E.D

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Estudante: HUGO ROCHA DE MOURA
Matrícula: 18/0136925
Profa: Dra. Tatiane da Silva Evangelista

Portfólio Módulo 2

E.D

EQUAÇÃO DIFERENCIAL

❖ COMO RESOLVER?

- ***PASSO 1*** - CLASSIFICAR ATRAVÉS DA QUANTIDADE DE VARIÁVEIS INDEPENDENTES

ED

- ***1 VARIÁVEL INDEPENDENTE***

EDO

1ª Ordem

2ª Ordem

EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

- ***2 OU MAIS VARIÁVEIS INDEPENDENTES***

EDP

Não estudada neste curso!

EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

E.D.O
1ª ORDEM

EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE 1ª ORDEM

❖ COMO RESOLVER?

➢ *__PASSO 1__* - CLASSIFICAR

- EDO 1ªORDEM
  - LINEAR
    - HOMOGÊNEA
    - NÃO HOMOGÊNEA
  - NÃO LINEAR
    - SEPARÁVEL
    - HOMOGÊNEA
    - BERNOULLI
    - EXATA
    - NÃO EXATA

➢ ***PASSO 2*** - SOLUÇÃO

LINEAR

HOMOGÊNEA

- FORMA PADRÃO: $Y' + P(X) = 0$
- SOLUÇÃO: $\int y' + P(x) = \int 0$

NÃO HOMOGÊNEA

- FORMA PADRÃO: $Y' + P(X) = G(x)$
- SOLUÇÃO GERAL:

$$\boldsymbol{y = e^{-\int p(x)}\left[g(x)e^{\int p(x)}dx + C\right]}$$

➢ ***PASSO 2*** - SOLUÇÃO

NÃO LINEAR

EXATA E NÃO EXATA (PROXIMO SLIDE)

SEPARÁVEL

- FORMA PADRÃO:
- $y' = \frac{M(x)}{N(x)}$
- SOLUÇÃO:

$$\int N(y)\,\mathrm{d}y = \int M(x)\,\mathrm{d}x$$

HOMOGÊNEA

- FORMA PADRÃO:
- $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$
- RESOLVER:
- $\int F \frac{1}{(v)-V}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}X$
- VOLTAR A EQ PARA Y COM:

$$v = \frac{y}{x}$$

BERNOULLI

- FORMA PADRÃO:
  $y + P(x)y = g(x)y^n$
- MULTIPLICA-SE POR:
  $v = y^{1-n}$
- USA-SE V ONDE COUBER
- RESOLVE A NOVA EDO LINEAR
- SUBSTITUI V POR y^{1-n}

- *__PASSO 2__* - SOLUÇÃO

NÃO LINEAR

EXATA

- FORMA PADRÃO:
  $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$
- FAZER:

$$\frac{\partial M}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial N}{\mathrm{d}x}$$

SE FOREM IGUAIS , A EQ É EXATA!

- ESCOLHER UMA E RESOLVER:
- $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = M \quad OU \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = N$
- AO ENCONTRAR A F(X,Y), DERIVA-SE PELA EQUAÇÃO NÃO ESCOLHIDA
- ENCONTRA- SE COM ISSO A F'(Y) E COLOCA-SE NA SOLUÇÃO GERAL.

NÃO EXATA

- SE:
  $\frac{\partial M}{\mathrm{d}y}$ FOR DIFERENTE DE $\frac{\partial N}{\mathrm{d}x}$
- FATOR INTEGRANTE:
- $U'(x) = \left(\frac{\frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right) * u(x)$

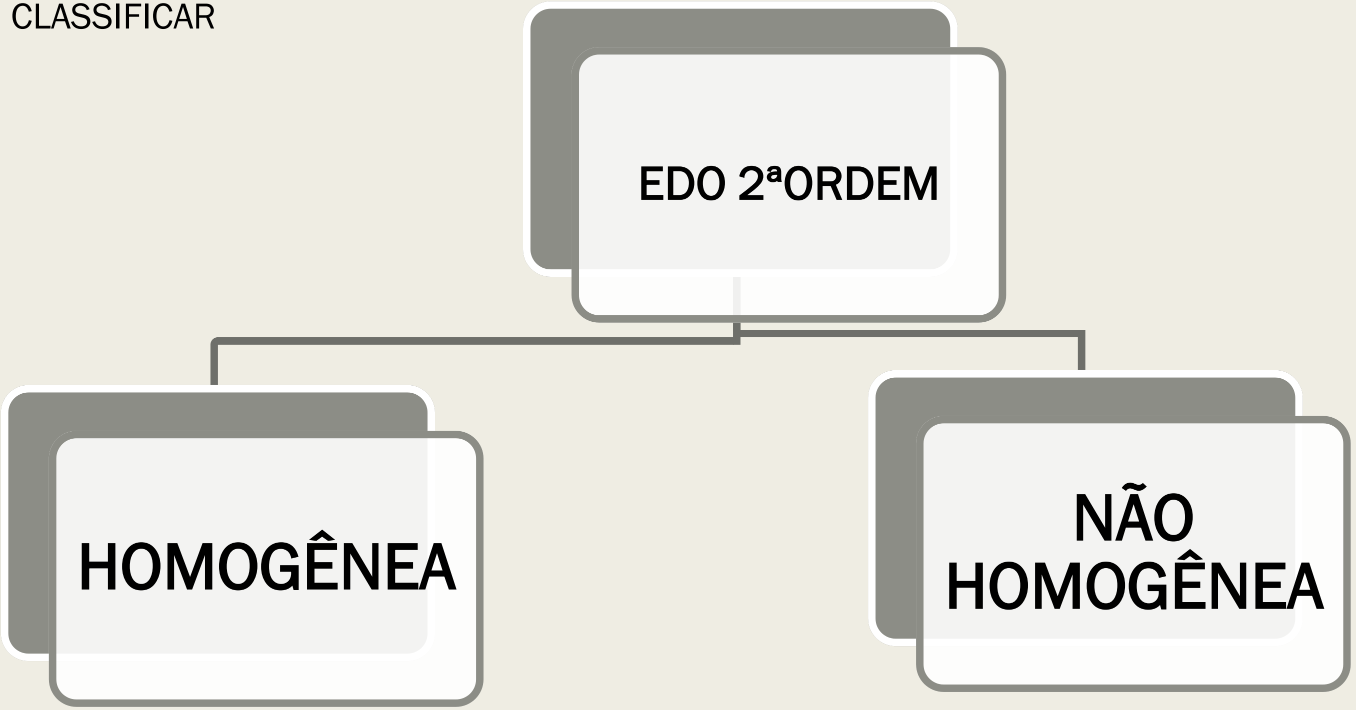
  OU
- $u'(y) = \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{m}\right) * u(y)$
- MULTIPLICA-SE A EDO E RESOLVE A EDO EXATA.

E.D.O
2ª ORDEM

EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE 2ª ORDEM

- COMO RESOLVER?

- *__PASSO 1__* - CLASSIFICAR



- ***PASSO 2*** - SOLUÇÃO

HOMOGÊNEA

$\Delta < 0$

1ºPASSO:
ENCONTRAR A EQ. CARACTERÍSTICA
2º PASSO:
ENCONTRAR AS RAÍZES:
R1 = $\alpha + B\mathrm{i}$ e R2 = $\alpha - B\mathrm{i}$
3º PASSO:
SUBSTITUIR NA SOLUÇÃO GERAL.

SOLUÇÃO GERAL:
$$y = e^{ax}(C1 \cos Bx + C_2 \sin B_x)$$

$\Delta = 0$

1ºPASSO:
ENCONTRAR A EQ. CARACTERÍSTICA
2º PASSO:
ENCONTRAR AS RAÍZES
3º PASSO:
SUBSTITUIR NA SOLUÇÃO GERAL.

SOLUÇÃO GERAL:
$$y = c1e^{r1x} + c2xe^{r2x}$$

$\Delta > 0$

1ºPASSO:
ENCONTRAR A EQ. CARACTERÍSTICA
2º PASSO:
ENCONTRAR AS RAÍZES
3º PASSO:
SUBSTITUIR NA SOLUÇÃO GERAL.

