EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS - EDO

Aluna: Nathalia Feitosa Barata

Matrícula: 18/0144821

PLANOS SEMANAIS

MÓDULO 2

Plano de aula semanal: Semana 5

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180144821	**Nathalia Feitosa Barata**	**CC**	**Tatiane da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**15/04/2019**	**16/04/2019**	**18/04/2019**
Objetivos	Diferenciação de equações algébricas e equações diferenciais; classificação de equação diferencial.	Soluções de EDO de 1ª ordem linear homogênea e não homogênea.	Soluções de EDO de 1ª ordem linear não homogênea.
Informação	Equação algébrica: $x + 2 = 0$ $x = -2$ -> Número! Equação diferencial: $Y'' + 2XY = e^X$ Y = Y(x) -> FUNÇÃO!	EDO de 1ª ordem linear homogênea: colocar na forma padrão e integrar ambos os lados. EDO de 1ª ordem linear não homogênea: multiplicar a EDO pelo fator integrante $u(t) = e^{\int p(t)dt}$.	Equação separável: $N(y)dy = M(x)dx$ Forma homogênea: $V = \frac{y}{x}$ $V' = V'x + V$

Resumo	Classificação em tipo, ordem, linearidade e homogeneidade.	EDO 1ª Ordem Linear homogênea: $$y' + p(x)y = 0$$ Solução geral: $y = Ke^{-P(x)}$ EDO 1ª Ordem Linear não homogênea: $$y' + p(x)y = q(x)$$ Solução geral: $$y = \frac{1}{y(t)}\left[\int u(t)g(t)dt + k\right]$$	Solução forma separável: Integrar a equação separável $$\int N(y)dy = \int M(x)dx$$ Solução forma homogênea: $$\int \frac{1}{F(V) - V}dV = \int \frac{1}{x}dx$$
Observação	________	________	________
Dúvidas	Classificação da EDO	________	Resolução da EDO de 1ª ordem linear não homogênea na forma homogênea.
Monitoria	________	________	________

Plano de aula semanal: Semana 6

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180144821	Nathalia Feitosa Barata	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	22/04/2019	23/04/2019	25/04/2019
Objetivos	Conceito e aplicação da equação de Bernoulli e solução de EDO de 1ª ordem na forma exata e não exata.	Exemplo de aplicação de EDO de 1ª ordem e vista de prova.	Solução de EDO de 2ª ordem linear homogênea, teorema da existência e unicidade e verificação a partir do Wronskiano.
Informação	Equação de Bernoulli: $y' + p(x) = g(x).y^n$ EDO de 1ª ordem na forma exata e não exta: $M_{(x,y)}\mathrm{dx} + N_{(x,y)}\mathrm{dy} = 0$	Aplicação de EDO de 1ª ordem para a lei de resfriamento de Newton.	Forma padrão EDO de segunda ordem linear homogênea: $y'' + p(x)y' + g(x) = 0$

Resumo	Solução da equação de Bernoulli: I. Multiplicar a EDO por y^{-n}. II. $v = y^{1-n}$ Para saber se está na forma exta: I. $\frac{\partial M_{(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial N_{(x,y)}}{\partial x}$		Solução geral EDO 2ª ordem linear homogênea: $y'' = C_1 y_1 + C_2 y_2$ Wronskiano: $\begin{bmatrix} \frac{y_1}{y'_1} \frac{y_2}{y'_2} \end{bmatrix}$
Observação	___________	___________	___________
Dúvidas	Aula muito corrida, com muito conteúdo. Difícil de acompanhar o ritmo da aula.	___________	Aula muito corrida, com muito conteúdo. Difícil de acompanhar o ritmo da aula.
Monitoria	Presente na monitoria	___________	___________

Plano de aula semanal: Semana 7

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180144821	Nathalia Feitosa Barata	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	29/04/2019	30/04/2019	02/05/2019
Objetivos	Solução EDO 2ª ordem linear com coeficiente constante nos casos em que $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$	Solução EDO 2ª ordem linear com coeficiente constante nos casos em que $\Delta < 0$ Método dos coeficientes indeterminados	Método da variação dos parâmetros.
Informação	$ay'' + by' + cy = 0$ $y = e^{\lambda x}$ $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$	$\lambda = \alpha \pm \beta$ $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i.sen(\beta x)$ $\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$	Professora não pode ir a aula, material disponibilizado virtualmente.

Resumo	Solução geral: Caso 1 ($\Delta > 0$) $y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ Caso 2 ($\Delta = 0$) $y_H = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$	Solução geral: Caso 3 ($\Delta < 0$) $y_H = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 sen(\beta x)$	___________
Observação	___________	Faltei à aula.	___________
Dúvidas		___________	___________
Monitoria	Presente na monitoria	___________	___________

Plano de aula semanal: Semana 8

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180144821	Nathalia Feitosa Barata	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**06/05/2019**	**07/05/2019**	**09/05/2019**
Observação	Não houve aula	Não houve aula	Não houve aula
Informação	Apresentação do aplicativo para Android	Apresentação do aplicativo para Android	Apresentação do aplicativo para Android
Dúvidas	Método da variação dos parâmetros		
Monitoria	________	________	________

Plano de aula semanal: Semana 9

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180144821	Nathalia Feitosa Barata	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**13/05/2019**	**14/05/2019**	**16/05/2019**
Observação	Não houve aula com a professora	Não houve aula com a professora	Não houve aula com a professora
Monitoria	Frequentei a monitoria	__________	__________

Plano de aula semanal: Semana 10

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180144821	Nathalia Feitosa Barata	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**20/05/2019**	**21/05/2019**	**23/05/2019**
Observação	Sala de aula invertida	Aplicação da P2	__________
Monitoria	Frequentei a monitoria	__________	__________

MAPA CONCEITUAL

MÓDULO 2

EQUAÇÃO ALGÉBRICA X EQUAÇÃO DIFERENCIAL

$$x + 2 = 0$$

$$\boxed{x = -2}$$

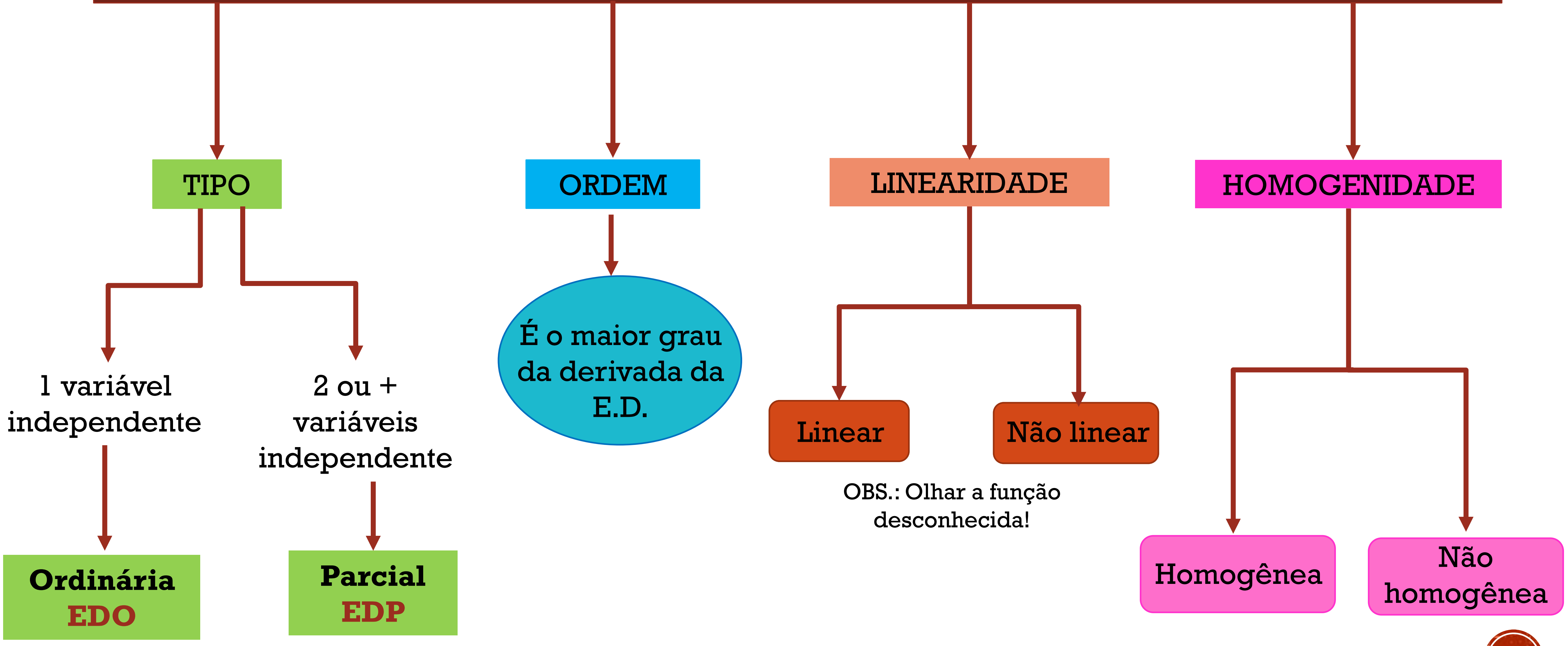
NÚMERO!

