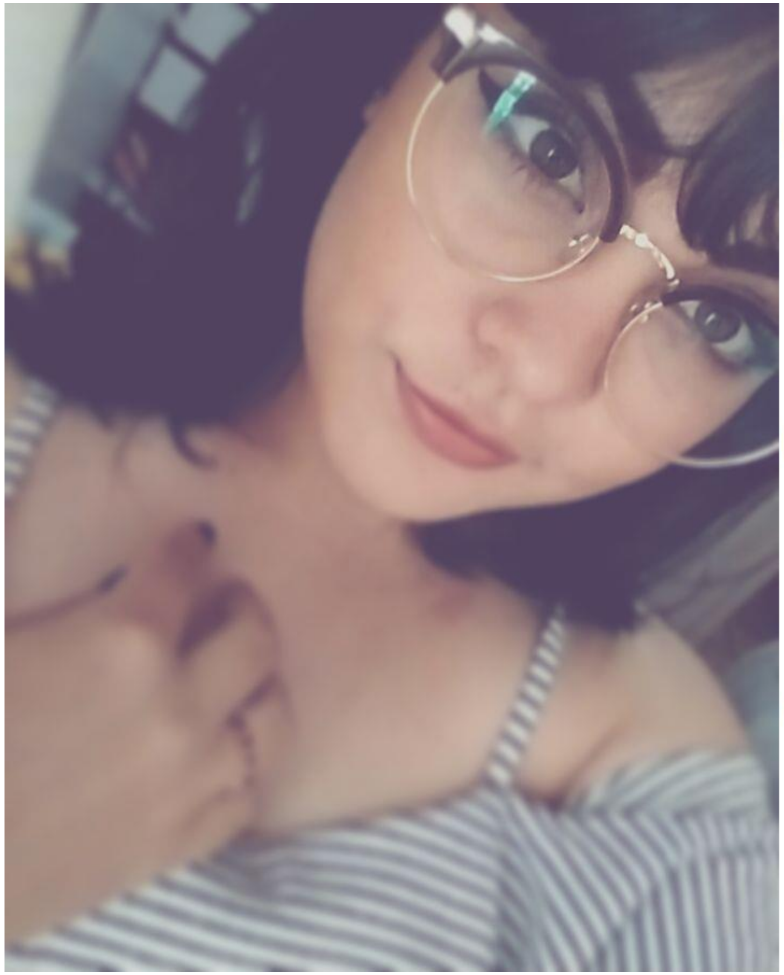
Portfólio Cálculo 2

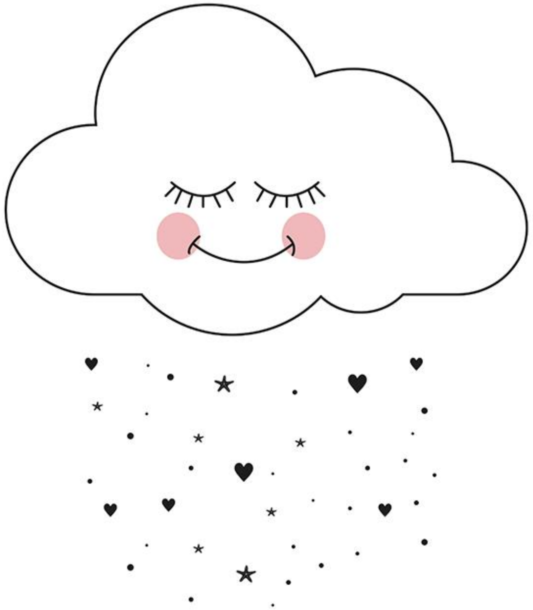
módulo 2 - Equações Diferenciais Ordinárias



Nome: Juliana Pereira Valle Gonçalves

Matrícula: 18/0124099

Curso: Engenharia de Software



Sumário

Plano semanal: semana 5

Matrícula	Aluno	Turma	Professora
18/0124099	Juliana Pereira Valle Gonçalves	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**15/04**	**16/04**	**18/04**
Objetivos	Início sobre o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias.	Continuação sobre o estudo de Equações diferenciais ordinárias e solução de EDO's de 1ª ordem lineares homogêneas e não homogêneas.	Solução de EDO's não-lineares separáveis e na forma homogênea.

<table>
<tr><th>Informação</th><td>Existem Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), em que apresentam apenas uma variável independe, e Equações Diferenciais Parciais (EDP), em que existem 2 ou mais variáveis independentes.
Vamos estudar apenas Equações Diferenciais Ordinárias.</td><td>EDO’s podem ser tanto lineares como não lineares. E homogêneas ou não homogêneas.</td><td>EDO’s separáveis e na forma homogênea são casos específicos para algumas EDO’s.</td></tr>
<tr><th>Resumo</th><td>Notação: Podemos escrever uma EDO das seguintes formas:
Linha;
Leibniz;
Newton.
Ordem: É definida pelo grau da maior derivada da E.D.O.
Linearidade:
Linear;</td><td>Homogeneidade:
Homogêneas: variável independente = 0.
Não-homogênea: variável independente ≠ 0.
Linearidade:
Linear: variável independente de maior grau é 1.</td><td>Separável: Uma EDO separável é aquela em que é possível jogar todos os termos que tem y para um lado e x para o outro.
Solução:
Integre dos dois lados.
Isole o y.
Resolva.</td></tr>
</table>

	2. Não linear. • ***Homogeneidade:*** 1. Homogênea; 2. Não-homogênea. • ***Formas de expressar uma E.D.O:*** 1. Implícita; 2. Explícita; 3. Padrão. • ***Solução:*** É uma função que satisfaz a E.D (equação diferencial) em um certo intervalo. E pode ser representada nas seguintes formas: 1. Geral: Envolve Constantes; 2. Específica: Valor exato – PVI (problema de valor inicial).	2. **Não linear:** variável independente de grau maior que 1. • ***Solução da forma linear homogênea:*** 1. Colocar na forma padrão. 2. Integrar dos dois lados. • ***Solução da forma linear não-homogênea:*** **I. Caso 1: p(x) e q(x) constantes:** 1. Colocar na forma padrão. 2. Integrar de ambos os lados. **II. Caso 2: p(x) constante:** 1. Colocar na forma padrão.	Em geral é dado na forma implícita! • ***Forma homogênea:*** Devem seguir a forma $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

		2. Achar o fator integrante. 3. Multiplicar toda a EDO pelo fator integrante. 4. Resolver **III. Caso 2: caso geral** 1. Colocar na forma padrão. 2. Achar o fator integrante. 3. Multiplicar toda a EDO pelo fator integrante. 4. Resolver.	
Observação	É necessário revisar derivadas e integrais.	É necessário revisar derivadas e integrais.	É necessário revisar derivadas e integrais e propriedades de ln.

Dúvidas	Soluções com PVI.	Na solução das não homogêneas.	
Monitoria			

① classificar ED

a) $y'(t)^2 + y(t)^2 = 1$ → EDO 1ª ordem, não linear, não homogênea

b) $y'(t) + (1-t)\,y(t) = 0$ → EDO 1ª ordem, linear, homogênea

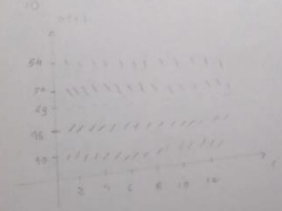
c) $y^2 \cdot y''' + x \cdot y = e^x$ → EDO 3ª ordem, não linear, não homogênea

d) $y(x) + x \cdot y(x) = \cos$ EDO 1ª ordem, linear, não-homogênea

e) $y''(t) - t^3 y(t)^2 = 0$ EDO 2ª ordem, não linear, homogênea

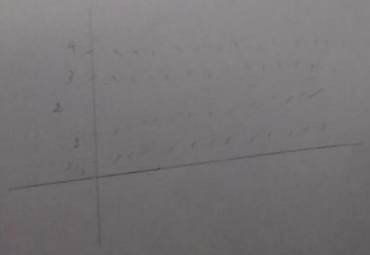
② desenhar campo de direção

a) $v' + \frac{v}{10}$ $v = 9{,}8$



b) $y' = x^2 + y^2$

c) $y' = x + y$



solução EDO 1ª ordem linear homogênea

) $y' + \text{sen}\,t \cdot y = 0$

$\frac{dy}{dt} = -\text{sen}\,t\, y \rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\text{sen}\,t\,dt \rightarrow \ln y + C_1 = \cos t + C_2 =$

$\cancel{e}^{\ln y} = e^{\cos t} \cdot e^{C} \rightarrow K$ $\quad y = e^{\cos t} \cdot K$

) $y' - 0{,}2\,x\,y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0{,}2\,x\,y \rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int 0{,}2\,x\,dx = \ln y = \frac{0{,}2\,x^2}{2} + C \rightarrow$

$y = e^{0{,}1x^2} \cdot e^{C} = K \cdot e^{0{,}1x^2}$

) $y' - 3x = 0$

$\frac{dy}{dx} = 3x \rightarrow \int \frac{1}{y} = \int 3x\,dx \rightarrow \ln y = \frac{3x^2}{2} + C \rightarrow \cancel{e}^{\ln y} = e^{\frac{3x^2}{2}} \cdot K$

$y = e^{\frac{3x^2}{2}} \cdot K$

④ solução EDO 1ª ordem linear não-homogênea

a) $y' + 3y = e^t$

$e^{3t} \cdot [y' + 3y = e^t]$

$e^{3t} \cdot y' + 3e^{3t} \cdot y = e^{3t} \cdot e^t$

$\int (e^{3t} \cdot y)'\,dt = \int e^{3t} \cdot e^t\,dt$

$e^{3t} \cdot y = \frac{e^{4t}}{4} + K \rightarrow y = \frac{e^t}{4} + e^{-3t} \cdot K$

b) $y' - \frac{1}{x} y = -x$

1. $y(x) = e^{\int -\frac{1}{y} dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$

2. $x^{-1}[y' - \frac{1}{x}y = -x] \rightarrow [x^{-1} \cdot y' - x^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot y] = -x \cdot x^{-1}$

$\int (x^{-1} y)' dx = \int -x \cdot x^{-1} dx$

$x^{-1} y = -x + K$

$y = \frac{1}{x^{-1}} \cdot [x + K] = y = -x^2 + Kx$

c) $y' + 2y = -3$

$y = -\frac{3}{2} + Ke^{-2x}$

5) EDO separável

(5) a) $y' = \frac{x - e^{-x}}{y + e^{y}}$ $\quad (y + e^{y}) \cdot y' = x - e^{-x}$

$(y + e^{y}) \frac{dy}{dx} = (x - e^{-x})$

$\int (y + e^{y}) dy = \int (x - e^{-x}) dx \rightarrow \frac{y^2}{2} + e^{y} = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + C$

b) $y' = \frac{9x - x^3}{4 + y^3}$

$y' = -y^2 \operatorname{sen} x$

$\frac{dy}{dx} = -y^2 \operatorname{sen} x$

$\frac{-1}{y^2} dy = \operatorname{sen} x \, dx$

$\rightarrow \int \frac{-1}{y^2} dy = \int \operatorname{sen} x \, dx$

$\frac{-y^{-1}}{-1} + C_1 = -\cos x + C$

$\frac{1}{y} = -\cos x + C$

$y = \frac{1}{-\cos x + C}$

c) $y'(x) \cdot (x + 1) = y(x)$

$\frac{dy}{dx} (x+1) = y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$

$\ln|y| + C_1 = \ln|x+1| + C_2 \rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + C$

$= \ln|y| = \ln|x+1| + C$

(6) forma homogênea

a) $(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$\int \frac{1}{F(v) - v} dv = \int \frac{1}{x} dx$

$\frac{1}{-F(v) - v} = \frac{1}{1 + 3v + v^2 - v} = \frac{1}{1 + 2v + v^2}$

$\int \frac{1}{v+1} dx = \int \frac{A}{v+1} dv + \int \frac{b}{(v+1)^2} dv$

$e^{\ln(x(1+v^2))} = e^{c}$

$x(1 + v^2) = K \qquad v = \frac{y}{x}$

$x \cdot \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = K$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y+x}{3x+y}$

dividindo por $\dfrac{x}{y} \to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3v+1}{3+v}$