SOLUÇÃO GERAL:
$$y = c1e^{r1x} + c2e^{r2x}$$

OBS: PROBLEMAS COM PVI, CALCULA-SE TUDO NORMALMENTE E SUBSTITUI A PVI NA SOLUÇÃO GERAL FINAL

EDO 2ª Ordem

SOLUÇÃO GERAL

$Y(x) = Yh(x) + Yp(x)$

Yh(x)

IGUALAR A 0 E RESOLVER COMO UMA HOMOGÊNEA

Yp(x)

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Método dos Coeficientes Indeterminados

- Com este método descobrimos a eq. Yp(x). No método temos 3 tentativas:

1ª TENTATIVA	
FUNÇÃO SUGERIDA	**SOLUÇÃO PARTICULAR**
$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$	$y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Cx + D$
$g(x) = ce^{kx}$	$y_p = A \cdot e^{kx}$
$g(x) = c \cdot \cos(kx)$	$y_p = A \cdot \cos(kx) + B \cdot sen(kx)$
$g(x) = c \cdot sen(kx)$	

2ª TENTATIVA = (1ª TENTATIVA).x

3ª TENTATIVA = (2ª TENTATIVA).x

❖ Com uma das tentativas descobrimos os valores de A, B e C...

❖ Após isso, temos a solução particular.

Método da Variação dos Parâmetros

- 1º Passo: Resolver como uma homogênea (igualar a 0) e descobrir o conjunto solução.
- 2º Passo: Calcular o Wronskiano, se ele for DIFERENTE de 0 o conjunto é solução.

Wronskiano: $w = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$

- 3º Passo: Encontrar U1(x) e U2(x)

$$\boldsymbol{u_1(x) = \int \frac{-y_2(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx}$$

$$\boldsymbol{u_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\, dx}$$

- 4ºpasso: Substituir na Solução Particular:

$$\boldsymbol{y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)}$$

REDUÇÃO DE ORDEM

- Temos uma eq de segunda ordem com uma solução Y1 conhecida
- Descobrimos u(x) $u(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{[y_1(x)]^2} dx, \quad \text{em que} \quad P(x) = \int p(x) dx, \qquad (2)$
- Descobrimos a segunda solução Y2:

$$y_2(x) = u(x) y_1(x),$$

APLICAÇÃO EDOS

Equações diferenciais são usadas muito frequentemente para descrever processos nos quais a mudança de uma medida ou dimensão é causada pelo próprio processo.

Historicamente, as primeiras equações diferenciais foram as relativas à aceleração igual ou desigual, que Galileo Galilei pôde medir, ainda que com métodos geométricos.

Isaac Newton e Gottfried Leibniz introduziram o cálculo diferencial e, este último, as equações diferenciais como as conhecemos hoje.

Por exemplo na Física, a lei da vida média prevê que o número de átomos que se decompõem por unidade de tempo numa massa de átomos instáveis dependem do total N dos átomos existentes (aqui é necessário considerar-se que, por ser N um número muito grande, pode-se considerar sua variação contínua e determinística; no caso de N ser um número pequeno deve-se considerar sua variação discreta e estocástica, e o método mais adequado é outro).

Desta forma, a diminuição do número de átomos é proporcional ao total de átomos:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) = c\,N(t).$$

Pelo cálculo da função nesta equação diferencial, torna-se possível determinar o número total de átomos a cada momento no tempo.

REF: Wikipedia, Atribuição-Compartilha Igual 3.0 Não Adaptada (CC BY-SA 3.0) da Creative Commons.

PLANOS SEMANAIS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Plano de aula semanal: Semana 5

Matrícula	Aluno	Turma	professora
18/0136925	HUGO ROCHA DE MOURA	CC	TATIANE DA SILVA EVANGELISTA

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	15/04/2019	16/04/2019	18/04/2019
Objetivos	INTRODUÇÃO A E.D.O.S	APROFUNDAMENTO EM EDOS E CLASSIFICAÇÃO DE EDO 1º ORDEM EM LINEAR E NÃO LINEAR	INTRODUÇÃO E CONCLUSÃO DA RESOLUÇÃO DE EDOS NA FORMA HOMOGÊNEA
Informação	O QUE SÃO EDOS E SUAS CLASSIFICAÇÕES.	COMO RESOLVER UMA EDO E CLASSIFICÁ-LAS	COMO RESOLVER UMA EDO EM FORMA HOMOGÊNEA.
Resumo	NA AULA COMEÇAMOS A APRENDER O QUE SÃO EDOS E QUAIS SUAS APLICAÇÕES.	APRENDEMOS COMO PODEM SER CLASSIFICADAS AS EDOS E SEUS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO.	APRENDEMOS COMO RESOLVER EDOS NA FORMA HOMOGÊNEA.
Observação			

Plano de aula semanal: Semana 6

Matrícula	Aluno	Turma	professora
18/01369 25	HUGO ROCHA DE MOURA	CC	TATIANE DA SILVA EVANGELISTA

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	22/04/2019	23/04/2019	25/04/2019
Objetivos	INTRODUÇÃO E TÉRMINO DAS EDOS EXATAS DE 1ª ORDEM.	INTRODUÇÃO E TÉRMINO DAS EDOS NÃO EXATAS DE 1ª ORDEM.	APRESENTAÇÃO DAS EDOS DE 2ª ORDEM E WOLSKIANOCLASSIFICAÇÕES E SOLUÇÕES DE EDOS NÃO EXATAS.
Informação	CLASSIFICAÇÕES E SOLUÇÕES DE EDOS EXATAS.	CLASSIFICAÇÕES E SOLUÇÕES DE EDOS NÃO EXATAS.	CLASSIFICAÇÕES E SOLUÇÕES DE EDOS DE SEGUNDA ORDEM. E APRESENTAÇÃO DO WOLSKIANO.
Resumo	COMO CLASSIFICAR E SOLUCIONAR EDOS EXATAS	COMO CLASSIFICAR E SOLUCIONAR EDOS NÃO EXATAS	COMO RESOLVER EDOS DE SEGUNDA ORDEM E WOLSKIANO.
Observação			

Plano de aula semanal: Semana 7

Matrícula	Aluno	Turma	Professora
18/0136925	HUGO ROCHA DE MOURA	CC	TATIANE DA SILVA EVANGELISTA

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira (AULA VIRTUAL)
Data	29/04/2019	30/04/2019	02/05/2019
Objetivos	APRESENTAR AOS ALUNOS COMO SÃO RESOLVIDAS EDOS DE 2ª ORDEM.	COMO FAZER UMA REDUÇÃO DE ORDEM DE UMA EDO, E COMO RESOLVER EDO DE 2ª ORDEM LINEAR NÃO HOMOGÊNEA COM COEF. CONSTANTE.	COMO ACHAR A SOLUÇÃO DA EDO DE 2ª ORDEM LINEAR NÃO HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES.
Informação	APRESENTAÇÃO DOS CASOS DE SOLUÇÃO DE EDOS (DELTAS). CASOS 1 E 2. E RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS.	MÉTODO DE REDUÇÃO DE ORDEM E EDO 2ª ORDEM LINEAR NÃO HOMOGÊNEA COM COEF. CONSTANTE. E RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS.	MÉTODO DA VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS.
Resumo	COMO SÃO DADAS AS SOLUÇÕES DAS EDOS COM DELTAS IGUAIS, MENORES E SUPERIORES A ZERO.	COMO REDUZIR A ORDEM DE UMA EDO E COMO RESOLVER UMA EDO DE 2ª ORDEM LINEAR NÃO HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES.	COMO USAR O MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS PARA ACHAR UMA SOLUÇÃO PARTICULAR PARA UMA EDO DE 2ª ORDEM LINEAR NÃO HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES.

Plano de aula semanal: Semana 8 (SEMANA 4 DO MÓDULO 2)

Matrícula	Aluno	Turma	professora
18/0136925	HUGO ROCHA DE MOURA	CC	TATIANE DA SILVA EVANGELISTA

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	06/05/2019	07/05/2019	09/05/2019
Objetivos	TREINO DE CLASSIFICAÇÃO E SOLUÇÃO DE EDOS DE 1ª ORDEM VIA JOGO DE CELULAR.	TREINO DE CLASSIFICAÇÃO E SOLUÇÃO DE EDOS DE 1ª ORDEM VIA JOGO DE CELULAR.	TREINO DE CLASSIFICAÇÃO E SOLUÇÃO DE EDOS DE 1ª ORDEM VIA JOGO DE CELULAR.
Informação	COMO CLASSIFICAR E RESOLVER EDOS DE PRIMEIRA ORDEM E TREINO DE TAIS METODOS.	COMO CLASSIFICAR E RESOLVER EDOS DE PRIMEIRA ORDEM E TREINO DE TAIS METODOS.	COMO CLASSIFICAR E RESOLVER EDOS DE PRIMEIRA ORDEM E TREINO DE TAIS METODOS.