$$Y'' + 2XY = e^X$$

$$Y = Y(x)$$

FUNÇÃO!

CLASSIFICAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL



EDO 1ª ORDEM

CLASSIFICAÇÃO

- **Lineares**
  - **Homogênea**
  - **Não Homogênea**
- **Não lineares**
  - **Separável**
  - **Exata**
  - **Não exata**
  - **Homogênea**

LINEARES

HOMOGÊNEA

Forma padrão

$$y' + p(x)y = 0$$

Solução geral de y(x)

$$y = Ke^{-P(x)}$$

$$P(x) = \int p(x)dx$$

NÃO HOMOGÊNEA

Caso geral
Forma padrão

$$y' + p(x)y = g(x)$$

$$g(x) \neq 0$$

Fator integrante

$$u(t) = e^{\int p(x)dx}$$

Solução geral

$$y = y(t) = e^{-\int p(x)dx}\left[e^{\int p(x)dx} g(x)dx + K\right]$$

NÃO LINEARES

1 NA FORMA SEPARÁVEL

$$N(y)dy = M(x)dx$$

Solução:

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx$$

2 NA FORMA HOMOGÊNEA

$$V = \frac{y}{x}$$

$$y = V\,x$$

$$y' = V'x + V$$

$$F(V) = \frac{dV}{dx}x + V$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{F(V) - V}}_{N(y)} dV = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{M(x)} dx$$

Resolver a equação separável

NÃO LINEARES

$$M_{(x,y)}\mathrm{dx} + N_{(x,y)}\mathrm{dy} = 0$$

ou

$$M_{(x,y)} + N_{(x,y)}\mathrm{y}' = 0$$

$$\frac{\partial M_{(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial N_{(x,y)}}{\partial y}\ ?$$

SIM

É EXATA!

Solução:

1° Escolher uma das funções e integrar, por exemplo:

$$F_{(x,y)} = \int M_{(x,y)}dx$$

2° Derivar a $F_{(x,y)}$ e igualar à outra.

$$\frac{\partial F_{(x,y)}}{\partial y} = N_{(x,y)}$$

3° Integrar os termos restante para obter $\varphi_{(x)}$

NÃO

NÃO EXATA!

Solução:

1° Achar o fator integrante:

Caso1:

$$P_{(x)} = \frac{\frac{\partial M_{(x,y)}}{\partial y} - \frac{\partial N_{(x,y)}}{\partial x}}{N_{(x,y)}}$$

Caso2:

$$P_{(x)} = \frac{\frac{\partial N_{(x,y)}}{\partial x} - \frac{\partial M_{(x,y)}}{\partial y}}{M_{(x,y)}}$$

2° Multiplicar o fator integrante pela EDO.

3° Solução das EXATAS.

EDO DE BERNOULLI

$$y' + p(x)y = \mathbf{g(x)}y^n$$

Solução:

1° Multiplicar a EDO por: y^{-n}

2° $V = y^{1-n}$ e deriva V.

3° Substituir na Edo do passo 1.

e resolver a EDO linear.

4° Voltar para a variável y.

AQUECIMENTO/ RESFRIAMENTO DE NEWTON

$$T = T_m + ce^{kt}$$

T – Temperatura

T_m - Temperatura do meio

K – taxa de crescimento

t - Tempo

EDO 2ª ORDEM

LINEAR

Homogênea

CASO GERAL: Princípio da superposição

COEFICIENTES CONSTANTES

Tipo 1: $\Delta > 0$

Tipo 1: $\Delta = 0$

Tipo 3: $\Delta < 0$

Não homogênea

MCI

MVP

EDO 2ª ORDEM LINEAR HOMOGÊNEA

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$y = e^{\lambda x}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

* Equação característica

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$\Delta > 0$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

$\Delta = 0$

$$y_1 = e^{\lambda x}$$
$$y_2 = xe^{\lambda x}$$

$\Delta < 0$

$$y_1 = e^{\lambda x}.\cos(\beta x)$$
$$y_2 = e^{\lambda x}.\operatorname{sen}(\beta x)$$

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

* Solução geral homogênea

EDO 2ª ORDEM LINEAR NÃO HOMOGÊNEA

$$ay^2 + by + cy = \mathbf{f(x)}$$

Como resolver?

1. Resolver a EDO como se fosse homogênea
   $$y_H(x)$$
2. Encontrar a solução particular
   $$y_p(x)$$
3. Encontrar a solução geral
   $$y_G(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

MÉTODO 1 - MCI

$f(x)$	$y_p(x)$	OBS.:
$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + c$	$y_p(x) = x^s[Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + \mathrm{C}\,]$	s é o número de vezes que 0 é raiz da equação característica
$f(x) = e^{\alpha x}$	$y_p(x) = x^s[Ae^{\alpha x}]$	s é o número de vezes que α é raiz da equação característica
$f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $f(x) = e^{\alpha x} sen(\beta x)$	$y_p(x) = x^s[Ae^{\alpha x} sen\beta x + Be^{\alpha x} cos\beta x]$	s é o número de vezes que $\alpha + \beta$ é raiz da equação característica

MÉTODO 2 - MVP

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = \mathrm{Q(x)}$$

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Constante

Função

$$y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$$

$$V'_1 y_1 + V'_2 y_2 = 0$$

$$V'_1 y'_1 + V'_2 y'_2 = Q(x)$$

Obs.: integrar $V'_1 \; e \; V'_2$

SALA DE AULA INVERTIDA

MÓDULO 2

OSCILAÇÕES MECÂNICAS

$$my'' + \Upsilon y' + ky = F(t)$$

LIVRES SEM AMORTECIMENTO

$$\boxed{my'' + ky = 0}$$

LIVRES COM AMORTECIMENTO

$$\boxed{my'' + \Upsilon y' + ky = 0}$$

- Superamortecimento
  $\Delta > 0$
- Amortecimento crítico
  $\Delta = 0$
- Subamortecimento
  $\Delta < 0$

FORÇADAS

$$\boxed{my'' + \Upsilon y' + ky = F(t)}$$

② $m y'' + \gamma y' + K y = 0$

$m\lambda^2 + \gamma \lambda + K = 0$

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}$$

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}$$

* superamortecimento

$\Delta > 0$

$$y = C_1 \cdot e^{\left(\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}\right)x} + C_2\, e^{\left(\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}\right)x}$$

