Plano de aula semanal: Semana 5

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180123203	**João Pedro Alves da Silva Chaves**	**CC**	**Tatiana da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**15/04**	**16/04**	**18/04**
Objetivos	**-Introdução às Equações Diferenciais.**	**- Início das Soluções de EDO de 1ª Ordem.**	**- Continuação das Soluções de EDO de 1ª Ordem.**
Informação	**- Definição de Equações Diferenciais. - Classificação de Equações Diferenciais. - Tipos de solução.**	**- Solução de EDO de 1ª Ordem Linear Homogênea. - Solução de EDO de 1ª Ordem Linear Não-Homogênea: * p(x) e (q) constantes**	**- Solução de EDO de 1ª Ordem Não-Linear: * Equação Separável (ou forma separável) * Forma Homogênea**

		*p(x) constante * p(x) e q(x) não constantes	
Resumo	**- Foi explicado o conceito de Equação Diferencial, sua classificação e tipos de soluções.**	**- Foram explicadas as primeiras soluções de EDO de 1ª Ordem. Explicação tanto do passo a passo quanto da aplicação direta das fórmulas.**	**- Foi explicada a aplicação do método de solução na forma separável e na forma homogênea, tanto a solução específica quanto a geral. Inclusive o passo a passo.**
Observação	**- Não há observação a ser feita.**	**- Não há observação a ser feita.**	**- Não há observação a ser feita.**
Dúvidas	**- Não há dúvidas**	**- Não há dúvidas**	**- Solução de EDO 1ª Ordem Não-Linear na Forma Homogênea**

Monitoria	**- Não pude comparecer**	**- Não pude comparecer**	**- Não houve monitoria**

Determine a ordem da ED e diga se ela é linear ou não-linear.

1. $t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \cdot \frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$ — 2ª Ordem linear

2. $(1+y^2)y'' + t \cdot y' + y = e^t$ — 2ª Ordem não-linear

3. $y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = 1$ — 4ª Ordem linear

4. $y' + ty^2 = 0$ — 1ª Ordem não-linear

5. $y'' + \operatorname{sen}(t+y) = \operatorname{sen} t$ — 2ª Ordem não-linear

6. $y''' + t \cdot y' + (\cos^2 t)y = t^3$ — 3ª Ordem linear

Desenhe o campo de direção para as equações diferenciais dadas

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$

$$y' + 3y = t + e^{-2t} \; (\cdot e^{3t\,dt})$$

$$e^{3t}(y' + 3y) = e^{3t}(t + e^{-2t})$$

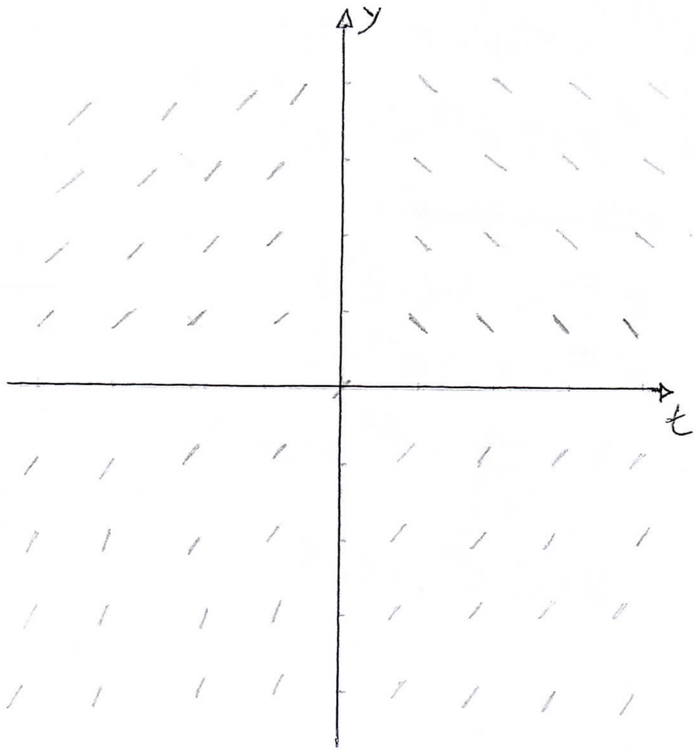
$$\int(e^{3t} \cdot y' + e^{3t} \cdot 3y) = \int(e^{3t} \cdot t + e^{3t} \cdot e^{-2t})dt$$

$$e^{3t} \cdot y = \int t \cdot e^{3t} dt + \int e^{t} dt$$

$$e^{3t} y = \frac{t}{3} e^{3t} - \frac{1}{9} e^{3t} + e^{t} + c$$

$$y = \frac{\frac{1}{3} t \cdot e^{3t} - \frac{1}{9} e^{3t} + e^{t} + c}{e^{3t}}$$

$$y = \frac{1}{3} t - \frac{1}{9} + e^{-2t} + c \cdot e^{-3t}$$



2- $2y'+y=3t$

$y'+\frac{y}{2}=\frac{3t}{2}$

$e^{t/2}(y'+y/2)=e^{t/2}(3t/2)$

$e^{t/2}y'+e^{t/2}\cdot\frac{y}{2}=e^{t/2}\cdot\frac{3t}{2}$

$\int(e^{t/2}y'+e^{t/2}\frac{y}{2})=\int e^{t/2}\cdot\frac{3t}{2}$

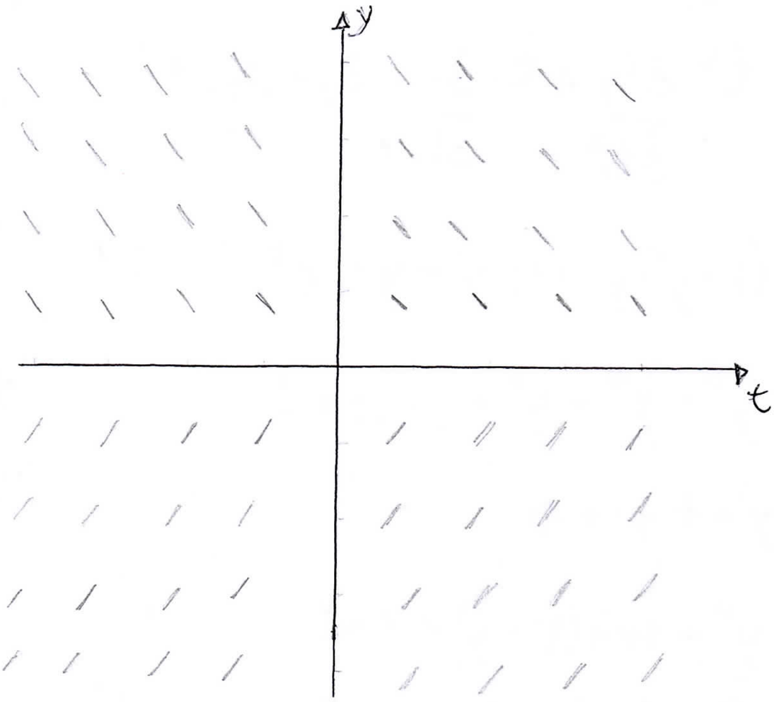
$e^{t/2}\cdot y=\int e^{t/2}\cdot\frac{3t}{2}$

$e^{t/2}\cdot y=\frac{3}{2}\int e^{t/2}\cdot t$

$e^{t/2}\cdot y=\frac{3}{2}(2te^{t/2}-4e^{t/2})+c$

$y=\frac{3te^{t/2}-6e^{t/2}+c}{e^{t/2}}$

$y=3t-6+c\cdot e^{-t/2}$



3- $y'-2y=3e^t$

$e^{-2t}(y'-2y)=e^{-2t}\cdot 3e^t$

$\int(e^{-2t}y'-2\cdot e^{-2t}\cdot y)=\int 3\cdot e^{-t}$

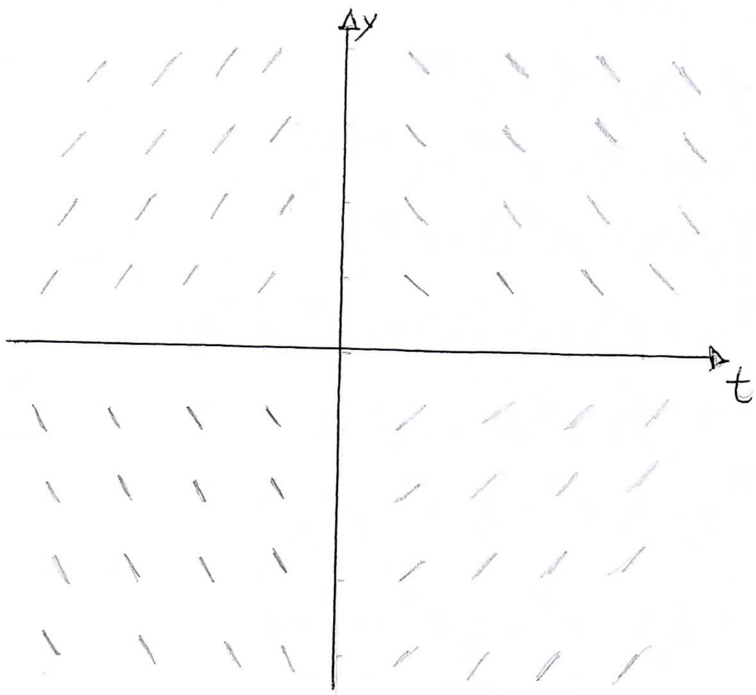
$\cancel{e^{-2t}\cdot y=3(-e^{-t}}$

$e^{-2t}\cdot y=3\cdot(-e^{-t})$

$e^{-2t}y=-3e^{-t}+c$

$y=\frac{-3}{e^t}\cdot e^{2t}+c\cdot e^{2t}$

$y=c\cdot e^{2t}-3e^t$



Encontre a solução de cada EDO de 1ª Ordem

Linear Homogênea

1. $y' - \cos t \cdot y = 0$

$y' = \cos t \cdot y$

$\frac{dy}{dt} = \cos t \cdot y$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos t \cdot dt$

