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n$ a partir de P_i, $1 \leq i \leq n$.
O esquema da regra é:

$$\begin{array}{l|l} & P_i \\ & \vdots \\ \triangleright & P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n \end{array}$$

P_i pode ser a primeira (ou a última) sentença na disjunção. Também na aplicação desta regra pode ser necessário o uso de parênteses externos à volta de P_i, para evitar ambiguidade.

Regra da eliminação da disjunção (∨ Elim)

Esta regra corresponde ao *método de dedução por casos.*

Se S for dedutível de cada uma das sentenças P_i, $1 \leq i \leq n$, então pode-se deduzir S a partir da disjunção $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$. No esquema desta regra usam-se **subdeduções**, i.e., deduções que ocorrem no contexto de deduções mais complexas.

Antes de apresentar o esquema da regra, consideremos um exemplo que ilustra não só o uso de subdeduções como o uso da regra (∨ Intro).

Exemplo 6.4. (Dedução formal que corresponde à dedução informal apresentada no exemplo 5.5)

Premissa: $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$
Conclusão: $B \vee D$

$$\begin{array}{|l}
1.\ (A \wedge B) \vee (C \wedge D) \\ \hline
\begin{array}{|ll}
2.\ A \wedge B & \\ \hline
3.\ B & \wedge \text{ Elim: } 2 \\
4.\ B \vee D & \vee \text{ Intro: } 3
\end{array} \\
\begin{array}{|ll}
5.\ C \wedge D & \\ \hline
6.\ D & \wedge \text{ Elim: } 5 \\
7.\ B \vee D & \vee \text{ Intro: } 6
\end{array} \\
8.\ B \vee D \qquad \vee \text{ Elim: } 1,\ 2\text{-}4,\ 5\text{-}7
\end{array}$$

Esta dedução contém duas subdeduções; na primeira deduz-se $B \vee D$ a partir de $A \wedge B$ (linhas 2-4); na segunda deduz-se $B \vee D$ a partir de $C \wedge D$ (linhas 5-7). Estas duas subdeduções, juntamente com a premissa da linha 1, permitem deduzir $B \vee D$ por uso da regra (∨ Elim, que justifica a linha 8 da dedução).

O esquema geral da regra (∨ Elim) é:

$$
\begin{array}{r|l}
 & P_1 \vee \ldots \vee P_n \\
 & \vdots \\
 & \begin{array}{|l} P_1 \\ \hline \vdots \\ S \end{array} \\
 & \quad \vdots \\
 & \begin{array}{|l} P_n \\ \hline \vdots \\ \mathrm{S} \end{array} \\
 & \vdots \\
\triangleright & S
\end{array}
$$

Observação. Quando se aplica a regra de eliminação da disjunção, constam da justificação:

(i) o número da linha contendo a sentença na forma disjuntiva $P_1 \vee \ldots \vee P_n$

(ii) as referências r_i-s_i, $1 \leq i \leq n$, relativas às n subdeduções de S a partir de P_i, cada uma das quais com início na linha r_i e fim na linha s_i.

6.4. Uma regra adicional

Em algumas deduções é, por vezes, conveniente repetir um passo anterior. É o caso de deduções longas ou de deduções em que uma sentença tem o papel duplo de premissa (na dedução principal ou uma subdedução) e de conclusão. Para tal, tem-se a regra de reiteração, que descrevemos de seguida.

Regra da reiteração (Reit)

Deduzida uma sentença P em qualquer passo da dedução, pode-se repetir P em qualquer passo posterior.

$$
\begin{array}{r|l}
 & P \\
 & \vdots \\
\triangleright & P
\end{array}
$$

Na justificação do passo de dedução, escreve-se o nome da regra, seguido do número de linha do passo em que P ocorreu.

No exemplo que se segue usa-se, para além de ($\vee$ Elim), a regra de reiteração (Reit).

Exemplo 6.5. Premissa: $(B \wedge A) \vee A$
Conclusão: A

$$
\begin{array}{l|l}
& 1.\ (B \wedge A) \vee A \\
\hline
& \begin{array}{|l} 2.\ B \wedge A \\ \hline 3.\ A \qquad\qquad\quad \wedge \text{ Elim: } 2 \end{array} \\
& \begin{array}{|l} 4.\ A \\ \hline 5.\ A \qquad\qquad\quad \text{Reit: } 4 \end{array} \\
& 6.\ A \qquad\qquad\quad \vee \text{ Elim: } 1,\ 2\text{-}3,\ 4\text{-}5
\end{array}
$$

6.5. Regras para a negação

Regra da eliminação da negação (¬ Elim)

De $\neg\neg P$ deduz-se P.
O esquema da regra (¬ Elim) é:

$$
\begin{array}{r|l}
& \neg\neg P \\
& \vdots \\
\triangleright & P
\end{array}
$$

A regra (¬ Elim) formaliza uma das partes do princípio da dupla negação.

Regra da introdução da negação (¬ Intro)

Esta regra corresponde ao *método de dedução por redução ao absurdo* e na sua aplicação é também necessário recorrer ao uso de subdeduções.

Se, a partir de premissas dadas e da premissa temporária P se deduz uma contradição $\perp$, então pode-se deduzir $\neg P$.

O esquema da regra é:

$$
\begin{array}{r|l}
& \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ \perp \end{array} \\
\triangleright & \neg P
\end{array}
$$

Na justificação da regra identifica-se a subdedução nas linhas i-j, onde i é a linha da premissa temporária P e j é a linha da contradição $\perp$.

6.6. Regras para o símbolo de contradição ⊥

Para reger o uso do símbolo de contradição $\perp$ são necessárias duas regras.

Regra da introdução da contradição (⊥ Intro)

Se se deduziu uma contradição explícita, i.e., se no decurso da dedução se obteve P e $\neg P$, então pode-se deduzir $\perp$.

O esquema da regra é:

$$
\begin{array}{r|l}
 & P \\
 & \vdots \\
 & \neg P \\
 & \vdots \\
\triangleright & \perp
\end{array}
$$

Na justificação da regra usam-se as linhas onde ocorrem $P, \neg P$, por esta ordem.

Exemplo 6.6. (A outra parte do princípio de dupla negação)
Premissa: A
Conclusão: $\neg\neg A$

1. A	
2. $\neg A$	
3. $\perp$	$\perp$ Intro: 1, 2
4. $\neg\neg A$	$\neg$ Intro: 2-3

Normalmente, a regra ($\perp$ Intro) usa-se apenas em subdeduções. Só se usa esta regra numa dedução principal quando as premissas iniciais são inconsistentes.

O símbolo de contradição $\perp$ tem papel análogo ao de qualquer outra sentença numa dedução. Em particular, se numa dedução por casos se obtém $\perp$ em cada uma das subdeduções, então, por aplicação de ($\vee$ Elim), pode-se obter $\perp$ na dedução principal.

Exemplo 6.7.

1. $A \vee B$	
2. $\neg A$	
3. $\neg B$	
4. A	
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4, 2
6. B	
7. $\perp$	$\perp$ Intro: 6, 3
8. $\perp$	$\vee$ Elim: 1, 4-5, 6-7

Na linha 8, aplicou-se ($\vee$ Elim) para deduzir a contradição $\perp$ a partir das duas subdeduções.

Recorde-se que a partir de uma contradição se pode deduzir qualquer sentença. Este princípio de inferência é formalizado pela regra de eliminação da contradição.

Regra da eliminação da contradição (⊥ Elim)

Da contradição $\perp$ deduz-se P, sendo P uma sentença arbitrária.
O esquema da regra (⊥ Elim) é:

$$\begin{array}{r|l} & \perp \\ & \vdots \\ \triangleright & P \end{array}$$

No exemplo que se segue, faz-se a *eliminação* de premissas contraditórias.

Exemplo 6.8. Premissas: $P \vee Q$, $\neg Q$
Conclusão: P

1. $P \vee Q$	
2. $\neg Q$	
3. P	
4. P	Reit: 3
5. Q	
6. $\perp$	$\perp$ Intro: 5, 2
7. P	$\perp$ Elim: 6
8. P	$\vee$ Elim: 1, 3-4, 5-7

Qualquer dedução em que se usa a regra (⊥ Elim) pode ser substituída por outra em que se omite esta regra—a regra é, portanto, dispensável, embora útil.

Vamos refazer a dedução anterior, sem recorrer à regra (⊥ Elim).

Exemplo 6.9. Nova dedução de P a partir das premissas $P \vee Q$, $\neg Q$.

1. $P \vee Q$	
2. $\neg Q$	
3. P	
4. P	Reit: 3
5. Q	
6. $\neg P$	
7. $\perp$	$\perp$ Intro: 5, 2
8. $\neg\neg P$	$\neg$ Intro: 6-7
9. P	$\neg$ Elim: 8
10. P	$\vee$ Elim: 1, 3-4, 5-9

6.7. O uso correcto das subdeduções

No uso de subdeduções, é essencial observar certas regras que serão explicitadas de seguida. Considere-se o seguinte *argumento falacioso*:

EXEMPLO 6.10. Premissa: $(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$
Conclusão: $A \wedge B$ (claramente falaciosa!)

1. $(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$	
2. $B \wedge A$	
3. B	$\wedge$ Elim: 2
4. A	$\wedge$ Elim: 2
5. $A \wedge C$	
6. A	$\wedge$ Elim: 4
7. A	$\vee$ Elim: 1, 2-4, 5-6
8. $A \wedge B$	$\wedge$ Intro: 7, 3

No passo 8, citou-se o passo 3, que faz parte de uma subdedução anterior, já concluída (linhas 2-4). Quando uma subdedução anterior termina, o raciocínio que se segue não pode depender da premissa da subdedução ou de qualquer conclusão dela dependente. Também não se pode usar a regra de reiteração (Reit) para reintroduzir tais passos na dedução.

NOTE BEM 6.11. Uma subdedução, quando terminada, só pode ser citada globalmente. Os seus passos individuais deixam de estar disponíveis para justificações de passos posteriores.

Note-se, no entanto, que é possível, numa dedução, citar passos anteriores, externos à subdedução, desde que não sejam, eles próprios, passos de uma subdedução já terminada (*cf.* a justificação do passo 3 no exemplo 6.6).

EXEMPLO 6.12. Premissa: $\neg(P \wedge R)$
Conclusão: $\neg P \vee \neg R$
(uma das partes de uma equivalência lógica conhecida por lei de De Morgan.)

1. $\neg(P \wedge R)$	
2. $\neg(\neg P \vee \neg R)$	
3. $\neg P$	
4. $\neg P \vee \neg R$	$\vee$ Intro: 3
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4, 2
6. $\neg\neg P$	$\neg$ Intro: 3-5
7. P	$\neg$ Elim: 6
8. $\neg R$	
9. $\neg P \vee \neg R$	$\vee$ Intro: 8
10. $\perp$	$\perp$ Intro: 9, 2
11. $\neg\neg R$	$\neg$ Intro: 8-10
12. R	$\neg$ Elim: 11
13. $P \wedge R$	$\wedge$ Intro: 7, 12
14. $\neg(P \wedge R)$	Reit: 1
15. $\perp$	$\perp$ Intro: 13, 14
16. $\neg\neg(\neg P \vee \neg R)$	$\neg$ Intro: 2-15
17. $\neg P \vee \neg R$	$\neg$ Elim: 16

Nas justificações das linhas 5 e 10, usou-se a linha 2, externa a cada uma das subdeduções 3-5 e 8-10, mas que faz parte de uma subdedução ainda não terminada nos passos em que foi citada (linhas 2-15).

Também na linha 14 se citou a linha 1, que faz parte da dedução principal e que é externa à subdedução 2-15.

Note Bem 6.13. Na justificação de um passo numa subdedução, é possível citar qualquer passo anterior que ocorra na dedução principal ou em qualquer subdedução ainda não terminada.

6.8. Estratégia e táctica

Como se deve construir uma dedução formal? Antes de mais, não se deve perder de vista o significado das sentenças que ocorrem na dedução. No primeiro passo, há que perceber se a conclusão é consequência lógica das premissas. Se tal for o caso, a primeira estratégia para descobrir uma dedução formal consiste em obter uma dedução *informal*. É frequente que a estrutura básica de uma dedução informal possa ser formalizada directamente, usando as regras do sistema $\mathcal{F}$. Outra estratégia consiste em *trabalhar de trás para a frente*. Expliquemo-nos. Analisando a conclusão S, tente-se descobrir uma sentença, ou sentenças, a partir das quais S se deduza imediatamente por aplicação de uma das regras de $\mathcal{F}$. Insiram-se essas sentenças como passos de dedução e usem-se para justificar S. Depois repita-se este exercício com as novas *conclusões intermédias* até todos os passos de dedução estarem justificados.

Vamos considerar um exemplo, analisado em pormenor, em que se usam as estratégias apresentadas para descobrir uma dedução formal.

Exemplo 6.14. Premissa: $\neg P \lor \neg R$
Conclusão: $\neg(P \land R)$
(a condição recíproca da considerada no exemplo 6.12.)

Começemos com uma *dedução informal.*
Suponha-se $\neg P \lor \neg R$.
Com vista a um absurdo, suponha-se $P \land R$.
Há dois casos a considerar.
No primeiro caso, suponha-se $\neg P$. Esta hipótese está em contradição com P e portanto está em contradição com $P \land R$.
No segundo caso, suponha-se $\neg R$. Esta hipótese está em contradição com R e portanto está em contradição com $P \land R$.
Logo a hipótese $P \land R$ conduz a um absurdo e portanto tem-se a sua negação $\neg(P \land R)$.

Construção de uma dedução formal.

O esqueleto:

$$
\begin{array}{|ll}
1.\ \neg P \lor \neg R & \text{(premissa)} \\
\hline
\vdots & \\
\neg(P \land R) & \text{(conclusão)}
\end{array}
$$

O método principal de dedução que se utilizou foi a redução ao absurdo ($\neg$ Intro). Tem-se portanto uma subdedução.

$$
\begin{array}{|l}
1.\ \neg P \lor \neg R \\
\hline
\begin{array}{|l}
2.\ P \land R \\
\hline
\vdots \\
\perp
\end{array} \\
\neg(P \land R) \quad \neg\ \text{Intro: 2-?}
\end{array}
$$

Na dedução informal, obteve-se uma contradição com cada um dos casos $\neg P$, $\neg R$. Tem-se então o método de dedução por casos ($\lor$ Elim), com a introdução de novas subdeduções.

1. $\neg P \vee \neg R$	
2. $P \wedge R$	
3. $\neg P$	
$\vdots$	
$\perp$	
$\neg R$	
$\vdots$	
$\perp$	
$\perp$	$\vee$ Elim: 1, 3-?, ?-?
$\neg(P \wedge R)$	$\neg$ Intro: 2-?

