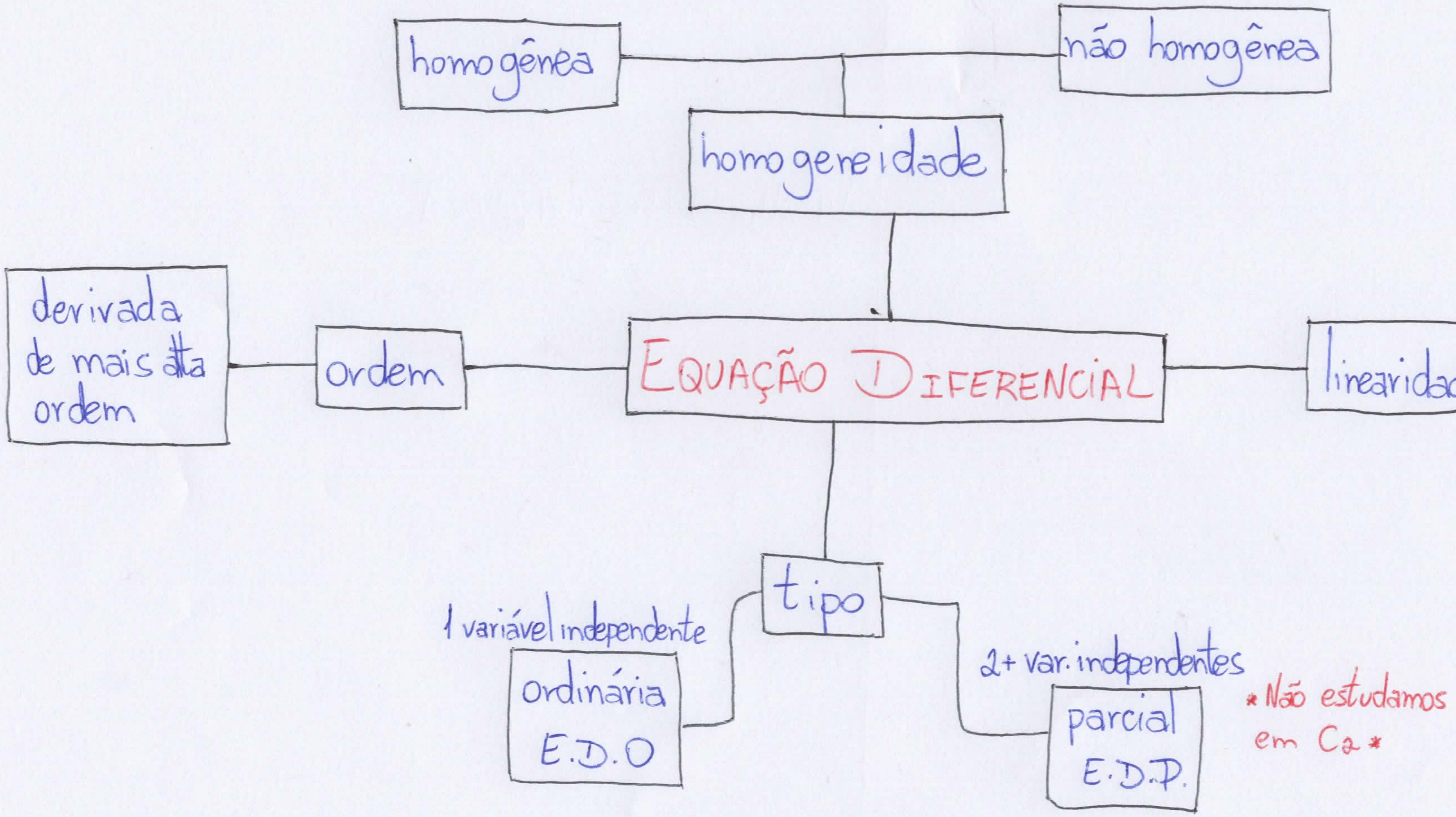
Nome: Levi Braz dos Santos Queiroz

Matrícula: 18/0076744

Curso: Engenharia Eletrônica

Mapa Conceitual

· Classificação EDO



Planos de Aula Semanais + Exercícios

Plano de aula semanal: Semana 5

Matrícula	Aluno	Turma	professora
1800767 44	**Levi Braz dos Santos Queiroz**	**CC**	**Tatiane da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**15/04**	**16/04**	**18/04**
Objetivos	**Iniciar assunto Equações Diferenciais**	**Iniciar soluções de EDO 1ª ordem**	**Continuar soluções EDO 1ª ordem**
Informação	**O que é, classificação, formas de expressar, soluções de equação diferencial**	**Soluções EDO 1ª ordem linear homogênea e linear não-homogênea**	**Soluções EDO 1ª ordem não linear nas formas separável e homogênea**
Resumo	**Equação diferencial é uma equação que apresenta derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida.**	**Para solucionar EDO primeira ordem, linear, homogênea, basta colocar na forma padrão e**	**Caso a EDO de primeira ordem, não linear esteja na forma separável, basta isolar as funções e integrar de ambos os lados,**

	Pode-se classificar uma equação diferencial pela seu tipo, ordem, linearidade, homogeneidade. **A EDO pode ser expressa na forma implícita, explícita e na forma padrão.** **Existem 2 tipos de soluções para EDO:** ● **Geral: envolve constantes** ● **Específica: valor exato (Problema de Valor Inicial)**	**integrar ambos os lados.** **Existem 3 casos para solucionar EDO primeira ordem, linear, não homogênea:** **Caso 1, em que as funções p(x) e q(x) são constantes.** **Caso 2, em que p(x) é constante.** **Caso 3, que é um caso geral.** **Nos casos 2 e 3, é necessário usar um fator integrante para multiplicar toda a EDO, para, assim, resolver a EDO.**	**sendo que a maioria das vezes a solução é dada na forma implícita.** **Caso esteja na forma homogênea, será necessário criar uma função de substituição 'f(v)' em que 'v' é 'y' sobre 'x'.**
Observação			

Dúvidas			
Monitoria			

· Classificação E.D.O.