$\ln y + C_1 = \operatorname{sen} t + C_2$

$\ln y = \operatorname{sen} t + C$

$e^{\ln y} = e^{\operatorname{sen} t + C}$

$y = e^{\operatorname{sen} t} \cdot e^{C}$

$y = K \cdot e^{\operatorname{sen} t}$

$[\cos t \cdot K \cdot e^{\operatorname{sen} t}] - \cos t\, [K \cdot e^{\operatorname{sen} t}] = 0$

2. $y' - 3xy = 0$

$y' = 3xy$

$\frac{dy}{dx} = 3xy$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int 3x\, dx$

$\ln y + C_1 = \frac{3x^2}{2} + C_2$

$e^{\ln y} = e^{\frac{3}{2}x^2 + C}$

$y = e^{\frac{3}{2}x^2} \cdot e^{C}$

$y = e^{\frac{3}{2}x^2} \cdot K$

$y = K \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

$y' = 3x \cdot (K \cdot e^{\frac{3}{2}x^2})$

$3x(K \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}) - 3x(K \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}) = 0$

3. $y' - \sec^2 t \cdot y = 0$

$y' = \sec^2 t \cdot y$

$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \cdot y$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \sec^2 t\, dt$

$\ln y + C_1 = \operatorname{tg} t + C_2$

$\ln y = \operatorname{tg} t + C$

$e^{\ln y} = e^{\operatorname{tg} t + C}$

$y = e^{\operatorname{tg} t} \cdot e^{C}$

$y = e^{\operatorname{tg} t} \cdot K$

$y = K \cdot e^{\operatorname{tg} t}$

$y' = \sec^2 t \cdot (K \cdot e^{\operatorname{tg} t})$

$[\sec^2 t \cdot (K \cdot e^{\operatorname{tg} t})] - \sec^2 t \cdot K \cdot e^{\operatorname{tg} t} = 0$

Encontre a solução de cada EDO de 1ª Ordem Linear Não - Homogênea.

1- $y' = -3y - 7$

$$y' = -3\left(y + \frac{7}{3}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = -3\left(y + \frac{7}{3}\right)$$

$$\int \frac{1}{y + \frac{7}{3}}\, dy = \int -3\, dx$$

$$\ln\left(y + \frac{7}{3}\right) = -3x + C$$

$$e^{\ln\left(y + \frac{7}{3}\right)} = e^{-3x + C}$$

$$y + \frac{7}{3} = e^{-3x} \cdot e^{c}$$

$$y + \frac{7}{3} = e^{-3x} \cdot K$$

$$y(x) = -\frac{7}{3} + K \cdot e^{-3x}$$

2- $2y' + y = 3t^2$

$$y' + \frac{1}{2} y = \frac{3}{2} t^2$$

$$e^{\int \frac{1}{2} dt} = e^{\frac{t}{2}}$$

$$y = e^{\int\left(\frac{3}{2} \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot t^2\right)}$$

$$y = e^{-\frac{t}{2}}\left[3e^{\frac{t}{2}} \cdot (t^2 - 4t + 8) + C\right]$$

$$y = C \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot 3t^2 - 12t + 24$$

3- $y' + 7y = e^{t}$

$$V(t) = e^{7t}$$

$$e^{7t}(y' + 7y) = e^{7t} \cdot e^{t}$$

$$\int e^{7t} y' + 7e^{7t} y = \int e^{8t}$$

$$e^{7t} \cdot y = \frac{e^{8t}}{8} + K$$

$$y = e^{-7t}\left(\frac{e^{8t}}{8} + K\right)$$

$$y(t) = \frac{e^{t}}{8} + Ke^{-7t}$$

Encontre a solução de cada EDO de 1ª Ordem Não-Linear na Forma Separável

1- $y' + y^3 \sec^2 x = 0$

$y' = -y^3 \sec^2 x$

$\frac{dy}{dx} = -y^3 \sec^2 x$

$\underbrace{-\frac{dy}{y^3}}_{N(y)} = \underbrace{\sec^2 x \cdot dx}_{M(x)}$

$\int -\frac{1}{y^3} dy = \int \sec^2 x \, dx$

$-\frac{y^{-2}}{-2} + C_1 = tg\, x + C_2$

$y = \frac{2}{tg\, x + C}$

2- $y' = \frac{e^{2x} - x}{y + e^y}$

$(y + e^y) y' = e^{2x} - x$

$\int \underbrace{(y + e^y)}_{N(y)} dy = \int \underbrace{(e^{2x} - x)}_{M(x)} dx$

$\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^2}{2} + C$

$y^2 + 2e^y = e^{2x} - x^2 + 2C$

3- $y' + y^5 tg\, x \sec x = 0$

$y' = -y^5 tg\, x \sec x$

$\frac{dy}{dx} = -y^5 tg\, x \sec x$

$\underbrace{-\frac{dy}{y^5}}_{N(y)} = \underbrace{tg\, x \sec x \, dx}_{M(x)}$

$\int -\frac{1}{y^5} dy = \int tg\, x \sec x \, dx$

$-\frac{y^{-4}}{-4} + C_1 = \sec x + C_2$

$y = \frac{4}{\sec x + C}$

Encontre a solução de cada EDO de 1ª Ordem na Forma Homogênea

1. $3xy \cdot y' = y^2 - x^2$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{3xy} \; : x^2$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{3\left(\frac{y}{x}\right)} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$V = \left(\frac{y}{x}\right) \quad y' = F(v) = \frac{v^2 - 1}{3v}$$

$$\int \frac{1}{F(v) - v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\underbrace{\int \frac{3v}{-1-2v^2} dv}_{A} = \underbrace{\int \frac{1}{x} dx}_{B}$$

$$B = \ln x + C_1$$

$$A = \int \frac{3v}{-1-2v^2} dv \rightarrow \frac{-3v}{1+2v^2} dv$$

$$u = 1 + 2v^2 \quad du = 4v\,dv$$

$$\ln(u) + C_2$$

$$-\ln(1 + 2v^2) + C_2$$

$$e^{\ln(x(1+2v^2))} = \underbrace{e^c}_{K}$$

$$x(1 + 2v^2) = K$$

$$x\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = K$$

2. $(x^2 + xy - y^2)dx - x^2 dy = 0$

$$(x^2 + xy - y^2) - x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^2 y' = x^2 + xy - y^2$$

$$y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2}$$

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{1}{1 + v - v^2 - v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{1 - v^2} dv}_{A} = \underbrace{\int \frac{1}{x} dx}_{B}$$

$$B = \ln + C_2$$

$$A = \int \frac{1}{1 - v^2} dv \quad u = 1 - v^2$$

$$du = -2v\,dv$$

$$\ln(u) + C_1 = \ln(1 - v^2) + C_1$$

$$e^{\ln(x(1 - v^2))} = e^c$$

$$x(1 - v^2) = K$$

$$x\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = K$$

3. $(x^3+3xy^2-y^3)dx - x^3dy = 0$

$$(x^3+3xy^2-y^3) - x^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3y' = x^3+3xy^2-y^3$$

$$y = \frac{x^3+3xy^2-y^3}{x^3}$$

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$v = y/x$$

$$\int \frac{1}{1+3v^2-v^3-v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{1-v+3v^2-v^3}\,dv}_{A} = \underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{B}$$

$$B = \ln x + C_2$$

$$A = \int \frac{1}{1-v+3v^2-v^3}\,dv$$

$$u = 1 - v + 3v^2 - v^3 \qquad du = -1+6v-3v^2$$

$$\ln(u) + C_1 = \ln(-1+6v-3v^2) + C_1$$

$$e^{\ln(x(-1+6v-3v^2)} = \underbrace{e^{c}}_{K}$$

$$x(-1+6v-3v^2) = K$$

$$x\left(-1+6\left(\frac{y}{x}\right) - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = K$$

Plano de aula semanal: Semana 6

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180123203	**João Pedro Alves da Silva Chaves**	**CC**	**Tatiana da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**22/04**	**23/04**	**25/04**
Objetivos	**-Introdução às equações exatas e não exatas - Saber como solucionar equações exatas**	**- Saber solucionar uma equação na forma não exata - Saber aplicar uma EDO 1ª Ordem**	**- Saber solucionar uma EDO 2ª Ordem Linear Homogênea**
Informação	**- Equação Bernoulli - Equação Exata**	**- Equação na forma não exata -Aplicações de EDO 1ª Ordem**	**-EDO 2ª Ordem Linear Homogênea - Wronskiano**

Resumo	**-Foi explicado como aplicar a Equação Bernoulli. - Foi explicado classificar se uma equação é exata ou não. - Foi explicado como solucionar uma EDO Exata.**	**-Foi explicado como tornar uma equação na forma não exata em uma equação exata utilizando o fator integrante. -Foi dado um exemplo de aplicação de EDO 1ª Ordem : Lei do resfriamento de Newton.**	**-Foi relembrado como classificar EDOs, foi apresentado o caso geral de EDO 2ª Ordem Linear Homogênea. - Explicado Teorema (Princípio da Superposição). - Explicado Teorema da existência e unidade - Explicado Wronskiano.**
Observação	**Não há observações**	**Não há observações**	**Não há observações**
Dúvidas	**Não há dúvidas**	**Como utilizar o fator integrante**	**Não há dúvidas**

Monitoria	**Não pude comparecer**	**Não pude comparecer**	**Não houve**

Ache a solução das EDOs 1ª Ordem na Forma Exata.