$v = \dfrac{y}{x} \to y' = (vx)' \to y' = v'x + v$

$v'x + v = \dfrac{3v+1}{3+v} \to v'x = \dfrac{3v+1}{3+v} - v \to \dfrac{dv}{dx} = \left(\dfrac{1-v^2}{3+v}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \left(\dfrac{3+v}{1+v^2}\right) dv \to \ln|x| + C = -2\ln|1-v| + 1 + v$

$\ln|x| + C = \ln\left(\dfrac{1+v}{(1-v)^2}\right) \to x \cdot K = \dfrac{1+v}{(1-v)^2}$

$K = \dfrac{x+y}{(x-y)^2}$

c) $(x^2+3xy+y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

$(x^2+3xy+y^2) - \dfrac{x\,dx}{dy} = 0$

$= x^2y' = x^2 + 3xy + y^2 \to y' - \dfrac{x^2+3xy+y^2}{x^2} = y' = \dfrac{3y}{x} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

$= \underbrace{y' = F\left(\frac{y}{x}\right) = 1 + \frac{3y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}_{\text{forma homogenea}} \to \overset{A}{\int \dfrac{1}{F(x)v}\,dv} = \overset{B}{\int \dfrac{1}{x}\,dx}$

A $= \int \dfrac{1}{1+3v+v^2}\,dv = \int \dfrac{1}{(1+v)}\,dv = \ln(1+v) + C_1$

B $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C_2$

$\ln(1+v) = \ln(x) + C$

$1 + v = x + K$

$v = x + K$

$\dfrac{y}{x} = x + K$

Plano semanal: semana 6

Matrícula	Aluno	Turma	Professora
18/0124099	Juliana Pereira Valle Gonçalves	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**15/04**	**16/04**	**18/04**
Objetivos	Introdução e solução a equação de Bernoulli. Introdução e solução da equação exata. Introdução a equação não exata.	Revisão de prova.	Resolução de equação não exata. E introdução a EDO de segunda ordem.

<table>
<tr>
<td>Informação</td>
<td>Equação de Bernoulli:
$y' + p(x)y = g(x) * y^n$
Equação Exata:
$$y' = f(x,y) \rightarrow M(x,y)\mathbf{dx} + N(x,y)\mathbf{dy} = 0$$Se $\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx}$ é uma equação exata.

3. Equação Não Exata:

Se $\frac{dM(x,y)}{dy} \neq \frac{dN(x,y)}{dx}$ é uma equação não exata.</td>
<td>Revisão de prova.</td>
<td>1. Equação Não Exata:
Se $\frac{dM(x,y)}{dy} \neq \frac{dN(x,y)}{dx}$ é uma equação não exata.

2. EDO segunda ordem
Homogênea:
a) Caso geral;
b) Coeficientes Constantes:
$\Delta > 0$; $\Delta = 0$; $\Delta < 0$
Não homogênea:
a) M.C.I
b) M.V.P</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Equação de Bernoulli:
$y' + p(x)y = g(x) * y^n$

<u>Resolução</u>:
Passo 1) Multiplicar a EDO por y^{-n}:</td>
<td>Revisão de prova.</td>
<td>Homogênea Caso Geral:
$$y'' + p(x) * y' + q(x) + y = 0$$a) Princípio da Superposição</td>
</tr>
</table>

	$\boldsymbol{y^{-n} * y' + p(x) * y^{1-n} = g(x)}$ **Passo 2)** Chame $\boldsymbol{v = y^{1-n}}$ Derive: $\boldsymbol{v' = (1-n) * y^{-n} * y'}$ **Passo 3)** Substituir os dados na equação $\boldsymbol{y^{-n} * y' + p(x) * y^{1-n} = g(x)}$ $\frac{\boldsymbol{1 * v'}}{\boldsymbol{1-n}} + p(x) * \boldsymbol{v} = g(x)$ • ***Equação Exata:*** $y' = f(x,y) \rightarrow M(x,y)\boldsymbol{dx} + N(x,y)\boldsymbol{dy} = 0$		Se y1 e y2 são soluções de $y'' + p(x) * y' + q(x) + y = 0$ então a solução geral é:$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$ em que C_1 e C_2 são constantes. OBS: $\{y_1, y_2\}$ é o conjunto fundamental de solução.

	Se $\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{dN(x,y)}{dx}$ é uma equação exata. **<u>Resolução</u>:** • $f(x,y) = \int M(x,y)dx$ • $\frac{df(x,y)}{dy} = N(x,y)$ • $Achar\ a\ solução$ ***3. Equação Não Exata:*** Se $\frac{dM(x,y)}{dy} \neq \frac{dN(x,y)}{dx}$ é uma equação não exata.		
Observação	É necessário revisar derivadas e integrais.		É necessário revisar derivadas e integrais.
Dúvidas	Nas resolução de equações exatas.		Nas resolução de equações não exatas.
Monitoria			

1- resolução de EDO 1ª ordem na forma exata

a) $\underbrace{(x^2y+y^2)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(\frac{x^3}{3}+2xy\right)}_{N(x,y)}dy = 0$

$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = x^2+2y = x^2+2y$

$M = \frac{dF}{dx} \rightarrow F = \int M\,dx + g(y) \rightarrow F = \int (x^2y+y^2)\,dx + g(y) \rightarrow F = \frac{x^3}{3}y + xy^2 + g(y)$

$N = \frac{dF}{dy} = \frac{x^3}{3} + 2xy + g'(y) = N(x,y) \rightarrow \frac{x^3}{3} + 2xy + g'(y) = \frac{x^3}{3} + 2xy$

$\rightarrow g'(y) = 0 \rightarrow \int g(y) = C$

$F = \frac{x^3y}{3} + xy^2 = C$

b) $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x) + (e^x \cos y + 2\cos x)y' = 0$

$M = \frac{dF}{dx} \rightarrow F = \int M\,dx + g(y) \rightarrow F = \int (e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + g(y)$

$F = e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x + g(y)$

$N = \frac{dF}{dy} = e^x \cos y + 2\cos x + g'(y) = e^x \cos y + 2\cos x$

$g'(y) = 0 \rightarrow g(y) = C$

$F = e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x + C \rightarrow e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = C$

c) $(y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)y' = 0$

$M = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + g(y)$

$N = \operatorname{sen} x + x^2e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1$

$g'(y) = -1$

$g(y) = -y$

$F = y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y$

$y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y = C$

d) $(2xy)dx + (x^2-1)dy = 0$

$\int 2xy\,dx + g(y) = C$

$F = x^2y + g(y) = C$

$x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \rightarrow g'(y) = -1 \rightarrow g(y) = -y$

$F = x^2y - y = C$

e) ~~x~~ $(2xe^x - y + 6x^2)dx - x\,dy = 0$

$F = \int -x\,dy + g(x) = C$

$F = -xy + \ln(x) = C$

$g'(x) = 6x^2 + 2xe^x$

$h(x) = 2x^3 + 2(xe^x - e^x)$

$F = -xy + 2x^3 + 2(xe^x - e^x) = C$

2) Equações não exatas

a) $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$

$$\frac{M(x,y) - N(x,y)}{N(x,y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

$u(x) = x$

$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0$

$\frac{d}{dy}(3x^2y + xy^2) = 3x^2 + 2xy$

$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2y) = 3x^2 + 2xy$

$\int F = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)$

$x^3 + x^2y + g'(y) = x^3 + x^2y$

$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$

$\mu(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)}$

b) $2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0$

Fator integrante:

$\frac{u'}{u} = \frac{-4}{y} \to \int \frac{1}{u}\,du = \int -\frac{4}{y}\,dy$

$\ln u = -4 \ln y^{-4}$

$u = y^{-4}$

$\frac{1}{y^4} 2xy\,dx + \frac{1}{y^4}(y^2 - 3x^2)\,dy = 0$

$\frac{2x}{y^3}\,dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$

$F = \int \frac{2x}{y^3}\,dx + g(y) \to F = \frac{x^2}{y^3} + g(y)$

$N(x,y) = \frac{-3x^2}{y^4} + g'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}$

$\to g'(y) = \frac{1}{y^2} \to \int g(y) = -\frac{1}{y}$

$F = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$

c) $(x+2)\,\text{sen}\,y + (x\cos y)\,y' = 0$

fator integrante

$\int \frac{1}{u}\,du = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow \ln(u) = x + \ln x$

$u = e^x \cdot x$

$(e^x x^2 \,\text{sen}\,y + 2e^x x\,\text{sen}\,y) + (e^x \cdot x^2 \cos y)\,y' = 0$

$F = \int e^x \cdot x^2 \cos y\,dy + \ln(x)$

$F = e^x \cdot x^2\,\text{sen}\,y + \ln x$

$\ln'(x) = 0$

$\ln(x) = c$

$e^x \cdot x^2\,\text{sen}\,y = C$

d) $(4x^2 + 3\cos y)\,dx - x\,\text{sen}\,y\,dy = 0$

fator integrante

$\int \frac{2}{x}\,dx = e^{\ln(x^2)} = x^2$

$(4x^4 + 3x^2\cos y)\,dx - x^3\,\text{sen}\,y\,dy = 0$

$F(x,y) = x^3\cos y + g(x)$

$g'(x) = 4x^4$

$g(x) = \int 4x^4\,dx$

$h(x) = \frac{4x^5}{5} + c$

$x^3\cos y + \frac{4x^5}{5} = c$

e) $(x^3 - y^3)\,dx + xy^2\,dy = 0$

fator integrante

$\int -\frac{4}{x}\,dx = x^{-4}$

$(x^{-1} - x^{-4}\cdot y^3)\,dx + (x^{-3}y^2)\,dy = 0$

$\frac{x^{-3}y^3}{3} + g(x) = F$

$F = \frac{-3x^{-4}y^3}{3} + g'(x)$

$g'(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} + g(x) = \ln(x)$

$F = \frac{x^{-3}y^3}{3} + \ln|x| = c$

3) Bernoulli

a) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

$\frac{x^2y'}{x^2} + \frac{2xy}{x^2} = y^3\cdot\frac{1}{x^2}$

$\frac{w'}{-2} = y'\cdot y^{-3}$

$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x}\cdot\frac{y}{y^3} = \frac{y^3}{x^2}\cdot\frac{1}{y^3}$

$y^{-3}\cdot y' + \frac{2}{x}\cdot y^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{w'}{-2} + \frac{2}{x}w = \frac{1}{x^2}$

$w' - \frac{4w}{x} = \frac{-2}{x^2}$

$w' - \frac{4}{x}w = -\frac{2}{x^2}$

$v = e^{-\int \frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln(x)} = x^{-4}$

$v = x^{-4}$

$u = \frac{-2}{x^2}$

$w = y^{-2}$

$y^{-2} = \frac{2}{5x^{4}\cdot x^5} + x^4\cdot c$

$y^{-2} = \frac{2}{5x} + x^4\cdot c$

$y = \left[\frac{2}{5x} + x^4 c\right]^{-\frac{1}{2}}$

b) $y' + xy = xy^2$

$z = y^{1-n}$

$z = y^{1-2}$

$z = y^{-1}$

$y' = -1x^{-2} \cdot z'$

$y' = \frac{-z'}{z^2}$

$-\frac{z'}{z^2} + x\left(\frac{1}{z}\right) = x\left(\frac{1}{z}\right)^2$

$-\frac{z'}{z^2} + \frac{x}{z} = \frac{x}{z^2} \Big) \cdot z^2$

$-z' + xz = x \Big) \cdot (-1)$

$z' - xz = -x$

$z = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + Ce^{\frac{x^2}{2}}$

$z = e^0 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$

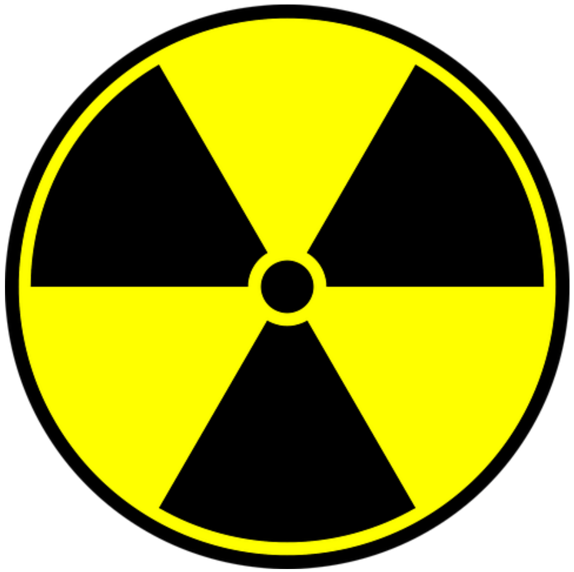
$z = 1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$

$y = \frac{1}{z}$

$y = \frac{1}{1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}}$

5 aplicações de EDO primeira ordem

Decaimento radioativo



Resultados experimentais mostram que elementos radioativos desintegram a uma taxa proporcional à quantidade presente do elemento. Se Q = Q(t) é a quantidade presente de certo elemento radioativo no instante t, então a taxa de variação de Q(t) com respeito ao tempo t, denotada por $\frac{dQ}{dt}$, é dada por: $\frac{dQ}{dt} = kQ(t)$ em que k é uma constante que depende do elemento. Por exemplo, para o carbono-14 o valor aproximado é k = 1,244×10-4, para o rádio o valor aproximado é k = 1,4×10-11.

