

Ao9
95

Carlo Bruni

Gianni Di Pillo

Metodi variazionali per il controllo ottimo



Copyright © MMVII
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneedittrice.it
info@aracneedittrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-1380-9

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione Masson Editoriale Esa: gennaio 1993
I edizione Aracne: ottobre 2007

INDICE

INTRODUZIONE	VII
CAPITOLO 1 – FUNZIONALI SU SPAZI LINEARI: DEFINIZIONI E CONDIZIONI DI MINIMO	
1.1 Introduzione	1
1.2 Spazi lineari normati	1
1.3 Funzionali su spazi lineari	8
1.4 Minimi di funzionali	20
CAPITOLO 2 – MINIMI DI FUNZIONI SU SPAZI A DIMENSIONE FINITA IN PRESENZA DI VINCOLI	
2.1 Introduzione	35
2.2 Minimi di funzioni in presenza di vincoli	36
CAPITOLO 3 – PROGRAMMAZIONE NON LINEARE E CONTROLLO OTTIMO	
3.1 Introduzione	59
3.2 Controllo ottimo di sistemi a tempo discreto	59
3.3 Controllo ottimo in regime stazionario	68
3.4 Ottimizzazione parametrica dei sistemi di controllo	73
CAPITOLO 4 – ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI: PROBLEMA DI LAGRANGE IN ASSENZA DI VINCOLI	
4.1 Introduzione e formulazione del problema	77
4.2 Condizioni necessarie basate sulla variazione prima	79
4.3 Condizioni basate sulla variazione seconda	112
4.4 Condizioni di minimo forte basate sulla funzione eccesso di Weierstrass	124
4.5 Condizioni di minimo globale basate sulla convessità del problema	135
CAPITOLO 5 – ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI: PROBLEMA DI LAGRANGE IN PRESENZA DI VINCOLI	
5.1 Introduzione	139
5.2 Problema di Lagrange con vincoli differenziali di egualanza	139

5.3	Problema di Lagrange con vincoli isoperimetrici	154
5.4	Problema di Lagrange con vincoli di diseguaglianza	161
5.5	Problema di Lagrange con vincoli nel caso convesso	170
CAPITOLO 6 – CALCOLO DELLE VARIAZIONI E CONTROLLO OTTIMO		175
6.1	Introduzione e formulazione del problema	175
6.2	Condizioni necessarie	177
6.3	Condizioni di minimo globale basate sulla convessità del problema	192
6.4	Problema di controllo ottimo con vincoli sulle sole variabili di stato	196
6.5	Considerazioni conclusive	199
CAPITOLO 7 – IL PRINCIPIO DEL MINIMO		201
7.1	Introduzione	201
7.2	Il principio del minimo per problemi di controllo stazionari con stato finale fissato	202
7.3	Estensioni del principio del minimo	213
7.4	Il principio del minimo come condizione di minimo globale per problemi convessi	235
7.5	Cenno ai problemi di controllo ottimo singolari	241
7.6	Considerazioni conclusive	245
CAPITOLO 8 – CONTROLLO OTTIMO DI SISTEMI LINEARI CON INDICE DI COSTO QUADRATICO		247
8.1	Introduzione	247
8.2	Problema di regolazione ottima	248
8.3	Problema di asservimento ottimo	263
8.4	Problema di regolazione con errore finale nullo	271
8.5	Problema di regolazione con controllo limitato	275
CAPITOLO 9 – CONTROLLO A TEMPO MINIMO DI SISTEMI LINEARI		279
9.1	Introduzione	279
9.2	Formulazione del problema e risultati generali	279
9.3	Controllo a tempo minimo di sistemi lineari stazionari	286
BIBLIOGRAFIA		309
INDICE ANALITICO		311

INTRODUZIONE

Il problema del controllo ottimo consiste nella determinazione della legge di controllo che, applicata ad un dato sistema, ne ottimizza il funzionamento rispetto a un criterio di valutazione prefissato. Più in particolare, supposto noto un modello matematico che descrive il comportamento dinamico del sistema da controllare, fissate limitazioni di natura fisica e tecnologica sulle diverse grandezze che caratterizzano il problema, definito un indice che valuti in maniera globale il costo e/o la qualità di funzionamento del sistema stesso sull'intero intervallo di controllo, si desidera determinare l'andamento delle variabili di controllo, delle corrispondenti variabili di stato ed eventualmente la durata dell'intervallo di controllo che soddisfano i vincoli presenti e rendono minimo (o massimo) l'indice prescelto.

L'aspetto rilevante che caratterizza la suddetta impostazione e che la distingue dall'impostazione classica del problema della sintesi dei sistemi di controllo, consiste nella ricerca della migliore soluzione possibile nell'ambito di una classe ammissibile e rispetto a un criterio prefissato. Nell'approccio classico al problema del controllo, vengono infatti assegnate una serie di specifiche che devono essere soddisfatte e che valutano aspetti parziali del funzionamento del sistema, quali la stabilità, la precisione del comportamento in regime permanente, la prontezza del comportamento transitorio, la sensibilità della soluzione rispetto all'azione dei disturbi esterni e delle variazioni parametriche, ecc.; nell'approccio della teoria del controllo ottimo tali specifiche vengono sostituite dall'unica specifica di rendere minimo (o massimo) un indice di costo (o di qualità) che si presume essere in grado di valutare globalmente i diversi aspetti e le diverse esigenze di buon funzionamento e di economicità.

L'ottimizzazione dei sistemi di controllo come metodologia di sintesi presenta, rispetto alle metodologie della impostazione classica, notevoli vantaggi ma anche alcuni svantaggi non trascurabili. Più in particolare, fra i vantaggi, possono essere menzionati i seguenti:

- i) generalità dell'approccio che fornisce una metodologia unificante multidisciplinare in grado di trattare problemi di controllo di sistemi non lineari, non stazionari e a molte variabili, laddove i metodi classici si riferiscono prevalentemente alla classe dei sistemi lineari, stazionari, ad un ingresso e una uscita;
- ii) ottimalità della soluzione cercata nell'ambito di una infinità di soluzioni ammissibili;
- iii) determinazione della soluzione ottima in forma chiusa e corrispondente a strutture realizzabili in retroazione per particolari classi di problemi di notevole interesse applicativo;

- iv) determinazione di una soluzione di riferimento rispetto a soluzioni non ottimali per classi di problemi più complesse, per le quali l'implementazione della soluzione ottima può risultare particolarmente onerosa o difficilmente realizzabile.

Alcuni svantaggi che caratterizzano l'approccio del controllo ottimo sono:

- i) problematicità della scelta di un indice di costo in grado di sintetizzare le diverse esigenze che un sistema di controllo deve soddisfare;
- ii) difficoltà di tener conto e di valutare in maniera diretta i diversi aspetti di funzionamento che pure sono di interesse applicativo e che risultano difficilmente disaggregabili;
- iii) struttura del sistema di controllo cui si perviene, che in generale non corrisponde a un sistema a catena chiusa e che quindi può risultare eccessivamente sensibile alle perturbazioni non considerate nella formulazione del problema;
- iv) difficoltà di calcolare la soluzione ottima per problemi più complessi o addirittura di poter stabilire l'esistenza della soluzione ottima o l'ottimalità delle soluzioni che si deducono utilizzando condizioni di ottimo solamente necessarie.

Per la sua stessa formulazione, il problema del controllo ottimo dei sistemi a tempo continuo risulta essere dal punto di vista matematico un problema di minimo di un funzionale (cioè di una funzione definita su uno spazio di funzioni) in presenza di vincoli (differenziali, istantanei, integrali) di egualanza e/o di disegualanza. L'ambito naturale della matematica in cui un tale problema trova collocazione è pertanto quello del calcolo variazionale. In alcuni casi, e in particolare nel caso di sistemi a tempo discreto, il problema del controllo ottimo si riduce al problema finito dimensionale di minimo di una funzione in presenza di vincoli. Da questo punto di vista, il capitolo della matematica che risulta di particolare interesse è quello della programmazione non lineare. Per tali motivi nel testo viene dedicato uno spazio adeguato allo studio dei risultati fondamentali sia della programmazione non lineare sia del calcolo variazionale.

Pur essendo disponibili i numerosi e organici risultati della programmazione non lineare e del calcolo variazionale, la teoria del controllo ottimo non ha trovato adeguato sviluppo e applicazione fino alla fine degli anni cinquanta, e infatti, fino a quella data, sono reperibili in letteratura pochi esempi di trattazione di problemi di controllo a tempo minimo per sistemi del secondo o del terzo ordine. Quando tuttavia lo sviluppo delle applicazioni spaziali ha posto in termini economici l'esigenza di prestazioni più spinte per i sistemi di controllo e quando parallelamente lo sviluppo della tecnologia e dei mezzi di calcolo automatico ha offerto gli strumenti per affrontare problemi numerici precedentemente non risolubili, lo sviluppo della teoria del controllo ottimo è stato rapido e i settori in cui essa ha trovato applicazione sono stati i più disparati. A questo proposito occorre ricordare che lo stesso periodo ha visto lo sviluppo e l'affermazione della teoria matematica dei sistemi come linguaggio di tipo interdisciplinare per la descrizione e lo studio dei sistemi fisici dinamici, naturali o artificiali: la teoria del controllo ottimo, utilizzando l'impostazione generale propria della teoria dei sistemi, ne ha mutuato l'interdisciplinarietà e la larga valenza applicativa.

Nei vari capitoli di questo volume viene presentata una trattazione sistematica delle condizioni necessarie di ottimalità, che costituiscono lo strumento per la determinazione degli estremali dei problemi e cioè dei candidati a fornire le soluzioni ottime; inoltre vengono messe in evidenza nei diversi problemi le ipotesi di convessità sotto le quali le condizioni necessarie diventano anche sufficienti e consentono quindi di determinare direttamente le soluzioni ottime. Minore attenzione è riservata allo studio delle condizioni sufficienti di ottimalità per la minore rilevanza che esse presentano nella ricerca delle soluzioni ottime e per la complessità che le caratterizza. Non viene invece trattato in generale il problema dell'esistenza delle soluzioni ottime sia perché esso è solo parzialmente risolto, sia perché, nei casi in cui sono disponibili risultati, la verifica delle ipotesi relative risulta particolarmente onerosa, sia perché ci si può aspettare che i problemi di controllo ottimo considerati nella pratica siano ben formulati e quindi ammettano soluzione.

Non viene inoltre considerato l'approccio numerico e algoritmico al problema dell'ottimizzazione, che pure presenta notevole interesse, soprattutto dal punto di vista applicativo, in quanto la consistenza dei risultati attualmente disponibili in tale area richiederebbe una trattazione autonoma.

Il volume è strutturato in nove capitoli il cui contenuto è qui di seguito brevemente delineato.

Il Capitolo 1 è dedicato a richiamare i concetti di spazio lineare normato e di funzionale nonché a fornire le condizioni generali di minimo di un funzionale.

Nel Capitolo 2 si studia più in particolare il problema di minimo di una funzione su spazi a dimensione finita in presenza di vincoli (problema di programmazione non lineare), mentre nel successivo Capitolo 3 vengono presentati alcuni problemi di controllo ottimo che sono riconducibili a problemi di programmazione non lineare e cioè i problemi a tempo discreto, quelli in regime permanente e quelli di tipo parametrico.

I Capitoli 4 e 5 sono dedicati allo studio del calcolo variazionale; più in particolare nel Capitolo 4 viene trattato il problema di Lagrange in assenza di vincoli, mentre nel Capitolo 5 lo stesso problema viene trattato nel caso di vincoli differenziali di eguaglianza, di vincoli isoperimetrici e di vincoli di diseguaglianza.

Nel Capitolo 6 viene presentata una classe di problemi di controllo ottimo che trova collocazione nell'ambito del calcolo variazionale classico e per la quale perciò risultati di interesse sono deducibili dall'applicazione della teoria sviluppata nei due capitoli precedenti.

Il Capitolo 7 è dedicato allo studio del principio del minimo, che costituisce il risultato di maggiore generalità, sviluppato in tempi più recenti nella linea del calcolo variazionale classico, per affrontare problemi di controllo ottimo con vincoli sulle variabili di controllo.

I successivi Capitoli 8 e 9 sono relativi allo studio di due classi di problemi di controllo ottimo per sistemi lineari. Nel Capitolo 8 si considera il caso di indice di costo di tipo quadratico e in esso rientrano i problemi di regolazione, di asservimento e di minima energia, che vengono risolti utilizzando condizioni necessarie e sufficienti. Nel Capitolo 9 si considera il problema di tempo minimo, con ri-

ferimento al quale vengono preliminarmente dimostrati alcuni risultati generali di interesse, fra i quali quello dell'esistenza di soluzioni ottime.

Il testo è stato preparato utilizzando l'esperienza e il materiale didattico relativo a un corso avanzato di teoria del controllo, svolto per diversi anni dagli Autori e indirizzato agli studenti della Facoltà di Ingegneria. Esso presuppone la padronanza dei contenuti dei corsi di Analisi Matematica nonché la conoscenza degli elementi di base della Teoria dei Sistemi e della Teoria del Controllo.

Il testo può costituire un utile riferimento non solo per lo studio della teoria del controllo ottimo e delle relative applicazioni, ma anche per tutte le problematiche che comportano la minimizzazione di funzioni o di funzionali, problematiche che occupano uno spazio rilevante nel contesto dell'ingegneria e più in generale della matematica applicata.

Capitolo 1

Funzionali su spazi lineari: definizioni e condizioni di minimo

1.1 INTRODUZIONE

I problemi di ottimizzazione del controllo che verranno trattati in questo testo si riconducono a problemi di minimo di funzioni o funzionali su spazi lineari normati o su sottoinsiemi di tali spazi.

In questo capitolo si richiameranno sinteticamente le nozioni di base necessarie per formulare il suddetto problema di minimo e per fornire le relative definizioni e condizioni.

1.2 SPAZI LINEARI NORMATI

Definizione 1.1 - Si consideri un insieme Z di elementi z , su cui sia definita una operazione di somma ed una operazione di moltiplicazione per un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, le quali soddisfino gli usuali assiomi delle suddette operazioni; l'insieme Z si definisce *spazio lineare (reale)* se esso è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di moltiplicazione:

$$z' + z'' = z \in Z \quad \forall z', z'' \in Z$$

$$\alpha z \in Z \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall z \in Z$$

□

Esempio 1.1 - Evidentemente lo spazio euclideo \mathbb{R}^{ν} , è uno spazio lineare con la usuale definizione di somma tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare reale.

Esempio 1.2 - L'insieme delle matrici di dimensioni fissate è uno spazio lineare mentre l'insieme delle matrici quadrate non singolari non è uno spazio lineare.

Esempio 1.3 - L'insieme delle funzioni z , definite e limitate sull'intervallo $[t_i, t_f]$, tali cioè che, per ciascuna z , esiste un numero positivo M per il quale risulti:

$$|z(t)| \leq M \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

costituisce uno spazio lineare. L'insieme delle funzioni superiormente limitate da uno stesso valore fissato non è invece uno spazio lineare.

Esempio 1.4 - L'insieme $C^k(D)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ delle funzioni definite e con derivate parziali continue fino all'ordine k , sull'insieme $D \subset \mathbb{R}^\nu$ è uno spazio lineare.

Nel seguito verrà indicato con $\bar{C}^k[t_i, t_f]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ l'insieme delle funzioni z definite sull'intervallo $[t_i, t_f]$ con derivate continue fino all'ordine $k-1$ e con derivata di ordine k che può presentare punti isolati di discontinuità di prima specie in tale intervallo; si adotterà la convenzione che, nel generico punto \bar{t} di discontinuità sia:

$$\frac{d^k z}{dt^k} \Big|_{\bar{t}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{d^k z}{dt^k} \Big|_{\bar{t} + \Delta} = \frac{d^k z}{dt^k} \Big|_{\bar{t}^+}$$

Evidentemente $\bar{C}^k[t_i, t_f]$ è uno spazio lineare.

Analogamente $\bar{C}^k(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots$ è uno spazio lineare.

Esempio 1.5 - Sia $S[t_i, t_f]$ l'insieme delle funzioni s a gradino, così definite:

$$s(t) = \begin{cases} c_j & \forall t \in I_j, j = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \forall t \notin \bigcup_{j=1}^m I_j \end{cases}$$

dove $\{I_j\}$ è una collezione finita di intervalli (aperti, chiusi, semiaperti o costituiti da un unico punto) contenuti in $[t_i, t_f]$ e tra loro disgiunti e dove $c_j \in \mathbb{R}$. Ovviamente $S[t_i, t_f]$ è uno spazio lineare.

Considerato un intervallo $[t_i, t_f]$, sia z una funzione per la quale esista una successione $\{s^{(k)}\} \subset S[t_i, t_f]$ tale che, per ogni $t \in [t_i, t_f]$ ad eccezione di un eventuale insieme di misura nulla, risulti:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s^{(k)}(t) = z(t)$$

La funzione z si dice allora misurabile su $[t_i, t_f]$.

L'insieme $\mathcal{M}[t_i, t_f]$ delle funzioni misurabili su $[t_i, t_f]$ è uno spazio lineare.

In maniera analoga possono definirsi gli spazi lineari $S(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ delle funzioni a gradino e delle funzioni misurabili sull'asse reale.

Definizione 1.2 - Un insieme di elementi Z' si dice *sottospazio lineare* rispetto allo spazio lineare Z se risulta $Z' \subset Z$ e se Z' è esso stesso uno spazio lineare. \square

Esempio 1.6 - Si comprende facilmente che:

$$C^k[t_i, t_f] \subset \bar{C}^k[t_i, t_f] \subset C^{k-1}[t_i, t_f] \dots \subset \bar{C}^0[t_i, t_f] \subset \mathcal{M}[t_i, t_f]$$

e pertanto si può affermare che $C^k[t_i, t_f]$ è un sottospazio lineare rispetto a $\bar{C}^k[t_i, t_f]$, che quest'ultimo lo è rispetto a $C^{k-1}[t_i, t_f]$ e così via, fino ad affermare che

$C^k[t_i, t_f]$ e $\bar{C}^k[t_i, t_f]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sono tutti sottospazi lineari rispetto a $\mathcal{M}[t_i, t_f]$.

Definizione 1.3 - Considerati gli elementi $z^{(k)} \in \mathcal{Z}$, $k = 1, 2, \dots$ in numero finito o infinito, essi si dicono *linearmente indipendenti* se per una loro combinazione lineare si ha che:

$$\sum_k \alpha_k z^{(k)} = 0 \text{ se e solo se } \alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad \square$$

Definizione 1.4 - Considerati gli elementi $z^{(k)} \in \mathcal{Z}$, $k = 1, 2, \dots$ in numero finito o infinito, si dice *sottospazio lineare da essi generato* il sottoinsieme di \mathcal{Z} dato da $\{z \in \mathcal{Z} : z = \sum_k \alpha_k z^{(k)}, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. \square

Definizione 1.5 - Considerati gli elementi $z^{(k)} \in \mathcal{Z}$, $k = 1, 2, \dots$ in numero finito o infinito, linearmente indipendenti, essi costituiscono una *base* per \mathcal{Z} se il sottospazio da essi generato coincide con \mathcal{Z} . Si definisce *dimensione* dello spazio lineare \mathcal{Z} il numero di elementi che ne costituisce una base. Uno spazio lineare verrà detto a *dimensione finita* o *infinita* a seconda che tale numero sia finito o infinito. \square

Per uno spazio lineare non è univocamente definita una base, ma è univocamente definita la sua dimensione.

Esempio 1.7 - Lo spazio euclideo \mathbb{R}^ν ha dimensione ν e una sua base è costituita dai ν versori di un riferimento cartesiano.

Esempio 1.8 - Lo spazio delle matrici di dimensioni $\nu_1 \times \nu_2$ ha dimensione $\nu_1 \nu_2$ e una sua base è costituita dalle $\nu_1 \nu_2$ matrici aventi diverso da zero il solo elemento della riga i -esima e della colonna k -esima, al variare di i e di k .

Esempio 1.9 - Lo spazio delle funzioni definite sull'intervallo finito $[t_0, t_\nu)$ e costanti nei sottointervalli $[t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, \dots, \nu$ ha dimensione ν e una sua base è costituita dalle ν funzioni, ciascuna delle quali assume valore diverso da zero e costante nel solo sottointervallo $[t_{i-1}, t_i)$ al variare di i .

Esempio 1.10 - Gli spazi $C^k[t_i, t_f]$, $\bar{C}^k[t_i, t_f]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $S[t_i, t_f]$, $\mathcal{M}[t_i, t_f]$ sono tutti a dimensione infinita.

Definizione 1.6 - Considerato uno spazio lineare \mathcal{Z} , si definisce *norma* e si indica con $\|\cdot\|$, una funzione che associa ad ogni elemento di \mathcal{Z} un numero reale non negativo, che gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \|z\| &= 0 \text{ se e solo se } z = 0 \\ \|z' + z''\| &\leq \|z'\| + \|z''\| \quad \forall z', z'' \in \mathcal{Z} \\ \|\alpha z\| &= |\alpha| \|z\| \quad \forall z \in \mathcal{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Uno spazio lineare è detto *normato* se su di esso è definita una norma. \square

Evidentemente la definizione di norma estende a generici spazi lineari il concetto di lunghezza di un vettore dello spazio euclideo e di conseguenza anche il concetto di distanza fra due punti dello spazio euclideo.

Definizione 1.7 - Dato uno spazio lineare \mathcal{Z} , due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ si dicono tra loro *equivalenti* se esistono due costanti positive α, β per le quali risulta:

$$\alpha\|z\|_1 \leq \|z\|_2 \leq \beta\|z\|_1 \quad \forall z \in \mathcal{Z}$$

□

Il significato intuitivo di equivalenza fra norme consiste nel fatto che ogni proprietà o risultato che può essere ottenuto in uno spazio lineare utilizzando una certa norma, sussiste anche utilizzando una qualunque altra norma equivalente.

Osservazione 1.8 - Si può dimostrare che per uno spazio lineare a dimensione finita, tutte le norme sono tra loro equivalenti, per questo nel seguito non si daranno particolari specificazioni sulla scelta della norma per spazi a dimensione finita.

Esempio 1.11 - Nello spazio euclideo \mathbb{R}^ν la lunghezza di un vettore z costituisce una norma in quanto la funzione:

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{\nu} z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

soddisfa le proprietà caratteristiche della norma. Un'altra possibile definizione di norma in \mathbb{R}^ν è:

$$\|z\| = \max_i \{|z_i|\}$$

Esempio 1.12 - Possibili norme sullo spazio delle matrici di dimensioni $\nu_1 \times \nu_2$ sono:

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{\nu_1} \sum_{k=1}^{\nu_2} z_{ik}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|z\| = \max_{i,k} \{|z_{ik}|\}$$

Esempio 1.13 - Per gli spazi delle funzioni vettoriali a ν componenti $C^k[t_i, t_f]$, $\bar{C}^k[t_i, t_f]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ le seguenti funzioni possono essere assunte come norme:

$$\begin{aligned} \|z\| &= \int_{t_i}^{t_f} \|z(t)\| dt \\ \|z\| &= \left(\int_{t_i}^{t_f} \|z(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\|z\| = \sup_{t \in [t_i, t_f]} \|z(t)\| \tag{1.2}$$

Negli stessi spazi per $k = 1, 2, \dots$ si può anche assumere la norma:

$$\|z\| = \sup_{t \in [t_i, t_f]} \|z(t)\| + \sup_{t \in [t_i, t_f]} \|\dot{z}(t)\| \quad (1.3)$$

Esempio 1.14 - Negli spazi delle funzioni vettoriali a ν componenti $C^k(\mathbb{R})$, $\bar{C}^k(\mathbb{R})$, $k = 0, 1, 2, \dots$ con $\|z(t)\|$ limitata su \mathbb{R} si può assumere la norma:

$$\|z\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t)\|$$

Se sugli stessi spazi si assume che anche $\|\dot{z}(t)\|$ sia limitata su \mathbb{R} , si può assumere la norma:

$$\|z\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t)\| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\dot{z}(t)\|$$

In generale non risultano però limitate le norme di tipo integrale considerate nell'esempio precedente.

Nel seguito, quando si considereranno spazi di funzioni definite sull'asse reale, si ammetterà tacitamente che sia verificata l'ipotesi di limitatezza su $\|z(t)\|$ ed eventualmente anche su $\|\dot{z}(t)\|$, così che risultino ben definite le norme del tipo (1.2) e (1.3).

Esempio 1.15 - Negli spazi delle funzioni vettoriali a ν componenti $M[t_i, t_f]$ e $M(\mathbb{R})$ con $\|z(t)\|$ limitata si può assumere una norma del tipo (1.2).

Definizione 1.9 - Considerato uno spazio lineare normato Z , una successione $\{z^{(k)}\}$ di elementi $z^{(k)} \in Z$ si dice *convergente (fortemente)* a \bar{z} se $\bar{z} \in Z$ e se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{(k)} - \bar{z}\| = 0$$

□

Esempio 1.16 - Si consideri la successione $\{z^{(k)}\}$ di funzioni così definite:

$$z^{(k)}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [-1, 0) \\ kt & \forall t \in [0, 1/k] \\ 1 & \forall t \in [1/k, 1] \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Tale successione tende alla funzione:

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [-1, 0) \\ 1 & \forall t \in [0, 1] \end{cases}$$

che nell'intervallo $[-1, 1]$ è evidentemente limitata e che presenta una discontinuità nell'origine. Pertanto la successione considerata è convergente sullo spazio delle funzioni limitate con la norma (1.1) mentre non è convergente sullo spazio $C^0[-1, 1]$ con la stessa norma in quanto $\bar{z} \notin C^0[-1, 1]$.

Definizione 1.10 - Considerato uno spazio lineare normato \mathcal{Z} , una successione $\{z^{(k)}\}$ di elementi $z^{(k)} \in \mathcal{Z}$ si dice *successione di Cauchy* se risulta:

$$\lim_{h,k \rightarrow \infty} \|z^{(h)} - z^{(k)}\| = 0 \quad \square$$

Osservazione 1.11 - Ogni successione convergente è una successione di *Cauchy* ma non è vero il viceversa.

Esempio 1.17 - La successione considerata nell'Esempio 1.16 è di *Cauchy* in ogni spazio su cui essa può essere definita, ma come già messo in evidenza, essa non è necessariamente convergente.

Definizione 1.12 - Considerato uno spazio lineare normato \mathcal{Z} e un elemento $z^0 \in \mathcal{Z}$, si definisce *intorno* di z^0 di raggio $\rho > 0$, l'insieme:

$$S(z^0, \rho) = \{z \in \mathcal{Z}: \|z - z^0\| < \rho\} \quad \square$$

Utilizzando le definizioni di norma e di intorno è possibile estendere al caso di spazi lineari i concetti usuali in \mathbb{R}^n di insiemi aperti, chiusi, limitati.

Definizione 1.13 - Considerato uno spazio lineare normato \mathcal{Z} e un insieme $D \subset \mathcal{Z}$ un elemento $z^0 \in D$ si dice *interno* a D se esiste un intorno $S(z^0, \rho) \subset D$; un elemento z^0 si dice di *frontiera* per D se ogni intorno $S(z^0, \rho)$ contiene elementi di \mathcal{Z} che non appartengono a D ed elementi di D .

Un insieme $D \subset \mathcal{Z}$ si dice *aperto* se ogni suo elemento è interno a D . Un insieme $D \subset \mathcal{Z}$ si dice *chiuso* se il suo complemento $\mathcal{Z} \setminus D$ è aperto. Si dice *frontiera* di D l'insieme ∂D dei punti di frontiera di D . Si definisce *chiusura* di D l'insieme $\overline{D} = D \cup \partial D$; si definisce *interno* di D l'insieme $\overset{\circ}{D} = D \setminus \partial D$. \square

Esempio 1.18 - Si consideri lo spazio delle funzioni limitate sull'intervallo $[t_i, t_f]$ dotato della norma (1.2); l'insieme $D_1 = \{z \in \mathcal{Z}: \|z\| \leq 1\}$ è chiuso mentre l'insieme $D_2 = \{z \in \mathcal{Z}: \|z\| < 1\}$ è aperto.

Esempio 1.19 - Sia $C^0[t_i, t_f]$ dotato della norma (1.2); l'insieme $D = \{z \in C^0[t_i, t_f]: z(t_i) = z(t_f) = 0\}$ è chiuso poiché coincide con la propria frontiera.

Definizione 1.14 - Un insieme D dello spazio lineare normato \mathcal{Z} si dice *limitato* se esiste un numero M tale che:

$$\|z\| < M, \quad \forall z \in D \quad \square$$

Esempio 1.20 - Gli insiemi D_1 e D_2 dell'Esempio 1.18 sono limitati mentre l'insieme D dell'Esempio 1.19 non è limitato.

Definizione 1.15 - Un insieme D dello spazio lineare normato \mathcal{Z} si dice *compatto* se ogni successione di elementi di D contiene una sottosuccessione che converge a un elemento di D . \square

Osservazione 1.16 - Si può dimostrare che un insieme compatto è chiuso e limitato mentre il viceversa è vero solo in spazi a dimensione finita. Infatti in uno spazio a dimensione finita ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.

Esempio 1.21 - Si consideri lo spazio \mathcal{Z} delle funzioni scalari definite su $[t_i, t_f]$ e sviluppabili in serie rispetto alla famiglia ortonormale $\{\varphi^{(k)}\}$:

$$\mathcal{Z} = \{z: z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi^{(k)}(t), \forall t \in [t_i, t_f]\}$$

Su tale spazio si definisca la norma (1.1). Si consideri l'insieme:

$$D = \{z \in \mathcal{Z}: \|z\| \leq 1\}$$

L'insieme D è chiuso e limitato ma non è compatto. Infatti, considerata la successione $\{\varphi^{(k)}\}$ di elementi di D , ogni sua sottosuccessione $\{\varphi^{(k_i)}\}$ non è una successione di Cauchy, in quanto:

$$\lim_{k_i, k_j \rightarrow \infty} \|\varphi^{(k_i)} - \varphi^{(k_j)}\| = \sqrt{2}$$

e quindi non è convergente.

Allo scopo di verificare che tale situazione deriva dal fatto che \mathcal{Z} è di dimensione infinita, si consideri lo spazio lineare \mathcal{Z}' delle funzioni sviluppabili in un numero finito ν di funzioni ortonormali $\{\varphi^{(k)}\}$:

$$\mathcal{Z}' = \{z: z(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \varphi^{(k)}(t), \forall t \in [t_i, t_f]\}$$

Ovviamente \mathcal{Z}' ha dimensione ν . Su tale spazio, normato secondo la (1.1), si consideri ancora l'insieme:

$$D = \{z \in \mathcal{Z}': \|z\| \leq 1\}$$

L'insieme D è chiuso e limitato, e quindi è compatto. In effetti, in questo caso, ogni successione costituita da elementi $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, \nu$, deve contenere infinite volte almeno uno di tali elementi $\varphi^{(\bar{k})}$; è pertanto possibile estrarre la sottosuccessione costituita dall'unico elemento $\varphi^{(\bar{k})}$ ripetuto infinite volte che evidentemente converge a $\varphi^{(\bar{k})} \in D$.

Definizione 1.17 - Un insieme D di uno spazio lineare \mathcal{Z} si dice *convesso* se risulta:

$$\alpha z' + (1 - \alpha) z'' \in D \quad \forall z', z'' \in D, \forall \alpha \in [0, 1]$$

□

Esempio 1.22 - Gli insiemi D_1 e D_2 dell'Esempio 1.18 e quello D dell'Esempio 1.19 sono convessi. Nello stesso spazio normato dell'Esempio 1.18 l'insieme $D_3 = \{z \in \mathcal{Z}: 0.5 \leq \|z\| \leq 1\}$ non è convesso (si assuma ad esempio $z'(t) = -1$, $z''(t) = 1$, $\alpha = 0.5$).

1.3 FUNZIONALI SU SPAZI LINEARI

Definizione 1.18 - Considerato uno spazio lineare \mathcal{Z} e un suo insieme D , un funzionale $J: D \rightarrow \mathbb{R}$ è una legge che associa ad ogni elemento di D un elemento di \mathbb{R} . \square

Ovviamente una funzione (definita su un insieme di \mathbb{R}^{ν}) è un caso particolare di funzionale.

Esempio 1.23 - Una qualsiasi norma definita su uno spazio lineare è un funzionale.

Definizione 1.19 - Un funzionale $J: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *lineare* se:

$$J(\alpha_1 z' + \alpha_2 z'') = \alpha_1 J(z') + \alpha_2 J(z'') \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall z', z'' \in \mathcal{Z} \quad \square$$

Definizione 1.20 - Considerati gli spazi lineari \mathcal{Z}, \mathcal{W} , un funzionale $J: \mathcal{Z} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *bilineare*, se:

$$\begin{aligned} J(\alpha_1 z' + \alpha_2 z'', w) &= \alpha_1 J(z', w) + \alpha_2 J(z'', w) & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ J(z, \alpha_1 w' + \alpha_2 w'') &= \alpha_1 J(z, w') + \alpha_2 J(z, w'') & \forall z', z'', z \in \mathcal{Z} \\ & & \forall w', w'', w \in \mathcal{W} \end{aligned} \quad \square$$

Definizione 1.21 - Un funzionale $J: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *quadratico* se:

$$J(z) = \overline{J}(z, z) \quad \forall z \in \mathcal{Z}$$

dove $\overline{J}: \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ è bilineare. \square

Definizione 1.22 - Un funzionale quadratico $J: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *semidefinito positivo* se risulta:

$$J(z) \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}$$

Esso si dice *definito positivo* se la precedente relazione sussiste con il segno di egualianza solo per $z = 0$.

Inoltre se \mathcal{Z} è uno spazio lineare normato, un funzionale quadratico $J: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *fortemente positivo* se esiste un numero $k > 0$, tale che:

$$J(z) \geq k \|z\|^2 \quad \forall z \in \mathcal{Z} \quad \square$$

Osservazione 1.23 - Un funzionale (quadratico) fortemente positivo è definito positivo ma in generale non è vero il viceversa. Tuttavia nel caso in cui \mathcal{Z} sia uno spazio a dimensione finita le due proprietà si implicano a vicenda.

Ad esempio se $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^{\nu}$ un funzionale quadratico definito positivo ha la forma:

$$J(z) = z^T R z$$

in cui R è una matrice simmetrica definita positiva. Indicata con Λ la matrice diagonale degli autovalori di R , che sono tutti positivi, esiste una trasformazione

non singolare e ortogonale T , cioè tale che $T^T = T^{-1}$, per la quale risulta:

$$J(z) = z^T T \Lambda T^T z = v^T \Lambda v = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i v_i^2 \geq \lambda_m v^T v = \lambda_m \|z\|^2$$

in cui $\lambda_m > 0$ è il minimo autovalore di R e in cui si è posto $v = T^T z$.

Definizione 1.24 - Considerato un insieme convesso $D \subset \mathcal{Z}$, un funzionale $J: D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *convesso* in D se risulta:

$$J[\alpha z' + (1 - \alpha)z''] \leq \alpha J(z') + (1 - \alpha)J(z'') \quad \forall z', z'' \in D, \forall \alpha \in [0, 1]$$

Esso si dice *strettamente convesso* in D se la precedente diseguaglianza è soddisfatta in senso stretto per $z' \neq z''$ e per $\alpha \in (0, 1)$. \square

Osservazione 1.25 - Nel caso in cui $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^\nu$ e in cui D è un insieme convesso di \mathbb{R}^ν si ha che:

i) se $J \in C^1(D)$ la convessità di J su D equivale alla proprietà che:

$$J(z) \geq J(z') + \frac{dJ}{dz}\Big|_{z'}(z - z') \quad \forall z, z' \in D$$

e se la diseguaglianza sussiste in senso stretto per $z \neq z'$, allora J è strettamente convesso su D ;

ii) se $J \in C^2(D)$ la convessità di J su D equivale alla proprietà che:

$$(z - z')^T \frac{d^2 J}{dz^2}\Big|_{z'}(z - z') \geq 0 \quad \forall z, z' \in D$$

e se la diseguaglianza sussiste in senso stretto per $z \neq z'$, allora J è strettamente convesso su D ; si osservi anche che, in base al precedente risultato ii), si può affermare che la convessità di J su D è garantita dalla proprietà che la matrice Hessiana $\frac{d^2 J}{dz^2}$ sia semidefinita positiva su D (definita positiva nel caso di convessità stretta).

Esempio 1.24 - Se $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^\nu$, la funzione:

$$J(z) = z^T Q z + c^T z + a \quad Q \geq 0$$

è convessa in \mathbb{R}^ν . Se la matrice Q è definita positiva ($Q > 0$) J è strettamente convessa.

Esempio 1.25 - Considerato il sistema lineare:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t_i) = 0 \quad u \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$$

il funzionale:

$$J(u) = \|x(t_f)\| = \left\| \int_{t_i}^{t_f} e^{A(t_f-t)} Bu(t) dt \right\|$$

è convesso ma non strettamente convesso in $\bar{C}^0[t_i, t_f]$. Infatti, considerati due ingressi arbitrari $u', u'' \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$, siano $x'(t_f)$ ed $x''(t_f)$ i corrispondenti stati finali. Sia inoltre $x(t_f)$ lo stato finale corrispondente all'ingresso $\alpha u' + (1 - \alpha)u''$ per $\alpha \in [0, 1]$. Evidentemente, per la linearità del sistema si ha:

$$x(t_f) = \alpha x'(t_f) + (1 - \alpha)x''(t_f)$$

È facilmente verificabile che:

$$\|x(t_f)\| \leq \alpha \|x'(t_f)\| + (1 - \alpha) \|x''(t_f)\| \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

e quindi il funzionale J è convesso.

Inoltre, tenuto conto della trasformazione integrale fra ingresso e stato finale, si ha che possono esistere coppie di ingressi $u' \neq u''$ e valori di $\alpha \in (0, 1)$ per i quali risulta:

$$\|x(t_f)\| = \alpha \|x'(t_f)\| + (1 - \alpha) \|x''(t_f)\|$$

In effetti si può verificare facilmente che per una coppia di ingressi tali che $x'(t_f) = x''(t_f)$ la precedente eguaglianza è verificata per ogni $\alpha \in (0, 1)$ e pertanto il funzionale J non è strettamente convesso.

Definizione 1.26 - Un funzionale J definito su uno spazio lineare normato Z si dice *continuo* in $\bar{z} \in Z$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon(\bar{z}) > 0$, tale che risulti:

$$|J(z) - J(\bar{z})| < \varepsilon \quad \forall z \in S(\bar{z}, \delta_\varepsilon(\bar{z}))$$

Se J è continuo $\forall \bar{z} \in D \subset Z$, il funzionale si dice continuo in D . Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$, tale che:

$$|J(z) - J(\bar{z})| < \varepsilon \quad \forall z \in S(\bar{z}, \delta_\varepsilon), \forall \bar{z} \in D$$

J si dice *uniformemente continuo* in D .

□

Esempio 1.26 - Nello spazio \mathbb{R}^ν con la norma euclidea si consideri la funzione:

$$J(z) = c^T z \quad c \in \mathbb{R}^\nu$$

Tenendo presente la diseguaglianza di Schwarz:

$$\left| \sum_{i=1}^{\nu} z'_i z''_i \right| \leq \left[\sum_{i=1}^{\nu} (z'_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{\nu} (z''_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|z'\| \cdot \|z''\|$$

risulta:

$$|J(z) - J(\bar{z})| = \left| \sum_{i=1}^{\nu} c_i(z_i - \bar{z}_i) \right| \leq \|c\| \cdot \|z - \bar{z}\|$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, posto $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\|c\|}$, si ha:

$$|J(z) - J(\bar{z})| < \varepsilon \quad \forall z \in S(\bar{z}, \delta_\varepsilon)$$

Poiché ciò si verifica $\forall \bar{z} \in \mathbb{R}^\nu$ e poiché δ_ε è indipendente da \bar{z} , la funzione è uniformemente continua in \mathbb{R}^ν .

Esempio 1.27 - Nello spazio delle funzioni scalari limitate sull'intervallo $[t_i, t_f]$, si consideri il funzionale:

$$J(z) = \|z\|^2 = \int_{t_i}^{t_f} z^2(t) dt$$

Tenendo presente la diseguaglianza di Schwarz nel caso di funzioni:

$$\int_{t_i}^{t_f} |z'(t)| \cdot |z''(t)| dt \leq \left(\int_{t_i}^{t_f} z'^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_i}^{t_f} z''^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|z'\| \cdot \|z''\|$$

risulta:

$$\begin{aligned} |J(z) - J(\bar{z})| &= \left| \int_{t_i}^{t_f} [z^2(t) - \bar{z}^2(t)] dt \right| \\ &\leq \int_{t_i}^{t_f} |z(t) + \bar{z}(t)| \cdot |z(t) - \bar{z}(t)| dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_f} |z(t)| |z(t) - \bar{z}(t)| dt + \int_{t_i}^{t_f} |\bar{z}(t)| |z(t) - \bar{z}(t)| dt \\ &\leq (\|z\| + \|\bar{z}\|) \|z - \bar{z}\| = (\|z - \bar{z} + \bar{z}\| + \|\bar{z}\|) \|z - \bar{z}\| \\ &\leq (\|z - \bar{z}\| + 2\|\bar{z}\|) \|z - \bar{z}\| \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, posto: $\delta_\varepsilon(\bar{z}) = \sqrt{\|\bar{z}\|^2 + \varepsilon} - \|\bar{z}\|$, si ha:

$$|J(z) - J(\bar{z})| < \varepsilon \quad \forall z \in S(\bar{z}, \delta_\varepsilon(\bar{z}))$$

Poiché ciò si verifica per ogni \bar{z} nello spazio delle funzioni considerato il funzionale è continuo (ma non uniformemente) in tale spazio.

Esempio 1.28 - Nello spazio $C^1[t_i, t_f]$ delle funzioni a ν componenti dotato della norma (1.3) si consideri il funzionale:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} L[z(t), \dot{z}(t)] dt$$

in cui $L \in C^1(\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu)$.

Si ha:

$$\begin{aligned} |J(z) - J(\bar{z})| &\leq \int_{t_i}^{t_f} |L[z(t), \dot{z}(t)] - L[\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)]| dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_f} \left\| \frac{\partial L}{\partial z(t)} \right\|_{w(t)} \|z(t) - \bar{z}(t)\| dt \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_f} \left\| \frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \right\|_{w(t)} \|\dot{z}(t) - \dot{\bar{z}}(t)\| dt \end{aligned}$$

dove $w(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^{2\nu}$ appartenente al segmento che ha per estremi $\begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \bar{z}(t) \\ \dot{\bar{z}}(t) \end{bmatrix}$. Posto:

$$\max_{t \in [t_i, t_f]} \left\{ \left\| \frac{\partial L}{\partial z(t)} \right\|_{w(t)}, \left\| \frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \right\|_{w(t)} \right\} \leq C$$

si ha:

$$\begin{aligned} |J(z) - J(\bar{z})| &\leq C \left\{ \int_{t_i}^{t_f} \|z(t) - \bar{z}(t)\| dt + \int_{t_i}^{t_f} \|\dot{z}(t) - \dot{\bar{z}}(t)\| dt \right\} \\ &\leq C(t_f - t_i) \|z - \bar{z}\| \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pertanto, per ogni $\varepsilon > 0$, posto:

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{C(t_f - t_i)}$$

risulta:

$$|J(z) - J(\bar{z})| < \varepsilon \quad \forall z \in S(\bar{z}, \delta_\varepsilon)$$

Si può quindi concludere che il funzionale considerato è uniformemente continuo su $C^1[t_i, t_f]$.

Si osservi che se lo spazio $C^1[t_i, t_f]$ fosse normato con la norma (1.2) la stessa dimostrazione non sarebbe valida in quanto il secondo integrale che figura nella (1.4) non è necessariamente piccolo pur essendo $\|z - \bar{z}\|$ resa piccola a piacere. Si pensi ad esempio al funzionale

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{z}^2(t)} dt$$

che fornisce la lunghezza dell'arco di curva z fra gli estremi fissati z^i e z^f e che non è continuo con la norma (1.2). In effetti, come rappresentato in Fig. 1.1, considerata una qualunque curva \bar{z} esistono infinite altre curve z vicine quanto si vuole ad essa secondo la norma (1.2) ma con lunghezza non necessariamente vicina a quella della curva considerata.

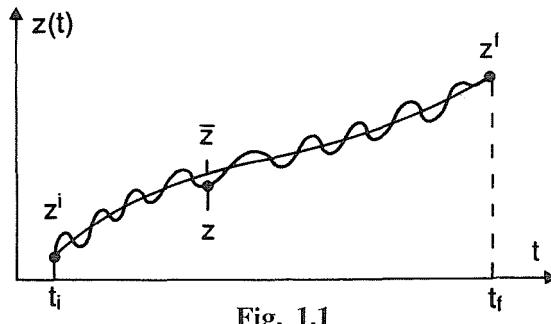


Fig. 1.1

Osservazione 1.27 - Se il funzionale J è continuo in \bar{z} e se la successione $\{z^{(k)}\}$ converge a \bar{z} nel senso della Definizione 1.9, risulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(z^{(k)}) = J(\bar{z})$$

Verrà ora introdotto il concetto di variazione n -esima di un funzionale che generalizza il concetto di derivata direzionale n -esima di funzioni definite in \mathbb{R}^ν .

Dato un funzionale J definito su uno spazio lineare normato Z , fissati un punto $\bar{z} \in Z$ e una direzione $h \in Z$, si consideri la funzione \bar{J} della variabile scalare α non negativa, definita come:

$$\bar{J}(\alpha) = J(\bar{z} + \alpha h)$$

La differenza $J(\bar{z} + \alpha h) - J(\bar{z}) = \bar{J}(\alpha) - \bar{J}(0) = \Delta J(\bar{z}, \alpha h)$ verrà detta *variazione totale* del funzionale J nel punto \bar{z} e con l'incremento αh . Si supponga che la funzione $\bar{J}(\alpha)$ sia derivabile con continuità n volte rispetto ad α nell'intorno dell'origine per ogni direzione h in Z e si consideri lo sviluppo in serie:

$$\bar{J}(\alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{d^k \bar{J}(\alpha)}{d\alpha^k} \Big|_{\alpha=0} \frac{\alpha^k}{k!} + r_{n+1}(\alpha)$$

dove $r_{n+1}(\alpha)$ rappresenta il resto di ordine $n+1$ dello sviluppo.

Tenendo conto della definizione di \bar{J} si ha per la variazione totale il seguente sviluppo:

$$\Delta J(\bar{z}, \alpha h) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^k J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha^k} \Big|_{\alpha=0} \frac{\alpha^k}{k!} + r_{n+1}(\bar{z}, \alpha h)$$

Si può dare a questo punto la seguente definizione.

Definizione 1.28 - Considerato uno spazio lineare normato Z e un funzionale J su di esso definito, se la funzione $J(\bar{z} + \alpha h)$ è derivabile con continuità n volte

rispetto a α nell'intorno dell'origine $\forall h \in \mathcal{Z}$ e se risulta:

$$\lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{r_{n+1}(\bar{z}, \alpha h)}{\|\alpha h\|^n} = 0 \quad \forall h \in \mathcal{Z} \quad (1.5)$$

si definisce *variazione di ordine k* del funzionale J nel punto \bar{z} e nella direzione h il termine:

$$\delta^k J(\bar{z}, h) = \left. \frac{\partial^k J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha^k} \right|_{\alpha=0} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.6)$$

□

Si osserva quindi che se un funzionale ammette variazioni successive fino all'ordine n in un punto \bar{z} e in una direzione h , la sua variazione totale nel punto \bar{z} e con l'incremento αh si esprime come somma delle suddette variazioni pesate con coefficienti $\alpha^k/k!$, $k = 1, 2, \dots, n$, più un termine di resto che risulta un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\|\alpha h\|^n$:

$$\Delta J(\bar{z}, \alpha h) = \sum_{k=1}^n \delta^k J(\bar{z}, h) \frac{\alpha^k}{k!} + r_{n+1}(\bar{z}, \alpha h)$$

È inoltre possibile verificare che la variazione prima è un funzionale lineare rispetto alla direzione h , la variazione seconda è un funzionale quadratico e così via. In particolare, con riferimento alla variazione prima, per una qualunque coppia di direzioni h' e h'' e di numeri reali σ' e σ'' , si ha:

$$\begin{aligned} \delta J(\bar{z}, \sigma' h' + \sigma'' h'') &= \left. \frac{\partial J(\bar{z} + \alpha \sigma' h' + \alpha \sigma'' h'')}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= \left. \frac{\partial J(\bar{z} + \alpha \sigma' h' + \alpha \sigma'' h'')}{\partial (\alpha \sigma')} \right|_{\alpha=0} \sigma' + \left. \frac{\partial J(\bar{z} + \alpha \sigma' h' + \alpha \sigma'' h'')}{\partial (\alpha \sigma'')} \right|_{\alpha=0} \sigma'' \\ &= \left. \delta J(\bar{z} + \alpha \sigma'' h'', h') \right|_{\alpha=0} \sigma' + \left. \delta J(\bar{z} + \alpha \sigma' h', h'') \right|_{\alpha=0} \sigma'' \\ &= \sigma' \delta J(\bar{z}, h') + \sigma'' \delta J(\bar{z}, h'') \end{aligned}$$

che dimostra la suddetta proprietà di linearità.

È bene infine notare che, dovendo essere verificata la condizione (1.5), l'esistenza delle variazioni successive per un funzionale assegnato è dipendente dalla scelta effettuata per la norma nello spazio in cui si opera.

Esempio 1.29 - Se si considera una funzione $J \in C^2(\mathbb{R}^\nu)$, la Definizione 1.28 si particolarizza come segue:

$$\delta J(\bar{z}, h) = \left. \frac{dJ}{dz} \right|_{\bar{z}} h$$

$$\delta^2 J(\bar{z}, h) = h^T \frac{d^2 J}{dz^2} \Big|_{\bar{z}} h$$

Si osserva quindi che, assumendo $\|h\| = 1$, la variazione prima coincide con la derivata direzionale di J nel punto \bar{z} e nella direzione h .

Esempio 1.30 - Sia $Z = C^0[t_i, t_f]$ con la norma (1.1) e si consideri il funzionale:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} z^2(t) dt = \|z\|^2$$

Si verifica facilmente che:

$$J(\bar{z} + \alpha h) = \int_{t_i}^{t_f} \bar{z}^2(t) dt + 2\alpha \int_{t_i}^{t_f} \bar{z}(t)h(t) dt + \alpha^2 \int_{t_i}^{t_f} h^2(t) dt$$

e quindi si ha:

$$\Delta J(\bar{z}, \alpha h) = \alpha \frac{\partial J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=0}$$

Pertanto il resto del terzo ordine dello sviluppo della variazione totale è nullo e quindi il funzionale considerato ammette variazioni prima e seconda in ogni punto e risulta:

$$\delta J(\bar{z}, h) = 2 \int_{t_i}^{t_f} \bar{z}(t)h(t) dt \quad \forall \bar{z}, h \in C^0[t_i, t_f]$$

$$\delta^2 J(\bar{z}, h) = 2 \int_{t_i}^{t_f} h^2(t) dt \quad \forall \bar{z}, h \in C^0[t_i, t_f]$$

Esempio 1.31 - Nello spazio $C^0[t_i, t_f]$ con la norma (1.1) si consideri il funzionale:

$$J(z) = \begin{cases} 0 & \forall z: \|z\| \leq \sqrt{C} \\ \sqrt{\|z\|^2 - C} & \forall z: \|z\| \geq \sqrt{C} \end{cases}$$

essendo C un numero positivo fissato.

Considerato un punto \bar{z} tale che $\|\bar{z}\| < \sqrt{C}$, per α sufficientemente piccolo risulta evidentemente $J(\bar{z} + \alpha h) = 0$ e quindi:

$$\frac{\partial^k J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha^k} \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad k = 1, 2, \dots$$

Ne segue che la variazione prima esiste ed è nulla:

$$\delta J(\bar{z}, h) = 0 \text{ per } \|\bar{z}\| < \sqrt{C}, \forall h \in C^0[t_i, t_f]$$

Considerato un punto \bar{z} tale che $\|\bar{z}\| > \sqrt{C}$ risulta per α sufficientemente piccolo:

$$J(\bar{z} + \alpha h) = J(\bar{z}) + \frac{\partial J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \alpha + r_2(\bar{z}, \alpha h)$$

Una possibile espressione per il resto del secondo ordine è, come noto:

$$\begin{aligned} r_2(\bar{z}, \alpha h) &= \frac{\partial^2 J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha^2} \Big|_{\hat{\alpha}} \frac{\alpha^2}{2} \\ &= \frac{\int_{t_i}^{t_f} \alpha^2 h^2(t) dt \left[\int_{t_i}^{t_f} (\bar{z}(t) + \hat{\alpha} h(t))^2 dt - C \right] - \left[\int_{t_i}^{t_f} \alpha h(t)(\bar{z}(t) + \hat{\alpha} h(t)) dt \right]^2}{2 \left[\int_{t_i}^{t_f} (\bar{z}(t) + \hat{\alpha} h(t))^2 dt - C \right]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

dove $\hat{\alpha}$ è un opportuno numero contenuto nell'intervallo $[0, \alpha]$. Si può a questo punto osservare che:

$$\begin{aligned} &\lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{r_2(\bar{z}, \alpha h)}{\|\alpha h\|} \\ &\leq \lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha h\|^2 (\|\bar{z} + \hat{\alpha} h\|^2 - C) + \left[\int_{t_i}^{t_f} |\alpha h(t)| |\bar{z}(t) + \hat{\alpha} h(t)| dt \right]^2}{2\|\alpha h\| (\|\bar{z} + \hat{\alpha} h\|^2 - C)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

applicando la disegualanza di Schwarz si ottiene inoltre:

$$\begin{aligned} &\lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{r_2(\bar{z}, \alpha h)}{\|\alpha h\|} \\ &\leq \lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha h\|^2 (\|\bar{z} + \hat{\alpha} h\|^2 - C) + \|\alpha h\|^2 \|\bar{z} + \hat{\alpha} h\|^2}{2\|\alpha h\| (\|\bar{z} + \hat{\alpha} h\|^2 - C)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \forall h \in C^0[t_i, t_f] \end{aligned}$$

Pertanto il funzionale considerato ammette variazione prima e risulta:

$$\begin{aligned} \delta J(\bar{z}, h) &= \frac{\partial J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\int_{t_i}^{t_f} \bar{z}(t) h(t) dt}{\sqrt{\|\bar{z}\|^2 - C}} \quad \text{per } \|\bar{z}\| > \sqrt{C} \quad \forall h \in C^0[t_i, t_f] \end{aligned}$$

Supponiamo infine di considerare un punto \bar{z} tale che $\|\bar{z}\| = \sqrt{C}$. Si ha allora che per opportune direzioni h e valori di α (tali che $\|\bar{z} + \alpha h\| > \sqrt{C}$) risulta:

$$J(\bar{z} + \alpha h) = \sqrt{2\alpha \int_{t_i}^{t_f} \bar{z}(t) h(t) dt + \alpha^2 \int_{t_i}^{t_f} h^2(t) dt}$$

Si verifica immediatamente che la $\frac{\partial J(\bar{z} + \alpha h)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$ non è definita e pertanto per $\|\bar{z}\| = \sqrt{C}$ il funzionale considerato non ammette variazione prima.

Esempio 1.32 - Nello spazio $Z = \overline{C}^1[t_i, t_f]$ delle funzioni a dimensioni ν con la norma (1.3) si consideri il *funzionale di Lagrange*:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} L(z(t), \dot{z}(t), t) dt$$

con L funzione scalare che si suppone due volte derivabile con continuità rispetto ai suoi argomenti.

Evidentemente, per una qualunque coppia di funzioni $\bar{z}, h \in \overline{C}^1[t_i, t_f]$ e per un qualunque $\alpha > 0$, risulta:

$$\begin{aligned} J(\bar{z} + \alpha h) &= \int_{t_i}^{t_f} L(\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t), t) dt \\ &\quad + \alpha \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial z(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} \dot{h}(t) \right) dt + r_2(\bar{z}, \alpha h) \end{aligned}$$

Una espressione che può essere data al resto del precedente sviluppo è:

$$\begin{aligned} r_2(\bar{z}, \alpha h) &= \frac{\alpha^2}{2} \int_{t_i}^{t_f} \left(h^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial z(t)^2} \Big|_{\hat{\alpha}} h(t) \right. \\ &\quad \left. + 2h^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial z(t) \partial \dot{z}(t)} \Big|_{\hat{\alpha}} \dot{h}(t) + \dot{h}^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}(t)^2} \Big|_{\hat{\alpha}} \ddot{h}(t) \right) dt \end{aligned}$$

dove $\hat{\alpha} \in [0, \alpha]$. Evidentemente si ha:

$$\frac{|r_2(\bar{z}, \alpha h)|}{\|\alpha h\|} \leq \frac{\alpha^2}{2} M \frac{\int_{t_i}^{t_f} (\|h(t)\|^2 + 2\|h(t)\| \|\dot{h}(t)\| + \|\dot{h}(t)\|^2) dt}{\|\alpha h\|}$$

dove:

$$M \geq \max \left\{ \max_{t \in [t_i, t_f]} \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial z(t)^2} \Big|_{\hat{\alpha}} \right\|, \max_{t \in [t_i, t_f]} \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial z(t) \partial \dot{z}(t)} \Big|_{\hat{\alpha}} \right\|, \max_{t \in [t_i, t_f]} \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}(t)^2} \Big|_{\hat{\alpha}} \right\| \right\}$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{|r_2(\bar{z}, \alpha h)|}{\|\alpha h\|} \leq \lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 M}{2} (t_f - t_i) \\
& \cdot \frac{\left(\max_{t \in [t_i, t_f]} \|h(t)\| \right)^2 + 2 \max_{t \in [t_i, t_f]} \|h(t)\| \cdot \max_{t \in [t_i, t_f]} \|\dot{h}(t)\| + \left(\max_{t \in [t_i, t_f]} \|\dot{h}(t)\| \right)^2}{\|\alpha h\|} \\
& = \frac{M(t_f - t_i)}{2} \lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{\left(\max_{t \in [t_i, t_f]} \|\alpha h(t)\| + \max_{t \in [t_i, t_f]} \|\alpha \dot{h}(t)\| \right)^2}{\|\alpha h\|} \\
& = \frac{M(t_f - t_i)}{2} \lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{\|\alpha h\|^2}{\|\alpha h\|} = 0 \quad \forall h \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]
\end{aligned}$$

Pertanto esiste la variazione prima del funzionale considerato in ogni punto dello spazio $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ con la norma (1.3) e risulta:

$$\delta J(\bar{z}, h) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial z(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} \dot{h}(t) \right) dt$$

Effettuando una integrazione per parti sul primo dei due integrali si ha:

$$\begin{aligned}
\delta J(\bar{z}, h) &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} d\tau \right]_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} \dot{h}(t) dt \\
&+ \left[\int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} d\tau \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} h(t) \right]_{t_i}^{t_f} \quad \forall \bar{z}, h \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f] \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Qualora si supponga che L sia una funzione derivabile con continuità tre volte rispetto ai suoi argomenti, procedendo in maniera analoga è possibile verificare che il funzionale di Lagrange ammette anche variazione seconda in ogni punto di $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ con la norma (1.3) e risulta:

$$\begin{aligned}
\delta^2 J(\bar{z}, h) &= \int_{t_i}^{t_f} \left(h^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial z(t)^2} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} h(t) \right. \\
&\left. + 2h^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial z(t) \partial \dot{z}(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} \dot{h}(t) + \dot{h}^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}(t)^2} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} \dot{h}(t) \right) dt
\end{aligned}$$

Qualora si assuma che la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial z(t) \partial \dot{z}(t)}$ sia simmetrica, integrando per parti il secondo dei tre integrali si ha:

$$\begin{aligned} \delta^2 J(\bar{z}, h) &= \int_{t_i}^{t_f} \left[h^T(t) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z(t)^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial z(t) \partial \dot{z}(t)} \right)_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} h(t) \right. \\ &\quad \left. + \dot{h}^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}(t)^2} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} \dot{h}(t) \right] dt + \left[h^T(t) \frac{\partial^2 L}{\partial z(t) \partial \dot{z}(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} h(t) \right]_{t_i}^{t_f} \\ &\quad \forall \bar{z}, h \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f] \quad (1.8) \end{aligned}$$

Si osservi infine che, qualora nello spazio $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ si fosse assunta la norma (1.2), non sarebbe stata verificata la condizione:

$$\lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \frac{r_2(\bar{z}, \alpha h)}{\|\alpha h\|} = 0 \quad \forall h \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$$

in quanto $\|\alpha h\| \rightarrow 0$ significa in questo caso che $\max_{t \in [t_i, t_f]} \|\alpha h(t)\| \rightarrow 0$ ma non necessariamente che $\max_{t \in [t_i, t_f]} \|\dot{\alpha h}(t)\| \rightarrow 0$. Conseguentemente in questo caso il funzionale di *Lagrange* non avrebbe ammesso variazione prima in alcun punto di $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$.

Esempio 1.33 - Nello spazio $\mathcal{W} = \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si consideri il funzionale di *Lagrange*:

$$J(z, t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(z(t), \dot{z}(t), t) dt$$

con L funzione scalare due volte derivabile con continuità rispetto ai suoi argomenti. Qualora la norma assunta su \mathcal{W} corrisponda alla (1.3) per quanto riguarda la norma su $\bar{\mathcal{C}}^1$, e cioè sia del tipo:

$$\|w\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t)\| + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\dot{z}(t)\| + |t_i| + |t_f|$$

si può verificare in maniera analoga a quanto fatto nel precedente Esempio 1.32, che la variazione prima del funzionale esiste in qualunque punto $(\bar{z}, \bar{t}_i, \bar{t}_f) \in \mathcal{W}$ e in qualunque direzione $(h, \tau_i, \tau_f) \in \mathcal{W}$. In particolare si ha:

$$J(\bar{z} + \alpha h, \bar{t}_i + \alpha \tau_i, \bar{t}_f + \alpha \tau_f) = \int_{\bar{t}_i + \alpha \tau_i}^{\bar{t}_f + \alpha \tau_f} L(\bar{z}(t) + \alpha h(t), \dot{\bar{z}}(t) + \alpha \dot{h}(t), t) dt$$

e pertanto:

$$\delta J(\bar{z}, \bar{t}_i, \bar{t}_f; h, \tau_i, \tau_f) = \frac{\partial J(\bar{z} + \alpha h, \bar{t}_i + \alpha \tau_i, \bar{t}_f + \alpha \tau_f)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

$$\begin{aligned}
&= L(\bar{z}(\bar{t}_f), \dot{\bar{z}}(\bar{t}_f), \bar{t}_f) \tau_f - L(\bar{z}(\bar{t}_i), \dot{\bar{z}}(\bar{t}_i), \bar{t}_i) \tau_i \\
&\quad + \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_f} \left[\frac{\partial L}{\partial z(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} h(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} \dot{h}(t) \right] dt \\
&= L(\bar{z}(\bar{t}_f), \dot{\bar{z}}(\bar{t}_f), \bar{t}_f) \tau_f - L(\bar{z}(\bar{t}_i), \dot{\bar{z}}(\bar{t}_i), \bar{t}_i) \tau_i \\
&\quad + \left[\int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_f} \frac{\partial L}{\partial z(\tau)} \Big|_{\bar{z}(\tau), \dot{\bar{z}}(\tau)} d\tau \right] \bar{h}(t) \\
&\quad + \int_{\bar{t}_i}^{\bar{t}_f} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{\bar{z}(t), \dot{\bar{z}}(t)} - \int_{\bar{t}_i}^t \frac{\partial L}{\partial z(\tau)} \Big|_{\bar{z}(\tau), \dot{\bar{z}}(\tau)} d\tau \right] \dot{h}(t) dt \tag{1.9}
\end{aligned}$$

1.4 MINIMI DI FUNZIONALI

A questo punto verranno date le definizioni e le condizioni di minimo per un funzionale su un insieme D di uno spazio lineare normato. Al funzionale da minimizzare verrà fatto riferimento con la denominazione di *funzionale obiettivo*, all'insieme D con quella di *insieme ammissibile*. Le corrispondenti definizioni e condizioni di massimo sono immediatamente deducibili da quelle di minimo cambiando il segno del funzionale.

Definizione 1.29 - Considerato il funzionale obiettivo J e l'insieme ammissibile D appartenente allo spazio lineare normato Z , l'elemento $z^* \in D$ è un punto di *minimo locale (o relativo)* per J in D se esiste un intorno $S(z^*, \varepsilon)$, tale che:

$$J(z^*) \leq J(z) \quad \forall z \in D \cap S(z^*, \varepsilon)$$

Se la precedente diseguaglianza è verificata in senso stretto per ogni $z \neq z^*$ si parla di *minimo locale stretto*. \square

Definizione 1.30 - Se lo spazio lineare Z è uno spazio di funzioni i minimi locali sono detti *forti* se la norma che si assume in Z per definire l'intorno $S(z^*, \varepsilon)$ è quella (1.2); mentre sono detti *deboli* se si assume la norma (1.3). \square

Evidentemente ogni elemento di $S(z^*, \varepsilon)$ definito in base alla norma (1.3) appartiene a $S(z^*, \varepsilon)$ definito in base alla norma (1.2) ma non viceversa, pertanto un minimo locale forte è anche debole ma non viceversa.

Definizione 1.31 - Considerato il funzionale obiettivo J e l'insieme ammissibile D appartenente allo spazio lineare normato Z , l'elemento $z^0 \in D$ è un punto di *minimo globale (o assoluto)* per J in D se risulta:

$$J(z^0) \leq J(z) \quad \forall z \in D$$

Se la precedente diseguaglianza è verificata in senso stretto per ogni $z \neq z^0$ si parla di *minimo globale stretto*. \square

Condizioni necessarie e/o sufficienti di minimo possono essere date per un funzionale utilizzando la nozione di variazione prima e seconda precedentemente introdotte, osservando però che l'incremento αh deve essere compatibile con i vincoli che definiscono la regione ammissibile D .

A questo proposito si premettono le seguenti definizioni.

Definizione 1.32 - Considerato un punto $\bar{z} \in D \subset \mathcal{Z}$, si definisce *incremento ammissibile* per \bar{z} rispetto a D , ogni elemento $\alpha h \in \mathcal{Z}$, con α scalare, tale che:

$$\bar{z} + \alpha h \in D$$

 \square

Definizione 1.33 - Considerato un punto $\bar{z} \in D \subset \mathcal{Z}$, si definisce *direzione tangente* a D in \bar{z} , ogni elemento $h \in \mathcal{Z}$ per il quale esiste una successione $\{z^{(k)}\}$ di elementi di D e una successione $\{\alpha^{(k)}\}$ di numeri positivi tali che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{(k)} = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^{(k)} - \bar{z}}{\alpha^{(k)}} = h$$

L'insieme di tutte le direzioni tangenti a D in un punto \bar{z} si definisce *cono tangente* a D in \bar{z} e sarà indicato con $K_{\bar{z},D}$.

Il cono tangente $K_{\bar{z},D}$ verrà detto *simmetrico* se è tale che $\forall h \in K_{\bar{z},D}$, risulta anche $-h \in K_{\bar{z},D}$. \square

Osservazione 1.34 - Si verifica facilmente in base alla precedente definizione che se h è una direzione tangente a D in \bar{z} , anche αh , con $\alpha > 0$, è una direzione tangente a D nello stesso punto; tale osservazione giustifica la denominazione di cono tangente per l'insieme delle direzioni tangenti in un punto.

Esempio 1.34 - Si consideri l'insieme chiuso $D \subset \mathbb{R}^2$ rappresentato in Fig. 1.2 a).

Per un punto \bar{z} interno tutte le direzioni soddisfano le condizioni della Definizione 1.33 e quindi $K_{\bar{z},D} = \mathbb{R}^2$. Per un punto \bar{z} della frontiera il cono delle direzioni tangenti $K_{\bar{z},D}$ è delimitato dalle direzioni h' e h'' tangenti alla frontiera di D in \bar{z} e contiene le direzioni orientate verso l'interno di D .

Nel caso dell'insieme $D \subset \mathbb{R}^2$, rappresentato dalla curva di Fig. 1.2 b), per ogni punto le direzioni tangenti appartengono alle semirette tangenti alla curva in quel punto, come è illustrato in figura per $z', \bar{z}, \tilde{z}, z''$.

Esempio 1.35 - Si consideri lo spazio $\mathcal{W} = \bar{C}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ con una norma che corrisponde alla (1.3) per quanto riguarda la scelta su $\bar{C}^1(\mathbb{R})$ (che è costituito dalle funzioni vettoriali a dimensione ν). Si consideri l'insieme:

$$D = \{(z, t_f) \in \mathcal{W} : \chi(z(t_f), t_f) = 0\}$$

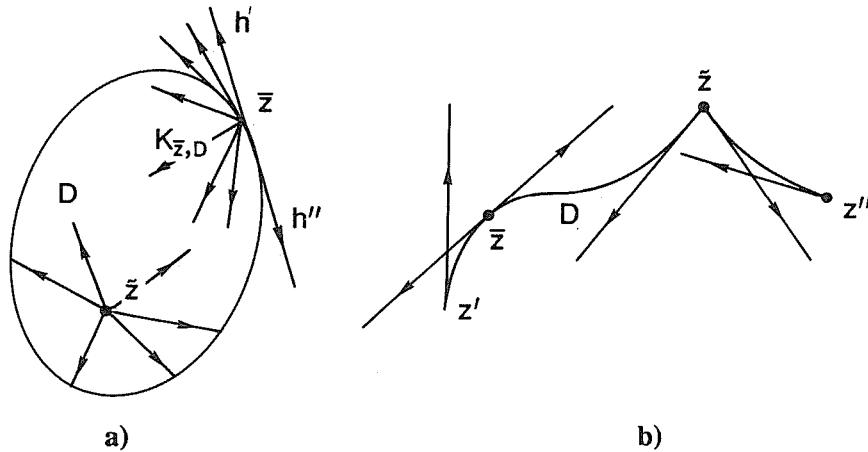


Fig. 1.2

con χ funzione vettoriale di dimensione $\sigma_f \leq \nu + 1$, di classe C^1 rispetto ai propri argomenti e sia $(\bar{z}, \bar{t}_f) \in D$ tale che:

$$\text{rango} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial (z(t_f), t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} \right\} = \sigma_f \quad (1.10)$$

Si desidera caratterizzare il cono tangente $K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$ mostrando in particolare che esso è simmetrico.

In primo luogo si osserva che se $(h, \tau_f) \in K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$, indicando con $\{\alpha^{(k)}\}$ e $\{z^{(k)}, t_f^{(k)}\}$ successioni che, secondo la Definizione 1.33, determinano la suddetta direzione tangente, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \chi(z^{(k)}(t_f^{(k)}), t_f^{(k)}) \\ &= \chi(\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f) + \frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} (z^{(k)}(t_f^{(k)}) - \bar{z}(\bar{t}_f)) \\ &\quad + \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} (t_f^{(k)} - \bar{t}_f) + r_2(\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f, z^{(k)}(t_f^{(k)}), t_f^{(k)}) \end{aligned}$$

dove r_2 è il resto del secondo ordine del precedente sviluppo in serie. Poiché $(\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f)$ è ammissibile, si ha:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} \left(\frac{z^{(k)}(t_f^{(k)}) - \bar{z}(t_f^{(k)})}{\alpha^{(k)}} + \frac{\bar{z}(t_f^{(k)}) - \bar{z}(\bar{t}_f)}{\alpha^{(k)}} \right)$$

$$+ \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} \frac{t_f^{(k)} - \bar{t}_f}{\alpha^{(k)}} + \frac{r_2}{\alpha^{(k)}} = 0$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, considerando che r_2 è infinitesimo di ordine superiore rispetto ad $\alpha^{(k)}$ e che $t_f^{(k)}$ tende a \bar{t}_f , si ha:

$$\frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} (h(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}(\bar{t}_f) \tau_f) + \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} \tau_f = 0 \quad (1.11)$$

Inversamente, considerata una direzione $(h, \tau_f) \in \mathcal{W}$ che soddisfa la (1.11), si può verificare che essa appartiene a $K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$.