1. $(2x+3)+(2y-2)y'=0$

$M(x,y)=2x+3 \qquad N(x,y)=2y-2$

$F(x,y)=\int M(x,y)dx=\int 2x+3dx=x^2+3x+g(y)$

$F(x,y)=\int N(x,y)dy=\int 2y-2dy=y^2-2y+g(x)$

$F(x,y)=x^2+3x+y^2-2y=C$

2- $(2xy^2+2y)+(2x^2y+2x)\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dM}{dy}(x,y)=4xy+2 \qquad \frac{dN}{dx}(x,y)=4xy+2$

$F(x,y)=\int M(x,y)dx=\int 2xy^2+2y\,dx=x^2y^2+2xy+g(y)$

$\cancel{F(x,y)}\ F_y=2x^2y+2x+g'(y)=2x^2y+2x$

$x^2y^2+2xy=C$

3- $(3x^2-2xy+2)dx+(6y^2-x^2+3)dy=0$

$\frac{dM}{dy}(x,y)=-2x \qquad \frac{dN}{dx}(x,y)=-2x$

$F(x,y)=\int M dx=\int 3x^2-2xy+2dx=x^3-x^2y+2x+g(y)$

$F_y=-x^2+g'(y)=6y^2-x^2+3 \qquad g'(y)=6y^2+3$

$g(y)=2y^3+3y$

$x^3-x^2y+2x+2y^3+3y=C$

4. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy}$ $\qquad dy\underbrace{(-bx+cy)}_{N} = dx\underbrace{(ax+by)}_{M}$

$\frac{dM(x,y)}{dy} = b \qquad \frac{dN(x,y)}{dx} = b$

$F(x,y) = \int M dx = \int (ax+by)dx = \frac{ax^2}{2} + byx + g(y)$

$\frac{dF(x,y)}{dy} = N(x,y) \qquad bx + g'(y) = -bx + cy$

$g'(y) = cy$

$\int g'(y) = \int cy\,dy \Rightarrow \frac{cy^2}{2} + K$

$F(x,y) = \frac{ax^2}{2} + byx + \frac{cy^2}{2} + K$

$F(x,y) = ax^2 + 2byx + cy^2 = K$

5. $2x + y^2 + 2xyy' = 0 \qquad M = 2x + y^2 \qquad N = 2xy$

$\frac{dM(x,y)}{dy} = 2y \qquad \frac{dN(x,y)}{dx} = 2y$

$F(x,y) = \int M dx = \frac{2x^2}{2} + y^2x + g(y)$

$\frac{dF(x,y)}{dy} = N(x,y) \qquad 2yx + g(y) = 2yx$

$\int g'(y) = \int 0\,dy \rightarrow g(y) = c$

$F(x,y) = x^2 + y^2x + c$

Ache a solução das EDOs 1ª Ordem na Forma Não-Exata

1. $(2x+4y)+(2x-2y)y'=0$ $\quad [u(x,y)\cdot(2x+4y)]_y = [u(x,y)\cdot(2x-2y)]_x$

$$\frac{du(x,y)}{dy}\cdot(2x+4y)+u(x,y)\cdot 4 = \frac{du(x,y)}{dx}\cdot(2x-2y)+u(x,y)\cdot 2 \qquad u(x,y)=u(x)$$

$$u(x)\cdot 4 = u'(x)\cdot(2x-2y)+u(x)\cdot 2 \qquad u'(x)\cdot(2x-2y)=u(x)\cdot 4 - u(x)\cdot 2$$

$$u'(x)=\frac{2u(x)}{2x-2y} \rightarrow u'(x)=\frac{2}{2x-2y}\cdot u(x) \rightarrow u'(x)=\frac{1}{x-y}u(x) \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{x-y}$$

$$\int\frac{1}{u}du=\int\frac{1}{x-y}dx \rightarrow \ln u = \ln(x-y) \rightarrow u=x-y \rightarrow u(x)=x-y$$

$$(x-y)\cdot[(2x+4y)+(2x-2y)y']=0 \qquad 2x^2+4yx-2xy-4y^2+(2x^2-2yx-2yx+2y^2)y'=0$$

$$2x^2+2xy-4y^2+(2x^2-4xy+2y^2)y'=0 \longrightarrow M=2x^2+2xy-4y^2$$
$$\longrightarrow N=2x^2-4xy+2y^2$$

$$\frac{dM(x,y)}{dy}=2x-8y \qquad \frac{dN(x,y)}{dx}=4x-4y$$

$$F(x,y)=\int M\,dx = \frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2y}{2}-4y^2x+g(y) \qquad \frac{dF(x,y)}{dy}=N(x,y)$$

$$\frac{2x^2}{2}-8yx+g'(y)=2x^2-4xy+2y^2 \qquad g(y)=x^2+4xy+2y^2+C$$

$$\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2y}{2}-4y^2x+x^2+4yx+2y^2+C$$

2. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2+y^2)dy = 0$

$$[U(x,y)\cdot(3x^2y+2xy+y^3)]_y = [U(x,y)(x^2+y^2)]_x \qquad U(x,y) = U(x)$$

$$\frac{dU}{dy}(x,y)\cdot(3x^2y+2xy+y^3) + U(x)\cdot(3x^2+2x+3y^2) = \frac{dU}{dx}(x,y)\cdot(x^2+y^2) + U(x)\cdot 2x$$

$$U(x)\cdot(3x^2+2x+3y^2) = U'(x)\cdot(x^2+y^2) + U(x)\cdot 2x$$

$$U'(x) = \frac{3x^2+3y^2\,U(x)}{x^2+y^2\,U(x)} \rightarrow U'(x) = \frac{3(x^2+y^2)\,U}{x^2+y^2\,U} \rightarrow U'(x) = 3U = e^{3x}$$

$$e^{3x}[(3x^2y+2xy+y^3)dx + (x^2+y^2)dy] = 0$$

$$(3x^2ye^{3x} + 2xye^{3x} + y^3e^{3x})dx + (x^2e^{3x} + y^2e^{3x})dy = 0$$

$$\frac{dM}{dy}(x,y) = 3x^2e^{3x} + 2xe^{3x} + 3y^2e^{3x} \qquad \frac{dN}{dx}(x,y) = 2xe^{3x} + 3y^2e^{3x}$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = \int(3x^2e^{3x} + 2xe^{3x} + 3y^2e^{3x})dx$$

$$F(x,y) = \frac{x^3\cdot e^{3x}}{3} + \frac{x^2e^{3x}}{3} + y^2e^{3x} + g(y)$$

$$\frac{dF(x,y)}{dy} = N(x,y) \qquad 2ye^{3x} + g(y) = x^2e^{3x} + y^2e^{3x}$$

$$g(y) = \frac{e^{3x}(x^2+y^2)}{e^{3x}\cdot 2y} = \frac{x^2+y^2}{2y}$$

$$F(x,y) = \frac{x^3\cdot e^{3x}}{3} + \frac{x^2e^{3x}}{3} + y^2e^{3x} + \frac{x^2+y^2}{2y}$$

$$F(x,y) = \frac{x^3e^{3x}2y}{6y} + \frac{x^2e^{3x}2y}{6y} + \frac{6y^3e^{3x}}{6y} + \frac{3x^2+3y^2}{6y}$$

$$F(x,y) = e^{3x}(x^3 2y + x^2 2y + 6y^3) + 3(x^2+y^2)$$

$3.- (4x^2+3\cos y)dx - x\,\text{sen}\,y\,dy = 0$

$\frac{dM(x,y)}{dy} = -3\,\text{sen}\,y \qquad \frac{dN(x,y)}{dx} = -1\,\text{sen}\,y$

$p(x) = \frac{-3\,\text{sen}\,y - (-\text{sen}\,y)}{-x \cdot \text{sen}\,y} = \frac{-2\,\text{sen}\,y}{-x\,\text{sen}\,y} = \frac{2}{x}$

$U'(x) = \frac{2}{x} \cdot U(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot u \rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = 2\int \frac{1}{x}\,dx$

$\ln u = 2\ln x \rightarrow \ln u = \ln x^2 \rightarrow u = x^2$

$x^2 \cdot [(4x^2+3\cos y)dx - (x\,\text{sen}\,y)dy] = 0$

$(4x^4+3\cos y\,x^2)dx - (-x^3\,\text{sen}\,y)dy = 0 \qquad \frac{dM(x,y)}{dy} = 3(-\text{sen}\,y)x^2$

$\frac{dN}{dx} = -3x^2\,\text{sen}\,y \qquad F(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (4x^4+3\cos y\,x^2)dx$

$16x^3+6\cos y\,x+g(y) \qquad \frac{dF(x,y)}{dy} \qquad 6\cdot(-\text{sen}\,y)x+g(y) = -x^3\,\text{sen}\,y$

$g(y) = \frac{-x^3\,\text{sen}\,y}{-6\,\text{sen}\,y} \qquad g(y) = \frac{x^3}{6}$

$F(x,y) = 16x^3+6\cos y\,x + \frac{x^3}{6}$

4.- $y\,dx + (2x - ye^y)dy = 0$ $\qquad M = y \quad N = 2x - ye^y$

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = 1 \qquad \frac{dN(x,y)}{dx} = 2$$

$$P(x) = \frac{1-2}{2x - ye^y} = \frac{-1}{2x-ye^y} \qquad U(x) = \frac{-1}{2x-ye^y} \cdot Ux \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-1}{2x-ye^y} \cdot U$$

$$\int \frac{1}{U} du = \int \frac{-1}{2x-ye^y} dx \rightarrow \ln U = -\ln(2x - ye^y) \rightarrow U = -2x - ye^y$$

$$(-2x - ye^y)[(y\,dx) + (2x - ye^y)dy] = 0$$

$$(-2xy - y^2e^y)dx - (4x^2 + 2xye^y - 2xye^y + y^2e^y)dy = 0$$

$$(-2xy - y^2e^y)dx - (4x^2 + y^2e^y)dy = 0$$

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = -2x - 2ye^y \qquad \frac{dF(x,y)}{dy} = N(x,y)$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = -x^2y - y^2e^yx + g(y)$$

$$\frac{dF(x,y)}{dy} = N(x,y) \qquad -x - 2ye^yx + g'(y) = -4x^2 + y^2e^y$$

$$g'(y) = -4x^2 + y^2e^y + x + 2ye^yx$$

$$F(x,y) = -x^2y - y^2e^yx - 4x^2 + y^2e^y + x + 2ye^yx + C$$

$$F(x,y) = -x^2y - 4x^2 - (y^2x + y^2 + 2yx)e^y + C$$

5- $(6xy)dx + (4y+9x^2)dy = 0$ $\qquad M = 6xy$

$N = 4y + 9x^2$

$\frac{dM(x,y)}{dy} = 6x \qquad \frac{dN(x,y)}{dx} = 18x$

$P(y) = \frac{18x - 6x}{6xy} = \frac{12x}{6xy} = \frac{2}{y} \qquad U'(x) = \frac{2}{y}U \Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{2}{y}U$

$\int \frac{1}{U}dU = \int \frac{2}{y}dy \Rightarrow \int \frac{1}{U}dU = 2\int \frac{1}{y}dy \Rightarrow \ln U = 2\ln y$