Plano de aula semanal: Semana 9

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180136925	HUGO ROCHA DE MOURA	CC	TATIANE DA SILVA EVANGELISTA

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	13/05/2019 – LUTO OFICIAL	14/05/2019- NÃO HOUVE AULA	16/05/2019 Exercícios Prof Wesley

Plano de aula semanal: Semana 10

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180136925	HUGO ROCHA DE MOURA	CC	DRA. TATIANE DA SILVA EVANGELISTA

	Segunda-feira	Terça-feira	
Data	20/05/2019	21/05/2019	
Objetivos	SALA DE AULA INVERTIDA	P2	
Informação	APLICAÇÃO DE EDO NO SISTEMA MASSA MOLA	P2	

EXERCÍCIOS SEMANAIS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

SEMANA 1

1- Classificação de ED'S.

a) $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \rightarrow$ EDO, 1ª Ordem, linear, Não Homogênea

b) $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \rightarrow$ EDO, 1ª Ordem, linear, Não Homogênea

c) $y' + 2y = 2e^x \rightarrow$ EDO, 1ª Ordem, linear, Não Homogênea

d) $y''' + x(y')^2 = 0 \rightarrow$ EDO, 3ª Ordem, Não linear, Homogênea

e) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x \rightarrow$ EDO, 2ª Ordem, Não linear, Não Homogênea

2- Campos de Direção

a) Queda de um objeto

$F = m.a$

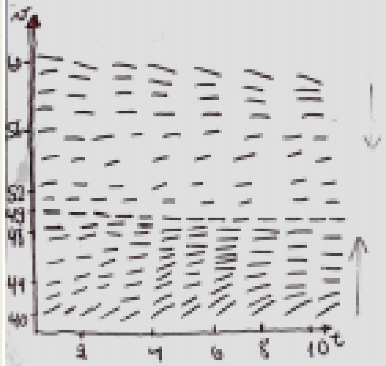
$F = m.\left(\frac{dv}{dt}\right)$

$F = m.g - \gamma v \rightarrow$ Resist. do ar

Se $m = 10kg$ e $\gamma = 2\ kg/s$

$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$

Campo:



Objeto em Equilíbrio em $\boxed{v = 49}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

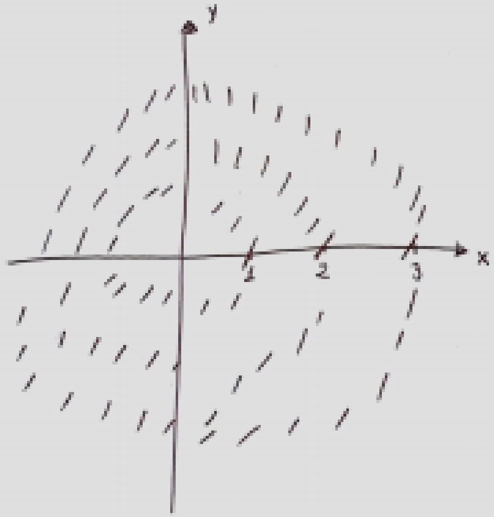
x	y	$\frac{dy}{dx}$
0	1	0
1	1	-1
1	0	Indef. (%)
-1	-1	-1
1	-1	1

c) $y' = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x,y) = K}$

$\underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{\text{Circ. } r=1} = y'$

Incl: 1

$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$



3) EDO 1ª Ordem linear Homogênea

a) $y'' + 4y = 0$ $\begin{cases} y(0) = 10 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$\lambda^2 + 4 = 0$ $\quad y(t) = A \cdot \cos(2t) + B(\cancel{\operatorname{sen}(2t)})$

$\lambda^2 = -4 \rightarrow y(0) = A$

$\lambda = \pm 2i$ $\quad y(0) = A = 10$

$y(t) = 10\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t)$

$y'(t) = 10 \cdot 2(\cancel{-\operatorname{sen}(2t)}) + B \cdot 2 \cdot \cos(2t)$

$y'(0) = 2B = 0$ $\boxed{B = 0} \rightarrow \boxed{y(t) = 10\cos(2t)}$

b) $y'' + \sqrt{7}y' + 4y = 0$ $\begin{cases} y(0) = 10 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$\lambda^2 + \sqrt{7}\lambda + 4 = 0$

$\lambda = \frac{-\sqrt{7} \pm \sqrt{7-16}}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{\sqrt{-9}}{2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \boxed{i\frac{3}{2}}$

$y(t) = e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}t} \cdot (A\cos(\frac{3}{2}t) + B\operatorname{sen}(\frac{3}{2}t))$

$y(0) = A = 10$

$y'(t) = -\frac{\sqrt{7}}{2} e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}t}(A\cos(\frac{3}{2}t) + B\operatorname{sen}(\frac{3}{2}t))t$

$+ e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}t}(\frac{3}{2}A(-\operatorname{sen}(\frac{3}{2}t)) + B \cdot \frac{3}{2}\cos(\frac{3}{2}t))$

$y'(0) = -\frac{\sqrt{7}}{2}A + \frac{3}{2}B = 0$

$y'(0) = -5\sqrt{7} + \frac{3}{2}B = 0$

$B = 5\sqrt{7} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{10\sqrt{7}}{3}}$

$\boxed{y(t) = e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}t}(10\cos(\frac{3}{2}t) + \frac{10\sqrt{7}}{3}\operatorname{sen}(\frac{3}{2}t))}$

c) $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ $\quad \frac{dy}{dx} = F(y/x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$

$v = \frac{y}{x}$ $\quad y = vx$ $\quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\cancel{v} + \frac{x\,dv}{dx} = 1 + \cancel{v}$

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$

$\int dv = \int \frac{1}{x}dx$

$v = \ln|x| + C$

$\frac{y}{x} = \ln|x| + C$

$y = x(\ln|x| + C)$

$\boxed{y = x\ln|x| + Cx}$

4) EDO 1ª Ordem linear não homogênea

a) $\frac{dy}{dt} - 2y = t^2e^{2t}$

$P(t) = -2 \quad \mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int -2dt}$

$\mu(t) = e^{-2t}$

$e^{-2t}\left(\frac{dy}{dt} - 2y\right) = e^{-2t} \cdot t^2 \cdot e^{2t}$

$\frac{d}{dt}(y \cdot e^{-2t}) = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-2t} + -2e^{-2t} \cdot y$

$\frac{d}{dt}(y \cdot e^{-2t}) = t^2$

$\int \frac{d}{dt}(y \cdot e^{-2t})dt = \int t^2 dt$

$y \cdot e^{-2t} = \frac{t^3}{3} + C$

$y = \frac{t^3}{3e^{-2t}} + \frac{C}{e^{-2t}}$

$\boxed{y = \frac{t^3e^{2t}}{3} + Ce^{2t}}$

b) $y' = z - cy$

$\frac{dy}{dx} = -c\left(y - \frac{z}{c}\right)$

$\int \frac{1}{y - \frac{z}{c}} dy = \int -c \cdot dx$

$\ln\left(y - \frac{z}{c}\right) = -cx + k$

$e^{\ln(y - \frac{z}{c})} = e^{-cx+k}$

$y - \frac{z}{c} = e^{-cx} \cdot \underbrace{e^c}_{k}$

$\boxed{y = y(x) = \frac{z}{c} + k \cdot e^{-cx}}$

c) $y' = -4y - 6$

$y' = -4\left(y + \frac{6}{4}\right)$

$\frac{dy}{dx} = -4\left(y + \frac{6}{4}\right)$

$\int \frac{1}{y + \frac{6}{4}} dy = \int -4\, dx$

$\ln\left(y + \frac{6}{4}\right) = -4x + c$

$e^{(y + \frac{6}{4})} = e^{-4x+c}$

$y + \frac{6}{4} = e^{-4x} \cdot \underbrace{e^c}_{k}$

$\boxed{y = y(x) = -\frac{6}{4} + k \cdot e^{-4x}}$

5) EDO 1ª Ordem Forma Separável

$y' = f(x) \cdot g(y)$

a) $y' = \frac{2x}{1+2y}$

$f(x) = 2x$

$g(y) = \frac{1}{1+2y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+2y}$

$(1+2y) \cdot dy = (2x) \cdot dx$

$\int (1+2y)dy = \int 2x\, dx$

$y + \frac{2y^2}{2} = \frac{2x^2}{2} + C$

$\boxed{y^2 + y = x^2 + C}$

b) $y' = \frac{xy}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$

$\frac{1}{y} dy = \frac{x}{1+x^2} dx$

$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{1+x^2} dx : \ln y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