Si supporrà in primo luogo che $\sigma_f < \nu + 1$. Si assumerà inoltre che la condizione di rango (1.10) sia soddisfatta nella forma:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} \right\} = \sigma_f$$

Per il teorema del *Dini* sulle funzioni implicite, esiste un intorno di $(\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f)$ in cui il vincolo $\chi(z(t_f), t_f) = 0$ è equivalente a quello:

$$a = \varphi(b, t_f)$$

dove φ è una funzione a dimensione σ_f di classe C^1 e dove si è posto:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = z(t_f)$$

supponendo, senza perdita di generalità, che le prime σ_f colonne della matrice $\frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f}$ siano linearmente indipendenti. Inoltre, ancora per il teorema sulle funzioni implicite, nello stesso intorno si ha:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial b} & \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} \end{pmatrix} = - \left[\frac{\partial \chi}{\partial a} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial b} & \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Si consideri allora una successione di numeri positivi $\{\alpha^{(k)}\}$ che tende a zero e tale che ciascuno di essi sia sufficientemente piccolo perché il punto

$$\begin{pmatrix} \bar{z}(\bar{t}_f) \\ \bar{t}_f \end{pmatrix} + \alpha^{(k)} \begin{pmatrix} h(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}(\bar{t}_f) \tau_f \\ \tau_f \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \dots$$

appartenga all'intorno di $(\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f)$ in cui è applicabile alla funzione χ il teorema sulle funzioni implicite. Posto inoltre:

$$b^{(k)} = \bar{b} + \alpha^{(k)} (h_b(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_b(\bar{t}_f) \tau_f) \quad k = 1, 2, \dots$$

dove $h_b(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_b(\bar{t}_f)\tau_f$ è un vettore costituito dalle ultime $\nu - \sigma^f$ componenti del vettore $h(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}(\bar{t}_f)\tau_f$, si consideri la successione $\{(z^{(k)}, t_f^{(k)})\} \subset \mathcal{W}$, così definita:

$$\begin{aligned} t_f^{(k)} &= \bar{t}_f + \alpha^{(k)}\tau_f \\ z^{(k)}(t) &= \bar{z}(t) + \alpha^{(k)}h(t) - \bar{z}(t_f^{(k)}) - \alpha^{(k)}h(t_f^{(k)}) + \begin{pmatrix} \varphi(b^{(k)}, t_f^{(k)}) \\ b^{(k)} \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si verificherà qui di seguito che le successioni $\{(z^{(k)}, t_f^{(k)})\}$ e $\{\alpha^{(k)}\}$ generano, secondo la Definizione 1.33, la direzione (h, τ_f) che risulterà quindi appartenente a $K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$.

Si osserva in primo luogo che $(z^{(k)}, t_f^{(k)}) \in D$ per ogni k ; infatti, per il teorema sulle funzioni implicite, si ha:

$$\chi(z^{(k)}(t_f^{(k)}), t_f^{(k)}) = \chi\left(\begin{pmatrix} \varphi(b^{(k)}, t_f^{(k)}) \\ b^{(k)} \end{pmatrix}, t_f^{(k)}\right) = 0$$

In secondo luogo, si ha ovviamente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_f^{(k)} - \bar{t}_f}{\alpha^{(k)}} = \tau_f$$

Infine, per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^{(k)}(t) - \bar{z}(t)}{\alpha^{(k)}} &= h(t) - h(\bar{t}_f) + \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{\varphi(b^{(k)}, t_f^{(k)}) - \bar{z}_a(t_f^{(k)})}{\alpha^{(k)}} \\ \frac{b^{(k)} - \bar{z}_b(t_f^{(k)})}{\alpha^{(k)}} \end{pmatrix} \\ &= h(t) - h(\bar{t}_f) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^{(k)}} \begin{pmatrix} \varphi(\bar{b}, \bar{t}_f) + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \Big|_{\bar{b}, \bar{t}_f} \alpha^{(k)}(h_b(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_b(\bar{t}_f)\tau_f) \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} \Big|_{\bar{b}, \bar{t}_f} \alpha^{(k)}\tau_f - \bar{z}_a(\bar{t}_f) - \dot{\bar{z}}_a(\bar{t}_f)\alpha^{(k)}\tau_f + r_f \\ \bar{b} + \alpha^{(k)}(h_b(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_b(\bar{t}_f)\tau_f) \\ - \bar{z}_b(\bar{t}_f) - \dot{\bar{z}}_b(\bar{t}_f)\alpha^{(k)}\tau_f - r'_f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poiché $\bar{b} = \bar{z}_b(\bar{t}_f)$ e $\varphi(\bar{b}, \bar{t}_f) = \bar{a} = \bar{z}_a(\bar{t}_f)$, e poiché inoltre r_f, r'_f sono infinitesimi

di ordine superiore rispetto ad $\alpha^{(k)}$, si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^{(k)}(t) - \bar{z}(t)}{\alpha^{(k)}} = h(t) - h(\bar{t}_f)$$

$$+ \left(\begin{array}{c} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial b} \right|_{\bar{b}, \bar{t}_f} (h_b(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_b(\bar{t}_f)\tau_f) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t_f} \right|_{\bar{b}, \bar{t}_f} \tau_f - \dot{\bar{z}}_a(\bar{t}_f)\tau_f \\ h_b(\bar{t}_f) \end{array} \right)$$

Tenendo conto della (1.12) si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^{(k)}(t) - \bar{z}(t)}{\alpha^{(k)}} = h(t) + \begin{pmatrix} - \left[\frac{\partial \chi}{\partial a} \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial b} (h_b(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_b(\bar{t}_f)\tau_f) \right. \\ \left. + \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \tau_f + \frac{\partial \chi}{\partial a} (h_a(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_a(\bar{t}_f)\tau_f) \right\} \\ 0 \end{pmatrix}_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f}$$

$$= h(t) + \begin{pmatrix} - \left[\frac{\partial \chi}{\partial a} \right]^{-1} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} (h(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}(\bar{t}_f)\tau_f) + \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \tau_f \right\} \\ 0 \end{pmatrix}_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} = h(t)$$

dove l'ultima eguaglianza è giustificata ricordando l'ipotesi (1.11).

In maniera analoga si può trattare il caso in cui la condizione di rango (1.10) è soddisfatta con riferimento a un minore che contiene la $\frac{\partial \chi}{\partial t_f}$; senza perdita di generalità si può supporre che sia:

$$\det \left\{ \left. \frac{\partial \chi}{\partial (b, t_f)} \right|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} \right\} \neq 0$$

dove b è il vettore costituito dalle ultime $\sigma_f - 1$ componenti di $z(t_f)$. Per il teorema sulle funzioni implicite esiste un intorno di $(\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f)$ in cui il vincolo $\chi(z(t_f), t_f) = 0$ è equivalente a quello:

$$\begin{pmatrix} b \\ t_f \end{pmatrix} = \varphi(a) = \begin{pmatrix} \varphi_b(a) \\ \varphi_{\sigma_f}(a) \end{pmatrix}$$

e risulta:

$$\frac{d\varphi}{da} = - \left[\frac{\partial \chi}{\partial (b, t_f)} \right]^{-1} \frac{\partial \chi}{\partial a}$$

Posto in questo caso:

$$a^{(k)} = \bar{a} + \alpha^{(k)} (h_a(\bar{t}_f) + \dot{\bar{z}}_a(\bar{t}_f)\tau_f) \quad k = 1, 2, \dots$$

si può considerare la successione $\{(z^{(k)}, t_f^{(k)})\} \subset \mathcal{W}$ così definita:

$$\begin{aligned} t_f^{(k)} &= \varphi_{\sigma_f}(a^{(k)}) \\ z^{(k)}(t) &= \bar{z}(t) + \alpha^{(k)} h(t) - \bar{z}(t_f^{(k)}) - \alpha^{(k)} h(t_f^{(k)}) + \begin{pmatrix} a^{(k)} \\ \varphi_b(a^{(k)}) \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e si può verificare come già fatto nel caso precedente che, nell'ipotesi (1.11), essa genera, secondo la Definizione 1.33, la direzione (h, τ_f) che risulterà quindi appartenente a $K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$.

Si considera infine il caso in cui $\sigma_f = \nu + 1$. La condizione di rango (1.10) diviene allora:

$$\det \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial(z(t_f), t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f), \bar{t}_f} \right\} \neq 0$$

e la condizione (1.11) implica $h(\bar{t}_f) = 0, \tau_f = 0$. Sarà allora sufficiente considerare le successioni:

$$\begin{aligned} t_f^{(k)} &= \bar{t}_f \\ z^{(k)}(t) &= \bar{z}(t) + \alpha^{(k)} h(t) \end{aligned}$$

e verificare che esse generano, secondo la Definizione 1.33, la direzione (h, τ_f) che risulterà quindi appartenente a $K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$.

In conclusione si è verificato che $K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$ contiene tutte e sole le direzioni (h, τ_f) che soddisfano la (1.11). Poiché cambiando segno alla suddetta direzione la (1.11) resta soddisfatta, si può affermare che $K_{(\bar{z}, \bar{t}_f), D}$ è simmetrico.

Nel caso in cui l'insieme D è definito mediante vincoli che interessano anche i valori di t_i e di $z(t_i)$, e cioè:

$$D = \{(z, t_i, t_f) \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \gamma(z(t_i), t_i) = 0, \chi(z(t_f), t_f) = 0\} \quad (1.13)$$

con γ funzione vettoriale di dimensione $\sigma_i \leq \nu + 1$, di classe C^1 rispetto ai propri argomenti, considerato $(\bar{z}, \bar{t}_i, \bar{t}_f) \in D$, tale che:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial(z(t_i), t_i)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_i), \bar{t}_i} \right\} = \sigma_i$$

procedendo in maniera analoga a quanto fatto precedentemente si può verificare che il cono $K_{(\bar{z}, \bar{t}_i, \bar{t}_f), D}$ è costituito da tutte e sole le direzioni (h, τ_i, τ_f) che oltre alla (1.11) soddisfano la condizione:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z(t_i)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_i), \bar{t}_i} (h(\bar{t}_i) + \dot{z}(\bar{t}_i) \tau_i) + \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_i), \bar{t}_i} \tau_i = 0 \quad (1.14)$$

Si osserva che $K_{(\bar{z}, \bar{t}_i, \bar{t}_f), D}$ è ancora un cono simmetrico.

Il caso in cui t_i e t_f siano fissati rispettivamente ai valori \bar{t}_i e \bar{t}_f , e i vincoli interessino solo i valori di $z(t_i)$ e di $z(t_f)$, può essere studiato come caso particolare del precedente esempio in cui veniva considerato l'insieme (1.13). In effetti è possibile particolarizzare tale insieme come segue:

$$\begin{aligned} D = & \{(z, t_i, t_f) \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \gamma'(z(t_i)) = 0, \\ & t_i - \bar{t}_i = 0, \chi'(z(t_f)) = 0, t_f - \bar{t}_f = 0\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

con γ' e χ' rispettivamente funzioni vettoriali di dimensioni $\sigma'_i \leq \nu$, $\sigma'_f \leq \nu$, di classe C^1 rispetto ai propri argomenti. Considerato quindi $(\bar{z}, \bar{t}_i, \bar{t}_f) \in D$, tale che:

$$\begin{aligned} \text{rango } & \left\{ \frac{d\gamma'}{dz(t_i)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_i)} \right\} = \sigma_i \\ \text{rango } & \left\{ \frac{d\chi'}{dz(t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f)} \right\} = \sigma_f \end{aligned}$$

dal caso precedente si deduce che il cono $K_{(\bar{z}, \bar{t}_i, \bar{t}_f), D}$ è costituito dalle direzioni $(h, 0, 0)$ per le quali risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma'}{dz(t_i)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_i)} h(\bar{t}_i) &= 0 \\ \frac{d\chi'}{dz(t_f)} \Big|_{\bar{z}(\bar{t}_f)} h(\bar{t}_f) &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

ed è quindi, ovviamente, un cono simmetrico.

Per quanto riguarda le condizioni necessarie di minimo di funzionali si hanno i seguenti risultati.

Teorema 1.35 - Sia il funzionale obiettivo J dotato di variazione prima nel punto z^* , appartenente all'insieme ammissibile D , e sia $K_{z^*, D}$ il cono delle direzioni tangenti a D in z^* ; condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale per J in D è che:

$$\delta J(z^*, h) \geq 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D} \quad (1.17)$$

Dimostrazione - Supponiamo per assurdo che esista una direzione $\bar{h} \in K_{z^*, D}$ per la quale risulti:

$$\delta J(z^*, \bar{h}) < 0$$

Indichiamo con $\{\bar{\alpha}^{(k)}\}$ e $\{\bar{z}^{(k)}\}$ le successioni che, in base alla Definizione 1.33, individuano \bar{h} e poniamo:

$$\bar{h}^{(k)} = \frac{\bar{z}^{(k)} - z^*}{\bar{\alpha}^{(k)}} \quad k = 1, 2, \dots$$

Poiché la successione $\{\bar{h}^{(k)}\}$ converge a \bar{h} si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta J(z^*, \bar{h}^{(k)})}{\|\bar{h}^{(k)}\|} = \frac{\delta J(z^*, \bar{h})}{\|\bar{h}\|} < 0$$

Segue quindi che:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta J(z^*, \bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)})}{\|\bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)}\|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\delta J(z^*, \bar{h}^{(k)}) \bar{\alpha}^{(k)}}{\|\bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)}\|} + \frac{r_2(z^*, \bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)})}{\|\bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)}\|} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta J(z^*, \bar{h}^{(k)})}{\|\bar{h}^{(k)}\|} < 0 \end{aligned}$$

Pertanto esiste un \bar{k} sufficientemente grande, tale che:

$$\frac{\Delta J(z^*, \bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)})}{\|\bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)}\|} < 0 \quad k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \dots$$

Poiché $\bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)} \rightarrow 0$, ne deriva che in qualunque intorno di z^* esiste un punto ammissibile:

$$\bar{z}^{(k)} = z^* + \bar{\alpha}^{(k)} \bar{h}^{(k)}$$

tale che:

$$J(\bar{z}^{(k)}) < J(z^*)$$

che contraddice l'ipotesi che z^* sia un punto di minimo locale in D . \square

Corollario 1.36 - Sia il funzionale obiettivo J dotato di variazione prima in $z^* \in D$ e sia $\bar{K}_{z^*, D}$ un cono simmetrico contenuto in $K_{z^*, D}$; condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale per J in D è che:

$$\delta J(z^*, h) = 0 \quad \forall h \in \bar{K}_{z^*, D} \tag{1.18}$$

Dimostrazione - Osservando che $\delta J(z^*, h)$ è lineare rispetto a h , in base al Teorema 1.35 deve risultare simultaneamente:

$$\begin{aligned}\delta J(z^*, h) &\geq 0 & \forall h \in \overline{K}_{z^*, D} \\ \delta J(z^*, -h) = -\delta J(z^*, h) &\geq 0 & \forall h \in \overline{K}_{z^*, D}\end{aligned}$$

il che implica la (1.18). \square

Corollario 1.37 - Sia il funzionale obiettivo J dotato di variazione prima nel punto $z^* \in D \subset \mathcal{Z}$ e sia z^* punto interno di D ; condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale per J in D è che:

$$\delta J(z^*, h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{Z} \quad (1.19)$$

Dimostrazione - La dimostrazione della condizione (1.19) discende immediatamente dal corollario precedente ove si consideri che essendo $z^* \in \overset{\circ}{D}$ risulta $K_{z^*, D} = \mathcal{Z}$ e quindi $K_{z^*, D}$ è simmetrico. \square

Definizione 1.38 - Ogni elemento $z^* \in D$ che soddisfa la condizione (1.17) o quelle (1.18), (1.19), quando quest'ultime siano applicabili, e che quindi è candidato ad essere un punto di minimo locale si dice *estremale* di J in D . \square

Verranno ora dati un teorema di necessità e uno di sufficienza di minimo locale che fanno uso della variazione seconda del funzionale.

Teorema 1.39 - Sia il funzionale obiettivo J dotato di variazione seconda nel punto $z^* \in D$; condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale per J in D è che:

$$\delta^2 J(z^*, h) \geq 0 \quad \forall h \in \overline{K}_{z^*, D} \quad (1.20)$$

dove $\overline{K}_{z^*, D}$ è un qualunque cono simmetrico contenuto in $K_{z^*, D}$.

Dimostrazione - In base al Corollario 1.36 per un incremento ammissibile αh lungo una qualunque direzione appartenente a $\overline{K}_{z^*, D}$, risulta:

$$\Delta J(z^*, \alpha h) = \delta^2 J(z^*, h) \frac{\alpha^2}{2} + r_3(z^*, \alpha h)$$

Ne segue che per $\|\alpha h\|$ sufficientemente piccola si ha:

$$0 \leq \frac{\Delta J(z^*, \alpha h)}{\|\alpha h\|^2} = \frac{\delta^2 J(z^*, h)}{2\|h\|^2} \quad \forall h \in \overline{K}_{z^*, D} \quad \square$$

Teorema 1.40 - Sia il funzionale obiettivo J dotato di variazione seconda nel punto $z^* \in D$; condizione sufficiente affinché z^* sia un punto di minimo locale per J in

D è che esistano due numeri positivi ε e k , tali che:

$$\begin{aligned}\delta J(z^*, h) &= 0 \\ \delta^2 J(z^*, h) &\geq k \|h\|^2 \quad \forall h: \exists \alpha > 0: z^* + \alpha h \in D \cap S(z^*, \varepsilon)\end{aligned}\quad (1.21)$$

Dimostrazione - Comunque si fissi $z \in D \cap S(z^*, \varepsilon)$ esiste un $\alpha > 0$ tale che nella direzione $h = \frac{z - z^*}{\alpha}$ sono soddisfatte le condizioni del teorema. Pertanto per la variazione totale si ha:

$$\Delta J(z^*, \alpha h) = \delta^2 J(z^*, h) \frac{\alpha^2}{2} + r_3(z^*, \alpha h)$$

Ne segue che:

$$\frac{\Delta J(z^*, \alpha h)}{\|\alpha h\|^2} = \frac{\delta^2 J(z^*, h)}{2\|h\|^2} + \frac{r_3(z^*, \alpha h)}{\|\alpha h\|^2} \geq \frac{k}{2} + \frac{r_3(z^*, \alpha h)}{\|\alpha h\|^2}$$

Per ε sufficientemente piccolo, poiché $\|\alpha h\| \leq \varepsilon$, si ha:

$$\frac{\Delta J(z^*, \alpha h)}{\|\alpha h\|^2} \geq \frac{k}{2}$$

Pertanto poiché:

$$\Delta J(z^*, \alpha h) \geq \frac{k}{2} \|\alpha h\|^2 > 0 \quad \forall (z^* + \alpha h) \in D \cap S(z^*, \varepsilon)$$

resta dimostrato che z^* è un punto di minimo locale per J in D . \square

Osservazione 1.41 - Nel caso in cui Z è uno spazio a dimensione finita e D è aperto, le condizioni necessarie (1.19) e (1.20) si particolarizzano rispettivamente nelle ben note condizioni che il vettore delle derivate prime, cioè il gradiente della funzione obiettivo si annulli e che la matrice delle sue derivate seconde, cioè la matrice Hessiana sia semidefinita positiva nel punto z^* ; per quanto riguarda la condizione (1.21), in base all'Esempio 1.29 si comprende facilmente che essa equivale alla condizione che la matrice delle derivate seconde sia definita positiva in z^* .

Le condizioni date nei precedenti teoremi sono solo necessarie o solo sufficienti; condizioni necessarie e sufficienti di minimo possono ottenersi introducendo ulteriori ipotesi di convessità sul problema.

Teorema 1.42 - Sia l'insieme ammissibile $D \subset Z$ convesso e sia il funzionale obiettivo J convesso in D ; sia inoltre z^0 punto interno di D , e sia J dotata di

variazione prima in z^0 ; condizione necessaria e sufficiente affinché z^0 sia un punto di minimo globale per J in D è che:

$$\delta J(z^0, h) = 0 \quad \forall h \in Z \quad (1.22)$$

Se inoltre J è strettamente convesso il punto z^0 che soddisfa la (1.22), se esiste, è unico.

Dimostrazione - Per quanto riguarda la necessità della (1.22) essa discende immediatamente dal fatto che un minimo globale è anche locale e dal risultato del Corollario 1.37.

Per quanto riguarda la sua sufficienza si osserva che per l'ipotesi di convessità risulta:

$$\begin{aligned} J(z^0) + \alpha[J(z) - J(z^0)] &\geq J[z^0 + \alpha(z - z^0)] \quad \forall z \in D \\ \forall \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

Dividendo per α la precedente diseguaglianza e passando al limite per $\alpha \rightarrow 0^+$ risulta:

$$J(z) - J(z^0) \geq \delta J(z^0, z - z^0) \quad \forall z \in D$$

Pertanto la (1.22) implica:

$$J(z) \geq J(z^0) \quad \forall z \in D$$

Dimostriamo ora che se J è strettamente convesso il punto di minimo globale, se esiste, è unico. Si supponga infatti che esistano due punti $z^{0'}$ e $z^{0''}$ di minimo globale per J in D . Si consideri allora il punto $\bar{z} = \frac{1}{2}(z^{0'} + z^{0''}) \in D$ per la convessità dell'insieme. Per la stretta convessità del funzionale si ha:

$$J(\bar{z}) < \frac{1}{2}J(z^{0'}) + \frac{1}{2}J(z^{0''}) = J(z^{0'})$$

che è assurdo per essere $z^{0'}$ punto di minimo globale. \square

Osservazione 1.43 - Si noti che nella dimostrazione della sufficienza del Teorema 1.42 non è utilizzata l'ipotesi che $z^0 \in \overset{\circ}{D}$; in effetti se z^0 è un qualunque punto di D (eventualmente appartenente alla sua frontiera) la (1.22) è condizione sufficiente (ma non necessaria) di minimo globale per J in D . Se J è strettamente convesso è comunque garantita l'unicità del punto di minimo globale, se esso esiste.

Esempio 1.36 - Si minimizzi il funzionale:

$$J(z) = \int_1^2 \frac{\dot{z}^2}{t^3} dt$$

sullo spazio $\mathcal{Z} = C^1[1, 2]$ con la norma (1.3). Come evidenziato nell'Esempio 1.32 il funzionale considerato ammette variazione in ogni punto; particolarizzando la (1.7) e imponendo la condizione necessaria (1.19) si ha:

$$\delta J(z^*, h) = 2 \left[\frac{\dot{z}^*(t)h(t)}{t^3} \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \frac{\ddot{z}^*(t)t - 3\dot{z}^*(t)}{t^4} h(t) dt = 0 \quad \forall h \in C^1[1, 2]$$

Poiché la precedente condizione deve sussistere in particolare $\forall h \in C^1[1, 2]$ tale che $h(1) = h(2) = 0$, in base al Lemma 4.3 di *Eulero* che verrà dimostrato nel Capitolo 4, essa equivale alla:

$$\ddot{z}^*(t)t - 3\dot{z}^*(t) = 0 \quad \forall t \in [1, 2]$$

L'integrale generale della precedente equazione differenziale è:

$$z^*(t) = K't^4 + K$$

e quindi il minimo, se esiste, apparterrà a tale insieme di estremali. Osservando a questo punto che il funzionale J è non negativo e che per $K' = 0$ esso si annulla, si può concludere che il minimo globale di J è ottenuto in corrispondenza degli infiniti estremali del tipo:

$$z^0(t) = K \quad \forall t \in [1, 2]$$

Esempio 1.37 - Si consideri lo spazio $\mathcal{Z} = \{z = \{z_i\}, z_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots : \sum_{i=1}^{\infty} z_i^2 < \infty\}$ con la norma:

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Su tale spazio si minimizzi il funzionale:

$$J(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i^2}{i}$$

Il punto $z^0 = \{0, 0, \dots\}$ è il minimo globale del funzionale. Tale conclusione, cui si perviene immediatamente osservando che J è non negativo, può anche essere dedotta in base al Teorema 1.42 tenendo conto della convessità dell'insieme ammissibile \mathcal{Z} e del funzionale J . Si noti tuttavia che le condizioni sufficienti di minimo locale date dal Teorema 1.40 non sono soddisfatte; infatti si deduce facilmente che:

$$\delta J(z^0, h) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i^0 h_i}{i} = 0$$

$$\delta^2 J(z^0, h) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i^2}{i}$$

e considerata la direzione $h^{(j)} = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$, dove l'unità costituisce il termine j -esimo della successione, si ottiene:

$$\delta^2 J(z^0, h^{(j)}) = \frac{2}{j}$$

mentre $\|h^{(j)}\| = 1$. Evidentemente non esiste alcun $k > 0$, tale che:

$$\frac{2}{j} \geq k \quad \forall j$$

Esempio 1.38 - Si consideri lo spazio lineare $\mathcal{Z} = \{z \in C^1[t_i, t_f] : z(t_i) = z(t_f) = 0\}$ con la norma (1.3) e si determini su di esso il minimo del funzionale:

$$J(z) = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [z^2(t) + \dot{z}^2(t)] dt - \int_{t_i}^{t_f} w(t)z(t) dt$$

essendo $w \in C^0[t_i, t_f]$. Poiché \mathcal{Z} è aperto e convesso (essendo uno spazio lineare) e J è strettamente convesso su \mathcal{Z} , in base al Teorema 1.42 la condizione (1.22) è necessaria e sufficiente per il minimo globale che è unico, se esiste. Tale condizione nel caso considerato si particolarizza nella:

$$\begin{aligned} \delta J(z^0, h) &= \int_{t_i}^{t_f} z^0(t)h(t) dt + \int_{t_i}^{t_f} \dot{z}^0(t)\dot{h}(t) dt - \int_{t_i}^{t_f} w(t)h(t) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} [z^0(t) - \dot{z}^0(t) - w(t)]h(t) dt = 0 \quad \forall h \in \mathcal{Z} \end{aligned}$$

In base al già menzionato Lemma 4.3 di *Eulero*, la precedente condizione equivale alla:

$$\ddot{z}^0(t) - z^0(t) = -w(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Come è facile verificare la precedente equazione differenziale con le condizioni agli estremi $z^0(t_i) = z^0(t_f) = 0$ ammette l'unica soluzione:

$$z^0(t) = \frac{\operatorname{senh}(t - t_i)}{\operatorname{senh}(t_f - t_i)} \int_{t_i}^{t_f} w(\tau) \operatorname{senh}(t_f - \tau) d\tau - \int_{t_i}^{t_f} w(\tau) \operatorname{senh}(t - \tau) d\tau$$

che è quindi l'unico punto di minimo globale per J .

Per quanto concerne il problema dell'esistenza del minimo globale, il risultato più noto è dato dal teorema di *Weierstrass* che verrà qui di seguito dimostrato.

Teorema 1.44 - (Weierstrass). Sia l'insieme ammissibile $D \subset \mathcal{Z}$ compatto e sia il funzionale obiettivo J continuo in D ; allora J ammette in D un punto di minimo globale z^0 .

Dimostrazione - Sia:

$$l = \inf_{z \in D} J(z)$$

non escludendo per ora l'eventualità $l = -\infty$. È possibile costruire una successione minimizzante $\{z^{(k)}\}$ di elementi di D , tale cioè che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(z^{(k)}) = l$$

Poiché D è compatto esiste una sottosuccessione $\{z^{(k')}\} \subset \{z^{(k)}\}$ tale che:

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} z^{(k')} = \bar{z} \in D$$

Poiché inoltre J è continua si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(z^{(k)}) = \lim_{k' \rightarrow \infty} J(z^{(k')}) = J(\bar{z})$$

Pertanto esiste $\bar{z} \in D$ tale che

$$J(\bar{z}) = l$$

e quindi J ammette un minimo globale finito su D . □

Osservazione 1.45 - L'utilità del teorema precedente è fondamentale dal punto di vista applicativo nel caso finito dimensionale, in quanto la proprietà di compattezza di un insieme coincide con quelle di chiusura e limitatezza che possono essere facilmente verificate. Negli spazi a dimensione infinita però, l'utilità del teorema di Weierstrass è limitata perché le ipotesi relative sono difficilmente verificabili (la compattezza non è assicurata dalla chiusura e dalla limitatezza di D). Esistono in effetti teoremi che assicurano l'esistenza del minimo di un funzionale sotto ipotesi meno restrittive di quelle del precedente teorema per quanto riguarda l'insieme ammissibile.

Osservazione 1.46 - In base a quanto mostrato nel Corollario 1.37 e nel Teorema 1.43, la ricerca del minimo globale di un funzionale continuo J in un insieme compatto D va effettuata fra i punti interni di D che siano estremali o fra i punti in cui J non ammette variazione prima o fra i punti della ∂D .

Capitolo 2

Minimi di funzioni su spazi a dimensione finita in presenza di vincoli

2.1 INTRODUZIONE

Nel precedente capitolo si è trattato il problema generale della minimizzazione di funzioni su insiemi contenuti in spazi lineari normati; in questo capitolo verrà considerato il caso più particolare in cui lo spazio lineare normato Z si riduce allo spazio euclideo \mathbb{R}^{ν} e in cui la funzione obiettivo J deve essere minimizzata su un insieme ammissibile $D \subset \mathbb{R}^{\nu}$, definito attraverso relazioni di egualanza e/o di disegualanza, cui si da il nome di *vincoli* per il problema di minimizzazione. Tale classe di problemi rientra in una classe più ampia cui si fa riferimento con la denominazione di problemi di *programmazione matematica*; nel caso particolare in cui la funzione obiettivo e le funzioni di vincolo sono lineari il problema si dice di *programmazione lineare*, nel caso in cui la funzione obiettivo è quadratica e le funzioni di vincolo sono lineari il problema si dice di *programmazione quadratica*, mentre più in generale si parla di *programmazione non lineare* quando le suddette funzioni sono non lineari.

Il problema della programmazione non lineare e i relativi metodi di soluzione risultano di rilevante interesse nel contesto dell'ottimizzazione dei sistemi di controllo in quanto, come verrà posto in evidenza nel seguito, in molti casi importanti quest'ultimo si formula come problema di programmazione lineare o non lineare.

Nel paragrafo seguente verrà studiato il problema di programmazione non lineare definito attraverso vincoli di egualanza e di disegualanza, fornendo condizioni necessarie e condizioni sufficienti di minimo locale vincolato; con opportune ipotesi di convessità verrà anche fornito un teorema che dà condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale vincolato.

I risultati relativi al problema di programmazione caratterizzato da soli vincoli di egualanza o da soli vincoli di disegualanza sono deducibili dai precedenti come caso particolare.

2.2 MINIMI DI FUNZIONI IN PRESENZA DI VINCOLI

Si considererà in questo paragrafo il problema di minimizzare la funzione J nell'insieme ammissibile $D \subset \mathbb{R}^\nu$ definito mediante i vincoli di eguaglianza:

$$h(z) = 0 \quad (2.1)$$

e i vincoli di diseguaglianza:

$$g(z) \leq 0 \quad (2.2)$$

con h e g funzioni vettoriali rispettivamente di dimensioni $\mu < \nu$ e σ . Tale problema contiene come casi particolari quelli in cui sono presenti solo vincoli di eguaglianza o solo vincoli di diseguaglianza.

Ovviamente è immediato particolarizzare le Definizioni 1.29 e 1.31 del precedente capitolo:

Definizione 2.1 - Considerato un punto z^* che soddisfa i vincoli (2.1) e (2.2) esso è un punto di *minimo locale (o relativo) vincolato* per J in D se esiste un intorno $S(z^*, \varepsilon)$, tale che:

$$J(z^*) \leq J(z) \quad \forall z \in S(z^*, \varepsilon): h(z) = 0, g(z) \leq 0$$

Se la precedente diseguaglianza è verificata in senso stretto per $z \neq z^*$ si parla di *minimo locale vincolato stretto*. \square

Definizione 2.2 - Considerato un punto z^0 che soddisfa i vincoli (2.1) e (2.2) esso è un punto di *minimo globale (o assoluto) vincolato* per J in D se:

$$J(z^0) \leq J(z) \quad \forall z: h(z) = 0, g(z) \leq 0$$

Se la precedente diseguaglianza è verificata in senso stretto per $z \neq z^0$ si parla di *minimo globale vincolato stretto*. \square

La formulazione del problema che si vuole studiare è quindi la seguente.

Problema 2.3 - Considerata la funzione obiettivo J definita sull'insieme ammissibile D individuato mediante i vincoli (2.1), (2.2), si determini, se esiste, un punto di minimo globale vincolato. \square

Al fine di studiare il suddetto problema è utile premettere le seguenti definizioni.

Definizione 2.4 - Considerato un punto $\bar{z} \in D$, si definiscono *vincoli attivi* in quel punto i vincoli h e quelle componenti di g che in \bar{z} si annullano.

Rappresentato con $I_a(\bar{z})$ l'insieme degli indici dei vincoli di diseguaglianza attivi in \bar{z} :

$$I_a(\bar{z}) = \{i \in \{1, 2, \dots, \sigma\}: g_i(\bar{z}) = 0\}$$

si indica con g_a il sottovettore di g , di dimensione $\sigma_a \leq \sigma$, costituito dalle componenti g_i per $i \in I_a(\bar{z})$. \square

Indicata inoltre con la notazione:

$$\left. \frac{\partial(h, g_a)}{\partial z} \right|_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} \frac{dh}{dz} \\ \frac{dg_a}{dz} \end{pmatrix}_{\bar{z}}$$

la *matrice Jacobiana* dei vincoli attivi in \bar{z} , conviene introdurre la seguente definizione.

Definizione 2.5 - Considerato un punto $\bar{z} \in D$, si dice che esso è un punto di *regolarità per i vincoli* (o equivalentemente che i vincoli soddisfano l'ipotesi di regolarità in \bar{z}) se i gradienti dei vincoli attivi in \bar{z} sono linearmente indipendenti, e cioè se il rango della matrice Jacobiana dei vincoli attivi in \bar{z} è pari al numero di vincoli attivi in \bar{z} :

$$\text{rango } \left\{ \left. \frac{\partial(h, g_a)}{\partial z} \right|_{\bar{z}} \right\} = \mu + \sigma_a \quad \square$$

Si ha infine l'ulteriore definizione.

Definizione 2.6 - Con riferimento al Problema 2.3 si definisce *funzione Lagrangiana* una combinazione lineare della funzione obiettivo e delle funzioni di vincolo:

$$L(z, \lambda_0, \lambda, \eta) = \lambda_0 J(z) + \lambda^T h(z) + \eta^T g(z)$$

dove $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^\mu$, $\eta \in \mathbb{R}^\sigma$ sono coefficienti detti *moltiplicatori*.

Più in particolare per problemi con soli vincoli di egualanza i moltiplicatori sono detti di *Lagrange* mentre, per problemi con vincoli di egualanza e di disequalanza, sono detti di *Kuhn-Tucker*. \square

Verrà a questo punto dimostrato un Teorema che fornisce condizioni necessarie di minimo vincolato. In questo teorema e nel seguito si utilizzerà una notazione concisa del tipo $\left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|^*$ per indicare $\left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|_{z^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*}$

Teorema 2.7 - Con riferimento al Problema 2.3 sia $z^* \in D$ tale che $J, g, h \in C^1(S(z^*, \rho))$ per un $\rho > 0$; condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale vincolato è che esistano moltiplicatori $\lambda_0^* \in \mathbb{R}$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^\mu$, $\eta^* \in \mathbb{R}^\sigma$, non tutti simultaneamente nulli, tali che:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|^* = 0^T \quad (2.3)$$

$$\eta_i^* g_i(z^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \sigma \quad (2.4)$$

e inoltre:

$$\lambda_0^* \geq 0 \quad \eta_i^* \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, \sigma \quad (2.5)$$

Dimostrazione - Senza perdita di generalità si può assumere $J(z^*) \leq J(z)$, $\forall z \in D \cap S(z^*, \rho)$; inoltre si può assumere $z^* = 0$, $J(z^*) = 0$ e $g_i(z^*) = 0$, $i = 1, 2, \dots, \sigma_a$; $g_i(z^*) < 0$, $i = \sigma_a + 1, \sigma_a + 2, \dots, \sigma$. Sia $\varepsilon \in (0, \rho)$ tale che $g_i(z) < 0$, $i = \sigma_a + 1, \sigma_a + 2, \dots, \sigma$, $\forall z \in \overline{S}(z^*, \varepsilon)$.

Si dimostra in primo luogo che al numero ε corrisponde un numero $n_\varepsilon > 0$ tale che:

$$F_\varepsilon(z) = J(z) + \|z\|^2 + n_\varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^{\mu} h_i^2(z) + \sum_{i=1}^{\sigma_a} g_i^{+2}(z) \right\} > 0 \quad \forall z: \|z\| = \varepsilon \quad (2.6)$$

dove si è posto:

$$g_i^+(z) = \max\{g_i(z), 0\}$$

Procediamo per assurdo: esisteranno dei numeri positivi $n^{(1)}, n^{(2)}, \dots$ tendenti all'infinito e dei punti $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots$ di norma pari a ε tali che:

$$J(z^{(k)}) + \|z^{(k)}\|^2 \leq -n^{(k)} \left\{ \sum_{i=1}^{\mu} h_i^2(z^{(k)}) + \sum_{i=1}^{\sigma_a} g_i^{+2}(z^{(k)}) \right\} \quad (2.7)$$

In base alla Osservazione 1.16 la successione $\{z^{(k)}\}$ ammette una sottosuccessione convergente a un punto \hat{z} e senza perdita di generalità si può assumere che la sottosuccessione coincida con la stessa successione $\{z^{(k)}\}$. Per continuità si ha evidentemente:

$$\|\hat{z}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{(k)}\| = \varepsilon$$

$$J(\hat{z}) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(z^{(k)})$$

Dividendo la (2.7) per $-n^{(k)}$ e passando al limite per $k \rightarrow \infty$, per la continuità di h_i e g_i^+ si ha:

$$\sum_{i=1}^{\mu} h_i^2(\hat{z}) + \sum_{i=1}^{\sigma_a} g_i^{+2}(\hat{z}) = 0$$

La precedente eguaglianza implica $h_i(\hat{z}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, \mu$ e $g_i(\hat{z}) \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, \sigma_a$; inoltre $\hat{z} \in \overline{S}(z^*, \varepsilon)$ in quanto $\|\hat{z}\| = \varepsilon$ e quindi $g_i(\hat{z}) < 0$, $i = \sigma_a + 1, \sigma_a + 2, \dots, \sigma$; pertanto $\hat{z} \in D$. Inoltre, poiché $\hat{z} \in S(z^*, \rho)$, risulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(z^{(k)}) = J(\hat{z}) \geq J(z^*) = 0$$

Ma per la (2.7) deve risultare:

$$J(z^{(k)}) \leq -\|z^{(k)}\|^2 = -\varepsilon^2 \quad k = 1, 2, \dots$$

che contraddice la precedente. Pertanto è dimostrata l'esistenza di n_ε che soddisfa la (2.6).

La funzione $F_\varepsilon(z)$ definita dalla (2.6) è continua e quindi ammette un punto di minimo globale z_ε in $\overline{S}(z^*, \varepsilon)$. Poiché $F_\varepsilon(z_\varepsilon) \leq F_\varepsilon(z^*) = 0$ segue dalla (2.6) che $\|z_\varepsilon\| < \varepsilon$ e cioè z_ε è punto interno di $\overline{S}(z^*, \varepsilon)$. Pertanto la derivata di F_ε in z_ε deve annullarsi ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{dF_\varepsilon}{dz} \Big|_{z_\varepsilon} &= \frac{dJ}{dz} \Big|_{z_\varepsilon} + 2z_\varepsilon^T \\ &+ n_\varepsilon \left\{ \sum_{i=1}^{\mu} 2h_i(z_\varepsilon) \frac{dh_i}{dz} \Big|_{z_\varepsilon} + \sum_{i=1}^{\sigma_a} 2g_i^+(z_\varepsilon) \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z_\varepsilon} \right\} = 0^T \end{aligned} \quad (2.8)$$

Si definiscano le quantità:

$$\begin{aligned} C^{(\varepsilon)} &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\mu} [2n_\varepsilon h_i(z_\varepsilon)]^2 + \sum_{i=1}^{\sigma_a} [2n_\varepsilon g_i^+(z_\varepsilon)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \lambda_0^{(\varepsilon)} &= \frac{1}{C^{(\varepsilon)}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\lambda_i^{(\varepsilon)} = \frac{2n_\varepsilon h_i(z_\varepsilon)}{C^{(\varepsilon)}} \quad i = 1, 2, \dots, \mu \quad (2.10)$$

$$\eta_i^{(\varepsilon)} = \frac{2n_\varepsilon g_i^+(z_\varepsilon)}{C^{(\varepsilon)}} \quad i = 1, 2, \dots, \sigma_a \quad (2.11)$$

$$\eta_i^{(\varepsilon)} = 0 \quad i = \sigma_a + 1, \sigma_a + 2, \dots, \sigma \quad (2.12)$$

e si noti che, per costruzione, $\lambda_0^{(\varepsilon)} > 0$, $\eta_i^{(\varepsilon)} \geq 0$ per $i = 1, 2, \dots, \sigma$ e che:

$$\left(\lambda_0^{(\varepsilon)^2} + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^{(\varepsilon)^2} + \sum_{i=1}^{\sigma} \eta_i^{(\varepsilon)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

⁽¹⁾ È possibile verificare facilmente che la funzione $g_i^+{}^2$ è derivabile ovunque, anche nei punti in cui g_i^+ non lo è, e si ha:

$$\frac{dg_i^+{}^2}{dz} = 2g_i^+ \frac{dg_i}{dz}$$

Dividendo la (2.8) per $C^{(\varepsilon)}$ e tenendo conto delle (2.9–12) si ha:

$$\lambda_0^{(\varepsilon)} \left(\frac{dJ}{dz} \Big|_{z_\varepsilon} + 2z_\varepsilon^T \right) + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^{(\varepsilon)} \frac{dh_i}{dz} \Big|_{z_\varepsilon} + \sum_{i=1}^{\sigma} \eta_i^{(\varepsilon)} \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z_\varepsilon} = 0^T \quad (2.13)$$

A questo punto si consideri una successione $\{\varepsilon_k\}$ di numeri positivi minori di ρ che tende a zero. Per ciascuno degli ε_k valgono i risultati precedentemente dimostrati e in particolare esistono un vettore z_{ε_k} con $\|z_{\varepsilon_k}\| < \varepsilon_k$ e dei numeri $\lambda_0^{(\varepsilon_k)} > 0$, $\lambda_i^{(\varepsilon_k)}$, $i = 1, 2, \dots, \mu$, $\eta_i^{(\varepsilon_k)} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, \sigma$, costituenti un vettore di norma unitaria, tali da rendere soddisfatta la (2.13). La successione dei vettori $(\lambda_0^{(\varepsilon_k)} \lambda_1^{(\varepsilon_k)} \dots \lambda_\mu^{(\varepsilon_k)} \eta_1^{(\varepsilon_k)} \dots \eta_\sigma^{(\varepsilon_k)})^T$ di norma unitaria ammette una sottosuccessione convergente a un vettore $(\lambda_0^* \lambda_1^* \dots \lambda_\mu^* \eta_1^* \dots \eta_\sigma^*)^T$ anch'esso di norma unitaria e tale che $\lambda_0^* \geq 0$, $\eta_i^* \geq 0$ per $i = 1, 2, \dots, \sigma$, $\eta_i^* = 0$ per $i = \sigma_a + 1, \sigma_a + 2, \dots, \sigma$. Senza perdita di generalità si può assumere che la suddetta sottosuccessione coincida con la successione stessa. Pertanto, osservando che $\lim_{k \rightarrow \infty} z_{\varepsilon_k} = 0$, effettuando un passaggio al limite per $k \rightarrow \infty$ la tesi è completamente dimostrata. \square

Le condizioni sui moltiplicatori fornite dal precedente Teorema 2.7 possono essere rese più restrittive qualora si assuma che il punto di minimo z^* soddisfi la condizione di regolarità per i vincoli. Si ha in proposito il seguente teorema.

Teorema 2.8 - (Kuhn–Tucker). Con riferimento al Problema 2.3, nelle stesse ipotesi del Teorema 2.7 e con l'ipotesi aggiuntiva che z^* sia un punto di regolarità per i vincoli, condizioni necessarie affinché z^* sia un punto di minimo locale vincolato sono le stesse date dal Teorema 2.7 con la particolarizzazione:

$$\lambda_0^* = 1$$

Dimostrazione - Valgono i risultati dimostrati nel precedente Teorema 2.7 ma non può essere $\lambda_0^* = 0$ in quanto in tal caso la (2.3) diventerebbe:

$$\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i^* \frac{dh_i}{dz} \Big|_{z^*} + \sum_{i \in I_a(z^*)} \eta_i^* \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^*} = 0^T$$

che contraddice l'ipotesi di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi in z^* . Pertanto, dovendo essere $\lambda_0^* > 0$ è possibile dividere la funzione Lagrangiana per il suddetto moltiplicatore pervenendo ai nuovi moltiplicatori $(1, \lambda_1^*/\lambda_0^*, \dots, \lambda_\mu^*/\lambda_0^*, \eta_1^*/\lambda_0^*, \dots, \eta_\sigma^*/\lambda_0^*)$. \square

I Teoremi 2.7 e 2.8 forniscono delle condizioni che possono essere utilizzate per individuare i candidati per la soluzione del Problema 2.3. In particolare essi danno luogo a un sistema di $\nu + \mu + \sigma$ equazioni (le equazioni (2.3), (2.4) e l'equazione

$h(z^*) = 0$) con $2\sigma + 1$ o 2σ condizioni di diseguaglianza (le condizioni (2.5) e la condizione $g(z^*) \leq 0$ per il Teorema 2.7; le medesime diminuite della condizione $\lambda_0^* \geq 0$ per il Teorema 2.8) in $\nu + \mu + \sigma + 1$ o $\nu + \mu + \sigma$ incognite costituite dal vettore z^* e dai moltiplicatori.

Definizione 2.9 - Con riferimento al Problema 2.3 si definiscono *estremali* (o *punti di stazionarietà vincolati*) i vettori z^* che, assieme a opportuni moltiplicatori, soddisfano le condizioni necessarie di egualanza e di diseguaglianza fornite dai Teoremi 2.7 o 2.8.

Più in particolare si dicono *estremali normali* quelli forniti dal Teorema 2.7 con $\lambda_0^* \neq 0$. \square

Gli estremali non normali (con $\lambda_0^* = 0$) sono punti di non regolarità dei vincoli (come si deduce dalla (2.3)) e, come conseguenza di ciò, sono estremali indipendenti dalla funzione obiettivo, individuati dai soli vincoli (risultano essere estremali qualunque sia la funzione obiettivo).

Accanto agli estremali vanno considerati come candidati a fornire le eventuali soluzioni ottime i punti in cui non siano verificate le ipotesi dei teoremi (in cui quindi i teoremi non sono applicabili) e cioè i punti in cui la funzione obiettivo e/o le funzioni di vincolo non sono di classe C^1 per quanto riguarda il Teorema 2.7, gli stessi punti con l'aggiunta dei punti di non regolarità dei vincoli per quanto riguarda il Teorema 2.8.

Si osservi che, in base al Teorema 2.7, ogni estremale non normale è un punto di non regolarità dei vincoli, ma non tutti i punti di non regolarità dei vincoli sono estremali (normali o no) secondo il Teorema 2.7. Pertanto l'applicazione del Teorema 2.7 dà luogo, in generale, a un numero di candidati (estremali più punti di non applicabilità del teorema) minore di quelli dedotti mediante l'applicazione del Teorema 2.8 (in quest'ultimo caso si avrebbero fra i candidati tutti i punti di non regolarità dei vincoli).

Si osservi inoltre che per quanto riguarda l'applicazione del Teorema 2.7, i moltiplicatori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa positiva (e infatti il numero di incognite eccede di una unità il numero delle equazioni). Pertanto nell'applicazione del suddetto Teorema 2.7 è opportuno ricercare separatamente gli estremali normali caratterizzati da $\lambda_0^* \neq 0$ (ponendo $\lambda_0^* = 1$) e quelli non normali (ponendo $\lambda_0^* = 0$).

Si noti infine che la condizione di indipendenza lineare dei gradienti dei vincoli attivi data nella Definizione 2.5 non è la più debole atta a garantire $\lambda_0^* \neq 0$; sono state fornite altre condizioni meno restrittive ma più difficilmente verificabili in pratica.

Esempio 2.1 - Si consideri la funzione obiettivo:

$$J(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)$$

e sia l'insieme ammissibile D definito dai vincoli:

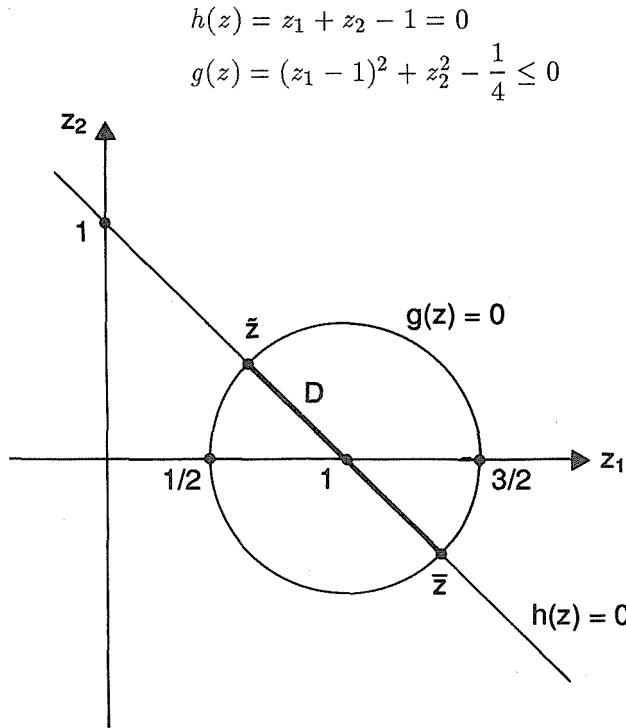


Fig. 2.1

L'insieme ammissibile D , rappresentato nella Fig. 2.1, è dato dal segmento di retta che ha per estremi i punti \tilde{z} e \bar{z} di coordinate rispettivamente $\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ e $\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. Si verifica facilmente che tutti i punti di tale segmento sono di regolarità per i vincoli. Infatti in tutti i punti di esso, eccettuati gli estremi, è attivo il solo vincolo di eguaglianza, e risulta $\frac{dh}{dz} = [1 \ 1] \neq 0^T$; negli estremi \tilde{z} e \bar{z} sono attivi entrambi i vincoli e, risultando rispettivamente:

$$\frac{dg}{dz}\Big|_{\tilde{z}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad \frac{dg}{dz}\Big|_{\bar{z}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

la condizione di indipendenza lineare della Definizione 2.5 è soddisfatta. Pertanto la condizione di regolarità dei vincoli è verificata in tutto l'insieme ammissibile.

Le condizioni di *Kuhn-Tucker* (Teorema 2.8) per il problema in esame sono:

$$z_1^* + \lambda^* + 2\eta^*(z_1^* - 1) = 0$$

$$z_2^* + \lambda^* + 2\eta^*z_2^* = 0$$

$$\eta^* \left[(z_1^* - 1)^2 + z_2^{*2} - \frac{1}{4} \right] = 0$$

$$\eta^* \geq 0$$

e ad esse si aggiungono le condizioni di ammissibilità:

$$z_1^* + z_2^* - 1 = 0$$

$$(z_1^* - 1)^2 + z_2^{*2} - \frac{1}{4} \leq 0$$

Si verifica facilmente che il caso $\eta^* = 0$ è da escludersi in quanto darebbe luogo alla soluzione $z_1^* = z_2^* = \frac{1}{2}$ che non è compatibile col vincolo di diseguaglianza. Posto allora $\eta^* > 0$ si ottengono le due soluzioni:

$$z_1^* = 1 \mp \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad z_2^* = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \lambda^* = -\frac{1}{2} \quad \eta^* = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Occorre scartare la soluzione corrispondente al segno inferiore in quanto dà luogo a un valore negativo per η^* . Resta pertanto un solo estremale (quello corrispondente ai segni superiori) che necessariamente fornisce l'unico punto di minimo globale vincolato, in quanto l'esistenza di una soluzione è garantita dal Teorema 1.43 (la funzione obiettivo è continua e l'insieme ammissibile è compatto).

Se per lo stesso esempio si prova ad applicare le condizioni necessarie del Teorema 2.7 si verifica facilmente che non esistono candidati corrispondenti a $\lambda_0^* = 0$, coerentemente con l'osservazione fatta che punti di regolarità dei vincoli (e tutti i punti di D sono tali) non possono essere estremali non normali.

Esempio 2.2 - Sia la funzione obiettivo:

$$J(z) = z_1$$

e sia l'insieme ammissibile D definito dai vincoli:

$$h(z) = (z_1 - 3)^2 + (z_2 - 2)^2 - 13 = 0$$

$$g(z) = (z_1 - 4)^2 + z_2^2 - 16 \leq 0$$

L'insieme ammissibile D , rappresentato in Fig. 2.2, è dato dall'arco di circonferenza $\tilde{z} \approx \bar{z}$. Poiché esso è compatto e J è continua, in base al Teorema 1.43, l'esistenza di un minimo globale vincolato è assicurata.

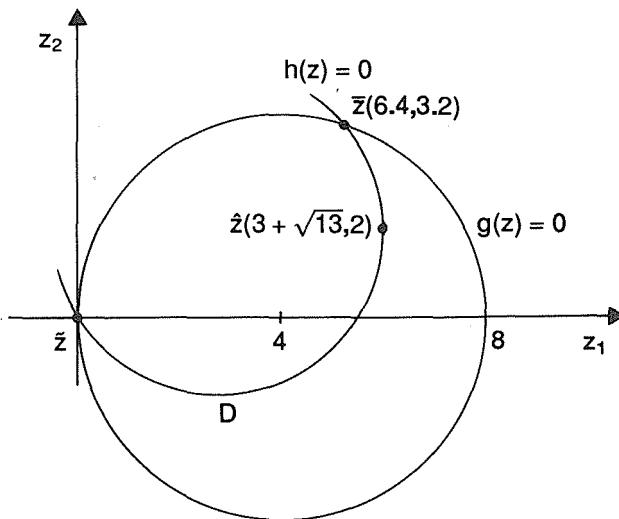


Fig. 2.2

Poiché, come è facile verificare, per tutti i punti di tale arco, esclusi gli estremi, è attivo il solo vincolo h e risulta:

$$\text{rango } \left\{ \frac{dh}{dz} \right\} = 1$$

mentre per gli estremi \tilde{z}, \bar{z} sono attivi sia h che g e risulta:

$$\text{rango } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{dh}{dz} \\ \frac{dg}{dz} \end{pmatrix}_{\tilde{z}, \bar{z}} \right\} = 2$$

In base alla Definizione 2.5 si ha che tutti i punti della regione ammissibile sono di regolarità per i vincoli.

Le condizioni necessarie di *Kuhn-Tucker* per l'esempio in esame sono:

$$1 + 2\lambda^*(z_1^* - 3) + 2\eta^*(z_1^* - 4) = 0$$

$$2\lambda^*(z_2^* - 2) + 2\eta^* z_2^* = 0$$

$$\eta^*[(z_1^* - 4)^2 + z_2^{*2} - 16] = 0$$

$$\eta^* \geq 0$$

e ad esse si aggiungono le condizioni di ammissibilità:

$$(z_1^* - 3)^2 + (z_2^* - 2)^2 - 13 = 0$$

$$(z_1^* - 4)^2 + z_2^{*2} - 16 \leq 0$$

Dalle precedenti equazioni si ottengono le tre soluzioni:

$$z_1^* = 0 \quad z_2^* = 0 \quad \eta^* = 1/8 \quad \lambda^* = 0 \quad \text{corrispondente al punto } \tilde{z}$$

$$z_1^* = 6.4 \quad z_2^* = 3.2 \quad \eta^* = 3/40 \quad \lambda^* = -1/5 \quad \text{corrispondente al punto } \bar{z}$$

$$z_1^* = 3 + \sqrt{13} \quad z_2^* = 2 \quad \eta^* = 0 \quad \lambda^* = -\frac{1}{2\sqrt{13}} \quad \text{corrispondente al punto } \hat{z}.$$

Come può verificarsi facilmente dalla Fig. 2.2, \tilde{z} è il punto di minimo globale vincolato, \bar{z} è un punto di minimo locale vincolato, mentre il punto \hat{z} è di massimo globale vincolato.

Anche per questo esempio si verifica facilmente che non esistono estremali non normali.

Esempio 2.3 - Si considerino la funzione obiettivo:

$$J(z) = -z_1$$

e l'insieme ammissibile D , definito dai vincoli:

$$g_1(z) = (z_1 - 1)^3 + z_2 \leq 0$$

$$g_2(z) = -z_1 \leq 0$$

$$g_3(z) = -z_2 \leq 0$$

rappresentato in Fig. 2.3. Anche in questo caso l'insieme ammissibile è compatto e la funzione obiettivo è continua e quindi l'esistenza di una soluzione è assicurata.

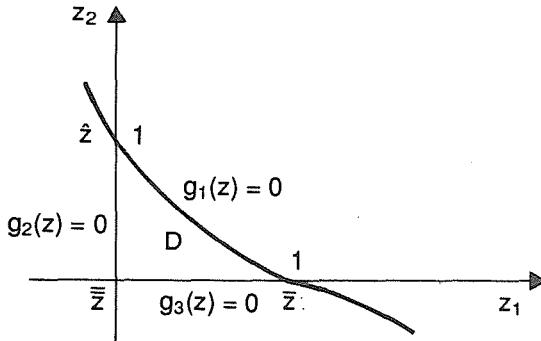


Fig. 2.3

Possiamo procedere alla sua ricerca utilizzando le condizioni del Teorema 2.7:

$$-\lambda_0^* + 3\eta_1^*(z_1^* - 1)^2 - \eta_2^* = 0$$

$$\eta_1^* - \eta_3^* = 0$$

$$\eta_1^*[(z_1^* - 1)^3 + z_2^*] = 0$$

$$\eta_2^* z_1^* = 0$$

$$\eta_3^* z_2^* = 0$$

$$\lambda_0^* \geq 0 \quad \eta_1^* \geq 0 \quad \eta_2^* \geq 0 \quad \eta_3^* \geq 0 \quad \text{non tutti nulli}$$

alle quali si aggiungono le condizioni di ammissibilità:

$$(z_1^* - 1)^3 + z_2^* \leq 0 \quad z_1^* \geq 0 \quad z_2^* \geq 0$$

Si può verificare che assumendo $\lambda_0^* \neq 0$ (e in particolare ponendo ad esempio $\lambda_0^* = 1$) non si ottengono soluzioni alle predette condizioni e cioè non esistono estremali normali.

Assumendo $\lambda_0^* = 0$ si ottiene invece una infinità di soluzioni date da:

$$z_1^* = 1, \quad z_2^* = 0, \quad \eta_2^* = 0, \quad \eta_1^* = \eta_3^* > 0$$

da cui si desume che l'unico punto di minimo globale vincolato è il punto \bar{z} di coordinate $(1, 0)$.

Si osserva che lo stesso esempio poteva essere risolto utilizzando il Teorema 2.8. Occorre in tal caso verificare preliminarmente la regolarità dei vincoli. Si verifica facilmente che i punti in cui è attivo uno solo dei vincoli g_i sono tutti di regolarità; sono anche di regolarità i punti \bar{z} e $\bar{\bar{z}}$ dove sono attivi rispettivamente g_1, g_2 e g_2, g_3 . Per il punto \bar{z} , dove sono attivi g_1, g_3 si ha invece:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial(g_1, g_3)}{\partial z} \Big|_{\bar{z}} \right\} = \text{rango } \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = 1$$

e quindi il punto \bar{z} è l'unico punto dell'insieme ammissibile in cui il Teorema 2.8 non è applicabile.

L'applicazione dello stesso teorema, come già osservato, non fornisce estremali. Si perviene perciò alla stessa conclusione che la soluzione del problema deve necessariamente essere nell'unico punto \bar{z} in cui il teorema non è applicabile.

Esempio 2.4 - Si consideri la funzione obiettivo:

$$J(z) = -z_2$$

da minimizzare sullo stesso insieme ammissibile D considerato nel precedente Esempio 2.3. Utilizzando il Teorema 2.7 le condizioni necessarie di minimo sono:

$$3\eta_1^*(z_1^* - 1)^2 - \eta_2^* = 0$$

$$-\lambda_0^* + \eta_1^* - \eta_3^* = 0$$

$$\eta_1^*[(z_1^* - 1)^3 + z_2^*] = 0$$

$$\eta_2^* z_1^* = 0$$

$$\eta_3^* z_2^* = 0$$

$$\lambda_0^* \geq 0 \quad \eta_1^* \geq 0 \quad \eta_2^* \geq 0 \quad \eta_3^* \geq 0 \quad \text{non tutti nulli}$$

alle quali si aggiungono le condizioni di ammissibilità:

$$(z_1^* - 1)^3 + z_2^* \leq 0 \quad z_1^* \geq 0 \quad z_2^* \geq 0$$

Corrispondentemente alla alternativa $\lambda_0^* = 0$ si ottiene l'estremale $z_1^* = 1, z_2^* = 0$ con $\eta_1^* = \eta_3^* > 0$ arbitrari e $\eta_2^* = 0$. Corrispondentemente alla alternativa $\lambda_0^* > 0$, assumendo $\lambda_0^* = 1$, si ritrova $z_1^* = 1, z_2^* = 0$ con $\eta_1^* - \eta_3^* = 1, \eta_2^* = 0, \eta_3^*$ arbitrario non negativo e inoltre l'estremale $z_1^* = 0, z_2^* = 1$ con $\eta_1^* = 1, \eta_2^* = 3, \eta_3^* = 0$. Si ha evidentemente che, fra i due estremali trovati, il punto $\hat{z} = (0, 1)$ costituisce la soluzione del problema.

Esempio 2.5 - Si desidera minimizzare la funzione:

$$J(z) = z_2$$

nella regione ammissibile D individuata dai vincoli:

$$g_1(z) = -z_1 \leq 0$$

$$g_2(z) = (z_1 - 1)^2 + z_2^2 - 1 \leq 0$$

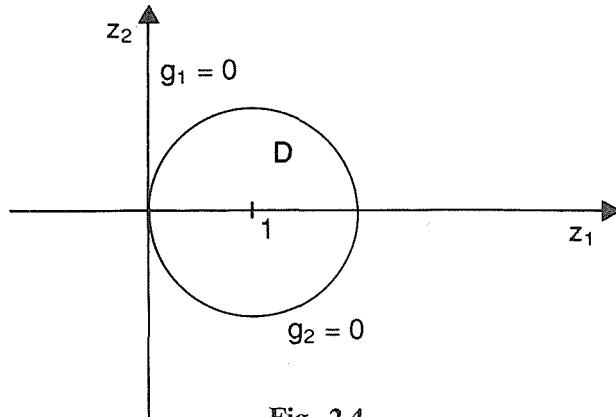


Fig. 2.4

La regione ammissibile D rappresentata in Fig. 2.4 è costituita dai punti che soddisfano il secondo vincolo, è compatta. La funzione J è continua e pertanto è garantita l'esistenza di una soluzione. In base al Teorema 2.7 tutti gli estremali sono ottenibili risolvendo le condizioni:

$$-\eta_1^* + 2\eta_2^*(z_1^* - 1) = 0$$

$$\lambda_0^* + 2\eta_2^* z_2^* = 0$$

$$\eta_1^* z_1^* = 0$$

$$\eta_2^* [(z_1^* - 1)^2 + z_2^{*2} - 1] = 0$$

$$\lambda_0^* \geq 0 \quad \eta_1^* \geq 0 \quad \eta_2^* \geq 0 \quad \text{non tutti nulli}$$

alle quali si aggiungono le condizioni di ammissibilità:

$$z_1^* \geq 0$$

$$(z_1^* - 1)^2 + z_2^{*2} - 1 \leq 0$$

Si verifica facilmente che non si ottengono soluzioni per $\lambda_0^* = 0$ e quindi non esistono estremali non normali. Supponendo $\lambda_0^* \neq 0$ e assumendo $\lambda_0^* = 1$ si ottiene l'unico estremale normale $z_1^* = 1, z_2^* = -1$ con $\eta_1^* = 0, \eta_2^* = 1/2$ e pertanto tale punto è la soluzione ottima.

Si osservi che il punto $z = 0$ è un punto di non regolarità dei vincoli e che tuttavia esso non si trova fra gli estremali del problema forniti dal teorema considerato. Qualora si fosse studiato lo stesso problema utilizzando le condizioni del Teorema 2.8, si sarebbe ottenuto lo stesso estremale $z_1^* = 1, z_2^* = -1, \eta_1^* = 0, \eta_2^* = 1/2$ ma, accanto ad esso, si sarebbe dovuto considerare come candidato il punto $z = 0$ in cui il teorema stesso non è applicabile.

Allo scopo di fornire condizioni sufficienti di minimo locale vincolato conviene introdurre le seguenti notazioni.

Con riferimento al generico estremale z^* che soddisfa le condizioni necessarie del Teorema 2.7, sia:

$$\widehat{I}_a(z^*) = \{i: g_i(z^*) = 0, \eta_i^* > 0\}$$

Evidentemente $\widehat{I}_a(z^*) \subset I_a(z^*)$. Sia inoltre:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z^*) = \left\{ y \in \mathbb{R}^\nu : \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^*} y = 0, \forall i \in \widehat{I}_a(z^*); \right. \\ \left. \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^*} y \leq 0, \forall i \in I_a(z^*); \quad \frac{dh_j}{dz} \Big|_{z^*} y = 0, j = 1, 2, \dots, \mu \right\} \end{aligned}$$

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.10 - Con riferimento al Problema 2.3, sia $z^* \in D$ tale che $J, h, g \in C^2(S(z^*, \rho))$ per un $\rho > 0$; se esistono i moltiplicatori $\lambda_0^* \in \mathbb{R}$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^\mu$ e $\eta^* \in \mathbb{R}^\sigma$ non tutti nulli che soddisfano le (2.3), (2.4), (2.5), e se risulta:

$$y^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} y > 0 \quad \forall y \in \mathcal{H}(z^*), y \neq 0 \tag{2.14}$$

allora z^* è un punto di minimo locale stretto vincolato.

Dimostrazione - Si supponga che z^* non sia un punto di minimo locale stretto vincolato: allora esiste un numero $\varepsilon > 0$ ed una successione $\{z^{(k)}\}$ di punti ammissibili, convergente a z^* , tali che $z^{(k)} \in S(z^*, \varepsilon)$, $z^{(k)} \neq z^*$, e tale che:

$$J(z^{(k)}) \leq J(z^*) \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Si ponga:

$$z^{(k)} = z^* + \vartheta^{(k)} y^{(k)} \quad \vartheta^{(k)} > 0, \quad \|y^{(k)}\| = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

In base alla Osservazione 1.16, la successione $\{y^{(k)}\}$ ammette una sottosuccessione, che per semplicità verrà ancora rappresentata con $\{y^{(k)}\}$, che converge a \tilde{y} , con $\|\tilde{y}\| = 1$. La corrispondente sottosuccessione $\{\vartheta^{(k)}\}$ converge ovviamente a zero. Per ogni k di tale sottosuccessione si ha:

$$\begin{aligned} g_i(z^{(k)}) - g_i(z^*) &= \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^* + \bar{\alpha}_i^{(k)} \vartheta^{(k)} y^{(k)}} \vartheta^{(k)} y^{(k)} \leq 0 \quad 0 \leq \bar{\alpha}_i^{(k)} \leq 1, \quad \forall i \in I_a(z^*) \\ h_j(z^{(k)}) - h_j(z^*) &= \frac{dh_j}{dz} \Big|_{z^* + \alpha_j^{(k)} \vartheta^{(k)} y^{(k)}} \vartheta^{(k)} y^{(k)} = 0 \quad 0 \leq \alpha_j^{(k)} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots \mu \\ J(z^{(k)}) - J(z^*) &= \frac{dJ}{dz} \Big|_{z^* + \alpha^{(k)} \vartheta^{(k)} y^{(k)}} \vartheta^{(k)} y^{(k)} \leq 0 \quad 0 \leq \alpha^{(k)} \leq 1 \end{aligned}$$

Dividendo le precedenti relazioni per $\vartheta^{(k)}$ e passando al limite per $k \rightarrow \infty$, si ottiene:

$$\frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^*} \tilde{y} \leq 0 \quad \forall i \in I_a(z^*) \quad (2.16)$$

$$\frac{dh_j}{dz} \Big|_{z^*} \tilde{y} = 0 \quad j = 1, 2, \dots \mu \quad (2.17)$$

$$\frac{dJ}{dz} \Big|_{z^*} \tilde{y} \leq 0 \quad (2.18)$$

Si supponga ora che esista almeno un $i \in \widehat{I}_a(z^*)$ per il quale la (2.16) sussiste con il segno di diseguaglianza stretta: dalla (2.3), tenendo conto delle (2.16) e (2.17) si ha:

$$\lambda_0^* \frac{dJ}{dz} \Big|_{z^*} \tilde{y} = - \sum_{i=1}^{\sigma} \eta_i^* \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^*} \tilde{y} - \sum_{j=1}^{\mu} \lambda_j^* \frac{dh_j}{dz} \Big|_{z^*} \tilde{y} > 0$$

Poiché $\lambda_0^* \geq 0$ la precedente è in contrasto con la (2.18). Pertanto per ogni $i \in \widehat{I}_a(z^*)$ si ha $\frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^*} \tilde{y} = 0$, il che considerando anche le (2.16), (2.17) equivale ad affermare che $\tilde{y} \in \mathcal{D}(z^*)$.

D'altra parte, in base alla formula di *Taylor* e ricordando che $(z^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*)$ soddisfa la (2.3), risulta:

$$\begin{aligned} L(z^{(k)}, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*) &= L(z^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*) \\ + \frac{1}{2} \vartheta^{(k)2} y^{(k)T} \frac{\partial^2 L(z, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*)}{\partial z^2} \Big|_{z^* + \beta^{(k)} \vartheta^{(k)} y^{(k)}} y^{(k)} &\leq \beta^{(k)} \leq 1 \quad (2.19) \end{aligned}$$

e poiché $z^{(k)}$ e z^* sono punti ammissibili, tenuto conto delle (2.4), (2.5) si ha:

$$\begin{aligned} L(z^{(k)}, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*) - L(z^*, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*) \\ = \lambda_0^* [J(z^{(k)}) - J(z^*)] + \sum_{i=1}^{\sigma} \eta_i^* g_i(z^{(k)}) \leq 0 \quad (2.20) \end{aligned}$$

Confrontando le (2.19) e (2.20) si deduce:

$$\frac{1}{2} \vartheta^{(k)2} y^{(k)T} \frac{\partial^2 L(z, \lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*)}{\partial z^2} \Big|_{z^* + \beta^{(k)} \vartheta^{(k)} y^{(k)}} y^{(k)} \leq 0$$

Dividendo infine la precedente relazione per $\frac{1}{2} \vartheta^{(k)2}$ e passando al limite per $k \rightarrow \infty$, si ha:

$$\tilde{y}^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} \quad \tilde{y} \leq 0$$

la quale, avendo già mostrato che $\tilde{y} \in \mathcal{Y}(z^*)$, è in contrasto con la (2.14). \square

Esempio 2.6 - Si consideri nuovamente il problema trattato nell'Esempio 2.2. Come già visto esistono i tre estremali $\tilde{z}, \hat{z}, \bar{z}$ che verificano le condizioni del Teorema 2.7.

Nel punto \tilde{z} il vincolo di diseguaglianza è attivo e il corrispondente moltiplicatore è positivo, pertanto si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\tilde{z}) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dy}{dz} \Big|_{\tilde{z}} y = 0 ; \frac{dh}{dz} \Big|_{\tilde{z}} y = 0 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0 ; 3y_1 + 2y_2 = 0\} = \{0\} \end{aligned}$$

La condizione (2.14) è quindi banalmente soddisfatta essendo vuoto l'insieme $\{y \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathcal{Y}(\tilde{z}), y \neq 0\}$ in cui essa deve essere verificata. Il punto \tilde{z} è perciò di minimo locale stretto vincolato.

Analogamente, in \bar{z} il vincolo di diseguaglianza è attivo con moltiplicatore positivo e perciò:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\bar{z}) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dy}{dz} \Big|_{\bar{z}} y = 0 ; \frac{dh}{dz} \Big|_{\bar{z}} y = 0 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : 0.3y_1 + 0.4y_2 = 0 ; 1.7y_1 + 0.6y_2 = 0\} = \{0\} \end{aligned}$$

per cui vale per \bar{z} quanto detto per \tilde{z} .

