

Relazione terza esperienza di laboratorio Fisica 2

Gruppo A15: Armani Stefano, Cappellaro Nicola, Pasquato Leonardo

28-11-2022

1 Scopo dell'esperienza

Lo scopo della terza esperienza di laboratorio è stato di studiare, costruire dei circuiti RLC (quindi un circuito che ha al suo interno resistenze conduttori e capacitori) e studiare la loro risposta a diverse frequenze e forma d'onda.

Saranno poi le misurazioni sperimentali ad essere messe a confronto con quelli teorici per valutare e discutere le possibili incongruenze che potrebbero apparire.

Nella prima parte dell'esperienza si sono raccolti dati su due diversi circuiti RLC per permettere di formare due diagrammi di Bode.

Nella seconda parte invece si esaminerà come la forma funzionale della risposta del circuito varia in funzione di L e C (in particolare in relazione alle frequenze naturali del circuito).

2 Cenni teorici

Un diagramma di Bode consiste nella rappresentazione di due grafici mostranti la risposta in frequenza di un sistema LTI, uno per l'ampiezza e l'altro per la fase. Si ricorda la funzione di trasferimento come $H(j\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$, dove:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{H(j\omega) \cdot \overline{H(j\omega)}}$$

$$\phi_{H(j\omega)}(j\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(H(j\omega))}{\text{Re}(H(j\omega))}\right)$$

La funzione di trasferimento risulta inoltre essere la trasformata di Fourier della risposta impulsiva al circuito.

I circuiti studiati durante l'esperienza di laboratorio sono circuiti RLC del secondo ordine, dunque la loro risposta può ricadere in uno dei 3 seguenti casi: caso sottosmorzato, caso sovrasmorzato e caso criticamente smorzato.

3 Strumentazione

- Breadboard con annessi morsetti serrafile;
- Cavi con connettori a banana e connettori da banco (Jumper);
- Resistori di varie misure ($1k\Omega$, $10k\Omega$), capacitori da $1nF$ $10nF$, $100nF$;
- Decade di induttanze
- Generatore di forme d'onda Rigol DG1032;
- Oscilloscopio Rigol MSO2102A.

4 Esperimento

Nella terza esperienza di laboratorio è stato costruito manualmente un semplice circuito LTI di secondo ordine, ossia un circuito composto da generatore di forme d'onda, condensatore, induttore e resistore. Per poter inserire un induttore, è stato utilizzato un dispositivo detto *decade di induttanze*, il quale mette a disposizione 10 induttori variabili in serie.

Il circuito in questione è il seguente:

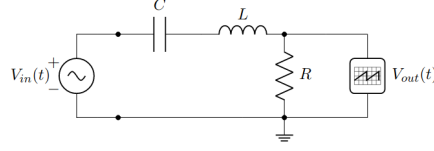


Figure 1: Circuito RC

Nel primo esperimento è stato dato in ingresso a questa rete un segnale sinusoidale con offset nullo e tensione picco-picco $V_{in}^{pp} = 5V$, di cui però è stata variata la frequenza più volte per ottenere diverse misurazioni di ampiezza e sfasamento della tensione d'uscita ai capi del resistore, quindi V_R . Una volta ottenute diverse misurazioni dell'ampiezza e sfasamento in funzione della frequenza angolare, sarà possibile confrontare questi dati sperimentali con l'andamento teorico della funzione di trasferimento. È stata ripetuta questa procedura dopo aver sostituito il resistore corrente con uno avente una resistenza pari a $1k\Omega$.

Durante il secondo esperimento è stato utilizzato lo stesso circuito, di cui sono state utilizzate 3 terne di valori di resistenze, induttanze e capacità. Dopo aver fornito in ingresso un'onda quadra di tensione picco-picco $V_{in}^{pp} = 2.5V$ e offset $V_{in}^{of} = 1.250V$, è stato valutato l'andamento della tensione ai capi del resistore, al fine di comprendere se il caso risultante fosse sovrasmorzato, sottosmorzato oppure criticamente smorzato e se la frequenza angolare libera $\omega_{d_{sp}}$ coincidesse con quella teorica ω_d .