* amortecimento crítico

$\Delta = 0$

$$y = C_1\, e^{\left(\frac{-\gamma}{2m}\right)x} + C_2 x\, e^{\left(\frac{-\gamma}{2m}\right)x}$$

* subamortecimento

$\Delta < 0$

$$y = e^{\left(-\frac{\gamma}{2m}\right)x} \cdot \left(\cos\left(\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}\right)x\right) + \operatorname{sen}\left(\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mK}}{2m}\right)x\right)\right)$$

(3) $my'' + \cancel{\gamma y'}^{0} + ky = 0$

$my'' + ky = 0$

$t = 0{,}16\,s$

$l = 0{,}18\,m$

$m = 5\,Kg$

$g = 9{,}81\,m/s^2$

$5y'' + 272{,}5y = 0 \;/5$

$\lambda^2 + 54{,}5 = 0$

$\lambda = \pm 7{,}4i$

$\lambda = 0 \pm 7{,}4i$

$Y_1 = \cos(7{,}4t)$

$Y_2 = sen(7{,}4t)$

$Y_H = C_1 \cos(7{,}41t) + C_2\, sen(7{,}41t)$

$t = 0, \quad x = 0{,}18\,m$

$C_2 = 0$

$Y_H = 0{,}18 \cos(7{,}4t) + C_2\, sen(7{,}4t)$

$y' = -1{,}3339\, sen(7{,}4t) + 7{,}4\, C_2 \cos(7{,}4t)$

$t = 0, \quad x' = 0$

$0 = 7{,}4\, C_2$

$C_2 = 0$

$Y_H = 0{,}18 \cos 7{,}4t$

$t = 0{,}16\,s$

$Y_H = 0{,}179\,m$

$y' = -1{,}332\, sen(7{,}4t)$

$y' = 1{,}57\,m/s$

$y'' = -9{,}85 \cos(7{,}4t)$

$y'' = -9{,}84\,m/s^2$

EXERCÍCIOS SELECIONADOS

MÓDULO 2

Exercícios EDO 1ª ordem

1) Classifique as ED:

a) $t^2 \frac{d''y}{dt^2} + t.\frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$

EDO 2ª ordem, linear, Não homogênea

b) $\frac{d^{(4)}y}{dt^4} + \frac{d^{(3)}y}{dt^3} + \frac{d''y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

EDO 4ª ordem, linear, Não homogênea

c) $\frac{d''y}{dt^2} + \operatorname{sen}(t+y) = \operatorname{sen} t$

EDO 2ª ordem, Não linear, Não homogênea

d) $y^2 y'' + t y' + 2y = 0$

EDO 2ª ordem, Não linear, homogênea

e) $(1+y^2)\frac{d''y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$

EDO 2ª ordem, Não linear, Não homogênea

2) Obtenha o campo de direções

a) $y' = \underbrace{x^2 + y^2}$

$f(x,y) = K$

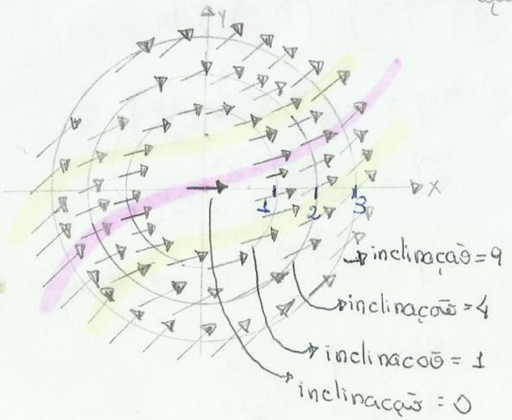
Se $K = 1$, $\underbrace{x^2 + y^2} = 1 = y'$

circunferência de raio = 1

função da circunferência: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

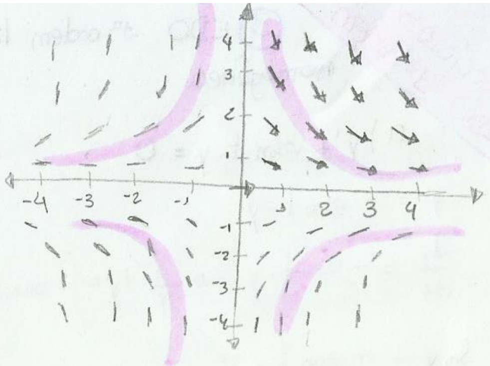
P/ $x^2+y^2 = K^2$ há uma circunferência de raio K e todas as soluções que passam sobre essa circunferência tem inclinação K^2 sobre a circunferência.

↳ quanto maior o K, maior a inclinação.



b) $y' = -\frac{y}{x}$

Ponto	inclinação da reta tangente
(1,2)	$y' = -\frac{2}{1} = -2$
(1,3)	$y' = -3$
(1,4)	$y' = -4$
(1,1)	$y' = -1$
(2,1)	$y' = -\frac{1}{2}$
(2,2)	$y' = -1$
(2,3)	$y' = -\frac{3}{2}$
(2,4)	$y' = -\frac{1}{2}$
(3,1)	$y' = -\frac{1}{3}$
(3,2)	$y' = -\frac{2}{3}$
(3,3)	$y' = -1$
(3,4)	$y' = -\frac{4}{3}$



c) Objeto em queda livre

↑ γv → força de resistência do ar

↓ mg → força peso

2ª lei de Newton → $F = m.a$

$a = \frac{dv}{dt} = v'(t)$ $\quad F = m.v'(t)$

$F_r = P - F_{\text{resistência do ar}} = mg - \gamma v$

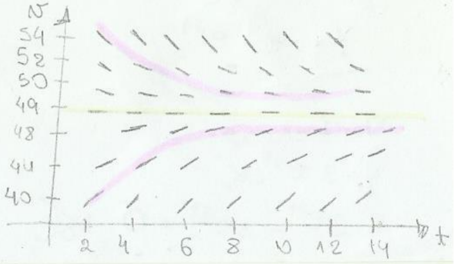
$mg - \gamma v = m v'(t) \quad \div m$

$g = v'(t) + \frac{\gamma v}{m}$

P/ $m = 10$ kg e $\gamma = 2$ kg/s

$v'(t) = 9{,}8 - \frac{1}{5} v$

v	v'
40	1,8
44	1
48	0,2
49	0
50	-0,2
52	-0,6
54	-1



Exercícios EDO 1ª ordem

③ EDO 1ª ordem linear homogênea

a) $y' + \operatorname{sen} t \cdot y = 0$

$y' = -\operatorname{sen} t \cdot y$

$\frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t \cdot y \rightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = \int -\operatorname{sen} t\, dt$

$\ln y = +\cos t + C$

$e^{\ln y} = e^{\cos t} \cdot e^{c}$

$\boxed{y = K \cdot e^{\cos t}}$ solução geral

Verificação:

$y' = (-\operatorname{sen} t) \cdot K \cdot e^{\cos t}$

Substitui na EDO:

$-\operatorname{sen} t \cdot K \cdot e^{\cos t} + \operatorname{sen} t \cdot K \cdot e^{\cos t} = 0$

$0 = 0$ ok

b) $y' - 3y = 0$

$y' = 3y$

$\frac{dy}{dt} = 3y \rightarrow \int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 3 t^{0}\, dt$

$\ln y = 3t + C$

$y = e^{3t} \cdot e^{c}$

$y = K \cdot e^{3t}$

Verificação:

$y' = 3 e^{3t} \cdot K$

$3e^{3t} - 3e^{3t} = 0$ ok

c) $2y' + (x^2 + 4x) y = 0 \quad \div 2$

$y(0) = 4$

$y' = -\left(\frac{x^2+4x}{2}\right) y \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x^2+4x}{2}\right) y$