1) $t^2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + t \cdot \frac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$

$t^2 \cdot y'' + ty' + 2y = \operatorname{sen} t$

EDO, linear, 2ª ordem, não homogênea

2) $(1+y^2) \cdot y'' + ty' + y = e^t$

EDO, não linear, 2ª ordem, não homogênea

3) $y^{(4)} + y''' + y'' + y' + y = 1$

EDO, linear, 4ª ordem, não homogênea

4) $y' + ty^2 = 0$

EDO, não linear, 1ª ordem, homogênea

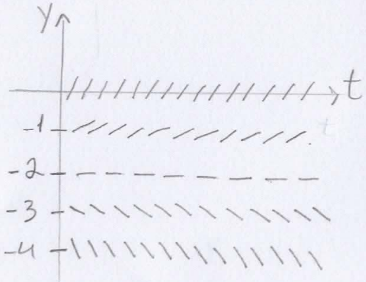
5) $y''' + ty' + \cos^2 t \, y = t^3$

EDO, linear, 3ª ordem, não homogênea

· Campos de Direção

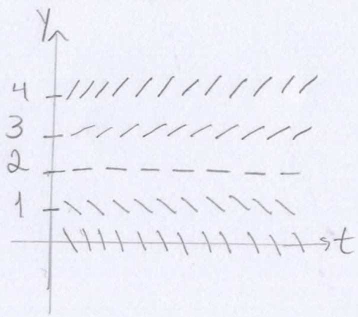
1) $y' = 2 + y$

y	y'
-4	-2
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2



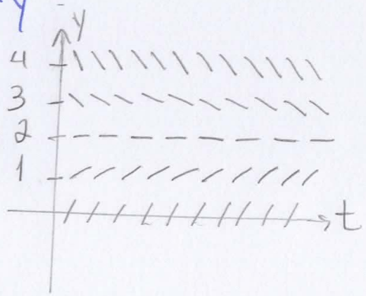
2) $y' = y - 2$

y	y'
0	-2
1	-1
2	0
3	1
4	2



3) $y' = 2 - y$

y	y'
0	2
1	1
2	0
3	-1
4	-2



· Solução EDO 1ª ordem linear homogênea

1) $y' - 3y = 0$

$y' = 3y$

$y' \cdot \frac{1}{y} = 3$

$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 3 \cdot dx$

$\ln y + C = 3x + C$

$e^{\ln y} = e^{3x+C}$

$y = e^{3x} \cdot K$

2) $y' + 2ty = 0$

$y' = -2ty$

$y' \cdot \frac{1}{y} = -2t$

$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int -2t \, dt$

$\ln y = -t^2 + C$

$e^{\ln y} = e^{-t^2+C}$

$y = \frac{K}{e^{t^2}}$

3) $ty' + y = 0$

$y' = \frac{-y}{t}$

$\int -\frac{1}{y} \cdot dy = \int \frac{1}{t} \, dt$

$-\ln y = \ln t + C$

$e^{-\ln y} = e^{\ln t + C}$

$y^{-1} = t \cdot K$

$y = \frac{1}{t \cdot K}$

· Solução EDO 1ª ordem linear não homogênea

1) $\begin{cases} y' + 9y = 3 \\ y(0) = 4 \end{cases}$

$y' = 3 - 9y$

$y' = -9\left(y - \frac{1}{3}\right)$

$\int \frac{1}{\left(y - \frac{1}{3}\right)} dy = \int -9 dx$

$\ln\left(y - \frac{1}{3}\right) = -9x + C$

$e^{\ln\left(y - \frac{1}{3}\right)} = e^{-9x + C}$

$y = K.e^{-9x} + \frac{1}{3}$

$y(0) = 4$

$4 = K + \frac{1}{3}$

$K = \frac{11}{3}$

$y = \frac{11}{3} . e^{-9x} + \frac{1}{3}$

2) $\begin{cases} y' - 16y = 4 \\ y(0) = 11 \end{cases}$

$y' = 16y + 4$

$y' = 16\left(y + \frac{1}{4}\right)$

$\int \frac{1}{y + \frac{1}{4}} dy = \int 16 \, dx$

$\ln\left(y + \frac{1}{4}\right) + C = 16x + C$

$e^{\ln\left(y + \frac{1}{4}\right)} = e^{16x + C}$

$y = K . e^{16x} - \frac{1}{4}$

$y(0) = 11$

$11 = K - \frac{1}{4}$

$K = \frac{45}{4}$

$y = \frac{45}{4} e^{16x} - \frac{1}{4}$

3) $\begin{cases} y' - y = 16 \\ y(0) = 8 \end{cases}$

$y' = 16 + y$

$\int \frac{1}{16 + y} dy = \int 1 \, dx$

$\ln(16 + y) = x + C$

$16 + y = K e^{x}$

$y = K . e^{x} - 16$

$y(0) = 8$

$8 = K - 16$

$K = 24$

$y = 24 . e^{x} - 16$

· Solução EDO 1ª ordem não linear forma separável

1) $(1 - y^2) . y' = x^2$

$y' = \frac{x^2}{1 - y^2}$

$\int (1 - y^2) dy = \int x^2 dx$

$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$

2) $y' = \frac{4x - x^3}{4 + y^3}$

$\int (4 + y^3) dy = (4x - x^3) dx$

$4y + \frac{y^4}{4} = 2x^2 - \frac{x^4}{4} + C$

3) $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$

$y' = -y^2 \operatorname{sen} x$

$\int \frac{-1}{y^2} dy = \int \operatorname{sen} x \, dx$

$-y^{-1} + C = \cos x + C$

$y = \frac{1}{-\cos x + C}$

• Solução EDO 1ª ordem não linear

Forma Homogênea

1) $2xy \cdot y' = y^2 - x^2$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{\frac{y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}} \rightsquigarrow f(v) = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$\frac{1}{\frac{v^2-1}{2v} - v} dv = \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{\frac{-v^2-1}{2v}} dv = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{-2v}{v^2+1} dv$$

