Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA
Engenharia de Software

Jogo de celular aprEnDO para ensino de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem: um estudo de caso

Autor: Leonardo Arthur Degolim Oliveira
Orientadora: Profª Drª Tatiane da Silva Evangelista
Coorientadora: Profª Bruna Nayara Moreira Lima
Data de apresentação: 10/12/2018

Brasília, DF

2018

Leonardo Arthur Degolim Oliveira

Jogo de celular aprEnDO para ensino de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem: um estudo de caso

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Software da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Software.

Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA

Orientadora Profª Drª Tatiane da Silva Evangelista
Coorientadora Profª Bruna Nayara Moreira Lima

Brasília, DF
2018

Leonardo Arthur Degolim Oliveira

Jogo de celular aprEnDO para ensino de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem: um estudo de caso

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Software da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Software.

Profª Drª Tatiane da Silva Evangelista
Orientadora

Profª Bruna Nayara Moreira Lima
Coorientadora

PhD Profº Ronni Geraldo Gomes de Amorim
Convidado 1

Profº Dr. Edson Alves da Costa Júnior
Convidado 2

Brasília, DF
2018

Resumo

O objetivo deste trabalho era desenvolver um jogo de celular o aprEnDO para analisar se foi possível apoiar a aprendizagem de equações diferenciais ordinárias (EDO) de 1ª ordem. O jogo contém perguntas a respeito de classificação e resolução de equações. A metodologia de trabalho foi um estudo de caso aplicado em uma classe de Cálculo 2 (C2) da Faculdade do Gama da UnB em que a professora orientadora ministra o ensino. Um grupo aleatório utilizará o aplicativo enquanto outro grupo não terá contato com o jogo. Os feedbacks serão analisados a partir dos dados do jogo enviados pelos jogadores além da aplicação e análise de mapas conceituais para analisar se o jogo contribuiu para o aprendizado efetivo da matéria.

Palavras-chave: ED. aplicativo para celular. jogo. software.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Percentual das menções de C2 em 2/2017 e 1/2018 16
Figura 2 – Visão de pacotes do jogo 29

Lista de tabelas

Tabela 1 – Percentual de reprovações no semestre 2/2017 e 1/2018 15
Tabela 2 – Exemplos de EDO 18
Tabela 3 – Exemplos de EDP 18
Tabela 4 – Ordem de equações diferenciais 19
Tabela 5 – ED lineares e não lineares 20
Tabela 6 – EDO de variáveis separáveis 23
Tabela 7 – ED de variáveis não separáveis 24

Lista de abreviaturas e siglas

ED	Equação Diferencial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
PVI	Problemas de valor inicial
VI	Valor Inicial
APP	Aplicativo
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
HU	História de Usuário
Cap.	Capítulo
TDAH	Transtorno do Déficit de Atenção com Hiperatividade
C2	Cálculo 2
UnB	Universidade de Brasília
SS	Superior
MS	Médio Superior
MM	Médio
MI	Médio Inferior
II	Inferior
SR	Sem Rendimento
TR	Trancamento
TJ	Trancamento Justificado

Lista de símbolos

∂	Derivada parcial

Sumário

1 INTRODUÇÃO . . . 10

2 REFERENCIAL TEÓRICO . . . 12
2.1 Problemas com matemática no Brasil . . . 12
2.2 Ajuda de jogos para ensino de matemática . . . 13
2.3 Contribuição de jogos para ensino inclusivo . . . 14
2.4 Suporte da tecnologia com jogos nos colégios . . . 14

3 JUSTIFICATIVA . . . 15

4 OBJETIVOS . . . 17
4.1 Objetivos gerais . . . 17
4.2 Objetivos específicos . . . 17

5 EQUAÇÃO DIFERENCIAL . . . 18
5.1 Classificação de ED . . . 18
5.1.1 Tipo . . . 18
5.1.2 Ordem . . . 19
5.1.3 Linearidade . . . 19
5.2 Solução de ED . . . 20
5.2.1 Tipos de solução . . . 22
5.2.2 Equação de variáveis separáveis . . . 23
5.2.3 Equação Homogênea . . . 24
5.2.4 Equação Exata . . . 25
5.2.5 Equação Linear 1ª ordem . . . 26

6 METODOLOGIA . . . 28

7 EXPLICAÇÃO DO JOGO . . . 29
7.1 Pacote 1 . . . 29
7.2 Pacote 2 . . . 30
7.3 Pacote 3 . . . 30
7.4 Estatísticas . . . 30

8 TECNOLOGIAS . . . 31
8.1 Plataformas mobile . . . 31
8.2 Ambiente de desenvolvimento . . . 31

9 CONCLUSÃO 32

REFERÊNCIAS 33

1 Introdução

Como será mostrado a seguir no estudo, descobrimos que o Brasil tem uma qualidade de ensino de matemática inferior a de muitos países, inclusive, foi classificado abaixo do nível do que é considerado o nível mínimo para exercer a cidadania como cidadão pleno (INEP, 2015a). Avaliando que a média das menções de Cálculo 2 (C2) na UnB está muito concentrada no Médio (MM), levando em consideração o estudo (SOUZA, 2016) que diz que C2 é uma disciplina das que mais causa a evasão dos alunos do curso de matemática noturno na UnB e que existem poucos trabalhos a respeito de como ensinar equações diferenciais (ED) para estudantes, decidiu-se fazer um jogo para celular com o intuito de inserir no ambiente uma ferramenta a mais para ajudar os estudantes a aprender divertindo, já que existem estudos reforçando que o jogos ajudam e aumentam as chances de aprendizado, contribuem para incluir estudantes com deficiências no meio em que estão inseridos, tornando-o mais pró ativos e melhorando suas capacidades de se articularem. Existem também estudos mostrando como a tecnologia da suporte para jogos na hora do ensino e ajuda na fixação do conhecimento. A metodologia seguida foi a pesquisa bibliográfica para levantar o referencial teórico e ajudar com técnicas para o desenvolvimento do jogo que visa treinar os alunos a reconhecer, classificar, resolver e aplicar equações diferenciais presentes no dia-a-dia da engenharia.