$\int \frac{1}{y}\, dy = \int -\left(\frac{x^2+4x}{2}\right) dx$

$\ln y = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right) + C$

$e^{\ln y} = e^{-\frac{x^3}{6} - x^2} \cdot e^{c}$

$y = e^{-\frac{x^3}{6} - x^2} \cdot K \rightarrow$ solução geral

$y(0) = 4$

$4 = e^{-\frac{0^3}{6} - 0^2} \cdot K$

$K = 4 \rightarrow y = 4 \cdot e^{-\frac{x^3}{6} - x^2}$

sol. específica

④ EDO 1ª ordem linear não homogênea

a) $\begin{cases} y' + 9y = 3 \\ y(0) = 4 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = 3 - 9y$

$\frac{dy}{dx} = -9\left(-\frac{3}{9} + y\right)$

$\int \frac{1}{\left(-\frac{3}{9} + y\right)} dy = \int -9 x^{0} dx$

$-\frac{3}{9} + y = e^{-9x} \cdot K$

$y = K \cdot e^{-9x} + \frac{3}{9}$

$y(0) = 4$

$4 = K \cdot e^{-9 \cdot 0} + \frac{3}{9}$

$4 - \frac{3}{9} = K$

$K = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}$

$y = \frac{11}{3} e^{-9x} + \frac{1}{3}$

b) $y' + 3y = e^{t}$ $y(t)$

$y(0) = 2$

$u(t) = e^{at} = e^{3t}$

$e^{3t} y = \int e^{3t} \cdot e^{t}\, dt + K$

$y = e^{-3t}\left[\int e^{4t}\, dt + K\right]$

$y = e^{-3t}\left(\frac{e^{4t}}{4} + K\right)$

$y(0) = 2$

$\boxed{2 = K}$

$y = e^{-3t}\left(\frac{e^{4t}}{4} + 2\right)$

c) $y' + 3y = t + e^{-2t}$

$u(t) = e^{at} = e^{3t}$

$e^{3t} y' + 3e^{3t} y = e^{3t} t + e^{3t} \cdot e^{-2t}$

$\int [e^{3t} \cdot y]'\, dt = \int e^{3t} t + e^{t}\, dt$

Rascunho:

$\int e^{3t} \cdot t\, dt$

	D	I
+	t	e^{3t}
−	1	$\frac{1}{3} \cdot e^{3t}$
+	0	$\frac{1}{9} e^{3t}$

$\frac{t e^{3t}}{3} - \frac{1}{9} e^{3t}$

$e^{3t} y = \frac{t}{3} e^{3t} - \frac{1}{9} e^{3t} + e^{t} + C$

$y = \frac{t}{3} - \frac{1}{9} + e^{-2t} + C \cdot e^{-3t}$

Exercícios EDO 1ª ordem

5 EDO 1ª ordem na forma separável

a) $y'(x+1) = y$; $y(0) = 2$

$$\frac{dy}{dx}(x+1) = y$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{y}\, dy}_{N(y)} = \underbrace{\int \frac{1}{x+1}\, dx}_{M(x)}$$ forma separável

$$\ln y = \ln(x+1) + C$$

$$e^{\ln y} = e^{\ln(x+1)+C}$$

$$y = (x+1)e^C$$

$\boxed{y(0) = 2}$

$$2 = (0+1)K$$

$$K = 2$$

$$y = 2(x+1)$$

b) $y' = \dfrac{4x - x^3}{4 + y^3}$

$$(4+y^3)\frac{dy}{dx} = (4x - x^3)$$

$$\int (4+y^3)\, dy = \int (4x - x^3)\, dx$$

$$4y + \frac{y^4}{4} = \frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

$$4y + \frac{y^4}{4} = 2x^2 - \frac{x^4}{4} + C$$

c) $y' = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$; $y(0) = 1$

$$(y+e^y)\frac{dy}{dx} = x - e^{-x}$$

$$\int \underbrace{(y+e^y)}_{N(y)}\, dy = \int \underbrace{(x - e^{-x})}_{M(x)}\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + C$$

$y(0) = 1$

$$\frac{1^2}{2} + e^1 = \frac{0^2}{2} + e^{-0} + C$$

$$\frac{1}{2} + e - 1 = C$$

$$C = e - \frac{1}{2}$$

$$\frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + e - \frac{1}{2}$$

6 EDO 1ª ordem na forma homogênea

a) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

$v = \dfrac{y}{x}$

$y = v.x$

$y' = v'x + v$

$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}$$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$v'x + \cancel{v} = \frac{1}{v} + \cancel{v}$$

$$\frac{dv}{dx}x = \frac{1}{v}$$

$$\int v\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln x + C$$

$$v^2 = 2\ln x + C$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2\ln x + C \rightarrow y^2 = 2x^2 \ln x + C$$

b) $x^2 y' - (y^2 + 2xy) = 0 \quad \div x^2$

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2} \rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v'x + v = v^2 + 2v \rightarrow v'x = v^2 + v$$

$$\frac{dv}{dx}x = v^2 + v \rightarrow \int \frac{1}{v^2+v}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln(v^2+v) = \ln(x + C)$$

$$v^2 + v = x.C$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} = x.C$$

c) $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0 \quad \div dx$

$$(x^2+3xy+y^2)\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} - x\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = 0$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = x^2 y'$$

$$y' = \frac{x^2}{x^2} + \frac{3xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$y' = 1 + \frac{3y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \rightarrow y' = 1 + 3v + v^2$$

$$v'x + v = 1 + 3v + v^2$$

$$\frac{dv}{dx}x = 1 + 2v + v^2$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{1+2v+v^2}\, dv}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int \frac{1}{x}\, dx}_{\mathrm{II}}$$

Exercícios EDO 1ª ordem

I $\displaystyle\int \frac{1}{v^2+2v+1}\, dv$

$\Delta = 4 - 4.1 = 0$

$v = \dfrac{-2}{2} = -1$

$$\int \frac{1}{(v+1)^2}\, dv$$

$u = v+1$

$du = dv$

$$\int \frac{1}{u^2}\, du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{v+1} + C$$

II $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$

$$\frac{-1}{v+1} = \ln x + C$$

$$\frac{-1}{\frac{y}{x}+1} = \ln x + C$$

Exercícios EDO 1ª ordem

① Solução de EDO 1ª ordem na forma exata

a) $2x + y^2 + 2xyy' = 0$

$$\left\{ \begin{array}{c} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \\ \text{ou} \\ M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0 \end{array} \right\}$$

$M(x,y) = 2x + y^2$

$N(x,y) = 2xy$

$$\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \;?}$$

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 + 2y$

$\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y$

$=$ ⇝ é exata

$\boxed{F(x,y) = \int M(x,y)\,dx} = \int 2x + y^2\,dx$

$\dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + y^2x + \varphi(x)$

$\boxed{\dfrac{\partial}{\partial y} F(x,y) = N(x,y)}$

$0 + 2xy + \varphi'(x) = 2xy$

$\int \varphi'(x) = \int 0$

$\varphi(x) = c$

$\therefore F(x,y) = x^2 + y^2x + c$ //

b) $(y \cdot \cos x + 2x \cdot e^y) + (\text{sen}\,x + x^2 e^y - 1)\,y' = 0$

$M(x,y) = y \cdot \cos x + 2x \cdot e^y$

$N(x,y) = \text{sen}\,x + x^2 e^y - 1$

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x + 2x e^y \;;\; \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos x + 2x e^y - 0$

$=$

$F(x,y) = \int y \cdot \cos x + 2x \cdot e^y\,dx$

$= \left\{ y \cdot \text{sen}\,x + \dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} e^y + \varphi(x) \right\}' \dfrac{d}{dy}$

$\cancel{\text{sen}\,x} + \cancel{x^2 e^y} + \int \varphi'(x) = \cancel{\text{sen}\,x} + \cancel{x^2 e^y} - 1$

$\varphi(x) = -1x + c$

$F(x,y) = y \cdot \text{sen}\,x + x^2 e^y - x + c$ //

c) $(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0$

$M(x,y) = 2x - y \qquad N(x,y) = 2y - x$

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -1 \qquad \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -1$

