Portfólio – Mapa conceitual
Módulo 1

Nome: Heloísa Gomez Valenzuela Vianna

Matrícula: 180113551

Equação Diferencial

Variável desconhecida é a derivada (y')

CLASSIFICAÇÃO

HOMOGENEIDADE

- Homogênea
  - Função $y'(t) = 0$. Função é nula
- Não-Homogênea
  - Função é diferente de zero.

LINEARIDADE

- Linear
  - Não tem nenhuma função multiplicando a derivada.
- Não-Linear
  - → Tem função não linear multiplicando a derivada
  - → Ex.: Funções: Trigonométricas, quadráticas, exponencial.

ORDEM

É o grau da maior derivada da equação diferencial

TIPO

- EDO
  - Só tem uma variável dependente
- EDP
  - Tem mais de uma variável dependente

FORMAS DE EXPRESSAR

- Implícita
  - → y não está isolado
  - → $F(t, y, y', y'') = 0$
- Explícita
  - Consegue isolar o y
  - → $y'' = F(t, y, y')$
- Padrão
  - → Coeficiente de y é sempre 1
  - → $1y'' + y' + y = 0$

SOLUÇÃO DE UMA EDO

Função que satisfaz a equação diferencial. Verifica substituindo o valor dado na EDO.

TIPOS

- GERAL
  - Envolve constantes
- ESPECÍFICO
  - Obtida pelo valor exato do PVI, ou seja, pela condição inicial.

EDO - 1ª ORDEM

EQUAÇÃO EXATA

- $y' = f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \\ \text{ou} \\ M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \end{cases}$

- $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para ser exata

- Solução
  - ↳ ver se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$
  - ↳ Fazer $F(x,y) = \int M(x,y)dx$

    $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

- OBS.: Em $F(x,y) = \int M(x,y)dx$, a solução da integral resulta em uma função $g(y)$ mais o resultado da integral.
  Ao fazer $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, obtemos $g'(y)$ e integramos para ter $g(y)$.

EQUAÇÃO NÃO EXATA

- $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para ser não exata

- Solução:
  - ↳ Verifica se $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$
  - ↳ Achar fator integrante $\mu(x,y)$
  - ↳ Multiplicar $\mu(x,y)$ pela EDO, obtendo a equação exata
  - ↳ Repete o processo da equação exata para achar $F(x,y)$

- OBS.: Existem 2 casos para achar o fator integrante $\mu(x,y)$

CASO 1

- $\mu(x,y) = \mu(x)$: na variável x

  $\mu(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$

CASO 2

- $\mu(x,y) = \mu(y)$: na variável y

  $\mu(y) = -\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$

Usa o μ que fica em função de uma variável só.

Se $\mu(x)$ funcionar, $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

Se $\mu(y)$ funcionar, $\mu(y) = e^{\int p(y)dy}$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

- Forma: $y' + p(x)y = g(x)y^2$ (1)
  - ↳ $n=0$ e $n=1$ → EDO linear não homogênea
  - ↳ $n \neq 0$ e $n \neq 1$ → EDO não linear
- Multiplica EDO por y^{-n}
  - ↳ $y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = g(x)$ (2)
- Chama y^{1-n} de v (3)
- Deriva $v \rightarrow v' = (1-n)\,y^{-n} \cdot y'$ (4)
- Substituir (3) e (4) em (2)
  - ↳ $\dfrac{1 \cdot v'}{1-n} + p(x) \cdot v = g(x)$
- Calcula $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$
- Multiplica EDO por $\mu(t)$
- Resolve até chegar em y

EDO - 1ª ORDEM

EQUAÇÃO EXATA

- $y' = f(x,y)$ $\begin{cases} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \\ \text{ou} \\ M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0 \end{cases}$
- $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para ser exata
- Solução
  - ↳ ver se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$
  - ↳ Fazer $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx$

    $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

→ OBS.: Em $F(x,y) = \int M(x,y)\,dx$, a solução da integral resulta em uma função $g(y)$ mais o resultado da integral.

Ao fazer $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$, obtemos $g'(y)$ e integramos para ter $g(y)$

EQUAÇÃO NÃO EXATA

- $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ para ser não exata
- Solução
  - ↳ Verifica se $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$
  - ↳ Achar fator integrante $\mu(x,y)$
  - ↳ Multiplicar $\mu(x,y)$ pela EDO, obtendo a equação exata.
  - ↳ Repete o processo da equação exata para achar $F(x,y)$

→ OBS: Existem 2 casos para achar o fator integrante $\mu(x,y)$

CASO 1

- $\mu(x,y) = \mu(x)$: na variável x

  $\mu(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$

CASO 2

- $\mu(x,y) = \mu(y)$: na variável y

  $\mu(y) = -\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$

Usa o μ que fica em função de uma variável só

Se $\mu(x)$ funcionar, $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

Se $\mu(y)$ funcionar, $\mu(y) = e^{\int p(y)dy}$

EQUAÇÃO DE BERNOULLI

- Forma: $y' + p(x)\,y = g(x)\,y^2$ (1)
  - ↳ $n=0$ ou $n=1$ → EDO linear não homog.
  - ↳ $n \neq 0$ e $n \neq 1$ → EDO não linear
- Multiplica EDO por y^{-n}
  - ↳ $y^{-n}y' + p(x)\,y^{1-n} = g(x)$ (2)
- Chama y^{1-n} de v (3)
- Deriva v → $v' = (1-n)\,y^{-n} \cdot y'$ (4)
- Substitui (3) e (4) em (2)
  - ↳ $\dfrac{1 \cdot v'}{1-n} + p(x) \cdot v = g(x)$
- Calcula $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$
- Multiplica EDO por $\mu(t)$
- Resolve até chegar em y.

EDO - 2ª ORDEM

HOMOGENEA LINEAR

COEFICIENTES CONSTANTES

- $ay'' + by' + cy = 0$
  ↳ chega na equação característica

$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ — obtém raízes de acordo com a formula de bhaskara!

Aplicar bhaskara para chegar na solução geral
$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$\Delta > 0$

- Raízes reais distintas
- Conjunto fundamental de solução
  ↳ $\begin{cases} y_1 = e^{\;\;x} \\ y_2 = e^{\;\;x} \end{cases}$
- Aplicar Wronskiano para solução

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda_2 e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} =$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}$$

↳ obtemos: $y_H = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$

$\Delta = 0$

- Raízes iguais
- Conjunto fundamental de solução
  ↳ $\{ y_1 = y_2 = e^{\lambda x}$

somente para coeficientes constantes.