$u = v^2 + 1$

$du = 2v\, dv$

$$\int \frac{-1}{u} du = -\ln(u) + C$$

$$= -\ln(v^2+1) + C$$

$-\ln(v^2+1) = \ln x + C$

$\ln(v^2+1) + \ln x = C$

$e^{\ln(x \cdot (v^2+1))} = e^C$

$x\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = K$

2) $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx = x^2 dy$

$x^2 + 3xy + y^2 = x^2 \cdot y'$

$$y' = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}$$

$$y' = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$f(v) = 1 + 3v + v^2$

$$\int \frac{1}{f(v) - v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{v^2 + 2v + 1} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{(v+1)^2} dv$$

$u = v + 1$

$du = 1\, dv$

$$\int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C$$

$$\frac{-1}{v+1} = \ln x + C$$

$$\frac{-1}{\frac{y}{x} + 1} = \ln x + C$$

$$\frac{y}{x} = \frac{-1}{\ln x + C} - 1$$

$$y = \frac{-x}{\ln x + C} - x$$

3) $x^2 \cdot y' - (y^2 + 2xy) = 0$

$x^2 \cdot y' = y^2 + 2xy$

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}$$

$f(v) = v^2 + 2v$

$$\int \frac{1}{v^2 + 2v - v} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{v^2 + v}$$

$$\int \frac{1}{v} dv - \int \frac{1}{v+1} dv$$

$\ln v - \ln(v+1) = \ln x + C$

$\ln\left(\frac{v}{v+1}\right) = \ln x + C$

$\ln\left(\frac{v}{(v+1)x}\right) = C$

$e^{\ln\left(\frac{v}{(v+1)x}\right)} = e^C$

$$y = \frac{x^2}{-x + C}$$

Plano de aula semanal: Semana 6

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180076744	**Levi Braz dos Santos Queiroz**	**CC**	**Tatiane da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**22/04**	**23/04**	**25/04**
Objetivos	**Continuar soluções EDO primeira ordem**	**Continuar soluções EDO primeira ordem e Vista da prova 1**	**Iniciar EDO segunda ordem**
Informação	**Equação Bernoulli, Equação Exata, Fator integrante - forma não exata**	**Exemplos EDO na forma não exata, aplicações EDO 1ª ordem**	**EDO 2ª ordem linear homogênea, princípio da superposição, Wronskiano**
Resumo	**Equação de Bernoulli é resolvida em três passos, usando um**	**Para resolver uma EDO de primeira ordem na forma não**	**O princípio da superposição só é válido para EDO**

	método de substituição. **Para uma dizermos que uma EDO está na forma exata, temos que fazer a derivada parcial em relação a 'y' da função 'M' (que acompanha dx) e verificar se a derivada parcial em relação a 'x' da função 'N' (que acompanha dy). Se forem iguais, a equação está na forma exata, caso contrário está na forma não exata.**	**exata, temos que transformá-la em uma EDO na forma exata multiplicando por um fator integrante.** **A aplicação demonstrada em sala foi a Lei do Resfriamento de Newton.**	**segunda ordem, linear, homogênea. Wronskiano é uma função que diz que dado uma matriz em que seus termos são o conjunto fundamental solução da EDO e suas primeiras derivadas, o determinante tem que ser diferente de zero para os termos conjunto serem solução da EDO.** **Para resolver uma EDO de segunda ordem, linear, homogênea, com coeficientes constantes, temos que**

			descobrir a equação característica.
Observação			
Dúvidas			
Monitoria			

. Solução EDO Forma Exata

1) $2x + y^2 + 2xy \cdot y' = 0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2y$

$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (2x+y^2)\,dx$

$F(x,y) = x^2 + y^2x + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 2yx + g'(y)$

$2xy + g'(y) = 2xy$

$g'(y) = 0$

$g(y) = C$

$F(x,y) = x^2 + y^2x + C$

2) $(y\cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \cos x + 2xe^y \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$

$F(x,y) = \int (y\cos x + 2xe^y)\,dx = y\sin x + x^2 \cdot e^y + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + g'(y)$

$\sin x + x^2e^y + g'(y) = \sin x + x^2e^y - 1$

$g'(y) = -1$

$g(y) = -y + C$

$F(x,y) = y\sin x + x^2 \cdot e^y - y + C$

3) $\begin{cases} (2x-y)\,dx + (2y-x)\,dy = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

$F(x,y) = \int (2x-y)\,dx = x^2 - yx + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -x + g'(y)$

$-x + g'(y) = 2y - x$

$g'(y) = 2y$

$g(y) = y^2 + C$

$F(x,y) = x^2 - yx + y^2 + C$

$F(1,3) = 3$

$1^2 - 3.1 + 3^2 + C = 0$

$7 + C = 0$

$C = -7$

$F(x,y) = x^2 - yx + y^2 - 7$

4) $(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$

$F(x,y) = \int (2x-1)dx = x^2 - x + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = g'(y)$

$g'(y) = 3y+7$

$g(y) = \int (3y+7)dy = \frac{3y^2}{2} + 7y + C$

$F(x,y) = x^2 - x + \frac{3y^2}{2} + 7y + C$

5) $(5x+4y)dx + (4x-8y^3)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 4 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4$

$F(x,y) = \int (5x+4y)dx = \frac{5x^2}{2} + 4yx + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 4x + g'(y)$

$4x + g'(y) = 4x - 8y^3$

$g'(y) = -8y^3$

$g(y) = -2y^4 + C$

$F(x,y) = \frac{5x^2}{2} + 4xy - 2y^4 + C$

. Solução EDO Forma Não Exata

1) $(3xy+y^2)dx + (x^2+xy)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x+2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x+y$

$\mu'(x) = \left[\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}\right] \cdot \mu(x)$

$\mu'(x) = \left[\frac{3x+2y-(2x+y)}{x^2+xy}\right] \cdot \mu(x)$

$\mu'(x) = \frac{x+y}{x^2+xy} \cdot \mu(x) = \frac{x+y}{x(x+y)} \cdot \mu(x)$

$\mu'(x) = \frac{1}{x} \cdot \mu(x)$

$\frac{1}{\mu} d\mu = \frac{1}{x} dx$

$\ln \mu = \ln x$

$\mu(x) = x$

$x[(3xy+y^2)dx + (x^2+xy)dy = 0]$

$(3x^2y+y^2x)dx + (x^3+x^2y)dy = 0$

$\frac{\partial M_2}{\partial y} = 3x^2+2xy \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = 3x^2+2xy$