O foco deste trabalho é desenvolver um jogo para celular Android e iOS com estratégias gamificadas para dar suporte à fixação do conhecimento em ED. O jogo conterá 3 fases com níveis de dificuldades que treinem a classificação de ED, resolução de exercícios e aplicações no dia a dia e no ambiente da engenharia. Ao fim de todos os níveis de dificuldades de cada fase tem-se o desafio para completar a categoria. O jogo será planejado e desenvolvido utilizando metodologias ágeis de software. As funcionalidades (features) e a descrição granulariazada (histórias de usuários - HU) serão elencadas e descritas para que se tenha a rastreabilidade dos requisitos do jogo. Com o jogo pronto será aplicado em uma turma de C2 no período do primeiro semestre de 2019 para que possa ser gerado um diagnóstico avaliativo concluindo se o jogo trouxe alguma eficiência no aprendizado ou não. O capítulo 2 abordará o referencial teórico, dando ênfase nos baixos indíces de classificação do Brasil no conhecimento de matemática e apoiando a gamificação e jogos como uma prática que deixa as tarefas e atividades mais divertidas. O capítulo 3 explica o problema existente e a justificativa do trabalho. O capítulo 4 aborda a respeito da questão de pesquisa e os objetivos gerais e específicos. O capítulo 5 aborda ED para introduzir um nivelamento de conteúdo a ser abordado no jogo. O capítulo 6 explica a metodologia do trabalho. capítulo 7 explica as fases do jogo, como espera-se que ele seja jogado. capítulo 8. fala a respeito das tecnologias utilizadas para desenvolvimento e do planejamento do jogo. Capítulo 9 apresenta a conclusão do trabalho e o capítulo 10 mostra as referências do trabalho e em seguida os apêndices e anexos.

2 Referencial Teórico

Existem estudos com referencial teórico apoiando o uso de gamificação em vários contextos e utilizando dos benefícios oferecidos por ela. Exemplo de contextos como marketing, saúde, educação e etc. A gamificação é também utilizada em contextos de ensino de matemática (embora não sejam muitos os resultados encontrados para universidades), e para escolas inclusivas. Em alguns casos são utilizados a tecnologia junto da gamificação nos contextos acima citado. É dito que a tecnologia e jogos contribuem para ajudar no engajamento e chamar atenção das pessoas e dos estudantes. Tem um estudo dizendo que não há limites para a idade de jogar, brincar e se divertir. Por isso jogo e gamificação podem ser possíveis estratégias para utilizar em comunhão de tecnologias visando o ensino de EDO 1ª ordem para estudantes do ensino superior.

2.1 Problemas com matemática no Brasil

No Brasil 70.3% dos alunos estão abaixo do nível de conhecimento em matemática. Nível este que de acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) foi estabelecido para medir a capacidade do alunos em exercer plenamente sua cidadania (INEP, 2015a). A qualidade do ensino de matemática no Brasil é ruim de acordo com (ESTADÃO, 2016) (INEP, 2015b). O estudo do INEP é realizado a cada 3 anos e é lançado no final do ano seguinte. Foi realizado pela última vez em 2015 quando o Brasil foi 13º colocado em um estudo com 14 países participantes da OCDE. Ficou na frente da República Dominicana e atrás de países como Coréia do Sul, Canadá, Portugal e Estados Unidos. De acordo com o (ESTADÃO, 2016) a posição do Brasil para a qualidade do ensino de matemática e ciências é 133 entre 139 países participantes.

Um dos porquês desses índices baixos é que existe o desânimo em salas de aula, as vezes por parte dos professores e outras por parte dos alunos. Os professores precisam se reinventar para atrair a atenção dos alunos e melhorar a eficiência do aprendizado em sala de aula. Parte do desânimo dos alunos em sala de aula deve-se por achar a matemática como algo chato, não entenderem o conteúdo e não terem uma base de conteúdo bem solidificada.

Outro problema é que existem poucos estudos relacionando gamificação com matemática (NETO; BLANCO; SILVA, 2017), principalmente quando se fala de matemática no ensino superior. Quando se encontra matemática para nível superior com gamificação os estudos são focados para o conteúdo de cálculo 1 (limite, derivada e integral). Nada foi encontrado relacionado ao contexto de gamificação + equações diferenciais. Nenhum jogo de equações diferenciais (ED) foi encontrado.

O estudo (NETO; BLANCO; SILVA, 2017) fez um levantamento bibliográfico sobre gamificação com matemática e dificuldades no ensino de matemática e não encontrou nenhum estudo na área de gamificação com dificuldades de aprendizado em matemática. Porém pelo gráfico 1 pode indicar que há a dificuldade de aprendizado, já que ocorrem reprovações na matéria e a menção que mais está presente é a MM.

Uma das maneiras de ajudar os alunos a se interessarem mais em sala de aula e atrair a atenção dos mesmos é utilizar o lúdico, ou seja, aprender brincando. Para isso o uso de computadores ou tecnologias da informação como o celular é útil para melhorar o engajamento nas tarefas, principalmente com exercícios e aplicações para a prática das matérias ensinadas em sala de aula (DUPAUL; STONER, 2007).