In \tilde{z} il vincolo di diseguaglianza non è attivo e quindi:

$$\mathcal{H}(\tilde{z}) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dh}{dz} \Big|_{\tilde{z}} y = 0 \right\} = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0\}$$

Si verifica inoltre facilmente che:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|_{\tilde{z}, \lambda_0=1, \tilde{\lambda}, \tilde{\eta}} = -\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} < 0$$

Pertanto poiché $\mathcal{H}(\tilde{z})$ contiene elementi diversi dall'origine, la condizione (2.14) non è soddisfatta e quindi non si può affermare che \tilde{z} è un punto di minimo.

Esempio 2.7 - Si consideri il problema trattato nell'Esempio 2.4. Gli estremali che verificano le condizioni del Teorema 2.7, come già visto, sono:

$$\bar{z}_1 = 1, \bar{z}_2 = 0, \bar{\lambda}_0 = 0, \bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_3 > 0, \bar{\eta}_2 = 0$$

$$\tilde{z}_1 = 1, \tilde{z}_2 = 0, \tilde{\lambda}_0 = 1, \tilde{\eta}_1 - \tilde{\eta}_3 = 1, \tilde{\eta}_2 = 0$$

$$\hat{z}_1 = 0, \hat{z}_2 = 1, \hat{\lambda}_0 = 1, \hat{\eta}_1 = 1, \hat{\eta}_2 = 3, \hat{\eta}_3 = 0$$

Per il primo estremale, essendo attivi g_1 e g_3 con moltiplicatori positivi, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{z}) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dg_1}{dz} \Big|_{\bar{z}} y = 0 ; \frac{dg_3}{dz} \Big|_{\bar{z}} y = 0 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 0\} \end{aligned}$$

Poiché risulta:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|_{\bar{z}, \lambda_0, \bar{\eta}} = 0$$

e $\mathcal{H}(\bar{z})$ contiene punti diversi dall'origine, la condizione (2.14) non è verificata e quindi non si possono trarre conclusioni circa la natura dell'estremale \bar{z} .

Per il secondo estremale sono ancora attivi g_1 e g_3 e risulta evidentemente $\tilde{\eta}_1 > 0$ e $\tilde{\eta}_3 \geq 0$; perciò si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tilde{z}) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dg_1}{dz} \Big|_{\tilde{z}} y = 0 ; \frac{dg_3}{dz} \Big|_{\tilde{z}} y \leq 0 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 = 0\} \end{aligned}$$

D'altra parte risulta ancora:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|_{\tilde{z}, \lambda_0, \tilde{\eta}} = 0$$

e perciò anche in questo secondo caso non si può affermare che l'estremale \tilde{z} (coincidente con \bar{z}) è un punto di minimo.

Per il terzo estremale sono attivi g_1 e g_2 con moltiplicatori positivi e perciò:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(\tilde{z}) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dg_1}{dz} \Big|_{\tilde{z}} y = 0 ; \frac{dg_2}{dz} \Big|_{\tilde{z}} y = 0 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : -3z_1 + z_2 = 0 ; -z_1 = 0\} = \{0\}\end{aligned}$$

La condizione (2.14) è perciò soddisfatta in \tilde{z} e tale punto è di minimo locale vincolato stretto.

Un caso di particolare interesse si ha quando in un estremale i moltiplicatori corrispondenti ai vincoli di diseguaglianza attivi sono tutti positivi. Si dà in proposito la seguente definizione.

Definizione 2.11 - In un estremale z^* i moltiplicatori η^* soddisfano la proprietà di *stretta complementarità* se risulta $\eta_i^* > 0, \forall i \in I_a(z^*)$. \square

Evidentemente, nell'ipotesi di stretta complementarità, poiché $I_a(z^*) = \widehat{I}_a(z^*)$, l'insieme $\mathcal{Y}(z^*)$ risulta essere il sottospazio lineare così definito:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(z^*) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^\nu : \frac{dg_i}{dz} \Big|_{z^*} y = 0, \forall i \in I_a(z^*) ; \right. \\ &\quad \left. \frac{dh_j}{dz} \Big|_{z^*} y = 0, j = 1, 2, \dots, \mu \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^\nu : \frac{\partial(h, g_a)}{\partial z} \Big|_{z^*} y = 0 \right\}\end{aligned}$$

Pertanto la condizione (2.14), sufficiente a garantire che l'estremale sia un punto di minimo locale vincolato, richiede che la forma quadratica $y^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} y$ sia definita positiva sul sottospazio lineare $\mathcal{Y}(z^*)$. Per verificare la suddetta condizione può essere utilizzato il seguente teorema, che si riporta senza dimostrazione.

Teorema 2.12 - Sia A una matrice simmetrica di dimensioni $\nu \times \nu$ e B una matrice di dimensioni $\mu \times \nu$ con $\mu \leq \nu$, la forma quadratica $y^T A y$ è definita positiva sul sottospazio lineare definito dall'equazione $B y = 0$ se e solo se, considerata la matrice di dimensioni $(\nu + \mu) \times (\nu + \mu)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{pmatrix}$$

gli ultimi $\nu - \mu$ minori principali della medesima hanno determinanti di segno pari a $(-1)^\mu$. \square

Esempio 2.8 - Si consideri la funzione obiettivo:

$$J(z) = z_1 + z_2$$

con il vincolo di eguaglianza:

$$h(z) = z_1^2 + z_2^2 - 1 = 0$$

La regione ammissibile D è costituita dalla circonferenza con centro nell'origine e raggio unitario, che è un insieme compatto; poiché la funzione obiettivo è continua segue che il problema considerato ammette soluzione.

È immediato verificare che il vincolo h è regolare in tutti i punti dell'insieme ammissibile e perciò gli estremali del problema possono essere ottenuti utilizzando le condizioni del Teorema 2.8 (ovviamente $J, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$).

La funzione Lagrangiana è in questo caso:

$$L(z, \lambda) = z_1 + z_2 + \lambda(z_1^2 + z_2^2 - 1)$$

e le condizioni necessarie sono:

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda^* z_1^* &= 0 \\ 1 + 2\lambda^* z_2^* &= 0 \end{aligned}$$

con la condizione di ammissibilità:

$$z_1^{*2} + z_2^{*2} - 1 = 0$$

Tali condizioni danno luogo alla coppia di estremali:

$$\begin{aligned} z_1^{*\prime} &= z_2^{*\prime} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda^{*\prime} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ z_1^{*\prime\prime} &= z_2^{*\prime\prime} = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda^{*\prime\prime} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Per studiare la natura degli estremali si può utilizzare il Teorema 2.10; occorre analizzare la forma quadratica:

$$y^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|_{z^*} y = 2\lambda^*(y_1^2 + y_2^2)$$

sul sottospazio lineare:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z^*) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dh}{dz} \Big|_{z^*} y = 0 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : z_1^* y_1 + z_2^* y_2 = 0\} \end{aligned}$$

Per il primo estremale la forma quadratica si riduce a $-\sqrt{2}(y_1^2 + y_2^2)$ che è definita negativa in tutto \mathbb{R}^2 e quindi non si può affermare che tale estremale sia punto di minimo locale vincolato. Per il secondo estremale la forma quadratica vale $\sqrt{2}(y_1^2 + y_2^2)$ che è definita positiva in tutto \mathbb{R}^2 e quindi in particolare sul sottospazio lineare di equazione $y_1 + y_2 = 0$; pertanto il secondo estremale è punto di minimo locale vincolato stretto e, per l'esistenza della soluzione, è punto di minimo globale vincolato.

Alla stessa conclusione si perviene utilizzando il Teorema 2.12: occorre verificare che il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & \left. \frac{dh}{dz} \right|^* \\ \left. \frac{dh}{dz} \right|^{T*} & \left. \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right|^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2z_1^* & 2z_2^* \\ 2z_1^* & 2\lambda^* & 0 \\ 2z_2^* & 0 & 2\lambda^* \end{pmatrix}$$

abbia segno negativo. Il determinante della precedente matrice è pari a $-8\lambda^*(z_1^{*2} + z_2^{*2})$ e risulta positivo in corrispondenza al primo estremale e negativo in corrispondenza al secondo.

Esempio 2.9 - Si consideri la funzione obiettivo:

$$J(z) = -z_1 z_2$$

in presenza del vincolo di egualianza:

$$h(z) = z_1 + z_2 - 2 = 0$$

Anche in questo caso tutti i punti ammissibili sono di regolarità per il vincolo e quindi i candidati a fornire la soluzione sono ottenibili dalle condizioni del Teorema 2.8. Il Lagrangiano è:

$$L(z, \lambda) = -z_1 z_2 + \lambda(z_1 + z_2 - 2)$$

Le condizioni necessarie sono:

$$\begin{aligned} -z_2^* + \lambda^* &= 0 \\ -z_1^* + \lambda^* &= 0 \end{aligned}$$

e la condizione di ammissibilità è:

$$z_1^* + z_2^* - 2 = 0$$

L'unico estremale del problema è il punto $z_1^* = z_2^* = 1$ con $\lambda^* = 1$. La forma quadratica del Teorema 2.10 diviene:

$$y^T \left. \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right|^* y = -2y_1 y_2$$

ed essa va studiata sul sottospazio lineare:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(z^*) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \frac{dh}{dz} \Big|_{z^*} y = 0 \right\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^2 : y_1 + y_2 = 0\}\end{aligned}$$

Evidentemente su tale sottospazio la forma quadratica vale $2y_1^2$ ed è quindi definita positiva: pertanto l'estremale trovato è punto di minimo locale vincolato stretto.

L'applicazione del Teorema 2.12 richiede l'esame del segno di:

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = -2$$

Poiché tale segno è negativo resta confermato che l'estremale è punto di minimo locale vincolato stretto.

Per il Problema 2.3 può essere fornita una condizione sufficiente di minimo globale vincolato introducendo opportune ipotesi di convessità sulle funzioni J e g e di linearità sulle funzioni h . Prima di dare la suddetta condizione è necessario dimostrare il seguente risultato sulla convessità dell'insieme ammissibile.

Lemma 2.13 - Considerato l'insieme D definito dalle (2.1) e (2.2), se g_i , $i = 1, 2, \dots, \sigma$ sono funzioni convesse in D e se h_j , $j = 1, 2, \dots, \mu$ sono funzioni del tipo:

$$h_j(z) = c_j^T z + b_j \quad c_j \in \mathbb{R}^\nu, \quad b_j \in \mathbb{R} \quad (2.21)$$

allora l'insieme D è convesso.

Dimostrazione - Siano z' e z'' due punti dell'insieme D . Per la generica combinazione convessa di essi risulta:

$$\begin{aligned}h_j[\alpha z' + (1 - \alpha)z''] &= \alpha(c_j^T z' + b_j) + (1 - \alpha)(c_j^T z'' + b_j) \\ &= \alpha h_j(z') + (1 - \alpha)h_j(z'') = 0 \quad \forall z', z'' \in D \\ &\quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ j &= 1, 2, \dots, \mu \\ g_i[\alpha z' + (1 - \alpha)z''] &\leq \alpha g_i(z') + (1 - \alpha)g_i(z'') \leq 0 \quad \forall z', z'' \in D \\ &\quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ i &= 1, 2, \dots, \sigma\end{aligned}$$

□

Verrà ora dimostrato il seguente risultato.

Teorema 2.14 - Considerato il Problema 2.3, nell'ipotesi che J e g_i , $i = 1, 2, \dots, \sigma$ siano funzioni convesse su D e che h_j , $j = 1, 2, \dots, \mu$ siano funzioni lineari del tipo (2.21), se z^0 è un punto ammissibile tale che $J, g \in C^1(z^0)$ e se esistono moltiplicatori $\lambda^0 \in \mathbb{R}^\mu$ e $\eta^0 \in \mathbb{R}^\sigma$ tali che risulti:

$$\frac{dJ}{dz} \Big|_{z^0} + \lambda^{0T} \frac{dh}{dz} \Big|_{z^0} + \eta^{0T} \frac{dg}{dz} \Big|_{z^0} = 0^T \quad (2.22)$$

$$\eta_i^0 g_i(z^0) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \sigma \quad (2.23)$$

$$\eta_i^0 \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, \sigma \quad (2.24)$$

allora z^0 è un punto di minimo globale vincolato. Se inoltre J è strettamente convessa su D , z^0 è l'unico punto di minimo globale vincolato.

Dimostrazione - Considerato un qualunque punto z ammissibile, per la (2.24) risulta evidentemente:

$$J(z) \geq J(z) + \lambda^{0T} h(z) + \eta^{0T} g(z)$$

Per il Lemma 2.13 l'insieme D è convesso e le funzioni $J; h_i$, $i = 1, 2, \dots, \mu$; g_j , $j = 1, 2, \dots, \sigma$ sono convesse su D ; pertanto tenuto conto del punto i) dell'Osservazione 1.25, si ha:

$$\begin{aligned} J(z) &\geq J(z^0) + \frac{dJ}{dz} \Big|_{z^0} (z - z^0) + \lambda^{0T} \left[h(z^0) + \frac{dh}{dz} \Big|_{z^0} (z - z^0) \right] \\ &\quad + \eta^{0T} \left[g(z^0) + \frac{dg}{dz} \Big|_{z^0} (z - z^0) \right] \end{aligned}$$

Utilizzando le (2.22) e (2.23), risulta perciò:

$$J(z) \geq J(z^0) \quad \forall z \in D$$

Ricordando ancora il punto i) dell'Osservazione 1.25, nel caso di stretta convessità di J , procedendo in maniera analoga a quanto già fatto, si perviene alla:

$$J(z) > J(z^0) \quad \forall z \in D, z \neq z^0$$

che dimostra l'unicità del punto di ottimo z^0 . □

Osservazione 2.15 - Tenuto conto dei precedenti Teoremi 2.8 e 2.14, si ha evidentemente che se alle ipotesi del Teorema 2.14 si aggiunge l'ipotesi di regolarità dei vincoli in z^0 , le condizioni (2.22), (2.23), (2.24) sono necessarie e sufficienti di minimo globale vincolato.

Esempio 2.10 - Applicando il precedente Teorema 2.14 al problema dell'Esempio 2.1 si ritrova facilmente la conclusione che il punto $z^0 = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ è l'unico punto di minimo globale vincolato.

Esempio 2.11 - Sia la funzione obiettivo:

$$J(z) = \frac{1}{2} z^T Q z \quad z \in \mathbb{R}^\nu$$

con Q matrice simmetrica definita positiva e sia il vincolo espresso dalla equazione:

$$h(z) = Az - b = 0$$

con A matrice di dimensioni $\mu \times \nu$, $\mu < \nu$, con rango $A = \mu$.

Poiché sono soddisfatte le ipotesi dell'Osservazione 2.15 e poiché J è strettamente convessa in \mathbb{R}^ν la condizione necessaria e sufficiente per l'unica soluzione ottima si scrive:

$$\frac{dJ}{dz} \Big|_{z^0} + \lambda^{0T} \frac{dh}{dz} \Big|_{z^0} = 0^T$$

con la condizione di ammissibilità:

$$h(z^0) = 0$$

Tali condizioni forniscono:

$$Qz^0 + A^T \lambda^0 = 0$$

$$Az^0 - b = 0$$

da cui si deduce:

$$z^0 = Q^{-1} A^T (AQ^{-1}A^T)^{-1} b$$

$$\lambda^0 = -(AQ^{-1}A^T)^{-1} b$$



Capitolo 3

Programmazione non lineare e controllo ottimo

3.1 INTRODUZIONE

L'ottimizzazione del controllo per un sistema dinamico a tempo continuo rispetto a un indice di costo prefissato dà luogo a un problema di minimo di un funzionale su un insieme contenuto in un opportuno spazio di funzioni.

In numerosi casi significativi però, il problema della determinazione della legge di controllo ottima si riconduce a un problema di minimo di una funzione di un numero finito di variabili, sottoposte a vincoli. In tutti questi casi, evidentemente, i metodi analitici idonei ad affrontare il problema sono quelli della programmazione matematica.

Più in particolare nel seguito verranno considerati tre problemi tipici di controllo ottimo che possano essere trattati nel contesto delle metodologie della programmazione non lineare: essi sono l'ottimizzazione del controllo di sistemi dinamici a tempo discreto, l'ottimizzazione del controllo di sistemi dinamici in regime permanente, l'ottimizzazione parametrica dei sistemi di controllo.

3.2 CONTROLLO OTTIMO DI SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Viene qui di seguito formulato un problema di controllo ottimo per un sistema a tempo discreto, che può essere anche interpretato come la discretizzazione rispetto al tempo di un corrispondente problema a tempo continuo.

Problema 3.1 - Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla equazione:

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

con $x(k) \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato e $u(k) \in \mathbb{R}^p$ vettore di controllo. Sia assegnato lo stato iniziale:

$$x(0) = x^i$$

e si supponga che stato e controllo debbano soddisfare in ogni istante a vincoli del tipo:

$$q^{(k)}[x(k), u(k)] \leq 0 \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.1)$$

e che lo stato finale debba appartenere ad un insieme ammissibile definito mediante relazioni del tipo:

$$q^{(N)}[x(N)] \leq 0 \quad (3.2)$$

con $q^{(k)}, k = 0, 1, \dots, N$ funzione vettoriale di dimensione σ_k .

Si determinino, se esistono, la legge di controllo $u^0(k), k = 0, 1, \dots, (N-1)$ e la corrispondente evoluzione dello stato $x^0(k), k = 1, 2, \dots, N$, che soddisfano i vincoli (3.1), (3.2) e che rendono minimo un indice di costo del tipo:

$$\begin{aligned} J[x(1), x(2), \dots, x(N), u(0), u(1), \dots, u(N-1)] \\ = \sum_{k=0}^{N-1} l[x(k), u(k), k] + G[x(N)] \end{aligned} \quad \square$$

Il problema considerato può immediatamente essere ricondotto al Problema 2.3 di programmazione non lineare ponendo:

$$z = [x^T(1) \ x^T(2) \ \dots \ x^T(N) \ u^T(0) \ u^T(1) \ \dots \ u^T(N-1)] \quad (3.3)$$

$$h(z) = \begin{bmatrix} x(1) - f[x^i, u(0), 0] \\ x(2) - f[x(1), u(1), 1] \\ \vdots \\ x(N) - f[x(N-1), u(N-1), N-1] \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$g(z) = \begin{bmatrix} q^{(0)}[x^i, u(0)] \\ q^{(1)}[x(1), u(1)] \\ \vdots \\ q^{(N-1)}[x(N-1), u(N-1)] \\ q^{(N)}[x(N)] \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La ricerca della soluzione ottima può essere effettuata utilizzando le condizioni necessarie e quelle sufficienti fornite dai Teoremi 2.7, 2.8, 2.10 ed eventualmente 2.14. In particolare, con riferimento alle condizioni necessarie date dal Teorema 2.8, secondo la Definizione 2.5 risultano di regolarità per i vincoli i punti ammissibili \bar{z} per i quali sono linearmente indipendenti i vettori:

$$\frac{dh_j}{dz} \Big|_{\bar{z}}^T \quad j = 1, 2, \dots, n_N$$

$$\frac{dg_i}{dz} \Big|_{\bar{z}}^T \quad i \in I_a(\bar{z})$$

dove $I_a(\bar{z})$ rappresenta l'insieme degli indici delle componenti di g attive in \bar{z} . Si noti in proposito che gli nN vettori del primo gruppo sono certamente linearmente indipendenti in tutto $\mathbb{R}^{(n+p)N}$, come può facilmente verificarsi osservando che:

$$\frac{\partial h}{\partial(x(1), x(2) \dots x(N))} = \begin{pmatrix} I & & & & & \\ -\frac{\partial f}{\partial x(1)} & I & & & & 0 \\ 0 & -\frac{\partial f}{\partial x(2)} & I & & & \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\partial f}{\partial x(N-1)} & I \end{pmatrix}$$

Introdotti i vettori di moltiplicatori relativi al generico istante k (e cioè alle componenti h_k e g_k dei vincoli di eguaglianza e di diseguaglianza):

$$\lambda(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad \eta(k) \in \mathbb{R}^{\sigma_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N$$

e posto:

$$\lambda = [\lambda^T(1) \quad \lambda^T(2) \quad \dots \quad \lambda^T(N)]^T \in \mathbb{R}^{nN}$$

$$\eta = [\eta^T(0) \quad \eta^T(1) \quad \dots \quad \eta^T(N)]^T \in \mathbb{R}^\sigma, \quad \sigma = \sum_{k=0}^N \sigma_k$$

assumendo che le ipotesi del Teorema 2.8 siano soddisfatte, le condizioni necessarie di ottimo per il problema considerato si possono scrivere come segue:

$$\lambda^*(k) = \frac{\partial f[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \Big|^{*T} \lambda^*(k+1) - \frac{\partial l[x(k), u(k), k]}{\partial x(k)} \Big|^{*T}$$

$$- \frac{\partial q^{(k)}[x(k), u(k)]}{\partial x(k)} \Big|^{*T} \eta^*(k) \quad k = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (3.6)$$

$$\lambda^*(N) = - \frac{\partial G[x(N)]}{\partial x(N)} \Big|^{*T} - \frac{\partial q^{(N)}[x(N)]}{\partial x(N)} \Big|^{*T} \eta^*(N) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial l[x(k), u(k), k]}{\partial u(k)} \Big|^{*T} - \frac{\partial f[x(k), u(k), k]}{\partial u(k)} \Big|^{*T} \lambda^*(k+1)$$

$$+ \frac{\partial q^{(k)}[x(k), u(k)]}{\partial u(k)} \Big|^{*T} \eta^*(k) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.8)$$

$$\eta^{*T}(k) q^{(k)}[x^*(k), u^*(k)] = 0 \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.9)$$

$$\eta^*(k) \geq 0 \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.10)$$

Le prime due condizioni possono essere interpretate come un'equazione di evoluzione dinamica a tempo discreto per il vettore $\lambda^*(k)$ con l'asse dei tempi invertito.

Si noti che la formulazione del Problema 3.1 fa riferimento a un numero fissato N di istanti discreti. Qualora il problema nasca dalla discretizzazione di un corrispondente problema a tempo continuo con istante finale non fissato, supponendo che i sottointervalli di campionamento siano di eguale durata Δ , tra le variabili del problema rispetto a cui ottimizzare va inclusa anche tale ampiezza Δ , mentre il numero N va tenuto fissato. Ovviamente in questo caso, accanto alle condizioni necessarie già considerate, occorre introdurre una ulteriore condizione, costituita dall'annullamento della derivata del Lagrangiano del problema, fatta rispetto alla variabile Δ .

Si osservi anche che, qualora sussistano le ipotesi più restrittive su cui si basa il Teorema 2.14, e cioè convessità delle funzioni J e g e linearità dei vincoli di eguaglianza h , le condizioni (3.6-10) sono sufficienti oltre che necessarie di ottimo.

Esempio 3.1 - Si consideri il sistema lineare a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + b(k)u(k) \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \\ x(0) &= x^i \end{aligned}$$

con $x(k) \in \mathbb{R}$ e $u(k) \in \mathbb{R}$. Si determinino la funzione di controllo u^0 e la relativa evoluzione dello stato x^0 , che rendono minima la funzione obiettivo:

$$J(x(N), u(0), u(1), \dots, u(N-1)) = \frac{a^2}{2}x^2(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k)$$

e soddisfano i vincoli $|u(k)| \leq 1$, $k = 0, 1, \dots, (N-1)$ e cioè:

$$\begin{aligned} u(k) - 1 &\leq 0 \\ -u(k) - 1 &\leq 0 \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \end{aligned}$$

Ricordando le notazioni (3.3), (3.4), (3.5) per il problema considerato risulta:

$$\frac{dh}{dz} = \begin{bmatrix} -b(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b(1) & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b(2) & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b(N-1) & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\frac{dg}{dz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Si verifica facilmente che le righe della matrice (3.11) assieme alle righe della matrice (3.12) corrispondenti agli eventuali vincoli di diseguaglianza attivi, risultano sempre linearmente indipendenti (a tale proposito si osservi che non possono essere simultaneamente attive coppie di componenti di g consecutive con indici nell'ordine dispari e pari). Ne consegue che ogni punto ammissibile è di regolarità. Poiché la funzione obiettivo e la funzione g sono convesse mentre la funzione h è lineare, in base all'Osservazione 2.15, si possono utilizzare le condizioni del Teorema 2.14 come condizioni necessarie e sufficienti di ottimo.

La funzione Lagrangiana per il problema considerato è:

$$\begin{aligned} L[x(1), x(2), \dots, x(N), u(0), u(1), \dots, u(N-1), \lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(N), \\ \eta_1(0), \eta_2(0), \eta_1(1), \eta_2(1), \dots, \eta_1(N-1), \eta_2(N-1)] \\ = \frac{a^2}{2} x^2(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda(k+1)[x(k+1) - x(k) - b(k)u(k)] \\ + \sum_{k=0}^{N-1} \{\eta_1(k)[u(k)-1] - \eta_2(k)[u(k)+1]\} \end{aligned}$$

Le condizioni (3.6-10) necessarie e in questo caso anche sufficienti di ottimo si particolarizzano come segue:

$$\lambda^0(k) = \lambda^0(k+1) \quad k = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (3.13)$$

$$\lambda^0(N) = -a^2 x^0(N) \quad (3.14)$$

$$u^0(k) - b(k)\lambda^0(k+1) + \eta_1^0(k) - \eta_2^0(k) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.15)$$

$$\eta_1^0(k)[u^0(k)-1] = 0 \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.16)$$

$$\eta_2^0(k)[u^0(k)+1] = 0 \quad (3.17)$$

$$\eta_1^0(k) \geq 0, \eta_2^0(k) \geq 0 \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Dalle (3.13) e (3.14) si deduce:

$$\lambda^0(k) = -a^2 x^0(N) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.18)$$

A questo punto è possibile considerare i seguenti quattro casi:

- i) $\eta_1^0(k), \eta_2^0(k) > 0$ che è impossibile in quanto implica $u^0(k) = 1$ e $u^0(k) = -1$
- ii) $\eta_1^0(k) > 0, \eta_2^0(k) = 0$ in corrispondenza a cui si ha $u^0(k) = 1$ e dalla (3.15), tenendo conto della (3.18):

$$\eta_1^0(k) = -1 - b(k)a^2x^0(N)$$

Quest'ultima implica:

$$b(k)a^2x^0(N) < -1$$

- iii) $\eta_1^0(k) = 0, \eta_2^0(k) > 0$ in corrispondenza a cui si ha $u^0(k) = -1$ e dalla (3.15), tenendo conto della (3.18):

$$\eta_2^0(k) = -1 + b(k)a^2x^0(N)$$

Quest'ultima implica:

$$b(k)a^2x^0(N) > 1$$

- iv) $\eta_1^0(k) = \eta_2^0(k) = 0$ in corrispondenza a cui dalla (3.15), tenendo conto della (3.18), si ha:

$$u^0(k) = -b(k)a^2x^0(N)$$

che, in base ai vincoli sull'ampiezza del controllo, implica:

$$|b(k)a^2x^0(N)| \leq 1$$

Tenendo conto dei risultati ottenuti per i casi ii), iii), iv), si può scrivere in generale per il controllo ottimo:

$$u^0(k) = -\text{sat}\{b(k)a^2x^0(N)\} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.19)$$

avendo definito la funzione *saturazione*:

$$\text{sat}\{\alpha\} = \begin{cases} -1 & \forall \alpha \leq -1 \\ \alpha & \forall \alpha \in [-1, 1] \\ 1 & \forall \alpha \geq 1 \end{cases}$$

D'altra parte, dalla equazione dinamica del sistema, utilizzando la (3.19) si ha che $x^0(N)$ è soluzione dell'equazione non lineare:

$$x^0(N) = x^i - \sum_{k=0}^{N-1} b(k) \text{sat}\{b(k)a^2x^0(N)\} \quad (3.20)$$

Nel caso particolare in cui il sistema da controllare sia stazionario e cioè sia $b(k) = b$, $k = 0, 1, \dots, (N-1)$, le (3.19) e (3.20) diventano:

$$u^0(k) = -\text{sat}\{ba^2x^0(N)\}$$

$$x^0(N) = x^i - Nb \operatorname{sat}\{ba^2 x^0(N)\}$$

Osserviamo a questo punto che:

- i) se $x^0(N) \leq -\frac{1}{ba^2}$ risulta:

$$\begin{aligned} u^0(k) &= 1 \quad k = 0, 1, \dots (N-1) \\ x^0(N) &= x^i + Nb \end{aligned}$$

da cui si può concludere che:

$$u^0(k) = 1 \quad k = 0, 1, \dots (N-1)$$

se risulta:

$$x^i \leq -\frac{1 + Nb^2 a^2}{ba^2}$$

- ii) se $x^0(N) \geq \frac{1}{ba^2}$ risulta:

$$\begin{aligned} u^0(k) &= -1 \quad k = 0, 1, \dots (N-1) \\ x^0(N) &= x^i - Nb \end{aligned}$$

da cui si può concludere che:

$$u^0(k) = -1 \quad k = 0, 1, \dots (N-1)$$

se risulta:

$$x^i \geq \frac{1 + Nb^2 a^2}{ba^2}$$

- iii) se $-\frac{1}{ba^2} \leq x^0(N) \leq \frac{1}{ba^2}$ risulta:

$$u^0(k) = -ba^2 x^0(N) \quad k = 0, 1, \dots (N-1)$$

$$x^0(N) = \frac{x^i}{1 + Nb^2 a^2}$$

da cui si può concludere che:

$$u^0(k) = -\frac{ba^2}{1 + Nb^2 a^2} x^i \quad k = 0, 1, \dots (N-1)$$

se risulta:

$$-\frac{1 + Nb^2 a^2}{ba^2} \leq x^i \leq \frac{1 + Nb^2 a^2}{ba^2}$$

In definitiva i risultati precedenti possono sintetizzarsi nella forma:

$$u^0(k) = -\text{sat}\left\{\frac{ba^2}{1+Nb^2a^2}x^i\right\} \quad k = 0, 1, \dots, (N-1)$$

$$x^0(k) = x^i - kb \cdot \text{sat}\left\{\frac{ba^2}{1+Nb^2a^2}x^i\right\} \quad k = 0, 1, \dots, N$$

Esempio 3.2 - Dato il sistema:

$$x(k+1) = (1 + \Delta)x(k) + \Delta u(k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

con stati iniziale e finale assegnati:

$$\begin{aligned} x(0) &= x^i \\ x(N) &= 0 \end{aligned}$$

si desidera rendere minimo l'indice di costo:

$$J(u(0), u(1), \dots, u(N-1), \Delta) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2}u^2(k) \right)$$

Tenuto conto delle condizioni sullo stato iniziale e finale, i vincoli di eguaglianza possono essere scritti nella forma:

$$h(z) = \begin{pmatrix} x(1) - (1 + \Delta)x^i - \Delta u(0) \\ x(2) - (1 + \Delta)x(1) - \Delta u(1) \\ \dots \\ x(N-1) - (1 + \Delta)x(N-2) - \Delta u(N-2) \\ -(1 + \Delta)x(N-1) - \Delta u(N-1) \end{pmatrix} = 0$$

dove si è posto:

$$z = (x(1) \ x(2) \ \dots \ x(N-1) \ u(0) \ u(1) \ \dots \ u(N-1) \ \Delta)^T$$

Poiché risulta:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dz} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -(1 + \Delta) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -(1 + \Delta) \\ -\Delta & 0 & \dots & 0 & -x^i - u(0) \\ 0 & -\Delta & \dots & 0 & -x(1) - u(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x(N-2) - u(N-2) \\ 0 & 0 & \dots & -\Delta & -x(N-1) - u(N-1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si osserva che per $\Delta > 0$, per ogni punto ammissibile si ha:

$$\text{rango } \left\{ \frac{dh}{dz} \right\} = N$$

Pertanto in ogni punto ammissibile i vincoli sono regolari e conseguentemente si può utilizzare la condizione necessaria fornita dal Teorema 2.8.

La funzione Lagrangiana per il precedente problema assume l'espressione:

$$\begin{aligned} L[x(1), x(2), \dots, x(N-1), u(0), u(1), \dots, u(N-1), \Delta, \lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(N)] \\ = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2} u^2(k) \right) + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda(k+1)[x(k+1) - (1 + \Delta)x(k) - \Delta u(k)] \end{aligned}$$

Le condizioni necessarie di ottimo sono:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x(k)} \right|^* = \lambda^*(k) - (1 + \Delta^*)\lambda^*(k+1) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, (N-1) \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial u(k)} \right|^* = \Delta^* u^*(k) - \Delta^* \lambda^*(k+1) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \Delta} \right|^* = \sum_{k=0}^{N-1} \left(1 + \frac{1}{2} u^{*2}(k) \right) - \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^*(k+1)[x^*(k) + u^*(k)] = 0 \quad (3.23)$$

Dalla (3.22) si ricava:

$$\lambda^*(k) = (1 + \Delta^*)^{N-k} \lambda^*(N) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

che, sostituita nella (3.21), fornisce:

$$u^*(k) = (1 + \Delta^*)^{N-k-1} \lambda^*(N) \quad k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (3.24)$$

Per quanto riguarda lo stato, si ha:

$$x^*(k) = (1 + \Delta^*)^k x^i + \sum_{i=0}^{k-1} (1 + \Delta^*)^{k-i-1} \Delta^* u^*(i) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

e sostituendo la (3.24) si deduce facilmente:

$$x^*(k) = (1 + \Delta^*)^k x^i + \Delta^* (1 + \Delta^*)^{N+k} \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{(1 + \Delta^*)^2} \right]^i \lambda^*(N)$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 x^*(k) &= (1 + \Delta^*)^k x^i \\
 &+ \Delta^*(1 + \Delta^*)^{N+k} \left\{ \frac{\frac{1}{(1 + \Delta^*)^{2(k+1)}} - 1}{\frac{1}{(1 + \Delta^*)^2} - 1} \right\} \lambda^*(N) \\
 &= (1 + \Delta^*)^k x^i + (1 + \Delta^*)^N \frac{(1 + \Delta^*)^k - (1 + \Delta^*)^{-k}}{2 + \Delta^*} \lambda^*(N) \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Imponendo la condizione sullo stato finale si ricava:

$$\lambda^*(N) = \frac{x^i(2 + \Delta^*)}{(1 + \Delta^*)^{-N} - (1 + \Delta^*)^N}$$

che, sostituita nelle (3.24) e (3.25), fornisce:

$$\begin{aligned}
 u^*(k) &= x^i \frac{2 + \Delta^*}{(1 + \Delta^*)^{-N} - (1 + \Delta^*)^N} (1 + \Delta^*)^{N-k-1} \quad (3.26) \\
 k &= 0, 1, \dots, (N-1)
 \end{aligned}$$

$$x^*(k) = x^i \frac{(1 + \Delta^*)^{N-k} - (1 + \Delta^*)^{-N+k}}{(1 + \Delta^*)^N - (1 + \Delta^*)^{-N}} \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.27)$$

A questo punto, per determinare il valore di Δ^* , occorre imporre la condizione (3.23); sostituendo in essa la (3.21) si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{N-1} u^*(k) \left[\frac{1}{2} u^*(k) + x^*(k) \right] = N$$

e sostituendo in questa ultima le (3.26) e (3.27) si ricava una equazione non lineare in Δ^* da risolvere numericamente.

3.3 CONTROLLO OTTIMO IN REGIME STAZIONARIO

In molti problemi applicativi più che l'ottimizzazione della evoluzione temporale del sistema controllato, interessa di fatto quella del suo funzionamento in regime stazionario (nell'ipotesi che tale funzionamento di regime esista), cioè quando tutte le variabili di interesse risultano costanti nel tempo. In questo caso il problema di controllo ottimo può essere così riformulato:

Problema 3.2 - Si consideri il sistema in regime stazionario descritto dall'equazione:

$$0 = f(x, u) \quad (3.28)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$; nell'ipotesi che stato e controllo debbano soddisfare a vincoli del tipo:

$$g(x, u) \leq 0 \quad (3.29)$$

si determinino, se esistono, i valori del controllo u^0 e dello stato x^0 che soddisfano i vincoli (3.28) e (3.29) e rendono minimo un indice di costo $J(x, u)$ opportunamente definito. \square

Evidentemente anche questo risulta un problema di programmazione non lineare rispetto al vettore incognito:

$$z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

caratterizzato dai vincoli di eguaglianza (3.28) e da quelli di diseguaglianza (3.29). Per esso si possono quindi particolarizzare le condizioni dei Teoremi 2.7, 2.8, 2.10 ed eventualmente 2.14, purché le ipotesi da questi richieste siano soddisfatte.

Esempio 3.3 - Si consideri il sistema non lineare descritto in regime stazionario dall'equazione:

$$f(x, u) = xu - d = 0 \quad (3.30)$$

con $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ e in cui $d > 0$ rappresenta un disturbo costante e noto. Si desidera determinare il valore del controllo u^0 , appartenente all'intervallo ammmissibile $[u_m, u_M]$, con $u_M > u_m > 0$, e il corrispondente valore dello stato x^0 , che rendono minimo l'indice di costo:

$$J(x, u) = \frac{1}{2}(u^2 + \alpha x^2), \quad \alpha > 0$$

Le limitazioni sui valori ammissibili per il controllo si traducono nei vincoli di diseguaglianza:

$$\begin{aligned} g_1(u) &= u - u_M \leq 0 \\ g_2(u) &= -u + u_m \leq 0 \end{aligned}$$

È facile verificare che in tutti i punti ammissibili la condizione di regolarità dei vincoli è soddisfatta. Infatti, per tutti i punti in cui i vincoli di diseguaglianza non sono attivi (e che soddisfano a quello di eguaglianza) risulta $\frac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ (ed anche $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$). Inoltre per il punto $u = u_M$, $x = \frac{d}{u_M}$ in cui, oltre al vincolo di eguaglianza, è attivo il vincolo g_1 , si ha:

$$\det \left\{ \frac{\partial(f, g_1)}{\partial(x, u)} \Big|_{\frac{d}{u_M}, u_m} \right\} = \det \left\{ \begin{pmatrix} u_M & \frac{d}{u_M} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = u_M \neq 0$$

Analogamente per il punto in cui sono attivi f e g_2 si ha:

$$\det \left\{ \frac{\partial(f, g_2)}{\partial(x, u)} \Big|_{\frac{d}{u_m}, u_m} \right\} = -u_m \neq 0$$

La funzione Lagrangiana si scrive nella forma:

$$L(x, u, \lambda, \eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2}(u^2 + \alpha x^2) + \lambda(xu - d) + \eta_1(u - u_M) + \eta_2(-u + u_m)$$

e le condizioni necessarie sono:

$$\frac{\partial L}{\partial x}^* = \alpha x^* + \lambda^* u^* = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u}^* = u^* + \lambda^* x^* + \eta_1^* - \eta_2^* = 0 \quad (3.32)$$

$$\eta_1^*(u^* - u_M) = 0$$

$$\eta_2^*(-u^* + u_m) = 0$$

$$\eta_1^* \geq 0 \quad \eta_2^* \geq 0$$

È possibile distinguere i seguenti quattro casi:

- i) $\eta_1^* > 0, \eta_2^* > 0$ che è impossibile in quanto implica $u^* = u_m$ e $u^* = u_M$.
- ii) $\eta_1^* > 0, \eta_2^* = 0$ in corrispondenza a cui si ha:

$$u^* = u_M$$

Dalla (3.30) si ricava:

$$x^* = \frac{d}{u_M}$$

e dalle (3.31) e (3.32) si ha:

$$\lambda^* = -\alpha \frac{d}{u_M^2}$$

$$\eta_1^* = -u_M + \alpha \frac{d^2}{u_M^3}$$

che costituisce un estremale purché $\eta_1^* > 0$, cioè purché $\sqrt{\alpha}d > u_M^2$.

- iii) $\eta_1^* = 0, \eta_2^* > 0$ in corrispondenza a cui si ha:

$$u^* = u_m$$

e, analogamente al caso precedente, si ricava:

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{d}{u_m} \\ \lambda^* &= -\alpha \frac{d}{u_m^2} \\ \eta_2^* &= u_m - \alpha \frac{d^2}{u_m^3}\end{aligned}$$

che costituisce un estremale purché $\eta_2^* > 0$, cioè purché $\sqrt{\alpha}d < u_m^2$.

- iv) $\eta_1^* = 0, \eta_2^* = 0$ in corrispondenza a cui, dalle (3.31) e (3.32) si ha:

$$u^* = \pm \sqrt{\alpha}x^*$$

Sostituendo la precedente nella (3.30) si osserva che il segno inferiore va scartato e si ricava:

$$x^* = \pm \frac{\sqrt{d}}{\alpha^{\frac{1}{4}}}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}u^* &= \pm \sqrt{d}\alpha^{\frac{1}{4}} \\ \lambda^* &= -\sqrt{\alpha}\end{aligned}$$

Infine, tenendo conto dei vincoli sul controllo, si può concludere che in questo iv) caso si ha il solo estremale corrispondente ai segni superiori, purché $u_m^2 \leq \sqrt{\alpha}d \leq u_M^2$.

In conclusione si determina per il problema una sola soluzione estremale che ha una diversa espressione a seconda del valore di $\sqrt{\alpha}d$ rispetto all'intervallo $[u_m^2, u_M^2]$.

In effetti si può affermare che essa è la soluzione ottima, in quanto tale soluzione esiste risultando l'insieme ammissibile compatto (è limitato e coincide con la propria frontiera) ed essendo J continua.

Esempio 3.4 - Sia dato il sistema lineare descritto in regime stazionario dall'equazione:

$$f(x, u) = Ax + bu + d = 0 \quad (3.33)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}^n$ vettore di disturbo costante e noto e con A matrice non singolare. Si desidera determinare il valore del controllo u^0 , appartenente all'intervallo ammissibile $[-1, 1]$ e il corrispondente vettore di stato x^0 , che rendono minimo l'indice di costo:

$$J(x, u) = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^2) \quad (3.34)$$

con Q matrice simmetrica semidefinita positiva.

Le limitazioni sul controllo si traducono nei vincoli di diseguaglianza:

$$\begin{aligned} g_1(u) &= u - 1 \leq 0 \\ g_2(u) &= -u - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Il vincolo di eguaglianza (3.33) può essere esplicitato rispetto a x , ottenendo:

$$x = -A^{-1}bu - A^{-1}d$$

Sostituendo tale espressione nella (3.34) ed eliminando il termine costante $\frac{1}{2}d^T A^{-T} Q A^{-1} d$, si ottiene il nuovo indice di costo dipendente dal solo controllo:

$$\bar{J}(u) = \frac{1}{2}(1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b)u^2 + d^T A^{-T} Q A^{-1} bu$$

Poiché i vincoli di diseguaglianza soddisfano la condizione di regolarità e sono funzioni convesse e poiché anche la funzione \bar{J} è strettamente convessa, in base all'Osservazione 2.15, si può affermare che l'unica soluzione ottima, se esiste, è fornita dalle condizioni (2.22), (2.23), (2.24) che si particolarizzano come segue:

$$\begin{aligned} (1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b)u^0 + d^T A^{-T} Q A^{-1} b + \eta_1^0 - \eta_2^0 &= 0 \\ \eta_1^0(u^0 - 1) &= 0 \\ \eta_2^0(u^0 + 1) &= 0 \\ \eta_1^0 \geq 0 &\quad \eta_2^0 \geq 0 \end{aligned}$$

Esaminando i diversi casi possibili rispetto ai vincoli di non negatività dei moltiplicatori η_1^0 e η_2^0 , si verifica facilmente che l'unica soluzione è:

$$\begin{aligned} u^0 &= 1 && \text{se } \frac{d^T A^{-T} Q A^{-1} b}{1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b} < -1 \\ u^0 &= -1 && \text{se } \frac{d^T A^{-T} Q A^{-1} b}{1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b} > 1 \\ u^0 &= -\frac{d^T A^{-T} Q A^{-1} b}{1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b} && \text{se } \frac{d^T A^{-T} Q A^{-1} b}{1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b} \in [-1, 1] \end{aligned}$$

In forma compatta tale soluzione può essere riscritta come:

$$u^0 = -\text{sat}\left\{\frac{d^T A^{-T} Q A^{-1} b}{1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b}\right\}$$

e per il corrispondente stato ottimo si ha:

$$x^0 = A^{-1}b \text{sat}\left\{\frac{d^T A^{-T} Q A^{-1} b}{1 + b^T A^{-T} Q A^{-1} b}\right\} - A^{-1}d$$

3.4 OTTIMIZZAZIONE PARAMETRICA DEI SISTEMI DI CONTROLLO

In molti problemi di controllo la struttura del sistema controllante è fissata mentre resta variabile un vettore z di parametri (ad esempio guadagni, costanti di tempo, ecc.) per i quali generalmente sono presenti vincoli di egualanza e/o di disegualanza che corrispondono a limitazioni di significato fisico sui parametri stessi o, più in generale, a specifiche condizioni sul funzionamento del sistema (ad esempio condizioni di stabilità o limitazioni per i valori assunti dal controllo e/o dallo stato).

Quando la qualità del funzionamento del sistema di controllo è valutata mediante un indice di costo J , dipendente direttamente o indirettamente dal vettore dei parametri incogniti, l'ottimizzazione del sistema di controllo si traduce evidentemente in un tipico problema di programmazione non lineare, le cui variabili sono appunto costituite dal vettore dei parametri.

In questo contesto, risultando svariati i possibili casi che si possono presentare, non è possibile fornire una formulazione generale del problema; per questo motivo ci si limiterà nel seguito a presentare alcuni esempi.

Esempio 3.5 - Si consideri il semplice sistema di controllo a controreazione, rappresentato in Fig. 3.1, in cui, supposto assegnato il valore iniziale della uscita $y(0) = y^i$ e assumendo un segnale di riferimento a gradino $r(t) = R\delta_{-1}(t)$, si desidera determinare il valore ottimo del guadagno $K \in [0, K_M]$, così da rendere minimo l'indice di costo:

$$J(K) = \int_0^\infty [R - y(t; K)]^2 dt = \int_0^\infty \varepsilon^2(t; K) dt$$

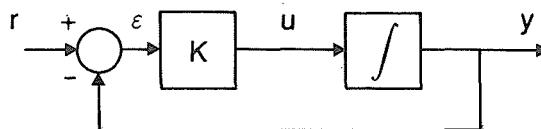


Fig. 3.1

Il problema considerato può essere interpretato come un semplice esempio di ottimizzazione di un sistema di asservimento di posizione e la limitazione imposta ai valori del guadagno corrisponde all'esigenza di mantenere lineare il funzionamento del sistema e cioè di evitare saturazioni nell'amplificatore o nel motore.

Si ricava facilmente che, per il problema considerato, l'andamento dell'uscita è:

$$y(t; K) = R(1 - e^{-Kt}) + y^i e^{-Kt} \quad \forall t \geq 0$$

e quindi l'espressione dell'indice di costo è:

$$J(K) = \frac{(R - y^i)^2}{2K}$$

da cui si deduce immediatamente che il valore ottimo del guadagno è:

$$K^0 = K_M$$

Qualora come indice di costo si assuma una funzione quadratica dell'errore e del controllo e cioè:

$$\bar{J}(K) = \int_0^\infty [\varepsilon^2(t; K) + \rho u^2(t; K)] dt \quad \rho > 0$$

poiché risulta:

$$u(t; K) = K\varepsilon(t; K) = K(R - y^i)e^{-Kt}$$

il valore del nuovo indice di costo è:

$$\bar{J}(K) = \frac{(R - y^i)^2}{2K} (1 + \rho K^2)$$

Poiché si verifica facilmente che \bar{J} è convessa in $(0, K_M]$ ed è illimitata superiormente per $K \rightarrow 0$, il valore ottimo del guadagno o è quello che annulla la $\frac{d\bar{J}}{dK}$, se risulta ammissibile, o è pari a K_M . La $\frac{d\bar{J}}{dK}$ si annulla per $K^* = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ e perciò il guadagno ottimo è pari a tale valore se $\frac{1}{\sqrt{\rho}} \leq K_M$, altrimenti è dato da K_M .

Osservazione 3.3 - Il calcolo dell'indice di costo in funzione dei parametri incogniti può costituire un problema oneroso, quando la struttura del sistema di controllo non sia così semplice come nel precedente esempio. Nel caso in cui l'indice di costo sia esprimibile come combinazione lineare di integrali del tipo:

$$\int_0^\infty w^2(t; z) dt$$

in cui w è una generica variabile del sistema di controllo (ad esempio una componente del controllo, dello stato, dell'uscita, ecc.) e z è il vettore dei parametri incogniti, mediante il teorema di Parseval è possibile ricondurre il calcolo dei suddetti integrali al calcolo di integrali delle trasformate di Laplace delle grandezze stesse:

$$\int_0^\infty w^2(t; z) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} W(j\omega; z) W(-j\omega; z) d(j\omega)$$

Inoltre se la trasformata $W(j\omega; z)$ è una funzione razionale propria di $j\omega$ (come avviene nel caso di sistemi di controllo lineari, stazionari) il calcolo degli integrali

nel piano complesso può essere effettuato mediante il teorema dei residui. In particolare il valore di integrali del tipo sudetto, con:

$$W(j\omega; z) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(z)(j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n a_i(z)(j\omega)^i}$$

è stato espresso analiticamente in funzione dei coefficienti $a_i(z)$ e $b_i(z)$ per valori di $n \leq 10$; i risultati sono tabulati ad esempio in ⁽¹⁾ e si riportano qui di seguito per $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} n = 1 \quad & \int_0^\infty w^2(t, z) dt = \frac{b_0^2(z)}{2a_0(z)a_1(z)} \\ n = 2 \quad & \int_0^\infty w^2(t, z) dt = \frac{b_1^2(z)a_0(z) + b_0^2(z)a_2(z)}{2a_0(z)a_1(z)a_2(z)} \\ n = 3 \quad & \int_0^\infty w^2(t, z) dt \\ & = \frac{b_2^2(z)a_0(z)a_1(z) + [b_1^2(z) - 2b_0(z)b_2(z)]a_0(z)a_3(z) + b_0^2(z)a_2(z)a_3(z)}{2a_0(z)a_3(z)[a_1(z)a_2(z) - a_0(z)a_3(z)]} \end{aligned}$$

Esempio 3.6 - Si consideri il sistema di controllo a struttura fissa rappresentato in Fig. 3.2. Si suppone che lo stato iniziale degli integratori sia nullo e che il segnale di riferimento sia un gradino:

$$r(t) = R\delta_{-1}(t)$$

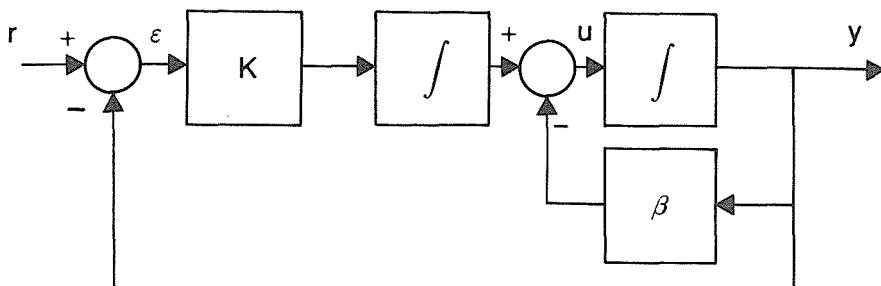


Fig. 3.2

⁽¹⁾ G.C. Newton, L.A. Gould, J.F. Kaiser, "Analytical Design of Linear Feedback Controls", John Wiley & Sons Inc., New York, 1957.

Supposto fissato il guadagno $K > 0$, si desidera determinare il coefficiente $\beta > 0$ in modo tale da rendere minimo l'indice di costo:

$$J(\beta) = \int_0^\infty \varepsilon^2(t; \beta) dt$$

con il vincolo sull'energia del controllo:

$$g(\beta) = \int_0^\infty u^2(t; \beta) dt - M \leq 0, \quad M > 0$$

Si verifica facilmente che le trasformate di Laplace di $\varepsilon(t; \beta)$ e di $u(t; \beta)$ per il problema considerato, sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} E(s; \beta) &= \frac{s + \beta}{s^2 + \beta s + K} R \\ U(s; \beta) &= \frac{K}{s^2 + \beta s + K} R \end{aligned}$$

Per $n = 2$ dalle tavole precedentemente citate nell'Osservazione 3.3 si ha:

$$\begin{aligned} J(\beta) &= R^2 \frac{K + \beta^2}{2K\beta} \\ g(\beta) &= R^2 \frac{K}{2\beta} - M \end{aligned} \tag{3.35}$$

Poiché per $\beta > 0$ J è strettamente convessa, g è convessa e la condizione di regolarità del vincolo è soddisfatta, in base all'Osservazione 2.15, si ha che l'unica soluzione ottima, se esiste, è data dalle condizioni:

$$\begin{aligned} \beta^{0^2} - K - \eta^0 K^2 &= 0 \\ \eta^0 \left(R^2 \frac{K}{2\beta} - M \right) &= 0 \\ \eta^0 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dall'insieme delle precedenti relazioni e dalla (3.35) si determina facilmente l'unico valore ottimo del parametro incognito:

$$\beta^0 = \begin{cases} \sqrt{K} & \text{se } R^2 \frac{\sqrt{K}}{2} \leq M \\ \frac{R^2 K}{2M} & \text{se } R^2 \frac{\sqrt{K}}{2} > M \end{cases}$$

Capitolo 4

Elementi di calcolo delle variazioni: problema di Lagrange in assenza di vincoli

4.1 INTRODUZIONE E FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Il *calcolo delle variazioni* è un capitolo dell’analisi matematica che tratta il problema della determinazione del minimo di funzionali di particolare struttura, eventualmente in presenza di vincoli sulla funzione argomento del funzionale stesso.

Esso riveste un grande interesse dal punto di vista applicativo in quanto nel suo contesto possono essere trattati un gran numero di problemi tipici della fisica matematica nonché molti tipi di problemi di ottimizzazione dei sistemi di controllo.

In questo capitolo verranno introdotti gli elementi di base del calcolo variazionale nel caso non vincolato, tenendo conto delle esigenze determinate dall’applicazione della teoria generale al problema del controllo ottimo. Nel capitolo successivo verrà invece trattato il calcolo variazionale nel caso vincolato.

In tutto questo capitolo e nel successivo, anche se non verrà esplicitamente indicato, si supporrà che lo spazio su cui sono definiti i vari problemi che si considereranno sia uno spazio di funzioni vettoriali a ν componenti.

Verranno ora introdotti alcuni funzionali, tipici del calcolo delle variazioni, alla cui struttura sono riconducibili molte delle funzioni obiettivo, utilizzate nell’ottimizzazione dei sistemi di controllo.

Un primo problema classico del calcolo variazionale è il seguente.

Problema 4.1 (Lagrange) - Considerato lo spazio lineare $\bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, normato per quanto riguarda $\bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R})$ con la norma (1.3), e definito l’insieme ammissibile:

$$D = \{(z, t_i, t_f) \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}: (z(t_i), t_i) \in D_i, (z(t_f), t_f) \in D_f\}$$

dove D_i e D_f sono opportuni insiemi di $\mathbb{R}^{\nu+1}$, considerato il funzionale obiettivo:

$$J(z, t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L[z(t), \dot{z}(t), t] dt \quad (4.1)$$

con L funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, determinare, se esiste, un punto (z^0, t_i^0, t_f^0) di minimo globale per J su D . \square

Un secondo problema frequentemente considerato, detto *problema di Bolza*, consiste nel minimizzare sullo stesso insieme ammissibile D un funzionale del tipo:

$$J(z, t_i, t_f) = G[z(t), t] \Big|_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \bar{L}[z(t), \dot{z}(t), t] dt$$

dove G è una funzione scalare di classe C^3 rispetto ai suoi argomenti.

Nel caso in cui $\bar{L} = 0$ e siano presenti vincoli di tipo differenziale sull'andamento di z , il problema viene denominato più propriamente *problema di Mayer*.

I funzionali di *Bolza* e di *Mayer* possono essere facilmente ricondotti al funzionale di *Lagrange*, ponendo:

$$L[z(t), \dot{z}(t), t] = \bar{L}[z(t), \dot{z}(t), t] + \frac{dG[z(t), t]}{dt}$$

Conseguentemente nel seguito di questo capitolo verrà considerato il solo problema di *Lagrange*.

Un caso particolare del Problema 4.1 che per semplicità verrà considerato per primo nel successivo Paragrafo 4.3, si ha quando t_i e t_f sono fissati. Il problema di *Lagrange* può essere allora così riformulato:

Problema 4.2 (Lagrange) - Considerato lo spazio lineare $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ con la norma (1.3) e definito l'insieme ammissibile:

$$D = \{z \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f] : z(t_i) \in D_i, z(t_f) \in D_f\}$$

dove D_i e D_f sono opportuni insiemi di \mathbb{R}^ν , considerato il funzionale obiettivo:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} L[z(t), \dot{z}(t), t] dt \tag{4.2}$$

con L funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, determinare, se esiste, un punto z^0 di minimo globale per J su D . \square

Per il problema di *Lagrange* possono essere considerate formulazioni che prevedono per la z vincoli di vario tipo nell'intervallo $[t_i, t_f]$, oltre che vincoli sui soli valori iniziale e finale. Alcuni di questi casi verranno discussi nel successivo capitolo.

4.2 CONDIZIONI NECESSARIE BASATE SULLA VARIAZIONE PRIMA

In questo paragrafo verranno dedotte condizioni necessarie di minimo per il Problema 4.1 di *Lagrange*, distinguendo per maggiore chiarezza di esposizione il caso in cui t_i e t_f siano fissati da quello in cui siano variabili.

Si noti che, data la scelta (1.3) fatta per la norma in $\bar{C}^1(\mathbb{R})$, le condizioni cui si perviene sono necessarie per minimi locali deboli in D . Poiché tuttavia minimi globali sono minimi locali forti e questi ultimi sono minimi locali deboli, le stesse condizioni sono anche necessarie per minimi locali forti e per minimi globali in D .

4.2.1 Valori di t_i e t_f fissati

Allo scopo di dedurre una condizione necessaria per la soluzione del Problema 4.2 è opportuno premettere il seguente lemma.

Lemma 4.3 (Eulero) - Sia $\varphi \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$ fissata, condizione necessaria e sufficiente affinché risulti:

$$\int_{t_i}^{t_f} \varphi^T(t) \psi(t) dt = 0 \quad \forall \psi \in \{\bar{C}^0[t_i, t_f] : \int_{t_i}^{t_f} \psi(t) dt = 0\} \quad (4.3)$$

è che sia:

$$\varphi(t) = c \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (4.4)$$

dove $c \in \mathbb{R}^\nu$ è un vettore costante.

Dimostrazione - La sufficienza della (4.4) è banalmente verificata.

Per quanto riguarda la necessità, posto:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} \varphi(t) dt$$

la (4.3) implica:

$$\int_{t_i}^{t_f} [\varphi(t) - \bar{\varphi}]^T \psi(t) dt = 0$$

Quest'ultima è soddisfatta quando in particolare si assuma:

$$\psi(t) = \varphi(t) - \bar{\varphi}$$

scelta che è coerente con le ipotesi sulla ψ espresse nella (4.3). Con tale scelta si ottiene:

$$\int_{t_i}^{t_f} \|\varphi(t) - \bar{\varphi}\|^2 dt = 0$$

che implica la (4.4), con $c = \bar{\varphi}$. □

A partire dal Corollario 1.36 e utilizzando il precedente Lemma 4.3 verrà ora dedotta una prima condizione necessaria di minimo per il problema di Lagrange.

Teorema 4.4 - Con riferimento al Problema 4.2, condizione necessaria affinché $z^* \in D$ sia un punto di minimo locale è che risulti:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} - \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} d\tau = c^T \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (4.5)$$

dove $c \in \mathbb{R}^\nu$ è un vettore costante.

Dimostrazione - Come già chiarito nell'Esempio 1.31, il funzionale di Lagrange, con la scelta (1.3) per la norma su $\bar{C}^1[t_i, t_f]$, ammette variazione prima in ogni punto e, ricordando la (1.7), si ha:

$$\delta J(z, h) = \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} d\tau \right] \dot{h} dt + \left[\int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} d\tau \cdot h \right]_{t_i}^{t_f}$$

Si ha inoltre che il cono delle direzioni tangenti in z^* all'insieme ammissibile D , definito nel Problema 4.2, è:

$$K_{z^*, D} = \left\{ h \in \bar{C}^1[t_i, t_f] : h = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^{(k)} - z^*}{\alpha^{(k)}}; \alpha^{(k)} > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^{(k)} = 0; z^{(k)} \in D \right\}$$

Osservando che ogni $h \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$ tale che $h(t_i) = h(t_f) = 0$ appartiene a $K_{z^*, D}$, si può considerare il sottoinsieme simmetrico $\bar{K}_{z^*, D} \subset K_{z^*, D}$ così definito:

$$\bar{K}_{z^*, D} = \left\{ h \in \bar{C}^1[t_i, t_f] : h(t_i) = h(t_f) = 0 \right\}$$

In base al Corollario 1.36 se z^* è punto di minimo locale, risulta:

$$\delta J(z^*, h) = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} - \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} d\tau \right) \dot{h} dt = 0 \quad \forall h \in \bar{K}_{z^*, D} \quad (4.6)$$

L'eguaglianza a zero dell'integrale resta ovviamente valida anche nell'insieme $\{h \in \bar{C}^1[t_i, t_f] : h(t_i) = h(t_f)\}$. Conseguentemente le ipotesi del Lemma 4.3 sono soddisfatte qualora si assuma:

$$\begin{aligned} \varphi^T &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} - \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} d\tau \\ \psi &= \dot{h} \end{aligned}$$

Ricordando la (4.4), la (4.5) risulta perciò dimostrata. \square

Nei punti di discontinuità della \dot{z} sussiste inoltre la seguente condizione necessaria di continuità.

Corollario 4.5 (Weierstrass–Erdmann) - Con riferimento al Problema 4.2, se \dot{z}^* soddisfa la condizione necessaria (4.5), in ogni punto \bar{t} di discontinuità per la \dot{z}^* , risulta:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^-}^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^+}^* \quad (4.7)$$

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^-}^* = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^+}^* \quad (4.8)$$

Dimostrazione - La condizione (4.7) è immediatamente dimostrata osservando che nella (4.5) il secondo addendo a primo membro e il secondo membro sono funzioni continue di t .

Per quanto riguarda la (4.8) verrà mostrato che risulta:

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)^* = \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial \tau} \Big| d\tau + \bar{c} \quad (4.9)$$

dove $\bar{c} \in \mathbb{R}$ è una costante e pertanto la funzione a primo membro è continua rispetto a t anche negli istanti di discontinuità della \dot{z}^* . In effetti, tenendo conto della (4.5), si ha:

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)^* = L|_*^* - \left(c^T + \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big| d\tau \right) \dot{z}^*$$

Derivando rispetto a t la precedente relazione nel generico istante in cui esiste la \ddot{z}^* , si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)^* &= \frac{\partial L}{\partial z} \Big| \dot{z}^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big| \ddot{z}^* + \frac{\partial L}{\partial t} \Big| \\ &\quad - \frac{\partial L}{\partial z} \Big| \dot{z}^* - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big| \ddot{z}^* = \frac{\partial L}{\partial t} \Big| \end{aligned} \quad (4.10)$$

La (4.10) continua a sussistere per continuità anche negli eventuali valori di t per i quali la \ddot{z}^* non esiste e infatti la $\frac{\partial L}{\partial t} \Big|$ non dipende da tale grandezza. In particolare nei punti \bar{t} di discontinuità della \dot{z}^* la (4.10) è soddisfatta in \bar{t}^- e in \bar{t}^+ . Integrando la (4.10) si deduce la (4.9) e quindi la (4.8). \square

Osservazione 4.6 - Ovviamente le condizioni (4.7) e (4.8) sono banalmente soddisfatte in ogni punto di continuità della \dot{z}^* .

Dalla condizione necessaria (4.5) è possibile dedurre immediatamente una condizione necessaria equivalente sotto forma di una equazione differenziale, detta *equazione di Eulero*.

Corollario 4.7 - Con riferimento al Problema 4.2 condizione necessaria affinché $z^* \in D$ sia un punto di minimo locale è che esso soddisfi l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} = 0^T \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (4.11)$$

Dimostrazione - La (4.11) discende immediatamente dalla (4.5) derivando rispetto a t e tenendo presente che, in base al Corollario 4.5, $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*}$ è funzione continua di t ; quindi nei punti di discontinuità di \dot{z}^* (cioè nei punti angolosi di $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*}$) la (4.11) rimane soddisfatta considerando i valori della derivata $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*}$ sia da sinistra che da destra. \square

Osservazione 4.8 - Si può dimostrare che se z^* soddisfa la condizione (4.5), in ogni sottointervallo di $[t_i, t_f]$ in cui la \dot{z}^* è continua e in cui $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*}$ è non singolare, la z^* appartiene a $C^2[t_i, t_f]$; in tali sottointervalli la z^* soddisfa l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\dot{z}^{*T} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} + \dot{z}^{*T} \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{z}} \Big|^{*} - \frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} = 0^T \quad (4.12)$$

che può facilmente essere dedotta dalla (4.11).

Osservazione 4.9 - Quando il Lagrangiano L non dipende da uno dei suoi argomenti l'equazione di Eulero si particolarizza come segue.

i) Se L non dipende da \dot{z} , la (4.11) si riduce all'equazione non differenziale:

$$\frac{\partial L(z, t)}{\partial z} \Big|^{*} = 0^T \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

ii) Se L non dipende da z , la (4.11) si particolarizza nell'equazione differenziale del primo ordine:

$$\frac{\partial L(\dot{z}, t)}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} = c^T \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (4.13)$$

iii) Se L non dipende esplicitamente da t , in ogni sottointervallo di $[t_i, t_f]$ in cui

esiste la \ddot{z}^* tenendo conto della (4.11), si ha:

$$\frac{dL(z, \dot{z})}{dt} \Big|^{*} = \frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} \dot{z}^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} \ddot{z}^* = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} \right) \dot{z}^* + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} \ddot{z}^* = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} \dot{z}^* \right)$$

da cui, integrando rispetto a t , si deduce l'equazione differenziale del primo ordine:

$$L \Big|^{*} - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} \dot{z}^* = \bar{c} \quad (4.14)$$

D'altra parte, ricordando la condizione di continuità (4.8), si può concludere che la (4.14) sussiste in tutto $[t_i, t_f]$. Si osservi che se z è una funzione scalare la (4.14) equivale all'equazione di *Eulero* mentre, se z è a più componenti, la (4.14) che rimane un'equazione scalare, non può sostituire la (4.11).

Allo scopo di determinare l'insieme $\{z^*\}$ dei punti candidati a fornire la soluzione del Problema di Lagrange 4.2, occorre risolvere l'equazione integro-differenziale del primo ordine (4.5), le cui soluzioni risulteranno in generale dipendenti da 2ν costanti manenti ν sono introdotte dall'operazione di integrazione richiesta. Tali costanti possono essere determinate imponendo un egual numero di condizioni che, come verrà mostrato, possono essere dedotte utilizzando le condizioni di appartenenza di $z^*(t_i)$ e di $z^*(t_f)$ rispettivamente a D_i e a D_f , assieme ad opportune condizioni necessarie di minimo, dette *condizioni di trasversalità*, che verranno qui di seguito dimostrate.

Teorema 4.10 - Con riferimento al Problema 4.2 se D_i e D_f sono tali che $K_{z^*, D}$ è simmetrico e se $z(t_i)$ e $z(t_f)$ sono tra loro indipendenti, condizione necessaria affinché $z^* \in D$ sia un punto di minimo locale è che risulti:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i}^{*} h(t_i) = 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f}^{*} h(t_f) = 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D} \quad (4.16)$$

Dimostrazione - Poiché $K_{z^*, D}$ è simmetrico, in base al Corollario 1.36 e ricordando la (1.7), se z^* è un punto di minimo locale risulta:

$$\begin{aligned} \delta J(z^*, h) &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} d\tau \right)^* \dot{h} dt \\ &\quad + \left[\int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} d\tau h \right]_{t_i}^{t_f} = 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D} \end{aligned}$$

Poiché si è dimostrata la necessità della (4.5), dalla precedente si deduce:

$$\left[\left(c^T + \int_{t_i}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big|^{*} d\tau \right) h \right]_{t_i}^{t_f} = 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D}$$

Utilizzando ancora la (4.5), si ha:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i}^* h \right]_{t_i}^{t_f} = 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D} \quad (4.17)$$

Poiché $z(t_i)$ e $z(t_f)$ sono tra loro indipendenti, tali risultano anche $h(t_i)$ e $h(t_f)$; assumendo pari a zero ciascuno dei due suddetti vettori le (4.15) e (4.16) restano dimostrate. \square

Verranno a questo punto considerati alcuni casi di interesse che rientrano tutti nell'ipotesi di simmetria per $K_{z^*, D}$ e per i quali possono quindi essere particolarizzate le condizioni di trasversalità (4.15), (4.16).

Corollario 4.11 - Con riferimento al Problema 4.2 se D_i e D_f sono insiemi aperti di \mathbb{R}^ν , condizione necessaria affinché $z^* \in D$ sia un punto di minimo locale è che risulti:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i}^* = 0^T \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f}^* = 0^T \quad (4.19)$$

Dimostrazione - Se D_i e D_f sono insiemi aperti, risulta evidentemente $K_{z^*, D} = \overline{C}^1[t_i, t_f]$ che è un cono simmetrico. In particolare $h(t_i)$ e $h(t_f)$ risultano vettori arbitrari di \mathbb{R}^ν . Pertanto le (4.15) e (4.16) implicano le (4.18) e (4.19). \square

Osservazione 4.12 - Il caso in cui non siano presenti condizioni sui valori iniziale $z(t_i)$ e finale $z(t_f)$ è ovviamente un caso particolare del precedente Corollario 4.11, in quanto $z(t_i)$ e $z(t_f)$ risultano vettori arbitrari di \mathbb{R}^ν che è un insieme aperto.

Corollario 4.13 - Con riferimento al Problema 4.2 siano D_i e D_f insiemi chiusi di \mathbb{R}^ν , definiti rispettivamente mediante le condizioni:

$$\begin{aligned} \gamma(z(t_i)) &= 0 \\ \chi(z(t_f)) &= 0 \end{aligned}$$

dove γ e χ sono funzioni vettoriali rispettivamente di dimensione $\sigma_i \leq \nu$, $\sigma_f \leq \nu$, di classe $C^1(\mathbb{R}^\nu)$, e sia $z^* \in D$ un punto tale che:

$$\text{rango } \left\{ \frac{d\gamma}{dz(t_i)} \Big|_* \right\} = \sigma_i$$

$$\text{rango } \left\{ \frac{d\chi}{dz(t_f)} \Big|_* \right\} = \sigma_f$$

Condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale è che esistano i vettori $\xi \in \mathbb{R}^{\sigma_i}$, $\zeta \in \mathbb{R}^{\sigma_f}$ tali che:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i}^* = \xi^T \frac{d\gamma}{dz(t_i)} \Big| \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f}^* = \zeta^T \frac{d\chi}{dz(t_f)} \Big| \quad (4.21)$$

Dimostrazione - In base a quanto già visto nell'Esempio 1.34, il cono $K_{z^*, D}$ nel caso considerato è costituito dalle direzioni $h \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ che soddisfano le condizioni:

$$\frac{d\gamma}{dz(t_i)} \Big| h(t_i) = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{d\chi}{dz(t_f)} \Big| h(t_f) = 0 \quad (4.23)$$

ed è perciò simmetrico. Pertanto sussistono le condizioni di trasversalità (4.15) e (4.16). La (4.15) impone che, per un qualunque $h \in K_{z^*, D}$, $h(t_i)$ sia ortogonale a $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i}^*$, mentre la (4.22) implica che i vettori $h(t_i)$ ammissibili costituiscano il sottospazio lineare di \mathbb{R}^ν definito dalla stessa (4.22). Ne discende che il vettore $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i}^*$ deve essere ortogonale al suddetto sottospazio e cioè che esso deve essere combinazione lineare delle righe della matrice $\frac{d\gamma}{dz(t_i)} \Big|$. Ne deriva la (4.20). In maniera analoga la (4.16) e la (4.23) implicano la (4.21). \square

Osservazione 4.14 - Il caso in cui D_i e D_f si riducono rispettivamente a $\{z^i\}$ e a $\{z^f\}$ è un caso particolare di quello considerato con:

$$\begin{aligned} \gamma(z(t_i)) &= z(t_i) - z^i = 0 \\ \chi(z(t_f)) &= z(t_f) - z^f = 0 \end{aligned}$$

Dalle (4.22) e (4.23) si ha che $K_{z^*, D} = \{h \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f] : h(t_i) = h(t_f) = 0\}$. Le condizioni di trasversalità (4.15), (4.16) sono perciò banalmente soddisfatte mentre le (4.20) e (4.21) perdono di interesse.