Metodo de redução de ordem (coeficientes não constantes)

- Cria $y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x)$
- Deriva y_2 e substitui na EDO
- Chega em EDO 1ª ordem na variável $v(x)$
- $y_1(x)$ é fornecida, então é só pegar o valor achado de $v(x)$ e multiplicar por $y_1(x)$ → igual a $y_2(x)$

$\Delta < 0$

- Raízes complexas
- Conjunto fundamental de solução $\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) \end{cases}$
- Calcula Wronskiano para solução
- Pode achar solução substituindo y_1 e y_2 em y_H.

CASO GERAL

- Forma padrão: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Princípio da superposição

- Solução geral é dada por $y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$
- $\{y_1, y_2\}$ é o conjunto fundamental de solução
- Válido só para EDO 2ª Ordem Linear Homogênea

Solução específica

- Tem PVI, condição inicial.
- Vai achar valor das constantes c_1 e c_2

Existência e unicidade

- PVI $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$
- Existe uma única solução num intervalo I que contém x_0.

Wronskiano

- $W(y_1, y_2)(x)$ = determinante da matriz
  ↳ $= \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} =$
  $= y_1 \cdot y_2' - y_2 y_1'$
- Se $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, y_1 e y_2 são soluções

EDO - 2ª ORDEM

LINEAR NÃO HOMOGÊNEA

SOLUÇÃO

- É a soma da solução homogênea com a particular

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

SOLUÇÃO PARTICULAR

Método dos coeficientes indeterminados → MCI

- Simples
- Restrito à funcões polinomiais, exponenciais, seno e cosseno
- Manipulações algébricas

MCI

- Faz a solução homogênea
- Faz a solução particular de acordo com a forma da EDO
- Deriva y_p quantas vezes for necessário para substituir na EDO
  - ↳ EDO 2º ordem só precisa derivar 2 vezes
    - ↳ y'_p e y''_p
- Iguala o sistema → x^2 com x^2; x com x; ⋮
- Aplica solução geral: $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$

TABELA PARA "CHUTE"

FORMA DE g(x)	CHUTE	
$P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$	$X^s \cdot [A_n x^n + \dots + A_0]$	①
$[a_n x^n + \dots + a_0] e^{\alpha x}$	$X^s \cdot [A_n x^n + \dots + A_0] e^{\alpha x}$	②
$[a_n x^n + \dots + a_0] e^{\alpha x} \cos \beta x$ ou $[a_n x^n + \dots + a_0] e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$	$X^s [(A_n x^n + \dots + A_0) e^{\alpha x} \cos \beta x + (B_n x^n + \dots + B_0) e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$	③

X^s significado:

① nº de vezes que zero é raiz

② nº de vezes que α é raiz

③ nº de vezes que $\alpha + i\beta$ é raiz

Método de variação dos parâmetros → MVP

- Acha solução particular da EDO
- Funciona para qualquer função $g(x)$ que torna a EDO não homogênea
- Precisa resolver integral

SOLUÇÃO

- Definir conjunto fundamental de solução $\{y_1, y_2\}$
- Calcular Wronskiano → $W(y_1, y_2)(x)$
- Encontra as funções $\mu_1(x)$ e $\mu_2(x)$
  - ↳ $\mu_1(x) = \int \frac{-y_2(x) g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$
  - ↳ $\mu_2(x) = \int \frac{y_1(x) g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$
- Achar solução particular $y_P(x)$

$$y_P(x) = \mu_1(x) y_1(x) + \mu_2(x) y_2(x)$$

Sala de aula invertida

❖ Tema: Oscilações mecânicas e forçadas

Oscilações Mecânicas
$m\ddot{x} + \gamma\dot{x}\,Kx = 0$

→ **Livres sem amortecimento**
$\gamma = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$

→ **Livres com amortecimento**
$\gamma > 0 \Rightarrow m\ddot{x}\,\gamma\dot{x} + Kx = 0$

- → **Super amortecimento** $\Delta > 0$
- → **Amortecimento crítico** $\Delta = 0$
- → **Subamortecimento** $\Delta < 0$

→ **Forçadas**
$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = F(t)$

Exercício: Um cursor com 5Kg repousa sobre uma mola, não estando ligado a ela. Observa-se que, se o cursor for empurrado para baixo 0,18m ou mais, perde o contato com a mola depois de libertado. Determine a constante de rigidez da mola, a posição, a velocidade e a aceleração do cursor, 0.16 s após ter sido empurrado para baixo 0,18m e, depois, libertado.

Dado
↳ $g = 9,81\,m/s^2$

$m = 5$; $\gamma = 0,18$; $K = ?$

$Fel = K \cdot x \Rightarrow Fel = P \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot 9,81 = K \cdot 0,18 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 272,5\,N/m$

$P = 49,05\,N$

$mx'' + \gamma x' + Kx = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow m\dfrac{d^2x}{d^2y} + \gamma\dfrac{dx}{dt} + Kx = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow ma_{(0,16)} + \gamma v + K \cdot S_{(0,16)} = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow ma + 0 \cdot v + K \cdot S = 0 \Rightarrow$

$5y'' + 272,5y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\lambda^2 + 0\lambda + 272,5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 - 4 \cdot 5 \cdot 272,5 = \sqrt{-5450} =$

$= 73,82i$

$\dfrac{0 \pm 73,82i}{10}$ → $y_1 = 7,382i$; $y_2 = -7,382i$

$y = C_1\cos(7,382x) + C_2\,sen(7,382x)$

$y(0) = 0,18 \to y'(0) = 0 ; \to y''(0) = -9,81$

$y''(0,16) = -9,8 \to y'(0,16) = -3,71 \cdot 10^{-3}$

$0,18 = C_1$
$0 = C_2$ $\Rightarrow y'' = -9,81 \to y_{(0,16)} = 0,179\,m$

$y' = C_1(-sen(7,382x) \cdot 7,382) + C_2\cos(7,382x) \cdot 7,382$

$y'' = 7,382^2 C_1(-\cos(7,382x)) +$
$+ 7,382^2 C_2(-sen(7,382x))$

Aplicação

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

Autores: Cleiton Rodrigues, Davi Moura, Fabrício de Matos, Felipe Roberto, Guilherme César Jorge Dayvison, Luís Fernando, Pedro Igor, Washington Maciel, Willey Rodrigues.

Resumo: As equações diferencias são objeto de intensa atividade de pesquisa pois apresentam aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações práticas em diversas áreas como, medicina, engenharia, química, biologia,etc. Estas equações estão relacionadas com vários fenômenos físicos tais como: mecânica dos fluidos, fluxo de calor, vibrações, circuitos elétricos, reações químicas, dentre várias outros. Além de apresentarem diversas ramificações, neste trabalho abordaremos especificamente as equações diferenciais ordinárias equações que só apresentam derivadas ordinárias - em relação a uma variável.