$\ln U = \ln y^2 \qquad U = y^2$

$y^2[(6xy)dx + (4y+9x^2)dy] = 0 \Rightarrow 6xy^3dx + 4y^3 + 9x^2y^2\,dy = 0$

$\frac{dM(x,y)}{dy} = 18xy^2 \qquad \frac{dN(x,y)}{dx} = 18xy^2$

$F(x,y) = \int M(x,y)dx = \frac{6}{2}x^2y^3 + g(y) \qquad \frac{dF(x,y)}{dy} = N(x,y)$

$9x^2y^2 + g'(y) = 4y^3 + 9x^2y^2$

$g'(y) = 4y^3 + 9x^2y^2 - 9x^2y^2$

$g(y) = 4y^3$

$F(x,y) = 3x^2y^3 + 4y^3$

Exemplos de Equação Bernoulli

1- $3xy' + y = \frac{x}{y^2}$ $\quad 3xy^2 \cdot y' + y^3 = x \quad V = y^3 \Rightarrow V' = 3y^2 \cdot y'$

$xV' + V = x \qquad (xV)' = x \qquad xV = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow V = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

$y^3 = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$

2. $y' = y(xy^3 - 1) \qquad y' + y = x \cdot y^4 \qquad \frac{y'}{y^4} + \frac{1}{y^3} = x \qquad V = \frac{1}{y^3} \Rightarrow V' = \frac{-3 \cdot y'}{y^4}$

$-\frac{V'}{3} + V = x \qquad V' - 3V = -3x$

$\mu V' - 3\mu V = -3\mu x \qquad (\mu \cdot V)' = \mu V' + \mu' \cdot V$

$\mu' = -3\mu \qquad \frac{d\mu}{\mu} = -3dx \qquad \ln|\mu| = -3x \qquad \cancel{\mu = e^{-3x}} \qquad \mu = e^{-3x}$

$\cancel{e^{-3x} \cdot y' - 3e^{-3x} \cdot y = -3xe^{-3x}} \qquad \underbrace{e^{-3x} V' - 3e^{-3x} V}_{(e^{-3x} \cdot V)'} = -3xe^{-3x}$

$(e^{-3x} \cdot V)' = -3xe^{-3x}$

$e^{-3x} \cdot V = \int -3xe^{-3x} dx \quad \rightarrow \quad u = -3x \Rightarrow du = -3dx$

$\int -3xe^{-3x} dx = \frac{-1}{3} \int u \cdot e^u du = -\frac{1}{3}\left[ue^u - e^u\right] \quad \Bigg| \quad f(u) = u \Rightarrow f'(u) = 1$

$\int -3xe^{-3x} dx = xe^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{3} + C \quad \Bigg| \quad g(u) = e^u \Rightarrow g'(u) = e^u$

$V = x + \frac{1}{3} + Ce^{3x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y^3} = x + \frac{1}{3} + Ce^{3x}$

$1 = xy^3 + \frac{y^3}{3} + Cy^3 e^{3x}$

Capitalização de Investimentos : Aplicação no Sistema Financeiro

Suponha que uma quantia de dinheiro é depositada em um banco que paga uma taxa **R** ao mês. O valor de **S(t)** investimento em qualquer instante **t** depende tanto da frequência de capitalização dos juros, ou seja da periodicidade em que os juros são aplicados, quanto da taxa de juros. Se supusermos que a capitalização é feita continuamente pode-se montar um problema de valor inicial simples que descreve o crescimento do investimento.

A taxa de variação do investimento é **dS/dt**. Essa quantidade é igual a taxa segundo a qual os juros acumulam, que a taxa de juros é **r** vezes o valor atual do investimento **S(t)**. Então obtemos a equação diferencial que descreve o processo

dS/dt = r * S

Supondo que o valor inicial de investimento é **So**, encontram-se os valores de **S** para qualquer instante **t**. Como resultado, obtém-se:

S(t) = So*e^(r*t)

A equação acima demonstra o crescimento exponencial de uma conta com juros capitalizados.

Podemos agora supor que possam existir, além do acumulo de juros, depósitos e retiradas ocorrendo a uma taxa constante **K**. Matematicamente esses depósitos e retiradas existem como uma contribuição aditiva na equação

dS/dt = r*S+K

Onde **K> 0** representa depósitos e **K<0** retiradas

A solução geral desta equação é **S(t) = c * e ^(r * t) – K /r**

Onde **c** é uma constante arbitraria. Para satisfazer a condição inicial **S(0) = So, C = So + K/r** , logo a solução do problema de valor inicial é **S(t) = So^(r*t) + K/r [e^(r*t) – 1]**

Onde **So^(r*t)** representa os juros compostos e **e * K/r (e^(r*t) – 1**) é referente a depósitos ou retiradas a uma taxa **K**.

Problema de Mistura

O tanque representado na Figura contém 1000 galões de água, em que 100 libras de sal estão inicialmente dissolvidas.

- A mistura no tanque é constantemente revolvida de modo a mantê-la uniforme.

- A mistura de água e sal também escoa do tanque a uma taxa de 10 galões/min.

- Encontre a quantidade de sal presente no tanque num instante t qualquer.

Resolução:

- **y(t)** é a quantidade de sal presente no tanque num instante t qualquer

- Sua taxa temporal de variação é dada por:

Y' = Taxa de entrada de sal – Taxa de saída de sal

Y' = (5 libras por galão) – (10 galões do conteúdo total no tanque) * y

Y' = (5 * 10) – (10/1000) * y

Y' = 50 – 1/100 * y

Y' = 5000/100 – y/100

Y' = -1/100(y – 5000)

Y' = -0.01(y – 5000)

Y' = -0.01(y – 5000)

dy/dt = -0.01(y – 5000)

dy / (y – 5000) = - 0.01 dt

$$\int \frac{dy}{(y-5000)} = \int -0.01\, dt$$

$$\int \frac{1}{(y-5000)} dy = -\int 0.01 dt$$

$$\ln|y-5000| + c1 = -0.01t + c2$$

$$c* = c1 + c2$$

$$y - 5000 = ce^{-0.01t}$$

Inicialmente, o tanque contém 100 libras de sal. Logo:

Y(0) = 100

Substituindo y = 100 e t = 0, obtemos:

$$100 - 5000 = ce^{-0.01*0}$$

$$-4900 = ce^{0}$$

$$-4900 = c$$

Logo, c = -4900 e a quantidade de sal presente no tanque num instante t qualquer é:

$$\boldsymbol{y - 5000 = -4900e^{-0.01t}}$$

$$\boldsymbol{y(t) = 5000 - 4900e^{-0.01t}}$$

Circuitos RL e RC

Um circuito RL tem uma fem de 5 volts, uma resistência de 50 ohms, uma indutância de 1 henry e não tem corrente inicial. Determine a corrente no circuito no instante de tempo t.

Resolução:

R = 50 ohm L = 1H

$$\frac{di}{dt} + \frac{50}{1}i = \frac{5}{1}$$

$$P(t) = 50$$

$$Q(t) = 5$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x) * e^{\int P(x)dx} dx + C]$$

$$i(t) = e^{\int -50dt}\left[\int 5e^{\int 50dt} dt + C\right]$$

$$i(t) = e^{-50t}\left[\frac{5}{50}e^{50t} + C\right]$$

$$i(t) = \frac{1}{10}e^{50t} * e^{-50t} + C * e^{-50t}$$

$$i(t) = \frac{1}{10} + C * e^{-50t}$$

$$0 = \frac{1}{10} + C * e^{-50(0)}$$

$$0 = \frac{1}{10} + C, logo\ C = -\frac{1}{10}$$

T = ∞

$$i(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10e^{50t}}$$

$$i(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10e^{50\infty}}$$

$$\lim_{t \to \infty}(\frac{1}{10} - \frac{1}{10e^{50\infty}})$$

$$i = \frac{1}{10}A$$

$$i = 0,1A$$

$$i = 100mA$$

Dinâmica Populacional

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} = k * P}$$

$$\boldsymbol{P = c * e^{kt}}$$

Uma cultura tem inicialmente Po bactérias. Em t=1h, o número de bactéria é 3/2 Po. Considerando que a taxa de crescimento é proporcional a P(t), determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

$\boldsymbol{P(0) = Po}$

$\boldsymbol{P(1) = \frac{3}{2}Po}$

$\boldsymbol{t(0) = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{P(0) = ce^{kt}}$ $\quad$ $\boldsymbol{P(0) = c = Po}$

$\boldsymbol{P(t) = ce^{kt}}$ $\quad$ $\boldsymbol{P(t) = Po * e^{kt}}$

$\boldsymbol{t = 1}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{3}{2}Po = Po * e^{k}}$ $\quad$ $\boldsymbol{e^{k} = \frac{3}{2}}$

$\boldsymbol{k = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,4055}$

$\boldsymbol{3Po = Po * e^{0,4055*t}}$ $\quad$ $\boldsymbol{0,4055t = \ln(3)}$

$\boldsymbol{t = \frac{ln(3)}{0,4055} \approx 2,71h}$

Decaimento Radioativo

$$\frac{dA}{dt} = k * A$$

$$A = ce^{kt}$$

O isótopo Pb-209 decai a uma taxa proporcional à A(t) e tem meia-vida de 3,3h. Se houver inicialmente 1g de chumbo, quanto tempo levará para que 90% decaia?