Osservazione 4.15 - È ovviamente possibile che le condizioni nell'istante iniziale siano di tipo diverso da quelle nell'istante finale (ad esempio $z(t_i)$ potrebbe essere fissato e $z(t_f)$ potrebbe essere libero, ecc.); in casi di questo genere per ciascuno degli estremi sussisteranno condizioni opportune del tipo già considerato.

Osservazione 4.16 - È possibile considerare problemi di *Lagrange* in cui $z(t_i)$ e $z(t_f)$ non sono tra loro indipendenti. Si supponga che debba essere verificata una condizione del tipo:

$$\omega(z(t_i), z(t_f)) = 0 \quad (4.24)$$

dove ω è una funzione vettoriale di dimensione $\sigma \leq 2\nu$ di classe $C^1(\mathbb{R}^{2\nu})$. Se $z^* \in D$ è tale che risulta soddisfatta la condizione di rango:

$$\text{rango } \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \quad \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \right)^* \right\} = \sigma$$

procedendo in maniera analoga a quanto fatto nell'Esempio 1.34, si può verificare che $K_{z^*, D}$ è in questo caso costituito dalle direzioni $h \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$ che soddisfano la:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \quad \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \right)^* \begin{pmatrix} h(t_i) \\ h(t_f) \end{pmatrix} = 0$$

e pertanto $K_{z^*, D}$ è ancora un cono simmetrico. Nel caso considerato la dimostrazione del Teorema 4.10 sussiste fino alla verifica della condizione (4.17) che costituisce la condizione di trasversalità per vincoli misti del tipo (4.24). Confrontando la precedente relazione con la (4.17) si deducono infine le condizioni necessarie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i}^* &= \rho^T \frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \Big|^* \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f}^* &= -\rho^T \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \Big|^* \end{aligned} \quad (4.25)$$

dove $\rho \in \mathbb{R}^\sigma$.

Si possono dare a questo punto le seguenti definizioni.

Definizione 4.17 - Con riferimento al Problema 4.2 si definisce *estremale* ogni funzione ammissibile che sia soluzione dell'equazione di *Eulero* (4.5) o (4.11), che soddisfi le condizioni di *Weierstrass–Erdmann* (4.7), (4.8) e che soddisfi le condizioni agli estremi deducibili dalle condizioni di trasversalità (4.15) e (4.16).

Si definisce inoltre *estremale non singolare* ogni estremale dotato di derivata prima continua e per il quale la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|$ sia non singolare in $[t_i, t_f]$. In base all'Osservazione 4.8 un estremale non singolare appartiene a $C^2[t_i, t_f]$. \square

Esempio 4.1. - Si consideri (vedi Fig. 4.1) il problema di determinare in $\bar{C}^1[0, 2]$ la curva di minima lunghezza che parte dal valore iniziale $z(0) = 1$ e termina nell'intervallo aperto:

$$D_f = (1.5, 2)$$

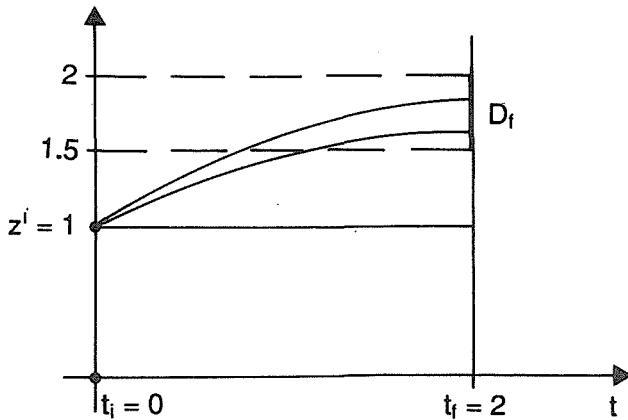


Fig. 4.1

Indicata con ds la lunghezza dell'elemento di curva e con s la lunghezza totale, il funzionale da minimizzare è:

$$J(z) = \int_0^s ds = \int_0^2 \sqrt{dt^2 + dz^2} = \int_0^2 \sqrt{1 + \dot{z}^2} dt$$

Si osserva innanzitutto che risulta:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + \dot{z}^2}}$$

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{z}^2}}$$

e quindi in base al Corollario 4.5, si può escludere la possibilità di estremali con cuspidi, in quanto la continuità delle precedenti funzioni implica la continuità di \dot{z}^* in $[0, 2]$.

Si osserva inoltre che:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} = \frac{1}{(1 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Poiché la funzione a secondo membro è diversa da zero, l'Osservazione 4.8 consente di affermare che la soluzione del problema, se esiste, va cercata in $C^2[0, 2]$ e che essa deve soddisfare l'equazione differenziale (4.12). In effetti poiché il Lagrangiano non dipende da z , l'equazione (4.12) può essere sostituita dalla (4.13) che, nel caso in esame, diviene:

$$\dot{z}^* = K$$

essendo K una costante. Risulta quindi

$$z^*(t) = Kt + C$$

Essendo $z(0)$ fissato e D_f aperto, le condizioni agli estremi, necessarie per determinare le costanti K e C , sono:

$$z^*(0) = 1$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right|_2^* = 0$$

La seconda delle due condizioni diviene:

$$\dot{z}^*(2) = 0$$

Imponendo le precedenti condizioni si ricava l'unica soluzione:

$$z^*(t) = 1$$

Poiché tale soluzione non soddisfa la condizione finale $z^*(2) \in (1.5, 2)$, si può concludere che il problema non ammette estremali e quindi non ammette soluzioni.

Qualora l'insieme terminale D_f fosse l'intervallo aperto $(0.5, 1.5)$ si otterebbe ancora l'unica soluzione $z^*(t) = 1$ che in questo caso costituirebbe un estremale del problema.

Qualora l'insieme terminale D_f si riducesse a un punto, ad esempio $z(2) = 1.5$, si otterebbe ancora un'unico estremale e in particolare:

$$z^*(t) = 0.25t + 1$$

che costituisce l'equazione della retta che passa per i due punti estremi assegnati.

Esempio 4.2 - Uno dei primi problemi che storicamente è stato formulato nel contesto del calcolo variazionale è il cosiddetto *problema della brachistocrona*, cioè quello di determinare in un piano verticale il profilo lungo cui deve muoversi un punto materiale inizialmente in quiete, soggetto alla forza di gravità e in assenza di attrito, per passare nel minor tempo possibile da un punto assegnato ad un altro di cui è assegnata l'ascissa. Con riferimento cioè alla Fig. 4.2 occorre determinare, se esiste, la curva $z^0 \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$, lungo cui il punto materiale M di massa m sottoposto alla forza di gravità mg e in assenza di attrito si trasferisce nel tempo minimo dal punto di coordinate $(t_i, 0)$ ad uno di ascissa t_f fissata e di ordinata $z(t_f)$ arbitraria.

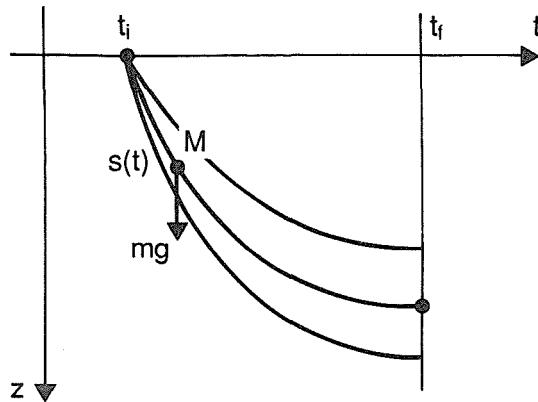


Fig. 4.2

Indicata con $s(t)$ l'ascissa curvilinea lungo il generico profilo z , con origine in $(t_i, 0)$ e con τ la variabile temporale, la velocità $v(t)$ di M in corrispondenza alla ascissa t è:

$$v(t) = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\sqrt{dz^2 + dt^2}}{d\tau} = \sqrt{1 + \dot{z}^2(t)} \frac{dt}{d\tau} \quad (4.26)$$

D'altra parte, data l'assenza di attrito e avendo supposto nulla la velocità in t_i , per il principio di conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2}mv^2(t) = mgz(t)$$

da cui:

$$v(t) = \sqrt{2gz(t)} \quad (4.27)$$

Eguagliando i secondi membri delle (4.26) e (4.27) si ottiene:

$$d\tau = \sqrt{\frac{1 + \dot{z}^2}{2gz}} dt$$

e quindi il tempo necessario per passare da $(t_i, 0)$ a $(t_f, z(t_f))$ è:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\frac{1 + \dot{z}^2}{2gz}} dt$$

Pertanto la funzione Lagrangiana ⁽¹⁾ per il problema considerato è:

$$L(z, \dot{z}) = \sqrt{\frac{1 + \dot{z}^2}{2gz}}$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nell'esempio precedente, utilizzando le condizioni di *Weierstrass-Erdmann* si può escludere la possibilità di estremali con cuspidi, e verificando che risulta sempre $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2}$ diversa da zero si può affermare che ogni eventuale estremale appartiene a $C^2[t_i, t_f]$. Tenendo inoltre conto del fatto che la funzione Lagrangiana non dipende esplicitamente da t , gli estremali possono essere ricercati fra le soluzioni della (4.14) che nel caso in esame fornisce l'equazione differenziale del primo ordine:

$$\dot{z}^* = \pm \sqrt{\frac{2R - z^*}{z^*}} \quad (4.28)$$

essendo $R > 0$ una opportuna costante. Si può verificare che la soluzione della precedente equazione differenziale è data in forma parametrica dalle:

$$\begin{aligned} z^*(\vartheta) &= R(1 - \cos \vartheta) \\ t(\vartheta) &= R(\vartheta - \sin \vartheta) + P \quad \forall \vartheta \in (-\pi, \pi] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le costanti R e P vanno determinate imponendo le condizioni agli estremi. Nel caso considerato, essendo fissato il punto iniziale della curva, la prima condizione è:

$$z^*(t_i) = 0 \quad (4.30)$$

mentre, essendo D_f un insieme aperto (coincide con \mathbb{R}), la seconda condizione è data dalla (4.19) che fornisce:

$$\dot{z}^*(t_f) = 0 \quad (4.31)$$

Imponendo le condizioni (4.30) e (4.31) e ricordando la (4.28), dalle (4.29) si deduce:

$$P = t_i$$

$$R = \frac{t_f - t_i}{\pi}$$

L'unico estremale ottenuto consiste in un arco di *cicloide* (Fig. 4.3) cioè nella curva descritta dal punto della circonferenza di raggio R che rotola sull'asse delle ascisse, essendo nulla l'ordinata di tale punto in corrispondenza all'ascissa t_i (punto iniziale della curva).

⁽¹⁾ La funzione Lagrangiana considerata diverge per $t \rightarrow t_i$, ma questa singolarità non crea inconvenienti purché l'integrale $J(z)$ sull'intervallo $[t_i, t_f]$ resti limitato.

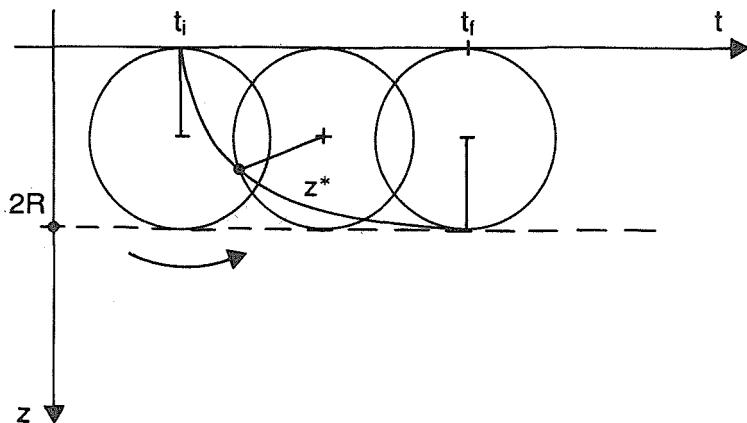


Fig. 4.3

Esempio 4.3 - Si consideri il problema di determinare in $\bar{C}^1[t_i, t_f]$ la curva a valori positivi passante per i punti (t_i, z^i) e (t_f, z^f) assegnati, con $z^i > 0$ e $z^f > 0$, tale che la superficie di rivoluzione, ottenuta per rotazione attorno all'asse dell'ascisse, abbia misura minima (Fig. 4.4).

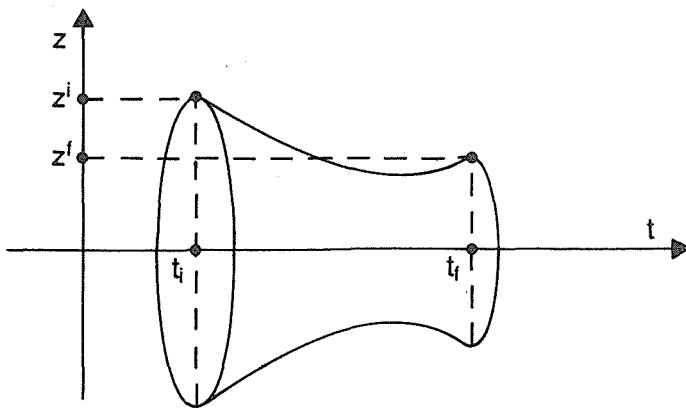


Fig. 4.4

Il funzionale da rendere minimo è dato dalla misura della superficie di rivoluzione:

$$J(z) = 2\pi \int_{t_i}^{t_f} z \sqrt{dz^2 + dt^2} = 2\pi \int_{t_i}^{t_f} z \sqrt{\dot{z}^2 + 1} dt$$

con il vincolo $z(t) > 0$, $\forall t \in [t_i, t_f]$. Procedendo come fatto nell'Esempio 4.1, si può osservare che per i valori di t ove risulti $z(t) > 0$, non possono avversi cuspidi

e inoltre $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \neq 0$. Pertanto, in base alla Osservazione 4.8, si può affermare che se esiste un punto di minimo locale che soddisfa il vincolo di positività in $[t_i, t_f]$ esso è soluzione dell'equazione differenziale (4.12) in $[t_i, t_f]$. Occorre perciò verificare che l'equazione (4.12), scritta per il Lagrangiano del problema considerato, fornisca soluzioni positive che soddisfino le condizioni agli estremi. In effetti, poiché il Lagrangiano non dipende esplicitamente da t , si può fare riferimento alla equazione del primo ordine (4.14), che nel caso in esame diviene:

$$\frac{z^*}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}}} = C$$

dove C è una costante.

Dalla precedente equazione si ricava facilmente:

$$\dot{z}^* = \frac{\sqrt{z^{*2} - C^2}}{C}$$

il cui integrale generale è l'arco di *catenaria* di equazione:

$$z^*(t) = C \cosh \frac{t + K}{C}$$

Resta intanto verificato che tale soluzione è effettivamente positiva per ogni t , quali che siano le costanti K e C , purché $C > 0$. Occorre a questo punto determinare le suddette costanti in modo da soddisfare le condizioni agli estremi

$$\begin{aligned} z^*(t_i) &= z^i \\ z^*(t_f) &= z^f \end{aligned} \tag{4.32}$$

È stato mostrato che sono possibili tre casi a seconda della posizione dei punti estremi $(t_i, z^i), (t_f, z^f)$ fissati:

- i) esistono due coppie di costanti C, K che soddisfano le condizioni (4.32) e in questo caso uno dei due estremali fornisce la soluzione del problema;
- ii) esiste una sola coppia di costanti C, K che soddisfa le condizioni (4.32) e in questo caso l'unico estremale costituisce la soluzione del problema;
- iii) non esiste alcuna coppia di costanti C, K che soddisfa le condizioni (4.32) e in questo caso il problema non ammette soluzioni.

Esempio 4.4 - Si consideri il seguente semplice problema di regolazione ottima. Assegnato il sistema lineare stazionario descritto dall'equazione:

$$\dot{x} = ax + u \tag{4.33}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}$, $u(t) \in \mathbb{R}$ e con stato iniziale $x(0) = x^i$ assegnato, si desidera effettuare il controllo sull'intervallo $[0, 1]$ minimizzando un funzionale obiettivo, combinazione lineare dell'errore quadratico rispetto al riferimento zero e dell'energia necessaria per il controllo stesso:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2(t) + P u^2(t)] dt \quad P > 0$$

Il vincolo differenziale (4.33) può essere tenuto in conto sostituendolo nel funzionale obiettivo che diventa perciò:

$$J(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} [x^2(t) + P(\dot{x}(t) - ax(t))^2] dt$$

Si può anche in questo caso verificare preliminarmente che i possibili estremali appartengono a $C^2[0, 1]$ e sono soluzioni dell'equazione differenziale (4.12), che si particolarizza nella:

$$\ddot{x}^* - \alpha x^* = 0 \quad \alpha = a^2 + \frac{1}{P}$$

L'integrale generale della precedente equazione è:

$$x^*(t) = C_1 e^{\sqrt{\alpha}t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}t} \quad (4.34)$$

Dalla (4.33) si deduce:

$$u^*(t) = C_1(\sqrt{\alpha} - a)e^{\sqrt{\alpha}t} - C_2(\sqrt{\alpha} + a)e^{-\sqrt{\alpha}t}$$

Le costanti di integrazione C_1 e C_2 vanno determinate imponendo la condizione iniziale:

$$x^*(0) = C_1 + C_2 = x^i \quad (4.35)$$

e la condizione finale (4.18):

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_1^* = 0$$

Quest'ultima condizione equivale alla:

$$\dot{x}^*(1) = a x^*(1)$$

e cioè alla:

$$C_1 e^{\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha} - a) - C_2 e^{-\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha} + a) = 0 \quad (4.36)$$

Dalle (4.35) e (4.36) si deduce:

$$C_1 = \frac{\sqrt{\alpha} + a}{\sqrt{\alpha} + a + (\sqrt{\alpha} - a)e^{2\sqrt{\alpha}}} x^i$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{\alpha} - a}{\sqrt{\alpha} - a + (\sqrt{\alpha} + a)e^{-2\sqrt{\alpha}}} x^i$$

Sostituendo i valori delle costanti C_1 e C_2 nelle espressioni di $x^*(t)$ e $u^*(t)$ si verifica facilmente che:

$$\frac{u^*(t)}{x^*(t)} = K(t)$$

$$= \frac{[\sqrt{\alpha} - a + (\sqrt{\alpha} + a)e^{-2\sqrt{\alpha}}]e^{\sqrt{\alpha}t} - [\sqrt{\alpha} + a + (\sqrt{\alpha} - a)e^{2\sqrt{\alpha}}]e^{-\sqrt{\alpha}t}}{[1 + P(\sqrt{\alpha} + a)^2 e^{-2\sqrt{\alpha}}]e^{\sqrt{\alpha}t} + [1 + P(\sqrt{\alpha} - a)^2 e^{2\sqrt{\alpha}}]e^{-\sqrt{\alpha}t}}$$

La soluzione estremale può essere generata mediante la struttura a retroazione lineare non stazionaria rappresentata in Fig. 4.5.

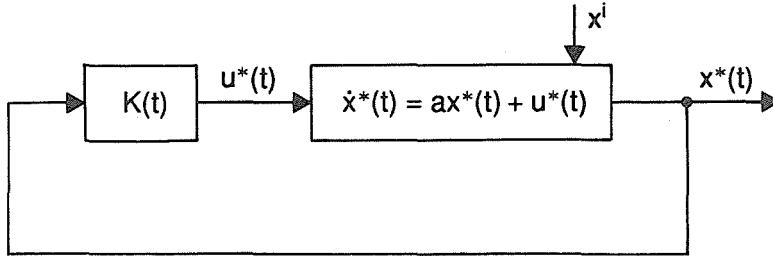


Fig. 4.5

Se per lo stesso sistema con lo stesso funzionale obiettivo si fissa anche lo stato finale $x(1) = 0$, procedendo in maniera analoga si ottiene per l'equazione di Eulero lo stesso integrale generale (4.34) ma per le costanti di integrazione si ricava:

$$C_1 = \frac{x^i}{1 - e^{2\sqrt{\alpha}}}$$

$$C_2 = \frac{x^i}{1 - e^{-2\sqrt{\alpha}}}$$

e in definitiva la soluzione estremale risulta:

$$x^*(t) = \left(\frac{e^{\sqrt{\alpha}t}}{1 - e^{2\sqrt{\alpha}}} + \frac{e^{-\sqrt{\alpha}t}}{1 - e^{-2\sqrt{\alpha}}} \right) x^i$$

$$u^*(t) = x^i \left(\frac{\sqrt{\alpha} - a}{1 - e^{2\sqrt{\alpha}}} e^{\sqrt{\alpha}t} - \frac{\sqrt{\alpha} + a}{1 - e^{-2\sqrt{\alpha}}} e^{-\sqrt{\alpha}t} \right)$$

Poiché si ha evidentemente $u^*(1) \neq 0$ mentre $x^*(1) = 0$, in questo caso non è possibile pervenire a una struttura a retroazione del tipo di Fig. 4.5, in quanto il guadagno $K(t)$ tenderebbe all'infinito per $t \rightarrow 1$. Come verrà ulteriormente chiarito nel seguito questa situazione si verifica in generale in problemi di controllo ottimo di sistemi lineari con funzionale obiettivo quadratico nello stato e nel controllo quando l'intervallo di controllo è finito e lo stato finale è fissato.

Esempio 4.5 - Si dicono *geodetiche* di una superficie le curve di minima lunghezza che giacciono sulla superficie stessa e congiungono due punti assegnati. Si consideri la superficie $\sigma \subset \mathbb{R}^3$, descritta in forma parametrica dalle equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(z_1, z_2) \\ x_2 &= x_2(z_1, z_2) \\ x_3 &= x_3(z_1, z_2) \end{aligned} \tag{4.37}$$

dove z_1 e z_2 sono una coppia di parametri che variano in un insieme $Z \subset \mathbb{R}^2$ e le funzioni $x_i, i = 1, 2, 3$ si suppongono sufficientemente regolari e forniscono le coordinate del corrispondente punto di σ .

Come noto una curva $s \subset \sigma$ può essere descritta in forma parametrica mediante il vettore di funzioni:

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

dove t è un parametro che varia nell'intervallo fissato $[t_i, t_f]$. Considerata una curva s sulla superficie σ e cioè date le funzioni $z_j(t), j = 1, 2, \forall t \in [t_i, t_f]$, la sua lunghezza è data da:

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\sum_{i=1}^3 dx_i^2} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_1} \right)^2 \dot{z}_1^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial z_1} \frac{\partial x_i}{\partial z_2} \dot{z}_1 \dot{z}_2 + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_2} \right)^2 \dot{z}_2^2} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \dot{z}_h \dot{z}_k} dt \end{aligned} \tag{4.39}$$

Supposta assegnata la superficie σ , e cioè le funzioni (4.37) e assegnati due punti su di essa e cioè i vettori:

$$\begin{aligned} z^i &= z(t_i) \\ z^f &= z(t_f) \end{aligned} \quad (4.40)$$

il problema della determinazione della geodetica che congiunge questi due punti è quello di determinare la coppia di funzioni (4.38) sull'intervallo $[t_i, t_f]$ che rendono minimo il funzionale $J(z)$ dato dalla (4.39) e che soddisfano le condizioni agli estremi (4.40).

L'equazione di *Eulero* (4.11) per il funzionale (4.39) diventa:

$$\left. \frac{\sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial z_h} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \right) \dot{z}_h \dot{z}_k}{\sqrt{\sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \dot{z}_h \dot{z}_k}} \right|^* - \frac{d}{dt} \left. \frac{\sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \frac{\partial (\dot{z}_h \dot{z}_k)}{\partial \dot{z}_j}}{\sqrt{\sum_{h=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \frac{\partial x_i}{\partial z_k} \dot{z}_h \dot{z}_k}} \right|^* = 0 \quad j = 1, 2 \quad (4.41)$$

ed essa va risolta con le condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned} z^*(t_i) &= z^i \\ z^*(t_f) &= z^f \end{aligned}$$

Come caso particolare si supponga che la superficie σ sia un cilindro di raggio ρ e che quindi le equazioni (4.37) siano:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos z_1 \\ x_2 &= \rho \sin z_1 \\ x_3 &= z_2 \end{aligned}$$

Il Lagrangiano del funzionale (4.39) si riduce a:

$$L(\dot{z}) = \sqrt{\rho^2 \dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2}$$

Poiché in questo caso il Lagrangiano non dipende esplicitamente da z , le (4.41) si riducono alle equazioni differenziali del primo ordine che particolarizzano la (4.13)

e cioè:

$$\frac{\rho^2 \dot{z}_1^*}{\sqrt{\rho^2 \dot{z}_1^{*2} + \dot{z}_2^{*2}}} = C_1$$

$$\frac{\dot{z}_2^*}{\sqrt{\rho^2 \dot{z}_1^{*2} + \dot{z}_2^{*2}}} = C_2$$

Dal precedente sistema differenziale si deduce immediatamente che:

$$\dot{z}_2^* = K_1 \dot{z}_1^*$$

e integrando si ottiene:

$$z_2^* = K_1 z_1^* + K_2$$

Pertanto le geodetiche del cilindro sono *archi di eliche* che si avvolgono sulla sua superficie.

Esempio 4.6 - Si consideri il problema di minimizzare il funzionale:

$$J(z) = \int_0^2 z^2 (\dot{z} - 1)^2 dt$$

con $z \in \bar{\mathcal{C}}^1[0, 2]$, e con le condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned} z(0) &= 0 \\ z(2) &= 1 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Poiché il Lagrangiano non dipende in maniera esplicita da t , gli estremali soddisfano l'equazione (4.14) che diviene:

$$z^{*2} (1 - \dot{z}^{*2}) = C_1 \tag{4.43}$$

D'altra parte, poiché la prima delle (4.42) impone $z^*(0) = 0$ e poiché \dot{z}^* deve essere sempre finito in quanto $z^* \in \bar{\mathcal{C}}^1[0, 2]$, si deduce $C_1 = 0$. La (4.43) con $C_1 = 0$ fornisce le seguenti soluzioni:

$$z^* = 0 \tag{4.44}$$

$$z^* = t + C_2 \tag{4.45}$$

$$z^* = -t + C_3 \tag{4.46}$$

Nessuna di queste tre funzioni, che appartengono evidentemente a $\mathcal{C}^2[0, 2]$, consente di soddisfare entrambe le condizioni agli estremi (4.42). Si può quindi affermare che il problema non ammette soluzione in $\mathcal{C}^2[0, 2]$.

Passando a ricercare possibili soluzioni con cuspidi, si osserva che le condizioni (4.7) e (4.8) di *Weierstrass–Erdmann* impongono la continuità in $[0, 2]$ delle seguenti quantità:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} &= 2z^{*2}(\dot{z}^{*} - 1) \\ \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)^{*} &= z^{*2}(\dot{z}^{*2} - 1)\end{aligned}$$

Conseguentemente si può affermare che per ogni \bar{t} in corrispondenza al quale z^* ha una cuspide deve risultare $z^*(\bar{t}) = 0$. Si può quindi verificare che il primo tratto di soluzione estremale è dato necessariamente dalla (4.44); se infatti si assumesse come primo tratto la (4.45) o la (4.46), dovendo essere $z^*(0) = 0$, risulterebbe $z^*(t) \neq 0, \forall t > 0$ e quindi non potrebbero avversi cuspidi. Per quanto riguarda l'ultimo tratto esso deve essere dato dalla (4.45) con $C_2 = -1$; non può infatti essere dato dalla (4.46) in quanto in questo caso, dovendo risultare $C_3 = 3$ si avrebbe $z^*(t) \neq 0, \forall t \in [0, 2]$. In conclusione, osservando che la (4.45) con $C_2 = -1$ si annulla in $t = 1$, si ottiene l'unico estremale:

$$z^*(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ t - 1 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Poiché infine in corrispondenza all'estremale trovato il funzionale J , che per sua natura è non negativo, si annulla, tale estremale fornisce il minimo globale.

Esempio 4.7 - Si desidera minimizzare il funzionale:

$$J(z) = \int_0^3 \dot{z}^2(2\dot{z} - 1)^2 dt \quad (4.47)$$

con $z \in C^2[0, 3]$, e con le condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned}z(0) &= 0 \\ z(3) &= 1\end{aligned} \quad (4.48)$$

Poiché il Lagrangiano non dipende esplicitamente da z , in base alla (4.13) si ha:

$$\dot{z}^*(2\dot{z}^* - 1)(4\dot{z}^* - 1) = C$$

che risolta rispetto a \dot{z}^* fornisce:

$$\dot{z}^*(t) = C_1 \quad (4.49)$$

da cui:

$$z^*(t) = C_1 t + C_2 \quad (4.50)$$

Imponendo le condizioni ai due estremi (4.48) si ottiene l'unico estremale:

$$z^*(t) = \frac{t}{3}$$

Affrontando lo stesso problema in $\bar{\mathcal{C}}^1[0, 3]$, si osserva che la (4.49) continua a sussistere in ogni sottointervallo di continuità per la \dot{z}^* e che quindi, in ciascuno di essi, gli estremali avranno una espressione del tipo (4.50): essi saranno cioè costituiti da spezzate che soddisfano le condizioni agli estremi (4.48) e tali che in ogni vertice la pendenza a sinistra $\dot{z}^*(\bar{t}^-)$ e quella a destra $\dot{z}^*(\bar{t}^+)$ soddisfano le condizioni di Weierstrass-Erdmann (4.7), (4.8):

$$\begin{aligned} \dot{z}^*(2\dot{z}^* - 1)(4\dot{z}^* - 1)|_{\bar{t}^-} &= \dot{z}^*(2\dot{z}^* - 1)(4\dot{z}^* - 1)|_{\bar{t}^+} \\ \dot{z}^{*2}(2\dot{z}^* - 1)(6\dot{z}^* - 1)|_{\bar{t}^-} &= \dot{z}^{*2}(2\dot{z}^* - 1)(6\dot{z}^* - 1)|_{\bar{t}^+} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Si noti che le quantità $\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right|^*$ e $\left. \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right) \right|^*$, di cui si è imposta la continuità nei punti di cuspidi, devono in effetti risultare costanti in tutto l'intervallo $[0, 3]$ come risulta in base alle (4.13) e (4.14). Si osserva che le coppie di valori $(\dot{z}^*(\bar{t}^-) = 0, \dot{z}^*(\bar{t}^+) = 1/2)$ e $(\dot{z}^*(\bar{t}^-) = 1/2, \dot{z}^*(\bar{t}^+) = 0)$, soddisfano le (4.51) e che, in corrispondenza a spezzate i cui lati assumono le suddette pendenze, il funzionale (4.47), per sua natura non negativo, si annulla. In conclusione, come mostrato in Fig. 4.6, esistono in $\bar{\mathcal{C}}^1[0, 3]$ infiniti punti di minimo globale costituiti da spezzate i cui lati hanno pendenze pari a 0 o a $1/2$ e con un numero arbitrario di cuspidi.

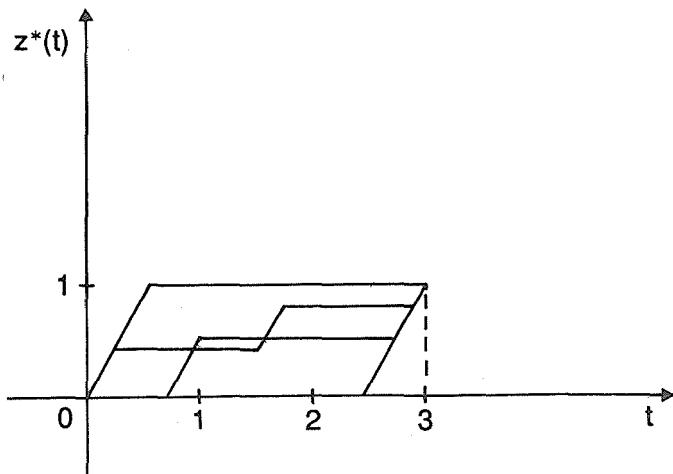


Fig. 4.6

Esempio 4.8 - Si consideri il problema di determinare in $\bar{C}^1[0, 2]$ la curva di minima lunghezza con il vincolo sui valori agli estremi:

$$z(0)z(2) = 1 \quad (4.52)$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nell'Esempio 4.1, si previene alla prima conclusione che gli estremali del problema sono del tipo

$$z^*(t) = Kt + C$$

Per quanto riguarda il vincolo agli estremi, esso è del tipo (4.24) e pertanto applicando le condizioni (4.25) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{z}^*(0)}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}(0)}} &= \rho z^*(2) \\ \frac{\dot{z}^*(2)}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}(2)}} &= -\rho z^*(0) \end{aligned}$$

che, tenuto conto dell'espressione di z^* , diventano:

$$\begin{aligned} \frac{K}{\sqrt{1 + K^2}} &= \rho(2K + C) \\ \frac{K}{\sqrt{1 + K^2}} &= -\rho C \end{aligned}$$

Occorre infine imporre che z^* soddisfi la (4.52) e cioè:

$$C(2K + C) = 1$$

Risolvendo il sistema costituito dalle ultime tre equazioni si ottengono le due soluzioni $\rho = K = 0, C = \pm 1$; pertanto gli estremali del problema sono le due funzioni costanti $z^*(t) = \pm 1, \forall t \in [0, 2]$.

4.2.2 Valori di t_i e t_f variabili

Tornando a considerare il problema di *Lagrange* nella sua formulazione generale con t_i e t_f variabili (Problema 4.1) si dimostrerà in primo luogo che l'equazione di *Eulero* (4.5) o (4.11) e le condizioni di *Weierstrass–Erdmann* (4.7), (4.8) continuano ad essere necessarie per i minimi locali.

Teorema 4.18 - Con riferimento al Problema 4.1 condizione necessaria affinché $(z^*, t_i^*, t_f^*) \in D$ sia un punto di minimo locale è che risulti:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right|^* - \int_{t_i^*}^t \left. \frac{\partial L}{\partial z} \right|^* d\tau = c^T \quad \forall t \in [t_i^*, t_f^*] \quad (4.53)$$

dove $c \in \mathbb{R}^\nu$ è un vettore costante, e che in ogni punto \bar{t} di discontinuità per la \dot{z}^* , risulti:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^-}^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^+}^* \quad (4.54)$$

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^-}^* = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^+}^* \quad (4.55)$$

Dimostrazione - Se (z^*, t_i^*, t_f^*) è un punto di minimo locale con riferimento al Problema 4.1 segue che, quali che siano D_i e D_f nel suddetto problema, z^* è un punto di minimo locale per il corrispondente Problema 4.2 qualora in esso si fissi $t_i = t_i^*, t_f = t_f^*$. In base al Teorema 4.4 e al Corollario 4.5 segue la necessità delle condizioni (4.53), (4.54), (4.55). \square

Ovviamente anche l'equazione differenziale (4.11) e, ove possibile, quella (4.12) sono in $[t_i^*, t_f^*]$ condizioni necessarie di minimo locale per il Problema 4.1.

Allo scopo di determinare l'insieme $\{(z^*, t_i^*, t_f^*)\}$ dei punti candidati a fornire la soluzione del Problema 4.1 di Lagrange, occorre quindi ancora una volta risolvere un problema differenziale. Le condizioni da imporre agli estremi sono date dalle condizioni di appartenenza di $(z^*(t_i^*), t_i^*)$ e di $(z^*(t_f^*), t_f^*)$ rispettivamente a D_i e D_f , assieme a condizioni che generalizzano le condizioni di trasversalità del precedente sottoparagrafo, nel modo che verrà ora mostrato.

Teorema 4.19 - Con riferimento al Problema 4.1 se D_i e D_f sono tali che $K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D}$ è simmetrico e se $(z(t_i), t_i)$ e $(z(t_f), t_f)$ sono tra loro indipendenti, condizione necessaria affinché $(z^*, t_i^*, t_f^*) \in D$ sia un punto di minimo locale è che risulti:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i^*}^* h(t_i^*) + L \Big|_{t_i^*}^* \tau_i = 0 \quad (4.56)$$

$\forall (h, \tau_i, \tau_f) \in K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f^*}^* h(t_f^*) + L \Big|_{t_f^*}^* \tau_f = 0 \quad (4.57)$$

Dimostrazione - Poiché $K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D}$ è simmetrico, in base al Corollario 1.36 e ricordando la (1.9), se (z^*, t_i^*, t_f^*) è un punto di minimo locale, risulta:

$$\begin{aligned} \delta J(z^*, t_i^*, t_f^*; h, \tau_i, \tau_f) &= L \Big|_{t_f^*}^* \tau_f - L \Big|_{t_i^*}^* \tau_i + \left[\int_{t_i^*}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big| d\tau \ h(t) \right]_{t_i^*}^{t_f^*} \\ &+ \int_{t_i^*}^{t_f^*} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big| - \int_{t_i^*}^t \frac{\partial L}{\partial z} \Big| d\tau \right] \dot{h}(t) dt = 0 \quad \forall (h, \tau_i, \tau_f) \in K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D} \end{aligned}$$

Poiché la necessità della (4.53) è già acquisita, sostituendo la suddetta equazione nella precedente, si ottiene immediatamente:

$$L \Big|_{t_f^*}^* \tau_f - L \Big|_{t_i^*}^* \tau_i + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i^*}^* h(t) \right]_{t_i^*}^{t_f^*} = 0 \quad \forall (h, \tau_i, \tau_f) \in K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D} \quad (4.58)$$

Poiché $(z(t_i), t_i)$ e $(z(t_f), t_f)$ sono tra loro indipendenti tali risultano anche $(h(t_i^*), \tau_i)$ e $(h(t_f^*), \tau_f)$: assumendo nella (4.58) nulla ciascuna di tali coppie di elementi, le (4.56) e (4.57) sono dimostrate. \square

Anche nel caso di t_i e t_f variabili verranno a questo punto considerati alcuni casi di interesse per le condizioni agli estremi, che rientrano tutti nell'ipotesi di simmetria di $K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D}$ e per i quali quindi è possibile particolarizzare le condizioni di trasversalità (4.56) e (4.57).

Corollario 4.20 - Con riferimento al Problema 4.1, se D_i e D_f sono insiemi aperti di $\mathbb{R}^{\nu+1}$, condizione necessaria affinché $(z^*, t_i^*, t_f^*) \in D$ sia un punto di minimo locale è che risulti:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i^*}^* = 0^T \quad (4.59)$$

$$L \Big|_{t_i^*}^* = 0 \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f^*}^* = 0^T \quad (4.61)$$

$$L \Big|_{t_f^*}^* = 0 \quad (4.62)$$

Dimostrazione - Se D_i e D_f sono insiemi aperti, risulta evidentemente $K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D} = \bar{C}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che è un cono simmetrico. In particolare $h(t_i^*), \tau_i, h(t_f^*), \tau_f$ sono arbitrari. Le (4.56) e (4.57) implicano perciò le (4.59–62). \square

Osservazione 4.21 - Il caso in cui non siano presenti condizioni su $z(t_i), t_i, z(t_f), t_f$ è ovviamente un caso particolare del precedente Corollario 4.20, in quanto sia D_i che D_f coincidono con $\mathbb{R}^{\nu+1}$ che è un insieme aperto.

Corollario 4.22 - Con riferimento al Problema 4.1 siano D_i e D_f insiemi chiusi di $\mathbb{R}^{\nu+1}$ definiti rispettivamente mediante le condizioni:

$$\gamma(z(t_i), t_i) = 0 \quad (4.63)$$

$$\chi(z(t_f), t_f) = 0 \quad (4.64)$$

dove γ e χ sono funzioni vettoriali rispettivamente di dimensioni $\sigma_i \leq \nu + 1$ e $\sigma_f \leq \nu + 1$, di classe $C^1(\mathbb{R}^{\nu+1})$. Sia $(z^*, t_i^*, t_f^*) \in D$ un punto tale che:

$$\begin{aligned}\text{rango } \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial (z(t_i), t_i)} \right|^{*} &= \sigma_i \\ \text{rango } \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial (z(t_f), t_f)} \right|^{*} &= \sigma_f\end{aligned}$$

Condizione necessaria affinché (z^*, t_i^*, t_f^*) sia un punto di minimo locale è che esistano i vettori $\xi \in \mathbb{R}^{\sigma_i}, \zeta \in \mathbb{R}^{\sigma_f}$, tali che:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i^*}^{*} = \xi^T \frac{\partial \gamma}{\partial z(t_i)} \Big|^{*} \quad (4.65)$$

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{t_i^*}^{*} = \xi^T \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} \Big|^{*} \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f^*}^{*} = \zeta^T \frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|^{*} \quad (4.67)$$

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{t_f^*}^{*} = \zeta^T \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|^{*} \quad (4.68)$$

Dimostrazione - Procedendo in maniera analoga a quella seguita nell'Esempio 1.34, si può verificare che il cono $K(z^*, t_i^*, t_f^*), D$ nel caso considerato è costituito dalle direzioni $(h, \tau_i, \tau_f) \in \overline{C}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z(t_i)} \Big|^{*} (h(t_i^*) + \dot{z}^*(t_i^*) \tau_i) + \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} \Big|^{*} \tau_i = 0 \quad (4.69)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|^{*} (h(t_f^*) + \dot{z}^*(t_f^*) \tau_f) + \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|^{*} \tau_f = 0 \quad (4.70)$$

ed è perciò simmetrico. Pertanto valgono le condizioni di trasversalità (4.56), (4.57). La (4.56) impone che per una qualunque direzione nel cono tangente, il vettore $\begin{pmatrix} h(t_i^*) \\ \tau_i \end{pmatrix}$ sia ortogonale al vettore $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad L \right)_{t_i^*}^{*}$ mentre la (4.69) implica che i vettori $\begin{pmatrix} h(t_i^*) \\ \tau_i \end{pmatrix}$ ammissibili costituiscono il sottospazio lineare di $\mathbb{R}^{\nu+1}$ definito dalla stessa (4.69). Ne discende che il vettore $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \quad L \right)_{t_i^*}^{*}$ deve essere ortogonale al suddetto sottospazio e cioè che esso deve essere combinazione lineare

delle righe della matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial z(t_i)} & \frac{\partial \gamma}{\partial t_i} + \frac{\partial \gamma}{\partial z(t_i)} \dot{z}(t_i) \end{pmatrix}^*$. Se ne deduce che esiste un vettore $\xi \in \mathbb{R}^{\sigma_i}$ tale che:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right|_{t_i^*}^* = \xi^T \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z(t_i)} \right|^* \quad (4.71)$$

$$L \left. \right|_{t_i^*}^* = \xi^T \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t_i} + \frac{\partial \gamma}{\partial z(t_i)} \dot{z}(t_i) \right)^* \quad (4.72)$$

Sostituendo la (4.71) nella (4.72) risultano dimostrate le (4.65), (4.66). In maniera analoga è possibile dimostrare le (4.67), (4.68). \square

Osservazione 4.23 - Un caso particolare delle condizioni agli estremi (4.63) e (4.64) si ha quando sono fissati gli istanti t_i e t_f nonché i valori iniziali e finali di z e cioè nel caso in cui gli insiemi D_i e D_f sono definiti dalle condizioni:

$$\begin{aligned} z(t_i) - z^i &= 0 \\ t_i - \bar{t}_i &= 0 \\ z(t_f) - z^f &= 0 \\ t_f - \bar{t}_f &= 0 \end{aligned}$$

con \bar{t}_i e \bar{t}_f fissati.

Poiché nel caso considerato $K_{(z^*, \bar{t}_i, \bar{t}_f), D}$ è costituito dalle direzioni $(h, 0, 0)$ con $h(\bar{t}_i) = h(\bar{t}_f) = 0$, come si deduce facilmente dalle (4.69) e (4.70), si osserva che le condizioni di trasversalità (4.56) e (4.57) sono banalmente soddisfatte mentre le (4.65–68) perdono di interesse.

Osservazione 4.24 - Un ulteriore caso particolare delle precedenti condizioni agli estremi (4.63) e (4.64) si ha nel cosiddetto *problema di appuntamento* in cui D_i e D_f sono curve in $\mathbb{R}^{\nu+1}$ definite rispettivamente dalle equazioni:

$$z(t_i) - \varphi(t_i) = 0 \quad (4.73)$$

$$z(t_f) - \psi(t_f) = 0 \quad (4.74)$$

con φ e ψ funzioni assegnate di classe $C^1(\mathbb{R})$. Particularizzando le (4.65–68) si perviene immediatamente alle condizioni:

$$\left[L + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} (\dot{\varphi} - \dot{z}) \right]_{t_i^*}^* = 0 \quad (4.75)$$

$$\left[L + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} (\dot{\psi} - \dot{z}) \right]_{t_f^*}^* = 0 \quad (4.76)$$

Osservazione 4.25 - È possibile considerare problemi di *Lagrange* in cui le condizioni iniziali e finali non sono tra loro indipendenti. Si supponga che debba essere verificata una condizione del tipo:

$$\omega(z(t_i), t_i, z(t_f), t_f) = 0 \quad (4.77)$$

dove ω è una funzione vettoriale di dimensioni $\sigma \leq 2\nu + 2$ di classe $C^1(\mathbb{R}^{2\nu+2})$.

Sia $(z^*, t_i^*, t_f^*) \in D$ tale che:

$$\text{rango } \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial(z(t_i), t_i)} \quad \frac{\partial \omega}{\partial(z(t_f), t_f)} \right)^* \right\} = \sigma$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nell'Esempio 1.34 si può verificare che $K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D}$ è in questo caso costituito dalle direzioni $(h, \tau_i, \tau_f) \in \bar{C}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che soddisfano la:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t_i} + \frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \dot{z}(t_i) \quad \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t_f} + \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \dot{z}(t_f) \right)^* \begin{pmatrix} h(t_i^*) \\ \tau_i \\ h(t_f^*) \\ \tau_f \end{pmatrix} = 0$$

e pertanto $K_{(z^*, t_i^*, t_f^*), D}$ è ancora un cono simmetrico. Nel caso considerato la dimostrazione del Teorema 4.19 sussiste fino alla verifica della condizione (4.58), che costituisce la condizione di trasversalità per vincoli misti del tipo (4.77). Confrontando la precedente relazione con la (4.58) si deduce:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i^*}^* \quad -L \Big|_{t_i^*}^* \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f^*}^* \quad L \Big|_{t_f^*}^* \right) \\ &= \rho^T \left(\frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t_i} + \frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \dot{z}(t_i) \quad \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t_f} + \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \dot{z}(t_f) \right)^* \end{aligned}$$

dove $\rho \in \mathbb{R}^\sigma$. La precedente equazione fornisce le condizioni necessarie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_i^*}^* &= -\rho^T \frac{\partial \omega}{\partial z(t_i)} \Big|^* \\ \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{t_i^*}^* &= -\rho^T \frac{\partial \omega}{\partial t_i} \Big|^* \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f^*}^* &= \rho^T \frac{\partial \omega}{\partial z(t_f)} \Big|^* \\ \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{t_f^*}^* &= \rho^T \frac{\partial \omega}{\partial t_f} \Big|^* \end{aligned} \quad (4.78)$$

Si può a questo punto generalizzare la precedente definizione di estremale nel modo seguente:

Definizione 4.26 - Con riferimento al Problema 4.1 si definisce *estremale* ogni terna (z^*, t_i^*, t_f^*) ammisible che sia soluzione dell'equazione di *Eulero* (4.53) o (4.11), che soddisfi le condizioni di *Weierstrass-Erdmann* (4.54), (4.55) e che soddisfi le condizioni agli estremi deducibili dalle condizioni di trasversalità (4.56), (4.57).

Più in particolare si definisce *estremale non singolare* ogni estremale dotato di derivata prima continua e per il quale la matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*}$ sia non singolare in $[t_i^*, t_f^*]$. In base all'Osservazione 4.8 un estremale non singolare appartiene a $C^2[t_i^*, t_f^*]$. \square

Esempio 4.9 - Si consideri il problema di determinare in $\bar{C}^1(\mathbb{R})$ la curva di minima lunghezza che congiunge la parabola di equazione $\varphi(t) = t^2$ e la retta di equazione $\psi(t) = t - 1$ (vedi Fig. 4.7). Esso può essere interpretato come un problema di appuntamento con funzionale obiettivo dato da:

$$J(z, t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{z}^2(t)} dt$$

e con condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned} z(t_i) &= \varphi(t_i) = t_i^2 \\ z(t_f) &= \psi(t_f) = t_f - 1 \end{aligned}$$

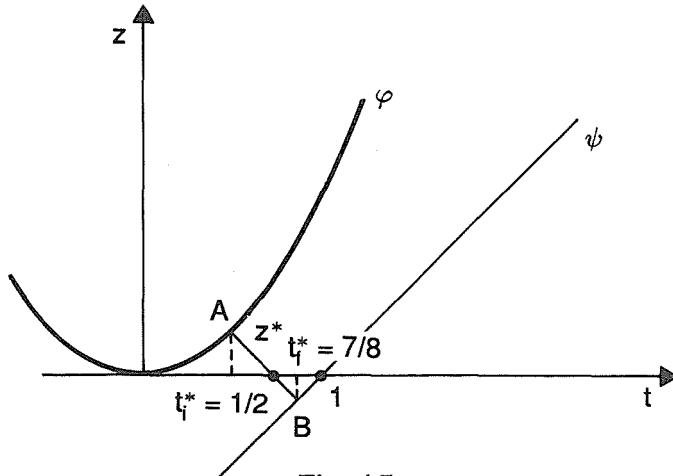


Fig. 4.7

Con considerazioni analoghe a quelle svolte nell'Esempio 4.1 si ha che i possibili estremali del problema hanno espressione del tipo:

$$z^*(t) = Kt + C$$

Per quanto riguarda la determinazione delle costanti K, C e dei valori t_i^* e t_f^* , trattandosi di un problema di appuntamento, le condizioni agli estremi si deducono particolarizzando le (4.73–76), che forniscono:

$$\begin{aligned} Kt_i^* + C &= t_i^{*2} \\ Kt_f^* + C &= t_f^* - 1 \\ \sqrt{1+K^2} + \frac{K}{\sqrt{1+K^2}}(2t_i^* - K) &= 0 \\ \sqrt{1+K^2} + \frac{K}{\sqrt{1+K^2}}(1 - K) &= 0 \end{aligned}$$

Dalle precedenti equazioni si ricava immediatamente:

$$K = -1 \quad C = 3/4 \quad t_i^* = 1/2 \quad t_f^* = 7/8$$

Si ottiene perciò un unico estremale costituito dal segmento di retta AB indicato in Fig. 4.7.

Esempio 4.10 - Considerato il piano cartesiano (z, t) si rappresenti, come mostrato in Fig. 4.8, con l'asse delle ordinate la riva di un fiume e con la circonferenza di centro $(T, 0)$ e raggio r un'isola. Supponendo che la velocità della corrente del fiume sia orientata nel verso dell'asse z e sia di valore costante pari a V , si desidera determinare la traiettoria lungo cui deve muoversi un natante, inizialmente nell'origine, per raggiungere la costa dell'isola nel minimo tempo, muovendosi con una velocità relativa all'acqua di modulo costante $|v| \geq V$.

Indicando con ϑ la variabile temporale, nel generico punto P della traiettoria le componenti della velocità del natante rispetto al riferimento sono:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\vartheta} &= v_t(\vartheta) = |v| \cos \alpha(\vartheta) \\ \frac{dz}{d\vartheta} &= v_z(\vartheta) + V = |v| \sin \alpha(\vartheta) + V \end{aligned}$$

dove $\alpha(\vartheta)$ rappresenta la fase del vettore v nell'istante ϑ . La pendenza della traiettoria nel generico punto P è data da:

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{|v| \sin \alpha(t) + V}{|v| \cos \alpha(t)} = \frac{\pm |v| \sqrt{1 - \cos^2 \alpha(t)} + V}{|v| \cos \alpha(t)}$$

da cui, ponendo $V/|v| = c \leq 1$ si ottiene:

$$\cos \alpha(t) = \frac{\dot{z}c \pm \sqrt{\dot{z}^2 - c^2 + 1}}{\dot{z}^2 + 1} = \frac{1 - c^2}{\pm \sqrt{\dot{z}^2 - c^2 + 1} - c\dot{z}}$$

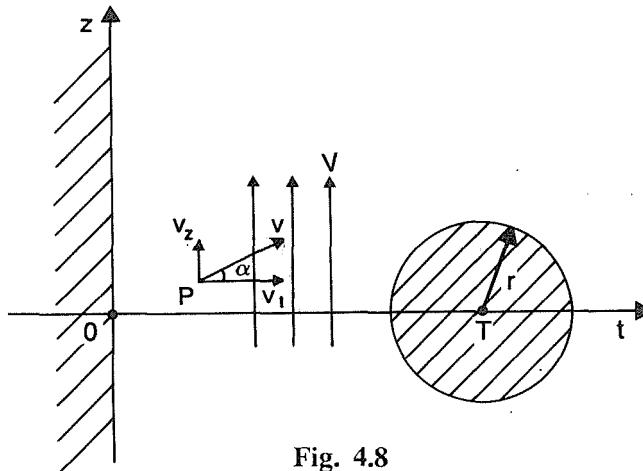


Fig. 4.8

Lungo la traiettoria, il tempo necessario per arrivare alla ascissa t_f è:

$$\vartheta_f = \int_0^{\vartheta_f} d\vartheta = \int_0^{t_f} \frac{dt}{|v| \cos \alpha(t)} = \frac{1}{|v|} \int_0^{t_f} \frac{c \dot{z} \mp \sqrt{\dot{z}^2 - c^2 + 1}}{c^2 - 1} dt$$

Il problema consiste quindi nel determinare la traiettoria che ha origine nel punto $(0, 0)$, termine in un punto $(t_f, z(t_f))$ appartenente al luogo di equazione:

$$\chi(z(t_f), t_f) = (t_f - T)^2 + z^2(t_f) - r^2 = 0$$

e rende minimo il funzionale ϑ_f .

Dalle condizioni di Weierstrass-Erdmann si deduce che ogni eventuale estremale ammette derivata continua; poiché inoltre si verifica facilmente che $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \neq 0$, segue che ogni eventuale estremale è regolare e quindi appartiene a $C^2(\mathbb{R})$.

Poiché il Lagrangiano è indipendente da z , in base alla Osservazione 4.9, condizione necessaria di ottimo è:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right|^* = \frac{1}{|v|} \frac{c \sqrt{\dot{z}^{*2} - c^2 + 1} \mp \dot{z}^*}{(c^2 - 1) \sqrt{\dot{z}^{*2} - c^2 + 1}} = K$$

dove K è una costante. Dalla precedente equazione si deduce facilmente:

$$\dot{z}^* = \pm K_1$$

che integrata fornisce:

$$z^*(t) = \pm K_1 t + K_2$$

dove K_1 e K_2 sono costanti da determinare. Imponendo la condizione iniziale $z^*(0) = 0$, risulta $K_2 = 0$; per quanto riguarda il punto finale della traiettoria,

particularizzando al problema in esame le (4.64), (4.67), (4.68), si ottengono le condizioni:

$$\begin{aligned} (t_f^* - T)^2 + K_1^2 t_f^{*2} &= r^2 \\ 2K_1 t_f^* \zeta &= \pm \frac{K_1 - c\sqrt{K_1^2 - c^2 + 1}}{|v|(1 - c^2)\sqrt{K_1^2 - c^2 + 1}} \\ 2(t_f^* - T)\zeta &= \pm \frac{1}{|v|\sqrt{K_1^2 - c^2 + 1}} \end{aligned} \quad (4.79)$$

che costituiscono un sistema di tre equazioni non lineari nelle tre incognite t_f^*, K_1, ζ , di non immediata soluzione. Per ciascuna delle possibili soluzioni si ottiene una traiettoria estremale rettilinea, cui corrisponde un tempo finale:

$$\vartheta_f^* = \pm \frac{\sqrt{K_1^2 + 1 - c^2} - cK_1}{|v|(1 - c^2)} t_f^*$$

Poiché $c \in (0, 1]$ occorre evidentemente scartare nell'estremale il segno inferiore.

Come caso particolare si supponga $|v| = V$ e cioè $c = 1$. Le tre condizioni (4.79) diventano:

$$\begin{aligned} (t_f^* - T)^2 + K_1^2 t_f^{*2} &= r^2 \\ 2K_1 t_f^* \zeta &= \frac{K_1^2 - 1}{2VK_1^2} \\ 2(t_f^* - T)\zeta &= \frac{1}{VK_1} \end{aligned}$$

Risolvendo le suddette equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} K_1 &= \pm \frac{r}{T} \\ t_f^* &= \frac{T^2 - r^2}{T^2 + r^2} T \end{aligned}$$

Il segno inferiore va scartato affinché ϑ_f^* risulti positivo; in particolare si ottiene:

$$\vartheta_f^* = \frac{T^2 - r^2}{2Vr}$$

e l'espressione dell'unica traiettoria estremale è:

$$z^*(t) = \frac{r}{T} t$$

Esempio 4.11 - Si consideri nuovamente il problema di regolazione ottima dell'Esempio 4.4, lasciando libero oltre che lo stato finale, il valore dell'istante finale t_f . L'evoluzione estremale dello stato ha ancora l'espressione fornita dalla (4.34). Le condizioni per l'estremo finale si ottengono in questo caso particolarizzando le (4.61), (4.62), mentre per l'estremo iniziale resta valida la (4.35). In definitiva le tre condizioni da imporre per determinare i valori di C_1, C_2, t_f^* sono:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= x^i \\ C_1 e^{\sqrt{\alpha}t_f^*} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}t_f^*} &= 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\alpha}t_f^*} - C_2 e^{-\sqrt{\alpha}t_f^*} &= 0 \end{aligned}$$

Queste condizioni possono essere soddisfatte solo al limite per $t_f^* \rightarrow \infty$ con $C_1 = 0$ e $C_2 = x^i$. Lo stato e il controllo corrispondenti sono:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x^i e^{-\sqrt{\alpha}t} \\ u^*(t) &= -(\sqrt{\alpha} + a)x^i e^{-\sqrt{\alpha}t} = -(\sqrt{\alpha} + a)x^*(t) \end{aligned}$$

cui corrisponde la struttura a retroazione lineare stazionaria mostrata in Fig. 4.9.

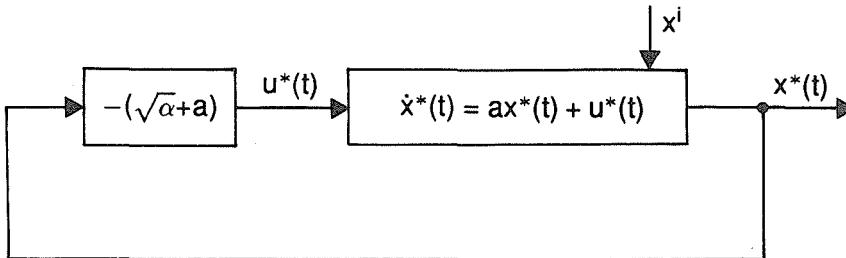


Fig. 4.9

Se per lo stesso problema qui considerato lo stato finale viene fissato pari al valore desiderato $x(t_f) = 0$, le condizioni da imporre si possono dedurre come caso particolare del Corollario 4.22 e risultano:

$$\begin{aligned} x^*(0) &= x^i \\ x^*(t_f^*) &= 0 \\ \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]_{t_f^*}^* &= 0 \end{aligned}$$

Da queste condizioni, come può verificarsi agevolmente, si ottiene nuovamente la soluzione precedentemente ricavata e, in particolare, la struttura a retroazione di

Fig. 4.9. Conviene sottolineare che la possibilità di ammettere un valore infinito per l'istante finale consente di pervenire a una struttura a retroazione per un valore assegnato pari a zero dello stato finale, cosa che risultava impossibile nel caso dell'Esempio 4.4 in cui t_f era fissato.

Esempio 4.12 - Riconsiderando il problema dell'Esempio 4.7, si supponga che il valore di t_f sia libero. Qualora si ricerchi la soluzione nello spazio $C^2(\mathbb{R})$, il generico estremale z^* ha ancora l'espressione (4.50) e le costanti C_1, C_2 , assieme al valore di t_f^* , andranno determinate imponendo le condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned} z^*(0) &= C_2 = 0 \\ z^*(t_f^*) &= C_1 t_f^* + C_2 = 1 \\ \left[L - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right]_{t_f^*}^* &= -C_1^2(2C_1 - 1)(6C_1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Dalle precedenti equazioni si ricavano due soluzioni estremali caratterizzate dai valori dei parametri incogniti:

$$\begin{aligned} C_1 &= 1/2, \quad C_2 = 0, \quad t_f^* = 2 \\ C_1 &= 1/6, \quad C_2 = 0, \quad t_f^* = 6 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Osservando che per il problema in esame, essendo $\dot{z}^*(t) = C_1 = 1/t_f^*$, risulta:

$$J(z^*, t_f^*) = \frac{1}{t_f^*} \left(\frac{2}{t_f^*} - 1 \right)^2$$

si verifica facilmente che l'estremale corrispondente alla prima delle soluzioni (4.80) è l'unico punto di minimo globale.

Se il problema viene affrontato in $\bar{C}^1(\mathbb{R})$, in base alle considerazioni già svolte nell'ambito dell'Esempio 4.7, si può affermare che esistono infiniti punti di minimo globale costituiti da spezzate i cui lati hanno pendenza 0 o $1/2$ con un numero arbitrario di cuspidi. Si osservi che in ogni caso dovrà risultare $t_f^* \geq 2$ (vedi Fig. 4.6).

A conclusione di questo paragrafo si osserva che, come posto in evidenza negli esempi presentati, per determinare l'insieme degli estremali occorre risolvere l'equazione integro-differenziale (4.5) o l'equazione differenziale di Eulero del secondo ordine (4.12).

A questo proposito ricordiamo che la (4.12) può essere utilizzata su tutto l'intervallo $[t_i^*, t_f^*]$, per la ricerca degli estremali non singolari. Più in generale per la ricerca di estremali che presentano punti di cuspide converrà tentare di decomporre l'intervallo $[t_i^*, t_f^*]$ in sottointervalli nei quali gli stessi estremali siano di classe C^2 , utilizzando a tale scopo sia le condizioni di Weierstrass-Erdmann (4.7), (4.8)

sia la condizione di non singolarità della matrice $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2}\Big|^{*}$. In ogni caso il problema differenziale da risolvere per la ricerca degli estremali è caratterizzato dal fatto che le condizioni da imporre sono in parte relative al punto iniziale e in parte al punto finale. Un problema differenziale di questo tipo, cioè con condizioni in due punti, qualora debba essere trattato mediante metodi di integrazione numerica, in genere risulta più complesso degli usuali problemi differenziali con condizioni in un sol punto e richiede l'impiego di procedure specifiche.

4.3 CONDIZIONI BASATE SULLA VARIAZIONE SECONDA

In questo paragrafo verranno dedotte alcune condizioni necessarie o sufficienti di minimo locale per il problema di *Lagrange* che utilizzano la variazione seconda del funzionale (4.2), limitatamente al caso in cui siano fissati oltre ai valori di t_i e t_f anche i valori di $z(t_i)$ e di $z(t_f)$.

Al fine di assicurare l'esistenza della variazione seconda del funzionale (4.2), si supporrà inoltre che su $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ sia considerata la norma (1.3) e che $L \in C^3[\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu \times [t_i, t_f]]$. Come già visto nell'Esempio 1.31, la variazione seconda del funzionale di *Lagrange*, nelle ipotesi fatte, esiste in ogni punto \bar{z} e in ogni direzione h e si ha:

$$\delta^2 J(\bar{z}, h) = \int_{t_i}^{t_f} \left(h^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} h + 2h^T \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} \dot{h} + \dot{h}^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} \dot{h} \right) dt \quad (4.81)$$

Si può dimostrare la seguente condizione necessaria.

Teorema 4.27 (Legendre) - Considerato il Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$ e $z(t_f) = z^f$, condizione necessaria affinché $z^* \in D$ sia un punto di minimo locale è che risulti:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} \geq 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (4.82)$$

Dimostrazione - Poiché $K_{z^*, D} = \{h \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f] : h(t_i) = h(t_f) = 0\}$ è simmetrico, in base al Teorema 1.39 risulta:

$$\delta^2 J(z^*, h) \geq 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D} \quad (4.83)$$

Si supponga per assurdo che esistano un $\hat{t} \in [t_i, t_f]$ e un vettore $w \in \mathbb{R}^\nu$ tali che:

$$w^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\hat{t}} w = -2\beta \quad \beta > 0$$

Si assuma in primo luogo che $\hat{t} < t_f$.

Per la continuità di $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast$ rispetto a t , esiste un $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\hat{t} + \alpha < t_f$ e tale che:

$$w^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast w < -\beta \quad \forall t \in [\hat{t}, \hat{t} + \alpha] \quad (4.84)$$

Si consideri a questo punto la direzione $\hat{h} \in K_{z^*, D}$ così definita:

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} w \operatorname{sen}^2 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} & \forall t \in [\hat{t}, \hat{t} + \alpha) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per la corrispondente variazione seconda (4.81) si avrebbe:

$$\begin{aligned} \delta^2 J(z^*, \hat{h}) &= \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\alpha} w^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^\ast w \operatorname{sen}^4 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} dt \\ &\quad + \frac{4\pi}{\alpha} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\alpha} w^T \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^\ast w \operatorname{sen}^3 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} \cos \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} dt \\ &\quad + 4 \frac{\pi^2}{\alpha^2} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\alpha} w^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast w \operatorname{sen}^2 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} \cos^2 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} dt \\ &\leq \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\alpha} w^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^\ast w \operatorname{sen}^4 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} dt \\ &\quad + \frac{4\pi}{\alpha} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\alpha} \left| w^T \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^\ast w \right| \cdot \left| \cos \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} \right| \cdot \operatorname{sen}^3 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} dt \\ &\quad + 4 \frac{\pi^2}{\alpha^2} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\alpha} w^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast w \operatorname{sen}^2 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} \cos^2 \frac{\pi(t - \hat{t})}{\alpha} dt \end{aligned}$$

Posto:

$$M_1 = \max_{t \in [\hat{t}, \hat{t} + \alpha]} \left\{ w^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^\ast w \right\}$$

$$M_2 = \max_{t \in [\hat{t}, \hat{t} + \alpha]} \left\{ \left| w^T \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^\ast w \right| \right\}$$

e tenuto conto della (4.84), si ha:

$$\begin{aligned}\delta^2 J(z^*, \hat{h}) &\leq M_1 \alpha + M_2 \frac{4\pi}{\alpha} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\alpha} \sin \frac{\pi(t-\hat{t})}{\alpha} dt - \frac{4\pi^2}{\alpha} \beta \\ &= M_1 \alpha + 8M_2 - \frac{4\pi^2 \beta}{\alpha}\end{aligned}$$

Ma l'ultimo membro di tale diseguaglianza può essere reso negativo per α sufficientemente piccolo, il che è in contrasto con la (4.83).

Il caso $\hat{t} = t_f$ può essere trattato in maniera simile osservando che esiste un $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo tale che $\hat{t} - \alpha > t_i$ e tale che:

$$w^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big| w < -\beta \quad \forall t \in [\hat{t} - \alpha, \hat{t}]$$

Si può quindi considerare la direzione $\hat{h} \in K_{z^*, D}$, così definita:

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} w \sin^2 \frac{\pi(t-\hat{t})}{\alpha} & \forall t \in [\hat{t} - \alpha, \hat{t}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e procedere in maniera analoga a quanto fatto precedentemente. \square

Allo scopo di fornire ulteriori condizioni di minimo locale basate sulla variazione seconda del funzionale di Lagrange occorre premettere la seguente definizione di *punto coniugato*.

Definizione 4.28 - Considerato il Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$ e $z(t_f) = z^f$ sia z^* un estremale non singolare; considerata l'equazione differenziale del secondo ordine nella matrice incognita H di dimensioni $\nu \times \nu$, detta *equazione di Jacobi matriciale*:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big| H + \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big| \dot{H} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*T} H + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} \dot{H} \right) = 0 \quad (4.85)$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}H(t_i) &= 0 \\ \dot{H}(t_i) &= I\end{aligned} \quad (4.86)$$

il punto $t' \in (t_i, t_f]$ si dice coniugato di t_i rispetto a z^* se

$$\det\{H(t')\} = 0$$

\square

Si può osservare che l'*equazione di Jacobi vettoriale*, ottenibile dalla (4.85) sostituendo alla matrice H un vettore incognito h , risulta essere l'*equazione di Eulero* per la variazione seconda (4.81) nel punto z^* , considerata come un funzionale della direzione h .

Verrà ora dimostrata una ulteriore condizione necessaria di minimo locale che utilizza la nozione di punto coniugato.

Teorema 4.29 (Jacobi) - Con riferimento al Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$ e $z(t_f) = z^f$, considerato un estremale non singolare z^* , condizione necessaria affinché esso sia un punto di minimo locale è che l'intervallo (t_i, t_f) non contenga punti coniugati di t_i rispetto a z^* .

Dimostrazione - Si assuma per assurdo che esista un istante $t' \in (t_i, t_f)$, coniugato di t_i rispetto a z^* ; ciò equivale ad assumere che le colonne della matrice $H(t')$ siano linearmente dipendenti cioè che esista un vettore $c \neq 0$ di dimensioni ν , tale che:

$$H(t')c = 0$$

Si consideri a questo punto la direzione $\hat{h} \in K_{z^*, D}$, così definita:

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} H(t)c & \forall t \in [t_i, t'] \\ 0 & \forall t \in [t', t_f] \end{cases} \quad (4.87)$$

Come si verifica facilmente \hat{h} è soluzione dell'*equazione vettoriale di Jacobi* e cioè:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} \hat{h} + \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \dot{\hat{h}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \hat{h} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} \dot{\hat{h}} \right) = 0 \quad (4.88)$$

D'altra parte posto:

$$\Omega(h, \dot{h}, t) = h^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} h + 2h^T \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \dot{h} + \dot{h}^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} \dot{h} \quad (4.89)$$

si ha:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial h} h + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \dot{h} = 2\Omega$$

e poiché per ogni $h \in K_{z^*, D}$, integrando per parti risulta:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial \Omega}{\partial h} \dot{h} dt = - \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \right) h dt$$

si ottiene per la variazione seconda:

$$\delta^2 J(z^*, h) = \int_{t_i}^{t_f} \Omega(h, \dot{h}, t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \right) h dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[h^T \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|_* + \dot{h}^T \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|_*^T - \frac{d}{dt} \left(h^T \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|_* + \dot{h}^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_* \right) \right] h \, dt$$

Pertanto, ricordando la (4.88), risulta:

$$\delta^2 J(z^*, \hat{h}) = 0$$

Si mostrerà ora che la funzione \hat{h} non è un punto di minimo locale per il funzionale $\delta^2 J(z^*, h)$ al variare di h in $K_{z^*, D}$ in quanto in t' essa non soddisfa la condizione necessaria di Weierstrass–Erdmann (4.7). Infatti $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{t'}^*$ è non singolare (in quanto z^* è un estremale non singolare) e $\dot{\hat{h}}(t') \neq 0$ (altrimenti integrando l'equazione di Jacobi (4.87) all'indietro con condizioni $\hat{h}(t') = \dot{\hat{h}}(t') = 0$ si avrebbe $\hat{h}(t) = 0$ in tutto $[t_i, t']$); si ha perciò:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}} [\Omega(h, \dot{h}, t)]_{\hat{h}, t'}^* = 2 \dot{\hat{h}}^T(t') \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{t'}^* \neq 0^T$$

mentre, essendo in base alla (4.87) $\dot{\hat{h}}(t') = 0$, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}} [\Omega(h, \dot{h}, t)]_{\hat{h}, t'}^* = 2 \dot{\hat{h}}^T(t') \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{t'}^* = 0^T$$

Poiché dunque \hat{h} non è un punto di minimo per il funzionale $\delta^2 J(z^*, h)$ in $K_{z^*, D}$, dovrebbe esistere $\tilde{h} \in K_{z^*, D}$ tale che:

$$\delta^2 J(z^*, \tilde{h}) < \delta^2 J(z^*, \hat{h}) = 0$$

Ma tale conclusione è in contrasto con la condizione necessaria di minimo (1.13), in quanto $K_{z^*, D}$ è simmetrico; resta quindi dimostrata l'impossibilità dell'esistenza del punto coniugato $t' \in (t_i, t_f)$. \square

Allo scopo di dimostrare una condizione sufficiente di minimo per il problema in esame è conveniente premettere i seguenti lemmi.

Lemma 4.30 - Con riferimento al Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i, z(t_f) = z^f$, sia z^* un estremale non singolare in corrispondenza al quale non esistano punti $t' \in (t_i, t_f]$

coniugati di t_i ; allora esiste una soluzione \tilde{H} dell'equazione matriciale di *Jacobi* (4.85), non singolare in $[t_i, t_f]$ e tale che, posto:

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= [\tilde{h}_1 \ \tilde{h}_2 \ \dots \ \tilde{h}_\nu] \\ Q &= \left[\frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_1}^T \ \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_2}^T \ \dots \ \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_\nu}^T \right]\end{aligned}\quad (4.90)$$

la matrice $Q^T \tilde{H}$ risulta simmetrica in $[t_i, t_f]$.