5 Dati sperimentali

Primo esperimento :

a: $R = 10k\Omega$, $L = 500mH$, $C = 10nF$

b: $R = 1k\Omega$, $L = 500mH$, $C = 10nF$

Frequenza [Hz]	Ampiezza [V]	Sfasamento [ms]
1	$\rightarrow 0$	196
10	0.0324	27.8
100	0.312	2.68
1000	3	0.364
2000	4.68	0.017
2500	4.78	0.011
3000	4.5	0.02
5000	3.12	0.068
10000	1.62	0.0192
50000	0.093	0.0058

Frequenza [Hz]	Ampiezza [V]	Sfasamento [ms]
1	imp	imp
10	0.04	27.8
100	0.031	2.68
1000	0.38	0.364
2000	2.24	0.017
2500	2.3	0.011
3000	1.108	0.02
5000	0.396	0.068
10000	0.163	0.0192
50000	0.010	0.0058

Secondo esperimento (valori di tensione dei picchi, tranne nel caso c in cui non sono presenti picchi):

a: $R = 10k\Omega$
 $L = 500mH$
 $C = 1nF$

b: $R = 10k\Omega$
 $L = 500mH$
 $C = 10nF$

c: $R = 10k\Omega$
 $L = 100mH$
 $C = 10nF$

Tensione [V]	Tempo [μs]
0.8	32
0.36	98
0.2	172
0.06	238
0.06	312

Tensione [V]	Tempo [μs]
1.6	78

Tensione [V]	Tempo [μs]
2.160	24
1.88	48
1.24	86
0.8	132

6 Elaborazione dati

Primo esperimento:

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{V}_{out}}{\mathbf{V}_{in}} \quad \text{dove} \quad \mathbf{V}_{out} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_R = \frac{\mathbf{V}_{in}}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L} \cdot \mathbf{Z}_R$$

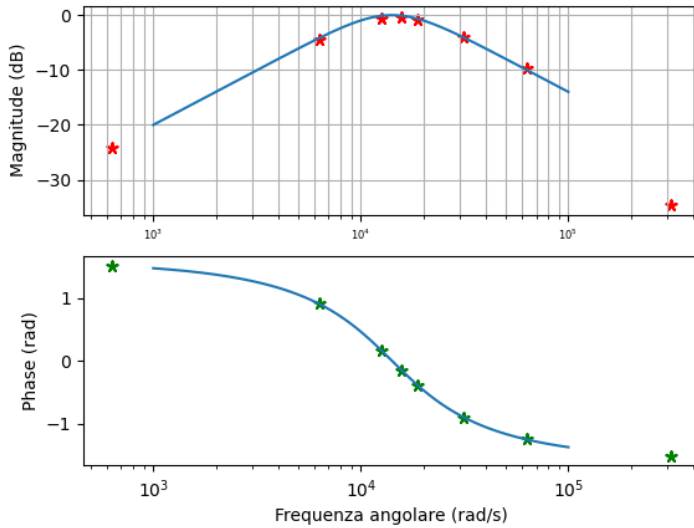
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{Z}_C}{\mathbf{Z}_R} + \frac{\mathbf{Z}_L}{\mathbf{Z}_R}} = \frac{1}{1 + \frac{j}{R} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1 - \frac{j}{R} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})}{1 + \frac{1}{R^2} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})} \quad (1)$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{H(j\omega) \cdot \overline{H(j\omega)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

$$\phi_{H(j\omega)}(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}(H(j\omega))}{\text{Re}(H(j\omega))}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{R} \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})\right)$$

Pongo $Q^2 = \frac{1}{R} \cdot \frac{L}{C}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{1 + Q^2 \cdot (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})} \quad \phi_{H(j\omega)}(j\omega) = \tan^{-1}\left(-Q \cdot (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})\right) \quad (2)$$



Primo caso:

$$Q^2 = \frac{1}{10k\Omega} \cdot \frac{500mH}{10nF} = 5 \cdot 10^{-13}$$

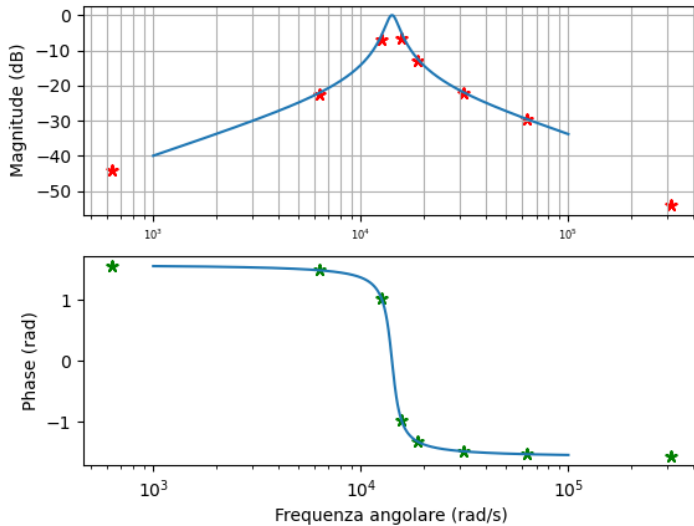
$$\omega_0^2 = \frac{1}{500mH \cdot 10nF} = 2 \cdot 10^8 \frac{rad}{s}$$

Secondo caso:

$$Q^2 = \frac{1}{1k\Omega} \cdot \frac{500mH}{10nF} = 5 \cdot 10^{-12}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{500mH \cdot 10nF} = 2 \cdot 10^8 \frac{rad}{s}$$

Legenda:



- Grafico teorico di Bode;
- Valori sperimentali di ampiezza;
- Valori sperimentali di sfasamento.

