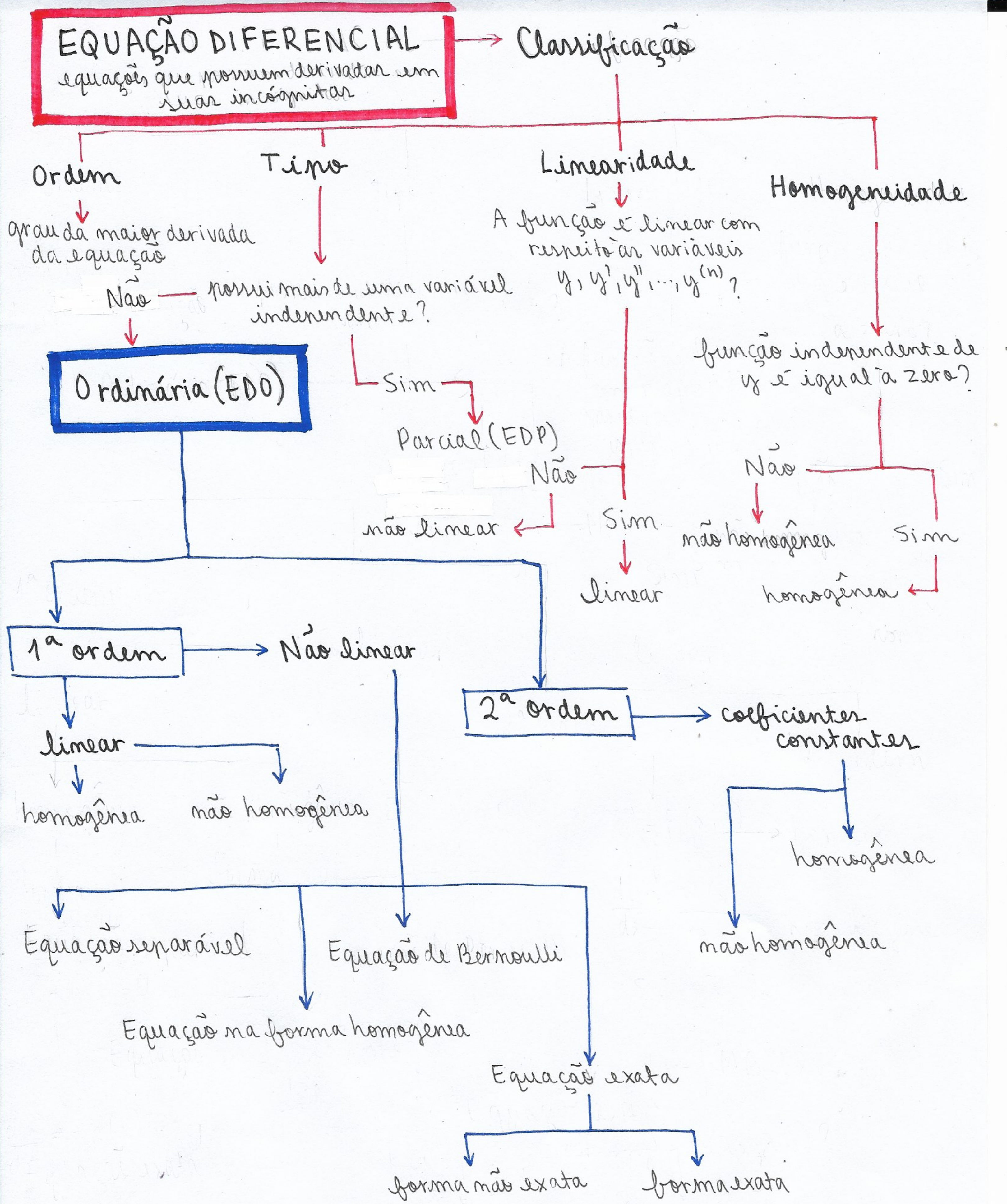

EQUAÇÃO DIFERENCIAL
equações que possuem derivadas em suas incógnitas
Classificação
Ordem
grau da maior derivada da equação
Tipo
possui mais de uma variável independente?
Não
Ordinária (EDO)
Sim
Parcial (EDP)
Linearidade
A função é linear com respeito às variáveis $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$?
Não
não linear
Sim
linear
Homogeneidade
função independente de y é igual à zero?
Não
não homogênea
Sim
homogênea
1ª ordem
Não linear
linear
homogênea
não homogênea
Equação separável
Equação de Bernoulli
Equação na forma homogênea
Equação exata
forma não exata
forma exata
2ª ordem
coeficientes constantes
homogênea
não homogênea