Dimostrazione - Dalla teoria delle equazioni differenziali si ha che l'estremale z^* può essere esteso all'intervallo $[t_i - \vartheta, t_f]$, con $\vartheta > 0$ sufficientemente piccolo, come soluzione dell'equazione differenziale (4.12) con $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^*$ non singolare in $[t_i - \vartheta, t_f]$. Poiché per ipotesi l'equazione differenziale (4.85) con le condizioni iniziali (4.86) ammette una soluzione non singolare in $(t_i, t_f]$, per continuità la stessa equazione differenziale con condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}H(t_i - \vartheta) &= 0 \\ \dot{H}(t_i - \vartheta) &= I\end{aligned}$$

ammetterà una soluzione \tilde{H} non singolare in $(t_i - \vartheta, t_f]$ e quindi non singolare in $[t_i, t_f]$ ⁽¹⁾. Poiché \tilde{h}_i è soluzione dell'equazione vettoriale di *Jacobi*, risulta:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_i} \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad \forall t \in [t_i - \vartheta, t_f] \quad (4.91)$$

Postmoltiplicando per \tilde{h}_j e integrando per parti tra $t_i - \vartheta$ e un qualunque $t \in [t_i, t_f]$, ricordando che $\tilde{h}_j(t_i - \vartheta) = 0$, si ha:

$$\int_{t_i - \vartheta}^t \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_i} \tilde{h}_j d\tau = \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_i} \tilde{h}_j - \int_{t_i - \vartheta}^t \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_i} \dot{\tilde{h}}_j d\tau \quad i, j = 1, 2, \dots, \nu \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Dalla precedente equazione risulta:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_i} \tilde{h}_j = \int_{t_i - \vartheta}^t \left(\frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_i} \tilde{h}_j + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_i} \dot{\tilde{h}}_j \right) d\tau \quad i, j = 1, 2, \dots, \nu \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Tenendo conto della definizione di $\Omega(h, \dot{h}, t)$ si verifica facilmente che l'integrando a secondo membro della precedente equazione resta invariato scambiando i ruoli

⁽¹⁾ Per una dimostrazione più completa di questo punto si veda ad esempio [13], cap. 3, ¶2.

di \tilde{h}_i e di \tilde{h}_j ; se ne deduce che:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_i} \tilde{h}_j = \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_j} \tilde{h}_i \quad i, j = 1, 2, \dots, \nu \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Osservando che i due membri della precedente eguaglianza costituiscono rispettivamente l'elemento di posto i, j e quello di posto j, i della matrice $Q^T \tilde{H}$, si può affermare che quest'ultima risulta simmetrica in $[t_i, t_f]$. \square

Lemma 4.31 - Con riferimento al Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$ e $z(t_f) = z^f$, sia z^* un estremale non singolare per il quale risultino:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} > 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

e per il quale non esistano in $(t_i, t_f]$ punti coniugati di t_i ; si ha allora:

$$\delta^2 J(z^*, h) > 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D}, h \neq 0$$

Dimostrazione - In base al precedente Lemma 4.30 esiste una matrice \tilde{H} , soluzione dell'equazione (4.85), non singolare in $[t_i, t_f]$. Per qualunque $h \in K_{z^*, D}$ si ponga quindi:

$$v(t) = \tilde{H}^{-1}(t)h(t)$$

Ponendo inoltre:

$$\pi(t) = \tilde{H}(t)\dot{v}(t)$$

risulta:

$$\dot{h}(t) = \dot{\tilde{H}}(t)v(t) + \pi(t)$$

Si ha perciò, ricordando le (4.89) e (4.90) e tenendo presente che \tilde{H} soddisfa la (4.85):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega^T}{\partial h} &= 2 \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} h + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \dot{h} \\ &= 2 \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} \tilde{H} v + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} (\dot{\tilde{H}} v + \pi) \\ &= 2 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} \tilde{H} + \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \dot{\tilde{H}} \right) v + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \pi \\ &= 2 \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*T} \tilde{H} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} \dot{\tilde{H}} \right) \right\} v + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \pi \\ &= \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_1}^T \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_2}^T \cdots \frac{\partial \Omega}{\partial h} \Big|_{\tilde{h}_\nu}^T \right] \right\} v + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \pi \end{aligned}$$

$$= \dot{Q}v + 2\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^\ast \pi \quad (4.92)$$

e ancora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|^\ast &= 2\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*T} h + 2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \dot{h} \\ &= 2\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*T} \tilde{H}v + 2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast (\dot{\tilde{H}}v + \pi) \\ &= 2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*T} \tilde{H} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \dot{\tilde{H}}\right)v + 2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \pi \\ &= \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_1}^\ast \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_2}^\ast \dots \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_\nu}^\ast\right]v + 2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \pi \\ &= Qv + 2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \pi \end{aligned} \quad (4.93)$$

In base alle (4.90) e (4.91) si osserva inoltre che:

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_1}^\ast \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_2}^\ast \dots \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_\nu}^\ast \right] \\ &= \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_1}^\ast \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_2}^\ast \dots \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_\nu}^\ast \right] \end{aligned} \quad (4.94)$$

A questo punto utilizzando le (4.92), (4.93) e tenendo in conto la (4.94), si ha:

$$\begin{aligned} \Omega(h, \dot{h}, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial h} h + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \dot{h} \right) = \frac{1}{2} v^T (\dot{Q}^T \tilde{H} + Q^T \dot{\tilde{H}})v \\ &\quad + \pi^T \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*T} \tilde{H} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \dot{\tilde{H}} + \frac{1}{2} Q \right)v + \pi^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \pi \\ &= \frac{1}{2} v^T \left(\frac{d}{dt} Q^T \tilde{H} \right)v + \pi^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \pi \\ &\quad + \dot{v}^T \tilde{H}^T \left(\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_1}^\ast \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_2}^\ast \dots \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{h}} \Big|_{\tilde{h}_\nu}^\ast \right] + \frac{1}{2} Q \right)v \\ &= \frac{1}{2} v^T \left(\frac{d}{dt} Q^T \tilde{H} \right)v + \dot{v}^T \tilde{H}^T Qv + \pi^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \pi \end{aligned}$$

Poiché in base al Lemma 4.30 la matrice $Q^T \tilde{H}$ è simmetrica in $[t_i, t_f]$, si ottiene:

$$\Omega(h, \dot{h}, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^T Q^T \tilde{H} v) + \pi^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\pi}$$

Osservando che, per $h \in K_{z^*, D}$, risulta $v(t_i) = v(t_f) = 0$, si ha infine:

$$\begin{aligned} \delta^2 J(z^*, h) &= \int_{t_i}^{t_f} \Omega(h, \dot{h}, t) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \pi^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\pi} dt > 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D}, h \neq 0 \end{aligned} \quad \square$$

Si può ora dimostrare la seguente condizione sufficiente di minimo locale debole.

Teorema 4.32 (Legendre) - Con riferimento al Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$ e $z(t_f) = z^f$, sia z^* un estremale non singolare in corrispondenza al quale risulti:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\pi}^* > 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

e per il quale non esistano in $(t_i, t_f]$ punti coniugati di t_i ; allora z^* è un punto di minimo locale debole.

Dimostrazione - Considerato il funzionale:

$$J_\gamma(z) = \int_{t_i}^{t_f} [L(z, \dot{z}, t) - \gamma^2 \dot{z}^T \dot{z}] dt = \int_{t_i}^{t_f} L_\gamma(z, \dot{z}, t) dt$$

esiste un $\bar{\gamma} \neq 0$ sufficientemente piccolo tale che, per la continuità di L_γ rispetto a γ , risulta:

$$\frac{\partial^2 L_\gamma}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\bar{\gamma}}^* > 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

e tale che non esistono per $J_{\bar{\gamma}}$ in corrispondenza a z^* punti coniugati di t_i in $(t_i, t_f]$. In base al Lemma 4.31 si ha perciò:

$$\delta^2 J_{\bar{\gamma}}(z^*, h) = \int_{t_i}^{t_f} [\Omega(h, \dot{h}, t) - 2\bar{\gamma}^2 \dot{h}^T \dot{h}] dt > 0 \quad \forall h \in K_{z^*, D}, h \neq 0$$

da cui risulta che:

$$\delta^2 J(z^*, h) = \int_{t_i}^{t_f} \Omega(h, \dot{h}, t) dt > 2\bar{\gamma}^2 \int_{t_i}^{t_f} \dot{h}^T \dot{h} dt \quad \forall h \in K_{z^*, D}, h \neq 0$$

Si consideri a questo punto un incremento ammissibile $\alpha h \neq 0$; poiché z^* è un estremale e $K_{z^*, D}$ è simmetrico, $\delta J(z^*, h) = 0$, $\forall h \in K_{z^*, D}$ e pertanto per la variazione totale risulta:

$$\begin{aligned} J(z^* + \alpha h) - J(z^*) &= \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 J(z^*, h) + r_3(z^*, \alpha h) \\ &> \bar{\gamma}^2 \alpha^2 \int_{t_i}^{t_f} \dot{h}^T \dot{h} dt - |r_3(z^*, \alpha h)| \end{aligned} \quad (4.95)$$

D'altra parte, esprimendo $L(z^* + \alpha h, \dot{z}^* + \alpha \dot{h}, t)$ mediante uno sviluppo di *Taylor* con resto del terzo ordine, si deduce per $r_3(z^*, \alpha h)$ una espressione del tipo:

$$r_3(z^*, \alpha h) = \int_{t_i}^{t_f} \begin{pmatrix} \alpha h \\ \alpha \dot{h} \end{pmatrix}^T H(t) \begin{pmatrix} \alpha h \\ \alpha \dot{h} \end{pmatrix} dt$$

dove la matrice $H(t)$ è tale che:

$$\lim_{\|\alpha h\| \rightarrow 0} \|H(t)\| = 0$$

uniformemente rispetto a t in $[t_i, t_f]$. Si ha perciò che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che:

$$\|H(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall \alpha h \in S(0, \delta_\varepsilon), z^* + \alpha h \in D$$

Segue pertanto che:

$$\begin{aligned} |r_3(z^*, \alpha h)| &\leq \int_{t_i}^{t_f} \left| \begin{pmatrix} \alpha h \\ \alpha \dot{h} \end{pmatrix}^T H(t) \begin{pmatrix} \alpha h \\ \alpha \dot{h} \end{pmatrix} \right| dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_f} \|H(t)\| \begin{pmatrix} \alpha h \\ \alpha \dot{h} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha h \\ \alpha \dot{h} \end{pmatrix} dt \\ &\leq \varepsilon \alpha^2 \int_{t_i}^{t_f} (\dot{h}^T h + \dot{h}^T \dot{h}) dt \quad \forall \alpha h \in S(0, \delta_\varepsilon), z^* + \alpha h \in D \end{aligned}$$

Utilizzando la diseguaglianza di *Schwarz*, si ha:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} h^T(t) h(t) dt &= \int_{t_i}^{t_f} \left(\int_{t_i}^t \dot{h}^T(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_i}^t \dot{h}(\sigma) d\sigma \right) dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_f} \left(\int_{t_i}^t \dot{h}^T(\tau) \dot{h}(\tau) d\tau \int_{t_i}^t d\sigma \right) dt \\ &\leq \int_{t_i}^{t_f} (t - t_i) dt \int_{t_i}^{t_f} \dot{h}^T(\tau) \dot{h}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{(t_f - t_i)^2}{2} \int_{t_i}^{t_f} \dot{h}^T(t) \dot{h}(t) dt$$

e pertanto, scegliendo $\varepsilon < \bar{\gamma}^2 \left(1 + \frac{1}{2}(t_f - t_i)^2\right)^{-1}$, si ha:

$$\begin{aligned} |r_3(z^*, \alpha h)| &\leq \varepsilon \alpha^2 \left(1 + \frac{1}{2}(t_f - t_i)^2\right) \int_{t_i}^{t_f} \dot{h}^T \dot{h} dt \\ &< \bar{\gamma}^2 \alpha^2 \int_{t_i}^{t_f} \dot{h}^T \dot{h} dt \quad \forall \alpha h \in S(0, \delta_\varepsilon), z^* + \alpha h \in D \end{aligned}$$

Sostituendo quest'ultima nella (4.95), risulta:

$$J(z^* + \alpha h) - J(z^*) > 0 \quad \forall \alpha h \in S(0, \delta_\varepsilon), z^* + \alpha h \in D, \alpha h \neq 0$$

e pertanto z^* è punto di minimo locale. Si osserva infine che la norma definita su $\bar{C}^1[t_i, t_f]$ è quella (1.3) perché sia garantita l'esistenza delle variazioni prima e seconda di J ; conseguentemente z^* è punto di minimo locale debole. \square

Esempio 4.13 - Si consideri il funzionale:

$$J(z) = \int_0^1 (\dot{z} - 1)^2 dt$$

e si ricerchi il minimo di esso in $\bar{C}^1[0, 1]$, con le condizioni agli estremi $z(0) = z(1) = 0$.

Si osserva preliminarmente che ogni estremale risulterà non singolare in quanto per ogni z si ha:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} = 2 \neq 0$$

e inoltre non esistono punti di cuspide in quanto la (4.7) impone la continuità di \dot{z}^* .

L'equazione di Eulero si riduce alla:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right|^* = C$$

con C costante, da cui si ricava la soluzione:

$$z^*(t) = C_1 t + C_2$$

e imponendo le condizioni agli estremi si ottiene l'unico estremale:

$$z^*(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$$

Come già osservato $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} = 2$, è definita positiva in $[0, 1]$. L'equazione di Jacobi (4.85) si particolarizza in questo caso nella:

$$\dot{H} = K$$

con K costante, da cui, imponendo le condizioni iniziali (4.86) si ottiene la soluzione:

$$H(t) = t$$

Poiché è sempre $H(t) \neq 0$ in $(0, 1]$, non esistono punti coniugati in tale intervallo. In base alle precedenti considerazioni risultano soddisfatte tutte le condizioni del Teorema 4.32 e pertanto si può concludere che l'estremale trovato costituisce un punto di minimo locale debole.

Esempio 4.14 - Si consideri il funzionale:

$$J(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{z}^2 - z^2) dt$$

e siano assegnate le condizioni agli estremi $z(0) = 0$, $z(\pi/2) = 1$.

Anche in questo caso, essendo per ogni estremale $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|^{*} = 2\dot{z}^*$ continua, e $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} = 2 \neq 0$, si può affermare preliminarmente che ogni estremale è non singolare.

L'equazione d'Eulero per il problema in esame è:

$$\ddot{z}^* + z^* = 0$$

e il suo integrale generale è:

$$z^*(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

Imponendo le condizioni agli estremi si ottiene l'unico estremale:

$$z^*(t) = \sin t$$

La quantità $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*}$ è come già osservato definita positiva in $[0, \pi/2]$. L'equazione di Jacobi per il problema in esame diviene:

$$\ddot{H} + H = 0$$

che, risolta con le condizioni iniziali (4.86), fornisce la soluzione:

$$H(t) = \sin t$$

Poiché risulta $H(t) \neq 0$ per ogni $t \in (0, \pi/2]$, in base al Teorema 4.32 si può affermare che l'estremale trovato è un minimo locale debole.

Procedendo in maniera analoga per il funzionale:

$$J(z) = \int_0^\pi (\dot{z}^2 - z^2) dt$$

con le condizioni agli estremi $z(0) = z(\pi) = 0$, si determinano gli infiniti estremali:

$$z^*(t) = C \sin t$$

i quali soddisfano le condizioni necessarie dei Teoremi 4.27 e 4.29, ma non soddisfano le condizioni sufficienti del Teorema 4.32. Non si può quindi affermare, in questo secondo caso, che gli estremali trovati forniscano minimi locali.

4.4 CONDIZIONI DI MINIMO FORTE BASATE SULLA FUNZIONE ECCESSO DI WEIERSTRASS

Come mostrato nel precedente paragrafo, le condizioni che in corrispondenza all'estremale z^* risulti $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} > 0$ e che non esistano punti coniugati di t_i in $(t_i, t_f]$ assicurano che z^* è un minimo locale debole per il problema considerato. Poiché un minimo locale forte è certamente un minimo locale debole (ma non viceversa) è da attendersi che condizioni sufficienti di minimo forte possano ottenersi aggiungendo ulteriori condizioni a quelle precedentemente menzionate. Nel seguito verranno dedotte tali condizioni pervenendo a un teorema di sufficienza per minimi locali forti. Inoltre verrà anche dedotta una ulteriore condizione necessaria di minimo locale forte.

In questo paragrafo, trattandosi di minimi forti, quando verranno dimostrate le relative condizioni, lo spazio $\bar{C}^1[t_i, t_f]$ si intenderà normato con la norma (1.2); ciò d'altra parte non comporta problemi in relazione alla esistenza delle variazioni successive del funzionale in quanto, come si vedrà, tali condizioni non richiedono l'utilizzazione delle variazioni suddette.

Per dedurre i risultati che seguono è necessario premettere la seguente definizione di *campo di Mayer*.

Definizione 4.33 - Considerato il Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$, $z(t_f) = z^f$, si definisce campo vettoriale di *Mayer* su un insieme aperto e semplicemente connesso $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, un insieme M di vettori $\{[\gamma^T(z(t), t) \ 1]^T\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $\gamma \in C^1(A)$, tale che:

i) ogni soluzione dell'equazione differenziale:

$$\dot{z} = \gamma(z, t) \tag{4.96}$$

sia anche soluzione dell'equazione di *Eulero* (4.12);

ii) sia verificata l'eguaglianza:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z_j \partial \dot{z}_k} \Big|_{\dot{z}=\gamma(z,t)} = \frac{\partial^2 L}{\partial z_k \partial \dot{z}_j} \Big|_{\dot{z}=\gamma(z,t)} \quad j, k = 1, 2, \dots, \nu \quad (4.97)$$

□

La definizione data di campo di *Mayer* fa sì che nell'insieme A resti definita una famiglia di curve appartenenti a $C^2[t_i, t_f]$, che sono soluzioni dell'equazione differenziale (4.96) e che per definizione sono anche soluzioni dell'equazione di *Eulero*. In virtù dell'ipotesi che $\gamma \in C^1(A)$, si ha che per ogni punto di A passa una e una sola curva della famiglia ⁽¹⁾.

Si osserva infine che la condizione (4.97) è banalmente soddisfatta nel caso $\nu = 1$.

Si ha inoltre l'ulteriore definizione.

Definizione 4.34 - Un estremale non singolare z^* del problema considerato si dice immerso nel campo di *Mayer* M definito su A e relativo allo stesso problema se risulta $[z^{*T}(t) \ t]^T \in A$, $\forall t \in [t_i, t_f]$ e se z^* soddisfa l'equazione (4.96). □

Verrà ora enunciato, senza dimostrazione ⁽²⁾, un teorema che stabilisce l'invarianza del cosiddetto *integrale di Hilbert* rispetto al percorso di integrazione.

Teorema 4.35 - Considerato un campo di *Mayer* su A relativo al Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$, $z(t_f) = z^f$, il valore del funzionale:

$$I(z) = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ L[z(t), \gamma(z, t), t] + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\dot{z}=\gamma(z,t)} [\dot{z} - \gamma(z, t)] \right\} dt$$

è costante qualunque sia $z \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$, $z(t_i) = z^i$, $z(t_f) = z^f$, purché:

$$[z^T(t) \ t]^T \in A \quad \forall t \in [t_i, t_f]. \quad \square$$

Per esprimere le condizioni che verranno successivamente dimostrate è conveniente introdurre la cosiddetta *funzione eccesso di Weierstrass* mediante la seguente definizione.

Definizione 4.36 - Data $z \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$ e dati $a, b \in \mathbb{R}^\nu$, si definisce funzione eccesso la funzione scalare:

⁽¹⁾ Il campo di *Mayer* è costituito da vettori che con le prime ν componenti forniscono in ogni punto di A la tangente all'unica curva della famiglia che passa per quel punto.

⁽²⁾ Per la dimostrazione di questo risultato si rinvia ad esempio a [21], cap. 3, §2.

$$E(z(t), a, b, t) = L(z(t), b, t) - L(z(t), a, t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\dot{z}(t)=a} (b - a) \quad (4.98)$$

□

Utilizzando la precedente definizione e l'invarianza dell'integrale di *Hilbert* si può facilmente dimostrare la seguente condizione sufficiente di minimo locale forte.

Teorema 4.37 - Con riferimento al Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i, z(t_f) = z^f$, se z^* è un estremale non singolare immerso in un campo di *Mayer* M , relativo allo stesso problema e definito su A mediante la funzione $\gamma(z, t)$, se esiste un $\varepsilon > 0$ tale che risulti:

$$E[z(t), \gamma(z(t), t), \dot{z}(t), t] \geq 0 \quad (4.99)$$

$$\forall z \in \tilde{S} = \{z \in \bar{C}^1[t_i, t_f] : z(t_i) = z^i, z(t_f) = z^f, \|z - z^*\| < \varepsilon\}, \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

e se:

$$[z^T(t) \quad t]^T \in A \quad \forall z \in \tilde{S}, \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

allora z^* è un punto di minimo locale forte.

Dimostrazione - Si osservi innanzitutto che essendo z^* immerso in M , esso soddisfa la (4.96) e quindi risulta:

$$J(z^*) = I(z^*)$$

D'altra parte, in base al Teorema 4.35, risulta:

$$I(z) = I(z^*) \quad \forall z \in \tilde{S}$$

Pertanto, per la variazione totale del funzionale, rispetto a un qualunque $z \in \tilde{S}$, si ha:

$$\begin{aligned} J(z) - J(z^*) &= J(z) - I(z) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left\{ L(z, \dot{z}, t) - L(z, \gamma(z, t), t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\dot{z}=\gamma(z,t)} (\dot{z} - \gamma(z, t)) \right\} dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} E[z(t), \gamma(z, t), \dot{z}(t), t] dt \geq 0 \end{aligned}$$

il che mostra che z^* è un punto di minimo locale forte. □

Osservazione 4.38 - Si noti che, qualora il campo M possa essere definito su un insieme $A \supset \mathbb{R}^\nu \times [t_i, t_f]$ e qualora la condizione (4.99) sia verificata per ogni $\varepsilon > 0$, l'estremale z^* risulta essere un punto di minimo globale forte. Tale conclusione è facilmente verificabile osservando che in tali ipotesi l'insieme \tilde{S} risulta

coincidente con l'insieme ammissibile D e pertanto, ripetendo la dimostrazione del Teorema 4.37, si perviene alla conclusione che:

$$J(z) - J(z^*) \geq 0 \quad \forall z \in D$$

L'applicazione del precedente teorema è resa complicata dal fatto che essa si basa sulla conoscenza esplicita del campo M , in cui l'estremale è immerso. Un risultato che supera tale difficoltà può essere ottenuto utilizzando una condizione che garantisce l'esistenza di un campo di *Mayer*. Su questa base, dal Teorema 4.37, è facilmente deducibile un secondo teorema di sufficienza che, sia pure sotto ipotesi più onerose, risulta più facilmente applicabile del precedente.

Allo scopo di rendere più agevole la dimostrazione del successivo teorema sull'esistenza di un campo di *Mayer*, conviene premettere la seguente osservazione che chiarisce la relazione esistente fra soluzioni dell'equazione di *Eulero* e soluzioni dell'equazione di *Jacobi*.

Osservazione 4.39 - Siano z^* e z' due soluzioni dell'equazione di *Eulero*; indicata con αh la differenza $z' - z^*$, risulta:

$$\frac{\partial L}{\partial z} \Big|_{z^* + \alpha h} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{z^* + \alpha h} = 0^T$$

Utilizzando la formula di *Taylor* del primo ordine con punto iniziale z^* e ricordando che z^* è a sua volta soluzione dell'equazione di *Eulero*, si ha:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \Big|^{*} h + \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*} \dot{h} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*T} h + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*} \dot{h} \right) + o(\|h\|) = 0$$

in cui $o(\|h\|)$ rappresenta un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla norma di h , definita secondo la (1.2). Confrontando con la (4.88) si osserva cioè che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, la differenza fra due soluzioni sufficientemente vicine dell'equazione di *Eulero*, è soluzione dell'equazione vettoriale di *Jacobi*. Inoltre considerate due soluzioni dell'equazione di *Eulero*, sufficientemente vicine e che assumono lo stesso valore in t_i , la loro differenza, a meno di infinitesimi di ordine superiore, è esprimibile come combinazione lineare delle colonne della matrice H , soluzione dell'equazione matriciale di *Jacobi* (4.85), con condizioni iniziali (4.86), e se $H(t)$ è non singolare per ogni t in $(t_i, t_f]$, e cioè se non vi sono in $(t_i, t_f]$ punti coniugati di t_i , le suddette soluzioni assumono valori diversi per ogni $t \in (t_i, t_f]$. Infine, per la linearità della equazione di *Jacobi*, si ha che se z' e z'' sono due soluzioni dell'equazione di *Eulero* passanti per il punto di coordinate $(t_i, z^*(t_i))$ e appartenenti a un intorno $S(z^*, \varepsilon)$, con ε sufficientemente piccolo, anche la differenza $z' - z''$ è esprimibile, a meno di infinitesimi di ordine superiore, come combinazione lineare delle colonne della matrice H , soluzione della equazione (4.85) relativa alla z^* , con condizioni iniziali (4.86) e, in assenza di punti coniugati di t_i in $(t_i, t_f]$, dovrà risultare $z'(t) \neq z''(t)$ per ogni $t \in (t_i, t_f]$.

Si può a questo punto dimostrare il seguente teorema che fornisce condizioni sufficienti perché un estremale possa essere immerso in un campo di Mayer.

Teorema 4.40 - Sia z^* un estremale non singolare del Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$ e $z(t_f) = z^f$ e non esistano punti coniugati di t_i in $(t_i, t_f]$, allora esiste un campo di Mayer in cui z^* è immerso.

Dimostrazione - Considerato un numero $\vartheta > 0$ sufficientemente piccolo è possibile considerare il prolungamento di z^* sull'intervallo $[t_i - \vartheta, t_f]$. Le soluzioni dell'equazione di Euler che passano per il punto di coordinate $(z^*(t_i - \vartheta), t_i - \vartheta)$ sono definite a meno di un parametro ν -dimensionale e quindi, su questa base, si può dimostrare che esiste un insieme $A \subset \mathbb{R}^{\nu+1}$ costituito dai punti di coordinate $(z(t), t)$, $\forall t \in [t_i, t_f]$ e $\forall z \in S(z^*, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, tale che, per ciascun punto di A , passa almeno una delle suddette soluzioni ⁽¹⁾. In base all'Osservazione 4.39, inoltre, data l'assenza di punti coniugati di t_i in $(t_i, t_f]$, si può anche escludere che per un qualunque punto di A passi più di una soluzione. Pertanto, poiché per ogni punto di A passa una e una sola soluzione \bar{z} dell'equazione di Euler con punto iniziale $(z^*(t_i - \vartheta), t_i - \vartheta)$ resta definito in A un campo vettoriale $\{\bar{z}^T(t) \ 1]^T\}$. Tale campo vettoriale soddisfa per costruzione la condizione i) della Definizione 4.33; allo scopo di dimostrare che esso è un campo di Mayer occorre verificare che anche la condizione ii) è soddisfatta. A tale proposito è utile considerare la seguente funzione definita su A e di classe C^2 su tale insieme:

$$V(\bar{z}(t), t) = \int_{t_i - \vartheta}^t L[\bar{z}(\tau), \dot{\bar{z}}(\tau), \tau] d\tau = \bar{J}(\bar{z})$$

in cui \bar{z} è la soluzione che passa per il punto considerato di coordinate $(\bar{z}(t), t)$ e \bar{J} è il funzionale (4.2) calcolato sull'intervallo $[t_i - \vartheta, t]$. Attribuendo una variazione $\alpha h(t)$ sufficientemente piccola a $\bar{z}(t)$, si ha per il differenziale primo della funzione V :

$$dV = \alpha \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\partial V(\bar{z}(t), t)}{\partial \bar{z}_j(t)} h_j(t) = \alpha \delta \bar{J}(\bar{z}, h) \quad (4.100)$$

in cui αh è la differenza fra la soluzione che passa per il punto di coordinate $(\bar{z}(t) + \alpha h(t), t)$ e la soluzione \bar{z} . A questo punto, ricordando la (1.7) scritta per \bar{J} e tenendo presente che \bar{z} soddisfa la (4.5), si ha:

$$\delta \bar{J}(\bar{z}, h) = \left[\int_{t_i - \vartheta}^{\xi} \frac{\partial L}{\partial z} \Big|_{\bar{z}, \dot{\bar{z}}} d\tau h(\xi) \right]_{t_i}^t + c^T h(\xi) \Big|_{t_i - \vartheta}^t$$

⁽¹⁾ Per una dimostrazione rigorosa di tale affermazione si rinvia ad esempio a [13], cap. 3, §9.

Poiché ancora in base alla (4.5) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial z} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} \\ c^T &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} \right]_{t_i}\end{aligned}$$

e inoltre risulta $h(t_i - \vartheta) = 0$, si ottiene per la variazione prima di \bar{J} :

$$\delta \bar{J}(\bar{z}, h) = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} h(t)$$

Sostituendo la precedente nella (4.100) si deduce:

$$\frac{\partial V(\bar{z}(t), t)}{\partial \bar{z}_j(t)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}} \quad j = 1, 2, \dots, \nu$$

Derivando rispetto a $\bar{z}_k(t)$ si ottiene:

$$\frac{\partial^2 V(\bar{z}(t), t)}{\partial \bar{z}_k(t) \partial \bar{z}_j(t)} = \frac{\partial^2 L}{\partial z_k(t) \partial \dot{z}_j(t)} \Big|_{\bar{z}, \dot{z}}$$

e invertendo l'ordine di derivazione a primo membro, per il teorema di *Schwarz* la (4.97) resta dimostrata, ricordando che $\dot{\bar{z}}(t) = \gamma(\bar{z}(t), t)$. \square

Il teorema che fornisce condizioni sufficienti di minimo locale forte senza richiedere la conoscenza esplicita di un campo di *Mayer*, in cui l'estremale è immerso, è allora il seguente.

Teorema 4.41 (Weierstrass) - Se z^* è un estremale non singolare per il Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i$ e $z(t_f) = z^f$, se non esistono punti coniugati di t_i in $(t_i, t_f]$, se esiste un insieme aperto $B \subset \mathbb{R}^{\nu+1}$ tale che risulti $[z^{*T}(t) \ t]^T \in B$, $\forall t \in [t_i, t_f]$ e tale che:

$$\begin{aligned}E[z(t), a, b, t] \geq 0 \quad \forall [z^T(t) \ t]^T \in B \\ \forall a, b \in \mathbb{R}^\nu\end{aligned} \tag{4.101}$$

allora z^* è un punto di minimo locale forte.

Dimostrazione - In base al Teorema 4.40 è assicurata l'esistenza di un campo di *Mayer* definito su un insieme $A \subset \mathbb{R}^{\nu+1}$, in cui z^* è immerso. Pertanto pur di scegliere $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, l'insieme \tilde{S} definito nella (4.99) sarà tale che:

$$[z^T(t) \ t]^T \in B \quad \forall z \in \tilde{S}, \forall t \in [t_i, t_f]$$

Poiché quindi la (4.101) implica la (4.99), il teorema risulta dimostrato. \square

Osservazione 4.42 - Si noti che, in base alla formula di *Taylor*, per un opportuno $\xi \in [0, 1]$ si può scrivere:

$$\begin{aligned} L(z(t), b, t) &= L(z(t), a, t) + \frac{\partial L}{\partial z} \Big|_{\dot{z}(t)=a} (b-a) \\ &\quad + \frac{1}{2} (b-a)^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\dot{z}(t)=a+\xi(b-a)} (b-a) \end{aligned}$$

e quindi, in base alla Definizione 4.36, risulta:

$$E[z(t), a, b, t] = \frac{1}{2} (b-a)^T \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \Big|_{\dot{z}(t)=a+\xi(b-a)} (b-a)$$

Pertanto una condizione sufficiente, equivalente alla (4.101), è che esista un insieme B , definito come nel Teorema 4.41, tale che:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \geq 0 \quad \forall [z^T(t) \ t]^T \in B, \quad \forall \dot{z}(t) \in \mathbb{R}^\nu$$

Con riferimento alla funzione eccesso di *Weierstrass* è anche possibile dimostrare la seguente condizione necessaria di minimo locale forte.

Teorema 4.43 - Se z^* è un punto di minimo locale forte per il Problema 4.2 con $z(t_i) = z^i, z(t_f) = z^f$, si ha che:

$$E(z^*(t), \dot{z}^*(t), b, t) \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{R}^\nu, \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (4.102)$$

Dimostrazione - Si consideri un punto $\tilde{t} \in (t_i, t_f)$ e tale che \dot{z} sia continua in \tilde{t} . Sia $\bar{\delta} > 0$ tale che $\tilde{t} + \bar{\delta} < t_f$. Per $\delta \in (0, \bar{\delta}]$, per $\alpha \in (0, 1)$ e per un qualunque $b \in \mathbb{R}^\nu$, si definisca la funzione:

$$z_\delta(t) = \begin{cases} z^*(t) & \forall t \in [t_i, \tilde{t}] \cup [\tilde{t} + \delta, t_f] \\ z^*(t) + (t - \tilde{t})(b - \dot{z}^*(\tilde{t})) & \forall t \in [\tilde{t}, \tilde{t} + \alpha\delta] \\ z^*(t) + (\tilde{t} + \delta - t) \frac{\alpha}{1-\alpha} (b - \dot{z}^*(\tilde{t})) & \forall t \in [\tilde{t} + \alpha\delta, \tilde{t} + \delta] \end{cases}$$

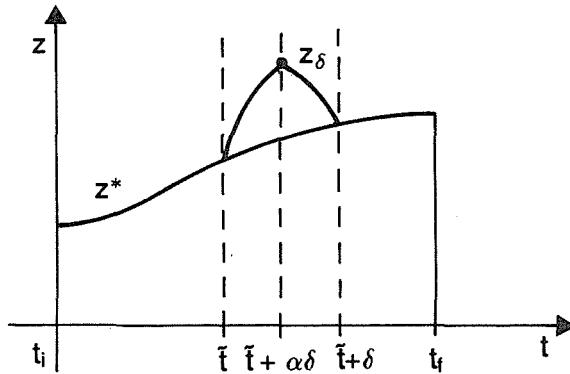


Fig. 4.10

Evidentemente $z_\delta \in D$ e poiché, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, per δ sufficientemente piccolo risulta $\|z_\delta - z^*\| < \varepsilon$ (essendo la norma definita secondo la (1.2)), in base all'ipotesi si ha che:

$$J(z_\delta) - J(z^*) \geq 0$$

e quindi anche:

$$\frac{J(z_\delta) - J(z^*)}{\alpha \delta} \geq 0 \quad (4.103)$$

D'altra parte risulta evidentemente:

$$\begin{aligned} & \frac{J(z_\delta) - J(z^*)}{\alpha \delta} \\ &= \frac{1}{\alpha \delta} \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \alpha \delta} \{L[z^*(t) + (t - \tilde{t})(b - \dot{z}^*(\tilde{t})), \dot{z}^*(t) + b - \dot{z}^*(\tilde{t}), t] - L[z^*(t), \dot{z}^*(t), t]\} dt \\ &+ \frac{1}{\alpha \delta} \int_{\tilde{t} + \alpha \delta}^{\tilde{t} + \delta} \{L[z^*(t) + (\tilde{t} + \delta - t) \frac{\alpha}{1-\alpha}(b - \dot{z}^*(\tilde{t})), \dot{z}^*(t) - \frac{\alpha}{1-\alpha}(b - \dot{z}^*(\tilde{t})), t] \\ &- L[z^*(t), \dot{z}^*(t), t]\} dt \end{aligned}$$

Passando al limite per $\delta \rightarrow 0^+$, si ha:

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{J(z_\delta) - J(z^*)}{\alpha \delta} = L[z^*(\tilde{t}), b, \tilde{t}] - L[z^*(\tilde{t}), \dot{z}^*(\tilde{t}), \tilde{t}] \\ &+ \frac{1 - \alpha}{\alpha} \{L[z^*(\tilde{t}), \dot{z}^*(\tilde{t}) - \frac{\alpha}{1-\alpha}(b - \dot{z}^*(\tilde{t})), \tilde{t}] - L[z^*(\tilde{t}), \dot{z}^*(\tilde{t}), \tilde{t}]\} \\ &= L[z^*(\tilde{t}), b, \tilde{t}] - L[z^*(\tilde{t}), \dot{z}^*(\tilde{t}), \tilde{t}] \\ &+ \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left\{ -\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\tilde{t}}^* \frac{\alpha}{1-\alpha}(b - \dot{z}^*(\tilde{t})) + o(\alpha) \right\} \end{aligned}$$

Considerando ancora il limite per $\alpha \rightarrow 0^+$ e ricordando la (4.103), si ha infine:

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{J(z_\delta) - J(z^*)}{\alpha \delta} \\ &= L[z^*(\tilde{t}), b, \tilde{t}] - L[z^*(\tilde{t}), \dot{z}^*(\tilde{t}), \tilde{t}] - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right|_{\tilde{t}}^* (b - \dot{z}^*(\tilde{t})) \\ &= E[z^*(\tilde{t}), \dot{z}^*(\tilde{t}), b, \tilde{t}] \geq 0 \end{aligned}$$

Il precedente sviluppo dimostra che la (4.102) sussiste per un qualunque \tilde{t} ad eccezione dei punti t_i, t_f e degli eventuali punti di cuspidate per la z^* . Tuttavia, come conseguenza delle (4.7) e (4.8), la $E(z^*(t), \dot{z}^*(t), b, t)$ è funzione continua di t in $[t_i, t_f]$; la necessità della condizione (4.102) resta perciò dimostrata su tutto l'intervallo.

□

Esempio 4.15 - Si consideri il problema di minimizzare il funzionale:

$$J(z) = \int_0^{t_f} (\dot{z}^2 - z^2) dt$$

con $t_f \in (0, \pi)$ assegnato e con le condizioni agli estremi $z(0) = 0, z(t_f) = 1$.

Come osservato nell'Esempio 4.14, si può affermare preliminarmente che ogni eventuale estremale è non singolare. L'equazione di *Eulero* è:

$$\ddot{z}^* + z^* = 0$$

e ammette la famiglia di soluzioni:

$$z^*(t) = A \cos t + B \sin t \quad (4.104)$$

con A e B costanti di integrazione. Imponendo le condizioni agli estremi si perviene all'unico estremale:

$$z^*(t) = \frac{\sin t}{\sin t_f}$$

La natura di tale estremale può essere determinata utilizzando il Teorema 4.41. Infatti, come già visto nell'Esempio 4.14, l'equazione di *Jacobi* (4.85) con le condizioni iniziali (4.86), fornisce l'unica soluzione:

$$H(t) = \sin t$$

e poiché $\sin t \neq 0, \forall t \in (0, t_f]$, essendo $t_f < \pi$, non esistono punti coniugati di quello iniziale in $(0, t_f]$. Inoltre particolarizzando la Definizione 4.36 al problema in esame, si ottiene per la funzione eccesso:

$$E[z(t), a, b, t] = (b - a)^2 \geq 0 \quad \forall b, a, z(t) \in \mathbb{R}$$

Pertanto si può affermare che l'estremale trovato è un minimo locale forte.

In effetti tale estremale fornisce il minimo globale del problema, come può essere verificato, sulla base della Osservazione 4.38, notando che la condizione (4.99) è verificata per ogni $\varepsilon > 0$ e mostrando che z^* può essere immerso in un campo di Mayer M definito in un insieme che contiene $\mathbb{R} \times [0, t_f]$. Al fine di costruire il campo M si considera la famiglia di funzioni $\{z_B\}$ definite a meno del parametro B ed ottenute dall'integrale generale (4.104), imponendo il passaggio per il punto di coordinate $(-\vartheta, z^*(-\vartheta)) = \left(-\vartheta, -\frac{\sin \vartheta}{\sin t_f}\right)$:

$$z_B(t) = \left(B - \frac{1}{\sin t_f} \right) \operatorname{tg} \vartheta \cos t + B \sin t$$

L'estremale z^* è contenuto in tale famiglia e si ottiene evidentemente per $B = \frac{1}{\sin t_f}$. Considerato un punto di coordinate $(z(t), t) \in \mathbb{R} \times [0, t_f]$, per esso passa una e una sola curva della famiglia, ottenibile ponendo:

$$B = \frac{z(t) \sin t_f + \operatorname{tg} \vartheta \cos t}{\sin t \sin t_f + \operatorname{tg} \vartheta \cos t \sin t_f}$$

Nello stesso punto la pendenza della curva è:

$$\gamma(z(t), t) = \frac{z(t) \sin t_f + \operatorname{tg} \vartheta \cos t}{\sin t + \operatorname{tg} \vartheta \cos t} \cdot \frac{\cos t - \operatorname{tg} \vartheta \sin t}{\sin t_f} + \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sin t_f} \sin t$$

Il campo di vettori $\{[\gamma^T(z(t), t) \ 1]^T\} \subset \mathbb{R}^2$ è un campo di Mayer in quanto la condizione i) della Definizione 4.33 è soddisfatta per costruzione e la condizione ii) della stessa definizione è soddisfatta per essere $\nu = 1$. Poiché il campo M è definito in un insieme che contiene $\mathbb{R} \times [0, t_f]$ si può concludere che l'Osservazione 4.38 si applica all'esempio considerato e che quindi z^* è punto di minimo globale.

Qualora si assuma $t_f = \pi$ si verifica facilmente che non esiste alcun estremale che soddisfa le condizioni agli estremi assegnate; il problema di minimo non ammette perciò soluzione.

Qualora infine si assuma t_f fissato nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$, si perviene di nuovo all'unico estremale precedente ma poiché, come si verifica facilmente, $t' = \pi$ costituisce un punto coniugato di 0 appartenente all'intervallo $(0, t_f]$, il Teorema 4.41 non è applicabile. In effetti si può verificare che l'estremale non costituisce in questo caso un punto di minimo locale debole. A tale proposito si consideri per $\varepsilon \neq 0$ la funzione:

$$\bar{z}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{\sin t_f} + \varepsilon \sin t & \forall t \in [0, \pi] \\ \frac{\sin t}{\sin t_f} & \forall t \in [\pi, t_f] \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione \bar{z} non può costituire un punto di minimo locale in quanto, in corrispondenza ad essa, per $t = \pi$ non è soddisfatta la condizione necessaria di Weierstrass-Erdmann (4.7), risultando:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{z}, \dot{\bar{z}}} \right]_{t=\pi^-} = 2\dot{\bar{z}}(\pi^-) = -\frac{2}{\sin t_f} - 2\epsilon$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{z}, \dot{\bar{z}}} \right]_{t=\pi^+} = 2\dot{\bar{z}}(\pi^+) = -\frac{2}{\sin t_f}$$

Ciò significa che $\forall \delta > 0$ esiste $\hat{z} \in S(\bar{z}, \delta/2)$ tale che $J(\hat{z}) < J(\bar{z})$, essendo l'intorno suddetto definito in base alla norma (1.3). D'altra parte, per ϵ sufficientemente piccolo, si può rendere $\|z^* - \bar{z}\| < \delta/2$, e perciò risulta:

$$\|z^* - \hat{z}\| \leq \|z^* - \bar{z}\| + \|\bar{z} - \hat{z}\| \leq \delta$$

Poiché si può verificare facilmente che $J(z^*) = J(\bar{z})$, data l'arbitrarietà di δ resta verificato che in ogni intorno di z^* esiste un punto \hat{z} in cui J assume valore inferiore.

Ovviamente poiché z^* non è un punto di minimo locale debole a maggior ragione non è un punto di minimo locale forte.

Esempio 4.16 - Sia dato il funzionale:

$$J(z) = \int_0^{t_f} \dot{z}^3 dt$$

con $t_f > 0$ assegnato e con le condizioni agli estremi $z(0) = 0$, $z(t_f) = z^f > 0$.

Le condizioni di Weierstrass-Erdmann escludono la possibilità di estremali con punti di cuspide. Gli estremali del problema si ottengono risolvendo l'equazione di Eulero (4.11), che nel caso in esame diviene:

$$\dot{z}^* = C$$

con le condizioni $z^*(0) = 0$, $z^*(t_f) = z^f$. Si perviene all'unico estremale:

$$z^*(t) = z^f \frac{t}{t_f}$$

che è non singolare, avendo supposto $z^f \neq 0$. Poiché $\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{z}^2} \right|^* = 6 \frac{z^f}{t_f^2} > 0$, per mostrare che tale estremale è un punto di minimo locale debole basta verificare, in base al Teorema 4.32, che non esistono istanti coniugati di quello iniziale, nell'intervallo $(0, t_f]$. A tale proposito, l'equazione di Jacobi (4.85) diviene:

$$6 \frac{z^f}{t_f} \dot{H} = K$$

e la sua soluzione con le condizioni (4.86) è:

$$H(t) = t$$

Poiché $H(t) \neq 0, \forall t \in (0, t_f]$, resta dimostrato che l'estremale z^* è un punto di minimo locale debole. Esso però non costituisce un punto di minimo locale forte, come può constatarsi facilmente applicando la condizione necessaria del Teorema 4.43. Se infatti z^* fosse un punto di minimo locale forte dovrebbe essere verificata la (4.102) e cioè, nel caso considerato:

$$\begin{aligned} E(z^*(t), \dot{z}^*(t), b, t) &= b^3 - \dot{z}^{*2}(t)(3b - 2\dot{z}^*(t)) \\ &= b^3 - \left(\frac{z^f}{t_f}\right)^2 \left(3b - 2\frac{z^f}{t_f}\right) \geq 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tale condizione è però violata, ad esempio per tutti i valori di $b < -2\frac{z^f}{t_f}$.

4.5 CONDIZIONI DI MINIMO GLOBALE BASATE SULLA CONVESSITÀ DEL PROBLEMA

Nei precedenti paragrafi sono state date condizioni necessarie o condizioni sufficienti di minimo locale per il Problema 4.2 di *Lagrange*. Condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale per lo stesso problema si possono fornire, qualora si suppongano verificate opportune ipotesi di convessità.

Si hanno in proposito i seguenti teoremi.

Teorema 4.44 - Con riferimento al Problema 4.2, se L è una funzione convessa in $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$ rispetto a $z(t)$ e a $\dot{z}(t)$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, se D_i e D_f sono insiemi convessi tali che $K_{z^0, D}$ sia simmetrico, condizione necessaria e sufficiente affinché z^0 sia una soluzione ottima è che essa soddisfi le (4.11), (4.15) e (4.16).

Dimostrazione - La necessità delle condizioni (4.11), (4.15), (4.16) discende dal Corollario 4.7 e dal Teorema 4.10.

Per quanto riguarda la sufficienza si ha che, per la convessità di L , per ogni z ammissibile e per ogni $t \in [t_i, t_f]$, in base al punto i) della Osservazione 1.25 risulta:

$$L(z, \dot{z}, t) - L(z^0, \dot{z}^0, t) \geq \frac{\partial L}{\partial z}^0 (z - z^0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}^0 (\dot{z} - \dot{z}^0)$$

Integrando la precedente diseguaglianza sull'intervallo $[t_i, t_f]$ e tenendo conto del-

l'ipotesi (4.11), si ha:

$$\begin{aligned} J(z) - J(z^0) &\geq \int_{t_i}^{t_f} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right)^0 (z - z^0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}^0 (\dot{z} - \dot{z}^0) \right] dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}^0 (z - z^0) \right] dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}^0 (z - z^0) \right]_{t_i}^{t_f} \end{aligned}$$

Per la convessità di D_i e D_f si ha che anche l'insieme ammissibile D è convesso in $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ e da questa proprietà segue che:

$$z - z^0 \in K_{z^0, D} \quad \forall z \in D \quad (4.105)$$

come si verifica facilmente, considerando una successione $\{\alpha^{(k)}\}$ di numeri positivi, minori di uno, che tende a zero e la successione di funzioni $\{z^{(k)}\}$ di $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ data da:

$$z^{(k)} = z^0 + \alpha^{(k)}(z - z^0)$$

Pertanto, in virtù delle ipotesi (4.15) e (4.16), segue che:

$$J(z) \geq J(z^0) \quad \forall z \in D \quad \square$$

Osservazione 4.45 - Si noti che l'ipotesi di simmetria per $K_{z^0, D}$ è richiesta per stabilire la necessità delle condizioni (4.11), (4.15), (4.16); pertanto, se la suddetta ipotesi viene meno, le stesse condizioni restano solo sufficienti per l'ottimalità.

Teorema 4.46 - Con riferimento al Problema 4.2, se L è una funzione convessa in $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$ rispetto a $z(t)$ e a $\dot{z}(t)$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, se D_i e D_f sono insiemi aperti o se $D_i = \{z^i\}$ e $D_f = \{z^f\}$ (o se si verifica una possibile combinazione di tali casi), condizione necessaria e sufficiente affinché z^0 sia una soluzione ottima è che essa soddisfi la (4.11) e la condizione:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}^0 = 0^T \text{ negli istanti } t_i \text{ e } t_f \text{ cui corrispondono insiemi } D_i \text{ e } D_f \text{ aperti} \quad (4.106)$$

Dimostrazione - Il caso in cui i valori agli estremi siano punti z^i e z^f assegnati non richiede dimostrazione in quanto in tal caso sono soddisfatte le ipotesi del precedente Teorema 4.44 (D_i e D_f sono convessi e $K_{z^0, D}$ è simmetrico).

Nel caso in cui D_i e/o D_f sono aperti la necessità della (4.11) e della (4.106) discende dai Corollari 4.7 e 4.11. Per quanto riguarda la sufficienza, essa può essere dimostrata analogamente a quanto fatto per il Teorema 4.44, osservando che la (4.105) continua ad essere soddisfatta in quanto $K_{z^0, D} = \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$. \square

Osservazione 4.47 - È facile verificare che, se nelle ipotesi dei Teoremi 4.44 e 4.46, la funzione L è assunta strettamente convessa rispetto a $z(t)$ e a $\dot{z}(t)$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, il punto di minimo globale z^0 , se esiste, è unico.

Esempio 4.17 - Si consideri nuovamente il problema di minima distanza dell'Esempio 4.1 nel caso in cui il valore di $z(2)$ sia fissato. Come si verifica facilmente, la matrice delle derivate seconde di L rispetto a $z(t)$ e a $\dot{z}(t)$ è semidefinita positiva; quindi la funzione L è convessa rispetto a $z(t)$ e $\dot{z}(t)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Essendo pertanto soddisfatte le ipotesi del Teorema 4.46, si può affermare che l'unico estremale a suo tempo determinato fornisce il minimo globale.

Esempio 4.18 - Nel caso del problema di regolazione ottima dell'Esempio 4.4, si può verificare che il Lagrangiano

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}[x^2(t) + P(\dot{x}(t) - ax(t))^2]$$

è strettamente convesso rispetto a $x(t)$ e a $\dot{x}(t)$. Pertanto, sia per il caso di stato finale libero che per quello di stato finale assegnato, si può affermare che l'unico estremale trovato fornisce la soluzione ottima.

Esempio 4.19 - Con riferimento al problema delle geodetiche di una superficie dell'Esempio 4.5, si verifica, procedendo in maniera analoga, che le eliche determinate nel caso del cilindro sono le curve di minima distanza.

Esempio 4.20 - Anche per il problema considerato nell'Esempio 4.13, essendo soddisfatte le ipotesi del Teorema 4.46, il minimo locale debole a suo tempo determinato costituisce il minimo globale.

Capitolo 5

Elementi di calcolo delle variazioni: problema di Lagrange in presenza di vincoli

5.1 INTRODUZIONE

Nel capitolo precedente si sono considerati problemi di *Lagrange* per i quali l'insieme ammissibile D era definito mediante vincoli che interessavano al più i valori iniziali e finali della funzione z . In questo paragrafo verranno riportati alcuni risultati del calcolo variazionale validi nel caso in cui l'insieme ammissibile D sia definito mediante vincoli per la funzione z su tutto l'intervallo $[t_i, t_f]$. Più in particolare verranno considerati vincoli differenziali di eguaglianza, vincoli isoperimetrici e vincoli differenziali di diseguaglianza.

5.2 PROBLEMA DI LAGRANGE CON VINCOLI DIFFERENZIALI DI EGUALIANZA

Il problema con vincoli differenziali che si considererà più in dettaglio qui di seguito è quello con estremi fissati; ai problemi con estremi liberi e/o vincolati verrà fatto cenno a conclusione del paragrafo.

Problema 5.1 (Lagrange) - Considerato lo spazio lineare $\bar{C}^1[t_i, t_f]$ con la norma (1.3) e definito l'insieme ammissibile:

$$D = \{z \in \bar{C}^1[t_i, t_f] : z(t_i) = z^i; z(t_f) = z^f; g[z(t), \dot{z}(t), t] = 0, \forall t \in [t_i, t_f]\}$$

dove g è una funzione vettoriale a dimensione $\mu < \nu$ di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, considerato il funzionale obiettivo:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} L[z(t), \dot{z}(t), t] dt$$

con L funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, determinare, se esiste, un punto z^0 di minimo globale per J su D . \square

Una prima condizione necessaria di minimo locale vincolato per il suddetto problema è fornita dal seguente teorema.

Teorema 5.2 - Con riferimento al Problema 5.1, sia $z^* \in D$ una funzione tale che:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \right|_* = \mu \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.1)$$

Condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale vincolato è che esistano una costante λ_0^* e una funzione vettoriale di dimensione μ di moltiplicatori, $\lambda^* \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$, tali che λ_0^*, λ^* non siano simultaneamente nulli in alcun istante di $[t_i, t_f]$ e tali che, posto:

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, \lambda_0, \lambda, t) = \lambda_0 L(z, \dot{z}, t) + \lambda^T(t) g(z, \dot{z}, t) \quad (5.2)$$

risulti:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big|_* - \int_{t_i}^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Big|_* d\tau = c^T \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.3)$$

dove $c \in \mathbb{R}^\nu$ è un vettore costante.

Le discontinuità di λ^* possono verificarsi solo nei punti \bar{t} in cui la \dot{z}^* ha una discontinuità ed ivi risultano soddisfatte le condizioni di continuità:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^-}^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^+}^* \quad (5.4)$$

$$\left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^-}^* = \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^+}^* \quad (5.5)$$

Dimostrazione - Allo scopo di dimostrare il teorema è utile trasformare preliminarmente il Problema 5.1 in un problema equivalente del tipo di Mayer. A questo scopo si introduce la variabile ausiliaria:

$$z_0(t) = \int_{t_i}^t L(z, \dot{z}, \tau) d\tau$$

e si definisce la funzione vettoriale a $\nu + 1$ componenti:

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix}$$

Definita a questo punto la funzione vettoriale:

$$\tilde{g}(\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, t) = \begin{pmatrix} L(z, \dot{z}, t) - \dot{z}_0 \\ g(z, \dot{z}, t) \end{pmatrix}$$

il Problema 5.1 può essere riformulato come quello di determinare una funzione $\tilde{z}^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$, tale che risulti:

$$\tilde{g}(\tilde{z}^0, \dot{\tilde{z}}^0, t) = 0$$

con le condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned}\tilde{z}^0(t_i) &= \tilde{z}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ z^i \end{pmatrix} \\ z^0(t_f) &= z^f\end{aligned}$$

e tale che $z_0^0(t_f)$ sia minima.

Indicato con \tilde{z}^* un punto di minimo locale del problema equivalente, che con le sue ultime ν componenti soddisfa la (5.1), risulta evidentemente:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big| ^* \right\} = \text{rango } \left\{ \begin{bmatrix} -1 & \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big| ^* \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \Big| ^* \end{bmatrix} \right\} = \mu + 1 \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Per un teorema ⁽¹⁾ di analisi sul completamento di una matrice rettangolare è possibile determinare $\nu - \mu$ funzioni vettoriali $a_i^T = [a_{i0} \ a_{i1} \dots a_{i\nu}] \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$, $i = 1, 2, \dots, \nu - \mu$, tali che le loro eventuali discontinuità si verifichino nei punti in cui \dot{z}^* è discontinua e tali che:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big| ^* \\ a_1^T(t) \\ \vdots \\ a_{\nu-\mu}^T(t) \end{bmatrix} \right\} \neq 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

⁽¹⁾ Si veda ad esempio [21], cap. 6, §11.

Considerata a questo punto la funzione vettoriale a $\nu + 1$ componenti:

$$f(\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, t) = \begin{bmatrix} \tilde{g}(\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, t) \\ a_1^T(t)\tilde{z}(t) \\ \vdots \\ a_{\nu-\mu}^T(t)\tilde{z}(t) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

si ha che $\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} \Big|^{*}$ e $\frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*}$ sono continue a tratti in $[t_i, t_f]$, con eventuali discontinuità nei punti in cui \dot{z}^* è discontinua; inoltre risulta $\frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*}$ non singolare in tale intervallo, in quanto si ha evidentemente:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} \\ a_1^T \\ \vdots \\ a_{\nu-\mu}^T \end{bmatrix}$$

Considerato quindi il sistema differenziale lineare matriciale nella incognita \tilde{z} :

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} \right) - \tilde{\Lambda} \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} = 0$$

si ha il ben noto risultato ⁽¹⁾ che in ogni sottointervallo di continuità della \dot{z}^* , esiste una matrice $\tilde{\Lambda}^*$ continua e non singolare che lo soddisfa. Di conseguenza esiste su tutto l'intervallo $[t_i, t_f]$ una matrice $\tilde{\Lambda}^*$ continua a tratti e non singolare che soddisfa l'equazione integrale:

$$\tilde{\Lambda}^* \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} - \int_{t_i}^t \tilde{\Lambda}^* \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} d\tau = C \quad (5.7)$$

in cui C è una matrice costante di dimensioni $(\nu + 1) \times (\nu + 1)$.

Indicata con $\tilde{\lambda}^{*T}$ una generica riga della matrice $\tilde{\Lambda}^*$ e con c^T una generica riga della matrice C , la (5.7) implica:

$$\tilde{\lambda}^{*T} \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} - \int_{t_i}^t \tilde{\lambda}^{*T} \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|^{*} d\tau = c^T \quad (5.8)$$

⁽¹⁾ Si veda ad esempio F.R. Gantmacher: *The Theory of Matrices*, Chelsea Pub. Co., New York, 1964, cap. 14, §1.

ed evidentemente $\tilde{\lambda}^*$ è una funzione vettoriale a $\nu + 1$ componenti continua a tratti e sempre diversa da zero in $[t_i, t_f]$.

Parzializzando il vettore $\tilde{\lambda}^*$ nel modo seguente:

$$\tilde{\lambda}^* = \begin{bmatrix} \lambda_0^* \\ \lambda^* \\ \lambda_{\mu+1}^* \\ \vdots \\ \lambda_\nu^* \end{bmatrix}$$

e tenendo conto della espressione di f , data dalla (5.6), la (5.8) può essere sviluppata come segue:

$$-\lambda_0^* + \sum_{i=1}^{\nu-\mu} \lambda_{\mu+i}^* a_{i0} = c_0 \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & \left. \lambda_0^* \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \right|^* + \left. \lambda^{*T} \frac{\partial g}{\partial \dot{z}_j} \right|^* + \sum_{i=1}^{\nu-\mu} \lambda_{\mu+i}^* a_{ij} \\ & - \int_{t_i}^t \left(\left. \lambda_0^* \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \right|^* + \left. \lambda^{*T} \frac{\partial g}{\partial \dot{z}_j} \right|^* \right) d\tau = c_j \quad j = 1, 2, \dots, \nu \end{aligned} \quad (5.10)$$

Per gli sviluppi che seguiranno conviene ora introdurre il vettore a $\nu + 1$ componenti:

$$w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_1^T(t) \dot{\tilde{z}}^*(t) \\ \vdots \\ a_{\nu-\mu}^T(t) \dot{\tilde{z}}^*(t) \end{bmatrix}$$

e la matrice di dimensioni $(\nu + 1) \times (\nu + 1)$:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{\mu+2,1}(t) & \gamma_{\mu+2,2}(t) & \dots & \gamma_{\mu+2,\nu+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{\nu+1,1}(t) & \gamma_{\nu+1,2}(t) & \dots & \gamma_{\nu+1,\nu+1}(t) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

con $\gamma_{ij} \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$. Indicato con ε un vettore costante a $\nu + 1$ componenti, si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$f(\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, t) = w(t) + \Gamma(t)\varepsilon \quad (5.12)$$

alla cui soluzione, dipendente da ε oltre che da t , si impone la condizione iniziale:

$$\tilde{z}(t_i, \varepsilon) = \tilde{z}^i \quad (5.13)$$

Evidentemente per $\varepsilon = 0$ il sistema (5.12) con la condizione (5.13) ammette come soluzione sull'intervallo $[t_i, t_f]$ la \tilde{z}^* e, per la non singolarità della $\frac{\partial f}{\partial \dot{z}}|_*$, tale soluzione è unica.

In base alla teoria delle equazioni differenziali perturbate, si può affermare ⁽¹⁾ che esiste un numero $\delta > 0$ tale che, per $\varepsilon \in S(0, \delta)$ il sistema (5.12) continua ad ammettere un'unica soluzione $\tilde{z}(t, \varepsilon)$ dotata di derivate prime continue a tratti rispetto a t e continue rispetto a ε in $[t_i, t_f] \times S(0, \delta)$ e con derivate miste $\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial t \partial \varepsilon}$ continue a tratti in $[t_i, t_f] \times S(0, \delta)$.

A questo punto si mostrerà che se \tilde{z}^* è una soluzione locale del problema modificato, per ogni matrice Γ del tipo (5.11) deve risultare:

$$\det \left\{ \frac{\partial \tilde{z}(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\substack{\varepsilon=0 \\ t=t_f}} \right\} = 0 \quad (5.14)$$

Infatti se per assurdo esistesse una matrice Γ per la quale tale condizione non fosse soddisfatta, considerato un vettore ϑ a $\nu + 1$ componenti del tipo:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\vartheta_1 < 0$ e in modulo sufficientemente piccolo, in base al teorema sulle funzioni implicite ⁽²⁾, esisterebbe un $\varepsilon_\vartheta \in S(0, \delta)$ tale che:

$$\tilde{z}(t_f, \varepsilon_\vartheta) = \tilde{z}^*(t_f) + \vartheta$$

Osservando che, in base alla definizione di f e alla struttura di Γ e di ϑ , la funzione $\tilde{z}(t, \varepsilon_\vartheta)$ appartiene all'insieme ammissibile per il problema modificato, in

⁽¹⁾ Si veda ad esempio T.H. Gronwall: "Note on the Derivative with Respect to a Parameter of the Solutions of a System of Differential Equations". *Ann. Math.*, sez. 2, vol. 20, pag. 292–296, 1919.

⁽²⁾ Si veda ad esempio T.M. Apostol: *Mathematical Analysis*, Addison Wesley Publ., Reading, 1957, pag. 147.

quanto:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{z}(t, \varepsilon_\vartheta), \dot{\tilde{z}}(t, \varepsilon_\vartheta), t) &= 0 \\ \tilde{z}(t_i, \varepsilon_\vartheta) &= \tilde{z}^i \\ \tilde{z}(t_f, \varepsilon_\vartheta) &= \begin{pmatrix} \tilde{z}_0^*(t_f) + \vartheta_1 \\ z^f \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ne conseguirebbe che \tilde{z}^* non è una soluzione locale poiché:

$$\tilde{z}_0(t_f, \varepsilon_\vartheta) < \tilde{z}_0^*(t_f)$$

È possibile trasformare la condizione necessaria di ottimalità espressa dalla (5.14) per ogni Γ del tipo (5.11), in una condizione necessaria equivalente che non richiede la conoscenza della $\tilde{z}(t, \varepsilon)$ per ogni possibile scelta della stessa matrice Γ . A tale scopo, posto:

$$\frac{\partial \tilde{z}(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = V(t)$$

e osservato che in ogni sottointervallo di continuità della $\dot{\tilde{z}}^*$ per il teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione si ha:

$$\frac{\partial \dot{\tilde{z}}(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \dot{V}(t)$$

dalla (5.12), derivando rispetto a ε e ponendo $\varepsilon = 0$, per ogni sottointervallo di continuità della $\dot{\tilde{z}}^*$ si deduce l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} \Big| \dot{V} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big| \dot{V} = \Gamma \quad (5.15)$$

con la condizione iniziale:

$$V(t_i) = 0 \quad (5.16)$$

determinata dal fatto che $\tilde{z}(t_i, \varepsilon) = \tilde{z}^i$ per ogni ε . Poiché la matrice $\frac{\partial f}{\partial \dot{\tilde{z}}} \Big|$ è non singolare in $[t_i, t_f]$, ne deriva che esiste una unica matrice V continua in $[t_i, t_f]$ che soddisfa la (5.15) con la condizione iniziale (5.16).

A questo punto considerata la matrice non singolare $\tilde{\Lambda}^*$, soluzione della (5.7),

integrandi per parti e ricordando la (5.16), si ha:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_i}^{t_f} \tilde{\Lambda}^*(t) \Gamma(t) dt &= \int_{t_i}^{t_f} \tilde{\Lambda}^* \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right)^* V + \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \left| \dot{V} \right| dt \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} \tilde{\Lambda}^* \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \left| \dot{V} \right| dt + \left[\tilde{\Lambda}^* \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \left| \dot{V} \right| \right]_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\tilde{\Lambda}^* \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) V dt \\
 &= \int_{t_i}^{t_f} \left[\tilde{\Lambda}^* \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right]^* - \frac{d}{dt} \left(\tilde{\Lambda}^* \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \right) V dt + \tilde{\Lambda}^*(t_f) \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \left|_{t_f} \right|^* V(t_f) \\
 &= \tilde{\Lambda}^*(t_f) \frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \left|_{t_f} \right.^* V(t_f)
 \end{aligned}$$

Tenendo conto della non singolarità delle matrici $\tilde{\Lambda}^*(t_f)$ e $\frac{\partial f}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f}$ si può concludere che la condizione necessaria di ottimalità data dalla (5.14) per ogni matrice Γ del tipo (5.11), equivale a quella che risulti:

$$\det \left\{ \int_{t_i}^{t_f} \tilde{\Lambda}^*(t) \Gamma(t) dt \right\} = 0 \quad (5.17)$$

per ogni Γ del tipo (5.11). Si può dimostrare ora facilmente che i moltiplicatori $\lambda_{\mu+i}^*, i = 1, 2, \dots, \nu - \mu$, sono identicamente nulli. Dalla (5.17) infatti, si ha che esiste un vettore costante $c \neq 0$ di dimensioni $\nu + 1$, tale che:

$$\int_{t_i}^{t_f} \tilde{\Lambda}^*(t) \Gamma(t) dt c = 0$$

Di conseguenza per ogni $b \in \mathbb{R}^{\nu+1}$ risulta:

$$\int_{t_i}^{t_f} b^T \tilde{\Lambda}^*(t) \Gamma(t) c dt = 0 \quad (5.18)$$

Osservando che la funzione vettoriale $\tilde{\Lambda}^{*T}$, costituita dalla generica riga della matrice $\tilde{\Lambda}^*$, può essere espressa come $b^T \tilde{\Lambda}^*$ (scegliendo opportunamente il vettore b) e che in base alla definizione (5.11) di Γ la funzione vettoriale Γc è del tipo:

$$\Gamma c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{\mu+2} \\ \vdots \\ \alpha_{\nu+1} \end{bmatrix}$$

dove $\alpha_{\mu+j}, j = 2, 3, \dots, \nu - \mu + 1$ è una qualunque funzione di $\bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$, si deduce che la (5.18) implica:

$$\int_{t_i}^{t_f} \lambda_{\mu+j-1}^*(t) \alpha_{\mu+j}(t) dt = 0 \quad j = 2, 3, \dots, \nu - \mu + 1$$

In particolare, potendosi assumere $\alpha_{\mu+j} = \lambda_{\mu+j-1}^*$, si ha:

$$\lambda_{\mu+i}^* = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \nu - \mu \quad (5.19)$$

In base alla (5.19), per la non singolarità di $\tilde{\Lambda}$ in $[t_i, t_f]$, si può affermare che $\lambda_0^*, \lambda^*(t)$ non possono essere simultaneamente nulli in alcun istante dell'intervallo $[t_i, t_f]$. Inoltre, sostituendo la (5.19) nelle (5.9) e (5.10) e ricordando la definizione (5.2), si verifica immediatamente che λ_0^* è costante sul suddetto intervallo e che $z^*, \lambda_0^*, \lambda^*$ soddisfano la (5.3). Poiché $\tilde{\lambda}^* \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$ resta anche dimostrato che λ^* è una funzione di classe $\bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$ con eventuali discontinuità negli istanti di discontinuità di \dot{z}^* .

Per completare la dimostrazione del Teorema resta da verificare che in tali istanti sono soddisfatte le condizioni di continuità (5.4) e (5.5). La prima di esse discende immediatamente dalla (5.3) tenendo conto che $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Big|^{*^*}$ è una funzione continua a tratti rispetto a t . Per quanto riguarda la (5.5), la sua validità può essere facilmente provata procedendo in maniera del tutto analoga a quanto fatto nella dimostrazione del Corollario 4.5 sostituendo la funzione \mathcal{L} alla funzione L . \square

Osservazione 5.3 - In ogni sottointervallo di $[t_i, t_f]$ nel quale non esistono punti \bar{t} di discontinuità per \dot{z}^* , la condizione (5.3) dà luogo al sistema differenziale del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2} \Big|^{*^*} \ddot{z}^* + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial \dot{z}} \Big|^{*^T} \dot{z}^* + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{z}} \Big|^{*^T} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Big|^{*^T} = 0 \quad (5.20)$$

Una ulteriore condizione necessaria che corrisponde a quella data dal Teorema 4.32 di Legendre per il caso non vincolato è fornita dal seguente teorema che si riporta senza dimostrazione ⁽¹⁾.

Teorema 5.4 (Clebsh) - Con riferimento al Problema 5.1 sia $z^* \in D$ una funzione che soddisfa la condizione (5.1); condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale vincolato è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione μ di moltiplicatori, $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$, tali che λ_0^*, λ^* non siano simultaneamente nulli in alcun istante di $[t_i, t_f]$ e tali che risulti:

⁽¹⁾ Si veda ad esempio [12], cap. 3, ¶12.

$$\pi^T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2} \Big|^\ast \pi \geq 0 \quad \forall \pi \in \Pi(t), \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.21)$$

dove:

$$\Pi(t) = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^\nu : \frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \Big|^\ast \pi = 0 \right\} \quad \square$$

Una condizione necessaria di minimo locale forte che è analoga a quella fornita dal Teorema 4.43 per il problema di *Lagrange* in assenza di vincoli, è inoltre data dal seguente teorema, che si riporta senza dimostrazione ⁽¹⁾.

Teorema 5.5 - (Weierstrass) Con riferimento al Problema 5.1 nel quale si sia assunta la norma (1.2), sia $z^* \in D$ una funzione che soddisfa la condizione (5.1); condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale (forte) vincolato è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione μ di moltiplicatori, $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$, ma simultaneamente nulli in $[t_i, t_f]$, tali che, posto:

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(z(t), a, b, \lambda_0, \lambda(t), t) \\ &= \mathcal{L}(z(t), b, \lambda_0, \lambda(t), t) - \mathcal{L}(z(t), a, \lambda_0, \lambda(t), t) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{\dot{z}(t)=a} (b-a) \end{aligned} \quad (5.22)$$

con $a, b \in \mathbb{R}^\nu$, risulti:

$$\mathcal{E}(z^*(t), \dot{z}^*(t), b, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \geq 0 \quad \forall b \in \Omega(t), \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.23)$$

dove:

$$\Omega(t) = \left\{ b \in \mathbb{R}^\nu : g(z^*(t), b, t) = 0, \text{ rango } \left\{ \frac{\partial g}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{z^*(t), b} \right\} = \mu \right\} \quad \square$$

Osservazione 5.6 - Come è evidente le condizioni (5.3), (5.4), (5.5) e (5.20) sono formalmente identiche rispettivamente alle condizioni (4.5), (4.7), (4.8) e (4.12) relative al problema di *Lagrange* non vincolato, con la sostituzione della funzione \mathcal{L} definita dalla (5.2) alla funzione Lagrangiana L . Tale analogia sussiste anche per la condizione necessaria (5.21) rispetto alla (4.82), nonché per la definizione (5.22) e per la condizione (5.23) rispetto alle (4.98) e (4.102).