$t = 0$

$A(0) = ce^{k*0} = 1$

$Meia\ vida: 0,5 = 1 * \ e^{k*3,3}$ $\qquad k = \dfrac{\ln(0,5)}{3,3} \approx -0,23$

$1g = A(0) - 90\% \ = 0,1g$

$0,1 = 1 * e^{-0,23t}$

$-0,23t = \ln(0,1)$

$t \ \approx 11h$

Plano de aula semanal: Semana 7

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180123203	**João Pedro Alves da Silva Chaves**	**CC**	**Tatiana da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**29/04**	**30/04**	**02/05**
Objetivos	**- Aprender a solucionar EDO 2ª Ordem Linear Homogênea(Casos 1 e 2).**	**- Aprender a solucionar EDO 2ª Ordem Linear Homogênea(Caso 3) - Aprender a encontrar a solução particular de uma EDO 2ª Ordem Linear Não-Homogênea com Coeficientes Constantes por meio do MCI.**	**- Aprender a encontrar a solução particular de uma EDO 2ª Ordem Linear Não-Homogênea com Coeficientes Constantes por meio do MVP.**
Informação	**- EDO 2ª Ordem Linear Homogênea: Coeficientes Constantes: - Caso 1: $\Delta > 0$**	**- EDO 2ª Ordem Linear Homogênea: Coeficientes Constantes: - Caso 3: $\Delta < 0$**	**- Método da Variação dos Parâmetros.**

	- Caso 2: Δ = 0	- Fórmula de Euler - EDO 2ª Ordem Linear Não-Homogênea: Coeficientes Constantes: - Método dos Coeficientes Indeterminados ou "Método do chute"	
Resumo	- Foi explicado como colocar a EDO na equação característica e então analisar o Delta da equação para saber qual processo seguir para solucionar a EDO. - Foi explicado e foram dados exemplos de como solucionar as EDOs que quando colocadas na equação característica tem Δ > 0	- Foi explicado e exemplificado como solucionar EDOs com Δ < 0. - Foi explicado como encontrar a solução particular de uma EDO 2ª Ordem Linear Não-Homogênea com Coeficiente Constante utilizando o Método dos Coeficientes Indeterminados.	- Aula Virtual *Explicação do livro Boyce sobre como encontrar a solução particular de uma EDO 2ª Ordem Linear Não-Homogênea com Coeficiente Constante utilizando o Método da Variação dos Parâmetros.

	ou Δ = 0.		
Observação	- Não há observações	- Não há observações	- Não há observações
Dúvidas	- Como solucionar EDOs que quando colocadas na equação característica tem Δ = 0 e x dentro da equação.	- Não há dúvidas	- Não há dúvidas
Monitoria	- Não pude comparecer	- Não pude comparecer	- Não houve monitoria

Encontre a solução da EDO 2ª Ordem Linear com Coeficiente Constante e $\Delta > 0$.

1- $y'' + 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1$

$\Delta = 1$

$\lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$ — $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-1x} \\ y_2 = e^{-2x} \end{cases}$$

$y_H = C_1 \cdot e^{-1x} + C_2 e^{-2x}$

Encontre a solução específica da EDO 2ª Ordem Linear com Coeficiente Constante, $\Delta > 0$ e PVI.

1- $$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 1$

$\Delta = 4$

$\lambda = \dfrac{-4 \pm 2}{2}$ — $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$

$$\begin{cases} y_1 = e^{-1x} \\ y_2 = e^{-3x} \end{cases}$$

$y_H = C_1 \cdot e^{-1x} + C_2 e^{-3x}$

$y'_H = -C_1 \cdot e^{-1x} - 3C_2 e^{-3x}$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 - 3C_2 = -1 \end{cases}$$

$-2C_2 = 1$

$C_2 = \dfrac{-1}{2}$

$C_1 = 2 + \dfrac{1}{2}$

$C_1 = \dfrac{5}{2}$

$y_H = \dfrac{5}{2} e^{-1x} - \dfrac{1}{2} e^{-3x}$

Encontre a solução da EDO 2ª Ordem Linear com Coeficiente Constante e $\Delta=0$

1. $y''+6y'+9y=0$

$\lambda^2+6\lambda+9=0$

$\Delta=36-4\cdot1\cdot9$

$\Delta=0$

$\lambda=\dfrac{-6\pm\sqrt{0}}{2}$

$\lambda=-3$

$\begin{cases} y_1=e^{-3x} \\ y_2=-xe^{-3x} \end{cases}$

$y_H=C_1\cdot e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$

Encontre a solução especifica da EDO 2ª Ordem Linear com Coeficiente Constante, $\Delta=0$ e PVI.

1. $\begin{cases} 4y''+12y'+9y=0 \\ y(0)=-2 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$

$4\lambda^2+12\lambda+9=0$

$\Delta=144-4\cdot4\cdot9$

$\Delta=0$

$\lambda=\dfrac{-12}{8}=\dfrac{-3}{2}$

$\begin{cases} y_1=e^{\frac{-3}{2}x} \\ y_2=xe^{\frac{-3}{2}x} \end{cases}$

$y_H=C_1\cdot e^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}+C_2xe^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}$

$-2=C_1\cdot e^{\frac{-3}{2}\cdot0}+C_2xe^{\frac{-3}{2}\cdot0}$

$-2=C_1$

$y=C_1e^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}+C_2xe^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}$

$y'=\dfrac{-3}{2}C_1e^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}+\left(\dfrac{-3}{2}\right)C_2e^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}\cdot x+C_2e^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}$

$-1=\left(\dfrac{-3}{2}\right)\cdot(-2)e^{\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot0}-\dfrac{3}{2}C_2e^{\left(\frac{-3}{2}\right)0}\cdot x+C_2e^{\left(\frac{-3}{2}\right)0}$

$-1=3+C_2$

$C_2=-4$

$y=-2e^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}-4xe^{\left(\frac{-3}{2}\right)x}$

Encontre a solução da EDO 2ª Ordem Linear com Coeficiente Constante, e $\Delta < 0$

1- $y'' - 6y' + 13y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13$

$\Delta = -16$

$\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$\lambda = 3 \pm 2i$

$$\begin{cases} y_1 = e^{3x} \cdot \cos(2x) \\ y_2 = e^{3x} \cdot \text{sen}(2x) \end{cases}$$

$y_H = C_1 \cdot e^{3x} \cdot \cos(2x) + C_2 e^{3x} \text{sen}(2x)$

$y_H = e^{3x} (C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \text{sen}(2x))$

Encontre a solução especifica da EDO 2ª Ordem Linear com coeficiente constante, $\Delta < 0$ e PVI.

1- $$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5$

$\Delta = -16$

$\lambda = \dfrac{+2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\lambda = 1 \pm 2i$

$$\begin{cases} y_1 = e^{x} \cdot \cos(2x) \\ y_2 = e^{x} \cdot \text{sen}(2x) \end{cases}$$

$y_H = C_1 \cdot e^{x} \cos(2x) + C_2 e^{x} \text{sen}(2x)$

$y'_H = C_1 e^{x} \cos(2x) - 2C_1 e^{x} \text{sen}(2x) - C_2 e^{x} \text{sen}(2x) + 2C_2 e^{x} \cos(2x)$

$$\begin{matrix} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_1 + 2C_2 = 4 \rightarrow C_2 = 1 \end{cases}$$

$y_H = 2e^{x} \cos(2x) + 1 e^{x} \text{sen}(2x)$

Plano de aula semanal: Semana 8

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180123203	**João Pedro Alves da Silva Chaves**	**CC**	**Tatiana da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**06/05**	**07/05**	**09/05**
Objetivos	**-Apresentação do jogo sobre EDO**	**-Praticar o conteúdo utilizando o jogo**	**- Praticar o conteúdo utilizando o jogo**
Informação	**- Não há informações**	**- Não há informações**	**- Não há informações**

Resumo	**- O aluno/desenvolvedor do jogo "AprEnDO" apresentou o jogo.**	**- Se resumiu a jogar o jogo "AprEnDO"**	**- Se resumiu a jogar o jogo "AprEnDO"**
Observação	**- Não há observações**	**- Não há observações**	**- Não há observações**
Dúvidas	**-Não há dúvidas**	**- Não há dúvidas**	**- Não há dúvidas**
Monitoria	**- Não pude comparecer**	**- Não pude comparecer**	**- Não houve monitoria**

Encontre a solução geral de cada EDO pelo Método dos Coeficientes Indeterminados

1- $y'' - 5y' + 6y = x^2$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

$\Delta = 1$

$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$ — $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$

$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

$y_p(x) = ax^2 + bx + c$

$(ax^2+bx+c)'' - 5(ax^2+bx+c)' + 6(ax^2+bx+c) = x^2$

$2a - 5(2ax+b) + 6(ax^2+bx+c) = x^2$

$6ax^2 + x(6b - 10a) + (2a - 5b + 6c) = x^2$

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 6b - 10a = 0 \\ 2a - 5b + 6c = 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{6}$

$6b - 10\left(\frac{1}{6}\right) = 0$

$b = \frac{5}{18}$

$2\left(\frac{1}{6}\right) - 5\left(\frac{5}{18}\right) + 6c = 0$

$c = \frac{19}{108}$

$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$

$2-\ y'' - 3y' + 2y = \cos(x)$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2$

$\Delta = 1$

$\lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$

$y_P(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)$

$y'_P(x) = -A\operatorname{sen}(x) + B\cos(x)$

$y''_P(x) = -A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x)$

$-A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) - 3(-A\operatorname{sen}(x) + B\cos(x)) + 2(A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)) = \cos(x)$

$\operatorname{sen}(x)(3A + 2B) + \cos(x)(-3B + 2A) - A\cos(x) - B\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$

$\operatorname{sen}(x)(3A + 1B) + \cos(x)(-3B + 1A) = \cos(x)$

$$\begin{cases} 3A + B = 0 \\ A - 3B = 1 \end{cases}$$

$A = 1 + 3B$

$3(1 + 3B) + B = 0$

$3 + 9B + B = 0$

$10B = -3$

$B = \dfrac{-3}{10}$

$A = 1 - \dfrac{9}{10}$

$A = \dfrac{1}{10}$

$y_P = \dfrac{\cos(x)}{10} - \dfrac{3\operatorname{sen}(x)}{10}$

$y_P = \dfrac{\cos(x) - 3\operatorname{sen}(x)}{10}$

$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \dfrac{\cos(x) - 3\operatorname{sen}(x)}{10}$

Encontre a solução de cada EDO pelo Método da Variação dos Parâmetros

1- $4y'' + 36y = \csc 3x \,, \quad x \in (0, \pi/6)$

$y'' + 9y = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda^2 + 9 = 0$

$\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \longrightarrow \Delta = -36$

$\lambda = \dfrac{0 \pm \sqrt{-36}}{2} \longrightarrow \lambda = \pm 3i$

$y_H(x) = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x$

$y'' + 9y = \dfrac{\csc 3x}{4}$ $\qquad y_p(x) = f_1 y_1 + f_2 y_2 \longrightarrow y_1 = \operatorname{sen} 3x$