2.2 Ajuda de jogos para ensino de matemática

Jogo é prática que ajuda na concretização do conhecimento, além de tornar o ambiente mais prazeroso (COELHO, 2010). É importante avaliar se as pessoas estão se divertindo no momento de aprendizado, já que brincar contribui na formação do estudante, tanto social quanto intelectual (COELHO, 2010).

"O caráter lúdico, bem como a possibilidade de atuação crítica, proporciona ao aluno uma participação efetiva no processo de ensino aprendizagem, se tornando um momento ímpar de crescimento pessoal e coletivo."(COELHO, 2010). O que significa que contribui para o aluno se tornar um ser ativo e pensante, capacitando-o a exercer seu papel como cidadão.

"Os jogos despertam o interesse dos jovens trazendo diversos benefícios aliados à educação[...]"(SILVA *et al.*, 2016)

Tem também o estudo de (SILVA *et al.*, 2016), que é uma proposta de aplicativo gamificado para ensino de cálculo onde é proposto um jogo para o ensino de matemática, porém o conteúdo abordado é de conjunto, limite, derivada e integral, não é voltado para o tema de EDO 1ª ordem.

No estudo (NETO; BLANCO; SILVA, 2017) foi feito uma revisão bibliográfica nas bases de dados Scielo, Science Direct, ACM Library, IEE Xplore Digital entre outras, para levantar o uso de gamificação e dificuldades matemáticas. De 2008 trabalhos, nenhum eram relacionando gamificação e dificuldades de matemática. No entando para (DICHEVA *et al.*, 2015) que é citado no estudo, a falta de pesquisa na área é justificada por ser uma temática nova.

As referências citadas neste tópico reforçam que jogos podem ser utilizados para fazer os estudantes gostarem e se atreverem mais no contexto da matemática. Espera-se que os alunos busquem e tenham a vontade do conhecimento por si próprio para que se tornem mais independentes. Também conclui-se que existem poucos estudos na área de C2, específico para ED, apesar de terem estudos na área de matemática, estes destinam-se a cálculo 1 e matérias do ensino fundamental.

2.3 Contribuição de jogos para ensino inclusivo

O trecho a seguir mostra o lúdico como um facilitador para inserir alunos com déficits em uma sociedade.

"[...] a percepção do lúdico passa a ser vista como uma aliada para os professores no que tange a orientar os alunos portadores de necessidades especiais em busca do desenvolvimento das suas habilidades e potencialidades dentro de uma perspectiva inclusiva"(COELHO, 2010).

De acordo com (COELHO, 2010) o jogo é um benefício no ambiente inclusivo pois ajuda a adquirir conhecimento.

É pretendido utilizar a teconologia como ferramenta de aprendizado lúdico. O jogo é importante e eficaz para escolas inclusivas (COELHO, 2010).

2.4 Suporte da tecnologia com jogos nos colégios

Queremos fortalecer que gamificação também pode ser combinada para ajudar a incluir os alunos com dificuldades especiais na faculdades e no meio social. "[...] a tecnologia é uma grande aliada para a aprendizagem dos alunos portadores do TDAH."(BARBOSA; CAMARGO, 2014a).

O computador e tecnologias como celular, além de serem ferramentas de auxílio, são também motivadoras para os estudantes (SANTOS, 2017).

É reforçado em (NETO; BLANCO; SILVA, 2017) que a tecnologia deve ser usada como ferramenta auxiliadora para o ensino de matemática em colégios inclusivos.

Este tópico visa reafirmar o potencial dos jogos tecnológicos para ser usado como ferramenta de atração dos alunos para os colégios e universidades.

3 Justificativa

O Brasil tem um dos piores índices de conhecimento em matemática (ESTADÃO, 2016). Também tem o desânimo dos alunos e professores além da falta de estratégias inovadores por parte dos professores na hora de ensinar (SANTOS, 2017). Esse método de ensino tradicional, onde o professor é ativo e os alunos são apenas passivos para receber o conhecimento faz com que menos seja abstraído pelos alunos, que também precisam de práticas e um tempo de ócio criativo para abstrair e compreender o conteúdo de modo a repetir e aplicar em outras situações. Pouco foi-se encontrado de estudos na área de **matemática + gamificação**. A quantidade de estudos diminui quando o conteúdo de matemática é do ensino superior ao invés de ensino de matemática no ensino fundamental. Um outro problema é a falta de inclusão de alunos com necessidades especiais nos ambientes de sala de aula, isso deve-se à falta de preparo dos professores em sua formação (BARBOSA; CAMARGO, 2014b). Não foi encontrado nenhum jogo de matemática para o ensino e/ou suporte de EDO. Apenas um jogo de vídeo-game que aplica ED na movimentação dos personagens (princípio da dinâmica de Newton)(GIACINTI *et al.*, 2013). Avaliou-se o índice de reprovação na disciplina Cálculo 2 (C2) na UnB, nos semestres 2/2017 e 1/2018. A média foi a seguinte:

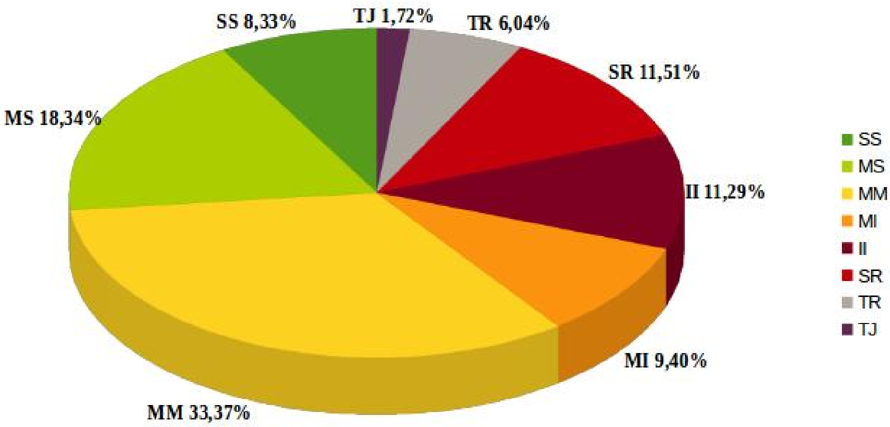
Tabela 1 – Percentual de reprovações no semestre 2/2017 e 1/2018

Semestre	Total de menções	Percentual de reprovados
2/2017	1164	32.47%
1/2018	1101	31.88%
Total	2265	32.18%

Fonte: do próprio autor

A tabela mostra que aproximadamente 32% dos alunos reprovaram de um total de 2265 alunos. A figura 1 é um gráfico de pizza, mostra o percentual médio das menções dos alunos da UnB de C2 nos períodos de 2/2017 e 1/2018.

Figura 1 – Percentual das menções de C2 em 2/2017 e 1/2018



Fonte: do próprio autor

O desenvolvimento do jogo é para os alunos terem uma ferramenta a mais como meio de treinamento e fixação do conhecimento para aumentarem suas menções, tendo em vista que a maior parte das menções está concentrada na menção MM, com aproximadamente 33%. O percentual de MS é aproximadamente 18% e SS próximo de 8%.

No primeiro semestre de 2019, Serão aplicados questionários e recebidos os dados estatísticos do jogo que só poderão ser recebidos quando os usuários enviarem.

4 Objetivos

Dado o problema e a justificativa deste trabalho, gerou-se a questão: Como dar suporte no ensino de EDO 1ª ordem apresentados em sala de aula de forma lúdica? A partir deste questionamento, levantou-se os objetivos gerais e específicos do trabalho.

4.1 Objetivos gerais

A meta central é desenvolver um jogo para celular que dê suporte ao ensino de matemática de forma lúdica aplicando estratégias de gamificação para ser algo divertido.

4.2 Objetivos específicos

De modo que facilite alcançar o objetivo central do trabalho, gerou-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver um aplicativo que a tela se adapte para diferentes tamanhhos de tela;
- Garantir que seja suportado para plataformas IOs e Android;
- Abordar o tema de EDO's em atividades lúdicas;
- Fornecer atividades de fixação objetivando dar suporte ao conteúdo de EDO's ministrados em sala de aula.

5 Equação Diferencial

Na engenharia e na natureza existem problemas e fenômenos que envolvem tempo, distância, tamanho, velocidade, volume entre outros. É possível fazer modelagens desses casos e relacioná-los a equações. Em alguns casos essas equações incógnitas envolvem uma taxa de variação, quando isso ocorre dizemos que as equações estão relacionadas às chamadas equações diferenciais (ED).

Equações diferenciais envolvem derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes (NÓBREGA, 2016).

5.1 Classificação de ED

As ED podem ser classificadas por **tipo**, **ordem** e **linearidade**.

5.1.1 Tipo

Podem ser ED ordinárias ou parciais, depende do número de variáveis independentes. Quando a ED tem apenas uma variável independente, é chamada de **ED ordinária (EDO)**. Quando a ED tem mais que uma variável independente, é chamada de **ED parcial (EDP)**. Uma EDP é representada pelo símbolo ∂, normalmente chamado de *del*.

Nas tabelas 2 e 3 é possível ver exemplos de EDO e EDP.

$\frac{dy}{dx} = x^2 y$
$\frac{dy}{dx} = sen(x)$
$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

Tabela 2 – Exemplos de EDO

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad u = f(x,t)$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial u}{\partial t} + 3u = 0 \quad , \quad u = f(x,t)$
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$

Tabela 3 – Exemplos de EDP

Na tabela 2 é possível observar que a variável dependente y é derivada apenas em relação à variável independente x.

Na tabela 3 é possível observar que a variável dependente u é dependente das variáveis x e t independentes.

5.1.2 Ordem

Uma EDO pode ser classificada de ordem 1 até n. A ordem é um número inteiro que representa o número máximo de derivadas de uma função. Abaixo seguem exemplos de diferente ordem das EDOs.

$y'' - (10y')^4 + 37y = 0$	Exemplo de EDO de segunda ordem
$dy/dx + sen(x) - y = 1$	Exemplo de EDO de primeira ordem
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial y} - 3x = 0 \quad , \quad u = f(x, y)$	Exemplo de EDP de segunda ordem

Tabela 4 – Ordem de equações diferenciais

Na tabela 4 o primeiro exemplo é uma EDO de ordem 2, tendo em vista que $(10y')^4$ é uma derivada de primeira ordem elevado à quarta potência. O segundo exemplo é uma EDO de primeira ordem, pois a maior quantidade de derivadas presente é 1. No terceiro exemplo temos uma EDP, pois a variável dependente u está derivada 2 vezes em relação à variável independente x e derivada 1 vez em relação à independente y. Portanto como o maior número de derivadas é 2, nos dá uma derivada de segunda ordem.