È possibile ora estendere al caso di problemi vincolati la definizione di estremale data nel caso di problemi non vincolati.

Definizione 5.7 - Con riferimento al Problema 5.1 si definisce *estremale* ogni funzione ammissibile che soddisfa la (5.1) e che, assieme a moltiplicatori che verificano le ipotesi del Teorema 5.2, sia soluzione dell'equazione (5.3) e soddisfi le condizioni di continuità (5.4) e (5.5).

⁽¹⁾ Si veda ancora [12], cap. 3, ¶12.

Più in particolare si definisce *estremale non singolare* ogni estremale dotato di derivata prima continua e per il quale la matrice $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2}|^*$ sia non singolare in $[t_i, t_f]$. Si può dimostrare che un estremale non singolare appartiene a $C^2[t_i, t_f]$ e che il corrispondente vettore di moltiplicatori λ^* appartiene a $C^1[t_i, t_f]$. \square

Si desidera a questo punto porre in evidenza un aspetto rilevante legato alla significatività del problema di minimo in presenza di vincoli che si sta considerando. La presenza di punti isolati nell'insieme ammissibile D , infatti, farebbe perdere significato al problema di minimo locale nei suddetti punti in quanto ogni punto ammissibile isolato costituisce un punto di minimo locale vincolato (ma anche evidentemente un punto di massimo locale vincolato). Si può dimostrare che un estremale corrispondentemente al quale sia $\lambda_0^* \neq 0$ non può essere un punto isolato di D . A tale proposito si fornisce la seguente ulteriore definizione.

Definizione 5.8 - Con riferimento al Problema 5.1 si definisce *estremale normale* ogni estremale cui corrisponde un moltiplicatore $\lambda_0^* \neq 0$. \square

Osservazione 5.9 - Tenendo presente l'Osservazione 5.3, si comprende facilmente che, nel caso di estremali normali si può sempre assumere $\lambda_0^* = 1$.

Una condizione necessaria e sufficiente di normalità è fornita dal seguente teorema enunciato senza dimostrazione ⁽¹⁾.

Teorema 5.10 - Sia z^* un estremale per il Problema 5.1; condizione necessaria e sufficiente affinché esso sia normale è che l'equazione:

$$\frac{\partial g}{\partial z}\Big| d + \frac{\partial g}{\partial \dot{z}}\Big| \dot{d} = 0$$

ammetta 2ν soluzioni $d^{(j)} \in \bar{C}^1[t_i, t_f], j = 1, 2, \dots, 2\nu$, tali che risulti:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} d^{(1)}(t_i) & \dots & d^{(2\nu)}(t_i) \\ d^{(1)}(t_f) & \dots & d^{(2\nu)}(t_f) \end{bmatrix} \right\} \neq 0$$

\square

Osservazione 5.11 - In base alle (5.3), (5.4), (5.5) si verifica facilmente che i moltiplicatori λ_0^*, λ^* considerati nel Teorema 5.2 sono definiti a meno di una costante moltiplicativa diversa da zero. Analogamente, in base alle (5.21) e (5.23) si osserva che i moltiplicatori λ_0^*, λ^* che figurano nei Teoremi 5.4 e 5.5 sono definiti a meno

⁽¹⁾ Si veda [5], cap. 1, ¶7.

di una costante moltiplicativa positiva. Pertanto se l'estremale è normale in tutti e tre i casi è possibile assumere $\lambda_0^* = 1$ e di conseguenza, nell'ipotesi di normalità, condizioni necessarie di minimo locale vincolato per il Problema 5.1 sono date dai Teoremi 5.2, 5.4 e 5.5, considerando la funzione Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, 1, \lambda, t) = L(z, \dot{z}, t) + \lambda^T(t)g(z, \dot{z}, t) \quad (5.24)$$

In tal caso i moltiplicatori λ^* relativi ai tre teoremi risultano tra loro coincidenti.

Osservazione 5.12 - È possibile considerare formulazioni più generali del Problema vincolato 5.1, nelle quali l'insieme ammissibile D è caratterizzato da vincoli agli estremi del tipo (4.63), (4.64) oltre che dai vincoli differenziali già presenti.

Si può dimostrare che le condizioni necessarie fornite dai Teoremi 5.2, 5.4, 5.5 continuano a sussistere anche in questo caso. Si ha inoltre che l'analogia con il caso non vincolato, già evidenziata nell'Osservazione 5.6, si estende alle condizioni che anche in questo caso si possono scrivere per gli estremi: si dimostra in particolare che condizioni necessarie di minimo locale vincolato esattamente analoghe alle (4.65–68) sussistono per il problema considerato purché la funzione lagrangiana L sia sostituita dalla funzione \mathcal{L} .

È anche possibile dimostrare che se gli insiemi ammissibili per i punti iniziale e finale sono insiemi aperti di \mathbb{R}^{n+1} (in particolare se gli estremi sono liberi) si possono scrivere condizioni necessarie di minimo locale vincolato del tipo (4.59–62) sostituendo ancora la funzione \mathcal{L} alla L .

Esempio 5.1 - Si consideri il punto materiale P di massa unitaria che si muove nel piano (x, y) sottoposto a una spinta di ampiezza a costante e nota e di direzione variabile individuata dall'angolo β (vedi Fig. 5.1).

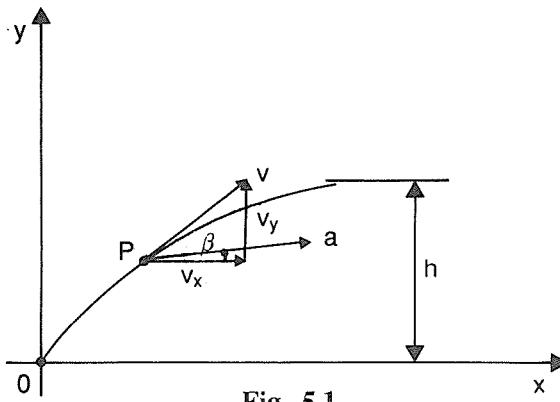


Fig. 5.1

Si desidera determinare la legge di variazione $\beta(t)$, $\forall t \in [t_i, t_f]$ tale che il punto inizialmente fermo nell'origine del riferimento si trovi ad avere nell'istante t_f una quota h assegnata, una velocità v_y secondo l'asse y nulla e una velocità v_x secondo l'asse x massima; è libero il valore dell'ascissa all'istante t_f .

Le equazioni che descrivono il moto del punto, e che costituiscono vincoli di tipo differenziale, sono:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= a \cos \beta \\ \dot{v}_y &= a \sin \beta\end{aligned}\tag{5.25}$$

Le condizioni assegnate agli estremi sono:

$$x(t_i) = y(t_i) = v_x(t_i) = v_y(t_i) = 0\tag{5.26}$$

$$y(t_f) = h \quad v_y(t_f) = 0\tag{5.27}$$

La quantità da minimizzare è:

$$J(v_x) = -v_x(t_f)$$

Il problema considerato è del tipo di *Mayer* e, tenendo conto che $v_x(t_i)$ è fissato, può essere ricondotto a un problema di *Lagrange* introducendo il Lagrangiano:

$$L(\dot{v}_x(t)) = -\dot{v}_x(t)$$

Ponendo $z = [x \ y \ v_x \ v_y \ \beta]^T$, la condizione (5.1) risulta soddisfatta. Limitandoci a cercare gli estremali normali (e cioè assumendo $\lambda_0 = 1$) la (5.2) si particolarizza:

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, 1, \lambda) = -\dot{v}_x + \lambda_1(\dot{x} - v_x) + \lambda_2(\dot{y} - v_y) + \lambda_3(\dot{v}_x - a \cos \beta) + \lambda_4(\dot{v}_y - a \sin \beta)$$

e la condizione necessaria (5.3) fornisce:

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= c_1 \\ \lambda_2^* &= c_2 \\ \lambda_3^* &= 1 + c_3 - c_1(t - t_i) \\ \lambda_4^* &= c_4 - c_2(t - t_i)\end{aligned}\tag{5.28}$$

$$-\int_{t_i}^t (a\lambda_3^* \sin \beta^* - a\lambda_4^* \cos \beta^*) d\tau = c_5$$

Accanto alle (5.28) occorre considerare le condizioni di ammissibilità, costituite dalle equazioni differenziali (5.25) con le condizioni iniziali (5.26) e quelle finali (5.27). Poiché i valori di $x(t_f)$ e di $v_x(t_f)$ sono liberi, le corrispondenti condizioni di trasversalità forniscono:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f}^* &= \lambda_1^*(t_f) = 0 \\ \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}_x} \right|_{t_f}^* &= -1 + \lambda_3^*(t_f) = 0\end{aligned}\tag{5.29}$$

Dalle (5.28), imponendo le (5.29), si deduce immediatamente:

$$\begin{aligned}\lambda_1^*(t) &= 0 \\ \lambda_3^*(t) &= 1 \\ \operatorname{tg} \beta^* &= c_4 - c_2(t - t_i) = \operatorname{tg} \beta^i - c_2(t - t_i)\end{aligned}\tag{5.30}$$

dove $\beta^i = \beta(t_i) = \operatorname{tg}^{-1} c_4$. Dalla ultima delle (5.30) si ricava:

$$\dot{\beta}^*(t) = -c_2 \cos^2 \beta^*(t)\tag{5.31}$$

In base alla (5.31), dalle ultime due delle (5.25), supponendo $\dot{\beta}^*(t) \neq 0$, si ottiene:

$$\frac{dv_x}{d\beta} \Big|^{*} = a \frac{\cos \beta^*(t)}{\dot{\beta}^*(t)} = -\frac{a}{c_2 \cos \beta^*(t)}\tag{5.32}$$

$$\frac{dv_y}{d\beta} \Big|^{*} = a \frac{\operatorname{sen} \beta^*(t)}{\dot{\beta}^*(t)} = -\frac{a}{c_2 \cos \beta^*(t)} \operatorname{tg} \beta^*(t)\tag{5.33}$$

Integrando rispetto a $\beta^*(t)$ le (5.32) e (5.33), e tenendo conto delle condizioni iniziali $v_x^*(t_i) = v_y^*(t_i) = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned}v_x^*(t) &= -\frac{a}{c_2} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \right]_{\beta^i}^{\beta^*(t)} \\ &= \frac{a}{c_2} \ln \frac{(1 + \cos \beta^i + \operatorname{sen} \beta^i)(1 + \cos \beta^*(t) - \operatorname{sen} \beta^*(t))}{(1 + \cos \beta^i - \operatorname{sen} \beta^i)(1 + \cos \beta^*(t) + \operatorname{sen} \beta^*(t))} \\ v_y^*(t) &= -\frac{a}{c_2} \left[\frac{1}{\cos \beta} \right]_{\beta^i}^{\beta^*(t)} = \frac{a}{c_2} \left(\frac{1}{\cos \beta^i} - \frac{1}{\cos \beta^*(t)} \right)\end{aligned}\tag{5.34}$$

Se nelle (5.34) si sostituisce l'ultima delle (5.30), si ottiene una espressione per $v_x^*(t)$ e $v_y^*(t)$ in funzione delle due costanti c_2 e β^i . Sostituendo tali espressioni nelle prime due delle equazioni (5.25), integrando e imponendo le condizioni iniziali $x^*(t_i) = y^*(t_i) = 0$, con calcoli laboriosi si ottengono anche le espressioni di $x^*(t)$ e $y^*(t)$ in funzione delle due costanti c_2 e β^i :

$$\begin{aligned}x^*(t) &= \frac{a}{c_2^2} \left(\frac{1}{\cos \beta^i} - \frac{1}{\cos \beta^*(t)} - \frac{c_2}{a} v_x^*(t) \operatorname{tg} \beta^*(t) \right) \\ y^*(t) &= \frac{a}{2c_2^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \beta^i - \operatorname{tg} \beta^*(t)}{\cos \beta^i} - \frac{c_2}{a} v_y^*(t) \operatorname{tg} \beta^*(t) - \frac{c_2}{a} v_x^*(t) \right)\end{aligned}$$

A questo punto imponendo le condizioni finali (5.27) è possibile determinare anche le due costanti c_2 e β^i .

In particolare l'andamento che si ottiene per β^i in funzione della variabile adimensionale $\frac{4h}{a(t_f - t_i)^2}$ è riportato in Fig. 5.2.

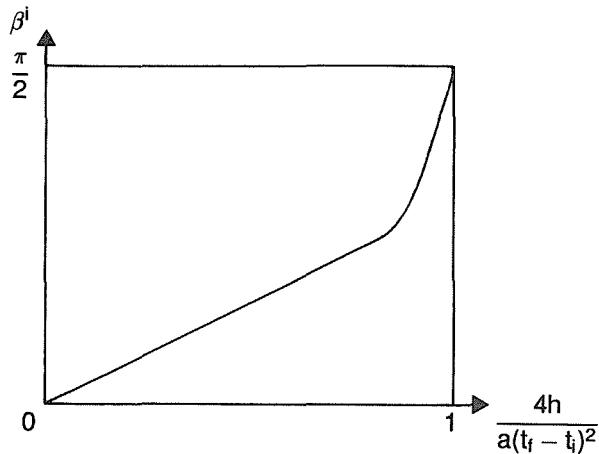


Fig. 5.2

L'andamento che si ottiene per $\beta^*(t)$ per diversi valori di β^i è riportato in Fig. 5.3, mentre in Fig. 5.4 è riportato l'andamento del valore ottenuto per $v_x^*(t_f)$, a meno del fattore di normalizzazione $\frac{1}{a(t_f - t_i)}$, al variare di β^i .

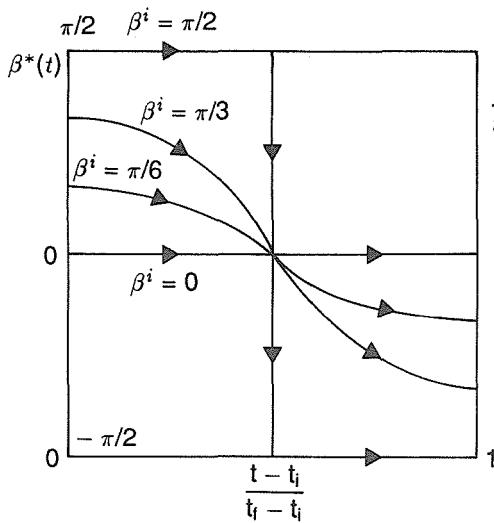


Fig. 5.3

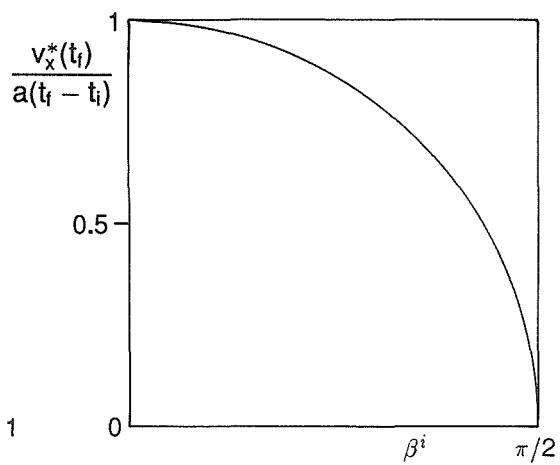


Fig. 5.4

5.3 PROBLEMA DI LAGRANGE CON VINCOLI ISOPERIMETRICI

Utilizzando i risultati precedenti, relativi al Problema 5.1 caratterizzato da vincoli differenziali di egualanza, è possibile dedurre facilmente risultati relativi a un altro classico problema del calcolo varazionale e cioè al problema di *Lagrange con vincoli isoperimetrici*. Esso può essere formulato nel modo seguente:

Problema 5.13 - Considerato lo spazio lineare $\bar{C}^1[t_i, t_f]$ con la norma (1.3) e definito l'insieme ammissibile

$$D = \left\{ z \in \bar{C}^1[t_i, t_f] : z(t_i) = z^i; z(t_f) = z^f ; \int_{t_i}^{t_f} h[z(t), \dot{z}(t), t] dt = k \right\}$$

dove h è una funzione vettoriale di dimensione σ di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti e k è un vettore assegnato di \mathbb{R}^σ , considerato il funzionale obiettivo:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} L[z(t), \dot{z}(t), t] dt$$

con L funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, determinare, se esiste, un punto z^0 di minimo globale per J su D . \square

Lo studio di tale problema può essere effettuato riconducendolo al precedente Problema 5.1. Infatti, introdotto il vettore di funzioni ausiliarie a σ componenti:

$$w(t) = \int_{t_i}^t h(z, \dot{z}, \tau) d\tau$$

i vincoli isoperimetrici possono essere posti nella forma differenziale:

$$h(z, \dot{z}, t) - w = 0 \tag{5.35}$$

con le condizioni agli estremi:

$$\begin{aligned} w(t_i) &= 0 \\ w(t_f) &= k \end{aligned}$$

e quindi il Problema 5.13 isoperimetrico è immediatamente ricondotto alla forma del Problema 5.1, con riferimento a una funzione vettoriale incognita estesa, a $\nu + \sigma$ componenti:

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

Ciò premesso, sulla base del Teorema 5.2, è immediato dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.14 - Con riferimento al Problema 5.13, sia $z^* \in D$; condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale vincolato è che esistano una costante ρ_0^* e un vettore costante di moltiplicatori $\rho^* \in \mathbb{R}^\sigma$, non simultaneamente nulli, tali che, posto:

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, \rho_0, \rho, t) = \rho_0 L(z, \dot{z}, t) + \rho^T h(z, \dot{z}, t) \quad (5.36)$$

risulti:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big|_* - \int_{t_i}^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Big|_* dt = c^T \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.37)$$

dove $c \in \mathbb{R}^\nu$ è un vettore costante.

Nei punti \bar{t} di discontinuità per la \dot{z}^* sono inoltre soddisfatte le condizioni di continuità:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^-}^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big|_{\bar{t}^+}^* \quad (5.38)$$

$$\left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^-}^* = \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^+}^* \quad (5.39)$$

Dimostrazione - Il risultato può essere facilmente verificato scrivendo le condizioni del Teorema 5.2 per il problema equivalente con vincoli differenziali. Si osservi in proposito che la condizione (5.1) è sempre soddisfatta per quest'ultimo problema, data la struttura dei vincoli differenziali (5.35).

La costanza del vettore dei moltiplicatori ρ^* si deduce immediatamente scrivendo la (5.3) per le componenti w^* del vettore \tilde{z}^* . \square

Osservazione 5.15 - Con riferimento al Problema 5.13 isoperimetrico un estremale z^* si dice *normale* se risulta $\rho_0^* \neq 0$ e cioè se è normale il corrispondente estremale \tilde{z}^* per il problema di Lagrange con vincoli differenziali cui ci si può ricondurre. In tal caso, ovviamente, si può sempre assumere $\rho_0^* = 1$, rendendo univocamente definiti i moltiplicatori ρ^* .

Esempio 5.2 - Si determini la funzione scalare $z \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ che sottende la massima area con le condizioni agli estremi:

$$z(t_i) = z(t_f) = 0 \quad (5.40)$$

e che abbia una lunghezza assegnata $K \in \left[t_f - t_i, (t_f - t_i) \frac{\pi}{2} \right]$ (vedi Fig. 5.5).

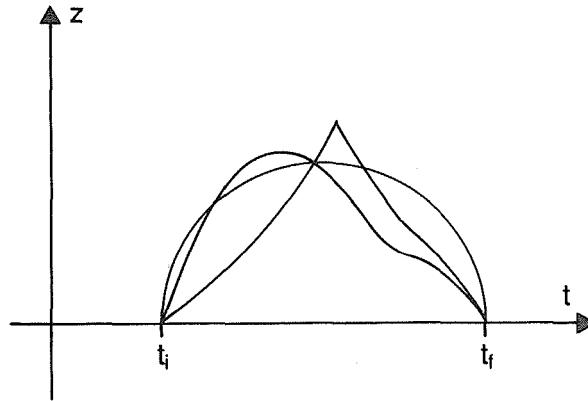


Fig. 5.5

Si desidera cioè rendere minimo il funzionale:

$$J(z) = - \int_{t_i}^{t_f} z(t) dt$$

con il vincolo isoperimetrico:

$$\int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1 + \dot{z}^2(t)} dt = K \quad (5.41)$$

Introdotto il moltiplicatore costante ρ e assumendo $\rho_0 = 1$, la funzione Lagrangiana (5.36) diviene:

$$L(z, \dot{z}, 1, \rho) = -z + \rho \sqrt{1 + \dot{z}^2}$$

Imponendo le condizioni di continuità (5.38), (5.39) si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{\dot{z}^*(\bar{t}^-)}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}(\bar{t}^-)}} &= \rho^* \frac{\dot{z}^*(\bar{t}^+)}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}(\bar{t}^+)}} \\ - z^*(\bar{t}^-) + \frac{\rho^*}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}(\bar{t}^-)}} &= - z^*(\bar{t}^+) + \frac{\rho^*}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}(\bar{t}^+)}} \end{aligned}$$

che evidentemente implicano $\dot{z}^*(\bar{t}^-) = \dot{z}^*(\bar{t}^+)$. Pertanto, ricordando che il vincolo isoperimetrico può essere trasformato in un vincolo differenziale di egualianza, in base alla Definizione 5.7 si può affermare che il generico estremale z^* è non singolare e appartiene a $C^2[t_i, t_f]$.

La condizione necessaria (5.37) può quindi essere posta nella forma differenziale equivalente:

$$1 + \frac{d}{dt} \left(\rho^* \frac{\dot{z}^*}{\sqrt{1 + \dot{z}^{*2}}} \right) = 0$$

che integrata due volte fornisce:

$$z^*(t) = \pm \sqrt{\rho^{*2} - (K_1 - t)^2} + K_2 \quad (5.42)$$

essendo K_1 e K_2 due costanti di integrazione. Imponendo le condizioni (5.40) si ottiene:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{t_i + t_f}{2} \\ K_2 &= \mp \sqrt{\rho^{*2} - \frac{(t_f - t_i)^2}{4}} \end{aligned}$$

che, sostituite nella (5.42), danno:

$$\left(z^*(t) \pm \sqrt{\rho^{*2} - \frac{(t_f - t_i)^2}{4}} \right)^2 + \left(t - \frac{t_i + t_f}{2} \right)^2 = \rho^{*2} \quad (5.43)$$

L'equazione (5.43) rappresenta nel piano $(t, z(t))$ un arco di circonferenza di centro $\left(\frac{t_i + t_f}{2}, \mp \sqrt{\rho^{*2} - \frac{(t_f - t_i)^2}{4}} \right)$ e di raggio $|\rho^*|$.

Per determinare il moltiplicatore ρ^* occorre imporre il vincolo isoperimetrico, che fornisce la condizione:

$$\frac{t_f - t_i}{2\rho^*} = \operatorname{sen} \frac{K}{2\rho^*} \quad (5.44)$$

L'equazione (5.44) può essere risolta numericamente e, in conseguenza delle limitazioni poste per K , la soluzione ρ^* è unica. Il problema considerato ammette perciò una unica soluzione estremale normale.

Esempio 5.3 - Si consideri il sistema descritto dall'equazione:

$$\dot{x}(t) = a x(t) + u(t) \quad (5.45)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}$ e $u(t) \in \mathbb{R}$; si desidera trasferire lo stato iniziale:

$$x(0) = 0$$

nello stato finale:

$$x(1) = 1$$

rendendo minimo l'errore quadratico medio sull'intervallo di controllo rispetto a un riferimento unitario per lo stato:

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 [1 - x(t)]^2 dt \quad (5.46)$$

ed essendo fissato il valore dell'energia richiesta per il controllo:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt = K \quad (5.47)$$

Il problema di controllo ottimo così formulato è chiaramente interpretabile come quello di minimizzare il funzionale di Lagrange (5.46) rispetto alla funzione $z = (x \ u)^T$ in presenza del vincolo differenziale (5.45) e di quello isoperimetrico (5.47).

La funzione Lagrangiana per il problema considerato, nell'ipotesi di normalità degli estremali, è:

$$\mathcal{L}(x(t), u(t), \dot{x}(t), 1, \lambda(t), \rho) = \frac{1}{2}(1 - x(t))^2 + \lambda(t)(\dot{x}(t) - ax(t) - u(t)) + \frac{1}{2}\rho u^2(t)$$

La condizione necessaria (5.4) implica la continuità di λ^* ; pertanto la (5.3) può essere scritta in forma differenziale:

$$\dot{\lambda}^* = x^* - 1 - a\lambda^* \quad (5.48)$$

$$0 = -\lambda^* + \rho^* u^* \quad (5.49)$$

Il moltiplicatore ρ^* deve essere diverso da zero perché altrimenti si avrebbe $x^*(t) = 1$ per ogni $t \in [0, 1]$, in contrasto con la condizione $x^*(0) = 0$. Pertanto dalla (5.49) si ricava:

$$u^* = \frac{\lambda^*}{\rho^*} \quad (5.50)$$

che, sostituita nella (5.45), fornisce:

$$\dot{x}^* = ax^* + \frac{\lambda^*}{\rho^*} \quad (5.51)$$

La soluzione del sistema differenziale (5.51), (5.48), con la condizione iniziale $x^*(0) = 0$, è:

$$x^*(t) = \frac{1}{\rho^*\beta^2} + \frac{1}{\rho^*\beta} \left[\lambda^*(0) \operatorname{senh} \beta t - \frac{1}{\beta} \cosh \beta t \right] \quad (5.52)$$

$$\lambda^*(t) = -\frac{a}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^2} [(\beta^2 \lambda^*(0) + a) \cosh \beta t - (a\beta \lambda^*(0) + \beta) \operatorname{senh} \beta t] \quad (5.53)$$

dove $\beta = \sqrt{\frac{1}{\rho^*} + a^2}$. Imponendo la condizione finale $x^*(1) = 1$ si ricava:

$$\lambda^*(0) = \frac{\rho^*\beta^2 - 1 + \cosh \beta}{\beta \operatorname{senh} \beta}$$

Sostituendo il valore di $\lambda^*(0)$ così ottenuto nelle (5.52), (5.53), (5.50) si ricavano le espressioni dello stato e del controllo in funzione del moltiplicatore ρ^* . Per determinare quest'ultimo parametro occorre infine imporre che u^* soddisfi il vincolo (5.47).

Esempio 5.4 - Si consideri il semplice circuito elettrico rappresentato in Fig. 5.6 e si determini l'andamento della tensione v del generatore, $v \in \bar{C}^1[0, T]$, tale che la tensione e ai capi del condensatore passi dal valore iniziale nullo al valore finale $e(T) = E$, tale che l'energia complessiva erogata assuma un valore assegnato:

$$\int_0^T v(t)i(t)dt = K$$

e tale che sia minimo il valore medio:

$$J(v) = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)dt$$

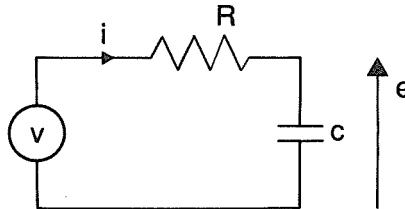


Fig. 5.6

Tenendo in conto che $i(t) = C\dot{e}(t)$, il problema equivale a quello di determinare una coppia di funzioni $v, e \in \bar{C}^1[0, T]$ che minimizzano J e che soddisfano ai vincoli:

$$v - RC\dot{e} - e = 0$$

$$C \int_0^T v \dot{e} dt = K$$

$$e(0) = 0, \quad e(T) = E$$

Osservato preliminarmente che la condizione di rango (5.1) è soddisfatta, assumendo $\lambda_0 = 1$ il Lagrangiano del problema è:

$$\mathcal{L}(v, e, \dot{e}, 1, \lambda, \rho) = \frac{1}{T}v + \lambda(v - RC\dot{e} - e) + \rho Cv\dot{e}$$

Le condizioni necessarie di ottimo sono:

$$\int_0^t \left(\frac{1}{T} + \lambda^* + \rho^* C\dot{e}^* \right) d\tau = c_1 \quad (5.54)$$

$$-RC\lambda^* + \rho^*Cv^* + \int_0^t \lambda^* d\tau = c_2 \quad (5.55)$$

cui vanno aggiunte le condizioni di ammissibilità:

$$v^* - RC\dot{e}^* - e^* = 0 \quad (5.56)$$

$$C \int_0^T v^* \dot{e}^* dt = K \quad (5.57)$$

$$e^*(0) = 0 \quad (5.58)$$

$$e^*(T) = E \quad (5.59)$$

Poiché i valori iniziali e finali di v sono liberi e poiché la funzione \mathcal{L} non dipende da \dot{v} , le condizioni $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \Big|_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \Big|_T = 0$ sono automaticamente soddisfatte. Negli eventuali istanti \bar{t} di discontinuità delle funzioni v^* ed \dot{e}^* deve inoltre essere:

$$-RC\lambda^*(\bar{t}^-) + \rho^*Cv^*(\bar{t}^-) = -RC\lambda^*(\bar{t}^+) + \rho^*Cv^*(\bar{t}^+) \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T}v^*(\bar{t}^-) + \lambda^*(\bar{t}^-)v^*(\bar{t}^-) - \lambda^*(\bar{t}^-)e^*(\bar{t}^-) \\ &= \frac{1}{T}v^*(\bar{t}^+) + \lambda^*(\bar{t}^+)v^*(\bar{t}^+) - \lambda^*(\bar{t}^+)e^*(\bar{t}^+) \end{aligned}$$

Tenuto conto della continuità di v^* , dalla (5.60) discende la continuità di λ^* in $[0, T]$ e dalla (5.55) si ha inoltre che $\lambda^* \in \mathcal{C}^1[0, T]$; pertanto le condizioni (5.54) e (5.55) possono essere sostituite dalle condizioni che da esse si ottengono derivando rispetto a t :

$$\frac{1}{T} + \lambda^* + \rho^*C\dot{e}^* = 0 \quad (5.61)$$

$$-RC\dot{\lambda}^* + \rho^*C\dot{v}^* + \lambda^* = 0 \quad (5.62)$$

Ricavando λ^* dalla (5.62), sostituendolo nella (5.61) e integrando, si ha:

$$\frac{t}{T} + RC\lambda^* - \rho^*Cv^* + \rho^*Ce^* = K_1$$

Ricavando $v^* - e^*$ dalla (5.56), sostituendo tale quantità nella precedente equazione, tenendo conto della (5.61) e della (5.58), integrando si ottiene:

$$e^*(t) = \frac{1}{4\rho^*RC^2T}t^2 - \frac{1}{2\rho^*CT}t - \frac{K_1}{2\rho^*RC^2}t$$

Imponendo la (5.59) si ricava:

$$K_1 = \frac{1}{2} - \frac{RC}{T} - \frac{2\rho^*RC^2E}{T}$$

che, sostituita nella precedente, fornisce:

$$e^*(t) = \frac{1}{4\rho^*RC^2T}t^2 - \frac{1}{4\rho^*RC^2}t + \frac{E}{T} \quad (5.63)$$

Dalla (5.56) inoltre si ha:

$$v^*(t) = \frac{1}{4\rho^*RC^2T}t^2 - \frac{1}{4\rho^*RC^2}t + \frac{E}{T}t + \frac{1}{2\rho^*CT}t - \frac{1}{4\rho^*C} + \frac{RCE}{T} \quad (5.64)$$

Si nota che sia e^* che v^* risultano dipendenti da $\frac{1}{\rho^*}$, che può essere determinato imponendo il vincolo isoperimetrico (5.57). Procedendo in tal modo si perviene a una equazione di secondo grado in $1/\rho^*$ che, per $K > \frac{E^2C}{2} \left(1 + \frac{2RC}{T}\right)$, ammette due radici reali:

$$\frac{1}{\rho^*} = \pm \sqrt{\frac{4RC^2}{T} \left[K - \frac{E^2C}{2} \left(1 + \frac{2RC}{T}\right) \right]}$$

Sostituendo tali valori nelle (5.63) e (5.64) si perviene a una coppia di estremali. Dalla (5.61) è anche possibile ricavare la corrispondente coppia di moltiplicatori λ^* .

Per $K \leq \frac{E^2C}{2} \left(1 + \frac{2RC}{T}\right)$ la predetta equazione di secondo grado in $1/\rho^*$ non ammette radici reali e pertanto non esistono estremali normali.

5.4 PROBLEMA DI LAGRANGE CON VINCOLI DI DISEGUAGLIANZA

Anche questo tipo di problema può essere ricondotto al Problema 5.1 mediante l'introduzione di opportune variabili ausiliarie e quindi risultati utili per la sua soluzione possono essere dedotti sulla base dei Teoremi 5.2, 5.4, 5.5. Si consideri il seguente problema.

Problema 5.16 - Considerato lo spazio lineare $\bar{C}^1[t_i, t_f]$ con la norma (1.3) e definito l'insieme ammissibile:

$$D = \{z \in \bar{C}^1[t_i, t_f] : z(t_i) = z^i; z(t_f) = z^f; q[z(t), \dot{z}(t), t] \leq 0, \forall t \in [t_i, t_f]\}$$

dove q è una funzione vettoriale a dimensione β , di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, considerato il funzionale obiettivo:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} L[z(t), \dot{z}(t), t] dt$$

con L funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, determinare, se esiste, un punto z^0 di minimo globale per J su D . \square

Lo studio di questo problema può essere effettuato trasformando i vincoli di diseguaglianza in altrettanti vincoli di egualanza, mediante l'introduzione di opportune *variabili ausiliarie*.

Introdotto infatti un vettore di funzioni ausiliarie $w \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$, di dimensione β , e posto:

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

i vincoli di diseguaglianza che caratterizzano il Problema 5.16 sono equivalenti ai vincoli differenziali di egualanza:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j[\tilde{z}(t), \dot{\tilde{z}}(t), t] &= q_j[z(t), \dot{z}(t), t] + \dot{w}_j^2(t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \\ &\forall t \in [t_i, t_f] \end{aligned} \quad (5.65)$$

Pertanto il Problema 5.16 può essere ricondotto a un problema equivalente del tipo 5.1, osservando però che le ultime β componenti della funzione \tilde{z} , argomento del problema trasformato, hanno valori iniziale e finale liberi, mentre le prime ν componenti hanno tali valori fissati.

A questo punto è possibile dimostrare il seguente teorema che fornisce condizioni necessarie di minimo per il problema in esame.

Teorema 5.17 (Valentine) - Con riferimento al Problema 5.16, sia $z^* \in D$ una funzione tale che:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial q_a(z, \dot{z}, t)}{\partial \dot{z}} \Big| \right\}^* = \beta_a(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.66)$$

dove con q_a si è indicato il sottovettore di q , di dimensione $\beta_a(t)$, costituito dai vincoli attivi nel punto $(z^*(t), \dot{z}^*(t), t)$.

Condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale vincolato è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione β di moltiplicatori, $\eta^* \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$, tali che λ_0^*, η^* non siano simultaneamente nulli in alcun istante di $[t_i, t_f]$ e tali che, posto:

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, \lambda_0, \eta, t) = \lambda_0 L(z, \dot{z}, t) + \eta^T(t) q(z, \dot{z}, t) \quad (5.67)$$

risulti nell'intervallo $[t_i, t_f]$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big| - \int_{t_i}^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \Big| d\tau = c^T \quad (5.68)$$

$$\eta_j^*(t) q_j(z^*, \dot{z}^*, t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad (5.69)$$

$$\eta^*(t) \geq 0 \quad (5.70)$$

dove $c \in \mathbb{R}^\nu$ è un vettore costante.

Le discontinuità di η^* possono inoltre verificarsi solo nei punti \bar{t} in cui \dot{z}^* ha una discontinuità e in tali punti risultano soddisfatte le condizioni di continuità:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right|_{\bar{t}^-}^* = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right|_{\bar{t}^+}^* \quad (5.71)$$

$$\left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^-}^* = \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right)_{\bar{t}^+}^* \quad (5.72)$$

Dimostrazione - La dimostrazione del teorema può essere effettuata considerando le condizioni dei Teoremi 5.2 e 5.4 per il problema equivalente con vincoli di egualianza. Ciò è possibile in quanto l'ipotesi (5.66) implica che, per ogni funzione ausiliaria w^* , risulti:

$$\text{rango} \left\{ \left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \dot{z}} \right| \right\}^* = \beta \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.73)$$

Infatti, indicando con $q_n(z^*, \dot{z}^*, t)$ l'insieme dei vincoli non attivi nell'istante t e ancora con $\tilde{g}_a|^*, w_a^*$ e con $\tilde{g}_n|^*, w_n^*$ i sottovettori costituiti dalle funzioni $\tilde{g}_i|^*$ e dalle variabili ausiliarie w_i^* , corrispondenti rispettivamente ai vincoli attivi e a quelli non attivi nell'istante t , si ha:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \dot{z}} \right|^* &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{g}_a}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \tilde{g}_a}{\partial \dot{w}_a} & \frac{\partial \tilde{g}_a}{\partial \dot{w}_n} \\ \frac{\partial \tilde{g}_n}{\partial \dot{z}} & \frac{\partial \tilde{g}_n}{\partial \dot{w}_a} & \frac{\partial \tilde{g}_n}{\partial \dot{w}_n} \end{bmatrix}^* \\ &= \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial q_a}{\partial \dot{z}} \right|^* & 0 & 0 \\ \left. \frac{\partial q_n}{\partial \dot{z}} \right|^* & 0 & \text{diag } \{2\dot{w}_{n_j}^*\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pertanto, tenendo in conto che $\dot{w}_{n_j}(t) \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, \beta - \beta_a(t)$, resta verificato che la (5.66) implica la (5.73).

Secondo la definizione (5.2), il Lagrangiano per il problema equivalente, tenendo conto della (5.27), risulta dato da:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, \lambda_0, \eta, t) &= \lambda_0 L(z, \dot{z}, t) + \sum_{j=1}^{\beta} \eta_j(t) [q_j(z, \dot{z}, t) + \dot{w}_j^2(t)] \\ &= \mathcal{L}(z, \dot{z}, \lambda_0, \eta, t) + \sum_{j=1}^{\beta} \eta_j(t) \dot{w}_j^2(t) \end{aligned}$$

La condizione (5.3), scritta rispettivamente per le componenti z e w del vettore \tilde{z} , dà luogo alla (5.67), che quindi è dimostrata, e alle:

$$\eta_j^*(t)\dot{w}_j^*(t) = c_j \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.74)$$

D'altra parte, in base alla Osservazione 5.12, poiché i valori delle variabili w agli estremi sono liberi, deve essere:

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{w}_j} \Big|_{t_i}^* = 2\eta_j^*(t_i)\dot{w}_j^*(t_i) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad (5.75)$$

Dalle (5.73) e (5.74) si deduce immediatamente:

$$\eta_j^*(t)\dot{w}_j^*(t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.76)$$

e moltiplicando quest'ultima per $\dot{w}_j^*(t)$, ricordando la (5.65), anche la (5.69) resta dimostrata.

Per quanto riguarda la (5.70), applicando il Teorema 5.4 al problema equivalente con vincoli di egualianza, si ha che devono esistere $\lambda_0^* \geq 0$ e $\eta^* \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$, ma simultaneamente nulli, tali che, per ogni $t \in [t_i, t_f]$, risulti:

$$\tilde{\pi}^T \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}^2} \Big| \tilde{\pi} \geq 0 \quad \forall \tilde{\pi} \in \mathbb{R}^{\nu+\beta}: \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{z}} \Big| \tilde{\pi} = 0 \quad (5.77)$$

Decomposto $\tilde{\pi}$ nei due sottovettori $\pi \in \mathbb{R}^\nu$ e $\vartheta \in \mathbb{R}^\beta$, la (5.76) può riscriversi:

$$\begin{bmatrix} \pi \\ \vartheta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2} & 0 \\ 0 & 2 \text{ diag } \{\eta_j^*\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \pi^T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2} \Big| \pi + 2 \sum_{j=1}^{\beta} \eta_j^* \vartheta_j^2 \geq 0$$

$$\forall \tilde{\pi} \in \mathbb{R}^{\nu+\beta}: \frac{\partial q_i}{\partial \dot{z}} \Big| \tilde{\pi} + 2\dot{w}_i^* \vartheta_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \beta, \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Assumendo $\pi = 0$, la precedente condizione si riduce a:

$$\sum_{j=1}^{\beta} \eta_j^* \vartheta_j^2 \geq 0 \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}^\beta: \dot{w}_s^* \vartheta_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, \beta \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (5.78)$$

Supponendo che nel generico istante t sia $\eta_k^*(t) \neq 0$, dalla (5.76) si ha che $\dot{w}_k^*(t) = 0$; pertanto si può assumere $\vartheta_k = 1$ e $\vartheta_s = 0$, $s = 1, 2, \dots, (k-1), (k+1), \dots, \beta$. Tenendo conto della (5.78) risulta allora $\eta_k^*(t) > 0$. La (5.70) risulta pertanto dimostrata.

Per quanto riguarda le discontinuità di η^* , si osservi che in base al Teorema 5.2 riferito al problema equivalente, esse possono aver luogo solo nei punti di

discontinuità di $\dot{\tilde{z}}^*$. Ma, tenuto conto della (5.65) e del fatto che q è funzione continua di tutti i suoi argomenti, le discontinuità di \dot{w}^* possono verificarsi solo in corrispondenza a discontinuità di \dot{z}^* . Ne segue che le discontinuità di η^* possono presentarsi solo negli istanti di discontinuità della \dot{z}^* .

Infine le condizioni di continuità (5.4) e (5.5) scritte per il problema equivalente, tenuto conto della (5.76), si riducono alle (5.71) e (5.72). \square

Altre due condizioni necessarie di minimo vincolato analoghe rispettivamente a quella di *Clebsch* e a quella di *Weierstrass*, sono date dai seguenti teoremi ⁽¹⁾.

Teorema 5.18 - Con riferimento al Problema 5.16 sia $z^* \in D$ una funzione che soddisfa la condizione (5.66); condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale vincolato è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione β di moltiplicatori, $\eta^* \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$, tali che λ_0^*, η^* non siano simultaneamente nulli in alcun istante di $[t_i, t_f]$ e tali che risulti:

$$\pi^T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2} \Big| \pi \geq 0 \quad \forall \pi \in \Pi(t), \forall t \in [t_i, t_f]$$

dove:

$$\Pi(t) = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^\nu : \frac{\partial q_a}{\partial \dot{z}} \Big| \pi = 0 \right\}$$

\square

Teorema 5.19 - Con riferimento al Problema 5.16, nel quale si sia adottata la norma (1.2), sia $z^* \in D$ una funzione che soddisfa la condizione (5.66); condizione necessaria affinché z^* sia un punto di minimo locale (forte) vincolato è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione β di moltiplicatori, $\eta^* \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$, mai simultaneamente nulli in $[t_i, t_f]$, tali che, posto:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z(t), a, b, \lambda_0, \eta(t), t) &= \mathcal{L}(z(t), b, \lambda_0, \eta(t), t) \\ &- \mathcal{L}(z(t), a, \lambda_0, \eta(t), t) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{\dot{z}(t)=a} (b - a) \end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}^\nu$, risulti:

$$\mathcal{E}(z^*(t), \dot{z}^*(t), b, \lambda_0^*, \eta^*(t), t) - \eta^{*T}(t) q(z^*(t), b, t) \geq 0 \quad \forall b \in \Omega(t), \forall t \in [t_i, t_f]$$

dove:

$$\Omega(t) = \left\{ b \in \mathbb{R}^\nu : q(z^*(t), b, t) \leq 0, \text{ rango } \left\{ \frac{\partial q_\alpha}{\partial \dot{z}(t)} \Big|_{z^*(t), b} \right\} = \beta_\alpha(t) \right\}$$

⁽¹⁾ Si veda [25], ¶3.

avendo indicato con q_α il sottovettore di dimensione $\beta_\alpha(t)$, costituito dalle componenti di q attive in $(z^*(t), b, t)$. \square

Osservazione 5.20 - Con riferimento al Problema 5.16 un estremale z^* si dice *normale* se risulta $\lambda_0^* \neq 0$ e cioè se è normale il corrispondente estremale del problema equivalente con vincoli di egualanza. Ovviamente una condizione necessaria e sufficiente di normalità può essere dedotta considerando quest'ultimo problema equivalente e adattando il Teorema 5.10.

Si può anche dimostrare che, se l'intervallo $[t_i, t_f]$ è decomponibile in sottointervalli, tali che in ciascuno di essi l'insieme dei vincoli attivi rimanga lo stesso, condizione necessaria e sufficiente di normalità è che l'estremale sia normale in ogni sottointervallo con riferimento ai soli vincoli ivi attivi.

Nel caso normale si può assumere $\lambda_0^* = 1$, rendendo univocamente definiti i moltiplicatori η^* .

Osservazione 5.21 - Per quanto riguarda problemi del tipo 5.16 con punti iniziali e finali non assegnati in \mathbb{R}^{n+1} e le relative condizioni necessarie, si possono ripetere le considerazioni già fatte nell'Osservazione 5.12 per problemi con vincoli di egualanza.

Osservazione 5.22 - È infine evidente che, sulla base dei risultati dei Paragrafi 5.2, 5.3, 5.4 è possibile trattare problemi di *Lagrange* che prevedano simultaneamente vincoli differenziali, sia di egualanza che di disegualanza, e vincoli isoperimetrici, introducendo moltiplicatori variabili e costanti in numero opportuno.

Esempio 5.5 - Si consideri la versione continua del problema discreto di controllo ottimo, già trattato nell'Esempio 3.1: utilizzando il calcolo varazionale si perviene in questo caso a risultati del tutto analoghi a quelli precedentemente ottenuti utilizzando le condizioni della programmazione non lineare.

Dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = b(t)u(t) \quad (5.79)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}$ ed $u(t) \in \mathbb{R}$ e con stato iniziale $x(0) = x^i$ assegnato, si desidera rendere minimo l'indice di costo:

$$J(x, u) = \frac{a^2}{2}x^2(T) + \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t)dt$$

con il vincolo $|u(t)| \leq 1$.

Per ricondurre il problema di controllo ottimo considerato ad un problema di *Lagrange* con vincoli di egualanza e di disegualanza, si pone:

$$u(t) = \dot{v}(t) \quad (5.80)$$

e si osserva che:

$$x^2(T) = \frac{t x^2(t)}{T} \Big|_0^T = \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{t x^2(t)}{T} \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [x^2(t) + 2t x(t) \dot{x}(t)] dt$$

Pertanto il problema può essere riformulato come quello di minimizzare in $\bar{\mathcal{C}}^1[0, T]$ il funzionale:

$$J(x, v) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{a^2}{T} (x^2 + 2t x \dot{x}) + \dot{v}^2 \right] dt \quad (5.81)$$

con la condizione iniziale:

$$x(0) = x^i$$

con il vincolo di egualianza:

$$g(\dot{x}, \dot{v}) = \dot{x} - b\dot{v} = 0 \quad (5.82)$$

e con i vincoli di diseguaglianza:

$$q_1(\dot{v}) = \dot{v} - 1 \leq 0 \quad (5.83)$$

$$q_2(\dot{v}) = -\dot{v} - 1 \leq 0 \quad (5.84)$$

Si verifica facilmente che, grazie alla posizione (5.80), la condizione di regolarità dei vincoli è soddisfatta per qualunque coppia di funzioni x, v ammissibili: infatti, se è attivo il solo vincolo di egualianza (5.82), si ha:

$$\text{rango } \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial g}{\partial \dot{v}} \end{bmatrix} \right\} = \text{rango } \{ [1 \ - b] \} = 1$$

se sono attivi il vincolo di egualianza (5.82) e quello di diseguaglianza (5.83), si ha:

$$\text{rango } \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial g}{\partial \dot{v}} \\ \frac{\partial q_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial q_1}{\partial \dot{v}} \end{bmatrix} \right\} = \text{rango } \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = 2$$

e analogamente se sono attivi i vincoli (5.82) e (5.84); ovviamente i vincoli di diseguaglianza non possono essere attivi simultaneamente.

Nell'ipotesi di normalità la funzione Lagrangiana è:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \dot{x}, \dot{v}, 1, \lambda, \eta_1, \eta_2, t) \\ = \frac{a^2}{2T} (x^2 + 2t x \dot{x}) + \frac{1}{2} \dot{v}^2 + \lambda(\dot{x} - b\dot{v}) + \eta_1(\dot{v} - 1) - \eta_2(\dot{v} + 1) \end{aligned}$$

Le condizioni necessarie di ottimo, che si deducono sulla base dei Teoremi 5.2 e 5.17 sono:

$$\frac{a^2}{T} t x^* + \lambda^* - \frac{a^2}{T} \int_0^t (\tau \dot{x}^* + x^*) d\tau = c_1 \quad (5.85)$$

$$\dot{v}^* - b\lambda^* + \eta_1^* - \eta_2^* = c_2 \quad (5.86)$$

$$\eta_1^*(\dot{v}^* - 1) = 0 \quad (5.87)$$

$$\eta_2^*(\dot{v}^* + 1) = 0 \quad (5.88)$$

$$\eta_1^* \geq 0 \quad (5.89)$$

$$\eta_2^* \geq 0 \quad (5.90)$$

assieme alle condizioni di trasversalità:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right|_0^* = \dot{v}^*(0) - b(0)\lambda^*(0) + \eta_1^*(0) - \eta_2^*(0) = 0 \quad (5.91)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right|_T^* = \dot{v}^*(T) - b(T)\lambda^*(T) + \eta_1^*(T) - \eta_2^*(T) = 0 \quad (5.92)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right|_T^* = a^2 x^*(T) + \lambda^*(T) = 0 \quad (5.93)$$

Calcolando per parti l'integrale che figura nella (5.85) e tenendo conto della (5.93), si ha:

$$\lambda^*(t) = -a^2 x^*(T)$$

Dalla (5.86) e dalla (5.91) si ha inoltre:

$$\dot{v}^*(t) - b(t)\lambda^*(t) + \eta_1^*(t) - \eta_2^*(t) = 0$$

In base alle (5.89) e (5.90), tenuto conto delle (5.87) e (5.88), in ciascun istante dell'intervallo di controllo sono possibili i seguenti tre casi:

- i) $\eta_1^*(t) = 0$, $\eta_2^*(t) > 0$
in corrispondenza al quale deve essere:

$$\dot{v}^*(t) = -1$$

$$\eta_2^*(t) = a^2 b(t) x^*(T) + \dot{v}^*(t) = a^2 b(t) x^*(T) - 1$$

il che implica $a^2 b(t) x^*(T) > 1$

- ii) $\eta_1^*(t) > 0$, $\eta_2^*(t) = 0$
in corrispondenza al quale deve essere:

$$\dot{v}^*(t) = 1$$

$$\eta_1^*(t) = -(a^2 b(t) x^*(T) + \dot{v}^*(t)) = -(a^2 b(t) x^*(T) + 1)$$

il che implica $a^2 b(t) x^*(T) < -1$

- iii) $\eta_1^*(t) = \eta_2^*(t) = 0$
in corrispondenza al quale deve essere:

$$\dot{v}^*(t) = -a^2 b(t) x^*(T)$$

Dall'esame dei tre casi considerati si constata che risulta:

$$u^*(t) = \dot{v}^*(t) = -\operatorname{sat}\{a^2 b(t)x^*(T)\}$$

Per quanto riguarda lo stato si ottiene di conseguenza:

$$x^*(t) = x^i - \int_0^t b(\tau) \operatorname{sat}\{a^2 b(\tau)x^*(T)\} d\tau$$

Da quest'ultima relazione si deduce infine che $x^*(T)$ deve essere soluzione dell'equazione:

$$x^*(T) = x^i - \int_0^T b(\tau) \operatorname{sat}\{a^2 b(\tau)x^*(T)\} d\tau \quad (5.94)$$

Nel caso particolare in cui $b(t)$ è costante e pari a b , l'equazione (5.94) si riduce alla:

$$x^*(T) = x^i - bT \operatorname{sat}\{a^2 b x^*(T)\}$$

per la quale è possibile considerare i seguenti tre casi:

i) $a^2 b x^*(T) \leq -1$ da cui $x^*(T) = x^i + bT \quad u^*(t) = 1$

ii) $a^2 b x^*(T) \in [-1, 1]$ da cui $x^*(T) = \frac{x^i}{1 + a^2 b^2 T} \quad u^*(t) = -\frac{a^2 b x^i}{1 + a^2 b^2 T}$

iii) $a^2 b x^*(T) \geq 1$ da cui $x^*(T) = x^i - bT \quad u^*(t) = -1$

Osservando che quando $a^2 b x^*(T) \leq -1$ risulta anche $\frac{a^2 b x^i}{1 + a^2 b^2 T} \leq -1$ e che quando $a^2 b x^*(T) \geq 1$ risulta anche $\frac{a^2 b x^i}{1 + a^2 b^2 T} \geq 1$, si può in definitiva scrivere

per il controllo estremale:

$$u^*(t) = - \operatorname{sat} \left\{ \frac{a^2 b x^i}{1 + a^2 b^2 T} \right\}$$

e per il corrispondente stato:

$$x^*(t) = x^i - \operatorname{sat} \left\{ \frac{a^2 b x^i}{1 + a^2 b^2 T} \right\} bt$$

5.5 PROBLEMA DI LAGRANGE CON VINCOLI NEL CASO CONVESSO

Anche per il problema di *Lagrange* in presenza di vincoli, la proprietà di convessità della funzione \mathcal{L} rispetto a z e \dot{z} per ogni t consente in alcuni casi di pervenire a condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale vincolato. Si consideri in proposito il seguente problema.

Problema 5.23 - Considerato lo spazio lineare $\bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ con la norma (1.3) è definito l'insieme ammissibile:

$$D = \{z \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f] : z(t_i) \in D_i ; z(t_f) \in D_f ; g[z(t), \dot{z}(t), t] = 0, \forall t \in [t_i, t_f] ; \\ \int_{t_i}^{t_f} h[z(t), \dot{z}(t), t] dt = k ; q[z(t), \dot{z}(t), t] \leq 0, \forall t \in [t_i, t_f]\}$$

dove D_i e D_f sono insiemi aperti o dove $D_i = \{z^i\}$ e $D_f = \{z^f\}$ (o dove si verifichi una combinazione di tali casi), dove g e h sono funzioni vettoriali rispettivamente a dimensioni μ e σ , con $\mu < \nu$, lineari in $z(t)$ e $\dot{z}(t)$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$ e dove q è una funzione vettoriale di dimensione β di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti e convessa rispetto a $z(t)$ e $\dot{z}(t)$ in $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, considerato il funzionale obiettivo:

$$J(z) = \int_{t_i}^{t_f} L[z(t), \dot{z}(t), t] dt$$

con L funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti e convessa rispetto a $z(t)$ e $\dot{z}(t)$ in $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, determinare, se esiste, un punto z^0 di minimo globale per J su D . \square

Si ha il seguente risultato:

Teorema 5.24 - Con riferimento al Problema 5.23, sia $z^0 \in D$ una funzione tale che:

$$\text{rango} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial q_a}{\partial \dot{z}} \end{pmatrix}^0 \right\} = \mu + \beta_a(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

dove con q_a si è indicato il sottovettore di q , di dimensioni $\beta_a(t)$, costituito dai vincoli attivi nel punto $(z^0(t), \dot{z}^0(t), t)$; condizione necessaria e sufficiente affinché z^0 sia una soluzione ottima normale è che esistano due funzioni vettoriali di moltiplicatori $\lambda^0, \eta^0 \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$, rispettivamente di dimensioni μ e β e un vettore costante di moltiplicatori $\rho^0 \in \mathbb{R}^\sigma$, tali che, posto:

$$\mathcal{L}(z, \dot{z}, 1, \lambda, \eta, \rho, t) = L(z, \dot{z}, t) + \lambda^T g(z, \dot{z}, t) + \eta^T q(z, \dot{z}, t) + \rho^T h(z, \dot{z}, t) \quad (5.95)$$

risulti nell'intervallo $[t_i, t_f]$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}(t)}^0 - \int_{t_i}^t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z(\tau)}^0 d\tau = c^T \quad (5.96)$$

$$\eta_j^0(t) q_j(z^0(t), \dot{z}^0(t), t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad (5.97)$$

$$\eta_j^0(t) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad (5.98)$$

dove $c \in \mathbb{R}^\nu$ è un vettore costante; inoltre, negli istanti t_i e/o t_f cui corrisponde D_i e/o D_f aperto, si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}(t)}^0 = 0^T \quad (5.99)$$

Dimostrazione - La necessità delle (5.96–99) può considerarsi acquisita sulla base dei precedenti Teoremi 5.2, 5.14, 5.17. Per quanto riguarda la sufficienza, in base alla convessità di $\mathcal{L}(z, \dot{z}, 1, \lambda^0, \eta^0, \rho^0, t)$ rispetto a $z(t)$ e $\dot{z}(t)$ in $\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, quale che sia $\tilde{z} \in D$ e per ogni $t \in [t_i, t_f]$, si ha:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}[\tilde{z}(t), \dot{\tilde{z}}(t), 1, \lambda^0(t), \eta^0(t), \rho^0, t] - \mathcal{L}[z^0(t), \dot{z}^0(t), 1, \lambda^0(t), \eta^0(t), \rho^0, t] \\ & \geq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z(t)}^0 [\tilde{z}(t) - z^0(t)] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}(t)}^0 [\dot{\tilde{z}}(t) - \dot{z}^0(t)] \end{aligned}$$

Sostituendo a \mathcal{L} la sua espressione (5.95), integrando sull'intervallo $[t_i, t_f]$ e ricordando che sia z^0 che \tilde{z} soddisfano i vincoli che caratterizzano D , si ottiene:

$$\begin{aligned} & J(\tilde{z}) + \int_{t_i}^{t_f} \eta^{0T}(t) q(\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, t) dt - J(z^0) - \int_{t_i}^{t_f} \eta^{0T}(t) q(z^0, \dot{z}^0, t) dt \\ & \geq \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}^0 (\tilde{z} - z^0) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}^0 (\dot{\tilde{z}} - \dot{z}^0) \right] dt \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (5.97), (5.98) e del fatto che $q(\tilde{z}, \dot{\tilde{z}}, t) \leq 0, \forall t \in [t_i, t_f]$, integrando per parti a secondo membro, si ha:

$$\begin{aligned} J(\tilde{z}) - J(z^0) &\geq \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{\partial L}{\partial z} \Big|_0 - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_0 \right] (\tilde{z} - z^0) dt \\ &+ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \Big|_0 (\tilde{z} - z^0) \right]_{t_i}^{t_f} \end{aligned} \quad (5.100)$$

Infine, ricordando la (5.96) e tenendo presente che, in base alla (5.99) o in base alle condizioni agli estremi, il secondo addendo a secondo membro della (5.100) è nullo, rimane dimostrato che z^0 è una soluzione ottima normale. \square

Osservazione 5.25 - Il Teorema 5.24 sussiste anche con riferimento ad un problema del tipo 5.23 in cui D_i e D_f siano insiemi convessi di \mathbb{R}^ν , tali che $K_{z^0, D}$ sia simmetrico.

Osservazione 5.26 - Anche nel caso vincolato è possibile verificare che, se nelle ipotesi del precedente Teorema 5.24, L è supposta strettamente convessa rispetto a $z(t)$ e a $\dot{z}(t)$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, la soluzione ottima z^0 se esiste è unica.

Esempio 5.6 - Si determini la funzione scalare $z \in \bar{C}^1 \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ che minimizza il funzionale:

$$J(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dot{z}^2(t) dt$$

con il vincolo isoperimetrico:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} z(t) \cos t dt = 3 - \frac{3}{4}\pi \quad (5.101)$$

e con la condizione iniziale:

$$z(0) = 1 \quad (5.102)$$

In base al Teorema 5.24, si hanno le seguenti condizioni necessarie e sufficienti di ottimo che particolarizzano le (5.96) e (5.99):

$$\dot{z}^0 - \rho^0 \int_0^t \cos \tau d\tau = C_1 \quad (5.103)$$

$$\dot{z}^0 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (5.104)$$

Dalla (5.103) si ottiene:

$$z^0(t) = C_1 t + \rho^0 (1 - \cos t) + C_2$$

Imponendo le condizioni (5.102) e (5.104) si ha:

$$z^0(t) = \rho^0(1 - t - \cos t) + 1$$

Infine, imponendo il vincolo isoperimetrico (5.101), si ricava $\rho^0 = 1$ e pertanto esiste l'unica soluzione ottima:

$$z^0(t) = 2 - t - \cos t$$

Capitolo 6

Calcolo delle variazioni e controllo ottimo

6.1 INTRODUZIONE E FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Il calcolo delle variazioni classico, i cui fondamenti sono stati presentati nei precedenti capitoli, costituisce uno strumento idoneo ad affrontare una ampia classe di problemi di controllo ottimo. Qui di seguito verrà formulato un problema di controllo ottimo che, per maggior generalità, è caratterizzato anche da vincoli di diseguaglianza sulle variabili di stato e/o di controllo. Ovviamente, come verrà ribadito nel seguito, il problema in cui tali vincoli non sono presenti costituisce un caso particolare del precedente.

Problema 6.1 - Considerato il sistema dinamico descritto dalla equazione differenziale:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (6.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ vettore di controllo e con f funzione di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, supposti assegnati l'istante iniziale t_i dell'intervallo di controllo e il valore iniziale dello stato:

$$x(t_i) = x^i \quad (6.2)$$

data la condizione finale:

$$\chi(x(t_f), t_f) = 0 \quad (6.3)$$

con χ funzione vettoriale di dimensione $\sigma_f \leq n + 1$, di classe C^1 rispetto ai suoi argomenti, dato il vincolo di diseguaglianza:

$$q(x, u, t) \leq 0 \quad (6.4)$$

con q funzione vettoriale di dimensione β di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, definito l'indice di costo:

$$J(x, u, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (6.5)$$

con L funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti, determinare, se esistono, l'istante $t_f^0 \in \mathbb{R}$, il controllo $u^0 \in \bar{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R})$ e lo stato $x^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R})$ che soddisfano il vincolo dinamico (6.1) e quello di diseguaglianza (6.4), la condizione iniziale (6.2) e quella finale (6.3) e che rendono minimo l'indice di costo (6.5). \square

Il precedente Problema 6.1 può facilmente essere ricondotto a un problema di *Lagrange* con vincoli di egualianza e di diseguaglianza, introducendo la funzione:

$$v(t) = \int_{t_i}^t u(\tau) d\tau \quad (6.6)$$

di modo che risulti $u(t) = \dot{v}(t)$. Il problema di *Lagrange* equivalente consiste quindi nel minimizzare rispetto allo scalare t_f e alla funzione $z = (x^T \ v^T)^T$ il funzionale:

$$J(z, t_f) = J(x, v, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{v}, t) dt$$

operando sull'insieme ammissibile $D \subset \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ definito come segue:

$$\begin{aligned} D = \{(x, v, t_f) \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} : & g(x, \dot{x}, \dot{v}, t) = f(x, \dot{v}, t) - \dot{x} = 0 ; \\ & q(x, \dot{v}, t) \leq 0 ; \ x(t_i) = x^i ; \ v(t_i) = 0 ; \ \chi(x(t_f), t_f) = 0\} \end{aligned}$$

Si osservi che la condizione $\mu < \nu$ che caratterizzava il Problema 5.1 è qui automaticamente soddisfatta, essendo $\mu = n$ e $\nu = n + p$. Si osservi anche che, poiché coerentemente con le assunzioni fatte nella trattazione dei problemi di *Lagrange* si è assunto $(x, v) \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R})$, segue che nel problema di controllo ottimo considerato risulta $x \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R})$ e $u \in \bar{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R})$.

È anche opportuno precisare il concetto di minimo locale per il problema considerato, in rapporto alla scelta della norma che si effettua sullo spazio $\bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R})$ della funzione z , argomento di J . In particolare, se si assume come norma la (1.3), essendo la funzione z costituita dalla x e dalla v , si ha che un punto (x^*, u^*, t_f^*) di minimo locale (debole) è tale rispetto alle funzioni di stato x sufficientemente prossime a x^* e con derivata \dot{x} sufficientemente prossima a \dot{x}^* e rispetto alle funzioni di controllo u sufficientemente prossime ad u^* . Se invece si assume la norma (1.2), si ha che un punto di minimo locale (forte) è tale rispetto alle funzioni di stato x sufficientemente prossime a x^* e rispetto alle funzioni di controllo u il cui integrale è sufficientemente prossimo all'integrale di u^* .

Al fine di fornire le condizioni necessarie per la risoluzione del problema di controllo ottimo precedentemente formulato, è conveniente introdurre la *funzione Hamiltoniana*, mediante la seguente definizione.

Definizione 6.2 - Con riferimento al Problema 6.1 si definisce funzione Hamiltoniana la funzione scalare:

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda, t) = \lambda_0 L(x, u, t) + \lambda^T(t) f(x, u, t) \quad (6.7)$$

in cui λ_0 è una costante scalare e λ è una funzione vettoriale a n componenti. \square

6.2 CONDIZIONI NECESSARIE

Il seguente teorema fornisce condizioni necessarie di ottimo per il problema di controllo formulato nel precedente paragrafo.

Teorema 6.3 - Con riferimento al Problema 6.1 sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile tale che:

$$\begin{aligned} \text{rango } \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial (x(t_f), t_f)} \right|^{*T} &= \sigma_f \\ \text{rango } \left\{ \frac{\partial q_a}{\partial u} \right|^{*T} &= \beta_a(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f^*] \end{aligned} \quad (6.8)$$

dove con q_a si è indicato il sottovettore di q , di dimensione $\beta_a(t)$, costituito dai vincoli di diseguaglianza attivi nel punto $(x^*(t), u^*(t), t)$. Condizione necessaria affinché (x^*, u^*, t_f^*) sia un punto di minimo locale è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$, una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f^*]$ e una funzione vettoriale di dimensione β di moltiplicatori $\eta^* \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f^*]$, tali che $\lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*$ non siano simultaneamente nulli in alcun istante di $[t_i, t_f^*]$ e tali che in tale intervallo risultino:

$$\dot{\lambda}^* = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|^{*T} - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{*T} \eta^* \quad (6.9)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \Big|^{*T} + \frac{\partial q}{\partial u} \Big|^{*T} \eta^* \quad (6.10)$$

$$\eta_j^*(t) q_j(x^*, u^*, t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad (6.11)$$

$$\eta^*(t) \geq 0 \quad (6.12)$$

$$\lambda^*(t_f^*) = - \frac{\partial \chi}{\partial x(t_f)} \Big|_{t_f^*}^{*T} \zeta \quad (6.13)$$

$$H \Big|_{t_f^*}^* = \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|_{t_f^*}^{*T} \zeta \quad (6.14)$$

con $\zeta \in \mathbb{R}^{\sigma_f}$.

Inoltre le discontinuità di $\dot{\lambda}^*$ e di η^* possono verificarsi solo nei punti \bar{t} in cui u^* ha una discontinuità e in tali punti risulta soddisfatta la condizione di continuità:

$$H \Big|_{\bar{t}^-}^* = H \Big|_{\bar{t}^+}^* \quad (6.15)$$

Dimostrazione - Mediante la trasformazione di variabile (6.6), il Problema 6.1, come già osservato, può essere ricondotto a un problema del tipo 5.16 con l'aggiunta di vincoli di egualanza e con condizioni finali più generali; condizioni necessarie di ottimo possono quindi dedursi particolarizzando opportunamente le condizioni fornite dal Teorema 5.17, tenendo anche conto delle Osservazioni 5.21 e 5.22. Si nota in proposito che l'ipotesi (6.8) implica la (5.64); infatti nel generico istante t sono soddisfatti col segno di egualanza gli n vincoli:

$$f(x^*, u^*, t) - \dot{x}^* = 0$$

e i $\beta_a(t)$ vincoli:

$$q_a(x^*, u^*, t) = 0$$

e risulta:

$$\begin{aligned} & \text{rango} \left\{ \frac{\partial \left(\begin{array}{c} f(x, u, t) - \dot{x} \\ q_a(x, u, t) \end{array} \right)}{\partial \dot{z}} \Big|_* \right\} \\ &= \text{rango} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial(f(x, u, t) - \dot{x})}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial(f(x, u, t) - \dot{x})}{\partial u} \\ \frac{\partial q_a(x, u, t)}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial q_a(x, u, t)}{\partial u} \end{pmatrix}^* \right\} \\ &= \text{rango} \left\{ \begin{pmatrix} -I & \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_* \\ 0 & \frac{\partial q_a}{\partial u} \Big|_* \end{pmatrix} \right\} = n + \beta_a(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f^*] \end{aligned}$$

Per il problema di *Lagrange* cui ci si è ricondotti, ricordando la Definizione 6.2, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \dot{x}, \dot{v}, \lambda_0, \lambda, \eta, t) &= \lambda_0 L(x, \dot{v}, t) + \lambda^T(t)[f(x, \dot{v}, t) - \dot{x}] + \eta^T(t)q(x, \dot{v}, t) \\ &= H(x, \dot{v}, \lambda_0, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x} + \eta^T q(x, \dot{v}, t) \end{aligned} \quad (6.16)$$

La condizione di continuità (5.71), considerata per le componenti \dot{x}^* di \dot{z}^* , assicura la continuità di λ^* ; in effetti la condizione necessaria (5.68), considerata per le componenti x^* di z^* , consente di affermare che $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f^*]$ con possibilità di discontinuità per λ^* solo negli istanti di discontinuità della u^* . Pertanto, in ogni sottointervallo di continuità per la u^* , la condizione necessaria (5.68), considerata per le componenti x^* di z^* , può essere derivata rispetto al tempo e fornisce la (6.9). La stessa condizione (5.68), scritta per le componenti v^* di z^* , fornisce:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{v}} \Big|^{*T} + \frac{\partial q}{\partial \dot{v}} \Big|^{*T} \eta^* = c \quad \forall t \in [t_i, t_f^*] \quad (6.17)$$

con c vettore costante di \mathbb{R}^p . D'altra parte, poiché le componenti v della funzione vettoriale z non sono sottoposte a vincoli nell'istante finale, la condizione di trasversalità, deducibile in base all'Osservazione 5.12, impone:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \Big|_{t_f^*}^* = 0^T \quad (6.18)$$

Ricordando la (6.16), dalle (6.17) e (6.18) segue la (6.10). Le condizioni (6.11) e (6.12) corrispondono evidentemente alle (5.69) e (5.70).

Per quanto riguarda le condizioni finali, tenendo conto delle Osservazioni 5.21 e 5.12, esse risultano essere:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Big|_{t_f^*}^* = \zeta^T \frac{\partial \chi}{\partial z(t_f)} \Big|_{t_f^*}^* \quad (6.19)$$

$$\left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{z} \right) \Big|_{t_f^*}^* = \zeta^T \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|_{t_f^*}^* \quad (6.20)$$

con $\zeta \in \mathbb{R}^{\sigma_f}$. La (6.19) scritta per le variabili v^* di z^* restituisce la condizione (6.10) nell'istante t_f^* ; la stessa condizione scritta per le variabili x^* di z^* fornisce invece la (6.13). La condizione (6.20), tenuto conto delle (6.10) e (6.11), si riduce alla (6.14). La continuità della funzione Hamiltoniana H negli istanti \bar{t} di discontinuità della u^* si può verificare facilmente particolarizzando la (5.72) e tenendo ancora conto delle (6.10) e (6.11). \square

Osservazione 6.4 - Come già chiarito in precedenza, i moltiplicatori λ_0^* e λ^* sono definiti dalle precedenti condizioni a meno di un fattore moltiplicativo positivo. Nel caso in cui risulti $\lambda_0^* \neq 0$ (estremale normale) si può assumere $\lambda_0^* = 1$. In questo caso la funzione vettoriale λ^* è univocamente definita e, nella terminologia dei controlli automatici, ad essa si attribuisce generalmente la denominazione di *vettore di costato*.

Osservazione 6.5 - Conviene notare che l'ipotesi (6.8) esclude la possibilità che in qualche istante una delle componenti di $q(x^*, u^*, t)$ possa essere attiva e non

dipendere dal vettore $u^*(t)$; ciò ovviamente esclude la possibilità di considerare problemi con vincoli del tipo $q(x, t) \leq 0$, sul quale caso si tornerà esplicitamente nel seguito.

Ulteriori condizioni necessarie per il problema di controllo ottimo che si sta considerando possono ottenersi sulla base dei risultati dei Teoremi 5.18 e 5.19.