$y_2 = \cos 3x$

$M = \begin{vmatrix} 3\cos 3x & -3\operatorname{sen} 3x \\ \operatorname{sen} 3x & \cos 3x \end{vmatrix} = 3\cos^2 3x + 3\operatorname{sen}^2 3x = 3$

$f_1 = \displaystyle\int \frac{y_2 B(x)}{M} dx \qquad B(x) = \frac{\csc 3x}{4} \qquad f_1 = \int \frac{\cos 3x \csc 3x}{3 \cdot 4} dx = \frac{1}{12} \int \operatorname{cotg} 3x \, dx$

$f_1 = \dfrac{1}{36} \ln|\operatorname{sen} 3x|$

$f_2 = \displaystyle\int \frac{-y_1 B(x)}{M} dx \qquad f_2 = \int \frac{-\operatorname{sen} 3x \csc 3x}{3 \cdot 4} dx = \frac{-1}{12} \int dx$

$f_2 = \dfrac{-1}{12} x$

$y_p(x) = f_1 y_1 + f_2 y_2 \longrightarrow y_p = \dfrac{1}{36} \operatorname{sen} 3x \ln|\operatorname{sen} 3x| - \dfrac{1}{12} x \cos 3x$

$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$y(x) = C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2 \cos 3x - \dfrac{x \cos 3x}{12} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x \ln|\operatorname{sen} 3x|}{36}$

$$2.\ y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \ln x$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

$$y_p(x) = y_1(x) \cdot f_1(x) + y_2(x) \cdot f_2(x)$$

$$y_p(x) = e^{2x} \cdot f_1(x) + x e^{2x} \cdot f_2(x)$$

$$y_1'(x) = 2e^{2x} \qquad y_2'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1'(x) \cdot y_2(x) - y_2'(x) \cdot y_1(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_2(x) & -y_2'(x) \\ -y_1(x) & y_1'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B(x) = e^{2x} \ln x$$

$$M = y_1'(x) \cdot y_2(x) - y_2'(x) y_1(x) = 2e^{2x} x e^{2x} - (e^{2x} + 2xe^{2x}) e^{2x} = -e^{4x}$$

$$f_1'(x) = \frac{y_2(x) B(x)}{M} \rightarrow f_1(x) = \int \frac{y_2(x) \cdot B(x)}{M} dx$$

$$f_2'(x) = \frac{-y_1(x) \cdot B(x)}{M} \rightarrow f_2(x) = \int \frac{-y_1(x) \cdot B(x)}{M} dx$$

$$f_1(x) = -\int x \ln x \, dx = -\left(\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x$$

$$f_2(x) = \int \frac{-y_1(x) \cdot B(x)}{M} dx = \int \frac{-e^{2x} \cdot e^{2x} \ln x}{-e^{4x}} dx = \int \ln x \, dx$$

(Integração por partes na próxima página)

$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \qquad dv = dx \rightarrow v = x$

$f_2(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x(\ln x - 1)$

$y_p(x) = e^{2x} \cdot f_1(x) + x e^{2x} \cdot f_2(x)$

$y_p(x) = e^{2x} \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x \right) + x e^{2x} \cdot (x(\ln x - 1))$

$y = y_H + y_p$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + e^{2x} \cdot \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x \right) + x e^{2x} \cdot (x(\ln x - 1))$

$y = e^{2x} \left(C_1 + C_2 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x \right) + x(x(\ln x - 1)) \right)$

$y = e^{2x} \left(C_1 + C_2 x - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x \right)$

Plano de aula semanal: Semana 9

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180123203	**João Pedro Alves da Silva Chaves**	**CC**	**Tatiana da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**13/05**	**14/05**	**16/05**
Objetivos	**-Não houve aula**	**-Não houve aula**	**- Revisão**
Informação	**- Não há informações**	**- Não há informações**	**- Não há informações por se tratar de aplicação de revisão.**

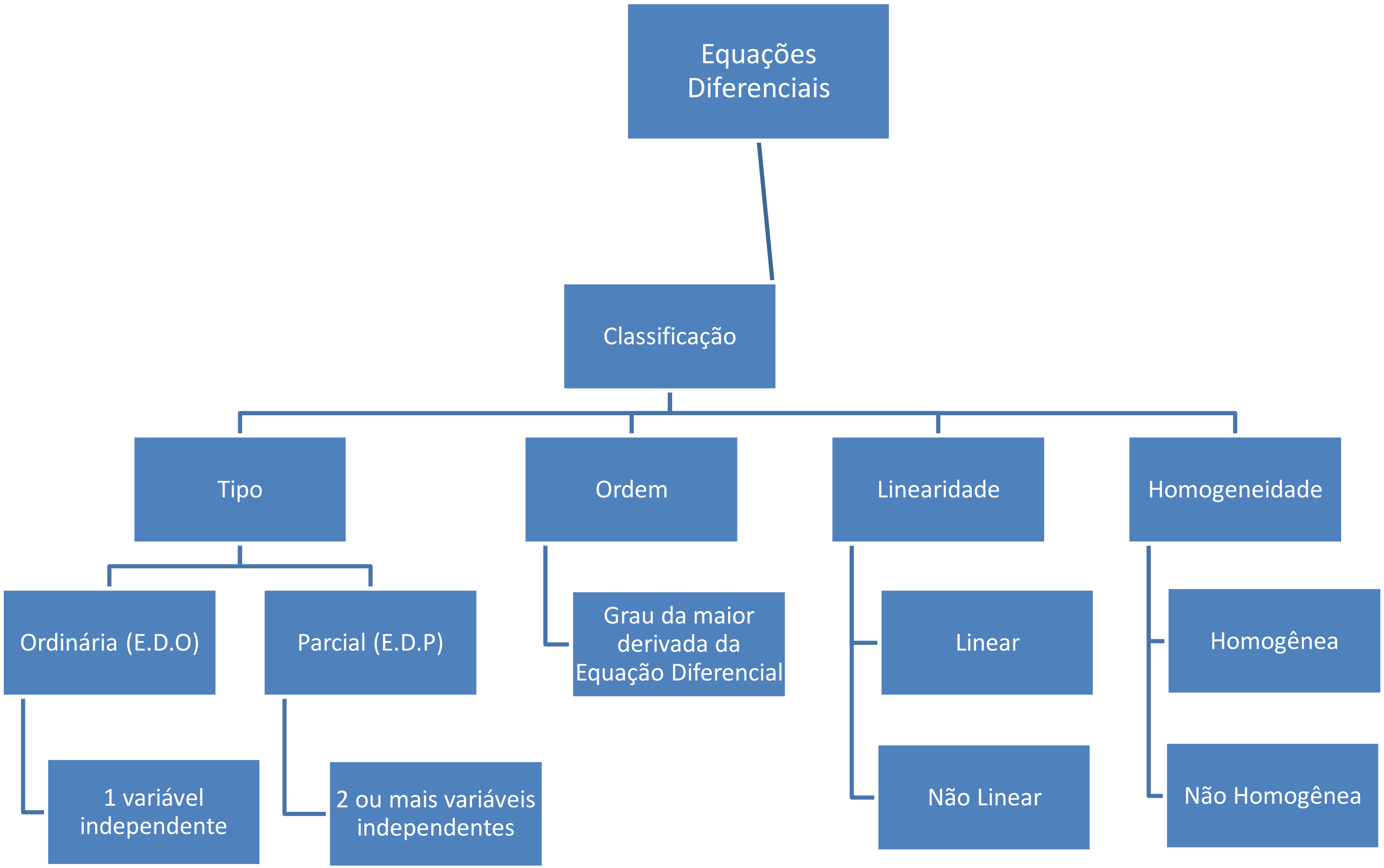
Resumo			**- Não há resumo por se tratar de revisão.**
Observação	**- Não há observações**	**- Não há observações**	**- Não há observações**
Dúvidas	**-Não há dúvidas**	**- Não há dúvidas**	**- Não há dúvidas**
Monitoria			