5.1.3 Linearidade

As equações diferenciais podem ser classificadas em linear e não-linear. Uma equação linear é aquela que possui apenas funções lineares no lado esquerdo e direito da igualdade. A seguir um exemplo da forma geral de uma equação linear.

$$\mathrm{a}_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{a}_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + \mathrm{a}_1(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{a}_0(x)y = g(x) \tag{5.1}$$

Para ser linear, é necessário cumprir 2 condições.

- A variável dependente y e todas as suas derivadas devem ter grau 1 (elevado a 1)
- Cada coeficiente é dependente apenas de 1 variável independente x.

1)	$-x^2y''' + 3xy'' + 2y = 0$	ED linear
2)	$2x\frac{d^3y}{dx^3} + (x-4)y = 0$	ED linear
3)	$yy'' - (2x-3)y' - 1y = 3x$	ED não linear
4)	$x\frac{d^3y}{dx^3} + (\frac{d^2y}{dx^2})^2 = 0$	ED não linear
5)	$xdy + (y - xy - e^x)dx = 0$	ED linear

Tabela 5 – ED lineares e não lineares

Na tabela 5 é possível ver exemplos de ED lineares e não lineares. O primeiro e o segundo exemplo são ED lineares pois cumprem as 2 propriedades, já que o termo independente y e todas suas derivadas tem grau 1 e todos os seus coeficientes estão apenas em função da variável independente x.

O terceiro exemplo da tabela 5 apesar de ter o termo independente y e todas suas derivadas de grau 1, apresenta um coeficiente em função da variável dependente y, no termo yy''

O quarto exemplo da tabela 5 também é não-linear pois apresenta a derivada de ordem 2 elevado ao grau 2, descumprindo com a propriedade de ter apenas termos lineares.

O quinto exemplo da tabela 5, apesar de não estar escrito na mesma forma de 5.1 também é uma ED linear. A equação $xdy + (y - xy - e^x)dx = 0$ pode ser reescrita para a forma 5.1, quando dividida a equação por dx,

$$x\tfrac{dy}{dx} + (y - xy - e^x) = 0,$$

e colocando y em evidência e somando e^x de ambos os lados:

$$x\tfrac{dy}{dx} + (1-x)y = e^x.$$

Então é possível notar que a variável y dependente e todas suas derivadas tem grau 1 e os coeficientes estão função da variável independente x, caracterizando-a como linear.

Para uma ED não ser linear basta que não cumpra 1 das duas propriedades citadas.

5.2 Solução de ED

Resolver uma ED significa encontrar a função que satisfaça a equação diferencial. É necessário integrar uma diferencial para encontrar a solução. Para dizer que uma equação soluciona uma EDO, basta que qualquer função f definida em algum intervalo I ao ser substituída na equação diferencial reduza a equação a uma identidade (NÓBREGA, 2016).

Por exemplo, considere a equação diferencial abaixo e a sua solução

$$y' = 25 + y^2 \tag{5.2}$$

$$y = 5tg(5x) \tag{5.3}$$

A equação y é considerada solução, pois ao se substituir y e sua derivada na ED 5.2 é encontrada a identidade $0 = 0$.

Como $y = 5tg(5x)$, então

$$y' = 5sec^2(5x) * 5, \tag{5.4}$$

que é igual a

$$y' = 25sec^2(5x). \tag{5.5}$$

Substituindo y e y' na equação teremos:

$$25sec^2(5x) = 25 + (5tg(5x))^2. \tag{5.6}$$

Utilizando uma propriedade da trigonometria a qual nos mostra que:

$$1 + tg^2(t) = sec^2(t). \tag{5.7}$$

Então podemos substituir

$$sec^2(5x) \quad \text{por} \quad 1 + tg^2(5x). \tag{5.8}$$

Com isso, temos a equação da seguinte maneira

$$25(1 + tg^2(5x)) = 25 + (5tg(5x))^2 \tag{5.9}$$

aplicando a distributiva no lado esquerdo e abrindo o quadrado do lado direito temos

$$25 + 25tg^2(5x) = 25 + 25tg^2(5x), \tag{5.10}$$

o que nos dá uma identidade, sendo mais visível na simplificação, resultando em $1 = 1$ (NÓBREGA, 2016).

5.2.1 Tipos de solução

Existem três tipos de solução de uma EDO, a **geral**, a **particular** e a **singular**.

- geral: Onde o número de possíveis constantes é n. Com n da ordem da EDO, a mesma quantidade das unidades da ordem de integração.
- particular: É a solução deduzida da solução geral, atribuindo valores particulares a constante, ou seja, o número máximo possível de constantes é 1, com um valor específico.
- singular: Não é uma solução deduzida da solução geral e só existe em alguns casos.

A seguir será mostrado um exemplo de solução geral de uma ED.

$\dfrac{dy}{dx} = x$ é o mesmo que $y' = x$, com y em função de x => y(x)

integrando dos dois lados, temos que:

$$\int y'dy = \int xdx => y + c1 = \frac{x^2}{2} + c2 \tag{5.11}$$

c2 - c1 = C, então temos a solução geral

$$y = \frac{x^2}{2} + C \tag{5.12}$$

Relacionado à solução específica temos os problemas de valor inicial (PVI), onde após encontrar a solução geral, deve-se substituir o valor inicial (VI) na equação para determinar o valor específico da constante.

Exemplo: É fornecido que

$$y = Ae^{-2x} \tag{5.13}$$

é solução para a equação diferencial y' + 2y = 0 e a condição inicial (ou VI) é y(0) = 3

É possível ver que y realmente é solução da ED. Derivando y, temos

$$y' = -2Ae^{-2x} \tag{5.14}$$

Substituindo na ED, vemos que:

$$-2Ae^{-2x} + 2(Ae^{-2x}) = 0 \quad \text{ou} \quad 0 = 0 \tag{5.15}$$

sendo assim reduzimos a equação à uma identidade, solucionando a equação.