Teorema 6.6 - Con riferimento al Problema 6.1 sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile che soddisfa la condizione (6.8); condizione necessaria affinché essa sia un punto di minimo locale è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$, una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f^*]$ e una funzione vettoriale di dimensione β di moltiplicatori $\eta^* \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f^*]$, tali che $\lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*$ non siano simultaneamente nulli in alcun istante di $[t_i, t_f^*]$ e tali che in tale intervallo risulti:

$$\pi_u^T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \sum_{j=1}^{\beta} \eta_j \frac{\partial^2 q_j}{\partial u^2} \right)^* \pi_u \geq 0 \quad \forall \pi_u \in \Pi_u(t) \quad (6.21)$$

dove:

$$\Pi_u(t) = \left\{ \pi_u \in \mathbb{R}^p : \frac{\partial q_a}{\partial u} \Big| \pi_u = 0 \right\} \quad (6.22)$$

Dimostrazione - Si è già osservato nella dimostrazione del precedente teorema che l'ipotesi (6.8) implica la (5.64); pertanto, indicata con $\pi_x \in \mathbb{R}^n$ e $\pi_u \in \mathbb{R}^p$ la parzializzazione del vettore $\pi \in \mathbb{R}^{n+p}$, la condizione necessaria del Teorema 5.18 si particolarizza come segue:

$$\begin{aligned} 0 \leq \pi^T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{z}^2} \Big| \pi &= \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x} \partial \dot{v}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{v} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{v}^2} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \eta^T \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_u \end{pmatrix} \\ &= \pi_u^T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} + \sum_{j=1}^{\beta} \eta_j \frac{\partial^2 q_j}{\partial u^2} \right)^* \pi_u \end{aligned}$$

che deve essere verificata $\forall \pi \in \mathbb{R}^{n+p}$ tale che:

$$\begin{pmatrix} -I & \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \\ 0 & \frac{\partial q_a}{\partial \dot{v}} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_u \end{pmatrix} = 0$$

cioè tale che:

$$\pi_x = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\pi_u}^* \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial q_a}{\partial u} \Big|_{\pi_u}^* = 0 \quad (6.24)$$

Il teorema è quindi dimostrato osservando che, $\forall \pi_u \in \mathbb{R}^p$ che soddisfa la (6.24), resta univocamente determinato un vettore $\pi_x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa la (6.23). \square

Teorema 6.7 - Con riferimento al Problema 6.1 con la scelta della norma (1.2), sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile che soddisfa la condizione (6.8); condizione necessaria affinché essa sia un punto di minimo locale (forte) è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$, una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f^*]$ e una funzione vettoriale di dimensione β di moltiplicatori $\eta^* \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f^*]$, tali che $\lambda_0^*, \lambda^*, \eta^*$ non siano simultaneamente nulli in alcun istante di $[t_i, t_f^*]$ e tali che, in tale intervallo, risulti:

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \leq H(x^*(t), b_u, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \quad \forall b_u \in U(t) \quad (6.25)$$

dove:

$$U(t) = \left\{ b_u \in \mathbb{R}^p : q(x^*(t), b_u, t) \leq 0 ; \text{rango} \left\{ \frac{\partial q_\alpha}{\partial u(t)} \Big|_{x^*(t), b_u} = \beta_\alpha(t) \right\} \right\} \quad (6.26)$$

avendo indicato con q_α il sottovettore di dimensione $\beta_\alpha(t)$ costituito dalle componenti di q attive in $(x^*(t), b_u, t)$.

Dimostrazione - Generalizzando al problema in esame, caratterizzato da vincoli di egualanza e di disegualanza, le definizioni di funzione eccesso contenute nei Teoremi 5.5 e 5.19 si ha:

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(x(t), a, b, \lambda_0, \lambda(t), \eta(t), t) \\ &= \mathcal{L}(x(t), b_x, b_u, \lambda_0, \lambda(t), \eta(t), t) - \mathcal{L}(x(t), a_x, a_u, \lambda_0, \lambda(t), \eta(t), t) \\ & - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{x}(t))} \Big|_{\substack{\dot{x}(t)=a_x \\ \dot{v}(t)=a_u}} \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_u - a_u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove b_x e b_u sono i due sottovettori del vettore b , rispettivamente di dimensioni n e p e analogamente a_x e a_u rispetto a a . Tenendo conto della (6.16) si ottiene:

$$\mathcal{E}(x(t), a, b, \lambda_0, \lambda(t), \eta(t), t)$$

$$\begin{aligned}
&= H(x(t), b_u, \lambda_0, \lambda(t), t) - H(x(t), a_u, \lambda_0, \lambda(t), t) \\
&+ \eta^T(t)[q(x(t), b_u, t) - q(x(t), a_u, t)] \\
&- \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \eta^T \frac{\partial q}{\partial u} \right)_{u=a_u} (b_u - a_u)
\end{aligned}$$

Poiché l'ipotesi (6.8) implica, come detto, la (5.64), la condizione necessaria del Teorema 5.19 diviene:

$$\begin{aligned}
&H(x^*(t), b_u, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) - H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \\
&+ \eta^{*T}(t)[q(x^*(t), b_u, t) - q(x^*(t), u^*(t), t)] \\
&- \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \eta^T(t) \frac{\partial q}{\partial u} \right)^* (b_u - u^*(t)) - \eta^{*T}(t) q(x^*(t), b_u, t) \geq 0 \\
&\forall b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_u \end{pmatrix} \in \Omega(t), \quad \forall t \in [t_i, t_f^*]
\end{aligned} \tag{6.27}$$

dove:

$$\begin{aligned}
\Omega(t) = & \left\{ \begin{pmatrix} b_x \\ b_u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p} : f(x^*(t), b_u, t) - b_x ; \quad q(x^*(t), b_u, t) \leq 0 ; \right. \\
& \left. \text{rango } \left\{ \begin{pmatrix} -I & \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x^*(t), b_u} \\ 0 & \frac{\partial q_\alpha}{\partial u} \Big|_{x^*(t), b_u} \end{pmatrix} \right\} = n + \beta_\alpha(t) \right\}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Utilizzando le condizioni necessarie (6.10) e (6.11), la (6.27) si riduce alla (6.25) e il teorema è dimostrato osservando che, per ogni vettore $\begin{pmatrix} b_x \\ b_u \end{pmatrix}$ che, secondo la (6.28) appartiene a $\Omega(t)$, il sottovettore b_u appartiene all'insieme $U(t)$ definito dalla (6.26). \square

Nel precedente Teorema 6.3 si è dimostrato che, in corrispondenza a una soluzione estremale, l'Hamiltoniano è funzione continua di t con eventuali punti di cuspide negli istanti di discontinuità del controllo u^* . È interessante studiare più in dettaglio la variazione temporale di tale funzione e stabilire un risultato di costanza valido nel caso di *problem di controllo stazionario* e cioè di problemi per i quali le funzioni L, f, q non dipendono esplicitamente da t .

Teorema 6.8 - Con riferimento al Problema 6.1, indicata con (x^*, u^*, t_f^*) una

soluzione estremale, per ogni istante di continuità di u^* risulta:

$$\frac{dH}{dt} \Big|^{*} = \frac{\partial H}{\partial t} \Big|^{*} + \eta^{*T} \frac{\partial q}{\partial t} \Big|^{*} \quad (6.29)$$

In particolare per problemi stazionari si ha:

$$H \Big|^{*} = c \quad \forall t \in [t_i, t_f^*] \quad (6.30)$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante.

Dimostrazione - È conveniente dimostrare preliminarmente che, in ogni sottointervallo di continuità per la u^* , si ha:

$$\dot{\eta}_j^* q_j \Big|^{*} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad (6.31)$$

Infatti sia \hat{t} un qualunque istante di continuità per u^* . Se $q_j \Big|_{\hat{t}}^{*} = 0$ la (6.31) sussiste; se $q_j \Big|_{\hat{t}}^{*} < 0$, essendo $q_j \Big|^{*}$ funzione continua di t in ogni sottointervallo di continuità della u^* , esiste un sottointervallo contenente \hat{t} in cui $q_j \Big|^{*} < 0$; pertanto in tale sottointervallo si ha $\eta_j^* = 0$ e quindi $\dot{\eta}_j^*(\hat{t}) = 0$, il che implica la (6.31). D'altra parte, in ogni sottointervallo di continuità per la u^* , in base alla (6.11) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\eta_j^*(t) q_j(x^*, u^*, t)) &= \dot{\eta}_j^*(t) q_j(x^*, u^*, t) \\ &+ \eta_j^*(t) \left[\frac{\partial q_j}{\partial x} \Big|^{*} \dot{x}^*(t) + \frac{\partial q_j}{\partial u} \Big|^{*} \dot{u}^*(t) + \frac{\partial q_j}{\partial t} \Big|^{*} \right] = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \end{aligned}$$

Tenendo conto della (6.31), discende che:

$$\eta_j^*(t) \left[\frac{\partial q_j}{\partial x} \Big|^{*} \dot{x}^*(t) + \frac{\partial q_j}{\partial u} \Big|^{*} \dot{u}^*(t) \right] = -\eta_j^*(t) \frac{\partial q_j}{\partial t} \Big|^{*} \quad j = 1, 2, \dots, \beta$$

Infine, ricordando le (6.9) e (6.10), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} \Big|^{*} &= \frac{\partial H}{\partial x} \Big|^{*} \dot{x}^* + \frac{\partial H}{\partial u} \Big|^{*} \dot{u}^* + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|^{*} \dot{\lambda}^* + \frac{\partial H}{\partial t} \Big|^{*} \\ &= -\eta^{*T} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{*} \dot{x}^* + \frac{\partial q}{\partial u} \Big|^{*} \dot{u}^* \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \Big|^{*} \\ &= \eta^{*T} \frac{\partial q}{\partial t} \Big|^{*} + \frac{\partial H}{\partial t} \Big|^{*} \end{aligned}$$

che è proprio la (6.29).

In particolare, per problemi stazionari, si ha che $H|^*$ è costante in ogni sottointervallo di continuità della u^* ; tenuto conto della continuità di $H|^*$ segue la (6.30). \square

Osservazione 6.9 - Un ulteriore caso che si ritiene utile considerare è quello in cui nell'indice di costo del Problema 6.1 sia presente un termine additivo che dipende dallo stato e dall'istante finale, e cioè che si abbia:

$$J(x, u, t_f) = G(x(t_f), t_f) + \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (6.32)$$

con G funzione di classe C^3 rispetto ai suoi argomenti. Infatti la presenza di un termine del tipo suddetto ha interesse nelle applicazioni del controllo ottimo quando nell'indice di costo si desideri attribuire un peso particolare al valore dello stato e dell'istante finale. Il problema considerato è evidentemente un problema di controllo ottimo del tipo di *Bolza* e può immediatamente essere ricondotto a un problema del tipo di *Lagrange*, già considerato, definendo la nuova funzione Lagrangiana:

$$\bar{L}(x, u, t) = L(x, u, t) + \frac{dG(x, t)}{dt} = L(x, u, t) + \frac{\partial G}{\partial x} f(x, u, t) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

Definita la funzione Hamiltoniana corrispondente:

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, u, \lambda_0, \bar{\lambda}, t) &= \lambda_0 \bar{L}(x, u, t) + \bar{\lambda}^T f(x, u, t) \\ &= \lambda_0 L(x, u, t) + \lambda_0 \frac{\partial G}{\partial x} f(x, u, t) + \lambda_0 \frac{\partial G}{\partial t} + \bar{\lambda}^T f(x, u, t) \end{aligned}$$

valgono evidentemente tutti i risultati precedentemente dimostrati. Tuttavia è possibile verificare che le condizioni necessarie fornite dai Teoremi 6.3, 6.6, 6.7, nonché la condizione di invarianza (6.30) nel caso di problemi stazionari, possono anche essere scritte direttamente in termini della funzione Hamiltoniana:

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda, t) = \lambda_0 L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

purché vengano opportunamente modificate le condizioni finali (6.13) e (6.14).

Allo scopo di dimostrare la precedente affermazione si ponga:

$$\lambda = \bar{\lambda} + \lambda_0 \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^T \quad (6.33)$$

da cui si deduce:

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda, t) = \bar{H}(x, u, \lambda_0, \bar{\lambda}, t) - \lambda_0 \frac{\partial G}{\partial t} \quad (6.34)$$

Per quanto riguarda l'equazione (6.9) del costato, dalla condizione:

$$\dot{\bar{\lambda}}^* = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \Big|^{*T} - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{*T} \eta^*$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^* &= \dot{\bar{\lambda}}^* + \lambda_0^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|^{*T} f(x^*, u^*, t) + \lambda_0^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Big|^{*T} \\ &= -\lambda_0^* \frac{\partial L}{\partial x} \Big|^{*T} - \lambda_0^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|^{*T} f(x^*, u^*, t) - \lambda_0^* \frac{\partial f}{\partial x} \Big|^{*T} \frac{\partial G}{\partial x} \Big|^{*T} - \lambda_0^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Big|^{*T} \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|^{*T} \bar{\lambda}^* + \lambda_0^* \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Big|^{*T} f(x^*, u^*, t) + \lambda_0^* \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Big|^{*T} - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{*T} \eta^* \\ &= -\lambda_0^* \frac{\partial L}{\partial x} \Big|^{*T} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|^{*T} \left(\lambda_0^* \frac{\partial G}{\partial x} \Big|^{*T} + \bar{\lambda}^* \right) - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{*T} \eta^* \\ &= -\lambda_0^* \frac{\partial L}{\partial x} \Big|^{*T} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|^{*T} \lambda^* - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{*T} \eta^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|^{*T} - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{*T} \eta^* \end{aligned}$$

La validità della condizione (6.10) è di verifica immediata e così quella delle (6.21) e (6.25), quando si consideri che le funzioni H e \bar{H} differiscono tra loro di un termine che non dipende da u .

La validità della condizione di costanza (6.30) può essere subito provata in base alla (6.34), tenendo presente che, nel caso di problemi di controllo stazionari, la funzione G deve assumersi indipendente da t in forma esplicita e quindi $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$.

In base alle (6.33) e (6.34) si ha invece che le condizioni finali (6.13) e (6.14) vengono modificate nella forma seguente:

$$\lambda^*(t_f^*) = -\frac{\partial \chi}{\partial x(t_f)} \Big|_{t_f^*}^{*T} \zeta + \lambda_0^* \frac{\partial G}{\partial x(t_f)} \Big|_{t_f^*}^{*T} \quad (6.35)$$

$$H \Big|_{t_f^*}^* = \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|_{t_f^*}^{*T} \zeta - \lambda_0^* \frac{\partial G}{\partial t_f} \Big|_{t_f^*}^{*T} \quad (6.36)$$

Osservazione 6.10 - Ovviamente un problema di controllo ottimo del tipo 6.1, in assenza di vincoli di diseguaglianza sulle variabili di stato e di controllo, costituisce un caso particolare rispetto allo stesso Problema 6.1 precedentemente considerato. Pertanto le condizioni necessarie fornite dai Teoremi 6.3, 6.6, 6.7, 6.8 possono facilmente essere particolarizzate, osservando che l'assenza di vincoli di diseguaglianza equivale alla presenza di vincoli di diseguaglianza identicamente soddisfatti e non attivi. Infatti supponendo che:

$$q_j(x, u, t) < 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta$$

quali che siano gli argomenti delle funzioni q_j , si ha dalla (6.11) che i moltiplicatori η_j^* sono tutti nulli. Pertanto le condizioni necessarie (6.9), (6.10), (6.21), (6.25), (6.29) assumono la seguente forma:

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|^{*T} \quad (6.37)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \Big|^{*T} \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \Big|^{*} \geq 0 \quad (6.39)$$

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \leq H(x^*(t), b_u, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \quad \forall b_u \in \mathbb{R}^p \quad (6.40)$$

$$\frac{dH}{dt} \Big|^{*} = \frac{\partial H}{\partial t} \Big|^{*} \quad (6.41)$$

mentre le condizioni necessarie (6.13), (6.14), (6.15) rimangono inalterate.

Si noti che la condizione (6.38) asserisce solo che, in corrispondenza a un minimo locale, la funzione Hamiltoniana H ha un punto di stazionarietà rispetto al vettore di controllo $u(t)$. La condizione (6.40) d'altra parte, stabilisce che, in corrispondenza a un minimo locale forte, la stessa funzione ha un minimo globale rispetto a $u(t)$.

Osservazione 6.11 - Un caso particolare del Problema 6.1 è quello in cui t_f è fissato a un valore \bar{t}_f e quindi si ha:

$$\chi(x(t_f), t_f) = \left(\begin{array}{c} \chi'(x(t_f)) \\ t_f - \bar{t}_f \end{array} \right) = 0$$

con χ' funzione vettoriale di dimensione $\sigma_f - 1 \leq n$, di classe C^1 rispetto ai suoi argomenti. Sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile che soddisfa la (6.8) e la:

$$\text{rango} \left\{ \frac{d\chi'}{dx(t_f)} \Big|^{*} \right\} = \sigma_f - 1$$

In base al Teorema 6.3 si ha che le (6.9–12) sono ancora condizioni necessarie di minimo locale, mentre la (6.13) diventa:

$$\lambda^*(t_f^*) = -\frac{d\chi'}{dx(t_f)} \Big|_{t_f^*}^{*T} \zeta'$$

con $\zeta' \in \mathbb{R}^{\sigma_f - 1}$, e la (6.14) risulta non significativa.

Se nel problema è fissato anche lo stato finale, oltre che l'istante finale, e cioè se:

$$\chi'(x(t_f)) = x(t_f) - x^f = 0$$

anche la condizione di trasversalità (6.13) diviene non significativa.

Definizione 6.12 - Anche con riferimento al problema di controllo ottimo considerato si può fornire una definizione di estremale e si può introdurre una proprietà di normalità in maniera analoga a quanto fatto per i problemi di calcolo variazionale considerati nel capitolo precedente. Con riferimento al Problema 6.1 si definisce *estremale* ogni soluzione (x^*, u^*, t_f^*) ammmissibile che soddisfa la (6.8) e che, assieme a moltiplicatori che verificano le ipotesi del Teorema 6.3, soddisfa le condizioni necessarie fornite dallo stesso teorema.

Si dice inoltre *normale* ogni estremale cui corrisponde un moltiplicatore $\lambda_0^* \neq 0$, che quindi si può assumere unitario, rendendo univocamente determinati i restanti moltiplicatori.

Esempio 6.1 - Considerato il sistema descritto dall'equazione:

$$\dot{x} = x + u \quad (6.42)$$

si supponga di voler trasferire uno stato iniziale assegnato, $x(0) = x^i \neq 0$, nell'origine, $x(t_f) = 0$, nel minimo tempo, con la condizione $|u(t)| \leq K$. Si tratta evidentemente di un semplice problema del tipo 6.1, osservando che il vincolo sul controllo può essere posto nella forma:

$$q(u) = u^2 - K^2 \leq 0 \quad (6.43)$$

ed è immediato verificare che la condizione (6.8), richiesta per poter applicare il Teorema 6.3, è sempre soddisfatta.

Volendo ricercare gli eventuali estremali normali si assume $\lambda_0 = 1$, così che la funzione Hamiltoniana risulta:

$$H(x, u, 1, \lambda) = 1 + \lambda(x + u)$$

Le condizioni necessarie di ottimo nel caso considerato, si scrivono:

$$\dot{\lambda}^* = -\lambda^* \quad (6.44)$$

$$0 = \lambda^* + 2\eta^* u^* \quad (6.45)$$

$$\eta^*(u^{*2} - K^2) = 0 \quad (6.46)$$

$$\eta^* \geq 0 \quad (6.47)$$

$$H|_{t_f^*}^* = 0 \quad (6.48)$$

Inoltre, per la stazionarietà del problema, in base al Teorema 6.8, si ha che:

$$H|^{*} = 0 \quad \forall t \in [0, t_f^*] \quad (6.49)$$

Si osserva innanzitutto che in nessun istante può verificarsi il caso $\eta^*(t) = 0$ poiché, in base alla (6.45), ciò implicherebbe $\lambda^*(t) = 0$ e quindi nello stesso

istante sarebbe $|H|^* = 1$, che contraddice la (6.49). Pertanto, dovendo essere sempre $\eta^*(t) > 0$, dalla (6.46) si ha:

$$u^*(t) = \pm K$$

Integrando la (6.42) con la relativa condizione iniziale si ricava:

$$x^*(t) = e^t x^i \pm K(e^t - 1)$$

Dalla condizione sullo stato finale si ha:

$$e^{t_f^*} x^i \pm K(e^{t_f^*} - 1) = 0$$

che implica:

$$u^*(t) = -K \operatorname{sign}\{x^i\}$$

e quindi:

$$x^*(t) = e^t x^i - K \operatorname{sign}\{x^i\}(e^t - 1)$$

Pertanto la precedente condizione finale si precisa nella:

$$e^{t_f^*} x^i - K \operatorname{sign}\{x^i\}(e^{t_f^*} - 1) = 0$$

da cui si ha:

$$e^{t_f^*} = \frac{K}{K - |x^i|}$$

che è risolubile rispetto a t_f^* purché risultino $|x^i| < K$. Si ha quindi che per $|x^i| \geq K$ il problema considerato non è risolubile, mentre per $|x^i| < K$ si ottiene:

$$t_f^* = \ln \frac{K}{K - |x^i|}$$

Inoltre dalla (6.44) si ha:

$$\lambda^*(t) = \lambda^*(0)e^{-t}$$

e imponendo la (6.49) nell'istante $t = 0$, si determina:

$$\lambda^*(0) = \frac{1}{K \operatorname{sign}\{x^i\} - x^i}$$

Infine, dalla (6.45), si deduce:

$$\eta^*(t) = \frac{e^{-t}}{2K(K - |x^i|)} > 0$$

In conclusione, se $|x^i| < K$, si ottiene una unica soluzione estremale che fornisce la soluzione ottima, se questa esiste.

Prima di concludere si osserva che:

$$\operatorname{sign} x^*(t) = \operatorname{sign} x^i \quad \forall t \in [0, t_f^*)$$

e quindi l'espressione del controllo estremale può essere posta nella forma:

$$u^*(t) = -K \operatorname{sign}\{x^*(t)\}$$

cui corrisponde la struttura di controllo a retroazione non lineare rappresentata in Fig. 6.1. Si tratta cioè di un esempio per il quale il controllo ottimo, se esiste, è sintetizzabile.

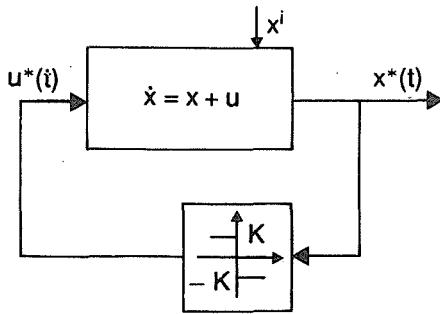


Fig. 6.1

Esempio 6.2 - Considerato il sistema non lineare:

$$\dot{x} = x + xu \quad (6.50)$$

si desidera trasferire lo stato iniziale assegnato, $x(0) = x^i$, nello stato finale assegnato, $x(1) = x^f$, con l'ipotesi che x^i e x^f abbiano lo stesso segno, rendendo minimo l'indice di costo:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

Il problema considerato costituisce un esempio di problema del tipo 6.1, senza vincoli di diseguaglianza.

La funzione Hamiltoniana (con $\lambda_0 = 1$) risulta:

$$H(x, u, 1, \lambda) = \frac{1}{2} u^2 + \lambda x + \lambda x u$$

Le condizioni necessarie del Teorema 6.3 diventano:

$$\dot{\lambda}^* = -\lambda^* - \lambda^* u^* \quad (6.51)$$

$$0 = u^* + \lambda^* x^* \quad (6.52)$$

mentre le (6.11–14) risultano non significative. Dalla (6.52) si ricava:

$$u^* = -\lambda^* x^*$$

che sostituita nelle (6.50) e (6.51), fornisce:

$$\begin{aligned}\dot{x}^* &= x^* - \lambda^* x^{*2} \\ \dot{\lambda}^* &= -\lambda^* + \lambda^{*2} x^*\end{aligned}$$

Poiché $x^*(t) \neq 0$, assumendo $\lambda^*(t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$, il precedente sistema differenziale non lineare può essere risolto osservando che:

$$\frac{\dot{x}^*}{x^*} = -\frac{\dot{\lambda}^*}{\lambda^*}$$

e cioè osservando che:

$$\ln x^*(t) = -\ln \lambda^*(t) + c$$

il che equivale alla condizione:

$$x^*(t)\lambda^*(t) = K$$

da cui si deduce anche che:

$$u^*(t) = -K$$

La (6.50), ponendo $1 - K = \alpha$, diviene:

$$\dot{x}^* = \alpha x^*$$

che, imponendo la condizione sullo stato iniziale, fornisce:

$$x^*(t) = x^i e^{\alpha t}$$

Imponendo inoltre la condizione sullo stato finale, si ottiene:

$$\alpha = \ln \frac{x^f}{x^i}$$

In conclusione si ottiene la soluzione estremale, data da:

$$\begin{aligned}u^*(t) &= \ln \frac{x^f}{x^i} - 1 \\ x^*(t) &= x^i \left(\frac{x^f}{x^i} \right)^t\end{aligned}$$

Si può verificare facilmente che in questo caso non è possibile esprimere il controllo $u^*(t)$ come funzione del solo stato corrente $x^*(t)$, indipendentemente dagli stati iniziale x^i e finale x^f ; pertanto il controllo estremale non è sintetizzabile. Si osserva che il caso $\lambda^*(t) = 0$ dà luogo a una soluzione ottima (con $u^0(t) = 0$) solo se è verificata la condizione $x^f = x^i$.

Esempio 6.3 - Consideriamo un problema di pianificazione ottima della pesca in un lago. Indicato con $x(t)$ la quantità di pesce presente nel generico istante, l'equazione che ne descrive l'evoluzione è del tipo:

$$\dot{x} = \alpha x - r \quad (6.53)$$

con condizione iniziale:

$$x(0) = x^i$$

dove α è un coefficiente positivo dato dalla differenza fra il tasso di natalità e quello di mortalità, mentre r rappresenta la quantità di pesce pescato per unità di tempo. Indicata con $u(t)$ l'intensità della attività di pesca nel generico istante, si può assumere che:

$$r(t) = \beta u^{1-\gamma}(t)x^\gamma(t) \quad (6.54)$$

dove $\beta > 0$ e $\gamma \in (0, 1)$ sono opportuni coefficienti che caratterizzano l'efficacia dei metodi di pesca; tale relazione indica che la quantità di pesce pescato per unità di tempo cresce con l'intensità dell'attività di pesca e con la quantità di pesce presente.

L'obiettivo desiderato è quello di rendere massimo il profitto totale in un intervallo di tempo $[0, T]$ fissato:

$$\bar{J}(r, u) = \int_0^T (pr(t) - cu(t))dt \quad (6.55)$$

dove p rappresenta il prezzo della quantità unitaria di pesce mentre c rappresenta il costo dell'intensità unitaria di attività di pesca. Sostituendo la (6.54) nelle (6.53) e (6.55) e cambiando di segno quest'ultima, si ha:

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^\gamma u^{1-\gamma}$$

$$x(0) = x^i$$

$$J(x, u) = \int_0^T (cu - p\beta x^\gamma u^{1-\gamma})dt$$

Per ricercare gli estremali normali del problema si considera la funzione Hamiltoniana:

$$H(x, u, 1, \lambda) = cu - p\beta x^\gamma u^{1-\gamma} + \alpha \lambda x - \beta \lambda x^\gamma u^{1-\gamma}$$

Le condizioni necessarie di ottimo date dal Teorema 6.3 diventano:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}^* &= -\alpha\lambda^* + \beta\gamma\left(\frac{u^*}{x^*}\right)^{1-\gamma}(\lambda^* + p) \\ c - (1 - \gamma)p\beta x^{*\gamma} u^{*-\gamma} - (1 - \gamma)\beta x^{*\gamma} u^{*-\gamma}\lambda^* &= 0 \\ \lambda^*(T) &= 0\end{aligned}$$

Dalla seconda di queste condizioni si ottiene:

$$\left(\frac{u^*}{x^*}\right)^\gamma = (1 - \gamma)\frac{\beta}{c}(p + \lambda^*) \quad (6.56)$$

Sostituendo tale relazione nell'equazione del costato, si ha:

$$\dot{\lambda}^* = -\alpha\lambda^* + \beta\gamma\left[(1 - \gamma)\frac{\beta}{c}(p + \lambda^*)\right]^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}(\lambda^* + p)$$

Integrando numericamente all'indietro tale equazione differenziale, con condizione finale nulla, si può ottenere l'andamento del costato. Sostituendo la soluzione trovata nella (6.56) si ottiene infine:

$$u^*(t) = \left[(1 - \gamma)\frac{\beta}{c}(p + \lambda^*(t))\right]^{1/\gamma} x^*(t) = h(t)x^*(t) \quad (6.57)$$

dove $h(t)$ è una funzione nota del tempo. La (6.57) corrisponde evidentemente a una struttura di controllo lineare non stazionaria a retroazione; si perviene cioè a un controllo estremale sintetizzabile.

6.3 CONDIZIONI DI MINIMO GLOBALE BASATE SULLA CONVESSITÀ DEL PROBLEMA

La proprietà di convessità della funzione H rispetto a x e u per ogni t consente per alcuni problemi di controllo ottimo di fornire condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale. Si considera in particolare il seguente problema.

Problema 6.13 - Considerato il sistema dinamico lineare descritto dalla equazione differenziale:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (6.58)$$

dove A e B sono funzioni di classe $C^2[t_i, t_f]$, supposti assegnati gli istanti iniziale t_i e finale t_f dell'intervallo di controllo, nonché lo stato iniziale:

$$x(t_i) = x^i \quad (6.59)$$

data la condizione finale $x(t_f) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$, dove D_f è un punto fissato x^f o coincide con tutto \mathbb{R}^n , dato il vincolo di diseguaglianza:

$$q(x, u, t) \leq 0 \quad (6.60)$$

con q funzione vettoriale di dimensione β di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti e convessa rispetto a $x(t)$ e $u(t)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$, definito l'indice di costo:

$$J(x, u) = G(x(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (6.61)$$

dove L è una funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti e convessa rispetto a $x(t)$ e $u(t)$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$ e dove G è una funzione scalare di classe C^3 rispetto ai suoi argomenti e convessa rispetto a $x(t_f)$ in \mathbb{R}^n (ovviamente se $D_f = \{x^f\}$ la presenza del termine G nell'indice di costo è inessenziale), determinare, se esistono, il controllo $u^0 \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$ e lo stato $x^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ che soddisfano il vincolo dinamico (6.58) e quello di diseguaglianza (6.60), le condizioni iniziali (6.59) e finali e che rendono minimo l'indice di costo (6.61).

□

È possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 6.14 - Con riferimento al Problema 6.13 sia (x^0, u^0) una soluzione ammissibile tale che:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial q_a}{\partial u} \Big|_0 \right\} = \beta_a(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

dove con q_a si è indicato il sottovettore di dimensione $\beta_a(t)$ costituito dalle componenti di q attive nel punto $(x^0(t), u^0(t), t)$; condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia una soluzione ottima normale è che esistano una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ e una funzione vettoriale di dimensione β di moltiplicatori $\eta^0 \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$, tali che, posto $\lambda_0 = 1$, nell'intervallo $[t_i, t_f]$ risulti:

$$\dot{\lambda}^0 = - \frac{\partial H}{\partial x} \Big|^{0T} - \frac{\partial q}{\partial x} \Big|^{0T} \eta^0 \quad (6.62)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \Big|^{0T} + \frac{\partial q}{\partial u} \Big|^{0T} \eta^0 \quad (6.63)$$

$$\eta_j^0(t) q_j(x^0, u^0, t) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta \quad (6.64)$$

$$\eta^0(t) \geq 0 \quad (6.65)$$

e, se $D_f = \mathbb{R}^n$, nell'istante finale risulti:

$$\lambda^0(t_f) = \left. \frac{dG}{dx(t_f)} \right|^{0T} \quad (6.66)$$

Dimostrazione - Poiché, tenendo anche in conto l'Osservazione 6.9, il Problema 6.13 può essere considerato un caso particolare del Problema 6.1, la necessità delle condizioni (6.62–66) segue dal Teorema 6.3 e dalla stessa Osservazione 6.9.

Per quanto riguarda la sufficienza, si osserva innanzitutto che, in base alle ipotesi fatte nella formulazione del Problema 6.13, la funzione $H(x(t), u(t), 1, \lambda^0(t), t)$ è convessa rispetto a $(x(t), u(t))$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$. Pertanto, considerata una qualunque soluzione ammissibile (x, u) , per ogni istante dell'intervalle di controllo si ha:

$$\begin{aligned} H(x, u, 1, \lambda^0, t) &\geq H(x^0, u^0, 1, \lambda^0, t) \\ &+ \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|^{0T} (x - x^0) + \left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|^{0T} (u - u^0) \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (6.62) e (6.63) risulta:

$$\begin{aligned} H(x, u, 1, \lambda^0, t) &\geq H(x^0, u^0, 1, \lambda^0, t) - \dot{\lambda}^{0T}(x - x^0) \\ &- \eta^{0T} \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|^{0T} (x - x^0) - \eta^{0T} \left. \frac{\partial q}{\partial u} \right|^{0T} (u - u^0) \end{aligned}$$

Ricordando la definizione (6.7) si ha:

$$\begin{aligned} L(x, u, t) &\geq L(x^0, u^0, t) - \lambda^{0T}[A(x - x^0) + B(u - u^0)] - \dot{\lambda}^{0T}(x - x^0) \\ &- \eta^{0T} \left(\left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|^{0T} (x - x^0) + \left. \frac{\partial q}{\partial u} \right|^{0T} (u - u^0) \right) \end{aligned}$$

Poiché le soluzioni (x, u) e (x^0, u^0) sono entrambe ammissibili, considerando la convessità di q , si deduce:

$$\begin{aligned} L(x, u, t) &\geq L(x^0, u^0, t) - \lambda^{0T}(\dot{x} - \dot{x}^0) - \dot{\lambda}^{0T}(x - x^0) \\ &- \eta^{0T}(q(x, u, t) - q(x^0, u^0, t)) \end{aligned}$$

Tenendo conto delle (6.64) e (6.65) e del fatto che $q(x, u, t) \leq 0$, per l'ammissibilità della soluzione (x, u) , si ha:

$$L(x, u, t) \geq L(x^0, u^0, t) - \frac{d}{dt}[\lambda^{0T}(x - x^0)] \quad (6.67)$$

Integrando la (6.67) sull'intervallo $[t_i, t_f]$ si ottiene:

$$\begin{aligned} J(x, u) &\geq J(x^0, u^0) + G(x(t_f)) - G(x^0(t_f)) \\ &\quad - \lambda^{0T}(t_f)[x(t_f) - x^0(t_f)] \end{aligned}$$

A questo punto si osserva che, se $D_f = \{x^f\}$ la precedente relazione diviene $J(x, u) \geq J(x^0, u^0)$ per ogni soluzione ammissibile (x, u) , il che dimostra l'asserto; se $D_f = \mathbb{R}^n$, dalla (6.66) si ha:

$$\begin{aligned} J(x, u) &\geq J(x^0, u^0) + G(x(t_f)) - G(x^0(t_f)) \\ &\quad - \frac{dG}{dx(t_f)} \Big|_0 [x(t_f) - x^0(t_f)] \end{aligned}$$

e per la convessità della funzione G si perviene nuovamente alla conclusione $J(x, u) \geq J(x^0, u^0)$ per ogni soluzione ammissibile (x, u) . \square

Esempio 6.4 - Si consideri il sistema lineare descritto dalle equazioni:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{6.68}$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_2 + Ku \tag{6.69}$$

Si desidera trasferire lo stato iniziale $x(0) = x^i$ nello stato finale fissato $x(1) = x^f$, rendendo minimo l'indice di costo:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

Osservando che, nell'ipotesi di normalità della soluzione cercata, la funzione Hamiltoniana si scrive:

$$H(x, u, 1, \lambda) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 - \alpha \lambda_2 x_2 + K \lambda_2 u$$

le condizioni necessarie e sufficienti del Teorema 6.14 si particolarizzano come segue:

$$\dot{\lambda}_1^0 = 0 \tag{6.70}$$

$$\dot{\lambda}_2^0 = -\lambda_1^0 + \alpha \lambda_2^0 \tag{6.71}$$

$$0 = u^0 + K \lambda_2^0 \tag{6.72}$$

Integrando le (6.70) e (6.71) si ha:

$$\lambda_1^0(t) = \lambda_1^0(0)$$

$$\lambda_2^0(t) = e^{\alpha t} \lambda_2^0(0) + \frac{1 - e^{\alpha t}}{\alpha} \lambda_1^0(0)$$

Dalla (6.72) si ricava:

$$u^0(t) = -K e^{\alpha t} \lambda_2^0(0) - K \frac{1 - e^{\alpha t}}{\alpha} \lambda_1^0(0) \quad (6.73)$$

Integrando la (6.69) e tenendo conto della condizione iniziale su x_2 , si ha:

$$x_2^0(t) = e^{-\alpha t} x_2^i - \frac{K^2}{2\alpha} \left((e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \lambda_2^0(0) + \frac{2 - e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{\alpha} \lambda_1^0(0) \right) \quad (6.74)$$

Integrando la (6.68) e tenendo conto della condizione iniziale su x_1 , si ottiene:

$$\begin{aligned} x_1^0(t) &= x_1^i + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} x_2^i \\ &- \frac{K^2}{2\alpha^2} \left((e^{\alpha t} + e^{-\alpha t} - 2) \lambda_2^0(0) + \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{\alpha} + 2t \right) \lambda_1^0(0) \right) \end{aligned} \quad (6.75)$$

Imponendo le condizioni sullo stato finale è possibile ricavare dalle (6.74) e (6.75) il valore iniziale del costato che, sostituito nelle espressioni (6.73) del controllo e (6.74), (6.75) dello stato, fornisce la soluzione ottima del problema.

A questo punto si osserva che qualora si cercasse di esprimere il controllo ottimo $u^0(t)$ in funzione dello stato corrente $x^0(t)$, occorrerebbe ricavare il costato iniziale $\lambda_1^0(0)$ in funzione dello stato $x^0(t)$ dalle equazioni (6.74), (6.75) e sostituire l'espressione trovata nelle (6.73); si verifica facilmente, però, che effettuando tale operazione si otterebbe una espressione del costato iniziale che oltre a dipendere dallo stato corrente risulterebbe anche dipendente dallo stato iniziale x^i . Pertanto poiché il controllo ottimo $u^0(t)$ non risulta dipendente unicamente dallo stato corrente $x^0(t)$, la soluzione trovata non è sintetizzabile mediante un sistema di controllo a catena chiusa.

6.4 PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMO CON VINCOLI SULLE SOLE VARIABILI DI STATO

In questo paragrafo verrà fatto cenno al modo di affrontare problemi di controllo ottimo nei quali oltre a vincoli del tipo (6.4) siano presenti anche vincoli di diseguaglianza che interessano le sole variabili di stato, mostrando in particolare come un tale problema possa essere ricondotto a un problema del tipo di *Lagrange* con vincoli differenziali di egualanza.

Si consideri dunque il Problema 6.1 con l'aggiunta dei vincoli sulle variabili di stato:

$$\bar{q}(x(t), t) \leq 0 \quad (6.76)$$

con \bar{q} funzione vettoriale di dimensione $\bar{\beta}$ di classe C^3 rispetto ai suoi argomenti.

Si assume che in corrispondenza ad ogni punto di minimo locale (x^*, u^*, t_f^*) sia soddisfatta la condizione di rango:

$$\text{rango } \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial q_a}{\partial u} \Big|^{*} \\ \frac{\partial \bar{q}_a}{\partial x} \Big|^{*} \frac{\partial f}{\partial u} \Big|^{*} \end{pmatrix} \right\} = \beta_a(t) + \bar{\beta}_a(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f^*] \quad (6.77)$$

dove \bar{q}_a rappresenta il sottovettore di dimensioni $\bar{\beta}_a(t)$ costituito dalle componenti di \bar{q} attive in $(x^*(t), t)$.

Si è già posta in evidenza nell'Osservazione 6.5 l'impossibilità di considerare vincoli del tipo (6.76) nel contesto del Problema 6.1, come caso particolare di vincoli del tipo (6.4). Occorre quindi in primo luogo trasformare i vincoli (6.76) in altrettanti vincoli differenziali di eguaglianza operando in maniera tale che risultino successivamente soddisfatte le condizioni di rango per il problema di *Lagrange* cui si perviene. A tale scopo, introdotte le variabili ausiliarie ϑ_j , $j = 1, 2, \dots, \bar{\beta}$, mediante le condizioni:

$$\bar{q}_j(x(t), t) + \vartheta_j^4(t) \delta_{-1}(\vartheta_j(t)) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \bar{\beta} \quad (6.78)$$

derivando rispetto a t le precedenti equazioni si perviene ai vincoli differenziali di eguaglianza:

$$\begin{aligned} \bar{g}_j(x, \dot{x}, \vartheta, \dot{\vartheta}, t) &= \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial t} \\ &+ 4\vartheta_j^3 \dot{\vartheta}_j \delta_{-1}(\vartheta_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \bar{\beta} \end{aligned} \quad (6.79)$$

con le relative condizioni iniziali:

$$\bar{q}_j(x^i, t_i) + \vartheta_j^4(t_i) \delta_{-1}(\vartheta_j(t_i)) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \bar{\beta} \quad (6.80)$$

Si noti che la presenza della quarta potenza della variabile $\vartheta_j(t)$ nella trasformazione (6.78) consente di ottenere una funzione di vincolo \bar{g}_j che è di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti come previsto nel Problema 5.1.

Effettuando ancora la posizione $u = \dot{v}$ il problema in esame è a questo punto equivalente al problema di *Lagrange* con vincoli differenziali di eguaglianza di determinare, se esistono, lo scalare $t_f^0 \in \mathbb{R}$ e la funzione vettoriale, $z^0 = (x^{0T} \ v^{0T} \ w^{0T} \ \vartheta^{0T})^T \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R})$, di dimensione $n + p + \beta + \bar{\beta}$, che rendono minimo il funzionale:

$$J(x, v, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt$$

con i vincoli differenziali:

$$f(x, \dot{v}, t) - \dot{x} = 0$$

$$q_j(x, \dot{v}, t) + \dot{w}_j^2 = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \beta$$

$$\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial t} + 4\vartheta_j^3 \dot{\vartheta}_j \delta_{-1}(\vartheta_j) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \bar{\beta}$$

e con le condizioni agli estremi:

$$x(t_i) = x^i$$

$$v(t_i) = 0$$

$$\chi(x(t_f), t_f) = 0$$

$$\bar{q}_j(x^i, t_i) + \vartheta_j^4(t_i) \delta_{-1}(\vartheta_j(t_i)) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, \bar{\beta}$$

Il problema è quindi ricondotto a un problema del tipo del Problema 5.1, sia pure con condizioni agli estremi di forma più generale. L'ipotesi (6.77) assicura che risulti soddisfatta un'ipotesi del tipo (5.1); si ha infatti che, nel caso in esame, la matrice $\left. \frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \right|^*$ assume la forma:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \dot{z}} \right|^* = \begin{bmatrix} -I & \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial q}{\partial \dot{v}} & \text{diag } \{2\dot{w}_j\} & 0 \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} & 0 & 0 & \text{diag } \{4\vartheta_j^3 \delta_{-1}(\vartheta_j)\} \end{bmatrix}^*$$

Indicando con $q_a|^*, \dot{w}_a^*, \bar{q}_a|^*, \vartheta_a^*$ e con $q_n|^*, \dot{w}_n^*, \bar{q}_n|^*, \vartheta_n^*$ i sottovettori dei vettori $q|^*, \dot{w}^*, \bar{q}|^*, \vartheta^*$ corrispondenti rispettivamente alle componenti attive e a quelle non attive dei vincoli originari nell'istante t , e tenendo conto del fatto che $\dot{w}_a^* = \vartheta_a^* = 0$ mentre $\dot{w}_{n_j}^* \neq 0, \vartheta_{n_j}^* > 0$, per il rango della precedente matrice si ha:

$$\text{rango } \left\{ \begin{bmatrix} -I & \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial q}{\partial \dot{v}} & \text{diag } \{2\dot{w}_j\} & 0 \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} & 0 & 0 & \text{diag } \{4\vartheta_j^3 \delta_{-1}(\vartheta_j)\} \end{bmatrix}^* \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{rango} \left\{ \begin{bmatrix} -I & \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial q}{\partial \dot{v}} & \text{diag } \{2\dot{w}_j\} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} & 0 & \text{diag } \{4\vartheta_j^3 \delta_{-1}(\vartheta_j)\} \end{bmatrix}^* \right\} \\
 &= \text{rango} \left\{ \begin{bmatrix} -I & \frac{\partial f}{\partial u} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \frac{\partial q_a}{\partial u} \\ \frac{\partial q_n}{\partial u} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag } \{2\dot{w}_{n,j}\} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{q}_a}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{q}_n}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag } \{4\vartheta_n^3\} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^* \right\} \\
 &= n + \beta + \bar{\beta}
 \end{aligned}$$

È quindi possibile a questo punto utilizzare i risultati precedentemente dedotti per il Problema 5.1 (facendo attenzione alle condizioni agli estremi che sono di tipo più generale).

La forma che per il particolare problema in esame assumono le diverse condizioni necessarie di ottimo è riportata in letteratura ⁽¹⁾, dove tali condizioni sono anche distinte per tratti di traiettorie nello spazio di stato su cui nessuno dei vincoli (6.76) è attivo (segmenti interni) e tratti su cui qualcuno di essi è attivo (segmenti di frontiera).

6.5 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Nei precedenti paragrafi sono state dedotte condizioni necessarie (nel caso lineare-convesso anche sufficienti) per alcune classi di problemi di controllo ottimo di rilevante interesse.

La determinazione dell'insieme delle soluzioni estremali può essere effettuata in linea di principio risolvendo tali condizioni e cioè determinando l'insieme $\{(x^*, u^*, t_f^*)\}$ che le soddisfa. In effetti tale calcolo può essere sviluppato per via analitica solo per problemi particolarmente semplici ed in questi casi, come si vedrà nei successivi capitoli, si riesce a pervenire ad espressioni in forma chiusa per le soluzioni estremali (o ottime).

⁽¹⁾ L.D. Berkovitz: "On Control Problems with Bounded State Variables". *J. Math. An. Appl.* vol. 5, pagg. 488–498, 1962.

Per problemi di controllo ottimo più complessi (tipicamente nel caso di sistemi non lineari) occorre fare ricorso a metodi di calcolo di tipo numerico. Tali metodi possono essere impiegati per risolvere le condizioni di ottimalità, che danno luogo generalmente a problemi differenziali con condizioni in due punti, ovvero per affrontare in forma diretta il problema di minimizzazione dell'indice di costo, attraverso metodi evolutivi che generano successioni minimizzanti. Anche in questo secondo caso, tuttavia, le condizioni di ottimalità conservano rilevanza sia perché possono intervenire nella costruzione della stessa successione (ad esempio per la determinazione della soluzione iniziale), sia perché possono fornire un utile criterio di arresto nel calcolo di essa.

In genere le soluzioni estremali (o ottime) cui si perviene, corrispondono a strutture di controllo a catena aperta, nel senso che il risultato del calcolo fornisce il controllo come funzione di t nell'intervallo $[t_i, t_f^*]$ e in forma dipendente dallo stato iniziale. Un tipo di soluzione più soddisfacente, invece, è quello che corrisponde a una struttura di controllo a catena chiusa in cui il controllo è espresso in funzione dello stato corrente. Tale tipo di soluzione appare evidentemente preferibile in quanto, come noto, la struttura a catena chiusa è in grado di effettuare una compensazione automatica degli scostamenti dalla traiettoria nominale dovuti a possibili disturbi e variazioni parametriche, non considerati nella formulazione del problema, ed anche perché, in tal caso, la struttura del sistema di controllo risulta indipendente dallo stato iniziale. Quando il controllo ottimo può essere espresso in funzione dello stato corrente si dice che esso è *sintetizzabile*. Il problema della sintetizzabilità del controllo ottimo non è risolto nel caso generale; tuttavia, come sarà posto in evidenza nel seguito, il controllo ottimo risulta sintetizzabile per alcune classi di problemi di particolare interesse.

Capitolo 7

Il principio del minimo

7.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo verrà considerato un problema di controllo ottimo caratterizzato dalla presenza di vincoli sulle variabili di controllo riconducibili alla forma $u(t) \in U$ dove U è un sottoinsieme di \mathbb{R}^p . Rispetto al Problema 6.1, precedentemente considerato, tale classe di problemi appare meno generale nel senso che non prevede limitazione per le variabili di stato; d'altro canto è bene osservare che non sempre è possibile o conveniente esprimere vincoli sul controllo in forma di diseguaglianze analitiche del tipo (6.4) (si pensi ad esempio al caso in cui U è costituito da un insieme discreto di punti di \mathbb{R}^p). Inoltre, come risulterà evidente dalla formulazione del problema, le ipotesi di regolarità sulle funzioni f ed L risultano meno restrittive delle corrispondenti ipotesi assunte nel Problema 6.1.

Il risultato fondamentale che consente di trattare problemi del tipo considerato è il *principio del minimo* di Pontryagin, che verrà preliminarmente dimostrato nel caso più semplice di problemi stazionari con stati iniziale e finale assegnati. Alcune possibili estensioni di tale risultato (problemI non stazionari, stato finale non fissato) verranno considerate successivamente.

Ulteriori estensioni del principio del minimo sono anche state proposte per tenere conto dei problemI di controllo più complessi, come quelli in cui l'insieme U è variabile nel tempo o in cui i vincoli interessano anche le variabili di stato; in questa sede tali estensioni non verranno però trattate.

Come verrà chiarito nel seguito, la soluzione ottima viene ancora cercata nell'ambito delle funzioni di controllo con discontinuità di prima specie e nell'ambito delle funzioni di stato con discontinuità di prima specie nella derivata prima. Tale situazione è coerente con la struttura del vincolo dinamico tra variabili di stato e di controllo e corrisponde alle esigenze che usualmente si presentano nei problemI applicativi di controllo.

Non essendo necessario, per la dimostrazione del risultato, considerare le variazioni del funzionale di costo, la norma cui si farà riferimento è del tipo (1.2) per lo spazio delle funzioni di stato e per lo spazio delle funzioni che si ottengono integrando le funzioni di controllo. Conseguentemente le condizioni necessarie cui

si perverrà sono condizioni di minimo locale (forte) per (x^*, u^*, t_f^*) rispetto alle funzioni di stato sufficientemente prossime a x^* e rispetto alle funzioni di controllo il cui integrale è sufficientemente prossimo all'integrale di u^* .

7.2 IL PRINCIPIO DEL MINIMO PER PROBLEMI DI CONTROLLO STAZIONARI CON STATO FINALE FISSATO

In questo paragrafo verrà trattato il seguente problema di controllo ottimo.

Problema 7.1 - Considerato il sistema dinamico descritto dalla equazione differenziale:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (7.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato, $u(t)$ vettore di controllo, sottoposto al vincolo:

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p \quad (7.2)$$

e con $f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^n \times U)$, $i = 1, 2, \dots, n$; supposti assegnati l'istante iniziale t_i dell'intervallo di controllo e i valori iniziale e finale dello stato:

$$x(t_i) = x^i \quad (7.3)$$

$$x(t_f) = x^f \quad (7.4)$$

definito l'indice di costo:

$$J(x, u, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(x, u) dt \quad (7.5)$$

con $L, \frac{\partial L}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^n \times U)$, $i = 1, 2, \dots, n$; determinare, se esistono, il valore $t_f^0 \in (t_i, \infty)$, il controllo $u^0 \in \bar{C}^0(\mathbb{R})$ e lo stato $x^0 \in \bar{C}^1(\mathbb{R})$, che soddisfano il vincolo dinamico (7.1), il vincolo sul controllo (7.2), le condizioni iniziale (7.3) e finale (7.4) e che rendono minimo l'indice di costo (7.5). \square

Prima di enunciare e di dimostrare il principio del minimo conviene richiamare la Definizione 6.2 di funzione Hamiltoniana, che, per il Problema 7.1 qui considerato, si particolarizza nella:

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 L(x, u) + \lambda^T(t) f(x, u) \quad (7.6)$$

in cui λ_0 è una costante scalare e λ è una funzione vettoriale a n componenti.

Teorema 7.2 (Pontryagin) - Con riferimento al Problema 7.1 sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile; condizione necessaria affinché essa sia un punto di minimo

locale (forte) è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f^*]$, mai simultaneamente nulle in alcun istante di $[t_i, t_f^*]$ e tali che in tale intervallo risulti:

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|^{*T} \quad (7.7)$$

$$H(x^*(t), \omega, \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \geq H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \quad \forall \omega \in U \quad (7.8)$$

$$H|^{*} = 0 \quad (7.9)$$

Inoltre le discontinuità di $\dot{\lambda}^*$ possono verificarsi solo nei punti \bar{t} in cui u^* ha una discontinuità. La diseguaglianza (7.8) costituisce in particolare il cosiddetto principio del minimo ⁽¹⁾.

Dimostrazione - Allo scopo di dimostrare il teorema conviene trasformare il Problema 7.1 in un problema equivalente in modo analogo a quanto già affermato nella dimostrazione del Teorema 5.2. Posto perciò:

$$x_0(t) = \int_{t_i}^t L(x, u) d\tau$$

e definita la funzione vettoriale a $n+1$ componenti $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}$, il Problema 7.1 equivale a quello di determinare $t_f^0 \in (t_i, \infty)$, $u^0 \in \bar{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R})$, $\tilde{x}^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1(\mathbb{R})$, tali che sia soddisfatto il vincolo differenziale:

$$\dot{\tilde{x}}^0 = \tilde{f}(x^0, u^0) = \begin{pmatrix} L(x^0, u^0) \\ f(x^0, u^0) \end{pmatrix}$$

il vincolo (7.2) sul controllo, le condizioni agli estremi:

$$\tilde{x}^0(t_i) = \tilde{x}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ x^i \end{pmatrix}$$

$$x^0(t_f^0) = x^f$$

e tali che $x_0^0(t_f^0)$ sia minimo.

⁽¹⁾ In molti testi il risultato in questione si trova indicato con la denominazione di “principio del massimo”: tale fatto è dovuto a una diversa scelta del segno dei moltiplicatori λ_0 e $\lambda(t)$ con conseguente inversione di segno nella definizione dell’Hamiltoniano H e inversione di verso della diseguaglianza che costituisce il risultato stesso.

Per dimostrare il principio del minimo verrà inoltre introdotta una classe di perturbazioni del controllo e dell'istante finale e verranno caratterizzate le corrispondenti perturbazioni sul vettore $\tilde{x}(t_f)$.

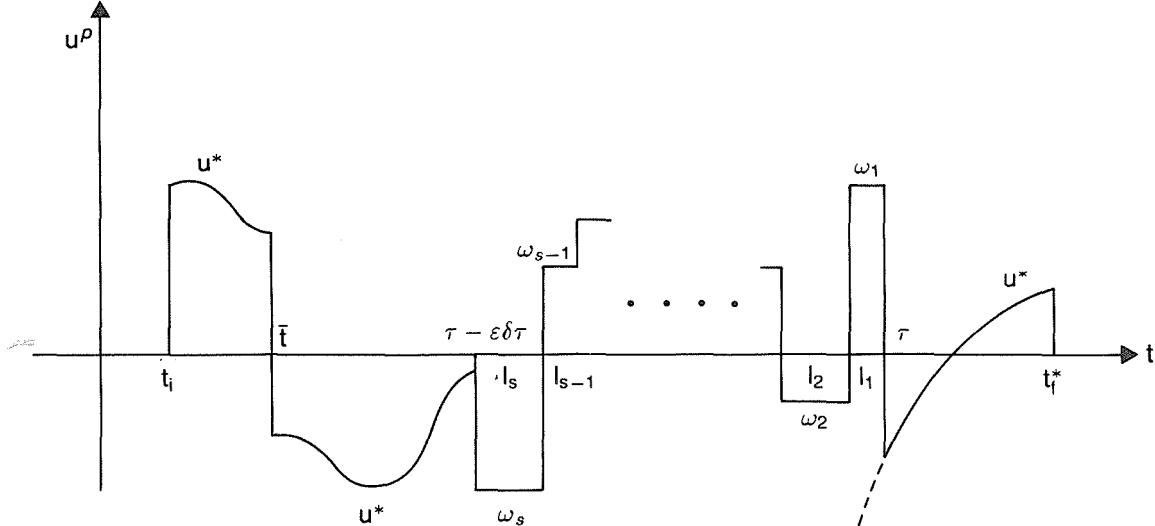


Fig. 7.1

In particolare si consideri il controllo (ammissibile) u^p definito come segue e rappresentato in Fig. 7.1 nel caso scalare. Sia $\tau \in (t_i, t_f]$ un generico istante di continuità per u^* ; siano $\delta\tau_j$, $j = 1, 2, \dots, s$, numeri arbitrari non negativi e siano $\omega_j \in U$, $j = 1, 2, \dots, s$, valori ammissibili non necessariamente distinti del controllo. Posto:

$$\delta\tau = \sum_{j=1}^s \delta\tau_j$$

sia ε un numero positivo sufficientemente piccolo, tale che $\tau - \varepsilon\delta\tau > t_i$. Considerato l'insieme di sottointervalli contigui:

$$\begin{aligned} I_1 &= [\tau - \varepsilon\delta\tau_1, \tau) \\ I_2 &= [\tau - \varepsilon(\delta\tau_1 + \delta\tau_2), \tau - \varepsilon\delta\tau_1) \\ &\dots \\ I_s &= \left[\tau - \varepsilon\delta\tau, \tau - \varepsilon \sum_{j=1}^{s-1} \delta\tau_j \right) \end{aligned}$$

sia così definito il controllo perturbato:

$$u^p(t) \begin{cases} \omega_j & \forall t \in I_j, \quad j = 1, 2, \dots, s \\ u^*(t) & \forall t \notin [\tau - \varepsilon\delta\tau, \tau] \end{cases} \quad (7.10)$$

Si osservi che non è richiesto che le quantità $\delta\tau_j$ e $||\omega_j - u^*(t)||$, per $t \in I_j$, siano piccole.

Indicando con \tilde{x}^p la traiettoria dello stato esteso che corrisponde al controllo u^p e alla condizione iniziale:

$$\tilde{x}^p(t_i) = \tilde{x}^i$$

risulta evidentemente:

$$\tilde{x}^p(\tau - \varepsilon\delta\tau) = \tilde{x}^*(\tau - \varepsilon\delta\tau)$$

Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x}(\tau) &= \tilde{x}^p(\tau) - \tilde{x}^*(\tau) = \int_{\tau-\varepsilon\delta\tau}^{\tau} [\tilde{f}(x^p(t), u^p(t)) - \tilde{f}(x^*(t), u^*(t))]dt \\ &= \sum_{j=1}^s \int_{I_j} [\tilde{f}(x^p(t), \omega_j) - \tilde{f}(x^*(t), u^*(t))]dt\end{aligned}\quad (7.11)$$

Poiché per ipotesi u^* è continua in τ , si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^*(t) = u^*(\tau) \quad \forall t \in [\tau - \varepsilon\delta\tau, \tau]$$

Inoltre, poiché gli effetti della perturbazione sullo stato tendono a zero quando ε tende a zero, in quanto l'evoluzione dello stato dipende essenzialmente dall'integrale di una funzione del controllo, considerando anche la continuità di x^* , si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^p(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^*(t) = x^*(\tau) \quad \forall t \in [\tau - \varepsilon\delta\tau, \tau]$$

Per la continuità di \tilde{f} rispetto ai suoi argomenti segue che:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x^p(t), \omega_j) &= \tilde{f}(x^*(\tau), \omega_j) + \varphi^{(j)}(t) \quad \forall t \in I_j, j = 1, 2, \dots, s \\ \tilde{f}(x^*(t), u^*(t)) &= \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau)) + \psi(t) \quad \forall t \in [\tau - \varepsilon\delta\tau, \tau]\end{aligned}$$

dove $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi^{(j)}(t) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(t) = 0$. Sostituendo tali espressioni nella (7.11) si ha:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{x}(\tau) &= \sum_{j=1}^s \int_{I_j} [\tilde{f}(x^*(\tau), \omega_j) - \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau))]dt + \sum_{j=1}^s \int_{I_j} (\varphi^{(j)}(t) - \psi(t))dt \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^s [\tilde{f}(x^*(\tau), \omega_j) - \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau))] \delta\tau_j + \sum_{j=1}^s \int_{I_j} (\varphi^{(j)}(t) - \psi(t))dt\end{aligned}$$

Si osserva a questo punto che:

$$\int_{I_j} (\varphi_k^{(j)}(t) - \psi_k(t))dt \leq \sup_{t \in I_j} |\varphi_k^{(j)}(t) - \psi_k(t)| \varepsilon \delta\tau_j$$

$$k = 1, 2, \dots, (n+1); j = 1, 2, \dots, s$$

e poiché $\sup_{t \in I_j} |\varphi_k^{(j)}(t) - \psi_k(t)|$ tende a zero al tendere a zero di ε , si ha che il

termine $\sum_{j=1}^s \int_{I_j} (\varphi^{(j)}(t) - \psi(t)) dt$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto ad ε .

Pertanto si può scrivere:

$$\delta\tilde{x}(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta\tilde{x}(\tau)}{\varepsilon} = \sum_{j=1}^s [\tilde{f}(x^*(\tau), \omega_j) - \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau))] \delta\tau_j \quad (7.12)$$

Il vettore $\delta\tilde{x}(\tau)$ costituisce la variazione prima del vettore \tilde{x}^* nell'istante τ , dovuta alla perturbazione introdotta nel controllo, per ε che tende a zero. Interessa a questo punto determinare come la perturbazione $\Delta\tilde{x}(\tau)$ si propaghi fino all'istante t_f^* . A questo proposito osserviamo che, per $t \in [\tau, t_f^*]$, si ha:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}^p(t) &= \tilde{f}(x^p(t), u^*(t)) \\ \dot{\tilde{x}}^*(t) &= \tilde{f}(x^*(t), u^*(t))\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}\frac{d(\Delta\tilde{x}(t))}{dt} &= \tilde{f}(x^p(t), u^*(t)) - \tilde{f}(x^*(t), u^*(t)) \\ &= \frac{\partial \tilde{f}(x(t), u(t))}{\partial \tilde{x}(t)} \Big|_* \Delta\tilde{x}(t) + \gamma(t)\end{aligned}$$

dove $\gamma(t)$ dipende dai termini di ordine superiore in $\Delta\tilde{x}(t)$ e pertanto è infinitesimo di ordine superiore rispetto ad ε . Si ha quindi:

$$\frac{d(\delta\tilde{x}(t))}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d(\Delta\tilde{x}(t))}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}(x(t), u(t))}{\partial \tilde{x}(t)} \Big|_* \delta\tilde{x}(t) \quad \forall t \geq \tau \quad (7.13)$$

che costituisce una equazione differenziale lineare omogenea in $\delta\tilde{x}(t)$, con condizione iniziale nell'istante τ data dalla (7.12). Come noto, per la soluzione di tale equazione nell'istante finale si ha:

$$\delta\tilde{x}(t_f^*) = \Phi(t_f^*, \tau) \delta\tilde{x}(\tau) \quad (7.14)$$

dove la matrice di transizione $\Phi(t, \tau)$ è soluzione dell'equazione differenziale matriciale:

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{f}(x(t), u(t))}{\partial \tilde{x}(t)} \Big|_* \Phi(t, \tau)$$

con condizione iniziale:

$$\Phi(\tau, \tau) = I$$

Pertanto, ricordando la (7.12), si ha:

$$\delta \tilde{x}(t_f^*) = \Phi(t_f^*, \tau) \sum_{j=1}^s \left[\tilde{f}(x^*(\tau), \omega_j) - \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau)) \right] \delta \tau_j \quad (7.15)$$

Finora abbiamo considerato una singola perturbazione del tipo (7.10) nel controllo, corrispondente al generico istante τ , e abbiamo determinato la conseguente variazione prima (7.15) dello stato esteso nell'istante t_f^* . Generalizziamo ora questo risultato considerando un numero finito di perturbazioni del controllo corrispondenti agli istanti distinti τ_l , $l = 1, 2, \dots, r$, tutti supposti di continuità per u^* , ciascuna di durata:

$$\varepsilon \delta \tau_l = \varepsilon \sum_{j=1}^{s_l} \delta \tau_{lj} \quad l = 1, 2, \dots, r$$

Si suppone che il parametro ε , eguale per tutte le perturbazioni, sia abbastanza piccolo perché gli intervalli $[\tau_l - \varepsilon \delta \tau_l, \tau_l]$ siano tra loro disgiunti al variare di l . Queste perturbazioni sono tra loro indipendenti e, per la linearità della (7.13), si ha che il loro effetto risultante nell'istante t_f^* è caratterizzato da una variazione prima:

$$\delta \tilde{x}(t_f^*) = \sum_{l=1}^r \tilde{x}^{(l)}(t_f^*)$$

e tenuto conto della (7.15), si ha:

$$\delta \tilde{x}(t_f^*) = \sum_{l=1}^r \Phi(t_f^*, \tau_l) \sum_{j=1}^{s_l} [\tilde{f}(x^*(\tau_l), \omega_{lj}) - \tilde{f}(x^*(\tau_l), u^*(\tau_l))] \delta \tau_{lj} \quad (7.16)$$

Oltre all'effetto della perturbazione nel controllo fin qui considerata occorre esaminare l'effetto di una possibile perturbazione $\varepsilon \delta t_f$ sull'istante finale, in cui ε è lo stesso parametro utilizzato per la perturbazione del controllo e δt_f è un numero arbitrario (positivo o negativo). Si noti che una perturbazione sull'istante finale comporta necessariamente una perturbazione del controllo u^* per quanto riguarda la sua durata. Si ha evidentemente:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}(t_f^*) &= \tilde{x}^*(t_f^* + \varepsilon \delta t_f) - \tilde{x}^*(t_f^*) \\ &= \dot{\tilde{x}}^*(t_f^*) \varepsilon \delta t_f + \eta = \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) \varepsilon \delta t_f + \eta \end{aligned}$$

dove η è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad ε . Per la corrispondente variazione prima si ha perciò:

$$\delta \tilde{x}(t_f^*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{x}(t_f^*)}{\varepsilon} = \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) \delta t_f \quad (7.17)$$

In definitiva l'effetto combinato di perturbazioni nel controllo e nell'istante finale, tenuto conto delle (7.16) e (7.17), è dato da:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{x}(t_f^*) &= \sum_{l=1}^r \Phi(t_f^*, \tau_l) \sum_{j=1}^{s_l} [\tilde{f}(x^*(\tau_l), \omega_{lj}) - \tilde{f}(x^*(\tau_l), u^*(\tau_l))] \delta\tau_{lj} \\ &\quad + \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) \delta t_f \end{aligned} \quad (7.18)$$

Una perturbazione combinata del tipo considerato è evidentemente definita dal numero r di istanti τ_l , dagli istanti stessi, dai numeri s_1, s_2, \dots, s_r dei sottointervalli $\delta\tau_{lj}$ associati a ciascun'istante τ_l , dalle durate corrispondenti $\delta\tau_{lj}$, dai valori ω_{lj} del controllo nei sottointervalli di perturbazione e dalla variazione δt_f dell'istante finale. Si indicherà nel seguito con (u^P, t_f^P) il controllo e l'istante finale ammissibili corrispondenti a una perturbazione combinata del tipo descritto e con \tilde{x}^P il corrispondente stato esteso; si noti che la soluzione perturbata potrebbe non essere ammissibile in quanto potrebbe essere $x^P(t_f^P) \neq x^f$.

Si vuole ora mostrare che al variare delle perturbazioni combinate considerate (al variare cioè in tutti i modi possibili dell'insieme dei parametri che le definiscono) l'insieme C dei corrispondenti vettori $\delta\tilde{x}(t_f^*)$ dati dalla (7.18) costituisce in \mathbb{R}^{n+1} un cono convesso. A tale scopo osserviamo preliminarmente che se uno dei parametri $\delta\tau_{lj}$ si annulla, possiamo eliminare il corrispondente sottointervallo nella definizione del controllo perturbato assieme al corrispondente valore ω_{lj} ; inversamente l'aggiunta di un sottointervallo $\delta\tau_{lj}$ di ampiezza nulla assieme al corrispondente valore del controllo ω_{lj} in un controllo perturbato non altera il controllo stesso. Con tale convenzione, considerate due qualunque perturbazioni combinate è sempre possibile supporre che esse siano caratterizzate dagli stessi valori dei parametri $r, \{\tau_l\}, \{\omega_{lj}\}$ ma che differiscano per i valori dei restanti parametri che indicheremo rispettivamente con $\{\delta\tau'_{lj}\}, \delta t'_f$ e $\{\delta\tau''_{lj}\}, \delta t''_f$. Per le corrispondenti variazioni prime di $\tilde{x}(t_f^*)$ si avrà perciò rispettivamente:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{x}'(t_f^*) &= \sum_{l=1}^r \Phi(t_f^*, \tau_l) \sum_{j=1}^{s_l} [\tilde{f}(x^*(\tau_l), \omega_{lj}) - \tilde{f}(x^*(\tau_l), u^*(\tau_l))] \delta\tau'_{lj} \\ &\quad + \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) \delta t'_f \\ \delta\tilde{x}''(t_f^*) &= \sum_{l=1}^r \Phi(t_f^*, \tau_l) \sum_{j=1}^{s_l} [\tilde{f}(x^*(\tau_l), \omega_{lj}) - \tilde{f}(x^*(\tau_l), u^*(\tau_l))] \delta\tau''_{lj} \\ &\quad + \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) \delta t''_f \end{aligned}$$

Ovviamente per definizione $\delta\tilde{x}'(t_f^*)$ e $\delta\tilde{x}''(t_f^*)$ costituiscono due vettori arbitrari di C . Siano a questo punto $\alpha' \geq 0, \alpha'' \geq 0$ due numeri arbitrari; posto:

$$\alpha' \delta \tau'_{lj} + \alpha'' \delta \tau''_{lj} = \delta \tau_{lj} \quad j = 1, 2, \dots, s_l ; \quad l = 1, 2, \dots, r$$

$$\alpha' \delta t'_f + \alpha'' \delta t''_f = \delta t_f$$

si ha:

$$\begin{aligned} & \alpha' \delta \tilde{x}'(t_f^*) + \alpha'' \delta \tilde{x}''(t_f^*) \\ &= \sum_{l=1}^r \Phi(t_f^*, \tau_l) \sum_{j=1}^{s_l} [\tilde{f}(x^*(\tau_l), \omega_{lj}) - \tilde{f}(x^*(\tau_l), u^*(\tau_l))] \delta \tau_{lj} + \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) \delta t_f \end{aligned}$$

Segue che esiste una perturbazione combinata che produce una variazione prima terminale proprio pari a $\alpha' \delta \tilde{x}'(t_f^*) + \alpha'' \delta \tilde{x}''(t_f^*)$ e pertanto tale vettore sta in C . Ciò basta a dimostrare che C è un cono convesso con vertice nell'origine di \mathbb{R}^{n+1} , che è rappresentato in Fig. 7.2 per il caso $n = 2$.