O valor da constante k de um elemento radioativo pode ser determinado através do tempo de "meia-vida" do elemento. A "meia-vida" é o tempo necessário para desintegrar metade da quantidade do elemento. Portanto, se a meia-vida do elemento for conhecida, a constante k pode ser obtida e vice-versa. As "meias-vidas" de vários elementos radioativos podem ser encontradas nos livros de Química. Por exemplo, a meia-vida do carbono-14 está entre 5538 e 5598 anos, sendo em média 5568 anos com um erro para mais ou para menos de 30 anos. O carbono-14 é uma importante ferramenta em pesquisa arqueológica conhecida como teste do radiocarbono. A quantidade inicial do elemento radioativo é Q(0) = Qo.

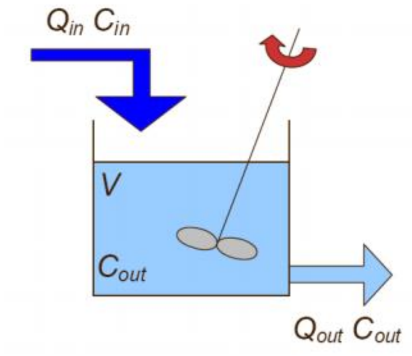
Exemplo:

Um isótopo radioativo tem uma meia-vida de 16 dias. Você deseja ter 30 g do isótopo no final de 30 dias. Calcule a quantidade inicial do isótopo.

Solução: Seja Q(t) a quantidade presente no instante t e Q(0)=Qo a quantidade inicial. Resolvendo a equação $\frac{dQ}{dt} = kQ(t)$ temos que: Q(t) = Qo e –k.t e, para t = 16, Q(16) = ½Qo, logo e -16.k = ½. Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade, obtemos k = [ln(2)]/16 = 0,0433 dias-1 e dessa forma temos a função que determina a quantidade de isótopo radioativo em qualquer instante: Q(t) = Qo e -0,0433 t Para t = 30 dias e Q(30) = 30 g: Qo = 30/e -0,0433x30 ≅ 110 g

Reator químico bem misturado

Vamos considerar um reator bem misturado, a concentração de solutos no seu interior é uniforme em todos os pontos do meio líquido, como o representado na figura abaixo. Pretendemos saber como a concentração do soluto *A* no reator varia ao longo do tempo.



Definimos as seguintes variáveis de processo:

- Vazão total de entrada (constante) = Qin (m3 /h)
- Concentração de entrada do componente A (constante) = Cin (g/m3)
- Vazão total de saída (constante) = Qout (m3 /h)
- Concentração de saída do componente A = Cout (g/m3)
- Concentração do componente A no reator = Cout (g/m3)
- Volume de líquido no reator = V (m3)

É dada a seguinte condição inicial:

$$t = 0 \Rightarrow C_{out} = C_{out}^{0}, V = V_0$$

O chamado balanço de massa aplicado ao componente A é simplesmente variação da massa de A no reator por unidade de tempo, isto é, a massa de A que entra por unidade de tempo menos a massa de A que sai por unidade de tempo. Em termos matemáticos,

$$\frac{d(VC_{out})}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out}$$

O balanço de volume aplicado ao reator é a variação do volume de líquido no reator por unidade de tempo, isto é, o volume de líquido que entra por unidade de tempo menos o volume de líquido que sai por unidade de tempo. Em termos matemáticos,

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out}$$

1. Se as vazões de entrada e saída forem iguais (Qin = Qout):

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} = 0 \Rightarrow V = \text{constante}$$

E a equação de balanço a A fica simplesmente

$$V\frac{dC_{out}}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out}$$

Substituindo Qout por Qin:

$$\frac{dC_{out}}{dt} + \frac{Q_{in}}{V}C_{out} = \frac{Q_{in}}{V}C_{in}$$

A solução desta EDO é:

$$C_{out} = C_{in} - Ce^{-\frac{Q_{in}}{V}t}$$

E após aplicação da condição inicial:

$$C_{out} = C_{in} - \left(C_{in} - C_{out}^{0}\right)e^{-\frac{Q_{in}}{V}t}$$

2. Se as vazões de entrada e saída forem diferentes (Qin ≠ Qout), mas constantes ao longo do tempo, então é óbvio que o volume de líquido não será constante. Temos então que resolver a equação de balanço de volume:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \Rightarrow V(t) = \left(Q_{in} - Q_{out}\right)t + V_0$$

Em que V0 é o volume no instante t = 0. Agora a equação do balanço de A fica:

$$\frac{d(VC_{out})}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out} \Leftrightarrow V\frac{dC_{out}}{dt} + C_{out}\frac{dV}{dt} = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out}$$

$$\Leftrightarrow V\frac{dC_{out}}{dt} + C_{out}(Q_{in} - Q_{out}) = C_{in}Q_{in} - C_{out}Q_{out}$$

$$\Leftrightarrow V\frac{dC_{out}}{dt} + C_{out}Q_{in} = C_{in}Q_{in}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dC_{out}}{dt} = \frac{Q_{in}}{V}(C_{in} - C_{out})$$

Lembrando que V é função de t e substituindo o resultado anteriormente obtido:

$$\frac{dC_{out}}{dt} = \frac{Q_{in}}{(Q_{in} - Q_{out})t + V_0}(C_{in} - C_{out})$$

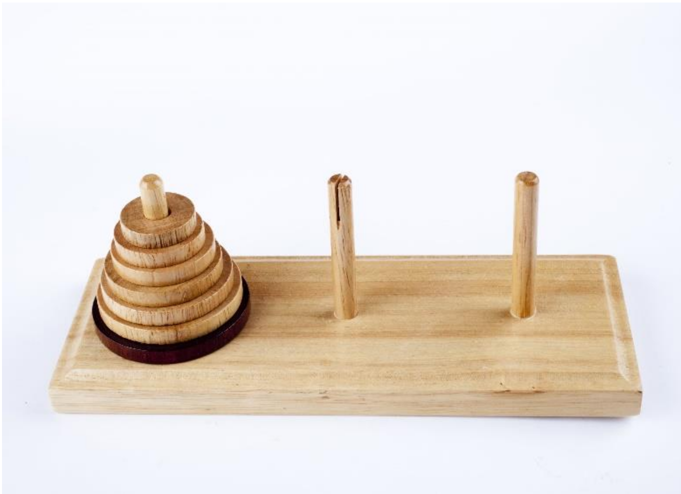
Esta EDO é de variáveis separáveis:

$$\frac{dC_{out}}{C_{in} - C_{out}} = \frac{Q_{in}}{(Q_{in} - Q_{out})t + V_0} dt$$

A solução após aplicação da condição inicial é:

$$C_{out} = C_{in} - \left(C_{in} - C_{out}^0\right)\left(\frac{(Q_{in} - Q_{out})t + V_0}{V_0}\right)^{-\frac{Q_{in}}{Q_{in} - Q_{out}}}$$

A Torre de Hanói



O matemático francês Édouard Lucas em 1883 inventou um jogo que invocava uma falsa lenda antiga. A Torre de Brama tinha três agulhas, e em uma delas, havia 64 discos de ouro de tamanhos diferentes, empilhados de maneira a nunca ter um disco maior sobre um menor. A tarefa dos monges era transferir os discos para outra agulha, passando um disco de cada vez de uma agulha para a outra, sem nunca colocar um disco maior sobre um menor.

O que surpreende nesse problema, que vamos resolver a seguir, é que são necessários pelo menos 2^{64}- 1 movimentos (aproximadamente 18 quintilhões). Com a velocidade de um movimento por microssegundo, isso levaria 5000 séculos.

Chame as agulhas de A, B e C, e imagine que os discos estão inicialmente na agulha A. O pulo de gato é pensar os movimentos em grandes blocos. Por exemplo: suponha que você sabe transferir 4 discos respeitando as regras, da agulha A para a agulha B – como isso ajuda a transferir 5 discos para, digamos, a agulha C? Você transfere os quatro discos menores de A para B, transfere o maior disco de A para C e agora leva os quatro discos de B para C.

O problema só pergunta por quantos movimentos você tem que fazer: para transferir cinco discos, você transferiu duas vezes quatro discos e fez um movimento com o disco maior. Se Q(n) é o número de movimentos necessários para transferir n discos, acabamos de aprender que Q(5) = 2 Q(4) + 1, ou, de maneira geral, Q(n+1) = 2 Q(n) + 1.

Agora é basta resolver Q(n+1) = 2 Q(n) + 1, Q(1) = 1.

Crescimento populacional: Modelo de Malthus

O modelo de Malthus Problemas populacionais nos levam fatalmente às perguntas:

1. Qual será a população de certo local ou ambiente em alguns anos?
2. Como poderemos proteger os recursos deste local ou deste ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies?

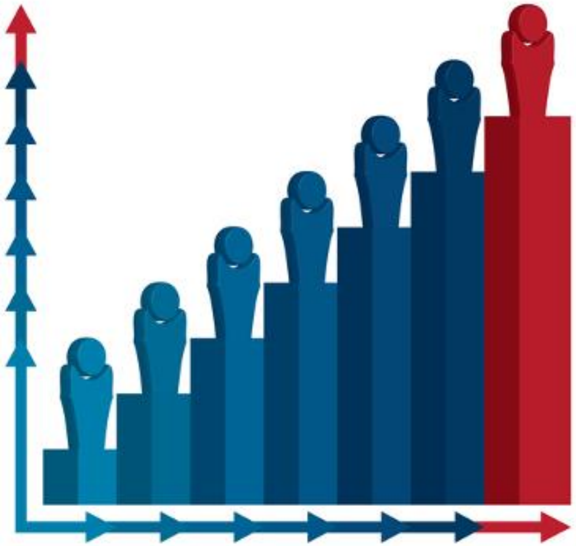
Para apresentar uma aplicação de equações diferenciais relacionadas com este problema, consideraremos o modelo matemático mais simples para tratar do crescimento populacional de algumas espécies. Ele é chamado Modelo de Crescimento Exponencial, isto é, a variação da população em relação ao tempo, denotada por dP/dt, é proporcional à população presente. Em outras palavras, se P = P(t) é a população, temos dP/dt = k P onde k é uma constante. É simples verificar que se k > 0, teremos crescimento e se k < 0, teremos decaimento. Esta é uma EDO linear cuja solução é P(t) = Po ek.t , onde Po é a população inicial, P(0) = Po.