$=$

$F(x,y) = \int 2x - y\,dx = \dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - yx + \varphi(x)$

$\{F(x,y)\}' = N(x,y) \Rightarrow \cancel{-x} + \int \varphi'(x) = \int 2y \cancel{-x}$

$= \varphi(x) = \dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}} = y^2 + c$

$F(x,y) = x^2 - yx + y^2 + c$ //

d) $(2x+3) + (2y-2)\,y' = 0$

$M(x,y) = 2x+3 \qquad N(x,y) = 2y-2$

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0 \;\xleftrightarrow{=}\; \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$

$F(x,y) = \int 2x+3\,dx = \dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 3x + \varphi(x)$

$\{F(x,y)\}'\,dy = 0 + \int \varphi'(x) = \int 2y - 2\,dy$

$\varphi(x) = \dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}} - 2y + c$

$F(x,y) = x^2 + 3x + y^2 - 2y + c$ //

e) $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$

$M(x,y) = 3x^2 - 2xy + 2 \qquad N(x,y) = 6y^2 - x^2 + 3$

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2x \qquad \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2x$

$=$

$F(x,y) = \int 3x^2 - 2xy + 2\,dx = \dfrac{3x^3}{3} - 2y\dfrac{x^2}{2} + 2x + \varphi(x)$

$= \{x^3 - x^2y + 2x + \varphi(x)\}'\,dy$

$\cancel{-x^2} + \int \varphi'(x) = \int 6y^2 \cancel{-x^2} + 3\,dy$

$\varphi(x) = \dfrac{6y^3}{3} + 3y = 2y^3 + 3y + c$

$F(x,y) = x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y + c$ //

Exercícios EDO 1ª ordem

② Solução de EDO 1ª ordem na forma não exata

a) $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

$M(x,y) = 3xy + y^2 \qquad N(x,y) = x^2 + xy$

$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 3x + 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2x + y$

$\neq$ ñ exata

Fator integrante

$$p(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy}$$

$$= \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

$u'(x) = p(x) \cdot u(x)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot u$$

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$\ln u = \ln x \rightarrow u(x) = x$

$x(3xy + y^2)dx + x(x^2 + xy)dy = 0$

$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$ Exata!

$$F(x,y) = \int 3x^2y + xy^2\, dx = \frac{3x^3y}{3} + \frac{x^2}{2}y^2 + \varphi(x)$$

$$= \left\{x^3y + \frac{x^2}{2}y^2 + \varphi(x)\right\}' dy$$

$x^3 + \cancel{x^2y} + \varphi'(x) = x^3 + \cancel{x^2y}$

$\int \varphi'(x) = \int 0$

$\varphi(x) = C$

$$F(x,y) = x^3y + \frac{x^2}{2}y^2 + C$$

b) $-2xy + (3x^2 - y^2)y' = 0$

$M(x,y) = -2xy \qquad N(x,y) = 3x^2 - y^2$

$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 6x$

$\neq$ ñ exata

Fator integrante

$$p(x) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)} = \frac{6x - (-2x)}{-2xy} = \frac{8x}{-2xy} = -\frac{4}{y}$$

$u'(x) = p(x) \cdot u(x)$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{4}{y} \cdot u \rightarrow \int \frac{1}{u}\, du = \int -\frac{4}{y}\, dy$$

$= \ln u = -4 \ln y$

$= \ln u = \ln y^{-4}$

$u = y^{-4}$

$$u(y) = \frac{1}{y^4}$$

$$\frac{1}{y^4}[-2xy] + \frac{1}{y^4}(3x^2 - y^2)y' = 0$$

$$\frac{-2x}{y^3} + \left(\frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2}\right)y' = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{0 - (-2x)3y^2}{y^6} = \frac{6x}{y^4}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{6xy^4}{y^8} = \frac{6x}{y^4}$$

= Exata!

$$F(x,y) = \int \frac{-2x}{y^3}\, dx = \frac{-2}{y^3} \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(x)$$

$$\left\{-\frac{x^2}{y^3} + \varphi(x)\right\}' dy = N(x,y)$$

$$\{-x^2 \cdot y^{-3} + \varphi(x)\}' dy$$

$$\cancel{\frac{3x^2}{y^4}} + \int \varphi'(x) = \cancel{\frac{3x^2}{y^4}} \int -\frac{1}{y^2}\, dy$$

$\varphi(x) = \int -y^{-2}\, dy$

$$\varphi(x) = \frac{1}{y} + C$$

$$F(x,y) = \frac{-x^2}{y^3} + \frac{1}{y} + C$$

EDO 1ª ordem

c) $y\,dx + (2x - y\,e^y)\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2$

$\boxed{\neq \quad \text{Ñ exata!}}$

Fator integrante $\mu_{(x,y)} = y$ $\boxed{\text{dado}}$

$y \cdot y\,dx + y(2x - y \cdot e^y)\,dy = 0$

$y^2\,dx + 2xy - y^2 e^y\,dy = 0$

$M_{(x,y)} = y^2 \qquad N_{(x,y)} = 2xy - y^2 e^y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \xleftarrow[\text{Exata}]{=} \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$F_{(x,y)} = \int y^2\,dx = \{y^2 x + \varphi(x)\}'\,dy$

$2xy + \int \varphi'(x) = 2xy - \int -y^2 e^y\,dy$

$\boxed{uv - \int v\,du}$

$u = y^2 \qquad v = e^y$

$du = 2y\,dy$

$y^2 e^y - \int e^y 2y\,dy$

$y^2 e^y - 2y e^y - 2\int e^y\,dy$

$y^2 e^y - 2y \cdot e^y - 2e^y + C$

$F_{(x,y)} = xy^2 - (y^2 - 2y - 2)\,e^y - C$

d) $dx + \left(\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right) dy = 0$

$M_{(x,y)} = 1 \qquad N_{(x,y)} = \frac{x}{y} - \operatorname{sen} y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y}$

Fator integrante

$p(x) = \dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \dfrac{\frac{1}{y} - 0}{1} = \frac{1}{y}$

$\mu'(y) = p(y)\,\mu(y)$

$\int \frac{1}{\mu}\,d\mu = \int \frac{1}{y}\,dy \rightarrow \ln \mu = \ln y$

$\mu(y) = y$

$y\,dx + (x - y \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

$F_{(x,y)} = \int y\,dx = \{y \cdot x + \varphi'(x)\}'\,dy$

$x + \int \varphi'(x) = x - \int y \operatorname{sen} y\,dy$

$\boxed{uv - \int v\,du}$

$u = y \qquad v = \operatorname{sen} y$

$du = dy$

$y \cdot \operatorname{sen} y - \int \operatorname{sen} y\,dy$

$y \cdot \operatorname{sen} y + \cos y + c$

$F_{(x,y)} = xy - \operatorname{sen} x - \cos y + c$

e) $(3x^2 y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2x + 3y^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

Fator integrante

$p(x) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N_{(x,y)}} = \dfrac{3x^2 + 2x + 3y^2 - 2x}{x^2 + y^2}$

$= \dfrac{3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 3$

$\mu'(x) = p(x) \cdot \mu(x)$

$\int \frac{1}{\mu}\,d\mu = \int 3\,dx \rightarrow \ln \mu = 3x$

$e^{\ln \mu} = e^{3x}$

$\mu = e^{3x}$

$(e^{3x} \cdot 3x^2 y + 2xy \cdot e^{3x} + y^3 e^{3x}) + (e^{3x} x^2 + e^{3x} y^2)\,y'$

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{3x} \cdot 3x^2 + 2x e^{3x} + 3e^{3x} y^2$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3e^{3x} x^2 + e^{3x} 2x + y^2 3 \cdot e^{3x}$ =