Tendo visto que y é solução da ED y'. Vamos agora descobrir a solução particular, substituindo o VI.

$$y(0) = 3 \quad \text{e} \quad y = Ae^{-2x} \tag{5.16}$$

$$3 = Ae^{-2*0} \quad \text{então} \quad 3 = A \tag{5.17}$$

Da solução geral

$$y = Ae^{-2x} \tag{5.18}$$

temos a solução particular

$$y = 3e^{-2x} \tag{5.19}$$

5.2.2 Equação de variáveis separáveis

São as equações em que um lado da igualdade pode-se separar uma variável e do outro lado a outra variável mais uma constante arbitrária (C). Para obter a solução geral de equações separáveis é necessário isolar os termos e integrar os dois lados. Em caso de ser fornecido valor inicial, é possível obter a solução particular.

Exemplo:

Mdx = -Ndy

Com M = M(x) e N = N(y) podendo assumir funções de uma variável, produto de uma só variável ou constante. Abaixo são mostrados exemplos de EDO separáveis:

$xdx = ydy + C$	$x^2y'y - 2xy^3 = 0$ é igual a $x^2yy' = 2xy^3$ e também é igual a $\dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{y^3}{yy'}$	$xdx + sen(x) = \frac{1}{y}dy - 6y$

Tabela 6 – EDO de variáveis separáveis

Abaixo são mostrados exemplos de EDO não separáveis:

Na tabela 7 vemos que não é tão trivial separar a equações para integrar ambos os lados. Devido às equações de variáveis não separáveis, temos as equações homogêneas para tentar contornar esse problema não separação.

$x^2 - 3xy + 5y^2 = 0$, tentando separar, obtemos $x(x - 3y) = y^2$	$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$	$x^3 + x^2y + y^3 = 0$, tentando separar, obtemos $x^3 + (x^2y) = -y^3$

Tabela 7 – ED de variáveis não separáveis

5.2.3 Equação Homogênea

Algumas EDOs não separáveis podem se tornar separáveis fazendo uma troca de variável. Uma EDO é chamada de homogênea se for satisfeita a seguinte relação:

$$f(kx, ky) = k^m * f(x, y) \tag{5.20}$$

com m sendo o grau da homogeneidade.

Equações homogêneas podem ser escritas na forma

$$Mdx + Ndy = 0 \quad , \quad M(x) \quad e \quad N(y) \tag{5.21}$$

com M e N sendo homogêneas do mesmo grau.

A seguir um exemplo de EDO não separável e homogênea sendo transformada em uma separável após uma troca de variáveis.

$$f(x, y) = (2x - y)dx - (x + 4y)dy, \tag{5.22}$$

vamos substituir x por kx e y por ky para verificar que a equação é homogênea

$$f(kx, ky) = (2kx - ky)dx - (kx + 4ky)dy$$
$$f(kx, ky) = k(2x - y)dx - k(x + 4y)dy$$
$$f(kx, ky) = k[(2x - y) - (x + 4y)]$$

$$f(kx, ky) = k^1 * f(x, y). \tag{5.23}$$

É uma função homogênea de grau 2

Agora que vimos que é uma função homogênea, podemos fazer uma troca de variável para transformar a função em uma equação de variáveis separáveis. Vamos dizer que y = ux, assumindo que u é uma função diferenciável de x e então $dy/dx = u + \dfrac{xdu}{dx}$

Então substituindo y e dy na solução e fazendo as manipulações necessárias, temos que:

$$(2x - y)dx - (x + 4y)dy = 0$$

$$(2x - y)dx = (x + 4y)dy$$

$$\frac{(2x - y)}{(x + 4y)} = \frac{dy}{dx}$$
$$\frac{(2x - (ux))}{(x + 4(ux))} = u + \frac{xdu}{dx}$$
$$\frac{x(2 - u)}{x(1 + 4u)} = u + \frac{xdu}{dx}$$
$$\frac{2 - u}{1 + 4u} - u = \frac{xdu}{dx}$$
$$\frac{\frac{2 - u}{1 + 4u} - u}{du} = \frac{x}{dx}$$

Sendo assim, vimos um exemplo de como transformar uma EDO de variáveis não separáveis em uma EDO de variáveis separáveis, agora basta integrar os lados da igualdade.

5.2.4 Equação Exata

Uma EDO é denominada exata se puder satisfazer duas condições:

- 1ª: ser escrita na forma de:
$$Mdx + Ndy = 0; \tag{5.24}$$
Com M = M(x,y) e N = N(x,y).

- 2ª: estabelecer a seguinte igualdade:
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Algumas vezes, uma função não exata pode ser transformada em exata, multiplicando-a por um fator de integração $\mu(x)$, que resulta em :

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

5.2.5 Equação Linear 1ª ordem

Uma equação linear de 1ª ordem pode ser definida da forma geral como:

$$\mathrm{a}_1(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{a}_0(x)y = g(x) \tag{5.25}$$

dividindo toda a equação por a1, teremos $\mathrm{a}_0(x)/\,\mathrm{a}_1(x)$ uma função P(x) e $g(x)/\,\mathrm{a}_1(x)$ uma função f(x). Reescrevendo a equação, teremos dy/dx + P(x)y = f(x). Multipliquemos agora toda a equação por dx e passemos o termo f(x) para o lado esquerdo da equação e teremos

$$\mathrm{dy} + (\mathrm{P(x)y} - \mathrm{f(x)})\mathrm{dx} = 0$$

Multiplique a equação por $\mu(x)$

$$\mu(x)\mathrm{dy} + \mu(x)(\mathrm{P(x)y} - \mathrm{f(x)})\mathrm{dx}$$

Pelo critério para ser uma ED exata citado em (NÓBREGA, 2016), a equação é uma diferencial exata se

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(x) = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)(P(x)y - f(x))$$

Do lado esquerdo temos uma derivada ordinária e do lado direito derivamos em y.