Agora é fácil obter uma dedução formal.

1. $\neg P \vee \neg R$	
2. $P \wedge R$	
3. $\neg P$	
4. P	$\wedge$ Elim: 2
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4, 3
6. $\neg R$	
7. R	$\wedge$ Elim: 2
8. $\perp$	$\perp$ Intro: 7, 6
9. $\perp$	$\vee$ Elim: 1, 3-5, 6-8
10. $\neg(P \wedge R)$	$\neg$ Intro: 2-9

6.9. Deduções sem premissas

Há deduções que não necessitam de premissas; é o caso das deduções de sentenças logicamente válidas.

Um exemplo interessante é o da dedução do *princípio da não contradição*, a tautologia $\neg(P \wedge \neg P)$.

EXEMPLO 6.15. $\neg(P \wedge \neg P)$ é dedutível sem premissas.

1. $P \wedge \neg P$	
2. P	$\wedge$ Elim: 1
3. $\neg P$	$\wedge$ Elim: 1
4. $\perp$	$\perp$ Intro: 2, 3
5. $\neg(P \wedge \neg P)$	$\neg$ Intro: 1-4

O nosso último exemplo é a *lei do terceiro excluído*, $P \vee \neg P$.

EXEMPLO 6.16. A sentença $P \vee \neg P$ é dedutível sem premissas.

1. $\neg(P \vee \neg P)$	
2. P	
3. $P \vee \neg P$	$\vee$ Intro: 2
4. $\perp$	$\perp$ Intro: 3, 1
5. $\neg P$	$\neg$ Intro: 2-4
6. $\neg P$	
7. $P \vee \neg P$	$\vee$ Intro: 6
8. $\perp$	$\perp$ Intro: 7, 1
9. $\neg\neg P$	$\neg$ Intro: 6-8
10. $\perp$	$\perp$ Intro: 5, 9
11. $\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\neg$ Intro: 1-10
12. $P \vee \neg P$	$\neg$ Elim: 11

CAPÍTULO 7

Implicação material (→) e equivalência material(↔)

Considerem-se as frases

O Marco está em casa **se** a Clara estiver na biblioteca.
O Marco está em casa **só se** a Clara estiver na biblioteca.
O Marco está em casa, **a não ser que** a Clara esteja na biblioteca.
O Marco está em casa **sempre que** a Clara estiver na biblioteca.
O Marco está em casa **se e só se** a Clara estiver na biblioteca.

Os conectivos que estudámos até agora não permitem traduzir directamente estas frases para sentenças de uma linguagem de primeira ordem. Neste capítulo vamos apresentar dois conectivos novos:

$\to$ implicação material;
$\leftrightarrow$ bicondicional ou equivalência material.

7.1. O símbolo de implicação material →

Se P, Q são sentenças, $P \to Q$ denota uma nova sentença, que se lê P *implica* Q. P designa-se por *antecedente*, Q designa-se por *consequente* da nova sentença.

Semântica para a implicação material. A sentença $P \to Q$ é *verdadeira* se e somente se P é falsa ou Q é verdadeira. A tabela de verdade da implicação material é

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe-se que $P \to Q$ é uma forma de dizer $\neg P \lor Q$ (i.e., $P \to Q$ é tautologicamente equivalente a $\neg P \lor Q$).

Note Bem 7.1. A sentença condicional $P \to Q$ é *falsa* apenas no caso de o antecedente P ser verdadeiro e o consequente Q ser falso.

A sentença $P \to Q$ pode-se traduzir para Língua Portuguesa dizendo se P então Q. Claramente, se P é verdadeira e Q é falsa, a frase condicional se P então Q também é falsa. Algumas expressões de Língua Portuguesa que traduzem $P \to Q$ são:

Se P então Q
P só se Q
Q desde que P
Q se P
Q sempre que P

EXEMPLO 7.2. Podemos agora traduzir algumas das frases que considerámos no início do capítulo, para sentenças de uma linguagem de primeira ordem com os predicados unários *EmCasa* e *NaBiblioteca* e os nomes *clara* e *marco*.

O Marco está em casa **se** a Clara estiver na biblioteca.

$$NaBiblioteca(clara) \to EmCasa(marco)$$

O Marco está em casa **só se** a Clara estiver na biblioteca.

$$EmCasa(marco) \to NaBiblioteca(clara)$$

O Marco está em casa, **a não ser que** a Clara esteja na biblioteca.

Note-se que esta frase pode ser reescrita afirmando: O Marco está em casa se a Clara não estiver na biblioteca. Portanto a sua tradução é

$$\neg NaBiblioteca(clara) \to EmCasa(marco)$$

O Marco está em casa **sempre que** a Clara estiver na biblioteca.

$$NaBiblioteca(clara) \to EmCasa(marco)$$

O uso mais importante da implicação material em lógica de primeira ordem é em sentenças com quantificador universal. Considere-se, como exemplo, a frase

Todos os números primos maiores do que 2 são ímpares.

Numa linguagem de primeira ordem que inclua os predicados binários *Primo* e *Par* e o símbolo relacional <, esta frase traduz-se pela sentença

$$\forall x \ ((Primo(x) \wedge 2 < x) \to \neg Par(x)).$$

7.2. Validade lógica e consequência lógica

A implicação material tem um papel fundamental em Lógica, pois permite-nos reduzir a noção de consequência lógica à noção de validade lógica de uma nova sentença, no caso de um número finito de premissas.

Recorde-se que uma sentença Q é consequência lógica de premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se se só se é impossível que todas as premissas sejam verdadeiras e Q seja falsa. Esta afirmação é equivalente a dizer que não é possível que a sentença $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ seja verdaeira e Q seja falsa. Atendendo ao significado de $\to$, vemos que Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \ldots P_n$ sse $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$ é verdade lógica.

Portanto para verificar se uma sentença Q é consequência lógica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ basta determinar se a sentença $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$ é verdade lógica. Em particular, se da construção da tabela de verdade da sentença $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \to Q$ resultar que esta é uma tautologia, então Q é consequência tautológica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

EXEMPLO 7.3. É fácil observar que $\mathit{Cube}(b)$ é consequência lógica de $\mathit{Cube}(a)$ e $a = b$. Portanto,

$$(\mathit{Cube}(a) \wedge a = b) \to \mathit{Cube}(b)$$

é verdade lógica.

7.3. O símbolo de equivalência material ou bicondicional ($\leftrightarrow$)

Dadas duas sentenças P, Q, $P \leftrightarrow Q$ denota uma nova sentença, que se lê P *se e só se* Q.

Semântica para a equivalência material. A sentença $P \leftrightarrow Q$ é verdadeira se e só se P, Q têm o mesmo valor de verdade, isto é, se P, Q são ambas verdadeiras ou ambas falsas. A tabela de verdade da equivalência material é

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EXEMPLO 7.4. Numa linguagem de primeira ordem que inclua o predicado binário Par e uma constante n para cada número natural, a sentença n é par se e só se n^2 é par traduz-se por $\mathit{Par}(n) \leftrightarrow \mathit{Par}(n^2)$.

Tem-se que duas sentenças P, Q são logicamente equivalentes se e só se a sentença $P \leftrightarrow Q$ é verdade lógica. De modo mais sugestivo,
$P \Leftrightarrow Q$ se e só se $P \leftrightarrow Q$ é verdade lógica.
Tem-se ainda que P é tautologicamente equivalente a Q se e só se $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

EXEMPLO 7.5. Uma das leis de De Morgan dá origem à tautologia seguinte:

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

Apesar de estreitamente relacionados, não se devem confundir os símbolos $\Leftrightarrow$ (de equivalência lógica entre sentenças) e $\leftrightarrow$ (conectivo bicondicional ou equivalência material).

NOTE BEM 7.6. Dadas duas sentenças P, Q, tem-se que $P \leftrightarrow Q$ é tautologicamente equivalente a

$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$,
$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$ ou ainda,
$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

7.4. Completude funcional

Os conectivos $\neg, \wedge, \vee$ são *vero-funcionais*, i.é:

(VF) O valor de verdade de qualquer sentença construída a partir de sentenças atómicas com recurso aos três conectivos depende apenas dos valores de verdade das sentenças atómicas de que se partiu e dos conectivos usados.

Que outros conectivos vero-funcionais ((VF)) podem existir?

Se construirmos todas as tabelas de verdade possíveis, podemos calcular efectivamente quantos conectivos há que sejam vero-funcionais. Se nos restringirmos aos conectivos *binários*, há 4 linhas em cada tabela. Cada linha pode ter o valor V ou F e portanto há 2^4 tabelas (binárias) distintas.

De seguida vamos descrever um método que permite expressar um dado conectivo vero-funcional em função dos seus valores de verdade.

Sejam P, Q sentenças e denote $P \square Q$ uma nova sentença construída à custa de um conectivo binário $\square$ desconhecido.

Seja a seguinte s sua tabela de verdade.

P	Q	$P \square Q$
V	V	v_1
V	F	v_2
F	V	v_3
F	F	v_4

em que v_1, v_2, v_3, v_4 são os valores de verdade de $P \square Q$.

- Se os 4 valores de verdade forem simultaneamente F, então claramente $P \square Q$ é tautologicamente equivalente a $P \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg Q$.
- Se pelo menos um dos valores for V, considerem-se as sentenças
  $C_1 = P \wedge Q$
  $C_2 = P \wedge \neg Q$
  $C_3 = \neg P \wedge Q$
  $C_4 = \neg P \wedge \neg Q$

Note-se que para cada $i \leq 4$, C_i é verdadeira exactamente na i-ésima linha da tabela de verdade. Para obter uma sentença que seja verdadeira exactamente nas mesmas linhas da tabela em que $P \square Q$ é verdadeira, basta tomar a *disjunção* das sentenças C_i adequadas (*i.e.*, aquelas que correspondem às linhas da tabela de verdade em que $P \square Q$ é verdadeira).

Exemplo 7.7. Retome-se o exemplo $P \square Q$ dado por

P	Q	$P \square Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Então $P \square Q$ é definida pela expressão $C_1 \vee C_4$, que é $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

Mais geralmente, o método aqui ilustrado permite definir qualquer conectivo vero-funcional binário por meio de uma sentença na forma normal disjuntiva (FND), portanto usando apenas os conectivos $\neg, \wedge, \vee$.

Uma versão simplificada deste método permite definir conectivos unários.

Seja $\sharp$ um conectivo unário cuja tabela é:

P	$\sharp P$
V	v_1
F	v_2

Se v_1, v_2 são ambos falsos tome-se $P \wedge \neg P$ como definição de $\sharp P$.
Se pelo menos um dos valores v_1, v_2 é verdadeiro pode-se tomar para definição de $\sharp P$ a disjunção adequada de $C_1 = P$ e $C_2 = \neg P$.

Por outro lado, é possível estender este método para definir qualquer conectivo n-ário, $n > 2$, que seja vero-funcional, por meio de uma expressão que use apenas $\neg, \wedge, \vee$.

EXEMPLO 7.8. Seja o seguinte conectivo ternário *If P then Q else R*, cuja tradução para Língua Portuguesa é *Se P então Q, caso contrário R*:

P	Q	R	*If P then Q else R*
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

O conectivo *If P then Q else R* é definido por

$$C_1 \vee C_2 \vee C_5 \vee C_7$$

que é

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R).$$

Recorrendo às equivalências tautológicas do capítulo 4, em particular às leis distributivas, obtém-se a seguinte expressão equivalente para *If P then Q else R*:

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R).$$

Descrevemos de seguida uma variante deste método que nos permite obter a forma normal conjuntiva (FNC) de qualquer conectivo n-ário, $n \geq 2$, que seja vero-funcional. Sendo P, Q sentenças atómicas e $P \square Q$ uma nova sentença construída à custa de um conectivo vero-funcional, $\square$, retomemos a tabela

P	Q	$P \square Q$
V	V	v_1
V	F	v_2
F	V	v_3
F	F	v_4

em que v_1, v_2, v_3, v_4 são os valores de verdade de $P \square Q$.

- Se os 4 valores de verdade forem simultaneamente V, então claramente $P \square Q$ é tautologicamente equivalente a qualquer tautologia envolvendo P (ou Q), por exemplo, $P \vee \neg P$.
- Se pelo menos um dos valores for F, considerem-se as sentenças

  $D_1 = \neg P \vee \neg Q$
  $D_2 = \neg P \vee Q$
  $D_3 = P \vee \neg Q$
  $D_4 = P \vee Q$

Note-se que para cada $i \leq 4$, D_i é falsa exactamente na i-ésima linha da tabela de verdade. Para obter uma sentença que seja falsa exactamente nas mesmas linhas da tabela em que $P \square Q$ é falsa, basta tomar a *conjunção* das sentenças D_i adequadas (*i.e.*, aquelas que correspondem às linhas da tabela de verdade em que $P \square Q$ é falsa).

EXEMPLO 7.9. Tome-se $P \square Q$ tal que

P	Q	$P \square Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Então $P \square Q$ é definida pela expressão $D_2 \wedge D_3$, que é $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$, uma forma normal conjuntiva (FNC).

EXERCÍCIO 7.10. Usando a variante do método agora descrita, encontre uma FNC para descrever o conectivo ternário *If* P *then* Q *else* R.

DEFINIÇÃO 7.11. Diz-se que um conjunto de conectivos é **vero-funcionalmente completo** se os conectivos nesse conjunto permitem definir qualquer conectivo que seja vero-funcional.

O método que descrevemos acima, bem como a sua variante, tem por base o seguinte

TEOREMA 7.12. *Os conectivos* $\neg, \wedge, \vee$ *formam um conjunto vero-funcionalmente completo.*

Outros conjuntos de conectivos vero-funcionalmente completos:

- $\{\neg, \wedge\}$, pois $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ define $P \vee Q$
- $\{\neg, \vee\}$, pois $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ define $P \wedge Q$

- $\{\downarrow\}$, cuja tabela de verdade é

P	Q	$P \downarrow Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$P \downarrow Q$ lê-se *nem* P *nem* Q.

É fácil ver que $P \downarrow Q$ é definido por $\neg(P \vee Q)$. Este operador é também conhecido pela designação *NOR*.

Tem-se que $\neg P := P \downarrow P$ e $P \wedge Q := (P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$, donde resulta que $\{\downarrow\}$ é vero-funcionalmente completo.

- $\{|\}$, cuja tabela de verdade é

P	Q	$P \mid Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

$P \mid Q$ lê-se *se* P*, não* Q.

É fácil ver que $P \mid Q$ é definido por $\neg(P \wedge Q)$. Este operador é também conhecido pelas designações em Língua Inglesa *NAND* ou *Sheffer's stroke (barra de Sheffer)*.