$F(x,y) = \int (3x^2y+y^2x)dx = yx^3 + \frac{y^2 \cdot x^2}{2} + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^3 + yx^2 + g'(y)$

$g'(y) \quad x^3 + yx^2 = x^3 + x^2y$

$g'(y) = 0$

$g(y) = C$

$F(x,y) = x^3y + \frac{y^2x^2}{2} + C$

2) $-2xy + (3x^2 - y^2)y' = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x$$

· caso(2): $\mu'(y) = \left[\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}\right] \cdot \mu(y)$

$$\mu'(y) = \frac{6x - (-2x)}{-2xy} \cdot \mu(y)$$

$$\mu'(y) = \frac{8x}{-2xy} \cdot \mu(y) = \frac{-4}{y} \cdot \mu(y)$$

$$\int \frac{1}{\mu} \, d\mu = \int \frac{-4}{y} \, dy$$

$$\ln \mu = \ln y^{-4}$$

$$\mu = y^{-4}$$

$$y^{-4}\left[-2xy + (3x^2 - y^2)y' = 0\right]$$

$$-2xy^{-3} + (3x^2y^{-4} - y^{-2})y' = 0$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y} = 6xy^{-4} \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = 6xy^{-4}$$

$$F(x,y) = \int (-2xy^{-3}) dx = \frac{-2y^{-3}x^2}{2} + g(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^{-4} + g'(y)$$

$$3x^2y^{-4} + g'(y) = 3x^2y^{-4} - y^{-2}$$

$$g'(y) = -y^{-2}$$

$$g(y) = y^{-1}$$

$$F(x,y) = \frac{-2y^{-3}x^2}{2} + \frac{1}{y} + C$$

3) $6xy + (4y + 9x^2)y' = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 18x$$

· caso (2)

$$\mu'(y) = \left[\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}\right] \cdot \mu(y)$$

$$\mu'(y) = \frac{18x - 6x}{6xy} \cdot \mu(y) = \frac{2}{y} \cdot \mu(y)$$

$$\int \frac{1}{\mu} \, d\mu = \int \frac{2}{y} \, dy$$

$$\ln \mu = \ln y^2 \Rightarrow \mu = y^2$$

$$y^2\left[6xy + (4y + 9x^2)y' = 0\right]$$

$$6xy^3 + (4y^3 + 9x^2y^2)y' = 0$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y} = 18xy^2 \qquad \frac{\partial N_2}{\partial x} = 18xy^2$$

$$F(x,y) = \int 6xy^3 dx = 3x^2y^3 + g(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 9x^2y^2 + g'(y)$$

$$9x^2y^2 + g'(y) = 4y^3 + 9x^2y^2$$

$$g'(y) = 4y^3$$

$$g(y) = y^4 + C$$

$$F(x,y) = 3x^2y^3 + y^4 + C$$

4) $y^3dx + 2xy^2dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y^2$$

$$\mu'(x) = \left[\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}\right] \cdot \mu(x)$$

$$\mu'(x) = \frac{y^2}{2xy^2} \cdot \mu(x) = \frac{1}{2x}\mu(x)$$

$$\int \frac{1}{\mu}d\mu = \int \frac{1}{2x}dx$$

$$\ln\mu = \ln x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mu = x^{\frac{1}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{2}}[y^3dx + 2xy^2dy = 0]$$

$$x^{\frac{1}{2}}y^3dx + 2x^{\frac{3}{2}}y^2dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2x^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3y^2x^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x,y) = \int y^3x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{y^3 \cdot 2x^{\frac{3}{2}}}{3} + g(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = y^2 \cdot 2x^{\frac{3}{2}} + g'(y)$$

$$y^2 \cdot 2x^{\frac{3}{2}} + g'(y) = 2x^{\frac{3}{2}}y^2$$

$$g'(y) = 0$$

$$g(y) = C$$

$$F(x,y) = y^3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

5) $(x^2+y^2)dx + (x^3+3xy^2+2xy)dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2+3y^2+2y$$

$$\mu'(y) = \left[\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}\right] \cdot \mu(y)$$

$$\mu'(y) = \frac{3x^2+3y^2+2y-2y}{x^2+y^2} = \frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2}$$

$$\int \frac{1}{\mu}d\mu = \int 3\,dy$$

$$\ln\mu = 3y$$

$$\mu = e^{3y}$$

$$e^{3y}[(x^2+y^2)dx + (x^3+3xy^2+2xy)dy = 0]$$

$$(x^2e^{3y}+y^2e^{3y})dx + (x^3e^{3y}+3xy^2e^{3y}+2xye^{3y}]dy = 0$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial y} = 3x^2e^{3y} + 2ye^{3y} + 3y^2e^{3y}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = 3x^2e^{3y} + 3y^2e^{3y} + 2ye^{3y}$$

$$F(x,y) = \int (x^2e^{3y}+y^2e^{3y})dx = \frac{e^{3y}x^3}{3} + y^2e^{3y}x + g(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3}{3}e^{3y} + 6ye^{3y}x + g'(y)$$

$$\frac{x^3}{3}e^{3y} + 6yxe^{3y} + g'(y) = x^3e^{3y} + 3xy^2e^{3y} + 2xye^{3y}$$

$$g'(y) = \frac{2x^3e^{3y}}{3} - 4xye^{3y} + 3xy^2e^{3y}$$

$$g(y) = xe^{3y}y^2 - 2xe^{3y}y + \frac{2}{3}xe^{3y} + e^{3y}\frac{2x^3}{9} + C$$

$$F(x,y) = \frac{e^{3y}x^3}{3} + y^2e^{3y}x + xe^{3y}y^2 - 2xe^{3y}y + \frac{2}{3}xe^{3y} + e^{3y}\frac{2x^3}{9} + C$$