SOLUÇÃO DE UMA EDO DE 1ª ORDEM

Linear

Homogênea

forma padrão

$y' + p(x)y = 0$

Solução

$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -p(x)\,dx$

Não homogênea

forma padrão

$y' + p(x)y = \underbrace{q(x)}_{\neq 0}$

Solução

multiplicar a EDO pelo fator integrante $u(x)$

$u(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

$y = \frac{1}{u(x)} \cdot \int u(x)\cdot q(x)\,dx$

Não linear

Equação Separável

EDO pode ser separada em duas funções $M(x)$ e $N(y)$?

- Não → não é separável
- Sim → $\frac{dy}{dx} = \frac{M(x)}{N(y)}$ → Solução → $\int N(y)\,dy = \int M(x)\,dx$ → escolher uma função para derivar e outra para integrar

Equação na forma homogênea

$y' = F(x,y)$

$F(x,y) = F(\lambda x, \lambda y)$?

- Não → Não é homogênea
- Sim → Solução → $v = \frac{y}{x}$, $y' = v'x + v$ → substituir na EDO original e resolver em "v"

Equação Exata

forma padrão

- $N(x,y)\,y' + M(x,y) = 0$

ou

- $N(x,y)\,dy + M(x,y)\,dx = 0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$?

- Sim → está na forma exata → Solução $= F(x,y)$ → $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$ e $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$
- Não → não está na forma exata →
  - $p(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}$ → $u(x) = e^{\int p(x)\,dx}$
  - $q(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}$ → $u(y) = e^{\int q(y)\,dy}$
  - → multiplicar a EDO pelo fator integrante $u(x)$ ou $u(y)$

Equação de Bernoulli

forma padrão

$y' + p(x)y = g(x)\cdot y^n$ $\begin{cases} n \neq 0 \text{ e} \\ n \neq 1 \end{cases}$

Solução

multiplicar toda a EDO por y^{-n}

$v = y^{1-n}$

$v' = (1-n)\,y^{-n}\cdot y'$

substituir na EDO e resolver em "v"

SOLUÇÃO DE UMA EDO DE 2ª ORDEM

suposta solução

$y(x) = e^{\lambda x}$

Homogênea

$ay'' + by' + cy = 0$

equação característica

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$\Delta > 0$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$\Delta = 0$

método de redução de ordem

$y_1 = e^{\lambda x}$

$y_2 = x e^{\lambda x}$

$\Delta < 0$

$\lambda = \alpha \pm \beta i$

$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

$y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$

$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Geral

$y_H + y_p$

Particular

$ay'' + by' + cy = g(x)$

Método dos Coeficientes Indeterminados

forma

$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

a_m .. são constantes

"chute"

$y_p(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$

b_n são constantes

$g(x) = c e^{\alpha x}$

"chute"

$y_p = h e^{\alpha x}$

h e c são constantes

$g(x) = \operatorname{sen}(dx)$ ou $\cos(dx)$

"chute"