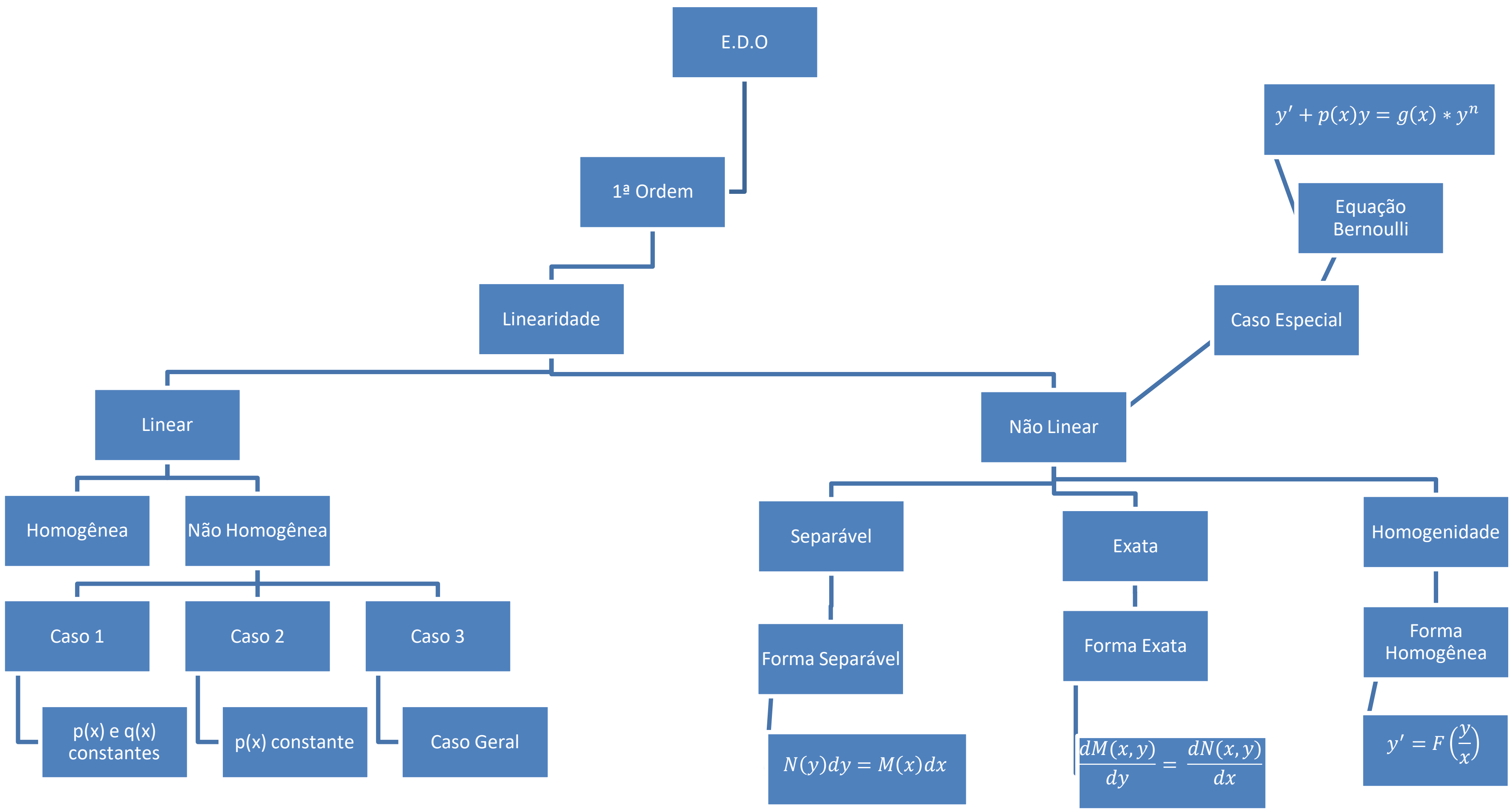
Plano de aula semanal: Semana 10

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180123203	**João Pedro Alves da Silva Chaves**	**CC**	**Tatiana da Silva Evangelista**

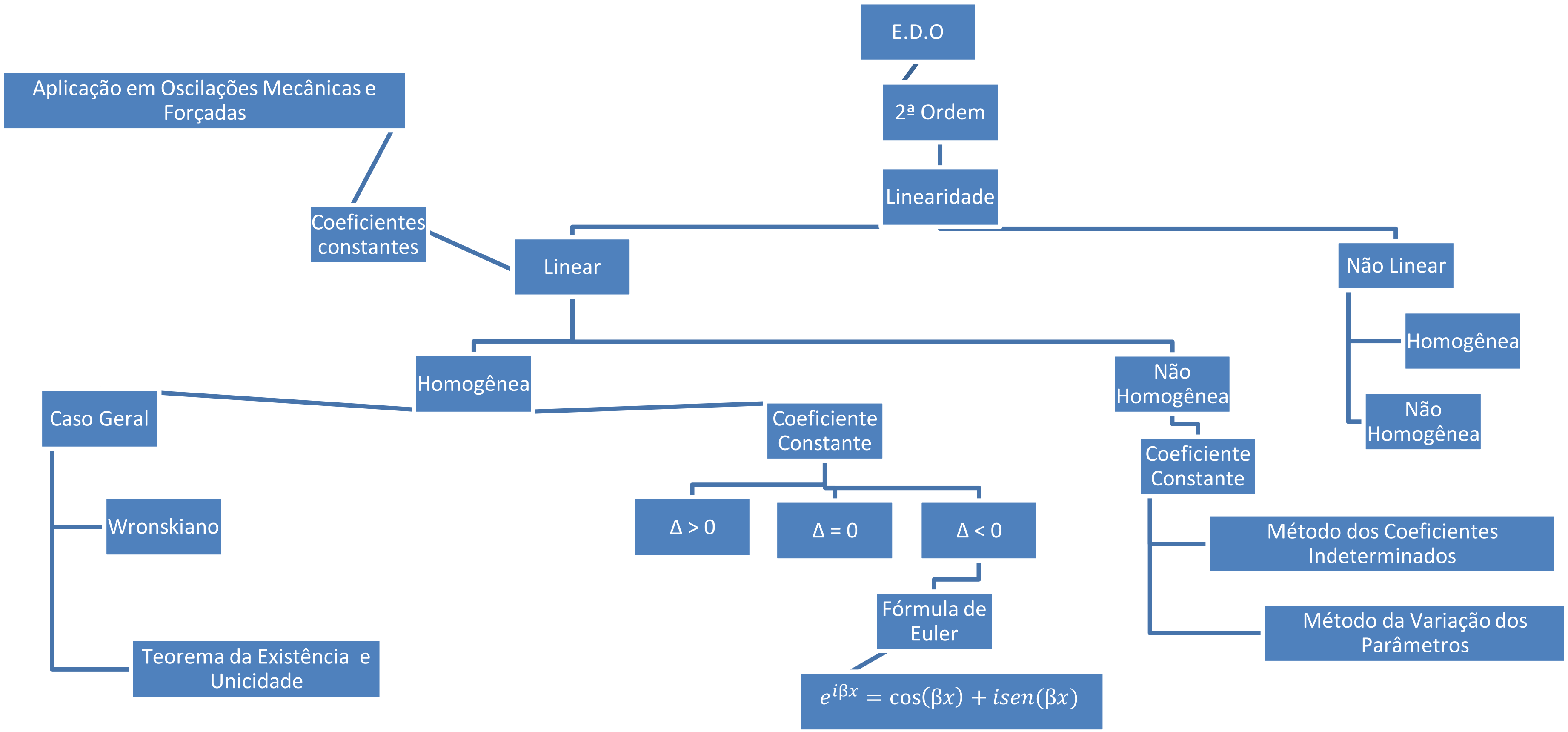
	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**20/05**	**21/05**	
Objetivos	**-Aplicar os conhecimentos sobre EDO em problemas de Vibrações Mecânicas e Forçadas**	**-Prova**	
Informação	**- Sala de Aula Invertida**	**- Prova**	

Resumo	**-Foram feitas atividades sobre Vibrações Forçadas e Mecânicas em sala**	**- Prova**	
Observação	**- Não há observações**	**- Não há observações**	
Dúvidas	**-Não há dúvidas**	**- Não há dúvidas**	
Monitoria	**-Não compareci**	**-Não compareci**	


Equações Diferenciais
Classificação
Tipo
Ordem
Linearidade
Homogeneidade
Ordinária (E.D.O)
Parcial (E.D.P)
Grau da maior derivada da Equação Diferencial
Linear
Homogênea
1 variável independente
2 ou mais variáveis independentes
Não Linear
Não Homogênea



E.D.O
1ª Ordem
Linearidade
Linear
Homogênea
Não Homogênea
Caso 1
Caso 2
Caso 3
p(x) e q(x) constantes
p(x) constante
Caso Geral
Não Linear
Caso Especial
Equação Bernoulli
$y' + p(x)y = g(x) * y^n$
Separável
Forma Separável
$N(y)dy = M(x)dx$
Exata
Forma Exata
$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx}$
Homogenidade
Forma Homogênea
$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$


E.D.O
2ª Ordem
Linearidade
Linear
Não Linear
Aplicação em Oscilações Mecânicas e Forçadas
Coeficientes constantes
Homogênea
Não Homogênea
Homogênea
Não Homogênea
Caso Geral
Wronskiano
Teorema da Existência e Unicidade
Coeficiente Constante
Δ > 0
Δ = 0
Δ < 0
Fórmula de Euler
$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + isen(\beta x)$
Coeficiente Constante
Método dos Coeficientes Indeterminados
Método da Variação dos Parâmetros

Teoria: Vibrações Mecânicas e Forçadas

Muitos problemas físicos tem o mesmo modelo matemático, e um dos modelos matemáticos é a Equação Diferencial de Segunda Ordem:

$$ay" + by' + cy = g(t)$$

Tendo como problema de valor inicial:

$$y(0) = yo \qquad\qquad y'(0) = y'o$$

Trocando y por u.

No caso das **vibrações mecânicas**:

$$a = m \qquad\qquad b = \gamma \qquad\qquad c = k$$

Logo, temos:

$$mu" + \gamma u' + ku = F(t)$$

Onde:

$u"$ = aceleração da massa

u' = velocidade

u = posição

m = massa

γ = constante de amortecimento

k = constante da mola

x = deformação da mola

ω = peso

g = aceleração gravitacional

Fs = Força da mola

$F(t)$ = Força externa

Sendo que $m = \frac{\omega}{g}$, $\gamma = \frac{\gamma u\prime}{u\prime}$, $k = \frac{Fs}{(x+u)}$

Ficando a fórmula:

$$mu" + \gamma u' + ku = F(t)$$

No caso de **Vibrações Livres Não Amortecidas:**

$$mu" + ku = 0$$

A solução da equação é dada por:

$$u = A\cos\omega_0\, t + B\, sen\, \omega_0\, t$$

E $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ em que ω_0 é a frequência circular. As constantes A e B só podem ser determinadas se forem dadas as condições iniciais. A solução também pode ser escrita da seguinte forma:

$$u = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$

Se deduz que: $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ $tg\delta = \frac{B}{A}$

O período do movimento pode ser encontrado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

No caso de **<u>Vibrações Livres Amortecidas</u>:**

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0$$

As raízes da equação característica são:

$$r_1, r_2 = \frac{\gamma}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}}\right)$$

Quando o amortecimento é muito pequeno, $A = R\cos\delta$ e $B = R\, sen\, \delta$, logo:

$$u = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta)$$

Onde µ é chamada quase frequência. E o quase período é dado por:

$$\frac{Td}{T} = \frac{\omega_0}{\mu}$$

No caso das **<u>Vibrações Forçadas com Amortecimento</u>**:

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 cos\omega t$$

E a solução geral é dada por:

$$u = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + A\cos\omega t + B\, sen\, \omega t = u_c(t) + U(t)$$

No caso das **<u>Vibrações Forçadas sem Amortecimento</u>**:

$$mu'' + ku = F_0 cos\omega t$$

Caso a frequência de forçamento não seja igual a frequência natural, a solução geral da Equação é:

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \, sen \, \omega_0 t + \frac{F_0}{m({\omega^2}_0 - \omega^2)} \cos \omega t$$