$F_{(x,y)} = \int e^{3x} x^2 + e^{3x} y^2\,dy$

$= \left\{e^{3x} x^2 y + e^{3x} \frac{y^3}{3} + \varphi(y)\right\}'\,dx$

$y \cdot (3e^{3x} \cdot x^2 + e^{3x} \cdot 2x) + \frac{y^3}{3} \cdot 3 \cdot e^{3x} + \varphi'(y)$

$3e^{3x} x^2 y + 2e^{3x} xy + e^{3x} y^3 + \varphi'(y) = e^{3x} 3x^2 y + 2xy e^{3x} + y^3 e^{3x}$

$\int \varphi'(y) = \int 0$

$\varphi(y) = c$

$F_{(x,y)} = e^{3x} x^2 y + e^{3x} \frac{y^3}{3} + c \quad (\times 3)$

$F_{(x,y)} = e^{3x}(3x^2 y + y^3) + c$

EDO 1ª ordem

3 Eq. de Bernoulli

a) $\begin{cases} y' - y = e^{-3x} y^4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

I multiplicar por y^{-m}

$$\boxed{y^{-4}y' - y^{-3} = e^{-3x}}$$

II $u = y^{-3}$ $\quad u' = -3y^{-4}y'$

IV $\dfrac{u'}{-3} - u = e^{-3x}$ $\quad$ EDO L NH

$(\times(-3))$

$$u' + 3u = -3e^{-3x}$$

$u(x) = e^{3x}$ → fator integrante

$$e^{3x}u' + 3ue^{3x} = -3e^{-3x}\cdot e^{3x}$$

$$\int \{e^{3x}\cdot u\}'\,dx = \int -3\,dx$$

$$e^{3x}\cdot u = -3x + c$$

$$u = (-3x + c)e^{-3x}$$

V $u = y^{-3}$

$$y^{-3} = (c - 3x)e^{-3x}$$ sol. geral

VI $1^{-3} = (c - 3\cdot 0)e^{-3\cdot 0}$

$c = 1$

$$y^{-3} = (1 - 3x)e^{-3x}$$ sol. específica

b) $y' + \dfrac{2y}{t} - \dfrac{1}{t^2}y^3 = 0$ NL

$$y' + \frac{2y}{t} = \frac{1}{t^2}y^3$$

I y^{-3}

$$y^{-3}y' + \frac{2}{t}y^{-2} = \frac{1}{t^2}$$

II $\boxed{u = y^{1-m}}$ $\quad u = y^{-2}$ $\quad u' = -2y^{-3}y'$

$$\frac{u'}{-2} + \frac{2}{t}u = \frac{1}{t^2} \quad (\times(-2))$$

$$\boxed{u' - \frac{4}{t}u = -\frac{2}{t^2}}$$

fator integrante $(v(t) = e^{\int p(t)dt})$

$$v = e^{\int -\frac{4}{t}dt} = e^{-4\ln t} = e^{\ln t^{-4}} = t^{-4}$$

$$\left\{\frac{1}{t^4}\cdot u' - \frac{4}{t}\cdot\frac{1}{t^4}u\right\} = -\frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{t^4}$$

$$\int\left\{\frac{1}{t^4}\cdot u\right\}'dt = \int -\frac{2}{t^6}\,dt$$

$$\frac{1}{t^4}\cdot u = -2\cdot\frac{t^{-5}}{-5} + c$$

$$\frac{1}{t^4}\cdot u = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{t^5} + c$$

$$u = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{t} + c\cdot t^4$$

$$\boxed{u = y^{-2}} \rightarrow y = \pm\sqrt{1/u} = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{t} + t^4c}}$$

4 Aplicação de EDO 1ª ordem

a) capitalização de juros

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = k\cdot S}$$

→ quant. de $ num instante t

→ taxa de juros

$$\int\frac{1}{S}\,dS = \int k\,dt$$

$$\ln S = kt + c$$

$$S = e^{kt+c}$$

$$\boxed{S = c\cdot e^{kt}}$$

Ex: suponha que uma aplicação renda juros continuamente. Qual será o saldo após 12 meses se a taxa de juros for 1% am e o depósito inicial for R$ 100,00?

$S(0) = \$100,00$ $\qquad S = c\cdot e^{kt}$

$k = 1\%$ am

I) $t = 0$ $\quad S(0) = c\cdot e^{k\cdot 0}$

$S(0) = c = 100$

II) $S(12) = 100\cdot e^{0,01\cdot 12}$

$S(12) \cong 112,75$ R$

b) Dinâmica populacional

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = k\cdot P}$$

→ população no instante t

EDO 1ª ordem

$$\int \frac{1}{P}\,dP = \int K\,dt$$

$$\ln P = Kt$$

$$P = e^{Kt+c}$$

$$\boxed{P = c \cdot e^{Kt}}$$

Ex: Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias. Em $t = 1h$, o número de bactérias é $\frac{3}{2}P_0$. Considerando que a taxa de crescimento é proporcional a $P(t)$, determine o tempo necessário para triplicar o nº de bactérias.

$P(0) = P_0$ $\quad$ $t = ?$ $\quad 3P_0$

$P(1) = \frac{3}{2}P_0$ $\quad$ $t=0$ $\quad P = ce^{K\cdot 0}$

$P(0) = c = P_0$

$P(t) = c \cdot e^{Kt}$ $\therefore$ $\boxed{P(t) = P_0 e^{Kt}}$

$t = 1 \Rightarrow \frac{3}{2}\cancel{P_0} = \cancel{P_0} e^{K\cdot 1}$

$e^K = 3/2$

$K = \log 3/2 \cong 0{,}4055$

$3\cancel{P_0} = \cancel{P_0}\, e^{0{,}4055\cdot t}$

$\ln 3 = \ln e^{0{,}4055t}$

$t = \ln 3 / 0{,}4055 \cong 2{,}71h$

c) Decaimento radioativo

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = K \cdot A} \rightarrow \int \frac{1}{A}\,dA = \int K\,dt$$

$$A = c \cdot e^{Kt}$$

Quant. de elemento radioativo presente num instante

* Meia-vida $\Rightarrow \frac{1}{2}A(0) = ce^{Kt}$

$A(0) = c \cdot e^{K\cdot 0}$ $\therefore$ $A(0) = C$

$\frac{1}{2}\cancel{A(0)} = \cancel{A(0)}\, e^{Kt}$

$\ln \frac{1}{2} = Kt$

$$\boxed{t = \frac{\ln 1/2}{K}}$$ → tempo de meia vida de qualquer elemento radioativo.

Ex: O isótopo Pb-209 decai a uma taxa proporcional à $A(t)$ e tem meia-vida de 3,3h. Se houver inicialmente 1g de chumbo, quanto tempo levará para que 90% decaia?

$A(0) = 1g$

Meia vida $= 3{,}3h$

I) $t=0$ $\quad A(0) = c \cdot e^{K0} = 1$

II) meia-vida: $0{,}5 = 1 \cdot e^{K \cdot 3{,}3}$

$K = \frac{\ln(0{,}5)}{3{,}3} \simeq -0{,}23$

III) $1g = A(0) - 90\%$

$= 0{,}1g$

$0{,}1 = 1 \cdot e^{-0{,}23t}$

$-0{,}23t = \ln(0{,}1)$

$t \simeq 11h$

d) Durante uma reação química a substância A é convertida na substância B a uma taxa proporcional ao quadrado da quantidade A. Quando T=0, estão presentes 60 gramas de A. Após 1h, restam apenas 10 gramas não convertidos de A. Qual a quant. de A presente após 2h?

$Q(t) = $ quant.