Portanto,

1. Se k > 0, a população cresce e continua a expandir para +∞.
2. Se k < 0, a população se reduzirá e tenderá a 0.

Em outras palavras, a população será extinta. A longo prazo, o primeiro caso, k > 0, pode não ser adequado: o ambiente tem limitações, e o crescimento populacional é eventualmente inibido pela falta de recursos essenciais.

Crescimento populacional: Modelo Logístico (Verhulst-Pearl)



O modelo logístico de Verhulst-Pearl procura remediar a limitação do modelo exponencial. A EDO para este modelo é $dP/dt = k\,P\,(1 - P/L)$ em que L é o limite máximo para a população (também chamado a capacidade do ambiente). Se P = P(t) é pequeno quando comparado com L, a EDO é praticamente a equação exponencial.

Este é um exemplo de uma EDO não linear separável. As soluções constantes são P = 0 e P = L. As soluções não constantes podem ser obtidas pela separação das variáveis, seguido do uso de integração com o uso da técnica das frações parciais.

Com algumas manipulações algébricas, teremos P(t) = L C ekt / (L + C ekt) onde C é uma constante e L é a capacidade do ambiente. Para P(0) = Po

$$P(t) = \frac{LP_0}{P_0 + (L - P_0)e^{-kt}}$$

Quando t → ∞, então P(t) → L, se Po não for zero. Este modelo é bem mais realista que o anterior, mas ainda é insatisfatório, pois não permite a possibilidade de extinção: mesmo começando com uma população pequena, a população sempre tenderá para L, a capacidade do ambiente. Ainda assim, o modelo é bastante apropriado para a análise de crescimento populacional de cidades e de populações de lactobacilos, entre outras situações.

<u>*Exemplo*</u>*:* Modelo de epidemia.

Analisaremos um modelo simplificado para propagação de uma doença, dotado das hipóteses:

1. Uma fração x de uma determinada população tem uma doença infecciosa. Assim, uma fração S = (1-x) não a tem.
2. A variação de x é proporcional a x e S. Em consequência destas hipóteses, temos que o modelo é dado pela equação $$\frac{dx}{dt} = rx(1-x)$$

Em que r é uma constante positiva. Esta é uma equação diferencial ordinária separável. Resolvendo-se a equação:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x)$$

$$rt = \int \frac{1}{x(1-x)} dx$$

$$rt = \int \frac{1}{x} + \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$rt = \log x - \log(1-x) + c$$

$$rt = \log\left(\frac{x}{1-x}\right) + c$$

$$e^{rt} = \frac{x}{1-x} e^{c}$$

$$x1 - x = ke^{rt},\ k = e^{-c}$$

$$x = \frac{1}{(1/k)e^{-rt} + 1}.$$

Aplicando a condição inicial x(0) = xo, obtemos:

$$x = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x_o}\right)e^{-rt}}$$

Quando t → ∞, x → 1: mais cedo ou mais tarde cada pessoa vai contrair a doença, não importando quantas pessoas estavam infectadas inicialmente, a menos que a condição inicial xo seja igual a 0 (zero), pois neste caso teríamos x = 0 para todo t.

Felizmente, este modelo é muito simplificado e não leva em consideração, por exemplo, a possibilidade de que as pessoas infectadas sejam isoladas ou que se recuperem da doença.

Plano semanal: semana 7

Matrícula	Aluno	Turma	Professora
18/0124099	Juliana Pereira Valle Gonçalves	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**15/04**	**16/04**	**18/04**
Objetivos	EDO segunda ordem, linear, homogênea com coeficientes constantes.	Resolução de EDO de segunda ordem, linear, homogênea com coeficiente constante. Introdução a EDO de segunda ordem, linear, não homogênea com coeficiente constante.	Aula virtual sobre método de variação dos parâmetros.

Informação	A equação $ay'' + by' + cy = 0$ ao substituímos $y = e^{\lambda x}$ torna-se $\boldsymbol{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$. Resolvemos isso como uma equação de segundo grau. Resolvendo, há 3 possibilidades: • $\Delta > 0$ • $\Delta = 0$ • $\Delta < 0$	1. A equação $ay'' + by' + cy = 0$ ao substituímos $y = e^{\lambda x}$ torna-se $\boldsymbol{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0}$. Resolvemos isso como uma equação de segundo grau. Resolvendo, há 3 possibilidades: • $\Delta > 0$ • $\Delta = 0$ • $\Delta < 0$ 2. A solução de EDO de segunda ordem, linear, não homogênea com coeficiente constante se dá por: $\boldsymbol{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$	A solução de EDO de segunda ordem, linear, não homogênea com coeficiente constante se dá por: $\boldsymbol{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$ em que $y_H(\mathrm{x})$ é a solução homogênea e $y_P(x)$ a solução particular. Para achar a solução particular existem 2 métodos: MCI e MVP.

		em que y_H(x) é a solução homogênea e $y_P(x)$ a solução particular. Para achar a solução particular existem 2 métodos: MCI e MVP.	
Resumo	***1.*** **$\Delta > 0$** ***(raízes reais distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$)*** • **Passo 1 (Equação característica e achar λ_1 *e* λ_2):** $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $\Delta = b^2 + 4ac$ $\lambda_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\lambda_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	***3.*** **$\Delta < 0$** ***(raízes reais distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$)*** • **Passo 1 (Equação característica e achar λ):** $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $\Delta = b^2 + 4ac$ $\lambda = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\lambda = \alpha \mp \beta i$	***II. Método de Variação de Parâmetro*** • **Vantagem:** método geral, a princípio pode ser aplicado a qualquer equação. • **Desvantagem:** Cálculo com integrais. **a. Passo 1:** Definir o conjunto fundamental de solução. **b. Passo 2:** Calcular o Wronskiano, ou seja, $W(y_1, y_2)(x)$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

- **Passo 2 (Conjunto Fundamental de Solução):**

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

- **Passo 3 (Solução Geral Homogênea):**

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- **Passo 4 (Se houver PVI – Solução Específica)**

2.* $\Delta = 0$ *(raízes reais iguais $\lambda_1 = \lambda_2$)

- **Passo 1 (Equação característica e achar λ):**

</td>
<td>

- **Passo 2 (Conjunto Fundamental de Solução):**

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta)$$
$$y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta)$$

- **Passo 3 (Solução Geral Homogênea):**

$$y_H = C_{1e^{\alpha x}\cos(\beta)} + C_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta)$$

- **Passo 4 (Se houver PVI – Solução Específica)**

I. Método dos Coeficientes Indeterminados (M.C.I)

- **Vantagem:** simples, manipulações algébricas.

</td>
<td>

c. **Passo 3:** Encontrar as funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$.
  - ❖ $u_1 = \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx$
  - ❖ $u_2 = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx$

d. **Passo 4:** Achar a solução particular $y_P(x)$.

❖ $\boldsymbol{y_P(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)}$

</td>
</tr>
</table>

	$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$ $$\Delta = b^2 + 4ac$$ $$\lambda = \frac{-b}{2a}$$ • **Passo 2 (Conjunto Fundamental de Solução):** $$y_1 = e^{\lambda x}$$ $$y_2 = xe^{\lambda x}$$ • **Passo 3 (Solução Geral Homogênea):** $$y_H = C_1 e^{\lambda x} + C_{2x} e^{\lambda x}$$	• **Desvantagem:** É restrito, só funciona se a função for: ***a.*** *Polinomial* ***b.*** *Exponencial* ***c.*** *Seno* ***d.*** *Cosseno*	

	• **Passo 4 (Se houver PVI – Solução Específica)**		
Observação	É necessário saber resolução de equação de segundo grau e revisar derivadas.	É necessário revisar derivadas, integrais, funções seno, cosseno, log e exponencial.	É necessário revisar derivadas e integrais.
Dúvidas	Na redução de ordem.	Em MCI.	Em MVP.
Monitoria			

1- Solução EDO 2ª ordem linear com coeficiente constante constante

a) $\Delta = 0$ com solução geral

$z'' + 10z' + 25z = 0$

$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$

passo 1:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 100 - 4 \cdot 1 \cdot 25$

$\Delta = 0$

$\lambda = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$

passo 2: conjunto fundamental de solução

$$\begin{cases} y_1 = e^{-5x} \\ y_2 = x e^{-5x} \end{cases}$$

passo 3: solução geral

$$y_H = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 x \cdot e^{-5x}$$

b) $\Delta = 0$ com PVI

$$\begin{cases} y'' - y' + \frac{1}{4} y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

passo 1:

$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}\lambda$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a c$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}$

$\Delta = 0$

$\lambda = \frac{-b}{2a}$

$\lambda = \frac{1}{2}$

passo 2: conjunto fundamental de solução

$$\begin{cases} y_1 = e^{1/2 x} \rightarrow y_1' = \frac{e^{1/2 x}}{2} \\ y_2 = x e^{1/2 x} \rightarrow y_2' = e^{1/2 x} + \frac{1}{2} e^{1/2 x} x \end{cases}$$

passo 3:

$$y_H = C_1 \cdot e^{1/2 x} + C_2 \cdot x e^{1/2 x}$$

passo 4: PVI

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \rightarrow C_2 = 2 - C_1 \\ \frac{1}{2} C_1 + C_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$C_2 = 2 - \frac{10}{3} \rightarrow C_2 = -\frac{4}{3}$

$\frac{1}{2} C_1 + 2 - C_1 = \frac{1}{3} \rightarrow C_1 = \frac{10}{3}$

$$y = \frac{10}{3} \cdot e^{1/2 x} - \frac{4}{3} x e^{1/2 x} x$$

c) $\Delta > 0$ com solução geral

$y'' + 5y' + 6y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 5y + 6 = 0$

passo 1:

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

$\lambda_1 = \frac{-5 + 1}{2}$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = \frac{-5 - 1}{2}$

$\lambda_2 = -3$

passo 2: conjunto fundamental de solução

$$\begin{cases} y_1 = e^{-2x} \\ y_2 = e^{-3x} \end{cases}$$

passo 3: solução geral

$$y_H = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$$

d) $\Delta > 0$ com PVI

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

$\rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

passo 1:

$\Delta = 1 + 9$

$\Delta = 9$

$\lambda_1 = \frac{-1 + 3}{2}$

$\boxed{\lambda_1 = 1}$

$\lambda_2 = \frac{-1 - 3}{2}$

$\lambda_2 = -2$

passo 2: conj. fund. solução

$$\begin{cases} y_1 = e^{x} \\ y_2 = e^{-2x} \end{cases}$$

passo 3: solução geral

$$y_H = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2x}$$

passo 4: PVI

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \rightarrow C_1 = 4 - C_2 \\ C_1 - 2C_2 = -5 \end{cases}$$

$C_1 = 1$

$4 - C_2 - 2C_2 = -5$

$-3C_2 = -9$

$C_2 = 3$

$$\boxed{y = e^{x} + 3e^{-2x}}$$

e) $\Delta < 0$ com solução geral

$y'' + y' + 9{,}25y = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda + 9{,}25 = 0$

passo 1:

$\Delta = 1 - 37$

$\Delta = -36$

$\lambda = \dfrac{-1 \pm i6}{2}$

$\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\beta = i3$

passo 2: cond. fund. sol.

$\begin{cases} y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}\cos(3x) \\ y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{sen}(3x) \end{cases}$

passo 3: solução geral

$y_H = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cos(3x) + c_2\, e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{sen}(3x)$

F) $\Delta < 0$ com PVI

$16y'' - 8y' + 145y = 0 \rightarrow 16\lambda^2 - 8\lambda + 145$

$\begin{cases} y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

passo 1:

$\Delta = 64 - 9280$

$\Delta = 9216$

$\lambda = \dfrac{8 \pm 96i}{32}$

$\alpha = \dfrac{8}{36} \Rightarrow \dfrac{1}{4}$

$\beta = 3i$

passo 2: cond. fund. sol.