· Equação Bernoulli

1) $y' + \frac{2y}{t} - \frac{1}{t^2} \cdot y^3 = 0$

$$y' + \frac{2y}{t} = \frac{1}{t^2} \cdot y^3$$

$$y^{-3}\left[y' + \frac{2y}{t} = \frac{1}{t^2} \cdot y^3\right]$$

$$y' \cdot y^{-3} + \frac{2y^{-2}}{t} = \frac{1}{t^2}$$

$$v = y^{-2} \Rightarrow v' = -2y^{-3} \cdot y'$$

$$\frac{-v'}{2} + \frac{2v}{t} = \frac{1}{t^2}$$

$$v' - \frac{4v}{t} = \frac{-2}{t^2} \qquad \mu = e^{\int \frac{-4}{t} dt} = t^{-4}$$

$$t^{-4}\left[v' - \frac{4v}{t} = \frac{-2}{t^2}\right]$$

$$v' \cdot t^{-4} - \frac{4v}{t^5} = \frac{-2}{t^6}$$

$$\int (v \cdot t^{-4})' dt = \int \frac{-2}{t^6} dt$$

$$v \cdot t^{-4} = \frac{-2t^{-5}}{-5} + C$$

$$v = \frac{2}{5t} + \frac{C}{t^4}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{v}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{5t} + \frac{C}{t^4}}}$$

2) $y' + xy = xy^2$

$$y^{-2} \cdot y' + xy^{-1} = x$$

$$v = y^{-1}$$

$$v' = -y^{-2} \cdot y'$$

$$-v' + xv = x$$

$$v' - xv = -x$$

$$v = \mu^{-1}\left[\int \mu(x) \cdot g(x) dx + C\right]$$

$$\mu = e^{\int -x dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int e^{\frac{-x^2}{2}}(-x) dx + C\right]$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v = 1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \frac{1}{v}$$

$$y = \frac{1}{1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}}$$

Aplicações EDO Primeira Ordem

1) Decaimento radioativo

Resultados experimentais mostram que elementos radioativos desintegram a uma taxa proporcional à quantidade presente do elemento. Se $Q = Q(t)$ é a quantidade presente de certo elemento radioativo no instante t, então a taxa de variação de $Q(t)$ com respeito ao tempo t, denotada por dQ/dt, é dada por:

$$dQ/dt = - k\, Q(t)$$

onde k é uma constante que depende do elemento. Por exemplo, para o carbono-14 o valor aproximado é $k = 1{,}244\times10^{-4}$, para o rádio o valor aproximado é $k = 1{,}4\times10^{-11}$.

O valor da constante k de um elemento radioativo pode ser determinado através do tempo de "meia-vida" do elemento. A "meia-vida" é o tempo necessário para desintegrar metade da quantidade do elemento. Portanto, se a meia-vida do elemento for conhecida, a constante k pode ser obtida e viceversa. As "meias-vidas" de vários elementos radioativos podem ser encontradas nos livros de Química. Por exemplo, a meia-vida do carbono-14 está entre 5538 e 5598 anos, sendo em média 5568 anos com um erro para mais ou para menos de 30 anos. O carbono-14 é uma importante ferramenta em pesquisa arqueológica conhecida como teste do radiocarbono.

A quantidade inicial do elemento radioativo é $Q(0) = Q_o$.

2) Lei do resfriamento de Newton

Um modelo real simples da troca de calor entre um corpo e o meio ambiente onde está situado admite três hipóteses básicas:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo.
2. A temperatura T_m do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência.
3. A taxa de variação da temperatura com relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o maio ambiente.

Dessa forma, a EDO que descreve o problema é:

$dT/dt = -k\,(T-T_m)$

onde $T = T(t)$ é a temperatura do corpo no instante t, T_m é a temperatura constante do meio ambiente, $T-T_m$ é a diferença de temperatura e k é uma constante positiva que depende do material que constituí o corpo, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está diminuindo com o passar do tempo, em relação à temperatura do meio ambiente.

Esta é uma EDO separável, que pode ser transformada em: $dT/(T-T_m) = -k\,dt$

integrando ambos os lados: $Ln(T-T_m) = -kt + k_o$

3) Crescimento populacional: o modelo de Malthus

Problemas populacionais nos levam fatalmente às perguntas:

1. Qual será a população de certo local ou ambiente em alguns anos?
2. Como poderemos proteger os recursos deste local ou deste ambiente para que não ocorra a extinção de uma ou de várias espécies?

Para apresentar uma aplicação de equações diferenciais relacionadas com este problema, consideraremos o modelo matemático mais simples para tratar do crescimento populacional de algumas espécies. Ele é chamado Modelo de Crescimento Exponencial, isto é, a variação da população em relação ao tempo, denotada por dP/dt, é proporcional à população presente. Em outras palavras, se $P = P(t)$ é a população, temos

$$dP/dt = k P$$

onde k é uma constante. É simples verificar que se $k > 0$, teremos crescimento e se $k < 0$, teremos decaimento. Esta é

uma EDO linear cuja solução é

$P(t) = P_o e^{k.t}$, onde P_o é a população inicial, $P(0) =$

P_o. Portanto,

1. Se k > 0, a população cresce e continua a expandir para +□.
2. Se k < 0, a população se reduzirá e tenderá a 0. Em outras palavras, a população será extinta.

A longo prazo, o primeiro caso, k > 0, pode não ser adequado: o ambiente tem limitações, e o crescimento populacional é eventualmente inibido pela falta de recursos essenciais.

4) Circuito elétrico

De acordo com a segunda lei de Kirchhoff, a soma da queda de tensão do indutor ($L\left(\frac{di}{dt}\right)$) e da queda de tensão no resistor (iR) é igual a voltagem (E(t)) do circuito.