$e^{\ln y} = e^{(\ln(1+x^2)^{1/2} + c)}$

$y = e^{\ln(1+x^2)^{1/2}} \cdot \underbrace{e^c}_{k}$

$\boxed{y = \sqrt{1+x^2} \cdot K}$

c) $y' = xy^2$

$\frac{dy}{dx} = xy^2$

$\frac{dy}{y^2} = x\,dx$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int x\,dx$

$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$

$\frac{x^2 + 2C}{2}$

$y = \frac{2}{-x^2 - 2C}$

$\boxed{y(x) = \frac{2}{K - x^2}}$

6) EDO 1ª Ordem na FORMA Homogenea

a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$$

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x}$$

$$f(tx,ty) = \frac{tx-ty}{tx} = \frac{t(x-y)}{t}$$

$$f(x,y) = f(tx,ty)$$

$$\boxed{v = \frac{y}{x}}$$

$$y = v \cdot x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = v + \frac{x\,dv}{dx}}$$

$$v + \frac{dv}{dx} = \frac{x}{x} - \frac{y}{x}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = -v + 1 - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = (1-2v)$$

$$\frac{dv}{(1-2v)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{(1-2v)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2v| = \ln|x| + C$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln\left|1-\frac{2y}{x}\right| - \ln|x|}$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2+x^2}{x^2}$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$y = v \cdot x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}}$$

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$$

$$\int \frac{dv}{(v^2+1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctg}(v) = \ln|x| + C$$

ou

$$\boxed{y = x \cdot tg\,[\ln|x| + C]}$$

C)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy+x^2}$$

$$v = \frac{y}{x}$$

$$y = v \cdot x$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = v + \frac{dv}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)y^2}{\left(\frac{1}{x^2}\right)(xy+x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2/x^2}{\frac{xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2/x^2}{y/x+1}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1}$$

$$\frac{x\,dv}{dx} = \frac{-v}{v+1}$$

$$\int (v+1)\frac{dv}{-v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\int \left(\frac{v}{v} + \frac{1}{v}\right)dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\int 1\,dv - \int \frac{1}{v}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-v - \ln|v| = \ln|x| + C$$

$$C = -v - \ln|v| - \ln|x|$$

$$\boxed{C = \frac{-y}{x} - \ln|y/x| - \ln|x|}$$

SEMANA 2

1- EDO 1ª Ordem EXATA

a) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$

$M = e^y$, $N = xe^y - 2y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = e^y$ é exata

$\int M dx = \int e^y dx = xe^y$ $\quad P = \int M dx$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot (xe^y) = xe^y$

$\int (n - \frac{\partial P}{\partial y}) dy = \int (xe^y - 2y - xe^y) dy = \int -2y dy = -y^2$

$\boxed{xe^y - y^2 = C}$ Sol. geral

b) $\underbrace{2xy}_{M} dx + \underbrace{(x^2-1)}_{N} dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{array}\right\}$ Exata

$f = \int 2xy\, dx + g(y) = c$

$\boxed{f = x^2 y + g(y) = c}$ sol.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} + g'(y) = x^2 - 1$

$= x^2 + g'(y) = x^2 - 1$

$g'(y) = -1 \quad g(y) = \int -1\, dy = \boxed{-y}$

$\boxed{f = x^2 y - y = c}$ Sol geral

c) $x \frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

$\underbrace{(2xe^x - y + 6x^2)}_{M} dx - \underbrace{x}_{N} dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

$f = \int -x dy + h(x) + c$

$\boxed{f = -xy + h(x) = c}$

$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial (-xy)}{\partial x} + h'(x) = 2xe^x - y + 6x^2$

$= -y + h'(x) = 2xe^x - y + 6x^2$

$h'(x) = 6x^2 + 2xe^x$

$h(x) = 2x^3 + 2(xe^x - e^x)$

$\boxed{f = -xy + 2x^3 + 2(xe^x - e^x)}$ Sol geral

d) $\overbrace{(3x^2 + y^2)}^{M} dx + \overbrace{2xy}^{N} dy = 0$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 0 + 2y = \boxed{2y} \\ \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot y = \boxed{2y} \end{array}\right\}$ EXATA

$\left\{\begin{array}{l} \frac{df}{dx} = M \\ \frac{df}{dy} = N \end{array}\right.$ $\to \frac{df}{dx} = 3x^2 + y^2$

$\int df = \int (3x^2 + y^2) \cdot dx$

$f(x,y) = \frac{3x^3}{3} + y^2 x + F(y)$

$\boxed{f(x,y) = x^3 + xy^2 + F(y)}$

$\boxed{F = x^3 + xy^2 + C}$ Sol. geral

$\frac{df}{dy} = 0 + F'(y) = 0$

$\int F'(y) = \int 0 = F(y) = C$

e) $\underbrace{e^y}_{M}\,dx + \underbrace{(xe^y - 2y)}_{N}\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \boxed{e^y}$

$\frac{\partial N}{\partial y} = e^y - 0 = \boxed{e^y}$

EXATA $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}$

$\frac{df}{dx} = M \rightarrow df = e^y dx \rightarrow \int df = \int e^y dx$

$\boxed{f(x,y) = e^y x + F(y)}$

$\frac{df}{dy} = N \rightarrow \cancel{e^y x} + f'(y) = (xe^y - 2y)$

$\boxed{f'(y) = -2y}$

$\int F'(y) = \int -2y$

$F(y) = -\frac{2y^2}{2} + C$

$\boxed{F(y) = -y^2 + C}$

$\boxed{F = e^y x - y^2 + c}$ Sol. Geral

2- EDO 1ª Ordem NÃO EXATA

a) $\underbrace{(x^3 - y^3)}_{M}\,dx + \underbrace{xy^2}_{N}\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2$

$\frac{\partial N}{\partial x} = y^2$

NÃO EXATA

$u = e^{\int \frac{-3y^2 - y^2}{xy^2}}$

$u = e^{\int \frac{-4}{x} dx}$

$u = e^{-4\ln(x)}$

$\boxed{u = x^{-4}}$

$x^{-4}(x^3 - y^3)dx + x^{-4}(xy^2)dy = 0$

$\boxed{(\underbrace{x^{-1} - x^{-4}y^3}_{M})dx + (\underbrace{x^{-3}y^2}_{N})dy = 0}$ NOVA EQ

$\frac{\partial M}{\partial y} = -3x^{-4}y^2$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -3 \cdot x^{-4}y^2$

EXATA

$F(x,y) = \int \underbrace{F_y}_{N}\, dy = \int x^{-3}y^2 dy = x^{-3}\frac{y^3}{3} + g(x)$

$F_x = -\frac{3x^{-4}y^3}{3} + g'(x)$

$x^{-1} - \cancel{x^{-4}y^3} = -\cancel{\frac{3x^{-4}y^3}{3}} + g'(x)$

$g'(x) = x^{-1}$

$\int g(x) = \int x^{-1}$

$\boxed{g(x) = \ln|x|}$

$\boxed{\frac{x^{-3}y^3}{3} + \ln|x| + C}$ Sol. Geral

b) $\underbrace{(4x^2+3\cdot\cos(y))}_{M}dx - \underbrace{(x\cdot\operatorname{sen}(y))}_{N}dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \cancel{4}\,0\,\boxed{-3\cdot\operatorname{sen}(y)}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = \boxed{-\operatorname{sen}y}$