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)P(x)$$

Agora vamos multiplicar a equação por $\frac{dx}{\mu}$ para obter uma ED separável

$$\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$$

Para resolver a equação separável, integramos ambos os lados

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int P(x)dx$$

Como resultado, obtemos

$$ln|u| = \int P(x)dx$$

Multiplicando por e de ambos os lados

$$e^{ln|\mu|} = e^{\int P(x)dx}$$

Dessa maneira encontramos o fator integrante como sendo

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Dessa maneira podemos resolver equações diferenciais exatas e equações diferenciais de primeira ordem

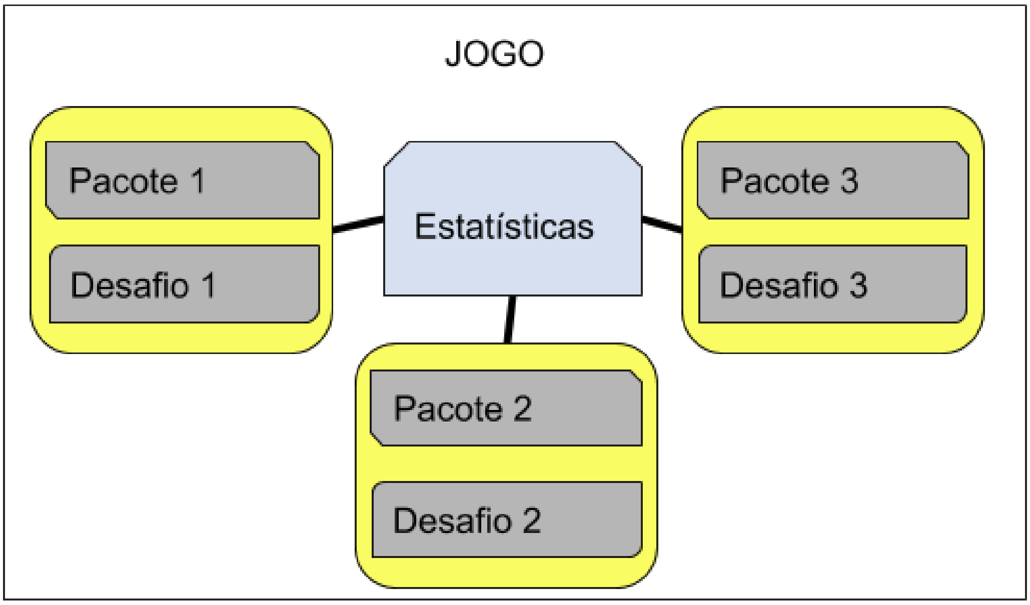
6 Metodologia

A metodologia a ser seguida será a pesquisa bibliográfica. Este tipo de metodologia visa pesquisar e conhecer a literatura existente para levantar um referencial teórico a respeito do tema a ser tratado. Serão utilizados a pesquisa de artigos nas bases de dados da CAPES com as credenciais de aluno da UnB para acessar os estudos. Não serão aceitos artigos pagos. Como referência para escolher artigos foi utilizado o artigo (CHERITON, 2007) para evitar gastar tempo desnecessário em artigos que podem não estar relacionados ao tema da pesquisa. Com o referencial teórico consolidado para o apoio de jogos e tecnologias ao ensino de matemática, será explicado o funcionamento do jogo e como jogar cada nível. Com o jogo definido, protótipo desenhado, features e requisitos definidos, será explicado e explicitado as tecnologias a serem utilizadas e como será o método de população das equações para que seja possível existir o jogo. Após a fase de planejamento aprovada inicia-se o desenvolvimento do jogo com entregas ágeis e contínuas no decorrer das *sprints*. Tendo o jogo pronto para uso, será aplicado em uma turma de cálculo 2 no 1º semestre de 2019 para fazer um comparativo com outra turma de C2 e avaliar se houve alguma melhoria de desempenho. As medições serão feitas através de um questionário que ainda não foi decidido se será qualitativo ou quantitativo e também através dos dados estatísticos compartilhados pelos jogadores do jogo.

7 Explicação do jogo

O jogo é composto em 3 pacotes e o módulo estatísticas. Cada pacote contém uma fase e um desafio. As fases contém diferentes níveis de dificuldade, sendo eles: fácil, médio e difícil. A dificuldade está relacionada às equações que serão apresentadas.

Figura 2 – Visão de pacotes do jogo



Fonte: do próprio autor

7.1 Pacote 1

O pacote 1 trata a respeito de conhecimento de ED. Objetiva fixar o reconhecimento e classificação. Serão realizadas perguntas para que o jogador responda a respeito da ordem, tipo e linearidade das ED.

A fase 1 é a caminhada do estudante em uma estrada até o objetivo de Cálculo 3 (C3) e ele lidará com obstáculos no caminho. Para passar é preciso responder questões a respeito de classificação e reconhecimento da ED. Ao interagir com cada obstáculo ele será questionado sobre um exemplo de ED e terá que escolher 1 resposta entre 4 opções, sendo que nos níveis fáceis existem 2 respostas corretas a cada 4 opções. Com o evoluir da dificuldade o número de opções corretas cairá para 1.