Sendo assim, temos como equação básica, para o seguinte problema

$$L\frac{di}{dt}+Ri = E(t),$$

Onde:

L – é a indutância (henry)

R – é a resistência (ohm)

I – é a corrente (ampére)

E – é a força eletromotriz ou fem (volt)

5) Segunda Lei de Newton

A segunda lei de Newton diz que o produto da massa pela aceleração de um corpo é igual ao somatório das forças que atuam sobre ele:

$$ma = \sum_i F_i$$

Para um corpo em queda livre, introduzindo um termo simples para levar em conta o atrito com o ar,

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

onde *v* é a velocidade do corpo, *k* o coeficiente de atrito e *g* a aceleração da gravidade. Rearranjando a equação, obtemos

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{kt}{m}}$$

ou seja, uma EDO linear de 1ª ordem cuja solução geral é

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Plano de aula semanal: Semana 7

Matrícula	Aluno	Turma	professora
1800767 44	**Levi Braz dos Santos Queiroz**	**CC**	**Tatiane da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	**29/04**	**30/04**	**02/05**
Objetivos	**Continuar EDO segunda ordem linear homogênea coeficientes constantes**	**Continuar EDO segunda ordem linear homogênea coeficientes constantes e iniciar não homogênea**	**Aula "virtual"**
Informação	**Três casos possíveis (raízes), método de redução de ordem**	**Terceiro caso (raízes complexas), método dos coeficientes indeterminados**	**Método da Variação dos Parâmetros**

Resumo	**O conjunto fundamental de solução varia de acordo com as raízes da equação característica. Se as raízes foram distintas (delta maior que 0), o conjunto solução é formado por: exponencial da primeira raiz vezes ‘x’ e exponencial da segunda raiz vezes ‘x’. Se as raízes forem iguais (delta igual a 0), o conjunto solução é formado pela exponencial da raiz vezes ‘x’ e ‘x’ vezes a**	**Se as raízes são complexas (delta menor que 0) o conjunto fundamental de solução é formado por: pelo cosseno da parte imaginária vezes ‘x’ vezes exponencial da parte real vezes ‘x’ e exponencial da parte real vezes ‘x’ vezes o seno da parte imaginária vezes ‘x’. A solução geral da EDO não homogênea é a solução homogênea mais a solução particular. Para a**	**O Método da Variação dos Parâmetros tem como objetivo achar a solução particular da EDO segunda ordem linear não homogênea com coeficientes constantes. A vantagem desse método é que ele funciona para qualquer caso. O método consiste em, primeiro, definir o conjunto fundamental de solução, calcular o wronskiano, encontrar as funções ‘u1’ e ‘u2’ e definir a solução particular.**

	exponencial da raiz vezes 'x'.	**solução particular, existem 2 métodos: Método dos Coeficientes Indeterminados e Método da Variação dos Parâmetros. O Método dos Coeficientes Indeterminados só funciona quando a função que torna a EDO não homogênea for: polinomial, ou exponencial, ou seno, ou cosseno ou um produto dessas funções.**	

Observação			
Dúvidas			
Monitoria			

- EDO 2ª ordem Linear coeficientes constantes $\Delta = 0$

1) Solução Geral

- $2y'' + 4y' + 2y = 0$

$2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

$\Delta = 0$

$\lambda = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1 \begin{cases} y_1 = e^{-x} \\ y_2 = xe^{-x} \end{cases}$

$Y_H = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

2) P.V.I.

- $\begin{cases} 4y'' + 12y' + 9y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

$4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0$

$\Delta = 144 - 4 \cdot 4 \cdot 9$

$\Delta = 0$

$\lambda = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \begin{cases} y_1 = e^{\frac{-3x}{2}} \\ y_2 = x e^{\frac{-3x}{2}} \end{cases}$

$Y_H = C_1 \cdot e^{\frac{-3x}{2}} + C_2 \cdot x e^{\frac{-3x}{2}}$

$Y_H' = C_1 e^{\frac{-3x}{2}} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) + C_2 \cdot e^{\frac{-3x}{2}} \left(\frac{-3}{2}\right) x + C_2 e^{\frac{-3x}{2}}$

$y(0) = -2$

$-2 = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0$

$-2 = C_1$

$y'(0) = -1$

$-1 = \left(\frac{-3}{2}\right)(-2) \cdot e^0 - \frac{3}{2} \cdot C_2 \cdot 0 + C_2 \cdot e^0$

$-1 = 3 + C_2$

$-4 = C_2$

$Y_H = -2 \cdot e^{\frac{-3x}{2}} - 4x e^{\frac{-3x}{2}}$

- EDO 2ª ordem linear coef. const. $\Delta > 0$

1) Sol. Geral

- $y'' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda = 0$

$\Delta = 16 - 0$

$\Delta = 16$

$\lambda = \frac{-4 \pm 4}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$

$Y_H = C_1 + C_2 \cdot e^{-4x}$

2) P.V.I.

- $\begin{cases} 4y'' - 8y' + 3y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 4$

$\Delta = 16$

$\lambda = \frac{8 \pm 4}{8} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$Y_H = C_1 \cdot e^{\frac{3x}{2}} + C_2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$Y_H' = \frac{3}{2} C_1 \cdot e^{\frac{3x}{2}} + \frac{1}{2} C_2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

$$y(0) = 2$$

$$2 = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2} C_1 \cdot e^0 + \frac{1}{2} C_2 \cdot e^0$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ \frac{3C_1}{2} + \frac{C_2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{5}{2}$$

$$Y_H = \frac{-e^{\frac{3x}{2}}}{2} + \frac{5e^{\frac{x}{2}}}{2}$$

- EDO 2ª ordem linear coef. const $\Delta < 0$

1) Sol. Geral

- $y'' - 3y' + 4y = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 4$$

$$\Delta = -7$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{7}\, i}{2}$$

$$\lambda = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i$$

$$Y_H = C_1 \cdot e^{\frac{3x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + C_2 \cdot e^{\frac{3x}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right)$$