Tem-se que $\neg P := P \mid P$ e $P \vee Q := (P \mid P) \mid (Q \mid Q)$, donde resulta que $\{|\}$ é vero-funcionalmente completo.

Note Bem 7.13. (1) Um conjunto de conectivos diz-se vero-funcionalmente completo se permite definir qualquer operador vero-funcional.

(2) Há vários conjuntos de conectivos vero-funcionalmente completos, dos quais se destaca $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

CAPÍTULO 8

A Lógica da implicação ($\to$) e equivalência materiais($\leftrightarrow$)

Como vimos, os conectivos $\to$ e $\leftrightarrow$ não aumentam o poder de expressão da lógica de primeira ordem, pois são definíveis usando $\neg, \wedge, \vee$.

No entanto estes conectivos, em particular a implicação material, são instrumentos de grande utilidade prática para enunciar resultados de modo natural.

8.1. Métodos de dedução com $\to$ e $\leftrightarrow$

Passos válidos de inferência. 1. O passo de dedução mais usado é *Modus Ponens*, que se abrevia por *MP* e a que corresponde a regra formal da eliminação da implicação ($\to$ Elim).

Este passo garante que se se deduziu $P \to R$ e P, então pode-se deduzir R.

Claramente, trata-se de um passo válido de inferência: se $P \to R$ é *verdadeira* e P é *verdadeira*, então R é necessariamente *verdadeira*.

2. Analogamente, para a equivalência, tem-se que, se se deduziu P, $P \leftrightarrow R$ (ou $R \leftrightarrow P$) então pode-se deduzir R.

A este passo válido de inferência corresponde a regra formal de eliminação da equivalência ($\leftrightarrow$ Elim).

Uma equivalência tautológica importante que envolve o conectivo $\to$ é a *Lei do contra-recíproco*: Dadas sentenças P, Q, tem-se que $P \to Q$ é logicamente equivalente a $\neg Q \to \neg P$.

Outras equivalências tautológicas importantes:

Dadas sentenças P, Q,

- $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Método de dedução condicional. Este é um dos métodos de dedução fundamentais no Cálculo Proposicional, o qual permite deduzir uma sentença condicional $P \to R$, sob certas condições.

O método consiste em tomar P como premissa temporária; se com esta premissa temporária se pode deduzir R, então por dedução condicional, pode-se concluir $P \to R$ a partir das premissas iniciais.

EXEMPLO 8.1. (Uma dedução com *Modus Ponens* e dedução condicional)

Vamos deduzir a transitividade da implicação: das premissas $A \to B$ e $B \to C$ deduz-se $A \to C$.

Para tal, tome-se a premissa temporária A (antecedente da sentença $A \to C$).

Por MP, obtém-se B, a partir de $A \to B$ e A.

De novo por MP, obtém-se C, a partir de $B \to C$ e B.

Portanto, da premissa temporária A, juntamente com as premisssas iniciais, deduziu-se C.

Por dedução condicional, obtém-se $A \to C$.

EXEMPLO 8.2. (Uma dedução com dedução condicional e redução ao absurdo)

Observámos num dos capítulos anteriores que se p é um número natural cujo quadrado é par então p é par. Quer dizer, $Par(p)$ é consequência lógica de $Par(p^2)$. Portanto, a sentença $Par(p^2) \to Par(p)$ é uma sentença logicamente válida. Vamos apresentr uma dedução informal deste facto.

Tome-se a premissa temporária $Par(p^2)$.

Com vista a um absurdo, suponha-se $\neg Par(p)$.

Então $p = 2k + 1$ para algum número natural k.

Tem-se

$$p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Mas então p^2 é ímpar, o que contradiz a premissa temporária.

Por redução ao absurdo, conclui-se $Par(p)$.

Por dedução condicional, obtém-se $Par(p^2) \to Par(p)$.

OBSERVAÇÃO 8.3. Quando se quer deduzir $P \to Q$ é por vezes mais fácil deduzir $\neg Q \to \neg P$ e utilizar a lei do contra-recíproco. Para tal, supõe-se $\neg Q$ para se deduzir $\neg P$. Tem-se então, por dedução condicional, $\neg Q \to \neg P$ e, por equivalência tautológica, $P \to Q$.

Para deduzir $Q \leftrightarrow R$ usando o método de dedução condicional é necessário

- Supor Q e deduzir R
  e
- Supor R e deduzir Q.

Em matemática é frequente obter resultados que consistem numa lista de condições equivalentes, enunciadas por exemplo na forma:

As condições Q_1, Q_2, Q_3 são equivalentes.

Em lógica de primeira ordem faz-se corresponder uma lista de equivalências materiais: $Q_1 \leftrightarrow Q_2$, $Q_2 \leftrightarrow Q_3$, $Q_1 \leftrightarrow Q_3$.

Para deduzir estas 3 equivalências teríamos que deduzir as correspondentes 6 implicações. No entanto, é possível simplificar o trabalho, invocando a transitividade da implicação (cf. exemplo 8.1) e reduzindo à demonstração de um ciclo de implicações, nomeadamente $Q_1 \to Q_2$, $Q_2 \to Q_3$, $Q_3 \to Q_4$ e $Q_4 \to Q_1$.

8.2. Deduções formais com implicação (→) e equivalência (↔) materiais

Vamos apresentar as regras, no sistema $\mathcal{F}$, que correspondem aos métodos de dedução envolvendo os conectivos de implicação (→) e equivalência (↔) materiais.

Regras para a implicação material

Regra da eliminação da implicação (→ Elim) ou *Modus Ponens*

Se se deduziu $P \to Q$ e P, pode-se deduzir Q.
O esquema da regra (→ Elim) é:

$$\begin{array}{r|l} & P \to Q \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \rhd & Q \end{array}$$

Na justificação da regra deve-se citar, por esta ordem, as linhas em que ocorrem $P \to Q$ e P.

Regra da introdução da implicação (→ Intro)

Esta regra constitui a formalização do método de dedução condicional e envolve uma subdedução, na qual, tomando P como premissa (temporária) se deduz Q. Completada a subdedução pode-se deduzir $P \to Q$.
O esquema da regra (→ Intro) é:

$$\begin{array}{r|l} & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ & \\ \rhd & P \to Q \end{array}$$

Observação 8.4. A estratégia de construir a dedução de trás para a frente resulta de modo geral muito bem em deduções formais envolvendo implicação.

Exemplo 8.5. (Aplicação de ambas as regras)
Premissa: $(A \vee B) \to C$
Conclusão: $A \to C$

1. $(A \lor B) \to C$	
2. A	
3. $A \lor B$	$\lor$ Intro: 2
4. C	$\to$ Elim: 1, 3
5. $A \to C$	$\to$ Intro: 2-4

Observação 8.6. A regra de introdução da implicação ($\to$ Intro) (ou o método de dedução condicional) permite-nos converter qualquer dedução com premissas numa dedução, sem premissas, de uma nova sentença. De facto, se, por exemplo, de P_1, P_2, P_3 se deduz Q então pode-se deduzir a sentença $(P_1 \to (P_2 \to (P_3 \to Q)))$.

Exemplo 8.7. Já deduzimos $\neg\neg A$ a partir de A. Podemos agora escrever uma dedução de $A \to \neg\neg A$, sem premissas, recorrendo à regra ($\to$ Intro).

1. A	
2. $\neg A$	$\land$ Elim: 2
3. $\perp$	$\perp$ Intro: 1, 2
4. $\neg\neg A$	$\neg$ Intro: 2-3
5. $A \to \neg\neg A$	$\to$ Intro: 1-4

Note-se que tomámos a dedução formal de $\neg\neg A$ a partir da premissa A e a considerámos simplesmente uma subdedução na dedução de $A \to \neg\neg A$.

Regras para a equivalência material

Regra da eliminação da equivalência (↔ Elim)

Se se deduziu P e $P \leftrightarrow Q$ (ou $Q \leftrightarrow P$) pode-se deduzir Q.
O esquema da regra ($\leftrightarrow$ Elim) é:

$$\begin{array}{l|l} & P \leftrightarrow Q \\ & \vdots \\ & P \\ & \vdots \\ \triangleright & Q \end{array}$$

Regra da introdução da equivalência (↔ Intro)

Esta regra requer duas subdeduções, de Q a partir de P e de P a partir de Q.

Se Q for dedutível de P, e P for dedutível de Q então pode-se deduzir $P \leftrightarrow Q$.

O esquema da regra ($\leftrightarrow$ Intro) é:

$$\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\
 & \\
 & \begin{array}{|l} Q \\ \hline \vdots \\ P \end{array} \\
 & \\
\rhd & P \leftrightarrow Q
\end{array}$$

Exemplo 8.8. Neste exemplo, de aplicação da introdução da equivalência, vamos deduzir, no sistema $\mathcal{F}$ a *lei da dupla negação* $P \leftrightarrow \neg\neg P$.

1. P	
2. $\neg P$	
3. $\bot$	$\bot$ Intro: 1, 2
4. $\neg\neg P$	$\neg$ Intro: 2-3
5. $\neg\neg P$	
6. P	$\neg$ Elim: 5
7. $P \leftrightarrow \neg\neg P$	$\leftrightarrow$ Intro: 1-4, 5-6

Numa dedução envolvendo a equivalência material ($\leftrightarrow$) é essencial começar pelo esboço da dedução, em que se indicam logo as duas subdeduções a construir.

8.3. Deduções formais com igualdade

No capítulo 2 vimso quais os princípiso que regem as deduções informais com o símbolo de igualdade (=). Vamos agora enriquecer o sistema $\mathcal{F}$ com duas regras que nos permitem fazer deduções formais com igualdade.

Regra da introdução da igualdade (= Intro). Em qualquer passo de uma dedução pode ser inserida a sentença $n = n$, onde n denota um termo na linguagem considerada. Tem-se o seguinte esquema para a regra = Intro:

$$\rhd \mid n = n$$

Na justificação do passo de dedução, escreve-se o nome da regra.

Esta regra formaliza o princípio de identidade da igualdade (=).

Regra da eliminação da igualdade (= Elim). Deduzidas uma sentença $P(n)$, contendo um termo n, e a sentença $n = t$, pode-se deduzir qualquer sentença que resulte de $P(n)$ substituindo todas ou algumas das ocorrências de n por t e obtendo-se $P(t)$.

$$\begin{array}{r|l} & P(n) \\ & \vdots \\ & n = t \\ & \vdots \\ \triangleright & P(t) \end{array}$$

Na justificação do passo de dedução, escreve-se o nome da regra, seguido dos números de linha dos passos em que $P(n)$ e $n = t$ ocorrem, pela ordem em que ocorrem.

Esta regra formaliza o princípio de substituição.

Os princípios de simetria e de transitividade da igualdade são dedutíveis, formalmente, a partir das regras que acabámos de enunciar.

EXEMPLO 8.9. Dedução de $b = a$ a partir da premissa $a = b$ (princípio de simetria da igualdade):

$$\begin{array}{|lll} 1. & a = b & \\ \hline 2. & a = a & = \text{Intro} \\ 3. & b = a & = \text{Elim: } 2{,}1 \end{array}$$

No passo 2 tem-se $a = a$ por aplicação da regra **= Intro**

No passo 1 tem-se $a = b$ como premissa da dedução.

Substituindo a primeira ocorrência de a no passo 2 por b, por aplicação da regra **= Elim**, obtém-se a conclusão.

EXEMPLO 8.10. Dedução de $b = c$ a partir das premissas $a = b$ e $b = c$ (princípio de transitividade da igualdade):

$$\begin{array}{|lll} 1. & a = b & \\ 2. & b = c & \\ \hline 3. & a = c & = \text{Elim: } 1{,}2 \end{array}$$

Nos passos 1 e 2 tem-se $a = b$ e $b = c$ como premissas da dedução.

Substituindo a ocorrência de b no passo 1 por c, por aplicação da regra **= Elim**, obtém-se a conclusão.

EXEMPLO 8.11. Dedução formal de $\mathit{Cube}(b)$ a partir das premissas $\mathit{Cube}(c)$ ($\mathit{Cube}(c)$ lê-se c é um cubo) e $c = b$.

$$\begin{array}{|lll} 1. & \mathit{Cube}(c) & \\ 2. & c = b & \\ \hline 3. & \mathit{Cube}(b) & = \text{Elim:} 1{,}2 \end{array}$$

EXEMPLO 8.12. Dedução de $\mathit{Sameshape}(b, a)$, com premissas $\mathit{Sameshape}(a, a)$ e $b = a$.

1.	$Sameshape(a, a)$	
2.	$b = a$	
3.	$b = b$	= Intro
4.	$a = b$	= Elim: 3,2
5.	$Sameshape(b, a)$	= Elim: 1,4

Parte 2

Cálculo de Predicados: Quantificadores

CAPÍTULO 9

Introdução aos quantificadores

A expressividade de lógica de primeira ordem advém sobretudo do uso dos quantificadores, que nos permitem expressar, por meio de sentenças de primeira ordem, frases tais como:

Todo o homem é mortal.
Há políticos honestos.

9.1. Variáveis e fórmulas atómicas

As **variáveis** têm, do ponto de vista sintáctico, *i.e.*, na forma das expressões em que ocorrem, um papel semelhante ao das constantes, pois usam-se como argumentos dos predicados.

Exemplo 9.1. Tem-se a sentença $\mathit{EmCasa}(\mathit{clara})$ e a fórmula $\mathit{EmCasa}(x)$.

Do ponto de vista semântico,*i.e.*, no significado que lhes é atribuído nas expressões em que ocorrem, as variáveis são marcadores da posição dos nomes

Em lógica de primeira ordem assume-se um número infinito de variáveis disponíveis. Na prática, é usual necessitar apenas de 4 ou 5 variáveis. No mundo dos blocos temos disponíveis as variáveis

$$u, v, w, x, y, z.$$

Designam-se por **fórmulas atómicas** numa linguagem de primeira ordem (relacional) as expressões bem construídas a partir de predicados n-ários e n variáveis ou constantes.

Exemplo 9.2. São fórmulas atómicas na linguagem do mundo dos blocos: $\mathit{Tet}(b)$, $\mathit{Cube}(x)$, $\mathit{LeftOf}(a, x)$, $\mathit{BackOf}(u, w)$.