$r = $ taxa

$$\frac{dQ}{dt} = r \cdot Q^2$$

$$\int \frac{1}{Q^2}\,dQ = \int r\,dt$$

$$\frac{Q^{-1}}{-1} = rt + c$$

$$-\frac{1}{Q} = rt + c$$

$$Q = \frac{-1}{rt + c}$$

$Q = 60$, $t = 0 \rightarrow 60 = \frac{-1}{0r + c} \rightarrow c = -1/60$

$t = 1$, $Q_1 = 10 \rightarrow 10 = \frac{-1}{r\cdot 1 - 1/60} \Rightarrow 10\left(r - \frac{1}{60}\right) = -1$

$10r - \frac{1}{6} = -1 \rightarrow 10r = -1 + \frac{1}{6}$

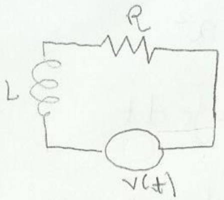
$10r = -5/6 \rightarrow r = -5/60 = -1/12$

$$Q(2) = \frac{-1}{-\frac{1}{12}\cdot 2 - \frac{1}{60}} = \frac{-1}{-\frac{1}{6} - \frac{1}{60}} \cong 5{,}45\ g$$

EDO 1ª ordem

2) Circuito RL

Suponha que um circuito simples a resistência é 550 Ω, a indutância é de 4 H (henry) e a pilha fornece uma voltagem constante de 110 V. Determine a corrente I se a corrente inicial é zero.



$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}(t) \quad \div L$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\cdot i = \frac{\mathcal{E}(t)}{L}$$

$R = 550\,\Omega$
$L = 4\,H$
$\mathcal{E}(t) = 110\,V$

$$\frac{di}{dt} + \frac{550}{4}\cdot i = \frac{110}{4}$$

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int e^{\int p(x)\,dx}\, r(x)\,dx + C\right]$$

$p(t) = \frac{550}{4}$ e $r(t) = \frac{110}{4}$

$$i(t) = e^{-\int\frac{550}{4}dt}\left[\int e^{\int\frac{550}{4}dt}\cdot\frac{110}{4}dt + C\right]$$

$$i(t) = e^{-\frac{550}{4}\int dt}\left[\frac{110}{4}\int e^{\frac{550}{4}\int dt}\,.\,dt + C\right]$$

$$i(t) = e^{-\frac{550}{4}t}\left[\frac{110}{4}\int e^{\frac{550}{4}t}\cdot dt + C\right]$$

$$i(t) = e^{-137,5t}\left[27,5\int e^{137,5t}\,dt + C\right]$$

$$i(t) = e^{-137,5t}\left[\frac{27,5}{137,5}\int e^{137,5t}\cdot 137,5\,dt + C\right]$$

$$i(t) = e^{-137,5t}\left[0,2\cdot e^{137,5t} + C\right]$$

$t = 0 \therefore i(t) = 0$

$$0 = e^{-137,5\cdot 0}\left[0,2\cdot e^{137,5\cdot 0} + C\right]$$

$$0 = e^{0}\left[0,2\cdot e^{0} + C\right]$$

$$0 = 1\left[0,2\cdot 1 + C\right]$$

$$C = -0,2$$

$$i(t) = e^{-137,5t}\left[0,2\cdot e^{137,5t} - 0,2\right]$$

$$i(t) = 0,2\cdot e^{137,5t - 137,5t} - 0,2\cdot e^{-137,5t}$$

$$i(t) = 0,2 - 0,2\,e^{-137,5t}$$

Exercícios EDO 2ª ordem

1. EDO 2ª ordem linear com coeficiente constante em que $\Delta > 0$

a) solução geral

$$6y'' - y' - y = 0$$

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4\cdot 6(-1) = 25$$

$$\lambda = \frac{1\pm 5}{2\cdot 6} \;\rightarrow\; \lambda_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$Y_H = C_1\cdot e^{\frac{1}{2}x} + C_2\cdot e^{-\frac{1}{3}x}$$

b) PVI

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 4\cdot 6 = 1$

$\lambda = \frac{5\pm 1}{2} \rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$

$$Y_H = C_1\cdot e^{3x} + C_2\cdot e^{2x}$$

$$Y_H' = 3C_1\,e^{3x} + 2C_2\cdot e^{2x}$$

p/ $y(0) = 2$ e $y'(0) = 5$

$C_1 + C_2 = 2 \qquad 3C_1 + 2C_2 = 5$

$-2C_1 - 2C_2 = -4$
$2C_1 + 3C_2 = 5$
$C_2 = 1$ e $C_1 = 1$ $\rightarrow Y_H = e^{2x} + e^{3x}$

2. EDO 2ª ordem linear com coeficiente constante em que $\Delta = 0$

a) solução geral

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 9 = 0$$

$$\lambda = \frac{6\pm 0}{2} = 3 \quad \lambda = 3$$

$$Y_H = C_1\cdot e^{3x} + C_2\cdot x\,e^{3x}$$

b) PVI ?

$$\begin{cases} y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \Delta = 1 - 4\cdot\frac{1}{4} = 0$

$\lambda = \frac{+1\pm 0}{2} = \frac{1}{2}$

$$Y_H = C_1\cdot e^{\frac{1}{2}x} + C_2\cdot x\,e^{\frac{1}{2}x}$$

$$Y_H' = \frac{1}{2}C_1\,e^{\frac{1}{2}x} + C_2\left(\frac{1}{2}x\,e^{\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x}\right)$$

p/ $y(0) = 2$ p/ $y'(0) = \frac{1}{3}$

$C_1 = 2$

$C_2 + 1 = \frac{1}{3} \qquad C_2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{3} = \frac{-2}{3}$

$$Y_H = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{-2}{3}x\,e^{\frac{1}{2}x}$$

3 – EDO 2ª ordem linear com coeficiente constante em que $\Delta < 0$

a) Solução geral

$y'' + 4y = 0$ $b = 0$, y' ñ aparece!

$\lambda^2 + 0 + 4 = 0$

$\Delta = 0 - 4.4 = -16$

$\lambda = \frac{-0 \pm 4i}{2} = 0 \pm 2i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2$)

$Y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{0x} \cdot \cos(2x)$

$Y_2(x) = e^{0x} \operatorname{sen}(2x)$

$Y_H = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \operatorname{Sen}(2x)$

b) PVI

$$\begin{cases} y'' + y' + 9{,}25y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 8 \end{cases}$$

$\lambda^2 + \lambda + 9{,}25 = 0$

$\Delta = -1 - 4.9{,}25 = -36$

$\lambda = \frac{-1 \pm 6i}{2} = -\frac{1}{2} \pm 3i$ ($\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 3$)

$Y_1(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cos(3x)$

$Y_2(x) = e^{\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}(3x)$

Exercícios EDO 2ª ordem

$Y_H = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cos(3x) + C_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}(3x)$

$Y'_H = \left[C_1\left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \cos(3x) - 3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen}(3x)\right)\right] +$

$\left[C_2\left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{Sen}(3x) + 3 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(3x)\right)\right]$

P/ $y(0) = 2$ e $y'(0) = 8$

obs: $\operatorname{sen} 0 = 0$ e $\cos 0 = 1$

$C_1 = 2$

$-\frac{1}{2} C_1 + 3C_2 = 8$

$-\frac{1}{2} \cdot 2 + 3C_2 = 8$

$C_2 = 3$

$Y_H = 2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos(3x) + 3 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{Sen}(3x)$

Exercícios EDO 2ª ordem

1 – Método dos coeficientes indeterminados

a) $y'' + 2y' + 5y = 3 \operatorname{sen} 2t$

I) $\lambda^2 + 2\lambda + 5\lambda = 0$

$\Delta = 4 - 4.5 = -16 \rightarrow \Delta < 0$

$\lambda = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$ ($\alpha = -1$, $\beta = 2$)

$Y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) = e^{-t} \cos 2t$

$Y_2(x) = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) = e^{-t} \operatorname{sen} 2t$

$\boxed{Y_H = C_1 \cdot e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \operatorname{sen} 2t}$ Sol. Homo.