$\begin{cases} y_1 = e^{\frac{1}{4}x}\cos(3x) \\ y_2 = e^{\frac{1}{4}x}\,\mathrm{sen}(3x) \end{cases}$

passo 3: solução geral

$y_H = c_1 \cdot e^{\frac{1}{4}x}\cos(3x) + c_2\, e^{\frac{1}{4}x}\,\mathrm{sen}(3x)$

passo 4: PVI

$\begin{cases} c_1 = -2 \\ \frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1 \end{cases}$

$y = -2e^{\frac{1}{4}x}\cos(3x) + \dfrac{5}{6}e^{\frac{1}{4}x}\,\mathrm{sen}(3x)$

$-\dfrac{2}{4} + c_2 = \dfrac{1}{3}$

$c_2 = \dfrac{5}{6}$

Plano semanal: semana 8

Matrícula	Aluno	Turma	Professora
18/0124099	Juliana Pereira Valle Gonçalves	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**06/05**	**07/05**	**09/05**
Objetivos	Revisão de EDO de primeira ordem com o auxílio do aplicativo do monitor Leonardo.	Revisão de EDO de primeira ordem com o auxílio do aplicativo do monitor Leonardo.	Revisão de EDO de primeira ordem com o auxílio do aplicativo do monitor Leonardo.

Informação	Classificação e resolução de EDO de primeira ordem.	Classificação e resolução de EDO de primeira ordem.	Classificação e resolução de EDO de primeira ordem.
Resumo	O aplicativo permite o uso de 2 modos: 1. ***Classificação:*** Na classificação você pode jogar de duas formas: **I.** **Tipo:** Você escolhe a opção correspondente a que está sendo perguntada e pode ser parcial ou ordinária. **II.** **Ordem:** Você escolhe a opção correspondente a que está sendo perguntada e pode ser 1ª,2ª,3ª ou superior.	O aplicativo permite o uso de 2 modos: 1. ***Classificação:*** Na classificação você pode jogar de duas formas: **I.** **Tipo:** Você escolhe a opção correspondente a que está sendo perguntada e pode ser parcial ou ordinária. **II.** **Ordem:** Você escolhe a opção correspondente a que está sendo perguntada e pode ser 1ª,2ª,3ª ou superior.	O aplicativo permite o uso de 2 modos: 1. ***Classificação:*** Na classificação você pode jogar de duas formas: **I.** **Tipo:** Você escolhe a opção correspondente a que está sendo perguntada e pode ser parcial ou ordinária. **II.** **Ordem:** Você escolhe a opção correspondente a que está sendo perguntada e pode ser 1ª,2ª,3ª ou superior.

	2. ***Resolução:*** O objetivo é achar a resolução da EDO em um jogo da memória.	2. ***Resolução:*** O objetivo é achar a resolução da EDO em um jogo da memória.	2. ***Resolução:*** O objetivo é achar a resolução da EDO em um jogo da memória.
Observação	Abordagem lúdica de resolução de EDO.	Abordagem lúdica de resolução de EDO.	Abordagem lúdica de resolução de EDO.
Dúvidas			
Monitoria			

1- Exemplos do uso do método dos coeficientes indeterminados

a) $y'' - 3y' + 2y = sen(x)$

solução particular:

$y_{p(x)} = A sen(x) + B(cos x)$

$(A sen(x) + B cos(x))'' - 3(A sen(x) + B cos(x))' + 2(A sen(x) + B cos(x)) = sen(x)$

$-A sen(x) - B cos(x) - 3A cos(x) + 3B sen(x) + 2A sen(x) + 2B cos(x) = sen(x)$

$(3B + A) sen(x) - (3A - B) cos(x) = sen(x)$

$$\begin{cases} A + 3B = 1 \\ 3A - B = 0 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{10} \qquad B = \frac{3}{10}$$

$y_{p(x)} = \frac{1}{10} sen x + \frac{3}{10} cos x$ → solução particular

Solução homogênea:

$y'' - 3y + 2$

$\Delta = 9 - 8$

$\Delta = 1$

$y_1 = \frac{+3+1}{2} = 2 \rightarrow y_1 = e^{2x}$

$y_2 = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow y_2 = e^{x}$

Solução homogênea: $C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$

Resposta: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{10} sen x + \frac{3}{10} cos x$

b) $y'' - 3y' + 2y = x^2 + 1$

solução homogênea:

dados da letra a

→ $C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} = y_H$

Solução particular

$y_{p(x)} = Ax^2 + Bx + C$

$(Ax^2 + Bx + C)'' - 3(Ax^2 + Bx + C)' + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$

$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2A + 2C - 3B = x^2 + 1$

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2B - 6A = 0 \\ 2A + 2C - 3B = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{2} \qquad B = \frac{3}{2} \qquad C = \frac{9}{4}$$

$y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{4}$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{4}$

2- Exemplos do uso do método da variação de parâmetros

a) $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x^2}$

solução homogênea

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\Delta = 0$

$\lambda = 4$

$y_H = \underbrace{C_1 e^{4x}}_{y_1} + \underbrace{C_2 x e^{4x}}_{y_2}$

solução parcial

$y_1' = 4e^{4x}$

$y_2' = e^{4x} + x4e^{4x}$

$\begin{cases} v_1'(e^{4x}) + v_2'(xe^{4x}) = 0 \\ v_1'(4e^{4x}) + v_2'(e^{4x} + 4xe^{4x}) = \frac{e^{4x}}{x^2} \end{cases}$ $\div e^{4x}$

$\begin{cases} v_1' + x v_2' = 0 \\ 4v_1' + [1+4x] v_2' = \frac{1}{x^2} \end{cases}$

$v_1' = -x v_2' \rightarrow v_1' = -\frac{1}{x}$

$4(-x v_2') + [1+4x] v_2' = \frac{1}{x^2}$

$v_2' = \frac{1}{x^2}$

$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$ $\qquad \int -\frac{1}{x} dx = -\ln(x)$

$y_p(x) = -\ln(x) e^{4x} - e^{4x} = e^{4x}[-\ln(x) - 1]$

$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + [-\ln(x) - 1] e^{4x}$

b) $y'' - 2y' + y = e^x$

solução homogênea:

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\Delta = 0$

$\lambda = 1$

$y_H = \underbrace{C_1 e^x}_{y_1} + \underbrace{C_2 x e^x}_{y_2}$

solução particular

$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & xe^x + e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$

$v_1' = \frac{e^x \cdot xe^x}{e^{2x}} = x \rightarrow \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$

$v_2' = \frac{e^x \cdot e^x}{e^{2x}} = 1 \rightarrow \int 1\, dx = x$

$y_p = \frac{x^2}{2} \cdot e^x + x \cdot xe^x$

$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{x^2}{2} e^x + x^2 e^x$

Plano Semanal: Semana 9

Matrícula	Aluno	Turma	Professora
18/0124099	Juliana Pereira Valle Gonçalves	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**13/05**	**14/05**	**16/05**
Objetivos	Não houve aula.	Não houve aula.	Aula de revisão para prova.
Informação	Não houve aula.	Não houve aula.	Resolução de exercícios.
Resumo	Não houve aula.	Não houve aula.	Resolução de exercícios da lista de EDO.
Observação	Não houve aula.	Não houve aula.	Aula de revisão para prova.
Dúvidas			
Monitoria			

Plano Semanal: Semana 10

Matrícula	Aluno	Turma	Professora
18/0124099	Juliana Pereira Valle Gonçalves	CC	Tatiane da Silva Evangelista

	Segunda-feira	**Terça-feira**
Data	**20/05**	**21/05**
Objetivos	Sala de aula invertida.	Prova.
Informação	Oscilações Mecânicas.	Prova.
Resumo	$F(t) = my'' + \gamma y' + ky$ • Livres sem amortecimento: $my'' + ky = 0$	Prova.

	• Livres com amortecimento: $my'' + \gamma y' + ky = 0$	
Observação	Oscilações Mecânicas.	Prova.
Dúvidas		
Monitoria		

Sala de aula Invertida

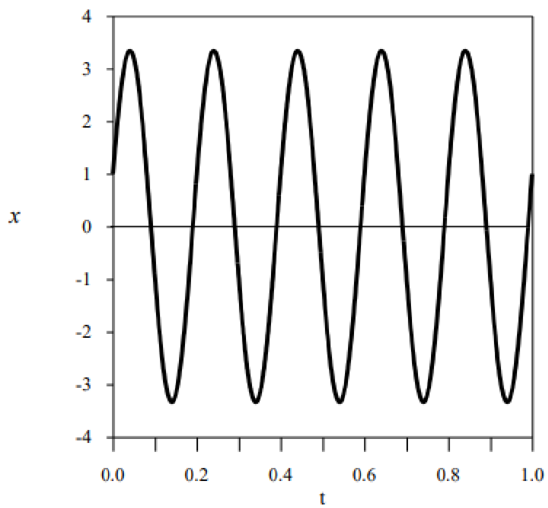
A sala de aula invertida teve o tema: *Oscilações Mecânicas.*

Uma oscilação pode ser entendida como sendo um movimento repetitivo periodicamente em intervalos de tempos iguais. Como exemplos podem ser citados alguns tipos de oscilações na natureza: sistema massa mola, pêndulo simples e o oscilador harmônico.

1. Sistemas Livres sem Amortecimento:

Os sistemas não amortecidos são sistemas irreais. Podem ser analisados como um caso particular dos sistemas subamortecidos para os quais o coeficiente de amortecimento é admitido nulo, ou seja, c = 0. As raízes da equação característica são complexas conjugadas, com parte real nula.

$$my'' + ky = 0$$



Vibração livre de sistemas não amortecidos

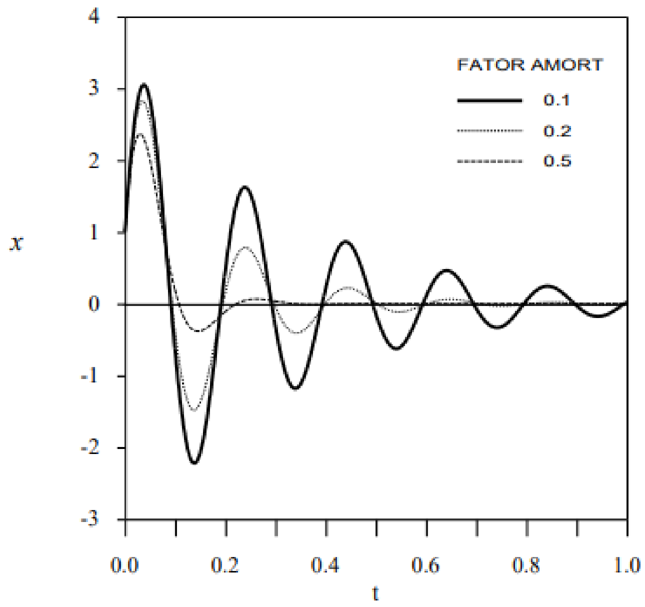
2. Sistemas Livres com Amortecimento:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0$$

Sistemas Livres com amortecimento são divididos em:

I. *Sistemas subamortecidos:*

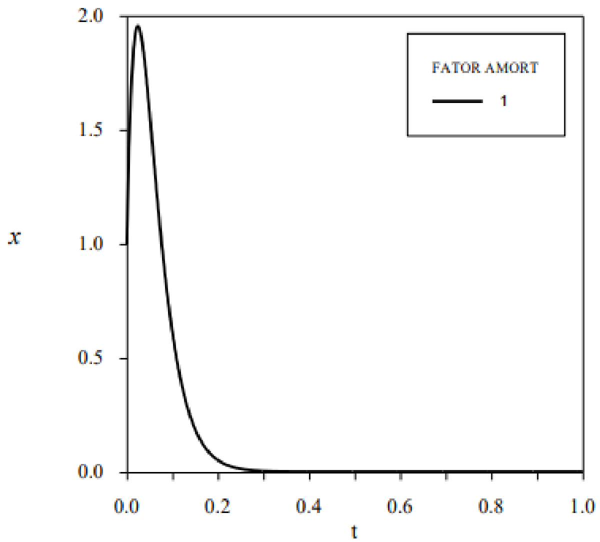
Fator de amortecimento $\Delta < 0$.