9.2. Símbolos de Quantificadores: $\forall$, $\exists$

O quantificador universal $\forall$ permite traduzir, para sentenças de primeira ordem, frases do tipo *todos os objectos satisfazem uma dada condição.*

O quantificador existencial $\exists$ permite traduzir, para sentenças de primeira ordem, frases do tipo *existe pelo menos um objecto que satisfaz uma dada condição.*

Quantificador Universal $\forall$. A expressão $\forall x$ lê-se *para qualquer objecto* ou *para todo o objecto.*

EXEMPLO 9.3. A frase *Todos estão felizes* traduz-se por

$$\forall x \; Feliz(x)$$

Afirmações mais restritivas (e também mais habituais) em que se usa o quantificador universal são do tipo

Qualquer juiz é ponderado

cuja tradução, numa linguagem de primeira ordem com os predicados unários *Juíz* e *Ponderado* é:

$$\forall x \; (Juíz(x) \to Ponderado(x)).$$

Quantificador Existencial $\exists$. A expressão $\exists x$ lê-se *existe (pelo menos) um (objecto)* ou *para (pelo menos) um (objecto).*

EXEMPLO 9.4. A frase *Está alguém em casa* traduz-se por

$$\exists x \; EmCasa(x)$$

Afirmações mais restritivas em que se usa o quantificador são do tipo

Existe um número primo que é par

cuja tradução, para uma linguagem de primeira ordem com os predicados unários *Primo* e *Par* é:

$$\exists x \; (Primo(x) \land Par(x)).$$

9.3. Fórmulas e sentenças

A expressão $(Primo(x) \land Par(x))$ que usámos acima, foi obtida ligando duas fórmulas atómicas com o conectivo $\land$. Trata-se de uma *fórmula.*

DEFINIÇÃO 9.5. Uma expressão é uma **fórmula** se

(i) é uma fórmula atómica ou
(ii) foi construída a partir de fórmulas atómicas por aplicação repetida um número finito de vezes, de uma das regras seguintes:
   1. Se P é fórmula, então $\neg P$ é fórmula.
   2. Se $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são fórmulas, então $(P_1 \land P_2 \land \ldots \land P_n)$ e $(P_1 \lor P_2 \lor \ldots \lor P_n)$ são fórmulas.
   3. Se P, Q são fórmulas, então $(P \to Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$ são fórmulas.
   4. Se P é fórmula e ν é uma variável então $\forall \nu \; P$ é fórmula e qualquer ocorrência de ν na fórmula $\forall \nu \; P$ se diz sob o alcance de um quantificador.
   5. Se P é fórmula e ν é uma variável então $\exists \nu \; P$ é fórmula e qualquer ocorrência de ν na fórmula $\exists \nu \; P$ se diz sob o alcance de um quantificador.

Exemplo 9.6. A árvore de construção de uma sentença de primeira ordem:

1. $Cube(x)$ $\qquad$ $Small(x)$

2. $Cube(x) \wedge Small(x)$ $\qquad$ $LeftOf(x, y)$

3. $\exists y LeftOf(x, y)$

4. $(Cube(x) \wedge Small(x)) \rightarrow \exists y LeftOf(x, y)$

5. $\forall x\, ((Cube(x) \wedge Small(x)) \rightarrow \exists y LeftOf(x, y))$

Nos passos 1 e 2, todas as ocorrências das variáveis x, y são livres.

Nos passos 3 e 4, x só tem ocorrências livres; y só tem ocorrências mudas.

No passo 5, x e y só têm ocorrências mudas (estão sob o alcance de quantificadores).

Note-se a introdução **obrigatória** de parênteses nos passos 4 e 5 na boa formação das fórmulas.

Definição 9.7. Uma **sentença** é qualquer fórmula em que todas as ocorrências das variáveis são mudas.

Exemplo 9.8. (1) $\exists x\, (Par(x) \wedge Primo(x))$
não tem variáveis livres. É uma sentença.
(2) $\exists x\, Par(x) \wedge Primo(x)$
é uma fórmula em que a 1ª ocorrência de x é *muda*, mas a 2ª ocorrência de x é *livre*.

Note Bem 9.9. É **fundamental** usar parênteses de modo correcto, pois estes indicam, quando presentes, o alcance dos quantificadores.

9.4. Semântica para os quantificadores

Para determinar o valor de verdade de uma sentença construída com recurso a quantificadores, é necessário introduzir o conceito de satisfação de uma fórmula.

Exemplo 9.10. (1) Se num dado mundo dos blocos, a é um cubo, *a satisfaz* a fórmula $Cube(x)$.
(2) Se c é um objecto num dado mundo dos blocos, c satisfaz a fórmula $\neg Cube(x) \vee Large(x)$ se a sentença $\neg Cube(c) \vee Large(c)$ for $\mathtt{V}$.
(3) O número natural 2 satisfaz a fórmula $Par(x) \wedge Primo(x)$ pois é verdade que 2 é par e primo.

Fixe-se um **domínio** ou **universo** — conjunto **não vazio** de objectos no qual se avalia o valor de verdade de uma sentença de primeira ordem. Seja $S(x)$ uma fórmula contendo x como a sua única variável livre e seja b uma objecto do domínio. Denote-se por $S(b)$ a sentença obtida a partir de $S(x)$ substituindo em $S(x)$ *todas as ocorrências livres* de x por b. Diz-se que b **satisfaz** $S(x)$ se a sentença $S(b)$ for verdadeira. Caso contrário, diz-se que b não satisfaz $S(x)$.

Para avaliar se um objecto, sem nome previamente atribuido, satisfaz uma fórmula é por vezes útil recorrer a nomes temporários, tais como $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$.

Semântica para o Quantificador Existencial $\exists$. Fixado um domínio, uma sentença da forma

$$\exists x\ S(x)$$

é verdadeira se existir pelo menos um objecto no domínio que satisfaça a fórmula $S(x)$; é falsa se nenhum dos objectos no domínio satisfizer a fórmula $S(x)$.

Exemplo 9.11. No mundo de Lestrade, $\exists x\ (\mathit{Cube}(x) \wedge \mathit{Large}(x))$ é uma sentença verdadeira. No entanto, a sentença $\exists x\ \mathit{Medium}(x)$ é falsa.

Semântica para o Quantificador Universal $\forall$. Fixado um domínio, uma sentença da forma

$$\forall x\ S(x)$$

é verdadeira se todos os objectos no domínio satisfizerem a fórmula $S(x)$; é falsa se existir pelo menos um objecto no domínio que não satisfaça a fórmula $S(x)$.

Exemplo 9.12. No mundo de Lestrade, $\forall x\ (\mathit{Small}(x) \vee \mathit{Large}(x))$ é uma sentença verdadeira. No entanto, a sentença $\forall x\ (\mathit{Cube}(x) \rightarrow \mathit{Small}(x))$ é falsa.

9.5. Formas aristotélicas

Há quatro tipos de estrutura das asserções cuja identificação se atribui a Aristóteles (~ 384–322 AC), filósofo e pensador grego:

I. Todos os P's são Q's.
II. Alguns P's são Q's.
III. Nenhum P é Q.
IV. Há P's que não são Q's.

Aos quatro tipos de asserções correspondem sentenças de primeira ordem que ocorrem frequentemente, designadas por *formas aristotélicas*:

I. $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ (universal afirmativa).
II. $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ (particular afirmativa).
III. $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ (universal negativa).
IV. $\exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$ (particular negativa).

9.7. Quantificadores e Símbolos Funcionais

Os símbolos funcionais, que usámos anteriormente para construir termos (*nomes complexos*), são de grande utilidade quando usados em combinação com as variáveis e os quantificadores.

Vamos modificar a definição de termo, de modo a incluir o uso de variáveis:

DEFINIÇÃO 9.13. **Termos**

- Todas as variáveis e constantes são **termos**
- Se f é um símbolo funcional de **aridade** n e $t_1, \ldots, t_n$ são n termos, então a expressão seguinte é um termo:

$$f(t_1, \ldots, t_n)$$

- São termos **apenas** as expressões que possam ser obtidas por aplicação dos passos anteriores um número finito de vezes.

Um termo diz-se um **termo fechado** se for um termo sem vairáveis.

NOTE BEM 9.14. Numa linguagem de primeira ordem com símbolos funcionais

- Termos complexos obtêm-se colocando um símbolo funcional n-ário antes de um n-tuplo de n termos.
  Excepção: Certos símbolos funcionais binários escrevem-se entre termos (*notação infixa*), para obter termos mais complexos (*ex*: $(1 + 1)$).
- Termos usam-se como nomes ou marcam o lugar de nomes na formação de fórmulas atómicas.

EXEMPLO 9.15. O termo $pai(pai(x))$ pode-se usar na construção de sentenças do tipo

$$\forall x MaisSimpatico(pai(pai(x)), pai(x))$$

cuja tradução é: *O avô de cada indivíduo é mais simpático que o pai.*

CAPÍTULO 10

A Lógica dos Quantificadores

Neste capítulo caracterizaremos as noções de verdade, consequência e equivalência no contexto das sentenças de primeira ordem, construídas com recurso às variáveis e aos quantificadores. Em particular discutiremos as versões rigorosas de primeira ordem correspondentes aos conceitos informais de verdade lógica, equivalência lógica e consequência lógica.

10.1. Tautologias e quantificadores

Diz-se que uma sentença é uma **validade de primeira ordem** se é sempre verdadeira independentemente da interpretação dos predicados que nela ocorrem. Uma **tautologia** é uma validade de primeira ordem para a qual é possível verificar a sua validade recorrendo ao método das tabelas de verdade.

Exemplo 10.1. (1) Note-se que a sentença

$$\exists x\, Cube(x) \vee \exists x \neg Cube(x)$$

é uma verdade lógica. Mais, podemos afirmar que se trata de uma *validade de primeira ordem*, dado que qualquer domínio considerado tem um objecto, que satisfaz ou não satisfaz a fórmula $Cube(x)$. No entanto não é tautologia. O seu valor de verdade depende de modo essencial do significado do quantificador existencial, e não resulta do significado do conectivo vero-funcional $\vee$.

(2) Por sua vez, a sentença

$$\forall x \forall y (LeftOf(x, y) \vee LeftOf(y, x) \vee SameCol(x, y))$$

é verdade lógica mas não se trata de uma validade de primeira ordem.

Exemplo 10.2. Seja a tautologia

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Substituindo A pela sentença $\exists y R(y)$ e B pela sentença $\forall x P(x)$, a sentença que se obtém

$$(\exists y R(y) \to \forall x P(x)) \to (\neg \forall x P(x) \to \neg \exists y R(y))$$

ainda é claramente uma tautologia.

Note Bem 10.3. (1) Qualquer tautologia é validade de primeira ordem.
(2) Qualquer validade de primeira ordem é verdade lógica.
(3) Há verdades lógicas que não são validades de primeira ordem.
(4) Há validades de primeira ordem que não são tautologias.

10.2. Validade e consequência

Exemplo 10.4. (Argumento válido) Sejam as premissas:

(1) $\forall x(Tet(x) \to Large(x))$
(2) $\neg Large(b)$

e a conclusão $\neg Tet(b)$.

Este argumento é válido em primeira ordem. Eis uma demonstração informal:

Da primeira premissa infere-se $Tet(b) \to Large(b)$ (*instanciação universal*);

como $\neg Large(b)$, infere-se $\neg Tet(b)$ (*Modus Tollens*).

No entanto a conclusão não é consequência *tautológica* das premissas.

Há argumentos logicamente válidos que não são válidos em primeira ordem. Tal pode acontecer se, para justificar o argumento, é necessário usar o significado usual dos predicados envolvidos.

Exemplo 10.5. Sejam as premissas:

(1) $\neg\exists x(Larger(x, a)$
(2) $\neg\exists y(Larger(b, y)$
(3) $Larger(c, d)$

e a conclusão $Larger(a, b)$.

Este argumento é logicamente válido. Eis uma demonstração informal:

De (1) e (2) resulta que a está entre os objectos maiores e b está entre os objectos mais pequenos. Como há objectos de tamanhos distintos (nomeadamente c, d) conclui-se que $Larger(a, b)$. (Recorde-se que nos mundos dos blocos há exactamente três tamanhos). No entanto, a conclusão não é consequência de primeira ordem das premissas.

Para demonstrar que um dado argumento não é válido, há que exibir um contra-exemplo.

Exemplo 10.6. (Argumento falacioso) Sejam as premissas:

(1) $\forall y(Cube(y) \vee Dodec(y))$
(2) $\forall x(Cube(x) \to Large(x))$
(3) $\exists x \neg Large(x)$

e a conclusão $\exists x(Dodec(x) \wedge Small(x)$

A conclusão não é consequência lógica das premissas. Basta considerar, como contr-exemplo, um mundo de blocos com um cubo grande e um dodecaedro médio.Claramente todas as premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa.

Podemos afirmar que uma sentença é **consequência de primeira ordem** das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se for verdadeira sempre que as premisas forem simultaneamente verdadeiras, tendo em conta **apenas** o significado dos quantificadores e conectivos booleanos, independentemente da interpretação particular dada aos predicados e símbolos funcionais.

Note Bem 10.7. Sejam S e $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sentenças de primeira ordem.

(1) Se S é consequência tautológica de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ então S é consequência de primeira ordem de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

(2) Se S é consequência de primeira ordem de $P_1, P_2, \dots, P_n$ então S é consequência lógica de $P_1, P_2, \dots, P_n$.
(3) Há argumentos logicamente válidos que não são válidos em primeira ordem.
(4) Há argumentos válidos em primeira ordem que não tautologicamente válidos.

10.3. Negação e equivalências de primeira ordem

Duas fórmulas de primeira ordem são **equivalentes** se em cada domínio são satisfeitas exactamente pelos mesmos objectos.

Tem-se:
Princípio de substituição de equivalentes. Sejam P, Q fórmulas (possivelmente com variáveis livres) e seja $\phi(P)$ uma fórmula de que P é subfórmula. Seja $\phi(Q)$ uma fórmula que se obtém de $\phi(P)$ por substituição de algumas ocorrências de P por Q. Se P e Q são equivalentes ($P \Leftrightarrow Q$) então $S(P)$ e $S(Q)$ são equivalentes.

Exemplo 10.8. Recorde-se, do cálculo proposicional, que

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B.$$

Assim, tem-se que

$$\mathit{Cube}(x) \to \mathit{Small}(x) \Leftrightarrow \neg \mathit{Cube}(x) \vee \mathit{Small}(x).$$

Usando o princípio enunciado acima, tem-se

$$\forall x(\mathit{Cube}(x) \to \mathit{Small}(x)) \Leftrightarrow \forall x(\neg \mathit{Cube}(x) \vee \mathit{Small}(x)).$$

Leis de De Morgan.