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) modelam vários fenômenos físicos do nosso cotidiano, tanto no campo da engenharia como das ciências físicas e sociais, o que justifica o estudo destes tipos de equações. A aplicações de equações diferencias ordinárias na análise de circuitos elétricos é o nosso objetivo.

Em circuitos elétricos, por exemplo, desejamos encontrar a tensão como uma função do tempo, v(t), que pode ser escrita como uma relação das derivadas de v no tempo e das propriedades do circuito.
Uma função expressa como uma função da variável independente x, da variável independente y e suas derivadas é dita equação diferencial.

Uma relação que envolve derivadas ate ordem n é dita equação diferencial ordinária(EDO).

Plano de aula semanal: Semana 9

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180113551	Heloísa	CC	Tatiane

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	13/05/19	14/05/19	16/05/19
Objetivos	---	---	Tirar duvidas da lista.
Informação	Não teve aula devido ao falecimento da professora Lourdes.	Não teve aula, pois a professora passou mal.	Professor Wesley ministrou a aula e resolveu exercícios que os alunos pediram
Resumo	---	---	Resolução de exercícios das listas de EDO.
Observação	---	---	Sem observação.
Dúvidas	Sem dúvidas.	Sem duvidas	Dúvida na solução particular quando é exponencial e tem numero somando. Exemplo: te^t +4
Monitoria	Monitoria online.	Monitoria online.	Monitoria online.

Plano de aula semanal: Semana 10

Matrícula	Aluno	Turma	professora
180113551	Heloísa	CC	Tatiane

	Segunda-feira	Terça-feira	Quinta-feira
Data	20/05/19	21/05/19	23/05/19
Objetivos	Aplicar a sala de aula invertida.	Aplicar prova 2	Ainda não teve a aula
Informação	Aprendemos sobre as oscilações mecânicas e forçadas. Quando são mecânicas, podem ser divididas em livres com amortecimento e livres sem amortecimento.	Conteúdo: EDO	

Resumo	Oscilações mecânicas: $mx'' + \gamma x' + kx = 0$ Livre sem amortecimento: $\gamma = 0$ Livres com amortecimento: $\gamma > 0$	---	---
Observação	As oscilações mecânicas livres sem amortecimento são divididas em três casos: 1) Super amortecimento (delta > 0) 2) Amortecimento crítico (delta = 0) 3) Subamortecimento (delta < 0)	---	---
Dúvidas	Sem dúvidas.	Sem duvidas	---
Monitoria	Monitoria online.	---	---

Portfólio – Semana 5

Portfólio-Semana 5

*** CLASSIFICAÇÃO DE ED**

1. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$ ~> EDO 2ª Ordem Linear Homogênea
2. $y''' + 2e^t y'' + yy' = 0$ ~> EDO 3ª Ordem Não linear Homogênea
3. $y' - 2x = 0$ ~> EDO 1ª Ordem Linear Não Homogênea
4. $y' + \frac{2}{t}y - \frac{1}{t^2}y^3 = 0$ → EDO 1ª Ordem Não linear Homogênea
5. $2x + y^2 + 2xyy' = 0$ ~> EDO 1ª Ordem Não linear Não homogênea

*** EDO LINEAR E HOMOGÊNIA**

1. $y' - 3y = 0 \Rightarrow y' = 3y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3y \Rightarrow dy \cdot \frac{1}{y} = 3dt \Rightarrow$
$\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int 3dt \Rightarrow \ln y + C_1 = 3t + C_2 \Rightarrow \ln y = 3t + C \Rightarrow e^{\ln y} = e^{3t+C}$
$\Rightarrow y = e^{3t} \cdot e^{C} \Rightarrow y = K \cdot e^{3t}$

2. $y' + 2ty = 0 \Rightarrow y' = -2ty \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2ty \Rightarrow dy\frac{1}{y} = -2tdt \Rightarrow$
$\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int -2tdt \Rightarrow \ln y + C_1 = -t^2 + C_2 \Rightarrow \ln y = -t^2 + C \Rightarrow$
$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{-t^2+C} \Rightarrow y = e^{-t^2} e^{C} \Rightarrow y = K \cdot e^{-t^2}$

3. $\begin{cases} y' + (3x^2+2x)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
$y = C \cdot e^{-P(x)} \rightarrow P(x) = \int p(x)dx = \int(3x^2+2x) = \int 3x^2 + \int 2x = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + C$
$\Rightarrow y = Ce^{-(x^3+x^2)} \Rightarrow y = Ce^{-x^3-x^2}$
$y(0) = 1 \rightarrow 1 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 1 \quad \therefore y = e^{-x^3-x^2}$

*** EDO LINEAR NÃO HOMOGÊNEA**

1. $y' + 9y = 3 \Rightarrow y' = 3 - 9y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 - 9y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 9(\frac{1}{3} - y) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{dy}{1/3 - y} = 9dx \Rightarrow \int \frac{1}{1/3-y}dy = \int 9dx \Rightarrow \ln(1/3 - y) = 9x + C \Rightarrow$
$\Rightarrow e^{\ln(1/3-y)} = e^{9x+C} \Rightarrow 1/3 - y = e^{9x+C} \Rightarrow y = 1/3 - e^{9x+C} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1/3 - e^{9x} \cdot K$

2. $y' - 16y = 4 \Rightarrow y' = 4 + 16y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 16(1/4 + y) \Rightarrow \frac{dy}{1/4+y} = 16dx \Rightarrow$
$\Rightarrow \int \frac{1}{1/4+y}dy = \int 16dx \Rightarrow \ln(1/4 + y) = 16x + C \Rightarrow e^{\ln(1/4+y)} = e^{16x+C} \Rightarrow$
$\Rightarrow 1/4 + y = e^{16x+C} \Rightarrow y = e^{C} e^{16x} - 1/4 \Rightarrow y = K \cdot e^{16x} - 1/4$

3. $\begin{cases} y' + 2y = xe^{-2x} \\ y(0) = 1/2 \end{cases} \rightarrow y = e^{-\int p(x)}\left[\int g(x) \cdot e^{\int p(x)} + C\right] \Rightarrow \int 2dx = px = 2x$; $\int g(x)e^{\int p(x)}dx$
$\int xe^{-2x}e^{2x} \Rightarrow \int xe^0dx \Rightarrow \int xdx = \frac{x^2}{2}$
$y = e^{-2x}\left[\frac{x^2}{2} + C\right] \rightarrow y(0) = 1/2 \rightarrow 1/2 = \frac{e^0 \cdot 0^2}{2} + e^0 \cdot C \Rightarrow C = 1/2$
$\therefore y = \frac{1}{e^{2x}}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{x^2+1}{2e^{2x}}$

*** EDO NA FORMA SEPARÁVEL**

1. $x \cos y\, dy = (x+1) \operatorname{sen} y\, dx \Rightarrow \frac{\cos y\, dy}{\operatorname{sen} y} = \frac{(x+1)dx}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}dy = \int \frac{(x+1)}{x}dx \Rightarrow \ln(\operatorname{sen} y) = x + \ln x + C \Rightarrow$
$\Rightarrow e^{\ln(\operatorname{sen} y)} = e^{x+\ln(x)+C} \Rightarrow \operatorname{sen} y = e^x \cdot e^{\ln x} \cdot e^{C} \Rightarrow \operatorname{sen} y = x\, e^x C$

Portfólio – Semana 5 (CONTINUAÇÃO)

* EDO FORMA SEPARÁVEL (CONT.)