NÃO EXATA

$u = e^{\int\frac{-3\operatorname{sen}(y)-(\operatorname{sen}(y))}{x\cdot\operatorname{sen}y}}$

$u = e^{\int\frac{-2}{-x}dx}$

$u = e^{\int\frac{2}{x}dx}$

$u = e^{2\cdot\ln(x)}$

$u = e = \boxed{u = x^2}$

$x^2(4x^2+3\cos(y))dx - x^2(x\cdot\operatorname{sen}(y))dy = 0$

$\boxed{\underbrace{(4x^4+3x^2\cdot\cos y)}_{M}dx - \underbrace{(x^3\cdot\operatorname{sen}y)}_{N}dy = 0}$ NOVA EQ

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 - 3x^2\operatorname{sen}(y)$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -3x^2\cdot\operatorname{sen}y$

EXATA

$F(x,y) = \int \underbrace{Fy}_{N}\cdot dy = \int -x^3\cdot\operatorname{sen}y\,dy$

$\boxed{f(x,y) = x^3\cdot\cos y + g(x)}$ Sol

$Fx = 3x^2\cdot\cos(y) + g'(x)$

$4x^4 + \cancel{3x^2\cdot\cos(y)} = \cancel{3x^2\cdot\cos(y)} + g'(x)$

$g'(x) = 4x^4$

$\int g'(x) = \int 4x^4$

$\boxed{g(x) = \frac{4x^5}{5} + c}$

$\boxed{F = x^3\cdot\cos y + \frac{4x^5}{5} + c}$ Sol. geral

c) $\underbrace{y}_{M}dx + \underbrace{(2xy - e^{-2y})}_{N}dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

Não EXATA

$u = e^{\int\frac{2y-1}{y}dy}$

$u = e^{\int 2-\frac{1}{y}dy}$

$u = e^{2y-\ln(y)}$

$u = e^{2y}\cdot e^{-\ln(y)}$

$u = e^{2y}\cdot y^{-1} = \boxed{\frac{e^{2y}}{y}}$

$\frac{e^{2y}}{y}\cdot y\,dx + \frac{e^{2y}}{y}\cdot(2xy - e^{-2y})dy = 0$

$\boxed{\underbrace{e^{2y}}_{M}dx + \underbrace{\left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right)}_{N}dy}$ NOVA EQ.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y}$

EXATA

$F(x,y) = \int Fy\cdot dy = \int 2xe^{2y} - \frac{1}{y}dy$

$= \frac{2xe^{2y}}{2} - \ln(y)$

$= xe^{2y} - \ln(y) + g(x)$

$Fx = e^{2y} + g'(x)$

$e^{2y} = e^{2y} + g'(x)$

$g'(x) = 0$

$\int g'(x) = \int 0$

$g(x) = C$

$\boxed{x\cdot e^{2y} - \ln|y| = C}$ Sol. geral

d) $(x^2y^3-1) + \left(x^3y^2 - \frac{2x}{y}\right) \cdot y' = 0$ $\quad u(x,y)\, x^{-2}y^{-2}$ É fator integrante? Se for Resolva!

$(x^{-2} \cdot y^{-2}) \cdot (x^2y^3-1)\,dx + (x^{-2}y^{-2})\left(x^3y^2 - \frac{2x}{y}\right) dy = 0$

$\underbrace{(y - x^{-2} \cdot y^{-2})}_{M} dx + \underbrace{(x - 2x^{-1} \cdot y^{-3})}_{N} dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2x^{-2}y^{-3}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + 2x^{-2}y^{-3}$

É EXATA
É FATOR INTEGRANTE!

$F(x,y) = \int F_y \cdot dy = \int (x - 2x^{-1}y^{-3})\,dy = xy - \frac{2x^{-1}y^{-2}}{-2} + g(x)$

$\boxed{xy + x^{-1}y^{-2} + g(x)}$

$F_x = y - x^{-2}y^{-2} + g'(x)$

$g'(x) = 0$

$\boxed{g(x) = C}$

$\boxed{xy - x^{-1}y^{-2} + C}$ Sol. geral

e) $\underbrace{[2x^{-3}\cos(y) + 4x^3]}_{M} dx + \underbrace{[x^2 \cdot \operatorname{sen}(y)]}_{N} dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x^{-3}\operatorname{sen}(y) + 0$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x^{-3} \cdot \operatorname{sen}(y)$

NÃO EXATA!

$u = e^{\int \frac{-2x \cdot \operatorname{sen}(y) - 2x \cdot \operatorname{sen} y}{x^2 \cdot \operatorname{sen}(y)} dx}$

$u = e^{\int \frac{-4x}{x^2} dx}$

$u = e^{\int -\frac{4}{x} dx}$

$u = e^{-4 \cdot \ln|x|}$

$u = e^{\ln|x^{-4}|}$

$u = \boxed{x^{-4}}$

$x^{-4} \cdot (2x^{-3}\cos(y) + 4x^3)\,dx + x^{-4}(x^2 \cdot \operatorname{sen}(y))$

$\underbrace{(2x^{-3} \cdot \cos(y) + 4x^{-1})}_{M} dx + \underbrace{(x^{-2} \cdot \operatorname{sen}(y))}_{N} dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x^{-3}\operatorname{sen}(y)$

$\frac{\partial N}{\partial x} = -2x^{-3} \cdot \operatorname{sen}(y)$

EXATA

$F(x,y) = \int \underset{\sim}{F_y} \cdot dy = \int x^{-2}\operatorname{sen}(y)\,dy = \boxed{-x^{-2} \cdot \cos(y) + g(x)}$ Sol

$F_x = 2x^{-3} \cdot \cos(y) + g'(x)$

$\cancel{2x^{-3}\cos y} + 4x^{-1} = \cancel{2x^{-3}\cos y} + g'(x)$

$g'(x) = 4x^{-1}$

$\int g'(x) = \int 4x^{-1}$

$g(x) = 4 \cdot \ln|x|$

$\boxed{-x^{-2} \cdot \cos(y) + 4 \cdot \ln|x| = C}$ Sol geral

3) EDO de Bernoulli

a) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

$\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}y' + \frac{2xy}{x^2} = y^3 \cdot \frac{1}{x^2}$

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$

$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x}\frac{y}{y^3} = \frac{\cancel{y^3}}{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{y^3}}$

$y' y^{-3} + \frac{2}{x} \cdot y^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{v'}{-2} + \frac{2}{x} v = 1/x^2 \cdot (-2)$

$v' - \frac{4}{x} v = \frac{-2}{x^2}$

$\boxed{\begin{array}{l} v = y^{-2} \\ v' = -2y^{-3}y' \\ \frac{v'}{-2} = y^{-3}y' \end{array}}$

$u = e^{-\int \frac{4}{x}dx}$

$\boxed{u = x^{-4}}$

$\boxed{K = \frac{-2}{x^2}}$

Forma Padrão : $y' + g(x)y = h(x) \cdot y^n$

$\frac{d}{dx} = (u \cdot v) = u \cdot K$

$\frac{d}{dx}(x^{-4} v) = x^{-4} \cdot \left(\frac{-2}{x^2}\right)$

$\int \frac{d}{dx}(x^{-4} v)\,dx = \int -2 \cdot x^{-6}dx$

$x^{-4} v = \frac{-2 \cdot x^{-5}}{-5} + C$

$v = \frac{-2x^{-5}}{-5 \cdot x^{-4}} + \frac{C}{x^{-4}}$

$y^{-2} = \frac{2}{5x^{-4}x^5} + x^4 \cdot C$

$y^{-2} = \frac{2}{5x} + x^4 \cdot C$

$\boxed{y = \left(\frac{2}{5x} + x^4 \cdot C\right)^{-1/2}}$ Sol geral

b) $x\frac{dy}{dx} + y = -x^2y^2 \quad (\div x)$

$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} \cdot y\right) = -\frac{x^2y^2}{x}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = -xy^2 \quad (\div y^2)$

$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\frac{y}{y^2} = \frac{-xy^2}{y^2}$

$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = -x$

$-v' + \frac{1}{x}v = -x \quad (-1)$

$v' - \frac{1}{x}v = x$

$\boxed{\begin{array}{l} v = y^{-1} \\ v' = -y^{-2} \cdot y' \end{array}}$

$u = e^{-\int \frac{1}{x}dx}$

$u = e^{-\ln|x|}$

$\boxed{u = x^{-1}}$

$\boxed{K = x}$

$\frac{d}{dx} \cdot (x^{-1} v) = x^{-1} \cdot x$

$\int \frac{d}{dx}(x^{-1} v)\,dx = \int x^{-1} \cdot x$

$x^{-1} v = \int dx$

$x^{-1} v = x + C$

$v = \frac{x}{x^{-1}} + \frac{C}{x^{-1}}$

$y^{-1} = x^2 + Cx$

$\boxed{y = \frac{1}{x^2 + Cx}}$ Sol. geral.