Proposição 10.9. *Têm-se se as seguintes equivalências de primeira ordem:*

(1) $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
(2) $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

Exemplo 10.10. (1) A sentença

$$\neg \exists x(\mathit{Cube}(x) \wedge \mathit{Small}(x))$$

(*não existem cubos pequenos*) é equivalente à forma aristotélica

$$\forall x(\mathit{Cube}(x) \to \neg \mathit{Small}(x))$$

(*nenhum cubo é pequeno*):

$$\begin{aligned} \neg \exists x(\mathit{Cube}(x) \wedge \mathit{Small}(x)) &\Leftrightarrow \forall x \neg(\mathit{Cube}(x) \wedge \mathit{Small}(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\neg \mathit{Cube}(x) \vee \neg \mathit{Small}(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall x(\mathit{Cube}(x) \to \neg \mathit{Small}(x)) \end{aligned}$$

(2) A sentença

$$\neg \forall x(\mathit{Tet}(x) \to \mathit{Medium}(x))$$

(*nem todos os tetraedros são médios*) é equivalente à forma aristotélica

$$\exists x(\mathit{Tet}(x) \wedge \neg \mathit{Medium}(x))$$

(*há tetraedros que não são médios*):

$$\begin{aligned}\neg\forall x(Tet(x) \to Medium(x)) &\Leftrightarrow \exists x\neg(Tet(x) \to Medium(x))\\ &\Leftrightarrow \exists x(Tet(x) \wedge \neg Medium(x))\end{aligned}$$

Substituição de variáveis mudas.

EXEMPLO 10.11. (1) A frase *Todos os cubos são pequenos* pode ser traduzida para a sentença

$$\forall x(Cube(x) \to Small(x))$$

mas pode ser igualmente traduzida para

$$\forall y(Cube(y) \to Small(y)).$$

(2) Analogamente, a frase *Há tetraedros médios* pode se traduzida por

$$\exists x(Tet(x) \wedge Medium(x))$$

ou

$$\exists w(Tet(w) \wedge Medium(w)).$$

Para ambas as sentenças, o respectivo valor de verdade (num domíno previamente fixado) não depende do nome da variável muda.

PROPOSIÇÃO 10.12. *(Princípio de substituição de variável muda) Se $P(x)$ é uma fórmula e y é uma variável que não ocorre em $P(x)$, tem-se:*

(1) $\forall x P(x) \Leftrightarrow \forall y P(y)$
(2) $\exists x P(x) \Leftrightarrow \exists y P(y)$

sendo $P(y)$ a fórmula que resulta de substituir, por y, todas as ocorrências livres de x em $P(x)$.

10.4. Mais equivalências de primeira ordem

Quantificadores e conectivos booleanos. Note-se que:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall Q(x).$$

No entanto,

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall Q(x),$$

como o seguinte contra-exemplo ilustra:

EXEMPLO 10.13. No mundo de Boole, a sentença

$$\forall x(Tet(x) \vee Dodec(x))$$

é verdadeira (*todos os objectos são tetraedros ou dodecaedros*). Por outro lado, a sentença

$$\forall x\, Tet(x) \vee \forall\, Dodec(x)$$

é falsa, pois não é o caso que todos os objectos sejam tetraedros, nem é o caso que todos os objectos sejam dodecaedros.

Relativamente ao quantificador existencial, tem-se:

$$\exists x(P(x) \lor Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \lor \exists x Q(x).$$

No entanto,

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \not\Leftarrow \exists x P(x) \land \exists x Q(x),$$

como o seguinte contra-exemplo ilustra:

Exemplo 10.14. No mundo de Boole, a sentença

$$\exists x\, Tet(x) \land \exists x Dodec(x)$$

é verdadeira (*há tetraedros e (há) dodecaedros*). Por outro lado, a sentença

$$\exists x(Tet(x) \land Dodec(x))$$

é falsa, pois não há nenhum objecto que seja simultaneamente tetraedro e dodecaedro.

Quantificação vazia.

Exemplo 10.15. São equivalentes os pares de sentenças / fórmulas:
(1) $Cube(a)$ e $\forall x\, Cube(a)$.
(2) $Cube(b)$ e $\exists w\, Cube(b)$.
(3) $Large(x) \to Cube(x)$ e $\forall w(Large(x) \to Cube(x))$.
(4) $Cube(x) \land Large(x)$ e $\exists w(Cube(x) \land Large(x))$

O significado da segunda sentença/fórmula de cada par não depende da variável sob o alcance do quantificador.

Trata-se de quantificação vazia, sem efeito no significado das sentenças e fórmulas em que ocorre. Tem-se

Proposição 10.16. *Se a variável x* **não ocorre livre na fórmula** *P, então*
(1) $P \Leftrightarrow \forall x P$
(2) $P \Leftrightarrow \exists x P$
(3) $\forall x(P \lor Q(x)) \Leftrightarrow P \lor \forall x Q(x)$
(4) $\exists x(P \land Q(x)) \Leftrightarrow P \land Q(x)$.

Estas equivalências de primeira ordem são essenciais na secção que se segue.

10.5. Forma Normal Prenexa

Diz-se que uma fórmula de primeira ordem está na **Forma Normal Prenexa (FNP)** se
(1) não contém quantificadores (*é livre de quantificadores*) ou
(2) é da forma

$$Q_1 v_1 Q_2 v_2 \dots Q_n v_n P$$

em que
cada Q_i é $\forall$ ou $\exists$,
cada v_i é uma variável (x, y, z, u, v, w)
e
P é uma fórmula livre de quantificadores.

A Forma Normal Prenexa dá uma medida de complexidade da fórmula (*i.e.*, o número de alternâncias entre $\forall$ e $\exists$); apresenta alguma semelhança formal com a Forma Normal Conjuntiva (do cálculo proposicional); usa-se na demonstração automática de teoremas (*autmated theorem proving*).

Note Bem 10.17. Qualquer fórmula de primeira ordem é equivalente a uma fórmula na forma normal prenexa.

Exemplo 10.18. Formas normais prenexas

(1) $\neg\exists x(\mathit{Cube}(x) \wedge \mathit{Small}(x)) \Leftrightarrow \forall x(\mathit{Cube}(x) \rightarrow \neg\mathit{Small}(x))$ (FNP).
(2) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ (FNP).
(3) Se x não ocorre livre em P, $P \vee \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P \vee Q(x))$ (FNP).
(4)

$$\begin{aligned}
&\forall x(\mathit{Cube}(x) \wedge \exists y \mathit{LeftOf}(x,y)) \rightarrow \exists y \mathit{BackOf}(y,x))\\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall x(\mathit{Cube}(x) \wedge \exists y \mathit{LeftOf}(x,y)) \rightarrow \exists z \mathit{BackOf}(z,x))\\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall x(\neg(\mathit{Cube}(x) \wedge \exists y \mathit{LeftOf}(x,y)) \vee \exists z \mathit{BackOf}(z,x))\\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall x(\neg\mathit{Cube}(x) \vee \neg\exists y \mathit{LeftOf}(x,y) \vee \exists z \mathit{BackOf}(z,x))\\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall x(\neg\mathit{Cube}(x) \vee \forall y \neg\mathit{LeftOf}(x,y) \vee \exists z \mathit{BackOf}(z,x))\\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall x \forall y(\neg\mathit{Cube}(x) \vee \neg\mathit{LeftOf}(x,y) \vee \exists z \mathit{BackOf}(z,x))\\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall x \forall y(\exists z \neg\mathit{Cube}(x) \vee \exists z \neg\mathit{LeftOf}(x,y) \vee \exists z \mathit{BackOf}(z,x))\\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall x \forall y \exists z(\neg\mathit{Cube}(x) \vee \neg\mathit{LeftOf}(x,y) \vee \mathit{BackOf}(z,x))\text{(FNP)}.
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 12

Métodos de Dedução para o Cálculo de Predicados

12.1. Passos válidos de inferência

1. Suponhamos que nos é dado, como premissa, $\forall x\ S(x)$ e que t designa um termo fechado (*i.e.*, termo sem variáveis). Claramente, é válido deduzir $S(t)$.

Este passo válido de inferência designa-se por *instanciação universal.* A sua versão formal no sistema $\mathcal{F}$ é a *regra de eliminação do quantificador universal.*

EXEMPLO. A inferência seguinte é válida.

Premissas:	$\forall z\ (Small(z) \leftrightarrow Cube(z))$
	$Cube(c)$
Conclusão:	$Small(c)$

De facto, supondo as premissas, tem-se, por instanciação universal,
$Small(c) \leftrightarrow Cube(c)$.
Por eliminação da equivalência, resulta que $Small(c)$.

2. Se se deduziu $S(t)$, sendo t um termo fechado, então pode-se deduzir $\exists x\ S(x)$.

Este passo válido de inferência designa-se por *generalização existencial.* A sua versão formal no sistema $\mathcal{F}$ é a *regra de introdução do quantificador existencial.*

EXEMPLO. A inferência seguinte é válida.

Premissas:	$Cube(a) \wedge Cube(b)$
	$Small(a) \wedge Large(b)$
Conclusão:	$\exists x\ (Cube(x) \wedge Small(x))$
	$\wedge \exists x\ (Cube(x) \wedge Large(x))$

De facto, supondo as premissas, obtém-se, por aplicação dos passos válidos de inferência relativos à conjunção, $Cube(a) \wedge Small(a)$.
Por generalização existencial, obtém-se $\exists x\ (Cube(x) \wedge Small(x))$.
Analogamente, obtém-se $Cube(b) \wedge Large(b)$ e também por generalização existencial, $\exists x\ (Cube(x) \wedge Large(x))$.
Donde se tem

$$\exists x\ (Cube(x) \wedge Small(x)) \wedge \exists x\ (Cube(x) \wedge Large(x)).$$

Na demonstração de resultados matemáticos, o método favorito para verificar se uma dada sentença existencial é verdadeira, num domínio fixado, consiste em obter uma instância específica que satisfaça a propriedade requerida e depois aplicar a generalização existencial.

EXEMPLO 12.1. Para provar que existem triplos pitagóricos (i.e., números naturais x, y, z tais que $x^2+y^2 = z^2$), começamos por observar que $3^2+4^2 = 5^2$ (ou $9^2 + 12^2 = 15^2$) e depois podemos afirmar que $\exists x \exists y \exists z\ x^2 + y^2 = z^2$.

NOTE BEM 12.2.

(1) *Instanciação Universal*: De $\forall x\ S(x)$ deduz-se $S(t)$, desde que t seja um termo *fechado* (*i.e.*, termo sem variáveis).
(2) *Generalização Existencial*: De $S(t)$ deduz-se $\exists x S(x)$, desde que t seja um termo fechado.

EXEMPLO 12.3. (Uso de ambos os passos válidos de inferência) Sejam as premissas:

(1) $\forall x\ (\mathit{Cube}(x) \to \mathit{Large}(x))$
(2) $\forall x\ (\mathit{Large}(x) \to \mathit{LeftOf}(x, c))$
(3) $\mathit{Cube}(d)$

e a conclusão: $\exists x\ (\mathit{Large}(x) \wedge \mathit{LeftOf}(x, c))$.

Esta inferência é válida. De facto, se d é um cubo e todo o cubo é grande e, além disso, todo o objecto grande está à esquerda de c então necessariamente existe um objecto grande que está à esquerda de c, nomeadamente d.

Justifiquemos agora, em pormenor, o raciocínio que apresentámos:

DEMONSTRAÇÃO. Por instanciação universal das premissas 1 e 2, obtém-se

$$\mathit{Cube}(d) \to \mathit{Large}(d)$$

e

$$\mathit{Large}(d) \to \mathit{LeftOf}(d, c).$$

Como $\mathit{Cube}(d)$, tem-se, por aplicação sucessiva de *Modus Ponens*, $\mathit{Large}(d)$ e $\mathit{LeftOf}(d, c)$.
Portanto, por introdução da conjunção, tem-se

$$\mathit{Cube}(d) \wedge \mathit{LeftOf}(d, c).$$

Finalmente, por generalização existencial, tem-se

$$\exists x\ (\mathit{Cube}(x) \wedge \mathit{LeftOf}(x, c)).$$

□

OBSERVAÇÃO 12.4. Outro método usado frequentemente em matemática para verificar a veracidade de uma sentença existencial recorre à redução ao absurdo: para se provar $\exists x\ S(x)$ supõe-se $\neg\exists x\ S(x)$ e, se se deduzir uma contradição, pode-se então concluir $\neg\neg\exists x\ S(x)$, que é logicamente equivalente a $\exists x\ S(x)$.

Foi este método que usámos para demonstrar que existem números irracionais b, c tais que b^c é racional.

12.2. Método de instanciação existencial

EXEMPLO 12.5. Domínio: todas as crianças.

Com a premissa Há um menino que está em casa, não é possível concluir que o Daniel está em casa (ou que o João está em casa).

No entanto, é possível atribuir um nome temporário a um dos meninos que está em casa, com o cuidado de não usar um nome já atribuído nas premissas ou na conclusão.

Esta estratégia permite que, quando se deduziu correctamente $\exists x\ S(x)$ e se atribui o nome c a um dos objectos que satisfaz $S(x)$ (desde que este nome não ocorra em alguma das sentenças da dedução, incluindo a conclusão) estão pode-se deduzir $S(c)$.

Este método designa-se por *instanciação existencial*. A sua versão formal no sistema $\mathcal{F}$ é a *regra de eliminação do quantificador existencial*.

Quando se usa este método no contexto de uma demonstração matemática faz-se uma introdução explícita do novo nome. Por exemplo, "mostrámos que existe um número primo entre n e m; seja p nestas condições..."

EXEMPLO 12.6. (modificação do exemplo anterior)

Considere-se a inferência com premissas:

(1) $\forall x\ (Cube(x) \to Large(x))$
(2) $\forall x\ (Large(x) \to LeftOf(x,c))$
(3) $\exists x\, Cube(x)$

e conclusão: $\exists x\ (Large(x) \land LeftOf(x,c))$.

Trata-se de uma inferência válida. Vejamos porquê.

DEMONSTRAÇÃO. A premissa 3 garante a existência de um cubo. Seja e um tal cubo (instanciação existencial). Por um raciocínio análogo ao que se fez no exemplo anterior (Exemplo 12.3) podemos agora deduzir a conclusão:

$$\exists x\ (Large(x) \land LeftOf(x,c)).$$

$\square$

12.3. Método de dedução condicional geral

Um dos métodos fundamentais de demonstração consiste em raciocinar àcerca de um objecto arbitrário de determinado tipo para depois concluir uma asserção universal sobre todos os objectos do mesmo tipo.

EXEMPLO 12.7. Domínio: alunos da FCUL.