(2) $y' = xy + 3x - y - 3 \Rightarrow y' = x(y+3) - 1(y+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = (x-1)(y+3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x-1)(y+3) \Rightarrow dy\,\frac{1}{y+3} = (x-1)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y+3}\,dy = \int (x-1)\,dx \Rightarrow \ln(y+3) = \frac{x^2}{2} - x + C \Rightarrow e^{\ln(y+3)} = e^{\frac{x^2}{2} - x + C} \Rightarrow$

$\Rightarrow y+3 = e^{x^2/2 - x + C} \Rightarrow y = e^{x^2/2 - x + C} - 3 \Rightarrow y = K \cdot e^{x^2/2 - x} - 3$

(3) $(1+x)\,dy - y\,dx = 0 \Rightarrow (1+x)\,dy = y\,dx \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{1+x}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x}\,dx \Rightarrow \ln y = \ln(1+x) + C \Rightarrow e^{\ln(y)} = e^{\ln(1+x) + C} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = C(1+x)$

* EDO NA FORMA HOMOGÊNEA

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x}$ $\quad f(x,y) = \frac{x-y}{x} \Rightarrow f(Kx,Ky) = \frac{Kx-Ky}{Kx} = \frac{K(x-y)}{Kx}$

$\Rightarrow f(Kx,Ky) = \frac{x-y}{x} \rightarrow$ é homogênea

$v = y/x$; $y = v \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x} - \frac{y}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -v + 1 - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = 1 - 2v \Rightarrow \frac{dv}{1-2v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1-2v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow -1/2 \int \frac{-2dv}{1-2v} = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow -1/2 \ln(1-2v) = \ln x + C \Rightarrow$

$\Rightarrow C = -1/2 \ln\left(1 - \frac{2y}{x}\right) - \ln x$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy + x^2} \rightarrow v = y/x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1/x^2)\,y^2}{(1/x^2)(xy+x^2)} = \frac{y^2/x^2}{y/x + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow v + \frac{x\,dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} \Rightarrow \frac{x\,dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1} = \frac{-v}{v+1}$

$\Rightarrow v+1\,\frac{dv}{-v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int (v+1)\frac{dv}{-v} = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow -\int\left(\frac{v}{v} + \frac{1}{v}\right)dv = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow -\int 1\,dv - \int \frac{1}{v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow -v - \ln v = \ln x + C \Rightarrow$

$\Rightarrow C = -v - \ln v - \ln x \Rightarrow C = -\frac{y}{x} - \ln\left(\frac{y}{x}\right) - \ln x$

* EDO NA FORMA HOMOGÊNEA (CONT.)

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2y^2}{xy} \rightarrow v = y/x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{xy} + \frac{2y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + 2v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{v} \Rightarrow \frac{v\,dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

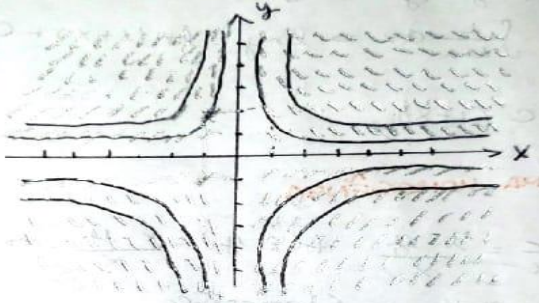
$\Rightarrow \int \frac{v\,dv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 1/2 \int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow 1/2 \ln(1+v^2) = \ln x + C \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 1/2 \ln(1+v^2) - \ln x \Rightarrow C = 1/2 \ln(1 + (y/x)^2) - \ln x$

* CAMPOS DE DIREÇÃO

(1) $y' = -y/x$

x	Y
1	2
-1	2
1	1
1	-1



(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

x	y	dy/dx
0	1	0
1	1	-1
1	0	Indefinido
-1	-1	-1
1	-1	1

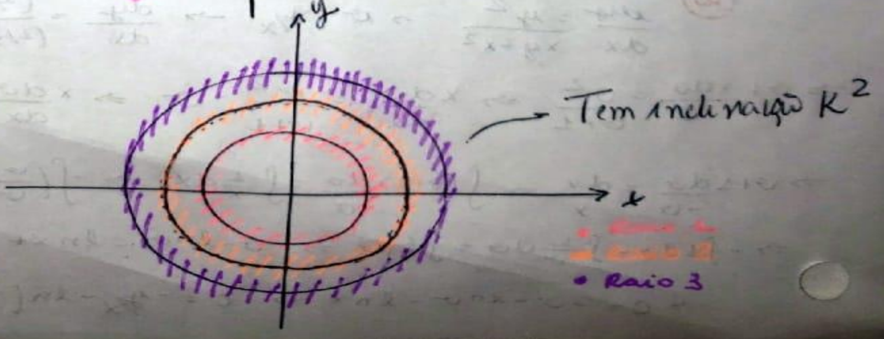
(3) $y' = \underbrace{x^2 + y^2}_{F(x,y) = K}$

$x^2 + y^2 = K^2 = y'$

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 9$



Portfólio – Semana 6

Portfólio-Semana 6

MÓDULO 2

*** EDO NA FORMA EXATA**

① $e^{y}dx + (xe^{y} - 2y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = e^{y}$ → exata

$\int M dx = \int e^{y} dx = xe^{y}$

$\int \left(N - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy = \int (xe^{y} - 2y - xe^{y}) dy =$

$= \int -2y\, dy = -y^2$

$\therefore xe^{y} - y^2 = C$ //

② $2xy\,dx + (1 + x^2)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

$\int M dx = \int 2xy\, dx = 2y \int x\,dx = \frac{2yx^2}{2} + g(y) =$

$= yx^2 + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2 + g'(y) = 1 + x^2 \Rightarrow g'(y) = 1$