2) P.V.I

- $16y'' - 8y' + 2y = 0$

$$y(0) = -2$$

$$y'(0) = 1$$

$$16\lambda^2 - 8\lambda + 2 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 \cdot 16 \cdot 2 = -64$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64}\, i}{32} = \frac{1}{4} \pm \frac{i}{4}$$

$$Y_H = C_1 \cdot e^{\frac{x}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) + C_2 e^{\frac{x}{4}} \sin\left(\frac{xi}{4}\right)$$

$$Y_H' = \frac{(-2) e^{\frac{x}{4}} \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)}{4} + \frac{(2) e^{\frac{x}{4}} \left(-\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right)}{4} + \frac{C_2 e^{\frac{x}{4}} \cdot \sin\left(\frac{ix}{4}\right)}{4} + \frac{C_2 e^{\frac{x}{4}} \cdot \cos\left(\frac{ix}{4}\right) \cdot i}{4}$$

$$Y_H' = \frac{-e^{\frac{x}{4}} \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right)}{2} + \frac{e^{\frac{x}{4}} \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right)}{2} + \frac{C_2 e^{\frac{x}{4}} \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right)}{4} + \frac{C_2 \cdot e^{\frac{x}{4}} \cos\left(\frac{ix}{4}\right)}{4}$$

$$y(0) = -2$$

$$-2 = C_1 \cdot e^0 \cdot \cos(0) + C_2 \cdot e^0 \cdot \sin(0)$$

$$-2 = C_1$$

$$y'(0) = 1$$

$$1 = \frac{-1}{2} + \frac{C_2}{4}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{C_2}{4}$$

$$C_2 = 6$$

$$Y_H = -2e^{\frac{x}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) + 6e^{\frac{x}{4}} \cdot \sin\left(\frac{ix}{4}\right)$$

Plano de aula semanal: Semana 8

Matrícula	Aluno	Turma	professora
1800767 44	**Levi Braz dos Santos Queiroz**	**CC**	**Tatiane da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**06/05**	**07/05**	**09/05**
Objetivos	**Apresentar jogo sobre EDO**	**Jogo aprEnDO**	**Jogo aprEnDO**
Informação	**Jogo desenvolvido para Android com o intuito de praticar Equações Diferenciais Ordinárias**		
Resumo			
Observação			
Dúvidas			
Monitoria			

·Exemplos Metodo dos Coeficientes Indeterminados

1) $y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x}$

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1$

$\lambda = \frac{-5 \pm 1}{2}$ $\lambda_1 = -2$ $y_1 = e^{-2x}$

$\lambda_2 = -3$ $y_2 = e^{-3x}$

$y_H = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

$g(x) = xe^{-5x}$

$x^0 [Ax + B] e^{-5x}$

$y_p = Axe^{-5x} + Be^{-5x}$

$y_p' = Ae^{-5x} + Ax \cdot (-5e^{-5x}) + (-5Be^{-5x})$

$y_p' = Ae^{-5x} - 5Axe^{-5x} - 5Be^{-5x} = e^{-5x}(A - 5Ax - 5B)$

$y_p'' = -10Ae^{-5x} + 25Axe^{-5x} + 25Be^{-5x}$

·substituindo na EDO: $y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x}$

$\cancel{e^{-5x}}(-10A + 25Ax + 25B) + 5\cancel{e^{-5x}}(A - 5Ax - 5B) + 6\cancel{e^{-5x}}(Ax + B) = x\cancel{e^{-5x}}$

$-5A + 6Ax + 6B = x$

$\begin{cases} 6A = 1 \\ -5A + 6B = 0 \end{cases}$ $A = 1/6$ $B = 5/36$

$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + e^{-5x}\left(\frac{x}{6} + \frac{5}{36}\right)$

2) $y'' - 4y' + 6y = 3x$

$\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 6$

$\Delta = -8$

$\lambda = \frac{4}{2} \pm \frac{i\sqrt{8}}{2}$ $y_1 = e^{2x}(\cos(\sqrt{2}x))$

$y_2 = e^{2x}(\sin(\sqrt{2} \cdot x))$

$\lambda = 2 \pm i\sqrt{2}$

$y_H = C_1 e^{2x}(\cos(\sqrt{2}x)) + C_2 e^{2x}(\sin(\sqrt{2}x))$

$g(x) = 3x$

$y_p = Ax + B$

$y_p' = A$

$y_p'' = 0$

·substituindo

$0 - 4A + 6(Ax + B) = 3x$

$-4A + 6B + 6Ax = 3x$

$\begin{cases} 6A = 3 \\ -4A + 6B = 0 \end{cases}$ $A = 1/2$

$B = 1/3$

$y_p = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

$y = C_1 \cdot e^{2x}(\cos\sqrt{2}x) + C_2 e^{2x}(\sin(\sqrt{2}x)) + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

· Exemplos Metodo da Variação dos Parâmetros

1) $y'' + y = \text{cossec}\, t$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$W = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$\Delta = -4.1.1 = -4$

$\lambda = 0 \pm i$

$y_1 = \cos(t) \quad y_2 = \sin(t)$

$y_H = C_1 \cdot \cos(t) + C_2 \sin(t)$

$$U_1 = \int -\sin t \cdot \frac{1}{\sin t}\, dt = -t$$

$$U_2 = \int \cos t \cdot \frac{1}{\sin t}\, dt =$$

$K = \sin t$

$dK = \cos t\, dt$

$$= \int \frac{1}{K}\, dK = \ln|K|$$

$U_2 = \ln|\sin t| + C$

$$y = C_1 \cdot \cos(t) + C_2 \cdot \sin(t) - t\cos(t) + \ln|\sin(t)| \cdot \sin(t)$$

2) $y'' - 8y' + 16y = \dfrac{e^{4x}}{x^2}$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\Delta = 64 - 64 = 0 \qquad y_H = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot x e^{4x}$

$\lambda = \dfrac{8}{2} = 4$

$W = \begin{pmatrix} e^{4x} & xe^{4x} \\ 4e^{4x} & e^{4x} + x4e^{4x} \end{pmatrix} = e^{8x}$

$$U_1 = \int -xe^{4x} \cdot \frac{e^{4x}}{x^2} \cdot \frac{1}{e^{8x}}\, dx = \int -\frac{1}{x}\, dx = -\ln|x|$$

$$U_2 = \int e^{4x} \cdot \frac{e^{4x}}{x^2} \cdot \frac{1}{e^{8x}}\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot xe^{4x} - \ln|x| \cdot e^{4x} - e^{4x}$$