4) Aplicações EDO 1ª Ordem

a) Capitalização de Juros

$\boxed{\frac{dS}{dt} = K \cdot S}$

K = Taxa

S = Quantidade de dinheiro no instante T

$\frac{1}{S}dS = K\,dt$

$\int \frac{1}{S}dS = \int K\,dt$

$\ln S = Kt + C$

$e^{\ln S} = e^{Kt + C}$

$S = e^{Kt + C}$

$\boxed{S = C \cdot e^{Kt}}$

Uma aplicação rende juros CONTINUAMENTE, qual será o saldo, se a taxa de juros for 1% A.M. E o depósito inicial for \$ 100,00 e T = 12 meses

$S(0) = 100,00$

Taxa = 1% AM

$S = C \cdot e^{k \cdot t}$

i) $t = 0 \quad S(0) = C \cdot e^{k \cdot 0} = 1$

$S(0) = C = 100$

ii) $t = 12$

$S(12) = 100 \cdot e^{0,01 \cdot 12}$

$\boxed{S(12) \cong 112,75}$

b) Dinâmica Populacional

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = K \cdot P}$$

$\frac{1}{P} dP = K dt$

$\int \frac{1}{P} dP = \int K dt$

$\ln|P| = Kt + c$

$e^{\ln P} = e^{Kt + c}$

$$\boxed{P = c \cdot e^{Kt}}$$

→ Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias. Em $t = 1h$, o número de bactérias é $\frac{3}{2} P_0$. Considerando que a taxa de crescimento é proporcional a $P(t)$, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

$P(0) = P_0$ $\qquad t = ?\ 3P_0$

$P(1) = \frac{3}{2} P_0$

$\underline{t=0}$ $\quad P = C \quad P(0) = C = P_0$

i) $P(t) = c\, e^{Kt} = \boxed{P(t) = P_0 \cdot e^{K \cdot t}}$

ii) $t = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} P_0 = P_0 e^{K \cdot 1} \quad = e^{K} = \frac{3}{2}$

$K = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \cong 0,4055$

iii) $3\cancel{P_0} = \cancel{P_0}\, e^{0,4055 \cdot t}$

$0,4055t = \ln(3)$

$t = \frac{\ln(3)}{0,4055} = \boxed{2,71\ h}$

C) Decaimento Radioativo

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = K \cdot A}$$

$\frac{1}{A} dA = K \cdot dt$

$\int \frac{1}{A} dA = \int K \cdot dt$

$\ln|A| = Kt + C$

$e^{\ln|A|} = e^{Kt} \cdot C$

$$\boxed{A = e^{Kt} \cdot C}$$

Meia-Vida:

$\frac{1}{2} A(0) = C \cdot e^{Kt}$

$A(0) = C \cdot e^{K \cdot 0}$

$A(0) = C$

$\frac{1}{2} \cancel{A(0)} = \cancel{A(0)} \cdot e^{Kt}$

$K \cdot t = \ln|1/2|$

$$\boxed{t = \frac{\ln|1/2|}{K}}$$

→ O isótopo Pb-209 decai a uma taxa proporcional à $A(t)$ e tem meia-vida de 3,3h. Se houver inicialmente 1g de chumbo, quanto tempo levará para que 90% decaia?

$A(0) = 1g$

Meia-vida $= 3,3h$

i) $t = 0 \quad A(0) = c \cdot e^{K \cdot 0} = \boxed{1g}$

ii) $0,5 = 1 \cdot e^{K \cdot 3,3}$

$K = \frac{\ln(0,5)}{3,3} \cong -0,23$

iii)

$1g - A(0) - 90\% = 0,1g$

$0,1 = 1 \cdot e^{-0,23 \cdot t}$

$-0,23t = \ln(0,1)$

$$\boxed{t \cong 11h}$$

d) Misturas

Concentração de saída $= \dfrac{Q(t)}{V(t)}$ → Quant. de Sal / → Vol. Tanque

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = \underbrace{Te}_{\text{Taxa entrada}} \cdot \underbrace{Ce}_{\text{Concen. entrada}} - \underbrace{Ts}_{\text{Taxa saída}} \cdot \dfrac{Q}{\underbrace{V_0 + (Te - Ts)\cdot t}_{\text{Vol no tanque}}} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

Um tanque com 1000 L de agua salgada com 15 Kg de sal dissolvido. A agua pura entra com uma taxa de 10L/m. A solução é misturada e escoa com a mesma taxa. Quanto de sal há no tanque ~~em~~ após 20 minutos?

$$\frac{dQ}{dt} = 10 \cdot \cancel{0} - 10 \cdot \frac{Q}{1000 + (10-10)\cdot t}$$

$Q(0) = 15$ Kg

$$\frac{dQ}{dt} = -1\cancel{0} \cdot \frac{Q}{100\cancel{0}}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{100}$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{100} = 0$$

$$u = e^{\int \frac{1}{100} dt}$$

$$u = e^{\frac{1}{100}\int dt}$$

$$\boxed{u = e^{\frac{1}{100}t}}$$

$$\underbrace{\frac{dQ}{dt} \cdot e^{\frac{1}{100}t} + Q \cdot \left(\frac{1}{100}\right) \cdot e^{\frac{1}{100}t}}_{(Q \cdot e^{\frac{1}{100}t})'} = \cancel{0 \cdot e^{\frac{1}{100}t}}\ 0$$

$u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\int (Q \cdot e^{\frac{1}{100}t})' = \int 0$$

$$Q \cdot e^{\frac{1}{100}t} = C$$

$$Q = \frac{C}{e^{\frac{1}{100}t}}$$

$$\boxed{Q = C \cdot e^{-\frac{1}{100}t}}$$

i) $t = 0 \rightarrow Q = 15$

$$15 = C \cdot e^{-\frac{1}{100}\cdot 0}$$

$$15 = C \cdot e^{0} = C = 15$$

$$\boxed{Q = 15 \cdot e^{-\frac{1}{100}t}}$$

ii) $t = 20 \rightarrow Q = ?$

$$Q(20) = 15 \cdot e^{-0,2}$$

$\boxed{Q(20) = 12,28 \text{ Kg de Sal}}$

e) Crescimento Logístico

→ Os biólogos colocaram em uma reserva florestal controlada 70 aves raras e estimaram a capacidade suporte (a população máxima nessa reserva) como 250 aves. O tamanho da população de aves satisfaz a equação logística $K = 0,04$ por ano. Após dois anos, qual será a população de aves aproximadamente?

$K = 0,04$

$M = 250$

$P_0 = 70$

$$\boxed{P(t) = \frac{M}{1 + A \cdot e^{-Kt}}} \quad \boxed{A = \frac{M - P_0}{P_0}}$$

} C+E ARBITRÁRIA (formulas dados na questão)

$$\boxed{P(t) = \frac{250}{1 + Ae^{-0,04t}}} \quad \boxed{A = \frac{250 - 70}{70} = 2,57}$$

$$\boxed{P(t) = \frac{250}{1 + 2,57e^{-0,04t}}}$$

i) $t = 2 \rightarrow P = ?$

$$P(2) = \frac{250}{1 + 2,57e^{-0,04\cdot 2}}$$

$$P(2) = \frac{250}{1 + 2,57e^{-0,08}}$$

$$P(2) = \frac{250}{3,3724}$$

$\boxed{P(2) \approx 74,13 \text{ Aves}}$

SEMANA 3

① - EDO 2ª Ordem Linear Homogênea com coef. constantes com $\Delta = 0$

$y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2 \cdot r + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$-2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$

$\boxed{\Delta = 0} \to \boxed{y_H = C_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + C_2^{\lambda \cdot x}}$

$\lambda = \dfrac{-b + 0}{2 \cdot a} = \dfrac{-(-2)}{2} = 1$

$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^x}$ Sol. geral

② EDO 2ª Ordem Linear Homogênea com coef. Constantes com $\Delta = 0$, PVI.