Dadas certas premissas a respeito destes alunos, suponhamos que é possível concluir que a Sandra, uma aluna de Engenharia Informática, é inteligente. Se a demonstração de que a Sandra é inteligente não usar absolutamente nada que seja característica particular da Sandra; se a demonstração encontrada se aplicar adequadamente a qualquer outro aluno de Engenharia Informática, então podemos concluir que Qualquer aluno de Engenharia Informática é inteligente.

Mais geralmente, se queremos deduzir $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$ a partir de premissas dadas, a forma mais directa de o fazer consiste em tomar um nome não previamente usado, por exemplo, c, supor $P(c)$ e deduzir $Q(c)$. Se tal for possível, então pode-se inferir

$$\forall x\ (P(x) \to Q(x)).$$

PROPOSIÇÃO 12.8. *A raiz quadrada de qualquer número primo é irracional.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja p um número primo.
Uma propriedade importante dos números primos é a seguinte: se p divide rs então p divide r ou p divide s.

Daqui resulta que, como p é primo, se p divide k^2, para algum k, então p divide k. Portanto, se p divide k^2 então p^2 divide k^2.

Com vista a um absurdo, suponhamos que $\sqrt{p}$ é racional.

Tome-se n, m tais que $\sqrt{p} = \frac{n}{m}$ (e $\frac{n}{m}$ fracção reduzida).

Então $p = \frac{n^2}{m^2}$ e portanto p divide n^2. Logo p^2 divide n^2 $(= pm^2)$. Daqui resulta que p divide m^2. Mas então, p divide m.

Assim, p divide n, m, o contradiz a hipótese de $\frac{n}{m}$ ser fracção reduzida. Portanto, $\sqrt{p}$ é irracional.

□

Em sistemas de dedução formal o *método de dedução condicional geral* é, por vezes, separado em duas partes: a dedução condicional e um método que permite deduzir sentenças de carácter geral, da forma $\forall x\ S(x)$.

Este método designa-se por *generalização universal*. Por aplicação deste método de dedução, se for possível usar um novo nome, digamos d, para designar um elemento arbitrário do domínio, e depois deduzir $S(d)$, então pode-se deduzir $\forall x\ S(x)$.

EXEMPLO 12.9. Sejam as premissas

(1) $\forall x\ (R(x) \to S(x))$
(2) $\forall x\ R(x)$

e a conclusão $\forall x\ S(x)$.
Esta inferência é válida.

DEMONSTRAÇÃO. Tome-se um nome, digamos d, que representa um elemento arbitrário do domínio. Por instanciação universal das premissas (1) e (2), obtém-se.

$$R(d) \to S(d)$$

e

$$R(d).$$

Por *Modus Ponens* obtém-se $S(d)$. Como d denota um elemento arbitrário do domínio considerado, conclui-se, por generalização universal, $\forall x\ S(x)$.

□

NOTE BEM 12.10. Sejam as fórmulas $S(x)$, $P(x)$, $Q(x)$.

(1) *Instanciação existencial*: Se se deduziu $\exists x\ S(x)$ então pode-se escolher um símbolo novo de constante, c, para designar um objecto que satisfaça $S(x)$, e deduzir $S(c)$.
(2) *Método de dedução condicional geral*: Para deduzir $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$, pode-se escolher um símbolo novo de constante, digamos d, supor $P(d)$ e deduzir $Q(d)$.
(3) *Generalização universal*: Escolhendo-se um símbolo novo de constante, digamos d, e tendo deduzido $S(d)$, pode-se deduzir $\forall x\ S(x)$.

12.4. Deduções com vários quantificadores

Quando se usam os passos e os métodos de inferência que acabámos de estudar em sentenças que envolvem vários quantificadores, há algumas precauções a ter, para não se incorrer em erros, quando se faz a introdução de constantes novas.

Vamos começar por considerar um exemplo que ilustra o tipo de problemas que podemos encontrar.

EXEMPLO 12.11. Sejam as sentenças
(1) $\forall x\ [Menino(x) \to \exists y(Menina(y) \wedge Gosta(x,y))]$
(2) $\exists y\ [Menina(y) \wedge \forall x(Menino(x) \to Gosta(x,y))]$

Suponhamos que o domínio em que estamos a considerar estas sentenças é o das crianças do Jardim de Infância frequentados pelo Marco e pela Clara.

A primeira sentença afirma que cada menino gosta de alguma menina. A segunda sentença afirma que há uma menina de quem todos os meninos gostam.

É claro que a primeira sentença é consequência lógica da segunda. Vamos demonstrar rigorosamente que assim é.

DEMONSTRAÇÃO. Premissa: $\exists y[Menina(y) \wedge \forall x(Menino(x) \to Gosta(x,y))]$
Conclusão: $\forall x[Menino(x) \to \exists y(Menina(y) \wedge Gosta(x,y))]$.

Seja c o nome da menina de quem todos os meninos gostam. Para deduzir a conclusão, vamos usar o método de dedução condicional geral. Seja d o nome de um menino qualquer do Jardim de Infância. Como qualquer menino gosta de c, temos que $Gosta(d,c)$.

Portanto, d gosta de alguma menina; por generalização existencial temos $\exists y\ (Menina(y) \wedge Gosta(d,y))$. Como d foi tomado arbitrariamente, tem-se a conclusão:
$\forall x\ [Menino(x) \to \exists y(Menina(y) \wedge Gosta(x,y))]$. □

Esta demonstração correcta é aparentemente semelhante à *demonstração incorrecta* que se segue de que (2) $\exists y\ [Menina(y) \wedge \forall x(Menino(x) \to Gosta(x,y))]$ é consequência lógica de (1) $\forall x\ [Menino(x) \to \exists y(Menina(y) \wedge Gosta(x,y)]$.

PSEUDO-DEMONSTRAÇÃO.
Premissa: $\forall x\ [Menino(x) \to \exists y(Menina(y) \wedge Gosta(x,y))]$
"Conclusão": $\exists y\ [Menina(y) \wedge \forall x(Menino(x) \to Gosta(x,y))]$.

Suponhamos que todo o menino gosta de alguma menina. Seja e um menino qualquer do Jardim de Infância. Então e gosta de alguma menina. Seja f o nome de uma menina de quem e gosta (i.e., $Gosta(e,f)$).

Como o menino foi escolhido arbitrariamente, concluímos que *qualquer menino gosta de* f, i.e., $\forall x(Menino(x) \to Gosta(x, f))$, por dedução condicional geral. Depois, por generalização existencial, obtemos que existe uma menina de quem qualquer menino gosta!

Este raciocínio é falacioso.

O erro ocorre na "conclusão" intermédia de que qualquer menino gosta de f. Não esqueçamos que f foi o nome atribuído à menina de quem e gosta. A escolha da menina depende, de modo essencial, do menino de quem estamos a falar.

De facto, para deduzirmos uma sentença universal baseando-nos no raciocínio a respeito de um certo indivíduo (ou objecto) é **imperativo** que não usemos nenhum facto específico a respeito daquele indivíduo (ou objecto).

Ora, voltando ao nosso exemplo, o nome f atribuído à menina de quem e gosta não nos permite generalizar universalmente.

Note-se que não podemos concluir $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$ a partir de $P(c)$ se na fórmula $Q(c)$ ocorre alguma referência a uma entidade (indivíduo, objecto, etc) cuja escolha depende de c.

Na aplicação do método de dedução condicional geral, há que exigir que $Q(c)$ não contenha nenhum nome que tenha sido introduzido por instanciação existencial após a premissa $P(c)$ ser considerada na dedução.

Impõe-se uma restrição semelhante no uso da generalização universal. Na aplicação deste método faz-se a introdução de uma constante nova, digamos c, que representa um elemento arbitrário do domínio considerado. Se deduzirmos $S(c)$, então podemos deduzir $\forall x\ S(x)$. No entanto, a sentença $S(c)$ não pode conter nenhuma constante que tenha sido introduzida por instanciação existencial após a introdução de c.

NOTE BEM 12.12. Sejam as fórmulas $S(x)$, $P(x)$, $Q(x)$.

(1) *Instanciação existencial*: Se se deduziu $\exists x\ S(x)$ então pode-se escolher um símbolo novo de constante, c, para designar um objecto que satisfaça $S(x)$, e deduzir $S(c)$.
(2) *Método de dedução condicional geral*: Para deduzir $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$, pode-se escolher um símbolo novo de constante, digamos c, supor $P(d)$ e deduzir $Q(d)$, *no pressuposto de que* $Q(d)$ *não contém nomes introduzidos por instanciação existencial após a introdução da premissa temporária* $P(d)$.
(3) *Generalização universal*: Escolhendo-se um símbolo novo de constante, digamos d, e tendo deduzido $S(d)$, pode-se deduzir $\forall x\ S(x)$ *no pressuposto de que* $S(d)$ *não contém nomes introduzidos por instanciação existencial após a introdução da constante* d.

Vamos ilustrar o uso correcto destes métodos com a demonstração do famoso Teorema de Euclides.

Teorema 12.13. *(Euclides) Há um número infinito de números primos.*

Esta afirmação não tem tradução directa para LPO. Mas pode ser substituída pela afirmação *Para qualquer número natural existe sempre um número primo maior ou igual a ele*, que tem a seguinte tradução para LPO:

$$\forall x \; \exists y \; [(x = y \vee x < y) \wedge Primo(y)]$$

Demonstração. Seja n um número natural arbitrário. Seja k o produto de todos os números primos menores que n. k é necessariamente divisível por cada um dos números primos menores do que n.

Seja agora $m = k + 1$. Para cada primo p menor do que n, o resto na divisão de m por p é 1 (pois $k = tp$ para algum t e portanto $m = k+1 = tp+1$).

Por outro lado, é conhecido que $m = k + 1$ se pode factorizar num produto de números primos. Seja q um dos números primos que ocorrem na factorização de m. q é diferente do todos os primos menores que n (pois estes não são divisores de m). Portanto $n < q$.

Por generalização existencial sabemos que

$$\exists y \; [(n = y \vee x < y) \wedge Primo(y)].$$

Portanto, por generalização universal sabemos que

$$\forall x \; \exists y \; [(x = y \vee x < y) \wedge Primo(y)].$$

□

CAPÍTULO 13

Deduções formais com quantificadores

Vamos apresentar as regras, no sistema $\mathcal{F}$, que correspondem aos métodos de dedução envolvendo os quantificadores universal ($\forall$) e existencial ($\exists$).

13.1. Regras para o quantificador universal

Regra da eliminação do quantificador universal ($\forall$ Elim)

Esta regra constitui a formalização da instanciação universal.

Sejam x uma variável arbitrária, c uma constante individual, $S(x)$ uma fórmula e $S(t)$ o resultado de substituir *todas* as ocorrências livres de x, em $S(x)$, pelo termo fechado t.

Se se deduziu $\forall x\ S(x)$, pode-se deduzir $S(t)$.

O esquema da regra ($\forall$ Elim) é:

$$\begin{array}{r|l} & \forall x S(x) \\ & \vdots \\ \triangleright & S(t) \end{array}$$

Regra da da dedução condicional geral ($\forall$ Intro)

Esta regra constitui a formalização do método de dedução condicional geral.

Comecemos por fixar uma representação para o uso de um símbolo de constante, digamos c, que denotará um objecto arbitrário que satisfaz uma dada condição, $P(c)$. Usamos uma subdedução com premissa $P(c)$, enfatizando que a referida constante ocorre apenas na subdedução. Garantimos assim que aquela constante não ocorre nas premissas da dedução principal.

Do ponto de vista gráfico, usamos o símbolo $[c]$ precedendo a premissa $P(c)$—esta será a formalização da frase *seja c um objecto arbitrário para o qual se tem $P(c)$*.

Se se deduziu $P(c)$, para um objecto arbitrário c, então pode-se deduzir $\forall x P(x)$.

O esquema da regra ($\forall$ Intro) é:

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} [c]\, P(c) \\ \hline \vdots \\ Q(c) \end{array} \\
 & \\
\triangleright & \forall x\ (P(x) \to Q(x))
\end{array}
$$

em que c não ocorre fora da subdedução.

Como variante da regra ($\forall$ Intro) permitimos também uma subdedução sem premissas, que corresponde ao método de generalização universal.

O esquema da regra de generalização universal ($\forall$ Intro) é:

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} [c] \\ \hline \vdots \\ S(c) \end{array} \\
 & \\
\triangleright & \forall x S(x)
\end{array}
$$

em que c não ocorre fora da subdedução.

Na justificação desta regra, cita-se a subdedução, usando a expressão $\forall$ Intro: $r - n$, em que r é o número da primeira linha da subdedução e n é o número da última linha da subdedução.

Não é absolutamente necessário ter ambas as versões desta regra. No entanto, a primeira versão é a mais intuitiva, enquanto a segunda é a mais usada em textos clássicos de Lógica.

Exemplo 13.1. Premissas: 1. $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$
2. $\forall z\ (Q(z) \to R(z))$
Conclusão: $\forall x\ (P(x) \to R(x))$

$$
\begin{array}{|ll}
1.\ \forall x\ (P(x) \to Q(x)) & \\
2.\ \forall z\ (Q(z) \to R(z)) & \\
\hline
\begin{array}{|ll}
3.\ [d]\, P(d) & \\
\hline
4.\ P(d) \to Q(d) & \forall \text{ Elim: } 1 \\
5.\ Q(d) & \to \text{ Elim: } 4, 3 \\
6.\ Q(d) \to R(d) & \forall \text{ Elim: } 2 \\
7.\ R(d) & \to \text{ Elim: } 6, 5
\end{array} & \\
8.\ \forall x (P(x) \to R(x)) & \forall \text{ Intro: } 3 - 7
\end{array}
$$

Note-se que a constante d só ocorre dentro da subdedução, o que permite o uso correcto da introdução do quantificador universal no passo 8.

Na justificação do uso de ($\forall$ Intro) identifica-se a subdedução com início em $P(d)$ e fim em $R(d)$.

13.2. Regras para o quantificador existencial

Regra da introdução do quantificador existencial (∃ Intro)

Esta regra formaliza a generalização existencial.

Sejam x uma variável arbitrária, t um termo fechado, $S(x)$ uma fórmula e $S(t)$ o resultado de substituir *todas* as ocorrências livres de x, em $S(x)$, por t.

Se se deduziu $S(t)$ pode-se deduzir $\exists x S(x)$.

O esquema da regra (∃ Intro) é:

$$\begin{array}{r|l} & S(t) \\ & \vdots \\ \rhd & \exists x S(x) \end{array}$$

Regra da eliminação do quantificador existencial (∃ Elim)

Esta regra formaliza o método de instanciação existencial.

Se se deduziu $\exists x S(x)$, toma-se um novo símbolo de constante, c, e considera-se a premissa temporária $S(c)$ (o que corresponde a supor que c satisfaz $S(x)$). Se desta premissa se deduz Q na qual c não ocorre, então pode-se deduzir Q a partir das premissas iniciais.