Vibração livre de sistemas subamortecidos.

II. Sistemas com amortecimento crítico:

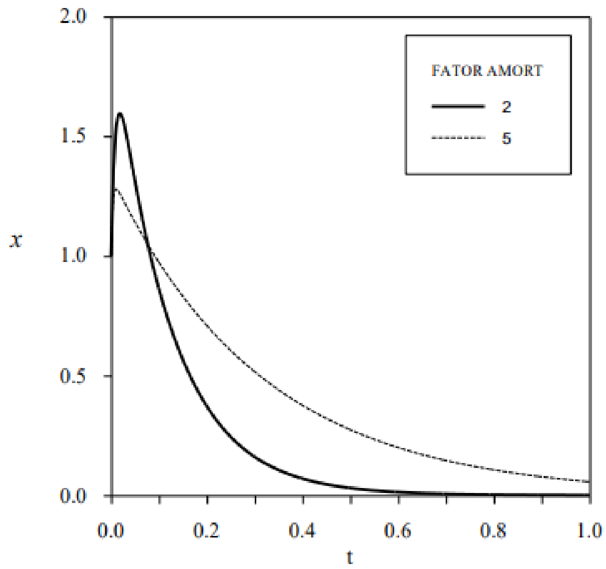
Fator de amortecimento $\Delta = 0$.



Vibração livre de sistemas com amortecimento crítico.

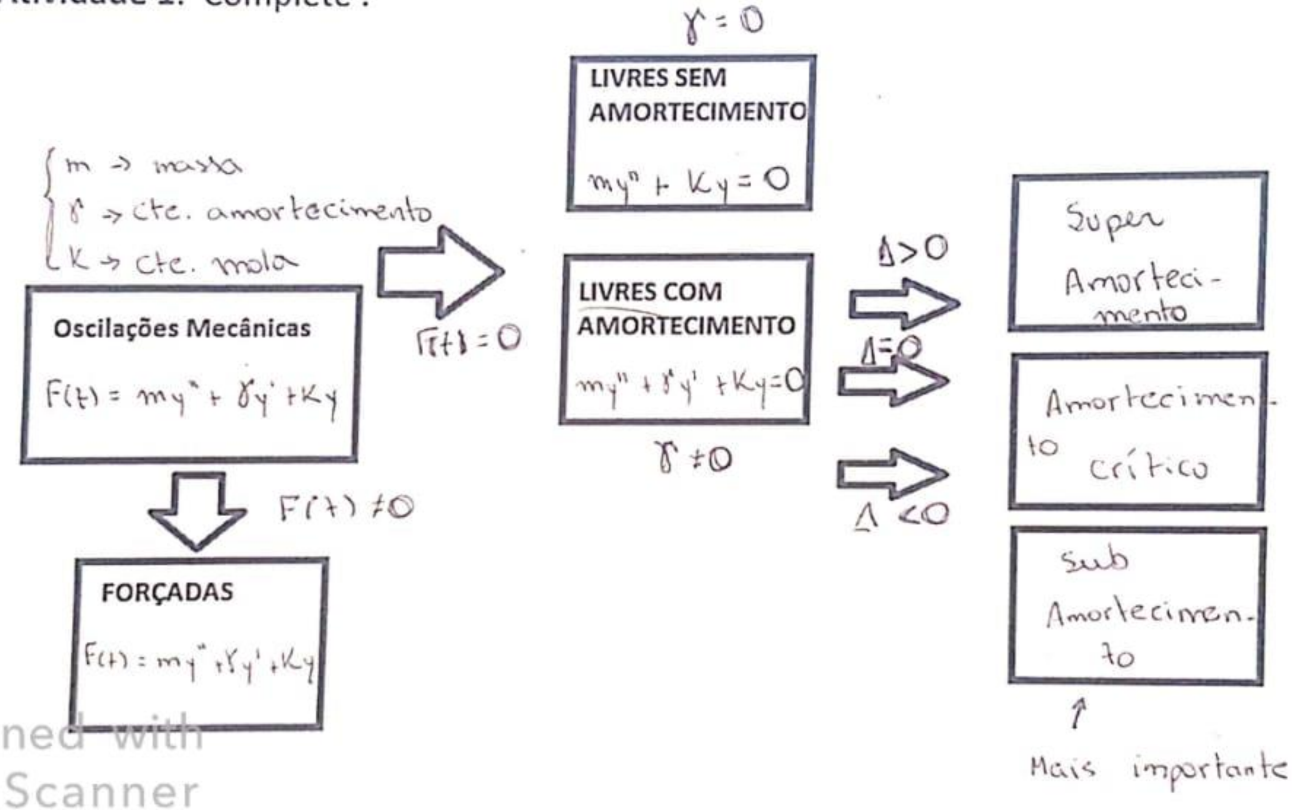
III. Sistemas superamortecidos:

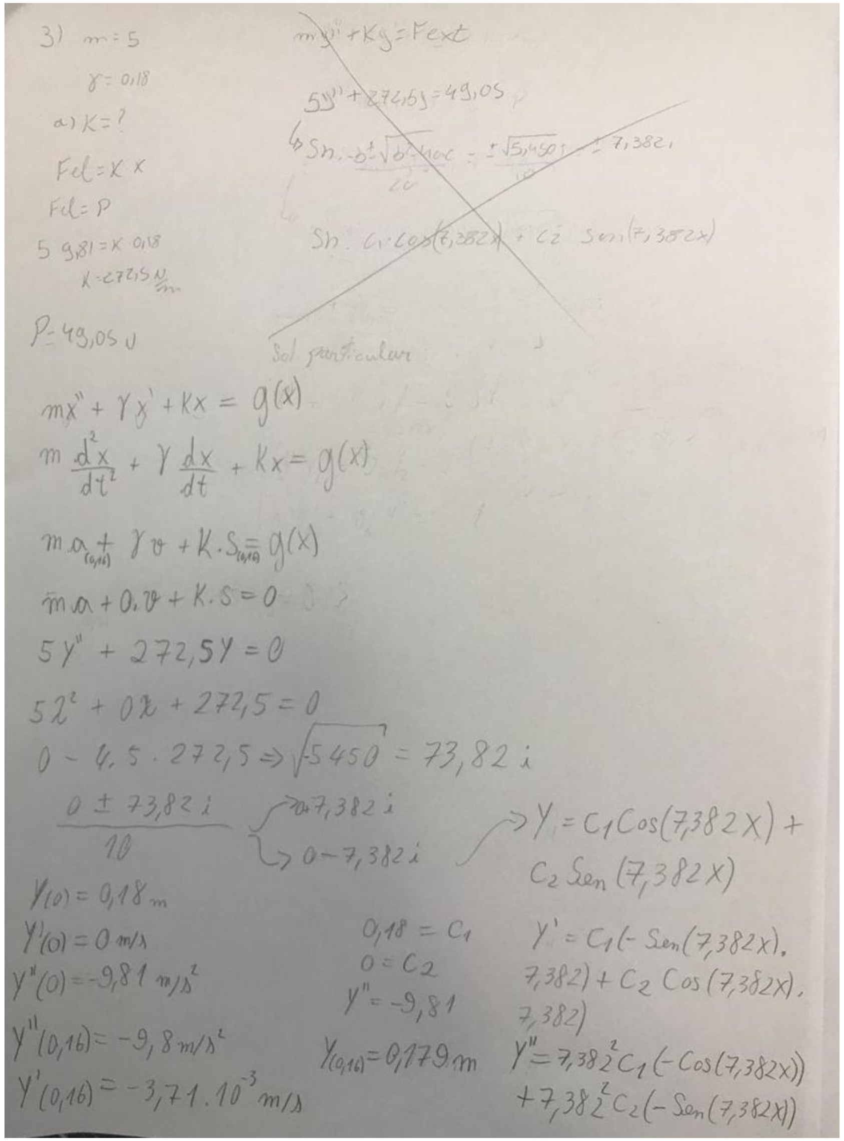
Fator de amortecimento $\Delta > 0$.



Vibração livre de sistemas sobreamortecidos.

Atividade 1: Complete :





3) $m = 5$

$\gamma = 0{,}18$

a) $K = ?$

$F_{el} = K\,x$

$F_{el} = P$

$5 \cdot 9{,}81 = K \cdot 0{,}18$

$K = 272{,}5\ \frac{N}{m}$

$P = 49{,}05\ N$

$m y'' + K y = F_{ext}$

$5y'' + 272{,}5y = 49{,}05$

$S_h: \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\pm\sqrt{5{,}450}}{10} = \pm 7{,}382i$

$S_h: C_1 \cdot \cos(7{,}382x) + C_2 \sin(7{,}382x)$

Sol particular

$m x'' + \gamma x' + kx = g(x)$

$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = g(x)$

$m a_{(0,16)} + \gamma v + K \cdot S_{(0,16)} = g(x)$

$m a + 0 \cdot v + K \cdot S = 0$

$5y'' + 272{,}5y = 0$

$5\lambda^2 + 0\lambda + 272{,}5 = 0$

$0 - 4 \cdot 5 \cdot 272{,}5 \Rightarrow \sqrt{-5450} = 73{,}82i$

$\frac{0 \pm 73{,}82i}{10}$ → $0 + 7{,}382i$; $0 - 7{,}382i$ → $Y_h = C_1 \cos(7{,}382X) + C_2 \operatorname{Sen}(7{,}382X)$

$Y(0) = 0{,}18\ m$

$Y'(0) = 0\ m/s$

$Y''(0) = -9{,}81\ m/s^2$

$Y''(0{,}16) = -9{,}8\ m/s^2$

$Y'(0{,}16) = -3{,}71 \cdot 10^{-3}\ m/s$

$0{,}18 = C_1$

$0 = C_2$

$Y'' = -9{,}81$

$Y_{(0,16)} = 0{,}179\ m$

$Y' = C_1(-\operatorname{Sen}(7{,}382x) \cdot 7{,}382) + C_2 \cos(7{,}382x) \cdot 7{,}382)$

$Y'' = 7{,}382^2 C_1(-\cos(7{,}382x)) + 7{,}382^2 C_2(-\operatorname{Sen}(7{,}382x))$

Exemplo da Sala de aula invertida.

Aplicação: Catalise Enzimática

O potencial de catalisar reações químicas é uma das bases para possibilitar a vida. Um catalisador, segundo Atkins e de Paula (2012) p. 259, é uma substância que acelera uma reação, mas não sofre, modificação de natureza Química, nesse processo. Diminui assim a energia de ativação, esse parâmetro determina a mínima energia cinética que se necessita dos reagentes para a formação de produtos. Boa parte das enzimas são proteínas, e não raro são catalisadores muito mais poderosos que os sintéticos. O reconhecimento e a discrição dessas complexas moléculas se deram inicialmente no final dos anos 1700 por estudos dirigidos a digestão de carne por secreções estomacais. Durante os séculos seguintes muitas descobertas nesse campo foram imprescindíveis para o desenvolvimento da bioquímica.

As condições biológicas relevantes possibilitam condições de fator de hidrogênio (pH), meio aquoso e temperatura desfavoráveis à cinética de reações não catalisadas. As enzimas, segundo Nelson e Cox (2011), fomentam um ambiente especifico e adequado para determinada reação. Essas moléculas são estruturadas de forma a conter um sítio ativo, um “bolsão” em que a reação ocorre isolada, e é ali que ela recebe o substrato, o reagente, fomentando o ambiente necessário. O complexo enzima-substrato teve sua existência proposta por Charles-Adolphe Wutrz em 1880. Sendo este o ponto crucial para a modelagem matemática que defina o comportamento reacional, pois as reações de velocidade dependem do estudo deste.