$g(y) = \int g'(y)\,dy = y + C$

$\therefore yx^2 + y + C = yx^2 + g(y)$

$C = yx^2 + y + C_1 \Rightarrow K = yx^2 + y$ //

③ $(x + \operatorname{sen} y) + (x\cos y - 2y)y' = 0 \Rightarrow (x + \operatorname{sen} y) + (x\cos y - 2y)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + \operatorname{sen} y)dx + (x\cos y - 2y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = \cos y$

$\int M dx = \int x \operatorname{sen} y = \int x\,dx + \operatorname{sen} y \int dx = \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} y\, x + g(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x\cos y + g'(y) \Rightarrow x\cos y + g'(y) = x\cos y - 2y$

$\Rightarrow g'(y) = -2y$

$g(y) = \int g'(y) = -y^2 + C_1$

$\therefore C = \frac{x^2}{2} + x\operatorname{sen} y - y^2 + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + x\operatorname{sen} y - y^2 = K$ //

④ $2xy\,dx + (x^2 - 1)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

$\int M dx = \int 2x\,dx + g(y) = x^2y + g(y) = C$

$\frac{\partial M dx}{\partial y} = \frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} + g'(y) = x^2 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \Rightarrow g'(y) = -1$

$g(y) = \int -1\,dy = -y$

$\therefore x^2y + g(y) = C \Rightarrow x^2y - y = C$ //

*** EDO NA FORMA EXATA (CONT.)**

⑤ $y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}} \Rightarrow (2y - xe^{xy})dy = (2 + ye^{xy})dx \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 + ye^{xy})dx - (2y - xe^{xy})dy = 0 \Rightarrow (2 + ye^{xy})dx + (xe^{xy} - 2y)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy}$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$

$\int M dx = \int (2 + ye^{xy})dx = 2\int dx + \int e^{xy} y\,dx = 2x + e^{xy} + g(y)$

$\frac{\partial M dx}{\partial y} = e^{xy} + g'(y) = xe^{xy} - 2y \Rightarrow g'(y) = -2y$

$g(y) = \int -2y\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow g(y) = -y^2 + C_1$

$\therefore C = 2x + e^{xy} - y^2 + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow K = 2x + e^{xy} - y^2$ //

*** EDO NA FORMA NÃO EXATA**

① $(x^3 - y^3)dx + xy^2dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -3y$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = y^2$

$\mu = e^{\int \frac{-3y^2 - y^2}{xy^2}dx} = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = x^{-4}$

$x^{-4}(x^3 - y^3)dx + x^{-4}(xy^2)dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(x^{-1} - x^{-4}y^3)}_{My}dx + \underbrace{(x^{-3}y^2)}_{Nx}dy = 0$

$My = -3x^{-4}y^2$ e $Nx = -3x^{-4}y^2$

$F(x,y) = \int Fy\,dy = \int x^{-3}y^2 dy = \frac{x^{-3}y^3}{3} + g(x)$

$Fx = \frac{-3x^{-4}y^3}{3} + g'(x) \Rightarrow (x^{-1} - x^{-4}y^3) = \frac{-3x^{-4}y^3}{3} + g'(x)$

$\Rightarrow g'(x) = x^{-1} \to g(x) = \int \frac{1}{x} = \ln x$

$\therefore F(x,y) = \frac{x^{-3}y^3}{3} + \ln x = C$ //

② $(4x^2 + 3\cos(y))dx - (x \operatorname{sen}(y))dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -3\operatorname{sen} y$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = -\operatorname{sen}(y)$

$\mu = e^{\int \frac{-3\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y}{-x\operatorname{sen} y}dx} = e^{\int -2/x} = e^{\int 2/x\,dx} = x^2$

$x^2(4x^2 + 3\cos(y))dx - x^2(x\operatorname{sen}(y))dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(4x^4 + 3x^2\cos(y))}_{M=Fx}dx - \underbrace{(x^3\operatorname{sen} y)}_{N=Fy}dy = 0$

$\frac{\partial Fx}{\partial y} = -3x^2\operatorname{sen} y$; $\frac{\partial Fy}{\partial x} = -3x^2\operatorname{sen} y$

EXATA

$F(x,y) = \int Fy\,dy = \int -x^3\operatorname{sen} y\,dy =$

$= x^3\cos(y) + g(x)$

$Fx = 3x^2\cos y + g'(x) = 4x^4 + 3x^2\cos y \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = 4x^4$

$g(x) = \int 4x^4 = \frac{4x^5}{4}$

$\therefore x^3\cos y + \frac{4x^5}{4} = C$ //

*** EDO NA FORMA NÃO EXATA**

③ $y\,dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$

$\mu = e^{\int \frac{2y-1}{y}dy} = e^{\int 2 - \frac{1}{y}dy} = e^{2y - \ln y} = \frac{e^{2y}}{y}$

$\frac{e^{2y}}{y}(y)dx + \frac{e^{2y}}{y}(2xy - e^{-2y})dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{e^{2y}}_{M=Fx}dx + \underbrace{(2xe^{2y} - 1/y)}_{N=Fy}dy = 0$

$\frac{\partial Fx}{\partial y} = 2e^{2y}$ e $\frac{\partial Fy}{\partial x} = 2e^{2y}$

EXATA

$F(x,y) = \int Fy\,dy = \int (2xe^{2y} - 1/y)dy =$

$= \frac{2xe^{2y}}{2} - \ln y + g(x)$

$Fx = e^{2y} + g'(x) = e^{2y} \Rightarrow g'(x) = 0$

$g(x) = \int g'(x) = C$

$\therefore xe^{2y} - \ln y = C$ //

④ $(x^2y^3 - 1) + (x^3y^2 - \frac{2x}{y})y' = 0 \to \mu = x^{-2}y^{-2}$?

$(x^{-2}y^{-2})(x^2y^3 - 1)dx + (x^3y^2 - \frac{2x}{y})(x^{-2}y^{-2})dy = 0 \Rightarrow (y - x^{-2}y^{-2})dx + (x - 2x^{-1}y^{-3})dy$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2x^{-2}y^{-3}$ e $\frac{\partial Fy}{\partial x} = 1 + 2x^{-2}y^{-3}$

$F(x,y) = \int Fy\,dy = \int (x - 2x^{-1}y^{-3})dy = xy - \frac{2x^{-1}}{-2}y + g(x) = xy + x^{-1}y^{-2} + g(x)$

$Fx = y - x^{-2}y^{-2} + g'(x) \Rightarrow y - x^{-2}y^{-2} = y - x^{-2}y^{-2} + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0$

$\therefore g(x) = C \to xy + 1/xy^2 = C$ //

⑤ $(2x\cos(y) + 4x^3)dx + (x^2\operatorname{sen}(y))dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x\operatorname{sen} y$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x\operatorname{sen} y$