$4y'' + 12y' + 9y = 0$

$y(0) = -2$

$y'(0) = -1$

$4x^2 + 12x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \dfrac{-12 \pm 0}{2 \cdot 4} = \dfrac{-12}{8} = \boxed{-1,5}$

$\boxed{y_H = C_1 \cdot e^{-1,5x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-1,5x}}$ Sol. geral

Sol. Específica:

$y = C_1 e^{-1,5x} + C_2 \cdot x e^{-1,5x}$

$-2 = C_1 \cdot e^{-1,5 \cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{-1,5 \cdot 0}$

$\boxed{-2 = C_1}$

$y' = -1,5 \cdot C_1 e^{-1,5x} + (-1,5 \cdot C_2 \cdot e^{-1,5x}) \cdot x + 1 \cdot C_2 \, e^{-1,5x}$

$-1 = -1,5 \cdot (-2) \cdot e^{-1,5 \cdot 0} - 1,5 \cdot C_2 \cdot e^{-1,5 \cdot 0} \cdot 0 + 1 \cdot C_2 \, e^{-1,5 \cdot 0} \cdot 0$

$-1 = 3 + C_2$

$\boxed{C_2 = -4}$

$\boxed{y = -2 \, e^{-1,5x} - 4 \cdot x e^{-1,5x}}$ Sol. Específica PVI

③ EDO 2ª Ordem linear homogênea com coef. Constantes com $\Delta > 0$

$y'' + 2y' - 3y = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$

$\boxed{\Delta = 16}$ $\Delta > 0 \to \boxed{y_H = C_1 \cdot e^{\lambda x} + C_2 \cdot e^{\lambda x}}$

$\lambda_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + 4}{2} = 1$

$\lambda_2 = \dfrac{-b - \sqrt{16}}{2 \cdot a} = \dfrac{-2 - 4}{-2} = -3$

$\boxed{y_H = C_1 \cdot e^x + C_2 \, e^{-3x}}$ Sol. geral

④ EDO 2ª Ordem linear homogênea com coef. constantes com $\Delta > 0$, PVI

$y'' + 4y' + 3y = 0$

$y(0) = 2$

$y'(0) = -1$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$\cancel{\Delta = b^2 \sqrt{}}$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \to 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = \boxed{4}$

$\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{4}}{2}$

$\lambda_1 = \dfrac{-4 + 2}{2} = -1$

$\lambda_2 = \dfrac{-4 - 2}{2} = -3$

$\boxed{y_H = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}}$ Sol. geral

Sol. ESPECÍFICA:

$2 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$

$2 = C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0$

$2 = C_1 + C_2$

$y' = -1 \cdot C_1 \cdot e^{-x} + (-3) \cdot C_2 \cdot e^{-3x}$

$-1 = -C_1 \cdot e^{-0} - 3C_2 \cdot e^{-3 \cdot 0}$

$-1 = -C_1 - 3C_2$

Sistema:

$C_1 + C_2 = 2$

$-C_1 - 3C_2 = -1$

$-2C_2 = 1$

$\boxed{C_2 = \dfrac{-1}{2}}$

$C_1 + \dfrac{-1}{2} = 2$

$-C_1 - 3 \cdot \dfrac{1}{2} = -1$

$C_1 = 2 + \dfrac{1}{2}$

$\boxed{C_1 = \dfrac{5}{2}}$

$y = \dfrac{5}{2} \cdot e^{-x} + \dfrac{1}{2} \cdot e^{-3x}$

$\boxed{y = \dfrac{5}{2} e^{-x} - \dfrac{1}{2} \cdot e^{-3x}}$ Sol. ESPECÍFICA

⑤ EDO 2ª Ordem Linear Homogênea com coef constantes com $\Delta < 0$

$y'' - 2y' + 10y = 0$

$\chi^2 - 2\chi + 10 = 0$

$\Delta = -2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = \boxed{-36}$ $\Delta < 0$

$y_H = C_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 e^{\lambda x} \cdot \operatorname{sen}(\beta x)$

$\lambda = \frac{-b}{2a} = \boxed{\lambda = 1}$

$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \boxed{\beta = 3}$

$\boxed{y_H = C_1 \cdot e^{x} \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot e^{x} \cdot \operatorname{sen}(3x)}$ Sol geral

⑥ EDO 2ª Ordem Linear Homogênea com coef constantes com $\Delta < 0$, PVI

$y'' + 4y' + 5y = 0$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$\chi^2 + 4\chi + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 5 = \boxed{-4}$ $\Delta < 0$

$\to \lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = \boxed{-2}$

$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \boxed{1}$

$y_H = C_1 e^{\lambda x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot e^{\lambda x} \cdot \operatorname{sen}(\beta x)$

$\boxed{y = C_1 e^{-2x} \cdot \cos(x) + C_2 \cdot e^{-2x} \cdot \operatorname{sen}(x)}$ Sol geral

Sol ESPECÍFICA:

$y'(x) = C_1 \left[-e^{-2x} \operatorname{sen}(x) - 2e^{-2x} \cos(x)\right] + C_2 \left[e^{-2x} \cos(x) - 2e^{-2x} \operatorname{sen}(x)\right]$

$1 = C_1 \cdot e^{0} \cdot \overset{1}{\cancel{\cos(0)}} + C_2 \cdot e^{0} \cdot \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(0)}}$

$\boxed{C_1 = 1}$

$0 = C_1 \left[-e^{0} \cdot \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(0)}} - 2e^{0} \overset{1}{\cancel{\cos(0)}}\right] + C_2 \left[e^{0} \cdot \overset{1}{\cancel{\cos(0)}} - 2e^{0} \cdot \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(0)}}\right]$

$0 = C_1(-2) + C_2$

$C_2 = 2 \cdot C_1$

$\boxed{C_2 = 2}$

$\boxed{y = e^{-2x} \cdot \cos(x) + 2 \cdot e^{-2x} \operatorname{sen}(x)}$ Sol Específica

1 - USO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

a) Encontre a Solução geral da EDO

$y'' - 9y = \cos(3x)$

$\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x)}$

$y_H = y'' - 9y = 0 \to r^2 - 9 = 0$ $\boxed{r = \pm 3}$

$\boxed{y_H = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}}$

$y_P(x) = ?$

$y_P(x) = A \cdot \cos(3x) + B \cdot \operatorname{sen}(3x)$

$y_P'(x) = A \cdot (-\operatorname{sen}(3x)) \cdot 3 + B \cdot \cos(3x) \cdot 3 = \boxed{-3A \operatorname{sen}(3x) + 3B \cos(3x)}$

$y_P''(x) = -3A \cdot \cos(3x) \cdot 3 + 3B(-\operatorname{sen}(3x) \cdot 3) = \boxed{-9A \cos(3x) - 9B \operatorname{sen}(3x)}$

$-9A \cdot \cos(3x) - 9B \cdot \operatorname{sen}(3x) - 9(A \cos(3x) + B \cdot \operatorname{sen}(3x)) = \cos(3x)$

$-18 \cos(3x) \cdot A - 18B \operatorname{sen}(3x) = \cos(3x)$

$\begin{cases} -18A = 1 \\ -18B = 0 \end{cases}$

$A = -\frac{1}{18}$

$B = 0$

$y_P = -\frac{1}{18} \cos(3x) + 0 \cdot \operatorname{sen}(3x)$

$y_P = -\frac{1}{18} \cos(3x)$

$\boxed{y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{18} \cos(3x)}$ Sol geral

b) Encontre a Solução geral da EDO

$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$

$y'' - 3y' - 4y = 0$

$r^2 - 3r - 4 = 0$

$(r-4)\cdot(r+1) = 0$

$r = 4$ ou $r = -1$

$\boxed{y_H = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}}$

$y_p = Ae^{2x}$

$y'_p = 2Ae^{2x}$

$y''_p = 4Ae^{2x}$

$\cancel{4Ae^{2x}} - 6Ae^{2x} - \cancel{4Ae^{2x}} = 3e^{2x}$

$-6A = 3$

$A = \frac{-1}{2}$

$\boxed{y_p = -\frac{1}{2} e^{2x}}$

$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + \left(-\frac{1}{2} e^{2x}\right)$