O esquema da regra (∃ Elim) é:

$$\begin{array}{r|l} & \exists x S(x) \\ & \vdots \\ & \begin{array}{|l} [c]\, S(c) \\ \hline \vdots \\ Q \end{array} \\ \rhd & Q \end{array}$$

em que c não ocorre fora da subdedução.

A notação $\begin{array}{|l} [\mathrm{c}]\ \mathrm{S(c)} \\ \hline \\ \end{array}$ é a formalização da frase *Seja c um objecto para o qual se supõe* $S(c)$.

Note-se que esta regra é formalmente semelhante à regra de eliminação da disjunção. Nesta, faz-se uma subdedução para cada caso possível, obtendo-se o mesmo resultado em cada caso. Na regra (∃ Elim), é necessário obter Q independentemente da cada objecto particular que satisfaça $S(x)$.

EXEMPLO 13.2. Premissas:
1. $\forall x\ (\mathit{Cube}(x) \to \mathit{Large}(x))$
2. $\forall x\ (\mathit{Large}(x) \to \mathit{LeftOf}(x, c))$
3. $\exists x\ \mathit{Cube}(x)$

Conclusão: $\exists x\ (\mathit{Large}(x) \wedge \mathit{LeftOf}(x, c))$

1. $\forall x\ (Cube(x) \to Large(x))$	
2. $\forall x\ (Large(x) \to LeftOf(x,c))$	
3. $\exists x\ Cube(x)$	
4. $[e]\ Cube(e)$	
5. $Cube(e) \to Large(e)$	$\forall$ Elim: 1
6. $Large(e)$	$\to$ Elim: 5, 4
7. $Large(e) \to LeftOf(e,c)$	$\forall$ Elim: 2
8. $LeftOf(e,c)$	$\to$ Elim: 7, 6
9. $Large(e) \wedge LeftOf(e,c)$	$\wedge$ Intro: 6, 8
10. $\exists x\ (Large(x) \wedge LeftOf(x,c))$	$\exists$ Intro: 9
11. $\exists x\ (Large(x) \wedge LeftOf(x,c))$	$\exists$ Elim: 3, 4-10

13.3. Estratégia e táctica

Ao tentar construir uma dedução formal, devemos, antes de mais, compreender o significado das sentenças consideradas, quer sejam as premissas, quer a conclusão.

Como primeiro passo estratégico deve-se tentar obter uma dedução informal, para depois tentar chegar a uma dedução formal. Em particular, é tarefa essencial identificar as regras formais usadas implicitamente no raciocínio informal.

Vamos trabalhar um exemplo em pormenor.

Exemplo 13.3. Dedução formal da inferência

Premissas:	1. $\exists x\ (T(x) \wedge S(x))$
	2. $\forall x\ (S(x) \to L(x,b))$
Conclusão:	$\exists x\ L(x,b)$

Comecemos por notar que se trata de uma inferência válida.

Da premissa 1 resulta que há um objecto, digamos a, para o qual $T(a) \wedge S(a)$.

Fazendo a instanciação universal da premissa 2, obtemos que

$$S(a) \to L(a,b).$$

Como $S(a)$, por *Modus Ponens* resulta $L(a,b)$ e portanto, por generalização existencial, temos $\exists x\ L(x,b)$.

Nesta dedução informal usámos implicitamente as regras ($\exists$ Elim), ($\forall$ Elim) e ($\exists$ Intro), para além de algumas regras do Cálculo Proposicional.

O esqueleto da dedução formal é:

1. $\exists x\ (T(x) \wedge S(x))$	
2. $\forall x\ (S(x) \to L(x,b))$	
3. $[a]\, T(a) \wedge S(a)$	
4. $S(a)$	$\wedge$ Elim: 3
$\vdots$	
$\exists x L(x,b)$	??
$\exists x L(x,b)$	$\exists$ Elim:1, 3-?

Identificamos o uso de ($\exists$ Elim) quando há referência a um objecto que satisfaça uma fórmula sob o alcance de um quantificador existencial.

De seguida vamos usar instanciação universal ($\forall$ Elim):

1. $\exists x\ (T(x) \wedge S(x))$	
2. $\forall x\ (S(x) \to L(x,b))$	
3. $[a]\, T(a) \wedge S(a)$	
4. $S(a)$	$\wedge$ Elim: 3
5. $S(a) \to L(a,b)$	$\forall$ Elim: 2
6. $L(a,b)$	$\to$ Elim: 5, 4
7. $\exists x L(x,b)$	$\exists$ Intro: 6
$\exists x L(x,b)$	$\exists$ Elim:1, 3-7

Outra estratégia usada consiste em trabalhar de trás para a frente,*i.e.*, começar a partir da conclusão e completar as conclusões intermédias ou subdeduções que nos permitam obter a conclusão.

Esta estratégia aplica-se sobretudo ao método de dedução condicional geral ($\forall$ Intro). Se a conclusão tiver a forma

$$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$$

de modo geral deve-se iniciar uma subdedução em que se introduz uma constante nova, digamos d, com premissa $P(d)$ para tentar concluir $Q(d)$.

Vamos considerar mais um exemplo em pormenor.

Exemplo 13.4. Queremos obter a dedução formal da seguinte inferência válida.

Premissa: $\neg\forall x\ P(x)$
Conclusão: $\exists x\ \neg P(x)$

O esqueleto da dedução é:

1. $\neg\forall x P(x)$	(premissa)
$\vdots$	
$\exists x \neg P(x)$	(conclusão)

Dado que a conclusão é uma sentença existencial, seria natural tentar deduzir $\neg P(c)$, para algum c, e depois fazer a *introdução do quantificador existencial*:

$$
\begin{array}{|ll}
1.\ \neg\forall x P(x) & \\
\hline
\vdots & \\
\neg P(c) & \\
\exists x\ \neg P(x) & \exists\ \text{Intro: ?}
\end{array}
$$

No entanto, dada a natureza da premissa, não há grande esperança de encontrar um objecto c para o qual $\neg P(c)$. Vamos então tentar uma dedução por *redução ao absurdo*:

$$
\begin{array}{|l}
1.\ \neg\forall x P(x) \\
\begin{array}{|ll}
2.\ \neg\exists x \neg P(x) & \\
\hline
\vdots & \\
\bot & \bot\ \text{Intro: ?}
\end{array} \\
\neg\neg\exists x\ \neg P(x) \qquad\qquad \neg\ \text{Intro: 2-?} \\
\exists x\ \neg P(x) \qquad\qquad \neg\ \text{Elim: ?}
\end{array}
$$

Que tipo de contradição podemos obter?

Dado que a premissa é $\neg\forall x P(x)$, vamos tentar provar $\forall x P(x)$, usando *generalização universal*:

$$
\begin{array}{|l}
1.\ \neg\forall x P(x) \\
\hline
\begin{array}{|l}
2.\ \neg\exists x \neg P(x) \\
\hline
\begin{array}{|l}
3.\ [c] \\
\hline
\vdots \\
P(c)
\end{array} \\
\forall x\ P(x) \qquad\qquad \forall\ \text{Intro: 3- ?} \\
\bot \qquad\qquad \bot\ \text{Intro: ?, 1}
\end{array} \\
\neg\neg\exists x\ \neg P(x) \qquad\qquad \neg\ \text{Intro: 2-?} \\
\exists x\ \neg P(x) \qquad\qquad \neg\ \text{Elim: ?}
\end{array}
$$

Resta deduzir $P(c)$.

Informalmente, se $\neg P(c)$, então teríamos $\exists x \neg P(x)$, o que contradiz o passo 2, donde se conclui $\neg\neg P(c)$ e portanto $P(c)$.

Finalmente a dedução formal completa:

1. $\neg\forall x P(x)$	
2. $\neg\exists x \neg P(x)$	
3. $[c]$	
4. $\neg P(c)$	
5. $\exists x\ \neg P(x)$	$\exists$ Intro: 4
6.$\perp$	$\perp$ Intro: 5, 2
7. $\neg\neg P(c)$	$\neg$ Intro: 4-6
8. $P(c)$	$\neg$ Elim : 7
9. $\forall x\ P(x)$	$\forall$ Intro: 3-8
10. $\perp$	$\perp$ Intro: 9, 1
11. $\neg\neg\exists x\ \neg P(x)$	$\neg$ Intro: 2-10
12. $\exists x\ \neg P(x)$	$\neg$ Elim: 11

CAPÍTULO 17

Tópicos avançados do Cálculo Proposicional

17.3. Sentenças de Horn

Recorde-se que uma sentença na FNC (forma normal conjuntiva) é uma conjunção de uma ou mais sentenças, cada uma delas uma disjunção de um ou mais literais.

Um literal diz-se **positivo** se é uma sentença atómica; **negativo** se é a negação de uma sentença atómica.

DEFINIÇÃO 17.1. Uma sentença diz-se **sentença de Horn** se estiver na FNC e em cada disjunção de literais houver no máximo um literal positivo.

No exemplo que se segue todas as sentenças estão na FNC mas nenhuma delas é uma sentença de Horn.

EXEMPLO 17.2. (1) $\neg EmCasa(clara) \wedge (EmCasa(marco) \vee Feliz(carlos))$.
Na segunda sentença componente da conjunção há dois literais positivos.
(2) $(EmCasa(clara) \vee EmCasa(marco) \vee \neg Feliz(clara)) \wedge \neg Feliz(carlos)$.
Na primeira sentença componente da conjunção há dois literais positivos.
(3) $EmCasa(clara) \vee EmCasa(marco) \vee \neg EmCasa(carlos)$.
Uma disjunção em que há dois literais positivos.

Por outro lado, todas as sentenças do exemplo que se segue são sentenças de Horn.

EXEMPLO 17.3. (1) $\neg EmCasa(clara) \wedge (\neg EmCasa(marco) \vee Feliz(carlos))$.
Na segunda sentença componente da conjunção há exactamente um literal positivo.
(2) $EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco) \wedge \neg EmCasa(carlos)$.
Uma conjunção de três literais, os primeiros positivos e o terceiro negativo.
(3) $EmCasa(clara) \vee \neg EmCasa(marco) \vee \neg EmCasa(carlos)$.
Uma disjunção em que há apenas um literal positivo.
(4) $EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco) \wedge (\neg EmCasa(marco) \vee \neg EmCasa(marco))$.
Na terceira componente da conjunção, há uma disjunção sem literais positivos.

As sentenças de Horn são equivalentes a sentenças em que cada *disjunção de literais* é substituída por uma *implicação* de tipo especial.

Seja a sentença de Horn:

$$\neg EmCasa(clara) \vee \neg EmCasa(marco) \vee Feliz(carlos).$$

Esta sentença é tautologicamente equivalente à implicação

$$(EmCasa(clara) \wedge EmCasa(marco)) \rightarrow Feliz(carlos).$$

Por outro lado, supondo A, B, C, D sentenças atómicas, tem-se

(1) $(A \rightarrow B) \wedge ((B \wedge C) \rightarrow D) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee D)$
(2) $((B \wedge C \wedge D) \rightarrow A) \wedge \neg A \Leftrightarrow (\neg B \vee \neg C \vee \neg D \vee A) \wedge \neg A$

Em ambos os casos, a sentença do lado direito da equivalência lógica é uma sentença de Horn, enquanto a sentença de que se partiu é uma conjunção de implicações.

Uma sentença de Horn *típica* consiste numa conjunção de sentenças, cada uma das quais é uma disjunção de vários literais negativos e um literal positivo, digamos

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B$$

Esta sentença pode ser reescrita na forma equivalente

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B.$$

No entanto, há duas excepções a esta forma *típica*.

- Disjunções de vários literais negativos e nenhum literal positivo.
- Disjunções de um literal positivo e nenhum literal negativo.

Para reescrever estas sentenças como implicações, introduzem-se dois símbolos $\top$ e $\bot$, que se tratam como sentenças atómicas. A primeira, $\top$, é sempre verdadeira, enquanto a segunda, $\bot$, é sempre falsa (já usámos este símbolo anteriormente, para representar contradição...)

Assim, uma disjunção com vários literais negativos e nenhum literal positivo

$$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n$$

é tautologicamente equivalente a

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow \bot\ .$$

Por sua vez, uma disjunção com um literal positivo e sem literais negativos

$$B$$

é tautologicamente equivalente a $\top \rightarrow B$.

Proposição 17.4. *Qualquer sentença de Horn é tautologicamente equivalente a uma conjunção de implicações de um dos tipos seguintes:*

1. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$
2. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow \bot$
3. $\top \rightarrow B$

em que $A_1, A_2, \ldots, A_n$, B *são sentenças atómicas.*

Definição 17.5. Uma **sentença de Horn na forma condicional** é uma sentença, tautologicamente equivalente a uma sentença de Horn, que resulta de substituir cada disjunção de literais por uma implicação (com $\top$ e $\bot$, se necessário) de um dos tipos descritos na Proposição anterior.

Recorde-se (do cap. 4) que uma sentença é tt-**satisfazível** se houver pelo menos uma linha da tabela de verdade em que a sentença seja verdadeira.

A tarefa de calcular se uma sentença é tt-satisfazível através do método das tabelas de verdade é puramente automática, pelo que é programável. No entanto, o método das tabelas de verdade é, em geral, dispendioso em termos de recursos, com crescimento exponencial em função do número de sentenças atómicas intervenientes.

Contudo, para as sentenças de Horn há um método muito eficiente, que nos permite considerar **apenas uma** linha da tabela de verdade—é o **algoritmo de tt-satisfação para sentenças de Horn**. A ideia fundamental deste método consiste em construir uma linha da tabela de verdade, usando as sentenças em conjunção de modo a determinar quais das sentenças atómicas têm que ser verdadeiras para que a sentença de Horn seja verdadeira.

Algoritmo de tt-satisfação para sentenças de Horn

Seja S uma sentença de Horn na forma condicional, construída a partir de sentenças atómicas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $\top$ e $\bot$. Suponhamos que S é $I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_m$, onde cada I_k, $k \leq m$, é uma implicação de um dos tipos descritos na Proposição 17.4.

Passo 1. Se alguma das implicações I_k é do tipo $\top \rightarrow A_i$, atribui-se o valor V a A_i. Repete-se para todas as implicações deste tipo.

Passo 2. Se alguma das implicações I_k é do tipo $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots B_t) \rightarrow A$ e se se atribuiu o valor V a todas as sentenças B_j, $j \leq t$ por aplicação do passo anterior, então atribui-se também o valor V a A.

Passo 3 *e seguintes.* Repita-se sucessivamente o passo 2 para todas as implicações I_k nas condições enunciadas.