$y_p = f_1 \operatorname{sen}(dx) + f_2 \cos(dx)$

f_1 e f_2 são constantes

derivar, substituir e resolver para encontrar os valores das constantes

Método da Variação dos Parâmetros

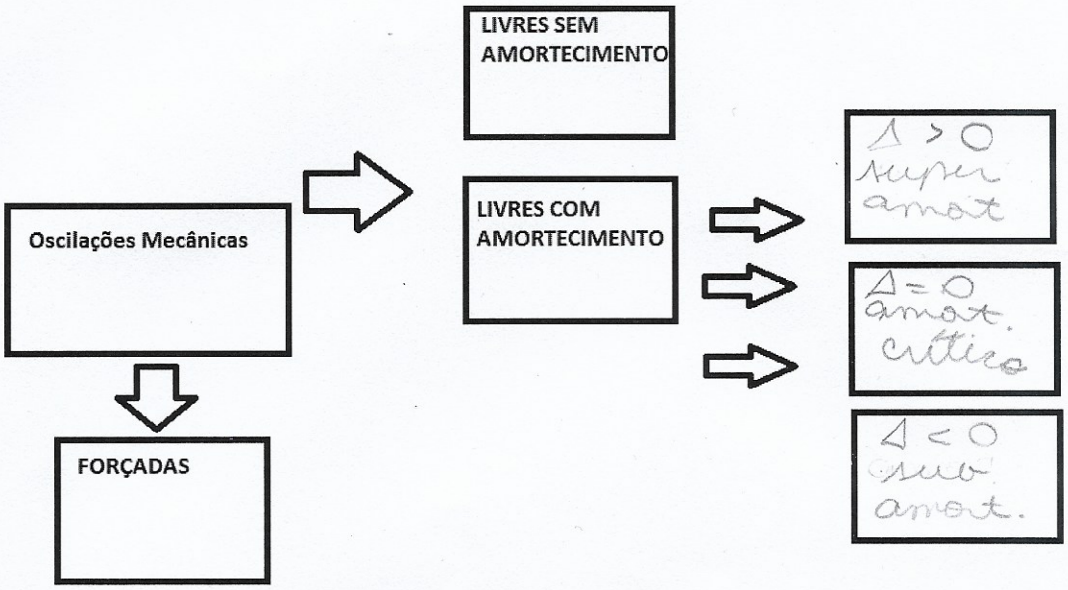
$y_p = u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}$$

resolver a multiplicação de matrizes para encontrar u_1' e u_2'

integrar para encontrar $u_1(x)$ e $u_2(x)$

Atividade 1: Complete :



Atividade 2: Oscilações livres amortecidas. Considere um sistema massa-mola em um meio viscoso. Seja k a constante elástica da mola, seja m a massa do corpo que oscila e seja γ o coeficiente de viscosidade (amortecimento) do meio. A EDO que descreve a amplitude das oscilações da massa é dada por $m\,x'' + \gamma\,x' + k\,x = 0$. Descreva o efeito da viscosidade do meio no movimento da massa. Movimentos oscilatório: subamortecimento, superamortecido e amortecimento crítico.

Atividade 3: Um cursor com 5 kg repousa sobre uma mola, não estando ligado a ela. Observa-se que, se o cursor for empurrado para baixo 0,18m ou mais, perde o contato com a mola depois de libertado. Determine:
(a) a constante de rigidez da mola.
(b) a posição, a velocidade e a aceleração do cursor, 0.16 s após ter sido empurrado para baixo 0,18m e, depois, libertado.
Considere $g=9,81 m/s^2$.

Atividade 3

a) $P = F_{el}$

$5 \cdot 9{,}81 = 0{,}18 \cdot K$

$K = 272{,}5 \ Kg/s^2$ //

b) $m x'' + \cancel{\gamma x'}^{0} + Kx = 0$

$5x'' + 272{,}5x = 0$

$x'' + 54{,}5x = 0$

$\lambda^2 + 54{,}5 = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{-54{,}5}$

$\lambda = \pm 7{,}38 i$

$x_1 = \cos(7{,}38t)$ //

$x_2 = \operatorname{sen}(7{,}38t)$ //

$X_H = C_1 \cos(7{,}38t) + C_2 \operatorname{sen}(7{,}38t)$

$t = 0 \rightarrow x = 0{,}18 m$

$0{,}18 = C_1 \cancel{\cos(0)}^{1} + C_2 \cancel{\operatorname{sen}(0)}^{0}$

$C_1 = 0{,}18$ //

$t = 0 \rightarrow x' = 0$

$x'_H = -C_1 \cancel{\operatorname{sen}(7{,}38t)}^{0} \cdot 7{,}38 + C_2 \cancel{\cos(7{,}38t)}^{1} \cdot 7{,}38$

$0 = 7{,}38 C_2 \rightarrow C_2 = 0$ //

$x_H = 0{,}18 \cos(7{,}38t)$ //

$x(0{,}16) = 0{,}18 \cos(1{,}184)$

$\boxed{X = 0{,}180 m}$ //

$x' = -1{,}328 \operatorname{sen}(7{,}38t)$

$\boxed{x' = -0{,}027 m/s}$ //

$x'' = -9{,}8 \cos(7{,}38t)$

$\boxed{x'' = 9{,}80 m/s^2}$ //