7.2 Pacote 2

O pacote 2 visa fixar o conhecimento de resolução de EDOs. Para isso jogaremos o jogo da memória. Jogo da memória é para achar as cartas gêmeas. Uma carta contém o exercício proposto e a carta gêmea contém a resposta correta. Com o aumento do nível de dificuldade o jogo conterá mais pares e exercícios mais complexos.

7.3 Pacote 3

O pacote três trata a respeito de aplicações de EDO.

7.4 Estatísticas

O módulo de estatísticas está relacionado à coleta de dados para a avaliação da quantidade de erros nas questões, quais foram as questões mais erradas e qual fase os estudantes tem mais dificuldade. O envio das estatísticas para o servidor não ocorrerá de forma programada, depende do jogador enviar os dados de acordo com a sua vontade de colaboração através de um botão pronto que esteja aguardando o envio das estatísticas.

8 Tecnologias

8.1 Plataformas mobile

Existem diversas maneiras de se construir APP para mobiles. Algumas apenas para celulares Android, outras para sistemas iOS e outras para ambas plataformas. Existes estratégias de desenvolvimento onde o código gerado já é nativo da própria plataforma alvo e outras onde o código é transformado para a plataforma nativa. Existe um projeto chamado kivy, onde é escrito código Python e o kivy converte o código para gerar aplicações para Android e iOS.

Outra estratégia é o react native, onde o código é escrito utilizando HTML, CSS e JavaScript com o react e parte desse código é convertido em nativo para rodar com maior eficiência nos celulares.

8.2 Ambiente de desenvolvimento

Será usado o *docker* para criar ambiente virtual e portável. Será usado uma imagem ubuntu no container, com as dependências do react native e node js. Para baixar os pacotes utilizará o nvm. O WolfranAlpha será utilizado para fazer requisições de EDO's para serem utiliz adas nas fases do jogo. Com uma chave de teste gratuita serão baixados os metad ados em formato JSON através de uma API. A API baixada do wolfran na linguagem javascript foi baixada no endereço <https://products.wolframalpha.com/api/libraries/javascript/>. A chave gratuita permite 2000 requisições em um mês, com o código de série: 3GG QAT-98EG4KV6VL. A estratégia é baixar os metadados das requisições de EDO's com equações e respostas, para comprimir e utilizar no jogo sem que a internet seja um requisito.

9 Conclusão

Para trabalhos futuros podem ser pensadas em mais funcionalidades para o jogo, como a criação de um personagem e ganho de itens para utilizações no jogo.

Referências

BARBOSA, M. J. F.; CAMARGO, J. A. de. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. v. 1, p. 18, 2014. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_mat_artigo_maria_jose_fagundes_barbosa.pdf>. Citado na página 14.

BARBOSA, M. J. F.; CAMARGO, J. A. de. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. v. 1, 2014. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_mat_artigo_maria_jose_fagundes_barbosa.pdf>. Citado na página 15.

CHERITON, S. K. R. **How to Read a Paper**. University of Waterloo, 2007. Citado na página 28.

COELHO, V. M. **O jogo como prática pedagógica na escola inclusiva**. 2010. Accessado em: 22/10/2018. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/1485/Coelho_Vania_Maria.pdf?sequence=1>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

DICHEVA, D. *et al.* Gamification in education: A systematic mapping study. **Educational Technology & Society**, v. 18, p. 75–88, 07 2015. Citado na página 13.

DUPAUL, G. J.; STONER, G. **TDAH nas escolas - Estratégias de Avaliação e Intervenção**. 1ª edição. ed. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2007. 130 p. ISBN 978-85-7680-017-0. Citado na página 13.

ESTADÃO. **Brasil é um dos piores em qualidade de matemática e ciências**. 2016. Accessado em: 20/10/2018. Disponível em: <https://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,brasil-e-um-dos-piores-em-qualidade-de-ensino-de-matematica-e-ciencias,10000061150>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.

GIACINTI, M. *et al.* A video game based on elementary differential equations. **Scientific Research**, 2013. Citado na página 15.

INEP. **Resultados de Leitura e Matemática - equipe nacional**. 2015. 27-29 p. Accessado em: 26/10/2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa_apresentacao_leitura_e_matematica.pptx>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 12.

INEP. **Resultados de Leitura e Matemática - equipe nacional**. 2015. Accessado em: 20/10/2018. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa_apresentacao_leitura_e_matematica.pptx>. Citado na página 12.

NETO, J. C.; BLANCO, M. B.; SILVA, J. A. da. O uso de gamificação e dificuldades matemáticas: possíveis aproximações. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 15, n. 1, 2017. ISSN 1679-1916. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/download/75151/42586>. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 14.

NÓBREGA, D. D. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. Caicó-RN, p. 1–18, 27–31, Junho 2016. Citado 3 vezes nas páginas 18, 21 e 26.

SANTOS, L. A. F. **Software gamificado para auxílio ao ensino e aprendizagem de matemática para crianças**. Brasília, Brazil, p. 75, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

SILVA, V. *et al.* Proposta de um aplicativo gamificado para o ensino de cálculo. **Congresso Regional sobre Tecnologias na Educação**, Recife/PE - Brasil, 2016. Disponível em: <http://ceur-ws.org/Vol-1667/CtrlE_2016_AC_paper_14.pdf>. Citado na página 13.

SOUZA, L. F. D. de. **Evasão do curso de Licenciatura em Matemática (Noturno) da Universidade de Brasília**. Brasília, 2016. Citado na página 10.