Último Passo. Há duas possibilidades:

(1) Há uma implicação do tipo $(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots B_t) \rightarrow \bot$ que é necessariamente falsa, pois já se atribuiu o valor V a todas as sentenças $B_1, B_2, \ldots, B_t$. Neste caso, S é falsa. Resulta daqui que S não é tt-satisfazível.

(2) Caso contrário, atribua-se às restantes sentenças atómicas (cujo valor de verdade não foi fixado nos passos anteriores) o valor F. Esta atribuição de valores de verdade torna S verdadeira. Portanto S é tt-satisfazível.

Note bem. Se, ao iniciar o algoritmo, nenhuma das implicações I_k é do tipo $\top \rightarrow A_i$, este pára de imediato; atribuindo-se o valor F a todas as sentenças atómicas $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a sentença S é *verdadeira.* Consequentemente S é tt-satisfazível.

Exemplo 17.6. Sejam A, B, C sentenças atómicas e seja S a sentença de Horn $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge B$.

A sua forma condicional é $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (\top \rightarrow B)$.

Para que S seja tt-satisfazível, B tem que ter valor V.

Considerando agora $B \rightarrow C$, como B tem valor V, vem que C também tem que ter valor V.

Esgotámos todos os casos contemplados no passo 2 do algoritmo.

Como não há nenhuma sentença da forma $(D_1 \land D_2 \land \ldots \land D_n) \to\perp$— com as sentenças D_i com valor V—concluimos a aplicação do algoritmo atribuindo à sentença atómica A o valor F e concluindo que a sentença S é tt-satisfazível.

A	B	C	$(A \to B)$	$\land$	$(B \to C)$	$\land$	$(\top \to B)$
F	V	V	V	V	V	V	V

Note que a aparente ambiguidade de leitura desta tabela de verdade, resultante da omissão de parênteses que indiquem a ordem em que se calcula o valor de verdade das conjunções, é removida pelo uso da convenção de associar à esquerda sentenças combinadas com um conectivo ($\land$ ou $\lor$) repetido.

Sentenças de Horn e Prolog. A linguagem de programação *PROLOG* é baseada em sentenças de Horn. *PROLOG* usa uma notação diferente da que temos utilizado até aqui. Uma sentença *típica*

$$(A_1 \land A_2 \land \ldots A_n) \to B$$

escreve-se $B : -A_1, A_2, \ldots, A_n$ e lê-se B *se* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Considere-se o seguinte *programa* de PROLOG:

(S_1) $\mathit{AncestorOf}(a, b) : -\mathit{MotherOf}(a, b)$
(S_2) $\mathit{AncestorOf}(b, c) : -\mathit{MotherOf}(b, c)$
(S_3) $\mathit{AncestorOf}(a, b) : -\mathit{FatherOf}(a, b)$
(S_4) $\mathit{AncestorOf}(b, c) : -\mathit{FatherOf}(b, c)$
(S_5) $\mathit{AncestorOf}(a, c) : -\mathit{AncestorOf}(a, b), \mathit{AncestorOf}(b, c)$
(S_6) $\mathit{MotherOf}(a, b) : -\mathit{True}$
(S_7) $\mathit{FatherOf}(b, c) : -\mathit{True}$
(S_8) $\mathit{FatherOf}(b, d) : -\mathit{True}$

As primeiras cinco sentenças declaram factos gerais sobre os predicados binários *MotherOf*, *FatherOf*, *AncestorOf*. As últimas três sentenças declaram factos particulares sobre os indivíduosa, b, c, d.

Vamos usar o algoritmo de tt-satisfação para sentenças de Horn na forma condicional para determinar se este conjunto de sentenças é tt-satisfazível.

Por aplicação do *passo* 1 do algoritmo, as sentenças $\mathit{MotherOf}(a, b)$, $\mathit{FatherOf}(b, c)$, $\mathit{FatherOf}(b, d)$ são *verdadeiras*.

Por aplicação dos *passos* 2 e 3 , as sentenças $\mathit{AncestorOf}(a, b)$, $\mathit{AncestorOf}(b, c)$ são *verdadeiras*. Portanto $\mathit{AncestorOf}(a, c)$ é *verdadeira*.

Não há mais instâncias de aplicação do *passo* 3.

Não há sentenças do tipo $\mathit{False} : -A_1, A_2, \ldots, A_n$, portanto as sentenças consideradas constituem um conjunto de sentenças tt-satisfazível (atribuindo a $\mathit{MotherOf}(b, c)$ o valor *falso*).

Este *programa* de PROLOG pode ser considerado como parte de uma base de dados. Deste ponto de vista, para responder à questão Será que B é consequência lógica das sentenças na base de dados? acrescenta-se ao programa a sentença (S) $\perp: -B$ e faz-se correr o algoritmo de tt-satisfação para sentenças de Horn sobre o conjunto alargado de sentenças.

Se da aplicação do algoritmo resulta que $S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_8 \wedge S$ é *tt*-satisfazível, então o PROLOG responde NÃO à questão posta. De facto, neste caso, $S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_8 \wedge \neg B$ é *verdadeira* em pelo menos uma linha da tabela de verdade e portanto $S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_8$ são *verdadeiras* e B é *falsa*.

Se da aplicação do algoritmo resulta que $S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_8 \wedge S$ não é *tt*-satisfazível, então o PROLOG responde SIM à questão posta. De facto, em todas as linhas da tabela de verdade em que $S_1 \wedge S_2 \wedge \ldots \wedge S_8$ são *verdadeiras*, B também é *verdadeira* e portanto é consequência tautológica das sentenças da base de dados.

17.4. Resolução

Apresentamos agora o **Método de Resolução**, um método aplicável a quaisquer sentenças na Forma Normal Conjuntiva (FNC), que permite decidir se uma sentença é *tt*-satisfazível.O método de resolução, menos eficiente do que o algoritmo de *tt*-satisfação para as sentenças de Horn, é, no entanto, mais eficiente do que o método das tabelas de verdade. Tem diversas aplicações em ciência da computação.

A noção central do método de resolução é a de *conjunto de cláusulas*. Uma **cláusula** (de resolução) é um conjunto finito de literais.

EXEMPLO 17.7.

$$C_1 = \{\neg Small(a), Cube(a), BackOf(b, a)\}$$

e

$$C_2 = \{Small(a), Cube(b)\}$$

são cláusulas.

A cláusula *vazia* denota-se por $\{\ \}$ (ou $\square$).

Uma cláusula $C = \{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ diz-se *tt*-**satisfazível** se há uma atribuição de valores de verdade às sentenças atómicas que ocorrem nos literais $L_1, L_2, \ldots, L_n$ de modo que a disjunção $L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$ tome o valor `V`.

EXEMPLO 17.8. (1) A cláusula vazia $\{\ \}$ não é *tt*-satisfazível.
(2) Pelo contrário, a cláusula $C_1 = \{\neg Small(a), Cube(a), BackOf(b, a)\}$ é *tt*-satisfazível.

Um conjunto não vazio de cláusulas, $\mathcal{S}$, diz-se *tt*-**satisfazível** se a sentença que resulta da conjunção das disjunções dos literais de cada cláusula em $\mathcal{S}$ for *tt*-satisfazível.

A ideia básica do método de resolução consiste em construir, a partir do conjunto $\mathcal{S}$ de cláusulas, um novo conjunto de cláusulas, $\mathcal{S}'$, que contenha $\mathcal{S}$ mas que seja satisfazível para as mesmas atribuições de valores de verdade.

Método de Resolução.

1. Seja uma sentença na FNC

$$S = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n.$$

Associe-se a S um conjunto de cláusulas $\mathcal{S}$ de modo natural:

(i) A cada disjunção de literais $D_i = L_{i_1} \lor L_{i_2} \lor \dots L_{i_k}$ associa-se a cláusula $C_i = \{L_{i_1}, L_{i_2}, \dots L_{i_k}\}$.

(ii) Obtém-se o conjunto de cláusulas

$$\mathcal{S} := \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

que é *tt*-satisfazível se e só se a sentença S for *tt*-satifazível.

2. Ao conjunto de cláusulas $\mathcal{S}$ adicionam-se, sucessivamente, novas cláusulas, que são cláusulas **resolventes** das anteriores.

Quando se obtiver a cláusula vazia, $\{\ \}$, sabe-se que $\mathcal{S}$ não é *tt*-satisfazível.

Regra de resolução proposicional.
Seja P uma sentença atómica e sejam

$$C_1 = \{P, L_1, \dots, L_n\}$$

e

$$C_2 = \{\neg P, L_1{}', \dots, L_m{}'\}$$

cláusulas de resolução.

A **resolvente** de C_1, C_2 é a nova cláusula $C = \{L_1, \dots, L_n, L_1{}', \dots, L_m{}'\}$, constituída pelos literais de C_1 e C_2 excepto o par complementar $P, \neg P$.

Em esquema:

$$\frac{\{P, L_1, \dots, L_n\} \qquad \{\neg P, L_1{}', \dots, L_m{}'\}}{\{L_1, \dots, L_n, L_1{}', \dots, L_m{}'\}}$$

Exemplo 17.9. Sejam as cláusulas

$$C_1 = \{\neg \mathit{Small}(a), \mathit{Cube}(a), \mathit{BackOf}(b, a)\}$$

e

$$C_2 = \{\mathit{Small}(a), \mathit{Cube}(b)\}.$$

Uma atribuição de valores de verdade que seja satisfeita por $\{C_1, C_2\}$ tem que atribuir o valor `V` a pelo menos uma das sentenças $\mathit{Cube}(a)$, $\mathit{BackOf}(b, a)$, $\mathit{Cube}(b)$. A resolvente de $\{C_1, C_2\}$ é a cláusula $C_3 = \{\mathit{Cube}(a), \mathit{BackOf}(b, a), \mathit{Cube}(b)\}$.

Os conjuntos $\mathcal{S} = \{C_1, C_2\}$ e $\mathcal{S}' = \{C_1, C_2, C_3\}$ são satisfazíveis pelas mesmas atribuições de valores de verdade.

Exemplo 17.10. Sejam as cláusulas
$C_1 = \{\mathit{EmCasa}(\mathit{marco}), \mathit{EmCasa}(\mathit{clara})\}$
$C_2 = \{\neg \mathit{EmCasa}(\mathit{clara})\}$
$C_3 = \neg \mathit{EmCasa}(\mathit{marco})\}$

Qualquer atribuição de valores de verdade que seja satisfeita por C_1 e C_2 também é satisfeita por $C_4 = \mathit{EmCasa}(\mathit{marco})$, a resolvente de C_1 e C_2. Por outro lado, a resolvente de C_3 e C_4 é a cláusula vazia, pelo que o conjunto de cláusulas $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ não é *tt*-satisfazível. Portanto, o conjunto inicial de cláusulas também não é *tt*-satisfazível.

A validade do método de resolução tem por base o seguinte:

TEOREMA 17.11. *(Completude e correcção da resolução)*
Um conjunto de cláusulas $\mathcal{S}$ não é tt-satisfazível, se e só se é possível obter a cláusula vazia $\{\ \}$ por aplicações sucessivas da regra de resolução.

EXEMPLO 17.12. (Demonstração por resolução)
Sejam A, B, C, D sentenças atómicas e considere-se a sentença na FNC

$$\neg A \wedge (B \vee C \vee B) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (A \vee D) \wedge (\neg B \vee \neg D).$$

As cláusulas de resolução associadas a esta sentença são:
$\{\neg A\}, \{B, C\}, \{\neg C, \neg D\}, \{A, D\}, \{\neg B, \neg D\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{B,C\}\quad\{\neg B,\neg D\}}{\{C,\neg D\}}\quad \{\neg C,\neg D\}}{\{\neg D\}} \qquad \dfrac{\{A,D\}\quad\{\neg A\}}{\{D\}}}{\{\ \}}$$

Como se obteve a cláusula vazia por resolução, a sentença considerada não é *tt*-satisfazível.

Aplicações da resolução. Recorde-se:

PROPOSIÇÃO 17.13. (1) *Uma sentença S é consequência tautológica das premissas $P_1, \ldots, P_n$ se e só se o conjunto $\{P_1, \ldots, P_n, \neg S\}$ não é tt-satifazível,* i.e., *se a conjunção $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg S$ não é tt-satifazível.*
(2) *Uma sentença S é tautologia se e só se $\neg S$ não é tt-satisfazível.*

Com base neste resultado, tem-se as seguintes aplicações do método de resolução.

1. Para determinar se uma sentença S é consequência tautológica de $P_1, \ldots, P_n$, aplique-se o método de resolução a uma FNC da sentença $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge \neg S$.

   Se se obtiver $\{\ \}$, conclui-se que S é consequência tautológica de $P_1, \ldots, P_n$.

2. Para determinar se uma sentença S é tautologia, aplique-se o método de resolução a uma FNC de $\neg S$.

   Se se obtiver $\{\ \}$, conclui-se que S é tautologia.

EXEMPLO 17.14. Sejam A e B sentenças atómicas. B é consequência tautológica de $(A \vee (A \to B)) \to B$.
Vamos determinar uma FNC da sentença $((A \vee (A \to B)) \to B) \wedge \neg B$.

$$
\begin{aligned}
((A \vee (A \to B)) \to B) \wedge \neg B &\Leftrightarrow (\neg(A \vee (A \to B)) \vee B) \wedge \neg B \\
&\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg(A \to B)) \vee B) \wedge \neg B \\
&\Leftrightarrow ((\neg A \wedge A \wedge \neg B) \vee B) \wedge \neg B \\
&\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg B \vee B) \wedge \neg B
\end{aligned}
$$

As cláusulas associadas a $((A \vee (A \to B)) \to B) \wedge \neg B$, obtidas a partir da FNC, são:

$\{\neg A, B\}, \{A, B\}, \{\neg B, B\}, \{\neg B\}$ Demonstração por resolução:

$$
\dfrac{\dfrac{\{\neg A, B\} \qquad \{A, B\}}{\{B\}} \qquad \{\neg B\}}{\{\,\}}
$$

Bibliografia

[BarEt99] J. Barwise and J. Etchemendy, *Language Proof and Logic*, Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, 1999.

[BarEt92] J. Barwise and J. Etchemendy, *The Language of First-Order Logic*, Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, 1992.

[Burris] S. Burris, *Logic for Mathematics and Computer Science*, Prentice Hall, NJ, 1998.

[Oliveira] A. Franco de Oliveira, *Lógica e Aritmética*, Gradiva, Lisboa, 1991.

[Ribenboim] P. Ribenboim, *My Numbers, my friends*, Springer-Verlag, New York, NY, 2000.