II) $Y_p(t) = A \operatorname{sen} 2t + B \cos 2t$

$Y'_p(t) = 2A \cos 2t - 2B \operatorname{sen} 2t$

$Y''_p(t) = -4A \operatorname{sen} 2t - 4B \cos 2t$

$-4A \operatorname{sen} 2t - 4B \cos t + 4A \cos 2t - 4B \operatorname{sen} 2t + 5A \operatorname{sen} 2t + 5B \cos 2t = 3 \operatorname{sen} 2t$

$(-4A - 4B + 5A) \operatorname{sen} 2t + (-4B + 4A + 5B) \cos 2t = 3 \operatorname{sen} 2t$

$$\begin{cases} A - 4B = 3 \\ 4A + B = 0 \quad (\times 4) \end{cases}$$

$A - 4B = 3$

$16A + 4B = 0$

$17A = 3$

$A = 3/17$

$B = -4A$

$B = -\frac{12}{17}$

$Y_G = Y_H + Y_p$

$Y_G = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{17}\operatorname{sen} 2t - \frac{12}{17}\cos 2t$

b) $y'' + 2y' = \overset{1}{3} + \overset{2}{4\operatorname{sen} 2t}$

I $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ $\quad Y_H = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-2x}$

$\lambda(\lambda + 2) = 0$

$\boxed{\lambda_1 = 0}$

$\lambda_2 = -2$ $\quad \boxed{Y_H = c_1 + c_2 e^{-2t}}$

II

1. $Y_p(t) = 3$

$Y_p(t) = x^s [A x^0] \rightarrow s = 1$

$\boxed{Y_p(t) = Ax}$ $\quad Y'_p(t) = A$

$Y''_p(t) = 0$

$0 + 2A = 3$

$A = \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{Y_{p_1}(t) = \frac{3}{2} t}$

2. $Y_p(t) = A\operatorname{sen} 2t + B\cos 2t$

$Y'_p(t) = 2A\cos 2t - 2B\operatorname{sen} 2t$

$Y''_p(t) = -4A\operatorname{sen} 2t - 4B\cos 2t$

$-4A\operatorname{sen} 2t - 4B\cos 2t + 4A\cos 2t - 4B\operatorname{sen} 2t = 4\operatorname{sen} 2t$

$(-4A - 4B)\operatorname{sen} 2t + (-4B + 4A)\cos 2t = 4\operatorname{sen} 2t$

$-4A - 4B = 4$ $\quad 4A = -4B$

$4A - 4B = 0$ $\quad A = -\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$

$-8B = 4$

$B = -\frac{1}{2}$

$Y_G = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{2} t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2}\cos 2t$

2- Método da variação dos parâmetros

a) $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

I $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ $\quad \Delta = 1 - 4(-2) = 9$

$\lambda = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

$\boxed{Y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}$

$Y_p = v_1 e^{2x} + v_2 e^{-x}$

$\begin{cases} v_1' e^{2x} + v_2' e^{-x} = 0 \\ 2v_1' e^{2x} - v_2' e^{-x} = e^{3x} \end{cases}$

$3v_1' e^{2x} = e^{3x}$

$v_1' = \frac{e^{3x}}{3e^{2x}} = \frac{1}{3} e^x$

$\frac{e^x}{3} e^{2x} + v_2 e^{-x} = 0$

$v_2' e^{-x} = -\frac{e^{3x}}{3}$

$v_2' = -\frac{e^{4x}}{3}$

$v_2 = \int v_2' dx = \int -\frac{e^{4x}}{3} dx$ $\quad u = 4x$, $du = 4dx$, $\int e^u du = e^u$

$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \int e^{4x} 4\, dx = \boxed{-\frac{1}{12} \cdot e^{4x}}$

Exercícios EDO 2ª ordem

$v_1 = \int v_1' dx = \int \frac{e^x}{3} dx$

$v_1 = \frac{1}{3} \int e^x dx = \frac{1}{3} e^x$

$Y_p = v_1 e^{2x} + v_2 e^{-x}$

$Y_p = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{12} e^{3x}$

$Y_G = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{12} e^{3x}$

b) $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x^2}$ $g(x)$

I $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\Delta = 64 - 4(16) = 0$ $\quad \Delta = 0$

$\lambda = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$ $\quad \lambda = 4$

$\boxed{Y_H = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}}$

$Y_p = v_1 e^{4x} + v_2 x e^{4x}$

$\begin{cases} v_1' e^{4x} + v_2' x e^{4x} = 0 \quad (\div e^{4x}) \\ 4v_1' e^{4x} + v_2'(e^{4x} + x4e^{4x}) = \frac{e^{4x}}{x^2} \end{cases}$

$\begin{cases} v_1' + x v_2' = 0 \\ 4v_1' + v_2'(1 + 4x) = \frac{1}{x^2} \end{cases}$

$v_1' = -x v_2'$

$4(-x v_2') + v_2' + 4x v_2' = \frac{1}{x^2}$

$\boxed{v_2' = \frac{1}{x^2}}$

$v_1' = -x \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$

$v_2 = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$

$\boxed{v_2 = -x^{-1}}$

$v_1 = \int -\frac{1}{x} dx = -\ln(x)$

$Y_p = -\ln(x) e^{4x} - x^{-1} \cdot x \cdot e^{4x}$

$Y_p = -\ln(x) e^{4x} - e^{4x}$

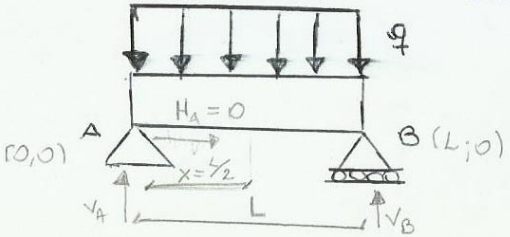
$Y_G = c_1 e^{4x} + c_2 x e^4 - \ln(x) e^{4x} - e^{4x}$

APLICAÇÃO PRÁTICA

MÓDULO 2

Aplicação de EDO de 2ª ordem na engenharia civil

Ex: Qual é a flecha máxima em uma viga biapoiada?

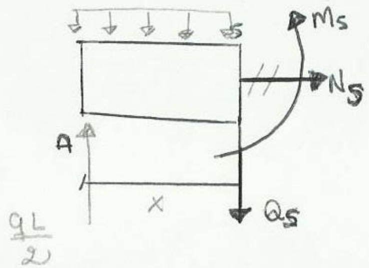


Dado: Eq. Linha Elástica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

momento de inércia

módulo de elasticidade



$\Sigma M_B = 0$

$V_A L - q \cdot L \cdot \frac{L}{2} = 0$

$V_A = \frac{qL}{2}$

$\Sigma M_S = 0$

$M_S + qx \cdot \frac{x}{2} - \frac{qL}{2} \cdot x = 0$

$M_S = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{2}$

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{2}$$

$$EI\, y(x) = -\int -\frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{2}\, dx$$

$$EI\, y(x) = -\int \frac{qx^3}{6} + \frac{qLx^2}{4} + C_1\, dx$$

$$EI\, y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qLx^3}{12} + C_1 x + C_2$$

p/ (0;0) ∴ $C_2 = 0$

p/ (L;0) ∴ $0 = -\frac{qL^4}{24} + \frac{qL^4}{12} + C_1 L + 0$

$C_1 = -\frac{qL^3}{12}$

$$EI\, y(x) = -\frac{qx^4}{24} + \frac{qLx^3}{12} - \frac{qL^3}{24}x + 0$$

$$y(x) = \frac{q}{24EI}\left(-x^4 + 2Lx^3 - L^3 x\right)$$

p/ $x = L/2$

$$y = \frac{q}{24EI}\left(-\frac{L^4}{16} + \frac{2L^4}{8} - \frac{L^4}{2}\right)$$

$$y_c = \frac{-5qL^4}{384\,EI}$$