A cinética enzimática é um dos métodos mais importantes para compreender um mecanismo enzimático, e consiste em determinar as variações de velocidade frente a variação dos parâmetros. Um fator chave é a concentração de substrato, [S], entretanto a constante mudança deste durante o processo dificulta o estudo. É necessário então acompanhar a velocidade inicial, V0. A teoria geral de ação das enzimas foi proposta por Leonor Michaelis e Maud Menten em 1913. Segundo MURRAY, 1993, eles postularam a seguinte reação total:

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE, \quad SE \xrightarrow{k_2} P + E\,.$$

Sendo que a enzima se combina inicialmente e, de maneira reversível, com o substrato, e então o complexo é rompido em uma reação mais lenta que libera o produto e a enzima. Trabalhando matematicamente se tem uma lei que norteia o processo. Segundo a lei de conservação da massa a concentração dos produtos e proporcional a dos reagentes. Então trabalhando as concentrações:

[S]= s [E]= e [SE]= c [P]= p

Os postulados denotam que as velocidades de formação e quebra do complexo são determinadas pelas constantes k1 (formação), k-1+ k2 (quebra em reagentes e produtos respectivamente), que remetem a observação da Lei da conservação da massa já mencionada.

Aplicando a lei se tem então as seguintes equações:

$ds/dt = -\mathrm{k1}es + \mathrm{k}{-1}c$, (103) esta diz que a taxa de concentração do substrato é proporcional a quebra do complexo em reagentes subtraído da formação do complexo, $de/dt = -\mathrm{k1}es + (\mathrm{k}{-1}+\mathrm{k2})c$, que por sua vez diz que a taxa de concentração da enzima é proporcional a quebra do complexo em reagentes e produtos subtraído da formação do complexo, $dc/dt = \mathrm{k1}es - (\mathrm{k}{-1}+\mathrm{k2})c$, por sua vez diz que a taxa de concentração do complexo é proporcional a quebra do complexo produtos, dp/dt = k2c esta diz que a taxa de concentração do produto é igual a quebra do complexo em reagentes subtraído da formação do complexo. Tem-se assim um sistema não-linear de equações.

Nem todas são independentes, a formação dos produtos depende da equação de concentração do complexo, trabalhando-as se tem: $p(t) = k_2 \int_0^t c(s)ds$.

s = s0 e = e0 c = 0 p = 0

Isso porque a reação inicia-se com substratos e enzimas interagindo com concentrações determinadas e objetivo de liberar um produto, entretanto no momento inicial a concentração de complexo e produto conhecidas e igual a zero. Analisando as equações, se observa que a concentração do complexo e enzimas na solução é inversa, equações com módulos iguais, mas sinais opostos.

Porque dc/dt + $de\ dt$ = 0. Essas se anulando implica que; $c(t)$ + $e(t)$ = e0. Isolando e(t); $e(t)$ = e0 − $c(t)$ por substituir a equação $c(t)$ + $e(t)$ = e0 nas ds/dt = −k1es + k−1c e $dc\ dt$ = k1es − (k−1+k2)c = ds/dt = −k1e0s + (k1s+k−1)c, dc/dt = k1e0s − (k1s+k−1+k2)c. Com condições iniciais s(0) = s0 e e(0) = 0.

Como as equações acima são dadas apenas em termos de “s” e “c” a análise qualitativa inicial é feita apenas com essas duas equações. As analises aqui feitas só são validas para $t \geq 0$ e as concentrações das variáveis acima ou iguais a zero. Segue-se assim uma análise qualitativa das direções do sistema com as equações no plano (c, s) para deduzir as formas das soluções, valendo apenas para c e $s > 0$.

1º- Análise de $\frac{ds}{dt} = -\mathrm{k}_1 e_0 s + \mathrm{k}_{-1} c$;

$$\frac{ds}{dt} > 0 \Rightarrow c > {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}\!/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_{-1}},$$

$$\frac{ds}{dt} < 0 \Rightarrow c < {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}\!/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_{-1}},$$

$$\frac{ds}{dt} = 0 \Rightarrow c = {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}\!/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_{-1}}.$$

E denomine-se $c = {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}\!/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_{-1}}$; como curva “a”,

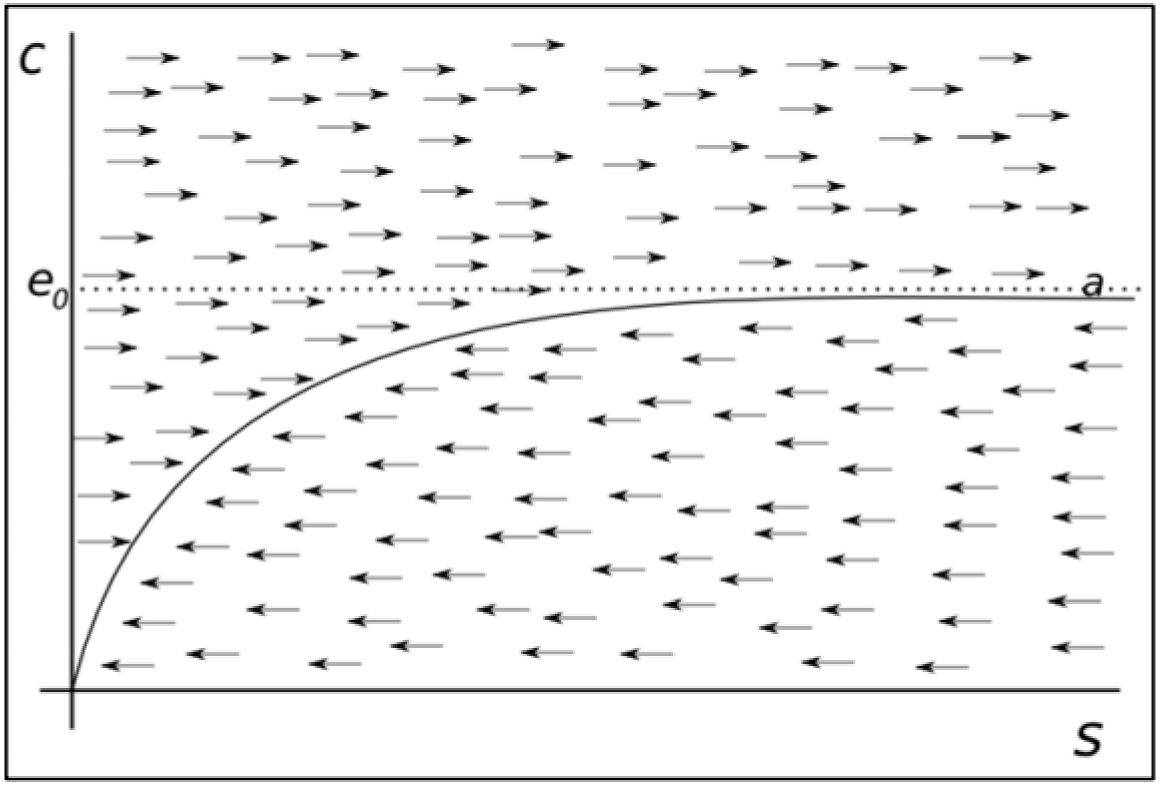


Diagrama de Direção ds/dt.

2º- Análise de $\frac{dc}{dt} = \mathrm{k}_1 e_0 s - (\mathrm{k}_{-1}\mathrm{k}_1\mathrm{k}_2)c$;

$\frac{dc}{dt} > 0 \Rightarrow c < {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_{-1}}$,

$\frac{dc}{dt} < 0 \Rightarrow c > {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_{-1}}$,

$\frac{dc}{dt} = 0 \Rightarrow c = {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_{-1}}$.

E denomine-se $c = {}^{\mathrm{k}_1 e_0 s}/_{\mathrm{k}_1 s + \mathrm{k}_2 + \mathrm{k}_{-1}}$; como curva "b"

Geometricamente se obtém as seguintes direções;

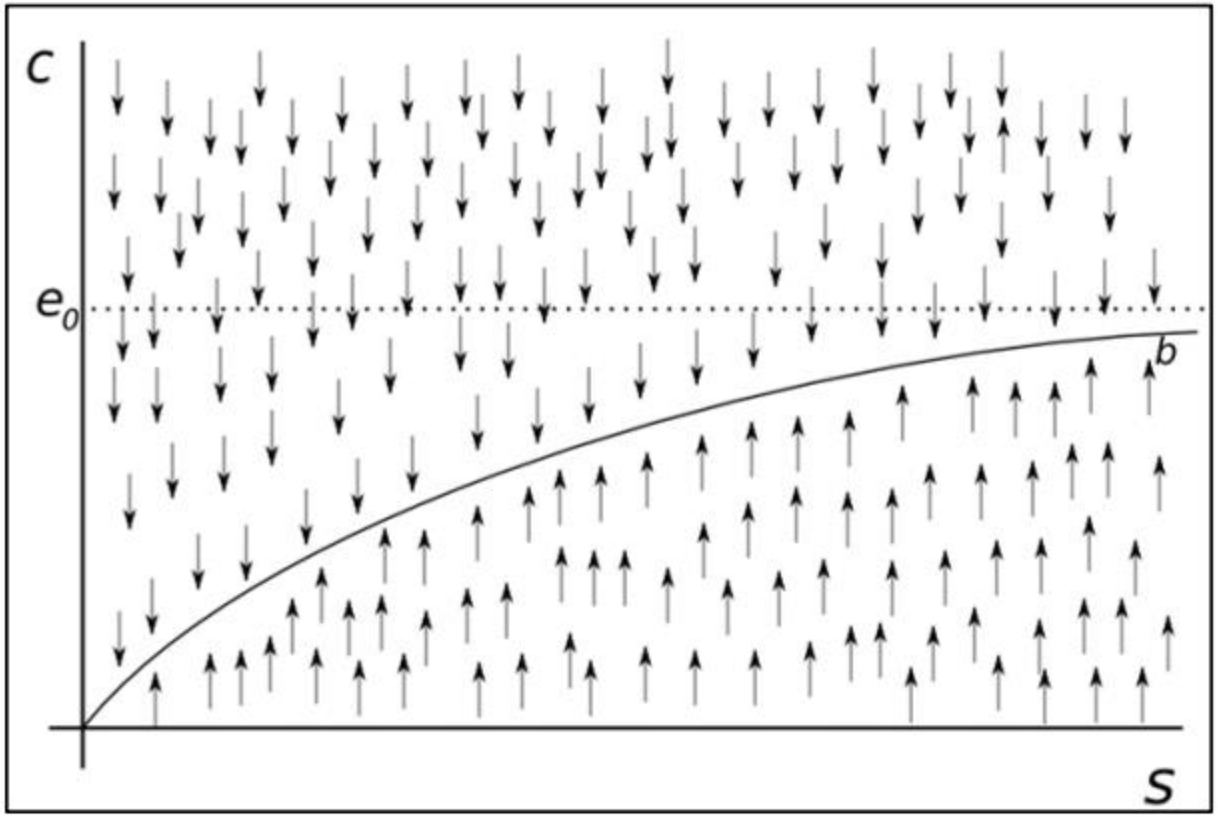
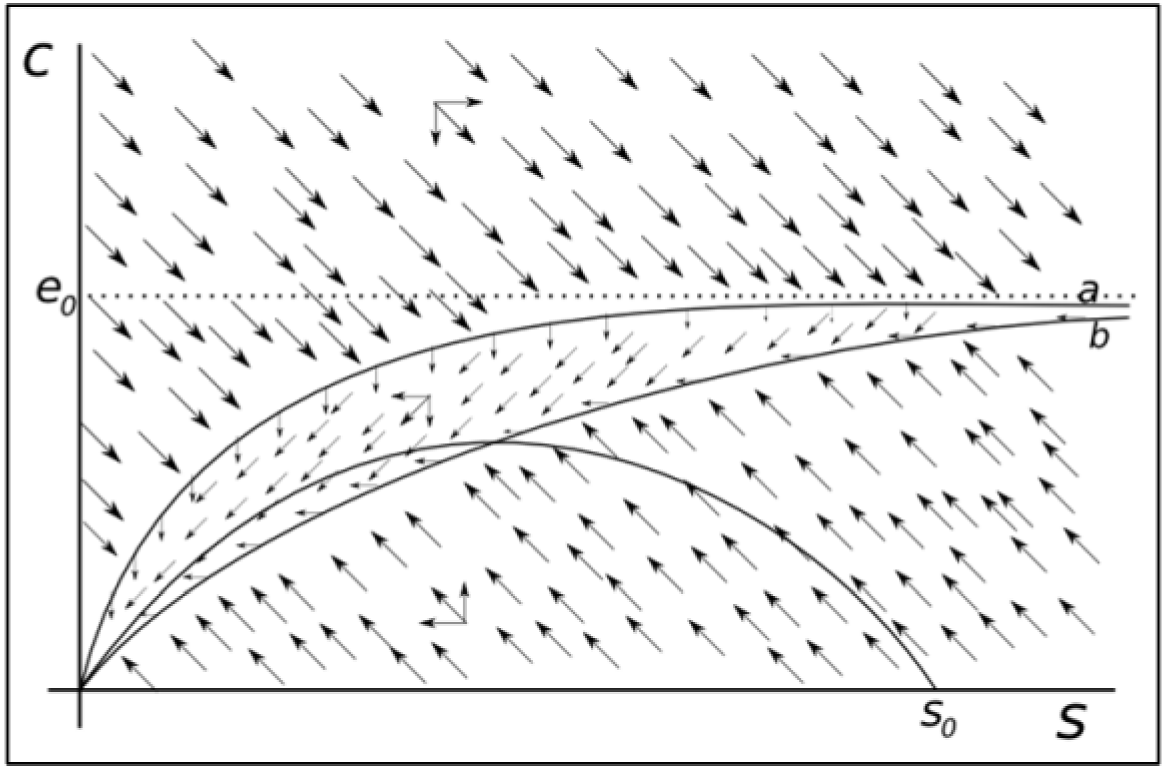


Diagrama de Direção dc/dt.