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2 \cdot x - \ln|x| - 1)$$

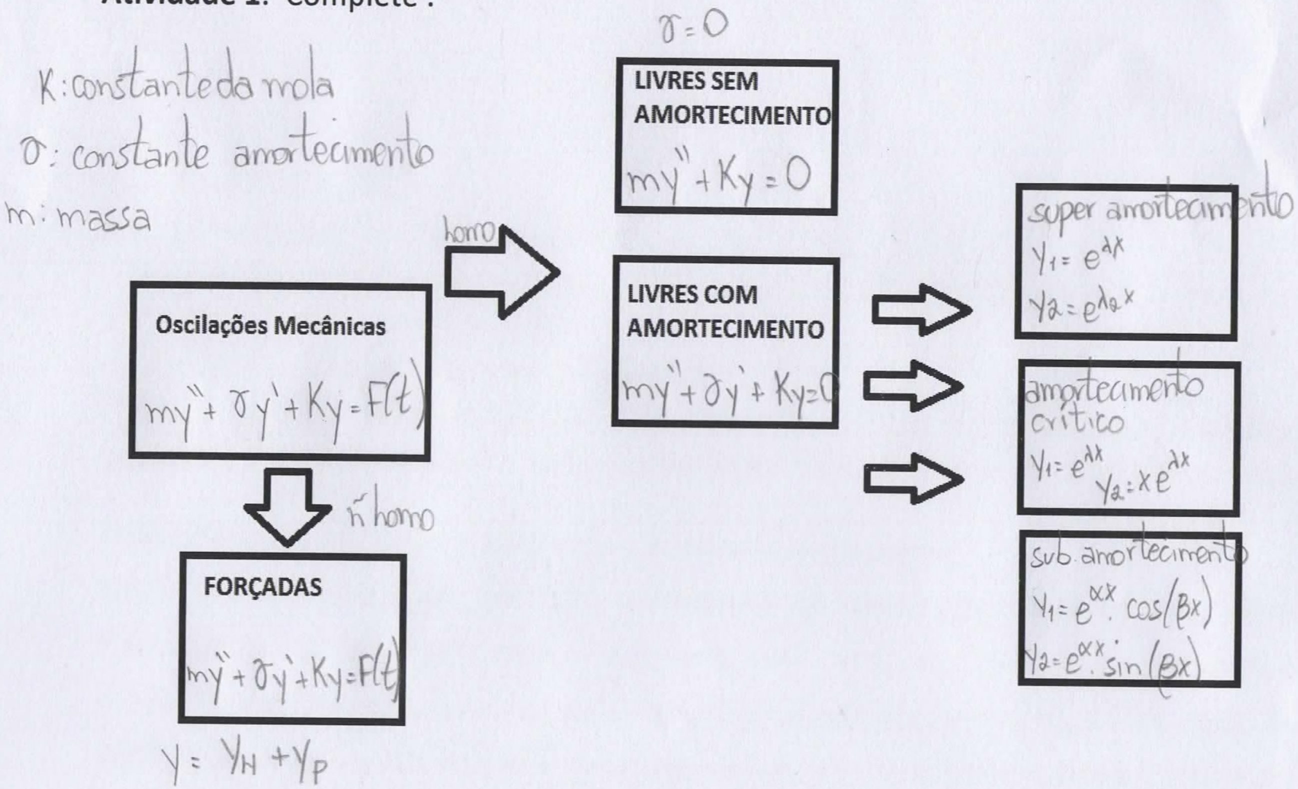
Plano de aula semanal: Semana 9

Matrícula	Aluno	Turma	professora
1800767 44	**Levi Braz dos Santos Queiroz**	**CC**	**Tatiane da Silva Evangelista**

	Segunda-feira	**Terça-feira**	**Quinta-feira**
Data	**13/05**	**14/05**	**16/05**
Objetivos	**Não houve aula**	**Não houve aula**	**Aula de resolução de exercícios de revisão para a prova**
Informação			
Resumo			
Observação			
Dúvidas			
Monitoria			

Sala de Aula Invertida
Oscilações Mecânicas

Atividade 1: Complete :



Atividade 3: Um cursor com 5 kg repousa sobre uma mola, não estando ligado a ela. Observa-se que, se o cursor for empurrado para baixo 0,18m ou mais, perde o contato com a mola depois de libertado. Determine:

(a) a constante de rigidez da mola.

(b) a posição, a velocidade e a aceleração do cursor, 0.16 s após ter sido empurrado para baixo 0,18m e, depois, libertado.

Considere $g=9{,}81 m/s^2$.

3- a) $my'' = mg - F_e = m \cdot g - K(X - X_0)$

. Eq. Estático

$m \cdot g - Kx_0 = 0 \rightarrow w = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$my'' + Ky = 0 \Rightarrow y'' + w^2 y = 0$

$y(t) = C_1 \cdot \sin wt + C_2 \cos wt$

$y(0) = X_m \Rightarrow C_2 = X_m$

$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

. Velocidade

$y'(t) = -w X_m \sin wt$

. Aceleração

$y''(t) = -w^2 X_m \cos wt$

. Logo:

$y'(t_1) = 0 \Rightarrow \sin wt = 0 \Rightarrow wt_1 = \pi$

$y''(t_1) = g \Rightarrow -w^2 X_m \cos \pi = w^2 X_m = g$

$w^2 = \frac{g}{X_m} = \frac{K}{m} \Rightarrow K = \frac{m \cdot g}{X_m}$

$K = \frac{5 \cdot 9,81}{0,18} = 272,5 \, N/m$

b) $w = \sqrt{\frac{9,81}{0,18}} \cong 7,38$

$y(0,16) = 0,18 \cdot \cos(7,38 \cdot 0,16)$

$y(0,16) \cong 0,068 m$

$y'(0,16) = -7,38 \cdot 0,18 \cdot \sin(7,38 \cdot 0,16)$

$y'(0,16) \cong -1,23 m/s$

$y''(0,16) = -(7,38)^2 \cdot 0,18 \cdot \cos(7,38 \cdot 0,16)$

$y''(0,16) \cong -3,73 m/s^2$

. Posição = 0,068m

. Velocidade = −1,23 m/s

. Aceleração = −3,73 m/s²