$\boxed{y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x}}$ Sol geral

2 - USO DO MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

a) Encontre a Sol. geral da EDO

$y'' - 8y' + 16y = \underbrace{\frac{e^{4x}}{x^2}}_{r(x)}$

$\boxed{y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{4x} + [-\ln(x) - 1] e^{4x}}$ Sol geral

$y'' - 8y' + 16y = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

$\lambda = 4 \rightarrow \boxed{y_H = C_1 \underbrace{e^{4x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{x e^{4x}}_{y_2}}$

$y_p(x) = v_1(x)\cdot y_1(x) + v_2(x)\cdot y_2(x)$

$\begin{cases} v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' = r(x) = \frac{e^{4x}}{x^2} \end{cases}$

$y_1' (e^{4x})' = 4e^{4x}$

$y_2' = (xe^{4x})' = e^{4x} + x\cdot 4e^{4x}$

$\begin{cases} v_1'(e^{4x}) + v_2'(xe^{4x}) = 0 \\ v_1'(4e^{4x}) + v_2'(e^{4x} + 4xe^{4x}) = \frac{e^{4x}}{x^2} \end{cases}$ $\boxed{\div e^{4x}}$

$\begin{cases} v_1' + x v_2' = 0 \\ 4v_1' + [1 + 4x] v_2' = \frac{1}{x^2} \end{cases}$

$\boxed{v_1' = -1/x}$

$\boxed{v_2' = \frac{1}{x^2}}$

$\boxed{v_2 = \int \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x}}$

$\boxed{v_1 = \int \frac{-1}{x} = -\ln|x|}$

$y_p = -\ln|x| \cdot e^{4x} + \frac{-1}{x} \cdot x e^{4x} = \boxed{e^{4x}[-\ln(x) - 1]}$

b) Encontre a sol geral da EDO

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

$y'' - 2y' + y = 0$

$y_H = A e^x + B e^x$

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{bmatrix}$$

$A' = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}} = -1 \quad \boxed{A = x}$

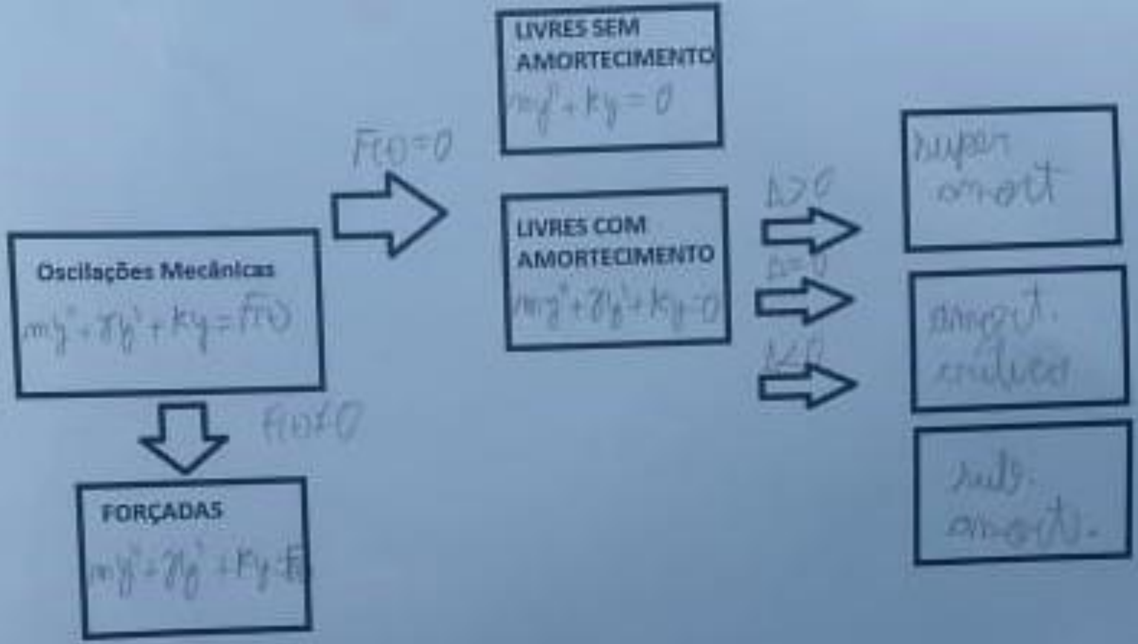
$B' = \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x} \quad \boxed{B = \ln|x|}$

$$\boxed{y = xe^x + x \ln|x| \cdot e^x + c_1 e^x + c_2 x e^x}$$

Sol. geral

SALA DE AULA INVERTIDA

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS – SISTEMA MASSA MOLA



Atividade 2: Oscilações livres amortecidas. Considere um sistema massa-mola em um meio viscoso. Seja k a constante elástica da mola, seja m a massa do corpo que oscila e seja γ o coeficiente de viscosidade (amortecimento) do meio. A EDO que descreve a amplitude das oscilações da massa é dada por $m x'' + \gamma x' + k x = 0$. Descreva o efeito da viscosidade do meio no movimento da massa. Movimentos oscilatórios: subamortecimento, superamortecido e amortecimento crítico.

Atividade 3: Um cursor com 5 kg repousa sobre uma mola, não estando ligado a ela. Observa-se que, se o cursor for empurrado para baixo 0,18m ou mais, perde o contato com a mola depois de libertado. Determine:

(a) a constante de rigidez da mola.

(b) a posição, a velocidade e a aceleração do cursor, 0.16 s após ter sido empurrado para baixo 0,18m e, depois, libertado.

Considere $g=9,81 m/s^2$.

3-

$m = 5$

$\gamma = 0$

$k = ?$

$my'' + ky = 0$

$5y'' + ky = 0$

$\sqrt{4k.5}$

$5.9,8$

$P = K.x$

$m.g = -K.y$

$5g = -k y$

$my'' + \gamma y' + ky = 0$ $\quad \Delta = 0 = \gamma^2 - 4m.k$

$my'' + ky = 0$ $\quad \Delta = -4k5 = \sqrt{20k(-1)}$

$\frac{0 \pm \sqrt{20k}.i}{10}$

$y_1 = \cos\left(\frac{\sqrt{20k}.x}{10}\right)$

$y_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{20k}.x}{10}\right)$

$y_h = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{545}.x}{10}\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{5450}.x}{10}\right)$

$m.g = k.0,18$

$\frac{5.9,81}{0,18} = k = 272,5$

$\begin{cases} y(0) = 0,18 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

pos $= y(0,16)$

vel $= y'(0,16)$

acel $= y''(0,16)$

$$\begin{cases} y(0) = 0{,}18 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$y_h(0) = 0{,}18 = C_1 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\sqrt{20k}}{10}\right) + C_2 \cdot \operatorname{sen}\left(0 \cdot \frac{\sqrt{20k}}{10}\right)$$

$$\boxed{C_1 = 0{,}18}$$

$$y_h' = C_1 \frac{\sqrt{5450}}{10}\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{5450}\,x}{10}\right)\right] + C_2 \frac{\sqrt{5450}}{10} \cos\left(\frac{\sqrt{5450}\,x}{10}\right)$$

$$y_h' = -0{,}18$$

$$y'(0) = 0 = C_2 \sqrt{} \qquad C_2 = 0$$

$$\boxed{y_h = 0{,}18 \cdot \cos\left(x \cdot \frac{\sqrt{5450}}{10}\right)}$$

$$pos. = y_h(0{,}16) = 0{,}18 \cdot \cos\left(0{,}16 \cdot \frac{\sqrt{5450}}{10}\right)$$

$$\boxed{y_h(0{,}16) = 0{,}17996} \rightarrow m$$

$$y_h'(0{,}16) = -0{,}18 \cdot \frac{\sqrt{5450}}{10} \operatorname{sen}\left(0{,}16 \cdot \frac{\sqrt{5450}}{10}\right) = -0{,}02739 \ m/s$$

$$y_h''(0{,}16) = -0{,}18 \cdot \frac{5450}{100} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{5450}}{10}\, x\right) = \boxed{a = -9{,}8079 \ m/s^2}$$

$x = 0{,}16$