$\mu = e^{\int \frac{-2x\operatorname{sen} y - 2x\operatorname{sen} y}{x^2\operatorname{sen} y}dx} = e^{\int \frac{-4x}{x^2}dx} = x^{-4}$

$x^{-4}(2x\cos(y) + 4x^3)dx + x^{-4}(x^2\operatorname{sen}(y))dy = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\underbrace{2x^{-3}\cos(y)}_{Fx=M} + 4x^{-1})dx + (\underbrace{x^{-2}\operatorname{sen}(y)}_{Fy=N})dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x^{-3}\operatorname{sen} y$ e $\frac{\partial N}{\partial x} = -2x^{-3}\operatorname{sen} y$

EXATA

$F(x,y) = \int Fy\,dy = \int x^{-2}\operatorname{sen} y\,dy =$

$= -x^{-2}\cos(y) + g(x)$

$Fx = 2x^{-3}\cos(y) + g'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^{-3}\cos(y) + 4x^{-1} = 2x^{-3}\cos y + g'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) = 4x^{-1} \to g(x) = \int 4x^{-1} = 4\ln x$

$F(x,y) = C \to x^{-2}\cos(y) + 4\ln x = C$ //

Portfólio – Semana 6 (CONTINUAÇÃO)

*** EQUAÇÃO DE BERNOULLI**

① $x^2y' + 2xy - y^3 = 0 \Rightarrow x^2y' + 2xy = y^3 \Rightarrow \frac{x^2y'}{x^2} + \frac{2xy}{x^2} = \frac{y^3}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^2} \Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{2y}{xy^3} = \frac{y^3}{x^2}\cdot\frac{1}{y^3} \Rightarrow \frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = 1/x^2$

$w = y^{-2}$

$w' = -2y^{-3}y' \Rightarrow \frac{w'}{2} = -y^{-3}y'$

$\frac{w'}{2} + \frac{2}{x}w = 1/x^2 \Rightarrow w = -\frac{4w}{x} = \frac{-2}{x^2}$

$\mu = e^{-\int \frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln x} = x^{-4}$ $\begin{cases} \mu = x^{-4} \\ K = -2/x^2 \end{cases}$

$\frac{d}{dx}(\mu \cdot w) = \mu \cdot K \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{-4}w) = x^{-4}\left(\frac{-2}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}(x^{-4}w)dx = \int -2x^{-6}dx \Rightarrow x^{-4}w = \frac{-2x^{-5}}{-5} + C \Rightarrow$

$\Rightarrow w = \frac{-2x^{-5}}{-5x^{-4}} + \frac{C}{x^{-4}} \Rightarrow w = y^{-2} = \frac{2}{5x} + x^4C$

$\therefore y = \left[\frac{2}{5x} + x^4C\right]^{-1/2}$ //

② $x\,dy + y = -x^2y^2 \Rightarrow \frac{x}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2y^2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = -xy^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^2} + \frac{y}{x}\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{-xy^2}{y^2} \Rightarrow y'\cdot y^{-2} + \frac{y^{-1}}{x} = -x$

$w = y^{-1} \rightarrow w' = -y^{-2}y'$

$-w' + 1/x\,w = -x \Rightarrow w' - 1/x\,w = x$

$\mu = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$ $\begin{cases} \mu = x^{-1} \\ K = x \end{cases}$

$\frac{d}{dx}(x^{-1}w) = x^{-1}x \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(x^{-1}w)dx = \int dx \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{-1}w = x + C \Rightarrow w = \frac{x+C}{x^{-1}} \Rightarrow \frac{1}{y} = x^2 + Cx$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + Cx}$ //

*** APLICAÇÕES EDO 1ª ORDEM**

→ Equações importantes para a resolução das questões:

$\boxed{\frac{dS}{dt} = K\cdot S \; ; \; S = Ce^{Kt}}$ $\boxed{\frac{dP}{dt} = K\cdot P \; ; \; P = e^{Kt}\cdot C}$

$\boxed{\frac{dA}{dt} = K\cdot A \quad A = Ce^{Kt}}$ $\boxed{\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)}$

*** APLICAÇÕES EDO 1ª ORDEM (CONT.)**

① Suponha que uma aplicação renda juros continuamente. Qual será o saldo após 12 meses se a taxa de juros for 1% a.m. e o depósito for R$ 100,00

$S(0) = 100{,}00$; taxa $= 1\%$ a.m. $S = Ce^{Kt}$

$t = 0 \rightarrow S(0) = C\cdot e^{K\cdot 0} = C = 100$

$S(12) = 100\cdot e^{0{,}01\cdot 12} \cong 112{,}75$ reais //

② Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias. Em $t = 1h$, o número de bactérias é $3/2\,P_0$. Considerando que a taxa de crescimento é proporcional a $P(t)$, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

$P(0) = P_0$; $P(1) = 3/2\,P_0$ $\quad t = ? \rightarrow 3P_0$

$t = 0 \rightarrow P_0 = Ce^{K\cdot 0} = C = P_0$

$P(t) = Ce^{Kt} \Rightarrow P(t) = P_0\cdot e^{Kt}$

$t(1) = 3/2\,P_0 = P_0\cdot e^{K\cdot 1} \Rightarrow K = \ln(3/2) \cong 0{,}4055$

$3P_0 = P_0\cdot e^{0{,}4055\cdot t} \Rightarrow e^{0{,}4055t} = 3 \Rightarrow 0{,}4055t = \ln(3) \Rightarrow t = \frac{\ln(3)}{0{,}4055} \cong 2{,}71h$ //

③ O isótopo Pb-209 decai a uma taxa proporcional à $A(t)$ e tem meia-vida de 3,3 h. Se houver inicialmente 1g de chumbo, quanto tempo levará para que 90% decaia?

→ Meia-vida: $1/2\,A(0) = Ce^{Kt} \rightarrow A(0) = Ce^{K\cdot 0} \Rightarrow A(0) = C$

$1/2\,A(0) = A(0)e^{Kt} \Rightarrow Kt = \ln(1/2) \Rightarrow t = \frac{\ln(1/2)}{K}$

$A(0) = 1g$
Meia-vida $= 3{,}3h$ $\Rightarrow$ $t = 0 \rightarrow A(0) = Ce^{K\cdot 0} = 1$

$0{,}5g = C\cdot e^{K\cdot 3{,}3} = 1\cdot e^{K\cdot 3{,}3} \Rightarrow K = \frac{\ln(0{,}5)}{3{,}3} \cong -0{,}23$

$1g = A(0) - 90\% = 0{,}1g$

$0{,}1g = 1\cdot e^{-0{,}23\cdot t} \Rightarrow -0{,}23t = \ln(0{,}1) \Rightarrow t \cong 11\,h$ //

*** APLICAÇÕES EDO 1ª ORDEM**

④ Tendo uma aplicação que rende juros continuamente, após 12 meses, a uma taxa de juros de 10% a.m. e um depósito inicial de R$100,00, qual será o saldo final?