Secondo esperimento:

$$KCL: I(t) = I_C(t) = I_L(t) = I_R(t)$$

$$KVL: V_C(t) + V_L(t) + V_R(t) = V_S(t)$$

$$V_C(t) + L \frac{dI_L(t)}{dt} + I_R(t)R = V_S(t)$$

$$\text{dove } I_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$V_C(t) + LC \frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_C(t)}{dt} = V_S(t)$$

$$V_C''(t) + \frac{R}{L} V_C'(t) + \frac{1}{LC} V_C(t) = \frac{V_S(t)}{LC}$$

$$V_C''(t) + 2\alpha V_C'(t) + \omega_0^2 V_C = 0$$

$$\text{dove } \alpha = \frac{R}{2L} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Caso 1:

$$R = 10K\Omega \quad L = 500mH \quad C = 1nF$$

$$\alpha < \omega_0 \quad \text{Caso sottosmorzato}$$

Caso 2:

$$R = 10K\Omega \quad L = 500mH \quad C = 10nF$$

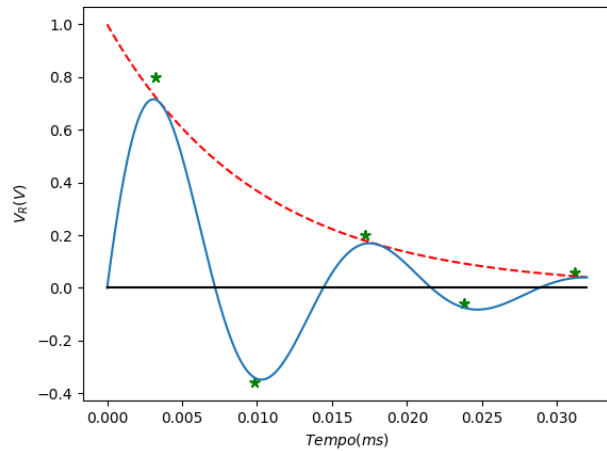
$$\alpha < \omega_0 \quad \text{Caso sottosmorzato}$$

Caso 3:

$$R = 10K\Omega \quad L = 100mH \quad C = 10nF$$

$$\alpha > \omega_0 \quad \text{Caso sovrasmorzato}$$

Primo caso :



- $V_R(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$;
- inviluppo teorico = $e^{-\alpha t}$;
- valori sperimentali di tensione misurati nei picchi.

7 Conclusione

Studiando i dati del primo esperimento si può notare che i dati sperimentali presi in laboratorio si sovrappongono quasi perfettamente al diagramma di Bode teorico. È possibile affermare che il comportamento del circuito è coerente con le aspettative.

Nel secondo esperimento, sono stati studiati sperimentalmente e teoricamente i 3 circuiti: è risultato che i primi due ricadessero in un caso sottosmorzato, mentre il terzo in un caso sovrasmorzato.

Nei 3 casi la frequenza angolare libera ω_d varia a causa delle diverse terne di valori per resistenze, induttanze e capacità: essendo $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, a parità di valore della resistenza (componente dissipativo che "strozza" l'andamento teorico senza perdite di un circuito LC), si hanno frequenze angolari diverse dovute dai diversi valori di L e C, dunque diversi casi.

In particolare nel primo caso, si può confrontare la frequenza angolare libera teorica con quella sperimentale: è possibile ottenere il periodo di oscillazione sottraendo il tempo del secondo picco positivo al tempo del primo picco positivo. $T_{sp} = 172\mu s - 32\mu s = 140\mu s$

Da questo è possibile calcolare la frequenza angolare libera sperimentale che risulta essere pari a:

$$\omega_{d_{sp}} = \frac{2\pi}{T} = 44879.90 rad/s \text{ e la si confronta con la frequenza libera teorica } \omega_d = 43588.99 rad/s$$

Il valore sperimentale risulta essere prossimo a quello teorico, dunque i risultati sperimentali possono essere considerati validi.