Unindo os gráficos anteriores se obtém:



O estudo desse gráfico permite observar que na condição inicial s(0)=s0 e c(0)= 0 se tem que $ds\ dt$ < 0 em todo t>0, portanto s(t) é sempre decrescente e tende a zero quando t →∞. Quimicamente isso corresponde a dizer que o substrato tende a ser totalmente consumido atingindo a concentração zero. Em relação a c(t) se observa que dc/dt > 0 até c(t) atingir a curva "b" no valor c = k1e0s k1s + k2 + k−1 ;

onde s depende da concentração de s0. Apos esse valor c decresce e tende a zero quando t →∞. Quimicamente isso diz que o complexo tende à zero depois atingir a curva b, pois o substrato passa a ser mais escasso. Assim se formula o seguinte gráfico para a concentração do substrato e do complexo (SE);

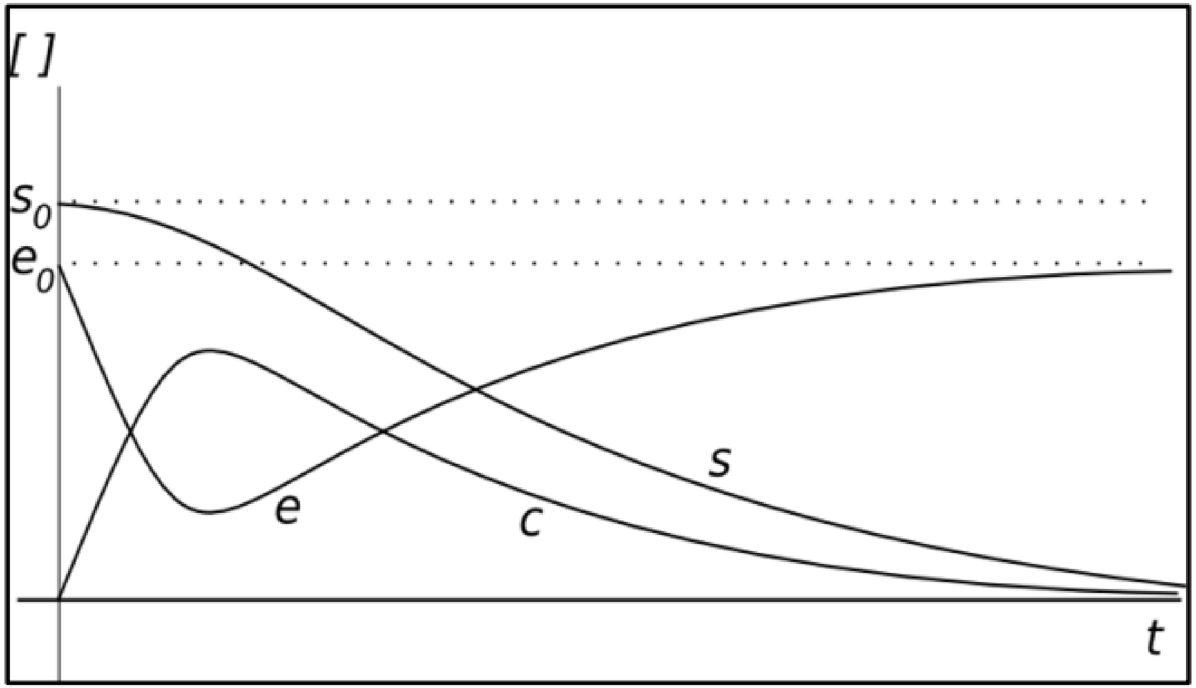


Gráfico- concentração s e c pelo tempo.

Pela equação $e(t) = e0 - c(t)$, o gráfico da concentração da enzima é o oposto da do complexo ES elevando a uma altura "e0" da concentração inicial da enzima. Pensando no produto se tem pela equação $dc\ dt$ = k1es − (k−1+k2)c. Em t= 0 se tem $dp\ dt = k2c\ 0 = k20$. Mas a partir do conceito básico de analises qualitativas, t > 0 para todo t> 0. Ou seja, a concentração do produto é sempre crescente. Mas como, t → ∞, então $dp/dt = k2c$, c(t) → 0 quando t → ∞, logo a concentração do produto tende a estabilizar em algum valor p0.

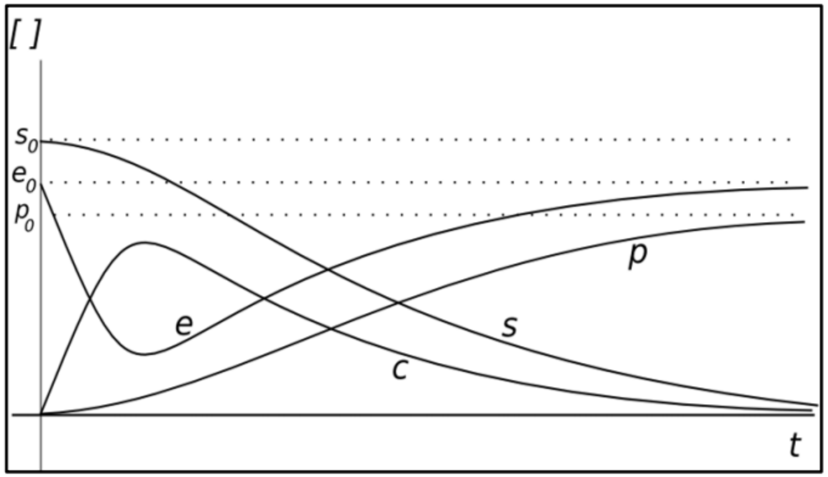
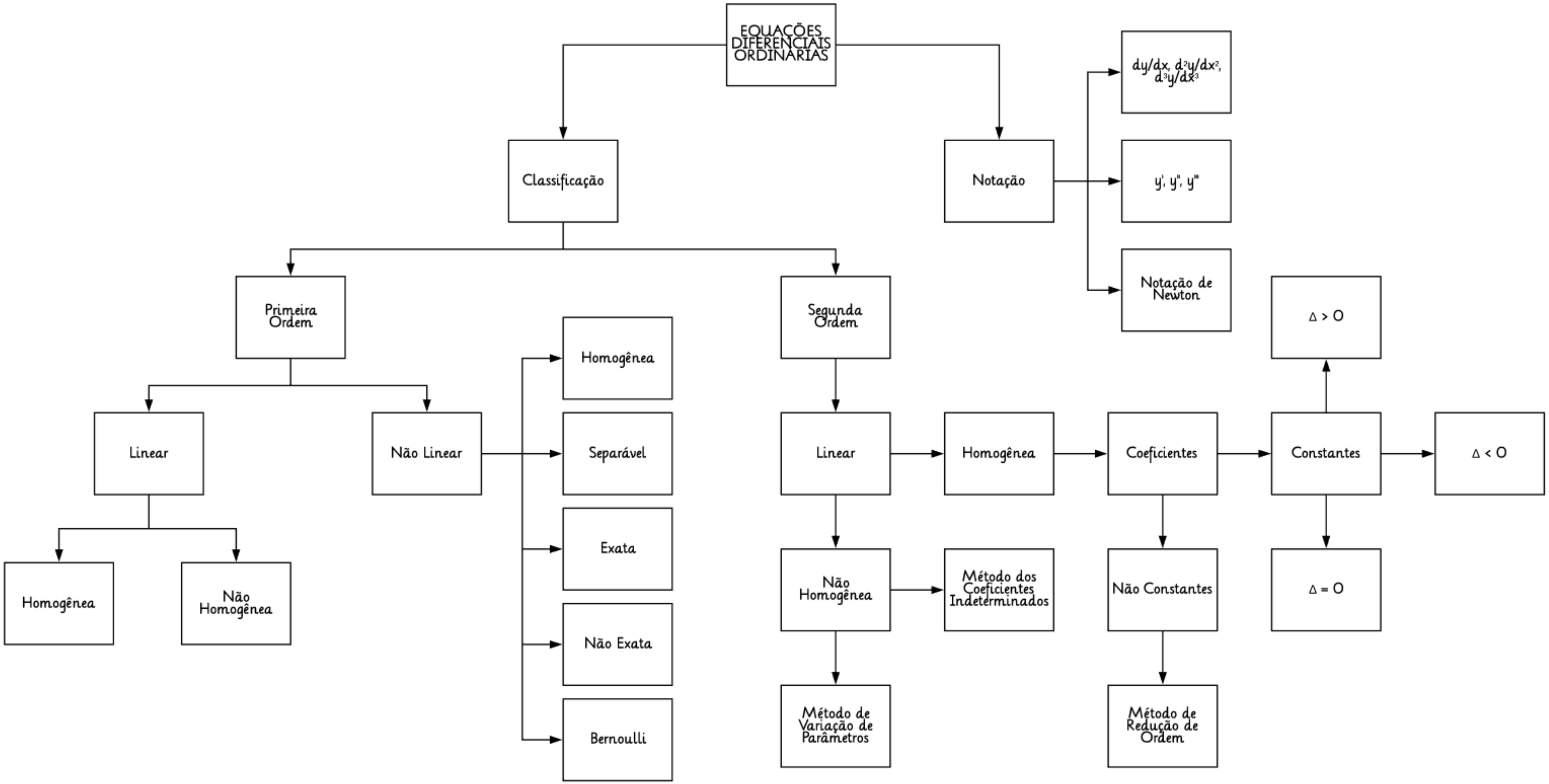


Gráfico- concentração s, p, e, c pelo tempo

As concentrações dos componentes da reação são demonstradas conforme a Figura 19, onde *s* e *e* iniciam em sua concentração máxima, e s tende a zerar sendo totalmente consumido. Pode-se observar também que as concentrações de *e* e *c* são inversas e, que após um pico de existência de *c* e consumo de *e*, o complexo tende a zero e *e* tende a concentração inicial e0.

Mapa Conceitual



EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
Classificação
Notação
dy/dx, d²y/dx², d³y/dx³
y', y'', y'''
Notação de Newton
Primeira Ordem
Segunda Ordem
Linear
Não Linear
Homogênea
Não Homogênea
Homogênea
Separável
Exata
Não Exata
Bernoulli
Linear
Homogênea
Coeficientes
Constantes
Δ > 0
Δ < 0
Δ = 0
Não Homogênea
Método dos Coeficientes Indeterminados
Não Constantes
Método de Variação de Parâmetros
Método de Redução de Ordem