$S = 100{,}00$; taxa $= 10\%$ a.m.

$S(12) = 100\cdot e^{0{,}1\cdot 12} \cong 332{,}01$ reais //

⑤ Um termômetro é removido de uma sala onde a temperatura ambiente é de 70°F e levado para fora, onde a temperatura ... Após meio minuto, o termômetro indica 50°F. Qual será a leitura em $t = 1$ min?

$\frac{1}{T - T_m} = K\,dt \Rightarrow \ln(T - T_m) = Kt + C \Rightarrow T - T_m = Ce^{Kt} \Rightarrow T = T_m + Ce^{Kt}$

$T(0) = 70$
$T_m = 10$
$T(1/2) = 50$ $\Big\}$ $T = T_m + Ce^{Kt}$

$t = 0 \rightarrow 70 = 10 + Ce^{K\cdot 0} \Rightarrow C = 60$

$t = 0{,}5 \rightarrow 50 = 10 + 60\cdot e^{K\cdot 0{,}5} \Rightarrow K = \frac{\ln(2/3)}{0{,}5}$

$t = 1 \rightarrow T(1) = 10 + 60\cdot e^{\frac{\ln(2/3)}{0{,}5}} \cong 36{,}67°F$ //

Portfólio – Semana 7

Portfólio - Semana 7

*** EDO 2ª ORDEM LINEAR COM COEFICIENTES CONSTANTES (Δ=0 e solução geral)**

$y'' - 2y' + y = 3e^{2x} \to \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \to \Delta = 4-4=0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$y_H = C_1 e^{1x} + C_2 x e^{1x} \Rightarrow y_P = Ae^{2x} \to y'_P = 2Ae^{2x} \to y''_P = 4Ae^{2x}$

Substituindo na EDO

$\hookrightarrow 4Ae^{2x} - 2(2Ae^{2x}) + Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow A = 3$

$\therefore y_P = 3e^{2x}$ ⇝ solução particular

$y(x) = y_H + y_P \Rightarrow y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 3e^{2x}$

*** PVI EDO 2ª ORDEM COM COEFICIENTE CONSTANTE (Δ=0)**

$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 3\sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \to \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \to \Delta = 4-4=0 \to \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$y_H = C_1 e^t + C_2 t e^t$

Solução particular $\Rightarrow g(t) = 3\sin(2t)$ $\begin{cases} y_P = A\sin(2t) + B\cos(2t) \\ y'_P = 2A\cos(2t) - 2B\sin(2t) \\ y''_P = -4A\sin(2t) - 4B\cos(2t) \end{cases}$

Substituindo na EDO

$\hookrightarrow -4A\sin(2t) - 4B\cos(2t) + 4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) + A\sin(2t) + B\cos(2t) =$
$= 3\sin(2t) \Rightarrow (-3A - 4B)\sin(2t) + (4A - 3B)\cos(2t) = 3\sin(2t) \Rightarrow \begin{cases} -3A - 4B = 3 \\ 4A - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow B = -12/25$ e $A = -9/25$ $\quad \therefore y_P = -\frac{9}{25}\sin(2t) - \frac{12}{25}\cos(2t)$

Solução geral $\Rightarrow y = C_1 e^t + C_2 t e^t - 9/25 \sin(2t) - 12/25 \cos(2t)$

PVI: $y(0) = 0 \to 0 = C_1 e^0 + C_2 \cdot 0 e^0 - 9/25 \sin(0) - \frac{12}{25}\cos(0) \Rightarrow C_1 = 12/25$

$y' = C_1 e^t + C_2(e^t + te^t) - \frac{18}{25}\cos(2t) + \frac{24}{25}\sin(2t)$

$y'(0) = 0 \to 0 = C_1 \cdot e^0 + C_2(e^0 + 0e^0) - \frac{18}{25}\cos(0) + \frac{24}{25}\sin(0) \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{18}{25} \Rightarrow C_2 = \frac{6}{5}$

$\therefore y = \frac{12}{25}e^t + \frac{6}{5}te^t - \frac{9}{25}\sin(2t) - \frac{12}{25}\cos(2t)$

*** EDO 2ª ORDEM LINEAR COM COEFICIENTE CONSTANTE (Δ>0 e solução geral)**

$y'' + 5y' + 6y = xe^{-5x} \to \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \to \Delta = 1 \to \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = -3$

$y_H = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x}$

Solução particular $\Rightarrow g(x) = xe^{-5x} \to y_P = (Ax+B)e^{\alpha x} = (Ax+B)e^{-5x}$

$y'_P = Ae^{-5x} - 5Axe^{-5x} - 5Be^{-5x} = (A - 5B - 5Ax)e^{-5x}$

$y''_P = -5Ae^{-5x} - 5Ae^{-5x} + 25Axe^{-5x} + 25Be^{-5x} = (-10A + 25B + 25Ax)e^{-5x}$

Substituindo na EDO

$\hookrightarrow (-10A + 25B + 25Ax)e^{-5x} + 5(A - 5B - 5Ax)e^{-5x} + 6(Ax+B)e^{-5x} = xe^{-5x} \Rightarrow$

$\Rightarrow -5A + 6B + 6Ax = x \Rightarrow \begin{cases} -5A + 6B = 0 \\ 6A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1/6$ e $B = 5/36$

$y_P = \left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}\right)e^{-5x}$ ⇝ Solução geral: $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-3x} + \left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}\right)e^{-5x}$

*** PVI EDO 2ª ORDEM COM COEFICIENTE CONSTANTE (Δ>0)**

$\begin{cases} y'' + y' - 2y = t^2 + 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \to \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \to \Delta = 9 \to \lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 1$

$y_H = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

Solução particular: $g(t) = t^2 + 3$ $\begin{cases} y_P = At^2 + Bt + C \\ y'_P = 2At + B \\ y''_P = 2A \end{cases}$

Substituindo na EDO

$\hookrightarrow 2A + 2At + B + (At^2 + Bt + C)2 = t^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} -2At^2 = t^2 \\ 2At - 2Bt = 0 \\ 2A + B - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = -1/2 \\ B = -1/2 \\ C = -9/4 \end{matrix}$

$y_P = -1/2 t^2 - 1/2 t - 9/4$

Solução geral: $y = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 e^t - 1/2 t^2 - 1/2 t - 9/4$ ⇝ $y' = -2C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 e^t - t - 1/2$