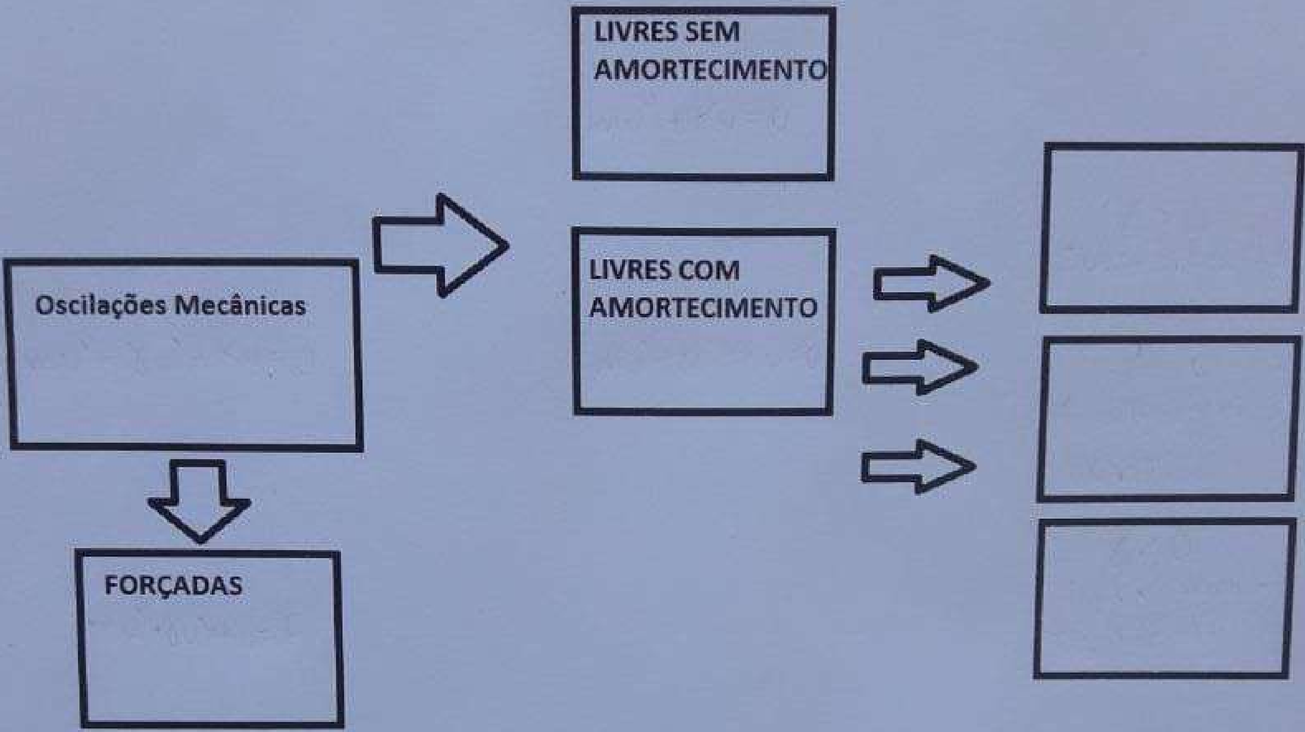
Se a massa está inicialmente em repouso, as constantes c_1, c_2 são dadas por:

$$c_1 = -\frac{F_0}{m({\omega^2}_0 - \omega^2)}, \qquad c_2 = 0$$

E a solução da equação principal é:

$$u = \frac{F_0}{m({\omega^2}_0 - \omega^2)}(cos\omega t - cos\omega_o t)$$

Atividade 1: Complete :



Atividade 2: Oscilações livres amortecidas. Considere um sistema massa-mola em um meio viscoso. Seja k a constante elástica da mola, seja m a massa do corpo que oscila e seja γ o coeficiente de viscosidade (amortecimento) do meio. A EDO que descreve a amplitude das oscilações da massa é dada por $m\,x'' + \gamma\,x' + k\,x = 0$. Descreva o efeito da viscosidade do meio no movimento da massa. Movimentos oscilatório: subamortecimento, superamortecido e amortecimento crítico.

Atividade 3: Um cursor com 5 kg repousa sobre uma mola, não estando ligado a ela. Observa-se que, se o cursor for empurrado para baixo 0,18m ou mais, perde o contato com a mola depois de libertado. Determine:

(a) a constante de rigidez da mola.

(b) a posição, a velocidade e a aceleração do cursor, 0.16 s após ter sido empurrado para baixo 0,18m e, depois, libertado.

Considere g=9,81m/s^2.

1-

Oscilações Mecânicas

$mu'' + \gamma u' + ku = 0$ →

Livres Sem Amortecimento

$mu'' + ku = 0$

Livres Com Amortecimento

$mu'' + \gamma u' + ku = 0$

Subamortecimento

$\Delta < 0$

Amortecimento Crítico

$\Delta = 0$

Superamortecimento

$\Delta > 0$

Forçadas

$mu'' + \gamma u' + ku = F$

2- $my'' + \gamma y' + Ky = 0$

$m\lambda^2 + \gamma\lambda + K = 0$

$\Delta = \gamma^2 - 4 \cdot m \cdot K$

$\Delta > 0$ = Superamortecimento

$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$; $\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2m}$; $\lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2m}$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$

$y_2 = e^{\lambda_2 x}$

$y_H = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$

$\Delta = 0$ Amortecimento Crítico

$\lambda = \frac{-\gamma}{2m}$

$y_1 = e^{\lambda x}$

$y_2 = x e^{\lambda x}$

$y_H = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

$\Delta < 0$ Subamortecimento

$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\Delta}}{2m}$

$\alpha = -\gamma / 2m$

$\beta = \sqrt{\Delta} / 2m$

$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$

$y_2 = e^{\alpha x} \cdot \mathrm{sen}(\beta x)$

O efeito da viscosidade do meio no movimento da massa é fortemente perceptível, pois na fórmula de Δ, o coeficiente de viscosidade γ assume o papel do coeficiente "b", tendo assim suma importância na definição do movimento oscilatório em subamortecido ($\Delta < 0$), amortecimento crítico ($\Delta = 0$) e superamortecimento ($\Delta > 0$).

3- a) $P = F_{el}$

$m \cdot g = K \cdot x \rightarrow 5kg \cdot 9{,}81 = K \cdot 0{,}18m \rightarrow K = 272{,}5$

b) $\omega = \sqrt{\frac{g}{x}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}18}} \simeq 7{,}38$ rad/s

$x(0{,}16) = 0{,}18 \cdot \cos(7{,}38 \cdot 0{,}16) \simeq 0{,}068m$

$x'(0{,}16) = -7{,}38 \cdot 0{,}18 \cdot \mathrm{sen}(7{,}38 \cdot 0{,}16) \simeq -1{,}23$ m/s

$x''(0{,}16) = -7{,}38^2 \cdot 0{,}18 \cdot \cos(7{,}38 \cdot 0{,}16) \simeq -3{,}73$ m/s

Exemplo de Aplicação Prática do Conteúdo do Módulo 2.

1. (Teixeira, p71) Um corpo de massa 100g estica a mola 10cm. O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Considere a aceleração da gravidade como $10^3 cm/s^2$ e suponha que o amortecedor exerce uma força de 10^4 dinas $= 10^4 g.cm/s^2$ quando a velocidade é 10cm/s. Se o sistema é puxado para baixo 2cm e depois solto, determine a posição u em função do tempo t.

Dados:

$m = 10^2$ gramas

$L = 10cm$

$g = 10^3 cm/s^2$

$Fd = -10^4 g \cdot cm/s^2$

$u(0) = 2 cm/s$

$u'(t) = 10 cm/s$

$m \cdot g = K \cdot L \rightarrow K = \frac{m \cdot g}{L}$

$K = \frac{10^2 \cdot 10^3}{10} = 10^4 \rightarrow$ constante da mola

$Fd(t) = -\gamma u'(t) \rightarrow -\gamma = \frac{Fd(t)}{u'(t)}$

$-\gamma = \frac{-10^4}{10} = 10^3 \rightarrow \gamma = -10^3$

↳ constante de amortecimento

$10^2 u''(t) + 10^3 u'(t) + 10^4 u(t) = 0 \rightarrow u''(t) + 10 u'(t) + 10^2 u(t) = 0$

$\lambda^2 + 10\lambda + 10^2 \rightarrow \Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10^2 \rightarrow \Delta = -3 \cdot 10^2$

$\lambda = \frac{-10 \pm \sqrt{-300}}{2}$ ⟨ $\lambda_1 = -5 + 5i\sqrt{3}$; $\lambda_2 = -5 - 5i\sqrt{3}$ $\rightarrow \alpha = -5 \quad \beta = 5\sqrt{3}$

$u(t) = e^{-5t}(C_1 \cos 5\sqrt{3}t + C_2 \operatorname{sen} 5\sqrt{3}t)$

$u(t) = C_1 e^{-5t} \cos 5\sqrt{3}t + C_2 e^{-5t} \operatorname{sen} 5\sqrt{3}t$

$u'(t) = -5C_1 e^{-5t} \cos 5\sqrt{3}t - 5\sqrt{3} C_1 e^{-5t} \operatorname{sen} 5\sqrt{3}t - 5C_2 e^{-5t} \operatorname{sen} 5\sqrt{3}t + \ldots$
$5\sqrt{3} C_2 e^{-5t} \cos 5\sqrt{3}t.$

$u(0) = 2$

$2 = C_1 e^{-5 \cdot 0} \cos 5\sqrt{3} \cdot 0 + C_2 e^{-5 \cdot 0} \operatorname{sen} 5\sqrt{3} \cdot 0$

$C_1 = 2$

$v'(0)=0$

$$0=-5c_1e^{-5\cdot0}\cos 5\sqrt{3}\cdot0-5\sqrt{3}c_1e^{-5\cdot0}\operatorname{sen}5\sqrt{3}\cdot0-5c_2e^{-5\cdot0}\operatorname{sen}5\sqrt{3}\cdot0+5\sqrt{3}c_2e^{-5\cdot0}\cos 5\sqrt{3}\cdot0$$

$$C_2=\frac{-5C_1}{5\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}c_1}{15}=-\frac{\sqrt{3}C_1}{3}\rightarrow C_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$v(t)=2e^{-5t}\cos 5\sqrt{3}t+\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3}\right)e^{-5t}\operatorname{sen}5\sqrt{3}t$$