PVI: $y(0) = 0 \to 0 = C_1 e^0 + C_2 e^0 - 1/2 \cdot 0^2 - 1/2 \, 0 - 9/4 \Rightarrow C_1 + C_2 = 9/4$

$y'(0) = 0 \to 0 = -2C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 - 0 - 1/2 \to -2C_1 + C_2 = 1/2$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 9/4 \\ -2C_1 + C_2 = 1/2 \end{cases} \to -3C_1 = -7/4 \Rightarrow C_1 = 7/12$; $C_2 = 5/3$

Solução: $y = 7/12 e^{-2t} + 5/3 e^t - 1/2 t^2 - 1/2 t - 9/4$

*** EDO 2ª ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES (Δ<0 e solução geral)**

$y'' - 4y' + 6y = 3x \to \lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0 \to \Delta = -8 \to \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}i$ ↳ $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$

$y_H = C_1 \cdot e^{2x}\cos(\sqrt{2}x) + C_2 e^{2x}\sin(\sqrt{2}x)$

Solução particular: $g(x) = 3x$ $\begin{cases} y_P = Ax + B \\ y'_P = A \\ y''_P = 0 \end{cases}$

Substituindo na EDO

$\hookrightarrow -4A + 6(Ax + B) = 3x \Rightarrow \begin{cases} -4A + 6B = 0 \\ 6A = 3 \end{cases} \Rightarrow A = 1/2$ e $B = 1/3$

$y_P = 1/2 x + 1/3$

Solução geral: $y = C_1 e^{2x}\cos(\sqrt{2}x) + C_2 \cdot e^{2x}\sin(\sqrt{2}x) + 1/2 x + \frac{1}{3}$

↳ $y = y_H + y_P$

*** PVI EDO 2ª ORDEM COM COEFICIENTE CONSTANTE (Δ<0)**

$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = +2 \end{cases} \to \lambda^2 + 1 = 0 \to \Delta = -1$

$\lambda = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{\pm\sqrt{-1}}{2}$ → $\lambda_1 = +i$, $\lambda_2 = -i$

$y_H = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

$y'_H = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$y(0) = 1 \to C_1 \cdot \cos(0) + C_2(\sin(0)) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$ $\quad \Rightarrow y(x) = \cos x - 2\sin x$

$y'(0) = 2 \to -C_1 \sin(0) + C_2\cos(0) = 2 \Rightarrow C_2 = -2$

Portfólio – Semana 8

Portfólio - Semana 8

MÓDULO 2

* MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS (MCI)

① $y'' - 3y + 2y = 2e^{3x} \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1 \rightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 \rightarrow y_H = 2C_1 + C_2$

$y_P = (Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2(Ae^{3x}) = 2e^{3x} \Rightarrow y''_P = 9Ae^{3x}$, $y'_P = 3Ae^{3x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9Ae^{3x} - 3(3Ae^{3x}) + 2Ae^{3x} = 2e^{3x} \Rightarrow A = 1 \longrightarrow y_P = e^{3x}$

$\therefore y(x) = 2C_1 + C_2 + e^{3x}$

② $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}(x) \rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1 \longrightarrow y_H = 2C_1 + C_2$

$y_P = A\operatorname{sen}(x) + B\cos x \Rightarrow (A\operatorname{sen}x + B\cos x)'' - 3(A\operatorname{sen}x + B\cos x)' + 2(A\operatorname{sen}x + B\cos x) = \operatorname{sen}x \Rightarrow$

$\Rightarrow y''_P = -A\operatorname{sen}(x) - B\cos(x)$; $y'_P = A\cos x - B\operatorname{sen}x$

$-A\operatorname{sen}(x) - B\cos(x) - 3A\cos x + 3B\operatorname{sen}x + 2A\operatorname{sen}x + 2B\cos x = \operatorname{sen}x \Rightarrow \begin{cases} 3B + A = 1 \\ 3A - B = 0 \end{cases}$

$A = 1/10$, $B = 3/10$

$y_P = \frac{1}{10}\operatorname{sen}x + \frac{3}{10}\cos x$

$\therefore y(x) = 2C_1 + C_2 + \frac{1}{10}\operatorname{sen}x + \frac{3}{10}\cos x$

* MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS (MVP)

① $y'' + y = \sec x \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$, $\Delta = 0 - 4\cdot 1\cdot 1 = -4 \rightarrow \lambda = \pm i \rightarrow y_H = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x$

$y_P = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \rightarrow y_P = u_1\cos x + u_2\operatorname{sen}x$

$W(y_1, y_2)(x) = \det\begin{vmatrix}\cos x & \operatorname{sen}x \\ -\operatorname{sen}x & \cos x\end{vmatrix} = \cos^2 x - (-\operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$u_1 = -\int \frac{\operatorname{sen}x \sec x}{1}dx = -\int \operatorname{sen}x \frac{1}{\cos x}dx = -\int \operatorname{tg}x\,dx = +\ln\cos(x)$

$u_2 = \int \frac{\cos x \sec x}{1}dx = \int 1\,dx = x \rightarrow y_P = \ln\cos x \cdot C_1 + C_2 \cdot x$

$\therefore y(x) = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen}x + C_1\ln\cos x + C_2\cdot x = (\cos x + \ln\cos x)C_1 + (\operatorname{sen}x + x)C_2$ //

* MÉTODO DE VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS (CONT.)

② $y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x^2} \longrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, $\Delta = 64 - 4\cdot 16 = 0 \rightarrow \lambda = 4$

$y_H = C_1\cdot e^{4x} + C_2 x e^{4x}$

$y_P = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$

$\begin{cases} u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \\ u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = u(x) = \frac{e^{4x}}{x^2} \end{cases} \rightarrow y'_1 = (e^{4x})' = 4e^{4x}$, $y'_2 = (xe^{4x})' = e^{4x} + 4x e^{4x}$

$\begin{cases} u'_1(e^{4x}) + u'_2(xe^{4x}) = 0 \\ u'_1(4e^{4x}) + u'_2(e^{4x} + 4xe^{4x}) = e^{4x}/x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_1 + u'_2 = 0 \\ 4u'_1 + [1 + 4x]u'_2 = 1/x^2 \end{cases}$

$u'_1 = -xu'_2 \rightarrow 4(-xu'_2) + [1 + 4x]u'_2 = 1/x^2 \rightarrow u'_2 = 1/x^2$, $u'_1 = -1/x$

$\int u_2 = -1/x$ e $\int u_1 = -\ln(x) \rightarrow y_P = -\ln(x)\cdot e^{4x} - 1/x + xe^{4x} = e^{4x}[-\ln x - 1]$

$\therefore y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + (-\ln(x) - 1)e^{4x}$ //