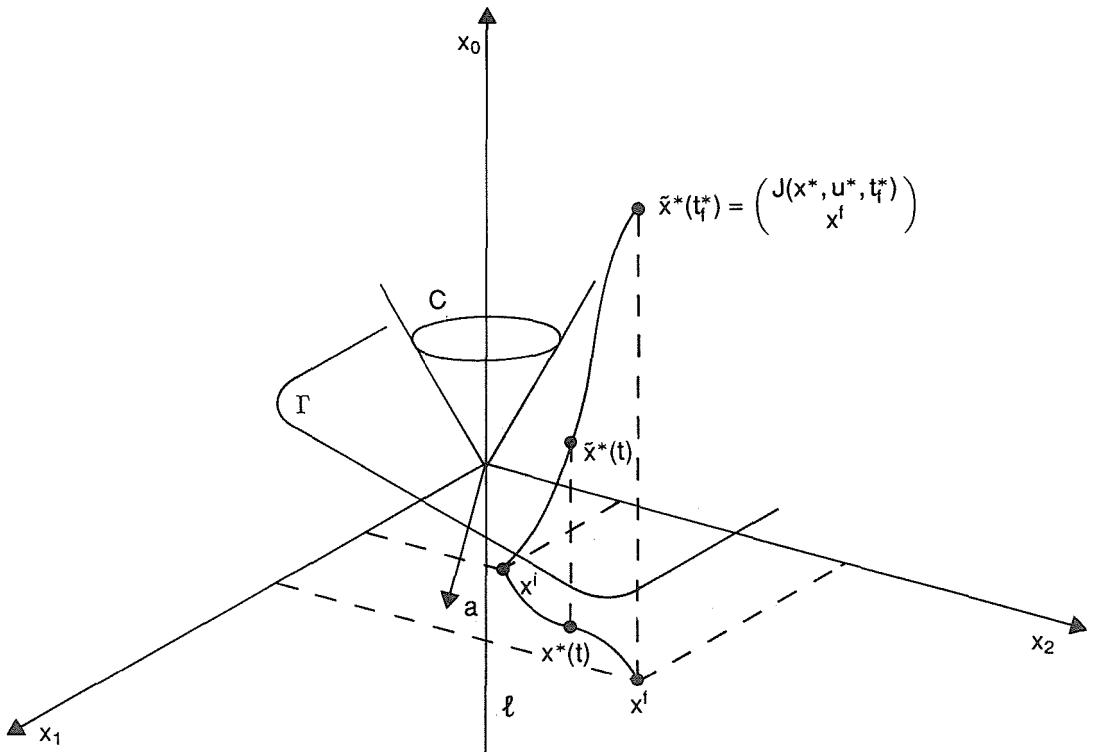


Fig. 7.2

Si può ora dimostrare che la semiretta ℓ , uscente dall'origine e orientata in verso opposto all'asse x_0 , non appartiene all'interno $\overset{\circ}{C}$ del cono C . Se infatti per assurdo ciò accadesse, risulterebbe in particolare che:

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \overset{\circ}{C}$$

Esisterebbe quindi un intorno $S(\tilde{\mu}, \varepsilon) \subset C$ tale che, considerato un qualunque $y \in S(\tilde{\mu}, \varepsilon)$, risulterebbe:

$$\|y - \tilde{\mu}\| < \varepsilon$$

e quindi

$$\varepsilon y - \varepsilon \tilde{\mu} = o'(\varepsilon) \quad (7.19)$$

dove $o'(\varepsilon)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a ε . Poiché $y \in C$, esistono un controllo u^P e un istante finale t_f^P perturbati ammissibili, tali che lo stato esteso corrispondente $\tilde{x}^P(t_f^P)$ ammette y come variazione prima:

$$\tilde{x}^P(t_f^P) - \tilde{x}^*(t_f^*) = \varepsilon y + o''(\varepsilon) \quad (7.20)$$

dove $o''(\varepsilon)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a ε . Dalle (7.19) e (7.20) si ha:

$$\tilde{x}^P(t_f^P) = \tilde{x}^*(t_f^*) + \varepsilon \tilde{\mu} + o(\varepsilon)$$

La precedente relazione corrisponde alle:

$$\begin{aligned} J(x^P, u^P, t_f^P) &= J(x^*, u^*, t_f^*) - \varepsilon + o_0(\varepsilon) \\ x^P(t_f^P) &= x^*(t_f^*) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Se si prescinde dagli infinitesimi di ordine superiore rispetto a ε , $o_0(\varepsilon)$ e $o(\varepsilon)$, si perviene a un assurdo in quanto la soluzione (x^P, u^P, t_f^P) sarebbe ammissibile e darebbe luogo a un costo minore di quello della soluzione ottima (x^*, u^*, t_f^*) . È stato dimostrato ⁽¹⁾ in maniera rigorosa che è possibile prescindere dai suddetti infinitesimi $o_0(\varepsilon)$ e $o(\varepsilon)$.

Poiché ℓ è un insieme convesso che ha intersezione vuota con il cono convesso e aperto $\overset{\circ}{C}$, si può affermare ⁽²⁾ che esiste un iperpiano Γ che separa C da ℓ e cioè un iperpiano in \mathbb{R}^{n+1} passante per l'origine (vertice dei coni C ed ℓ) che lascia il cono C in uno dei due semispazi chiusi generati e il cono ℓ nell'altro. Si osservi che in generale l'iperpiano di separazione non è unico.

⁽¹⁾ Si veda [20] e in particolare i lemmi 3 e 4 a pag. 94–99.

⁽²⁾ Si veda ad esempio S. Rolewicz: *Functional Analysis and Control Theory*, D. Reidel Pub. C., 1987 (cfr. in particolare il teorema 2.59 a pag. 97). In effetti il risultato citato si riferisce più propriamente al caso in cui $\overset{\circ}{C}$ è non vuoto; qualora non si assuma tale ipotesi restrittiva, la dimostrazione dell'esistenza dell'iperpiano separatore Γ è più complessa e per essa si rinvia al riferimento [20].

Sia a un vettore, applicato nell'origine di \mathbb{R}^{n+1} , normale a Γ e orientato verso il semispazio cui non appartiene il cono C . Evidentemente per la prima componente di a si ha $a_0 \leq 0$ per costruzione. Inoltre, sempre per costruzione, si ha:

$$a^T \delta \tilde{x}(t_f^*) \leq 0 \quad \forall \delta \tilde{x}(t_f^*) \in C \quad (7.21)$$

In Fig. 7.2 è rappresentata la situazione descritta, per il caso $n = 2$.

Dalla (7.21) è possibile dimostrare facilmente il principio del minimo. Considerato infatti un generico controllo perturbato del tipo (7.10) con $s = 1$, la corrispondente variazione prima $\delta \tilde{x}(t_f^*)$ nell'istante finale è espressa dalla (7.15) (per $s = 1$) e soddisfa la (7.21) in quanto $\delta \tilde{x}(t_f^*) \in C$:

$$a^T \Phi(t_f^*, \tau) [\tilde{f}(x^*(\tau), \omega) - \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau))] \delta \tau \leq 0 \quad \forall \omega \in U$$

Poiché $\delta \tau \geq 0$, la precedente diseguaglianza implica:

$$a^T \Phi(t_f^*, \tau) \tilde{f}(x^*(\tau), \omega) \leq a^T \Phi(t_f^*, \tau) \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau)) \quad \forall \omega \in U \quad (7.22)$$

Si consideri a questo punto la funzione vettoriale $\tilde{\lambda}^*$ a $n + 1$ componenti, soluzione dell'equazione differenziale:

$$\dot{\tilde{\lambda}}^* = - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \Big|^{*T} \tilde{\lambda}^* \quad (7.23)$$

con la condizione finale $\tilde{\lambda}^*(t_f^*) = -a \neq 0$. Si osservi che, data l'arbitrarietà della lunghezza di a , quest'ultima condizione non definisce in effetti il valore di $\tilde{\lambda}^*(t_f^*)$, ma implica che $\tilde{\lambda}^*(t_f^*) \neq 0$ e che $\lambda_0^*(t_f^*) = -a_0 \geq 0$. Tenendo conto della definizione di \tilde{f} la (7.23) equivale alle:

$$\dot{\lambda}_0^* = - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_0} \Big|^{*T} \tilde{\lambda}^* = 0 \quad (7.24)$$

$$\dot{\lambda}^* = - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \Big|^{*T} \tilde{\lambda}^* = - \frac{\partial L}{\partial x} \Big|^{*T} \lambda_0^* - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|^{*T} \lambda^* \quad (7.25)$$

Dalla (7.24) si deduce:

$$\lambda_0^* = -a_0 \geq 0$$

e dalla (7.25), ricordando la definizione (7.6), resta dimostrato che $\lambda^* \in \bar{C}^1[t_i, t_f^*]$, con possibili discontinuità per $\dot{\lambda}^*$ negli istanti in cui u^* è discontinua, e soddisfa la (7.7). Inoltre $\tilde{\lambda}^*$ non può mai annullarsi in $[t_i, t_f^*]$, essendo soluzione del sistema lineare (7.23) con condizione finale $\tilde{\lambda}^*(t_f^*) \neq 0$.

Si osservi a questo punto che il sistema (7.23) costituisce il sistema aggiunto del sistema (7.13) e questo implica che la matrice di transizione del sistema (7.23) è l'inversa trasposta della matrice di transizione del sistema (7.13). Si ha pertanto:

$$a = -\tilde{\lambda}^*(t_f^*) = -[\Phi(t_f^*, \tau)]^{-T} \tilde{\lambda}^*(\tau)$$

Sostituendo la precedente relazione nella (7.22) si ottiene:

$$\tilde{\lambda}^{*T}(\tau) \tilde{f}(x^*(\tau), \omega) \geq \tilde{\lambda}^*(\tau) \tilde{f}(x^*(\tau), u^*(\tau)) \quad \forall \omega \in U$$

Tenendo conto della definizione di \tilde{f} e della (7.6), quest'ultima relazione equivale alla (7.8) scritta per il generico istante τ di continuità per la u^* . Per continuità si ha che la (7.8) sussiste anche negli istanti di discontinuità della u^* .

Allo scopo di dimostrare la (7.9) conviene verificare preliminarmente che $H|^*$ è funzione continua di t in $[t_i, t_f^*]$. Sia t un qualunque istante di (t_i, t_f^*) e Δ un incremento tale che $t + \Delta \in [t_i, t_f^*]$. Per la (7.8) si ha:

$$\begin{aligned} H(x^*(t), u^*(t + \Delta), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) &\geq H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \\ H(x^*(t + \Delta), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t + \Delta)) &\geq H(x^*(t + \Delta), u^*(t + \Delta), \lambda_0^*, \lambda^*(t + \Delta)) \end{aligned}$$

Ponendo $u^*(t^+) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} u^*(t + \Delta)$ e $u^*(t^-) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^-} u^*(t + \Delta)$, considerando i limiti per Δ che tende a zero da destra e da sinistra, ricordando la continuità di x^* e λ^* , dalle precedenti relazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} H(x^*(t), u^*(t^+), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) &\geq H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \geq H(x^*(t), u^*(t^+), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \\ H(x^*(t), u^*(t^-), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) &\geq H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \geq H(x^*(t), u^*(t^-), \lambda_0^*, \lambda^*(t)) \end{aligned}$$

Le precedenti relazioni implicano la continuità di $H|^*$ in (t_i, t_f^*) . Poiché inoltre la prima delle due sussiste anche per $t = t_i$ mentre la seconda sussiste anche per $t = t_f^*$, si conclude che $H|^*$ è continua in $[t_i, t_f^*]$.

A questo punto, supponendo che t_1 e t_2 siano due istanti appartenenti a un sottointervallo di continuità per la u^* , con $t_2 > t_1$, sempre utilizzando la (7.8) si può scrivere:

$$\begin{aligned} H|_{t_2}^* - H|_{t_1}^* &\leq H(x^*(t_2), u^*(t_1), \lambda_0^*, \lambda^*(t_2)) - H|_{t_1}^* \\ H|_{t_2}^* - H|_{t_1}^* &\geq H|_{t_2}^* - H(x^*(t_1), u^*(t_2), \lambda_0^*, \lambda^*(t_1)) \end{aligned}$$

Dividendo le due relazioni per l'incremento $t_2 - t_1$ e passando al limite per $t_2 \rightarrow t_1$ si ottiene:

$$\frac{dH}{dt} \Big|_{t_1}^* \leq \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{t_1}^* \dot{x}^*(t_1) + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{t_1}^* \dot{\lambda}^*(t_1)$$

$$\frac{dH}{dt} \Big|_{t_1}^* \geq \frac{\partial H}{\partial x} \Big|_{t_1}^* \dot{x}^*(t_1) + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|_{t_1}^* \dot{\lambda}^*(t_1)$$

Tenendo presente la (7.7) e il fatto che

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} \Big|^{*} = f^T(x^*, u^*) = \dot{x}^{*T}$$

si ha:

$$\frac{dH}{dt} \Big|_{t_1}^{*} = 0$$

Ne segue la costanza di $H|^{*}$ in ogni sottointervallo di continuità della u^* e, tenuto conto del precedente risultato sulla continuità di $H|^{*}$, la sua costanza in tutto $[t_i, t_f^*]$. Infine, considerando una variazione δt_f nell'istante finale t_f^* , dalla (7.21) ricordando la (7.17), si ha:

$$a^T \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) \delta t_f \leq 0$$

Poiché la precedente diseguaglianza deve sussistere per δt_f sia positivi che negativi, ricordando la condizione finale $\tilde{\lambda}^*(t_f^*) = -a$, si ottiene:

$$\tilde{\lambda}^{*T}(t_f^*) \tilde{f}(x^*(t_f^*), u^*(t_f^*)) = 0$$

Questa condizione, tenuto conto della definizione di \tilde{f} , equivale alla $H|_{t_f^*}^{*} = 0$ e quindi dimostra la (7.9). \square

Definizione 7.3 - Si definisce *estremale* per il Problema 7.1, ogni soluzione ammissibile che soddisfa le condizioni necessarie del Teorema 7.2.

Come già fatto nell'ambito del Capitolo 5 si adotterà la denominazione di *estremale normale* per ogni estremale cui corrisponde un moltiplicatore $\lambda_0^* > 0$ e in tal caso, senza perdita di generalità, si assumerà direttamente $\lambda_0^* = 1$ (infatti è evidente dalla dimostrazione del Teorema 7.2 che i moltiplicatori λ_0^* e λ^* sono definiti a meno di una costante moltiplicativa positiva). \square

Osservazione 7.4 - Nel caso in cui il valore di t_f nel Problema 7.1 sia fissato (problema stazionario con intervallo di controllo assegnato) la condizione (7.9) va sostituita dalla

$$H|^{*} = k \quad \forall t \in [t_i, t_f] \tag{7.26}$$

con $k \in \mathbb{R}$, costante. In effetti continua ovviamente a sussistere il risultato relativo alla costanza di $H|^{*}$, ottenuto nel corso della dimostrazione del Teorema 7.2; non è invece più possibile affermare che $H|_{t_f}^{*} = 0$, in quanto $\delta t_f = 0$.

7.3 ESTENSIONI DEL PRINCIPIO DEL MINIMO

I risultati del precedente paragrafo possono essere estesi al caso di problemi di controllo ottimo più generali del Problema 7.1 ivi considerato. Una prima generalizzazione di interesse consiste nel sostituire alla condizione (7.4) di stato

finale fissato, una condizione di appartenenza di $x(t_f)$ ad un insieme assegnato $S^f \subset \mathbb{R}^n$.

In particolare verrà considerato il seguente problema.

Problema 7.5 - Si consideri il Problema 7.1 con la sostituzione della condizione finale (7.4), con la condizione $x(t_f) \in S^f \subset \mathbb{R}^n$, essendo S^f definito dalla:

$$\chi(x(t_f)) = 0 \quad (7.27)$$

dove χ è una funzione vettoriale di dimensione $\sigma_f \leq n$ e di classe C^1 rispetto ai suoi argomenti. \square

Condizioni necessarie affinché una soluzione sia ottima per il precedente problema sono fornite dal seguente teorema.

Teorema 7.6 (Pontryagin) - Con riferimento al Problema 7.5 sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile tale che:

$$\text{rango } \left\{ \frac{d\chi}{dx(t_f)} \Big|^{*} \right\} = \sigma_f \quad (7.28)$$

Condizione necessaria affinché essa sia un punto di minimo locale (forte) è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^* \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f^*]$, mai simultaneamente nulle in alcun istante di $[t_i, t_f^*]$ e tali che in tale intervallo risultino verificate le (7.7), (7.8), (7.9). Inoltre le discontinuità di λ^* possono verificarsi solo nei punti \bar{t} in cui u^* ha una discontinuità. Infine deve esistere un vettore $\zeta \in \mathbb{R}^{\sigma_f}$ tale che sia soddisfatta la condizione di trasversalità:

$$\lambda^*(t_f^*) = \frac{d\chi}{dx(t_f)} \Big|^{*T} \zeta \quad (7.29)$$

Dimostrazione - Tutte le condizioni necessarie del teorema ad eccezione della (7.29) risultano dimostrate in base al precedente Teorema 7.2 ove si consideri il Problema 7.1 con condizione finale $x(t_f) = x^*(t_f^*)$. Allo scopo di dimostrare la necessità della (7.29) si consideri il cono $K_{x^*(t_f^*), S^f}$ costituito dalle direzioni h^f tangentи a S^f in $x^*(t_f^*)$. Poiché è soddisfatta la condizione di rango (7.28), ricordando l'Esempio 1.34, si può affermare che esso è costituito da tutte e sole le direzioni $h^f \in \mathbb{R}^n$ tali che:

$$\frac{d\chi}{dx(t_f)} \Big|^{*} h^f = 0$$

Esso è pertanto un cono convesso con vertice nell'origine di \mathbb{R}^n .

È inoltre opportuno effettuare la trasformazione già considerata nella dimostrazione del Teorema 7.2, introducendo lo stato esteso \tilde{x} a $n + 1$ componenti. Sia $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il cono convesso con vertice nell'origine di \mathbb{R}^{n+1} , così definito:

$$\tilde{K} = \{\tilde{h}^f \in \mathbb{R}^{n+1} : h_0^f \leq 0, h^f \in K_{x^*(t_f^*), S^f}\}$$

e sia $\tilde{K}' \subset \mathbb{R}^{n+1}$ il seguente cono convesso con vertice nell'origine di \mathbb{R}^{n+1} :

$$\tilde{K}' = \{\tilde{h}^f \in \mathbb{R}^{n+1} : h_0^f < 0, h^f \in K_{x^*(t_f^*), S^f}\}$$

Si consideri infine il cono convesso C con vertice nell'origine di \mathbb{R}^{n+1} , già definito nella dimostrazione del Teorema 7.2, che contiene le variazioni prime $\delta\tilde{x}(t_f)$ dello stato finale esteso dovute a perturbazioni ammissibili (u^P, t_f^P) del controllo e dell'istante finale. Come già fatto nella dimostrazione del suddetto teorema, si assumerà che $\overset{\circ}{C}$ sia un insieme non vuoto. Una rappresentazione grafica della situazione considerata è data in Fig. 7.3 per il caso $n = 2$.

Mostreremo a questo punto che il cono aperto $\overset{\circ}{C}$ e \tilde{K}' hanno intersezione vuota. Si supponga infatti per assurdo che esista un vettore $\tilde{\mu}$ appartenente ad entrambi tali insiemi. Poiché $\tilde{\mu} \in \tilde{K}'$ la sua prima componente è negativa ed essendo sia \tilde{K}' che $\overset{\circ}{C}$ coni, senza perdita di generalità si può supporre $\mu_0 = -1$. Inoltre poiché $\tilde{\mu} \in \tilde{K}'$, per le altre componenti dovrà essere:

$$\left. \frac{d\chi}{dx(t_f)} \right|^* \mu = 0 \quad (7.30)$$

Poiché $\tilde{\mu} \in \overset{\circ}{C}$, ragionando in modo simile a quanto fatto per la dimostrazione del Teorema 7.2, si può affermare che esiste una perturbazione ammissibile (u^P, t_f^P) del controllo e dell'istante finale, tale che per il corrispondente stato finale esteso $\tilde{x}^P(t_f^P)$ si ha:

$$\tilde{x}^P(t_f^P) = \tilde{x}^*(t_f^*) + \varepsilon \tilde{\mu} + \tilde{o}(\varepsilon)$$

La precedente relazione corrisponde alle:

$$\begin{aligned} J(x^P, u^P, t_f^P) &= J(x^*, u^*, t_f^*) - \varepsilon + o_0(\varepsilon) \\ x^P(t_f^P) &= x^*(t_f^*) + \varepsilon \mu + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Si osserva allora che, in base alla (7.30), si ha:

$$\chi(x^P(t_f^P)) = \chi(x^*(t_f^*)) + \left. \frac{d\chi}{dx(t_f)} \right|^* \varepsilon \mu + \bar{o}(\varepsilon) = \bar{o}(\varepsilon)$$

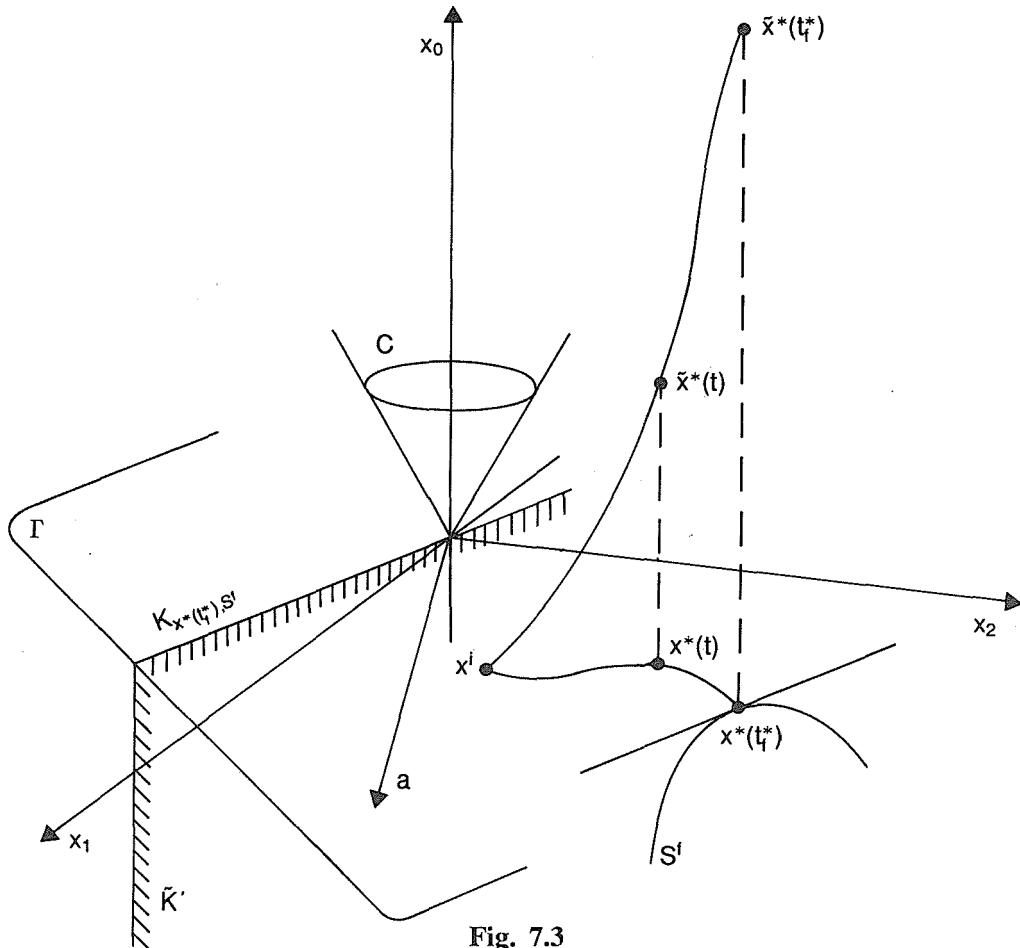


Fig. 7.3

Pertanto, se si prescinde dagli infinitesimi di ordine superiore $o_0(\varepsilon)$ e $\bar{o}(\varepsilon)$, si perviene a un assurdo. Come già visto nella dimostrazione del Teorema 7.2, si può perciò anche in questo caso affermare che C e \tilde{K}' ammettono un iperpiano Γ passante per l'origine di \mathbb{R}^{n+1} che li separa. Per continuità lo stesso iperpiano separa C e \tilde{K}' .

Sia a il vettore normale a Γ e orientato verso il semispazio cui non appartiene il cono C . Per costruzione si avrà:

$$a^T \tilde{h}^f \geq 0 \quad \forall \tilde{h}^f \in \tilde{K}$$

Ricordando la scelta $\tilde{\lambda}^*(t_f^*) = -a$, fatta nella dimostrazione del Teorema 7.2, si ha:

$$\tilde{\lambda}^{*T}(t_f^*) \tilde{h}^f \leq 0 \quad \forall \tilde{h}^f \in \tilde{K}$$

Considerando le direzioni $\tilde{h}^f \in \tilde{K}$ che hanno la prima componente nulla, la pre-

cedente condizione fornisce:

$$\lambda^{*T}(t_f^*) h^f \leq 0 \quad \forall h^f \in K_{x^*(t_f^*), S^f}$$

Poiché $K_{x^*(t_f^*), S^f}$ è simmetrico, si deduce:

$$\lambda^{*T}(t_f^*) h^f = 0 \quad \forall h^f : \frac{d\chi}{dx(t_f)} \Big|^{*} h^f = 0 \quad (7.31)$$

che giustifica la condizione di trasversalità (7.29). \square

Osservazione 7.7 - Nel caso in cui il valore di t_f del Problema 7.5 sia fissato, valgono le considerazioni già fatte nell'Osservazione 7.4. In particolare la condizione necessaria (7.9) va sostituita dalla (7.26).

Osservazione 7.8 - Un problema di interesse che non rientra nel Problema 7.5 è quello in cui $x(t_f)$ è libero e t_f è fissato; in cui cioè S^f coincide con \mathbb{R}^n (la condizione finale (7.27) è assente). In tal caso le condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.6 restano valide ad eccezione della (7.9) che, come già detto, va sostituita dalla (7.26), e della (7.29) che va sostituita dalla:

$$\lambda^*(t_f) = 0 \quad (7.32)$$

In effetti, riconSIDERANDO la dimostrazione del Teorema 7.6, si osserva che, nel caso in esame, risulta $K_{x^*(t_f), S^f} = \mathbb{R}^n$ e quindi \tilde{K} è il semispazio di \mathbb{R}^{n+1} caratterizzato dalla condizione $h_0^f \leq 0$. Segue che Γ coincide con \mathbb{R}^n e quindi il vettore a è del tipo:

$$a = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

Poiché $\tilde{\lambda}^*(t_f) = -a$, la (7.32) resta verificata. Si osserva anche che $\lambda_0^* = \alpha > 0$ e quindi in questo caso i possibili estremali sono necessariamente normali.

Una seconda generalizzazione del Problema 7.1, consiste nel rimuovere l'ipotesi di stazionarietà e cioè nel supporre che sia la funzione f nella (7.1), sia la funzione L nella (7.5) possano dipendere dalla variabile t in modo esplicito.

Si considera cioè il seguente problema.

Problema 7.9 - Considerato il sistema dinamico non stazionario descritto dall'equazione differenziale:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (7.33)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato, $u(t)$ vettore di controllo sottoposto al vincolo:

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p \quad (7.34)$$

e con $f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial t} \in C^0(\mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$; supposti assegnati l'istante iniziale t_i e il valore iniziale dello stato:

$$x(t_i) = x^i \quad (7.35)$$

data la condizione finale $(x(t_f), t_f) \in S^f \subset \mathbb{R}^{n+1}$, essendo S^f definito dalla:

$$\chi(x(t_f), t_f) = 0 \quad (7.36)$$

dove χ è una funzione vettoriale di dimensione $\sigma_f \leq n+1$ e di classe C^1 rispetto ai suoi argomenti; definito l'indice di costo:

$$J(x, u, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (7.37)$$

con $L, \frac{\partial L}{\partial x_i}, \frac{\partial L}{\partial t} \in C^0(\mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$; determinare, se esistono, il valore $t_f^0 \in (t_i, \infty)$, il controllo $u^0 \in \bar{C}^0(\mathbb{R})$, lo stato $x^0 \in \bar{C}^1(\mathbb{R})$, che soddisfano il vincolo dinamico (7.33), il vincolo sul controllo (7.34), le condizioni iniziale e finale (7.35), (7.36) e che rendono minimo l'indice di costo (7.37). \square

Il suddetto problema può facilmente essere ricondotto a un problema stazionario del tipo 7.5 mediante l'introduzione di una ulteriore variabile di stato che corrisponde alla variabile temporale. Le condizioni necessarie di minimo si possono in tal modo dedurre a partire dalle condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.6. In particolare, ricordando la Definizione 6.2 di funzione Hamiltoniana, verrà dimostrato il seguente teorema.

Teorema 7.10 (Pontryagin) - Con riferimento al Problema 7.9 sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile tale che:

$$\text{rango } \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial (x(t_f), t_f)} \right|^{*T} = \sigma_f$$

condizione necessaria affinché essa sia un punto di minimo locale (forte) è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^* \in \bar{C}^1[t_i, t_f^*]$, mai simultaneamente nulle in alcun istante di $[t_i, t_f^*]$, e tali che nel suddetto intervallo risulti:

$$\boxed{\lambda^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \Big|^{*T}} \quad (7.38)$$

$$\boxed{H(x^*(t), \omega, \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \geq H(x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) \quad \forall \omega \in U} \quad (7.39)$$

$$\boxed{H \left|_{t_f^*}^* + \int_t^{t_f^*} \frac{\partial H}{\partial \tau} \right|^* d\tau = k} \quad (7.40)$$

con $k \in \mathbb{R}$, costante. Inoltre le discontinuità di λ^* possono verificarsi solo nei punti \bar{t} in cui u^* ha una discontinuità. Infine deve esistere un vettore $\zeta \in \mathbb{R}^{n_f}$, tale che siano soddisfatte le condizioni di trasversalità:

$$\lambda^*(t_f^*) = \frac{\partial \chi}{\partial x(t_f)} \Big|_{t_f^*}^{*T} \zeta \quad \begin{matrix} \text{Transversality} \\ \text{Conditions} \end{matrix} \quad (7.41)$$

$$H \Big|_{t_f^*}^* = - \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \Big|_{t_f^*}^{*T} \zeta \quad (7.42)$$

Dimostrazione - Al fine di trasformare il Problema 7.9 in un problema stazionario del tipo 7.5, si introduca la ulteriore variabile di stato x_{n+1} , definita mediante le equazioni:

$$\dot{x}_{n+1} = 1 \quad x_{n+1}(t_i) = t_i$$

Posto:

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \end{bmatrix} \quad \hat{f}(\hat{x}, u) = \begin{bmatrix} f(\hat{x}, u) \\ 1 \end{bmatrix}$$

il Problema 7.9 è equivalente al problema di controllo ottimo relativo al sistema dinamico descritto dalla equazione differenziale:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u)$$

con $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con il vincolo sul controllo:

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p$$

con \hat{f} , $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \in C^0(\mathbb{R}^{n+1} \times U)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$; con lo stato iniziale fissato:

$$\hat{x}(t_i) = \begin{bmatrix} x^i \\ t_i \end{bmatrix}$$

con la condizione finale $\hat{x}(t_f) \in S^f \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dove S^f è definito dalla:

$$\chi(\hat{x}(t_f)) = 0$$

e caratterizzato dall'indice di costo:

$$J(\hat{x}, u, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} L(\hat{x}, u) dt$$

Per quest'ultimo problema, che è stazionario, la funzione Hamiltoniana è:

$$\begin{aligned}\hat{H}(\hat{x}, u, \lambda_0, \hat{\lambda}) &= \lambda_0 L(\hat{x}, u) + \hat{\lambda}^T \hat{f}(\hat{x}, u) \\ &= H(x, u, \lambda_0, \lambda, t) + \lambda_{n+1}\end{aligned}\quad (7.43)$$

avendo indicato con $\lambda(t)$ il vettore costituito dalle prime n componenti di $\hat{\lambda}(t)$. Il Teorema 7.6 assicura che se (\hat{x}^*, u^*, t_f^*) è una soluzione ottima, esistono una costante λ_0^* e una funzione $\hat{\lambda}^*$, mai simultaneamente nulle, che soddisfano le (7.7), (7.8), (7.9), (7.29) con riferimento alla \hat{H} ed alla $\hat{\lambda}$. In particolare l'equazione (7.7) scritta per le prime n componenti, dimostra la (7.38); la condizione (7.8), tenuto conto della (7.43), dimostra la (7.39); l'equazione (7.29), scritta per le prime n componenti, dimostra la (7.41). La stessa equazione (7.29), scritta per la $(n+1)$ -esima componente, fornisce:

$$\lambda_{n+1}^*(t_f^*) = \frac{\partial \chi}{\partial x_{n+1}(t_f)} \left| {}^{*T} \zeta \right. = \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \left| {}^{*T} \zeta \right. \quad (7.44)$$

Poiché la (7.9) implica $\hat{H}|_{t_f^*}^* = 0$, dalle (7.43) e (7.44) discende immediatamente la (7.42).

Inoltre ancora dalla (7.9) e dalla (7.43), ricordando la (7.38), si ha:

$$H|^* = -\lambda_{n+1}^*(t) = \int_{t_i}^t \frac{\partial H}{\partial \tau} \left| {}^* d\tau - \lambda_{n+1}^*(t_i) \right. \quad (7.45)$$

Calcolando la precedente nell'istante t_f^* si ha:

$$H|_{t_f^*}^* = \int_{t_i}^{t_f^*} \frac{\partial H}{\partial \tau} \left| {}^* d\tau - \lambda_{n+1}^*(t_i) \right. \quad (7.46)$$

Sottraendo la (7.45) dalla (7.46) si deduce:

$$H|^* + \int_t^{t_f^*} \frac{\partial H}{\partial \tau} \left| {}^* d\tau = H|_{t_f^*}^* \right.$$

che dimostra la (7.40).

Si osserva inoltre che le discontinuità di λ^* possono verificarsi negli istanti di discontinuità di u^* in quanto in tali istanti possono verificarsi le discontinuità di $\hat{\lambda}^*$. Infine λ_0^* e λ^* non possono annullarsi simultaneamente; infatti se ciò accadesse in un istante $\tilde{t} \in [t_i, t_f^*]$, dovendo sussistere la (7.9), dalla (7.43) si dedurrebbe che anche $\lambda_{n+1}^*(\tilde{t}) = 0$, contraddicendo la condizione che λ_0^* e λ^* non possono annullarsi simultaneamente. \square

Osservazione 7.11 - Un caso particolare del Problema 7.9 è quello in cui il valore di t_f è libero e cioè quello in cui la condizione finale (7.36) interessa soltanto lo stato finale:

$$\chi(x(t_f)) = 0$$

con χ funzione vettoriale di dimensioni $\sigma_f \leq n$. In questo caso la (7.42) si particolarizza nella:

$$H \Big|_{t_f^*}^* = 0 \quad (7.47)$$

Pertanto dalla (7.40) si deduce $k = 0$ e sostituendo quest'ultima condizione ancora nella (7.40), si perviene alla condizione necessaria:

$$H|^* + \int_t^{t_f^*} \frac{\partial H}{\partial \tau} \Big|^{*^*} d\tau = 0 \quad (7.48)$$

Osservazione 7.12 - Un ulteriore caso particolare del Problema 7.9, che è opportuno considerare, è il cosiddetto *problema di appuntamento* in cui la condizione finale (7.36) si particolarizza nella:

$$x(t_f) = \psi(t_f)$$

con ψ funzione di classe C^1 rispetto a t_f . Dalle (7.41) e (7.42) si deduce immediatamente la condizione:

$$H \Big|_{t_f^*}^* = \dot{\psi}^T(t_f^*) \lambda^*(t_f^*) \quad (7.49)$$

Osservazione 7.13 - Nel caso in cui il valore di t_f nel Problema 7.9 sia fissato al valore \bar{t}_f e quindi la condizione finale sia del tipo:

$$\chi(x(t_f), t_f) = \begin{pmatrix} \chi'(x(t_f)) \\ t_f - \bar{t}_f \end{pmatrix} = 0$$

con χ' funzione vettoriale di dimensione $\sigma_f - 1 \leq n$, se (x^*, u^*, t_f^*) è una soluzione ammissibile tale che:

$$\text{rango} \left\{ \frac{d\chi'}{dx(t_f)} \Big|^{*^*} \right\} = \sigma_f - 1$$

il Teorema 7.10 fornisce le condizioni necessarie affinché (x^*, u^*, t_f^*) sia un punto di minimo locale.

In particolare la condizione di trasversalità (7.41) diventa:

$$\lambda^*(t_f^*) = \frac{d\chi'}{dx(t_f)} \Big|^{*^T} \zeta'$$

con $\zeta' \in \mathbb{R}^{\sigma_f-1}$, mentre la condizione (7.42) risulta non significativa.

Se anche lo stato finale oltre che l'istante finale è fissato e cioè se:

$$\chi'(x(t_f)) = x(t_f) - x^f = 0$$

anche la prima delle condizioni di trasversalità diviene non significativa in quanto si riduce a:

$$\lambda^*(t_f^*) = \zeta'$$

con $\zeta' \in \mathbb{R}^n$.

Osservazione 7.14 - Nel caso in cui nel Problema 7.9 si abbia $x(t_f)$ libero e t_f fissato al valore \bar{t}_f e cioè:

$$\chi(t_f) = t_f - \bar{t}_f = 0$$

con $\sigma_f = 1$, le condizioni necessarie date dal Teorema 7.10 restano valide e in particolare la condizione di trasversalità (7.41) diventa:

$$\lambda^*(\bar{t}_f) = 0$$

mentre la (7.42) risulta non significativa. Si ha inoltre $\lambda_0^* > 0$.

Osservazione 7.15 - Come già fatto nel precedente Capitolo 6 (Osservazione 6.9) si ritiene opportuno considerare brevemente il caso in cui nell'indice di costo del Problema 7.9 sia presente un termine additivo che dipende dallo stato e dall'istante finale, e cioè che tale indice di costo abbia l'espressione:

$$J(x, u, t_f) = G(x(t_f), t_f) + \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) dt$$

dove G è una funzione di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti.

Procedendo in maniera analoga a quella seguita nel corso della suddetta Osservazione 6.9 si può verificare che le condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.10 restano valide con riferimento alla funzione Hamiltoniana data dalla Definizione 6.2 (che non tiene conto della presenza del termine additivo G), ad eccezione delle condizioni (7.40), (7.41), (7.42) che sono rispettivamente sostituite dalle:

$$H \left|_{t_f}^* + \lambda_0^* \frac{\partial G}{\partial t} \right|^* + \int_t^{t_f^*} \left(\frac{\partial H}{\partial \tau} \left|_{t_f}^{*T} \right. + \lambda_0^* \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} \left|_{t_f}^* \right. \right) d\tau = k \quad (7.50)$$

$$\lambda^*(t_f^*) = \frac{\partial \chi}{\partial x(t_f)} \left|_{t_f}^{*T} \right. \zeta + \lambda_0^* \frac{\partial G}{\partial x(t)} \left|_{t_f}^{*T} \right. \quad (7.51)$$

$$H|_{t_f^*}^* = - \frac{\partial \chi}{\partial t_f} \left|_{t_f}^{*T} \right. \zeta - \lambda_0^* \frac{\partial G}{\partial t} \left|_{t_f}^* \right. \quad (7.52)$$

Definizione 7.16 - Come sempre fatto precedentemente si definirà *estremale* del Problema 7.9 ogni soluzione ammissibile che soddisfa le condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.10. Si riserverà la denominazione di *estremale normale* ad ogni estremale cui corrisponde un moltiplicatore $\lambda_0^* > 0$, e in tal caso si assumerà senz'altro $\lambda_0^* = 1$. \square

Osservazione 7.17 - Si noti che la condizione di minimo per la funzione Hamiltoniana che compare in tutti i teoremi dati nel presente capitolo, nel caso in cui non siano presenti vincoli sul controllo, e cioè nel caso in cui $U = \mathbb{R}^p$ (o più in generale nel caso in cui U è un insieme aperto di \mathbb{R}^p), implica la condizione:

$$\frac{\partial H}{\partial u} \Big|^{*} = 0^T \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Ovviamente quest'ultima condizione coincide con la condizione necessaria (6.38) data nell'Osservazione 6.10 con riferimento ad un problema di controllo ottimo in assenza di vincoli di diseguaglianza sulle variabili di stato e di controllo.

Osservazione 7.18 - Qualora nei problemi considerati nel presente capitolo si assuma:

$$U = \{u(t) \in \mathbb{R}^p : q(u(t)) \leq 0\} \quad (7.53)$$

i suddetti problemi assumono la stessa forma di quelli considerati nel precedente Capitolo 6. La condizione di minimo per la funzione Hamiltoniana cui si perviene con l'approccio seguito in questo capitolo è tuttavia più forte dell'analogia condizione (6.25) fornita nel Teorema 6.7, in quanto l'insieme (6.26) ivi considerato, nel caso di vincoli di diseguaglianza che interessano solo le variabili di controllo, è contenuto nell'insieme (7.53).

Esempio 7.1 - Considerato il sistema lineare:

$$\dot{x} = x + u \quad (7.54)$$

con stato iniziale assegnato:

$$x(0) = x^i \quad (7.55)$$

si desidera pervenire allo stato finale assegnato:

$$x(t_f) = 0 \quad (7.56)$$

utilizzando un controllo limitato in ampiezza:

$$|u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, t_f]$$

e rendendo minimo il tempo richiesto:

$$J(t_f) = \int_0^{t_f} dt = t_f$$

Con riferimento ad estremali normali ($\lambda_0^* = 1$) l'Hamiltoniano del problema considerato, che è stazionario, si scrive:

$$H(x, u, 1, \lambda) = 1 + \lambda x + \lambda u$$

Le condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.2 si particolarizzano come segue:

$$\dot{\lambda}^* = -\lambda^* \quad (7.57)$$

$$\lambda^*(t)\omega \geq \lambda^*(t)u^*(t) \quad \forall \omega \in [-1, 1], \quad \forall t \in [0, t_f^*] \quad (7.58)$$

$$H|^{*} = 0 \quad (7.59)$$

Integrando la (7.57) si ottiene:

$$\lambda^*(t) = e^{-t}\lambda^i$$

con $\lambda^i \neq 0$ affinché possa essere verificata la (7.59). Dalla (7.58) si ottiene perciò:

$$u^*(t) = -\operatorname{sign}\{\lambda^*(t)\} = -\operatorname{sign}\{\lambda^i\}$$

Integrando l'equazione di stato (7.54) con la condizione iniziale (7.55), si ha:

$$x^*(t) = e^t x^i - (e^t - 1) \operatorname{sign}\{\lambda^i\}$$

Imponendo la condizione finale (7.56) si deduce:

$$x^i = (1 - e^{-t_f^*}) \operatorname{sign}\{\lambda^i\} \quad (7.60)$$

che implica:

$$\operatorname{sign}\{\lambda^i\} = \operatorname{sign}\{x^i\} \quad (7.61)$$

Pertanto si ottiene:

$$u^*(t) = -\operatorname{sign}\{x^i\}$$

Sostituendo la (7.61) nella (7.60) si ricava:

$$t_f^* = \ln \frac{1}{1 - |x^i|}$$

purché $|x^i| < 1$. Se $|x^i| \geq 1$ non esiste alcuna soluzione estremale e pertanto non esiste soluzione ottima. Infine dalla (7.59), scritta nell'istante iniziale, si ha:

$$1 + \lambda^i x^i - |\lambda^i| = 0$$

da cui si deduce:

$$\lambda^i = |\lambda^i| \operatorname{sign}\{\lambda^i\} = \frac{\operatorname{sign}\{\lambda_i\}}{1 - |x^i|}$$

Esempio 7.2 - Un semplice modello non lineare di popolazione, atto a descrivere l'evoluzione temporale di una colonia di api, o più in generale di insetti sociali, è il seguente:

$$\dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t)u(t) - \mu x_1(t) \quad (7.62)$$

$$\dot{x}_2(t) = \beta(1 - u(t))x_1(t) \quad (7.63)$$

In esso $x_1(t)$ rappresenta il numero di api operaie presenti nell'istante generico, aumentato dell'unità corrispondente all'ape regina fondatrice della colonia, mentre $x_2(t)$ rappresenta il numero di api riproduttrici (regine e fuchi) che potrebbero fondare nuove colonie nel ciclo di vita successivo e che invece, durante il ciclo di vita considerato, non generano nuovi individui. Evidentemente nel modello il numero di individui di ciascuna specie è approssimato con grandezze variabili nel tempo in maniera continua, come è usualmente fatto nei modelli di popolazioni. Si è inoltre indicato con $u(t)$ la frazione di attività dedicata dalle api operaie e dalla regina fondatrice alla generazione di nuove operaie nel generico istante e quindi $1 - u(t)$ misura la frazione di attività dedicata alla generazione di nuovi insetti riproduttori. Ovviamente risulta:

$$u(t) \in [0, 1] \quad \forall t \in [0, t_f]$$

I coefficienti α e β , che si suppongono positivi, misurano la disponibilità di risorse ambientali e l'efficienza con la quale esse sono utilizzate per la riproduzione delle due sottopopolazioni. Il coefficiente positivo μ rappresenta il tasso di mortalità della sottopopolazione x_1 , mentre si trascura il tasso di mortalità dei nuovi insetti riproduttori, che è generalmente molto basso. Tale modello rappresenta l'evoluzione della popolazione nel ciclo di vita della colonia che ha una durata fissata $[0, t_f]$.

Supponendo che inizialmente sia presente la sola regina fondatrice, lo stato iniziale del sistema è:

$$x_1(0) = 1 \quad (7.64)$$

$$x_2(0) = 0 \quad (7.65)$$

Affinché la colonia sia riproduttiva e cioè affinché possa avversi $\dot{x}_1(t) > 0$, si assume $\alpha > \mu$.

Un'evoluzione ottima della colonia, nel senso di massimizzare la capacità di fondare nuove colonie al termine del suo ciclo vitale e quindi di massimizzare le possibilità di sopravvivenza della specie, si ha quando la funzione u è tale da rendere massimo il numero di individui riproduttori al termine del ciclo di vita; si ha pertanto:

$$J(x, u) = -x_2(t_f)$$

Tenendo conto dell'Osservazione 7.15, l'Hamiltoniano del problema considerato è:

$$H(x, u, \lambda) = \lambda_1(\alpha x_1 u - \mu x_1) + \lambda_2 \beta(1 - u)x_1$$

Le condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.10 e dalla Osservazione 7.15, osservando che:

$$G(x(t), t) = -x_2(t)$$

si particolarizzano nel modo seguente:

$$\dot{\lambda}_1^* = -\alpha \lambda_1^* u^* + \mu \lambda_1^* - \beta \lambda_2^*(1 - u^*) \quad (7.66)$$

$$\dot{\lambda}_2^* = 0 \quad (7.67)$$

$$[\alpha \lambda_1^*(t) - \beta \lambda_2^*(t)] x_1^*(t) u^*(t) \leq [\alpha \lambda_1^*(t) - \beta \lambda_2^*(t)] x_1^*(t) \omega \quad \forall \omega \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (7.68)$$

$$H|_* = k$$

$$\lambda_1^*(t_f) = 0 \quad (7.69)$$

$$\lambda_2^*(t_f) = -1 \quad (7.70)$$

$$H|_{t_f}^* = -\zeta$$

dove l'ultima condizione di trasversalità è non significativa.

Dalla (7.62) e (7.64) si ha:

$$x_1^*(t) = e^{\int_0^t (\alpha u^*(\tau) - \mu) d\tau}$$

che consente di affermare che $x_1^*(t)$ è sempre positiva. Inoltre le (7.67) e (7.70) forniscono:

$$\lambda_2^*(t) = -1$$

Si osserva inoltre che $\alpha \lambda_1^*(t) - \beta \lambda_2^*(t) = \alpha \lambda_1^*(t) + \beta$ non può annullarsi su un intervallo di tempo di ampiezza positiva poiché in questo caso risulterebbe in tale intervallo $\lambda_1^*(t) = -\frac{\beta}{\alpha}$ e dalla (7.66) si dedurrebbe $\alpha = \mu$, che è in contrasto con l'ipotesi fatta. Pertanto la soluzione della condizione (7.68) è:

$$u^*(t) = \frac{1}{2}(1 - \text{sign}\{\alpha \lambda_1^*(t) + \beta\}) \quad (7.71)$$

La (7.71), tenuto conto della (7.69), fornisce:

$$u^*(t_f) = 0$$

e considerando che $\lambda_1^*(t)$ è funzione continua del tempo, si può affermare che esiste un intervallo $[\bar{t}, t_f]$ in cui $u^*(t) = 0$. In tale intervallo la (7.66) diviene:

$$\dot{\lambda}_1^* = \mu \lambda_1^* + \beta$$

che integrata con la condizione (7.69) fornisce:

$$\lambda_1^*(t) = \frac{\beta}{\mu}(e^{\mu(t-t_f)} - 1) \quad (7.72)$$

Tale funzione è monotona decrescente per t che decresce e l'istante \bar{t} di commutazione del controllo è determinato dalla condizione:

$$\alpha \lambda_1^*(\bar{t}) + \beta = 0$$

che, tenuto conto della (7.72), fornisce:

$$\bar{t} = t_f + \frac{1}{\mu} \ln \left(1 - \frac{\mu}{\alpha} \right)$$

Nel caso in cui $\frac{\alpha}{\mu} > \frac{1}{1 - e^{-\mu t_f}} > 1$ risulta $\bar{t} \in (0, t_f)$. In tale ipotesi si avrà un intervallo precedente a \bar{t} in cui risulta $u^*(t) = 1$ e quindi l'equazione (7.66) diviene:

$$\dot{\lambda}_1^* = (\mu - \alpha) \lambda_1^*$$

Tenuto conto del fatto che $\lambda_1^*(\bar{t}) = -\beta/\alpha$, la soluzione della precedente equazione è:

$$\lambda_1^*(t) = -\frac{\beta}{\alpha} e^{(\mu-\alpha)(t-\bar{t})}$$

Poiché tale funzione continua ad essere monotona decrescente al decrescere di t , non possono verificarsi altri istanti di commutazione precedenti a \bar{t} . Gli andamenti della variabile λ_1^* e del controllo u^* sono rappresentati in Fig 7.4.

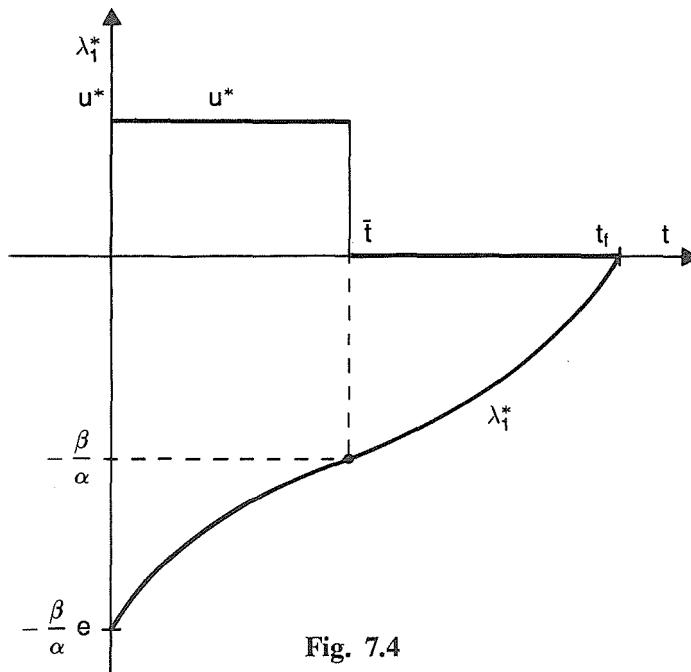


Fig. 7.4

Sostituendo l'espressione di u^* nelle equazioni dello stato e integrandole a partire dalle condizioni iniziali assegnate, si ottiene facilmente l'evoluzione nel ciclo di

vita delle due sottopopolazioni. Si osserva che nel primo sottointervallo $[0, \bar{t}]$ vengono generate soltanto api operaie mentre nel sottointervallo successivo $[\bar{t}, t_f]$ non vengono più generate api operaie (che quindi diminuiscono esponenzialmente) ma soltanto insetti riproduttori. È stato in effetti osservato che il comportamento delle colonie di insetti sociali segue molto da vicino, nella realtà, l'evoluzione che si è qui determinata mediante il semplice modello considerato.

Si osservi infine che qualora risulti $1 < \frac{\alpha}{\mu} \leq \frac{1}{1 - e^{-\mu t_f}}$ non si avrebbe un istante di commutazione \bar{t} nell'intervallo $(0, t_f]$; in corrispondenza si avrebbe un comportamento non realistico del modello, in quanto non verrebbe generata alcuna ape operaia.

Esempio 7.3 - Si consideri il processo lineare, stazionario, del primo ordine, con ingresso scalare, descritto dall'equazione:

$$\dot{x} = ax + bu \quad (7.73)$$

con $a < 0$ e $b > 0$, costanti. Siano fissati gli stati iniziale e finale:

$$x(0) = x^i \quad (7.74)$$

$$x(t_f) = 0 \quad (7.75)$$

e si supponga assegnato il vincolo sull'ampiezza del controllo:

$$|u(t)| \leq u_M \quad \forall t \in [0, t_f]$$

Si desidera trasferire lo stato iniziale x^i nell'origine, minimizzando l'indice:

$$J(u, t_f) = \int_0^{t_f} (k_1|u(t)| + k_2 u^2(t) + k_3) dt$$

con k_1, k_2, k_3 costanti positive, che ha il significato di una combinazione lineare di un indice di minimo carburante, di uno di minima energia e di uno di tempo minimo.

Per ricercare gli estremali normali del problema si considera l'Hamiltoniano:

$$H(x, u, 1, \lambda) = k_1|u| + k_2 u^2 + k_3 + \lambda(ax + bu)$$

Le condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.2 diventano:

$$\dot{\lambda}^* = -a\lambda^* \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned} k_1|\omega| + k_2\omega^2 + b\lambda^*(t)\omega &\geq k_1|u^*(t)| + k_2u^{*2}(t) + b\lambda^*(t)u^*(t) \\ \forall \omega \in [-u_M, u_M], \forall t \in [0, t_f^*] \end{aligned} \quad (7.77)$$

$$H|^* = 0 \quad (7.78)$$

La condizione (7.77) richiede la minimizzazione rispetto a ω nell'intervallo $[-u_M, u_M]$ della funzione:

$$F(\omega, \lambda^*(t)) = k_1 |\omega| + k_2 \omega^2 + b \lambda^*(t) \omega$$

Tale problema ammette almeno una soluzione ed essa va cercata o agli estremi dell'intervallo $[-u_M, u_M]$ o nel punto $\omega = 0$ in cui la F non è derivabile o in un eventuale punto di stazionarietà della F appartenente all'insieme $(-u_M, 0) \cup (0, u_M)$. La condizione che definisce l'eventuale punto di stazionarietà ω_s è la seguente:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} \Big|_{\omega_s} = k_1 \operatorname{sign}\{\omega_s\} + 2k_2 \omega_s + b \lambda^*(t) = 0$$

Si supponga in primo luogo che sia $\lambda^*(t) \geq \frac{k_1 + 2k_2 u_M}{b}$; in tal caso non esistono valori di ω_s appartenenti a $(-u_M, 0) \cup (0, u_M)$; si verifica quindi facilmente che in questo caso il minimo della F si trova nell'estremo $-u_M$, dove risulta:

$$F(-u_M, \lambda^*(t)) = -u_M(b \lambda^*(t) - k_1 - k_2 u_M) \leq -k_2 u_M^2 < 0$$

Si consideri in secondo luogo il caso in cui $\lambda^*(t) \in \left(\frac{k_1}{b}, \frac{k_1 + 2k_2 u_M}{b} \right)$. È possibile in questo caso verificare che esiste un punto di stazionarietà:

$$\omega_s = \frac{k_1 - b \lambda^*(t)}{2k_2}$$

che varia nell'intervallo $(-u_M, 0)$ quando $\lambda^*(t)$ decresce da $\frac{k_1 + 2k_2 u_M}{b}$ a $\frac{k_1}{b}$. La funzione F in tale punto di stazionarietà assume il valore:

$$F(\omega_s, \lambda^*(t)) = -\frac{(b \lambda^*(t) - k_1)^2}{4k_2} \leq 0$$

e quindi il punto di minimo va ricercato fra ω_s e l'estremo $-u_M$ in cui la stessa funzione assume valore:

$$F(-u_M, \lambda^*(t)) = -u_M(b \lambda^*(t) - k_1 - k_2 u_M)$$

Come si deduce da un esame delle due espressioni (vedi Fig. 7.5), nell'intervallo di interesse per $\lambda^*(t)$ risulta:

$$F(\omega_s, \lambda^*(t)) < F(-u_M, \lambda^*(t))$$

e quindi, nel suddetto intervallo di valori per $\lambda^*(t)$, il punto di minimo cercato si trova nel punto di stazionarietà ω_s . Si passa quindi a considerare il caso in cui $\lambda^*(t) \in \left[-\frac{k_1}{b}, \frac{k_1}{b}\right]$. L'equazione che definisce il punto di stazionarietà può essere riscritta nella forma:

$$k_1 + 2k_2|\omega_s| = -\frac{b\lambda^*(t)}{\operatorname{sign}\{\omega_s\}}$$

che può ammettere soluzione solo se $\operatorname{sign}\{\lambda^*(t)\} = -\operatorname{sign}\{\omega_s\}$ e in tal caso essa diviene:

$$k_1 + 2k_2|\omega_s| = b|\lambda^*(t)|$$

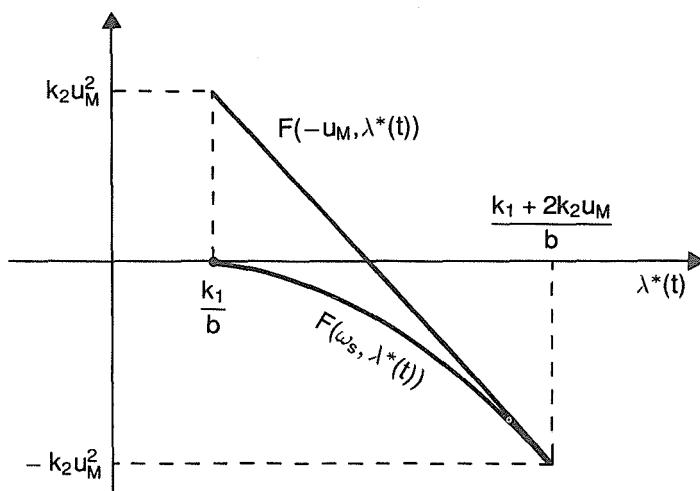


Fig. 7.5

Tale condizione fornisce:

$$|\omega_s| = \frac{b|\lambda^*(t)| - k_1}{2k_2}$$

che non ammette soluzioni in $(0, u_M)$ quando $|\lambda^*(t)|$ varia in $[0, k_1/b]$. Pertanto, in questo terzo caso, il punto minimo della F può trovarsi in uno degli estremi $\pm u_M$ o nell'origine e ci si rende conto facilmente che esso si trova nell'origine. Procedendo in maniera analoga a quanto fatto rispettivamente nel primo e nel secondo caso, si può verificare che il minimo di F si trova in u_M per $\lambda^*(t) \leq -\frac{k_1 + 2k_2 u_M}{b}$ e nel punto $\omega_s = -\frac{k_1 + b\lambda^*(t)}{2k_2}$ per $\lambda^*(t) \in \left(-\frac{k_1 + 2k_2 u_M}{b}, -\frac{k_1}{b}\right)$. In conclusione si può affermare che il valore di $u^*(t)$ che soddisfa il principio del minimo (7.77) è

dato da:

$$u^*(t) = \begin{cases} -u_M \operatorname{sign}\{\lambda^*(t)\} & \text{per } |\lambda^*(t)| \geq \frac{2k_2 u_M + k_1}{b} \\ \frac{k_1}{2k_2} \operatorname{sign}\{\lambda^*(t)\} - \frac{b\lambda^*(t)}{2k_2} & \text{per } \frac{k_1}{b} < |\lambda^*(t)| < \frac{2k_2 u_M + k_1}{b} \\ 0 & \text{per } |\lambda^*(t)| \leq \frac{k_1}{b} \end{cases} \quad (7.79)$$

Le precedenti espressioni sono rappresentate graficamente nella Fig. 7.6.

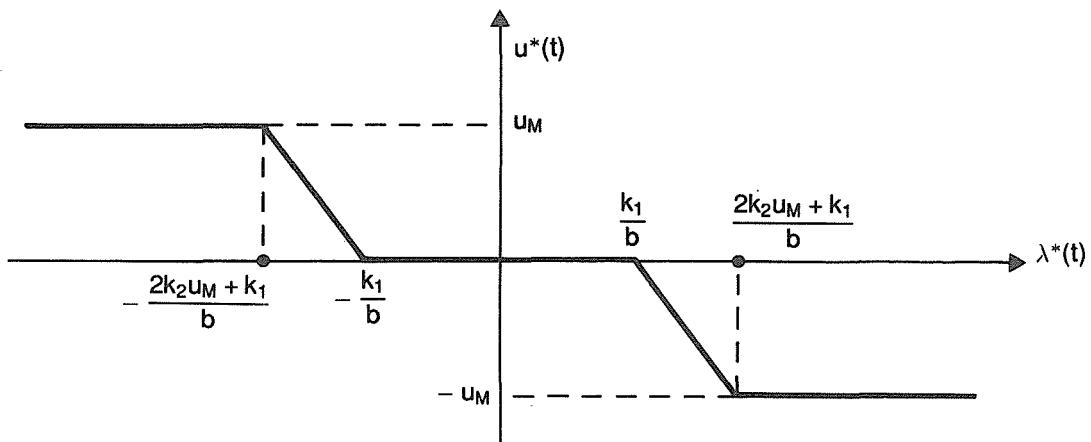


Fig. 7.6

Allo scopo di calcolare gli estremali del problema occorrerebbe a questo punto sostituire la (7.79) nella (7.73) e quindi risolvere il sistema differenziale (7.73), (7.76) con le condizioni (7.74), (7.75), (7.78). Determinati in tal modo $\{x^*, \lambda^*, t_f^*\}$ e sostituito λ^* nella (7.79) si otterebbe anche l'insieme dei controlli estremali corrispondenti.

È però possibile eliminare la variabile di costato $\lambda^*(t)$, esprimendo il controllo estremale $u^*(t)$ in funzione del corrispondente stato $x^*(t)$; è cioè possibile verificare che la soluzione estremale del problema considerato è unica ed è sintetizzabile. Dalla (7.78), infatti, si ha:

$$\begin{aligned} H(x^*(t), u^*(t), 1, \lambda^*(t)) &= k_1 |u^*(t)| + k_2 u^{*2}(t) + k_3 + a\lambda^*(t)x^*(t) \\ &\quad + b\lambda^*(t)u^*(t) = 0 \quad \forall t \in [0, t_f^*] \end{aligned} \quad (7.80)$$

Poiché $k_3 > 0$ si può escludere che $\lambda^*(t) = 0$. Si considera perciò in primo luogo il caso:

$$0 < |\lambda^*(t)| \leq \frac{k_1}{b}$$

cui, in base alla (7.79), corrisponde il valore $u^*(t) = 0$; dalla (7.80) si deduce:

$$|x^*(t)| = \frac{k_3}{|a| \cdot |\lambda^*(t)|}$$

e perciò si ha:

$$u^*(t) = 0 \quad \text{per} \quad |x^*(t)| \geq \bar{x} = \frac{k_3 b}{k_1 |a|} \quad (7.81)$$

Si considera in secondo luogo il caso:

$$\frac{k_1}{b} < |\lambda^*(t)| < \frac{2k_2 u_M + k_1}{b}$$

cui, in base alla (7.79), tenuto conto del fatto che:

$$\operatorname{sign}\{u^*(t)\} = -\operatorname{sign}\{\lambda^*(t)\} \quad (7.82)$$

corrisponde:

$$u^*(t) = -\frac{k_1 \operatorname{sign}\{u^*(t)\} + b \lambda^*(t)}{2k_2}$$

Dalla precedente si ha:

$$\lambda^*(t) = -\frac{2k_2 u^*(t) + k_1 \operatorname{sign}\{u^*(t)\}}{b}$$

Sostituendo la precedente nella (7.80) si ha:

$$u^{*2}(t) + 2\frac{a}{b}x^*(t)u^*(t) + \frac{k_1 a}{k_2 b}x^*(t)\operatorname{sign}\{u^*(t)\} - \frac{k_3}{k_2} = 0 \quad (7.83)$$

A questo punto poiché dalla (7.80) si ha:

$$\operatorname{sign}\{ax^*(t) + bu^*(t)\} = -\operatorname{sign}\{\lambda^*(t)\}$$

ricordando la (7.82) segue che:

$$\operatorname{sign}\{u^*(t)\} = \operatorname{sign}\{ax^*(t) + bu^*(t)\}$$

La precedente deve sussistere quale che sia x^i e quindi per valori in modulo molto grandi e con segno sia positivo che negativo di $ax^*(t)$ mentre $bu^*(t)$ non può eccedere in modulo bu_M ; segue quindi che:

$$\operatorname{sign}\{x^*(t)\} = -\operatorname{sign}\{u^*(t)\} \quad (7.84)$$

La (7.83) diviene perciò:

$$u^{*2}(t) + 2\frac{a}{b}x^*(t)u^*(t) - \frac{k_1 a}{k_2 b}|x^*(t)| - \frac{k_3}{k_2} = 0 \quad (7.85)$$

da cui, tenuto conto della (7.84), si ricava:

$$u^*(t) = -\frac{a}{b}x^*(t) - \text{sign}\{x^*(t)\} \sqrt{\left(\frac{a}{b}x^*(t)\right)^2 + \frac{k_1 a}{k_2 b}|x^*(t)| + \frac{k_3}{k_2}} \quad (7.86)$$

Poiché la (7.85), in base alla (7.84), diviene:

$$|u^*(t)|^2 - 2\frac{a}{b}|x^*(t)| \cdot |u^*(t)| - \frac{k_1 a}{k_2 b}|x^*(t)| - \frac{k_3}{k_2} = 0$$

e poiché nel caso considerato deve risultare $|u^*(t)| \in (0, u_M)$, si deduce che l'espressione (7.86) vale per:

$$\bar{x} < |x^*(t)| < \bar{x} \quad (7.87)$$

con:

$$\bar{x} = \frac{b}{|a|} \frac{k_3 - k_2 u_M^2}{k_1 + 2k_2 u_M}$$

supponendo:

$$k_3 \geq k_2 u_M^2$$

Si considera in terzo luogo il caso:

$$|\lambda^*(t)| \geq \frac{2k_2 u_M + k_1}{b}$$

In base alla (7.79), tenuto conto che per la (7.84) si ha:

$$\text{sign}\{\lambda^*(t)\} = -\text{sign}\{u^*(t)\} = \text{sign}\{x^*(t)\}$$

risulta:

$$u^*(t) = -u_M \text{sign}\{x^*(t)\} \quad \text{per } 0 < |x^*(t)| \leq \bar{x} \quad (7.88)$$

Ovviamente, essendo l'origine il punto in cui si desidera trasferire lo stato iniziale, allo stato $x^*(t) = 0$ deve corrispondere il controllo $u^*(t) = 0$.

In conclusione, in base alle (7.81), (7.86), (7.87), (7.88), la caratteristica istantanea non lineare che fornisce $u^*(t)$ in funzione di $x^*(t)$ è rappresentata in Fig. 7.7a.

Si osserva infine che, se risulta $k_3 < k_2 u_M^2$, il controllo u^* non può assumere i valori estremi $\pm u_M$ perché altrimenti, in base alla (7.88), dovrebbe risultare $|x^*(t)| \leq \bar{x}$ con $\bar{x} < 0$. In tal caso pertanto risulta:

$$|\lambda^*(t)| < \frac{2k_2 u_M + k_1}{b} \quad \forall t \in [0, t_f^*]$$

e il legame non lineare istantaneo fra $u^*(t)$ e $x^*(t)$ è rappresentato in Fig. 7.7b).

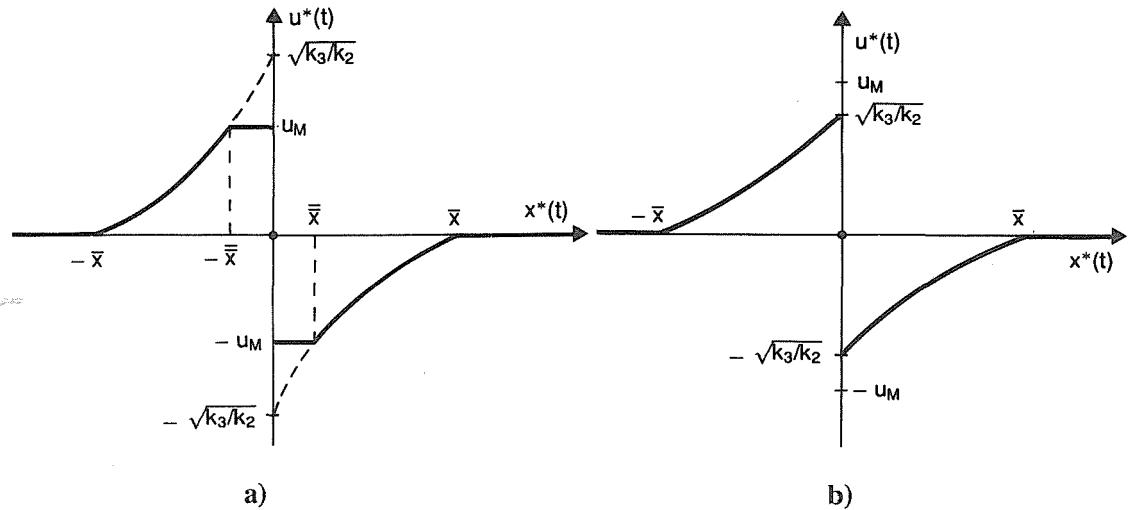


Fig. 7.7

In Fig. 7.8 è rappresentato lo schema di controllo a retroazione, che corrisponde alla soluzione estremale trovata.

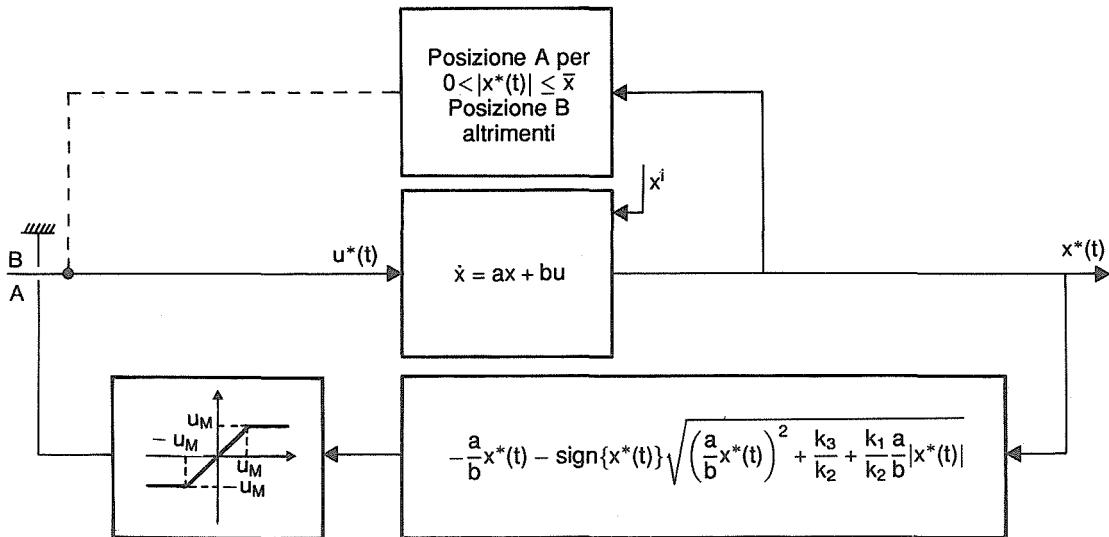


Fig. 7.8

7.4 IL PRINCIPIO DEL MINIMO COME CONDIZIONE DI MINIMO GLOBALE PER PROBLEMI CONVESSI

Anche nel caso di problemi di controllo ottimo con vincoli sull'ampiezza del controllo, l'introduzione di opportune ipotesi di convessità consente di fornire condizioni necessarie e sufficienti di minimo globale.

Si consideri il seguente problema.

Problema 7.19 - Considerato il sistema dinamico lineare descritto dall'equazione differenziale:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (7.89)$$

dove A e B sono funzioni di classe $C^1[t_i, t_f]$, supposti assegnati gli istanti iniziale t_i e finale t_f dell'intervallo di controllo, nonché lo stato iniziale:

$$x(t_i) = x^i \quad (7.90)$$

data la condizione finale $x(t_f) \in D_f \subset \mathbb{R}^n$ dove D_f è un punto fissato x^f o coincide con tutto \mathbb{R}^n , dato il vincolo sul controllo:

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (7.91)$$

dove U è un insieme convesso, definito l'indice di costo:

$$J(x, u) = G(x(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} L(x, u, t) dt \quad (7.92)$$

con $L, \frac{\partial L}{\partial x_i}, \frac{\partial L}{\partial t} \in C^0(\mathbb{R}^n \times U \times [t_i, t_f])$, $i = 1, 2, \dots, n$ ed L funzione convessa rispetto a $x(t)$ e $u(t)$ in $\mathbb{R}^n \times U$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$ e dove G è una funzione scalare di classe C^2 rispetto ai suoi argomenti e convessa rispetto a $x(t_f)$ in \mathbb{R}^n (ovviamente se $D_f = \{x^f\}$ la presenza del termine G nell'indice di costo è inessenziale), determinare, se esistono, il controllo $u^0 \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$ e lo stato $x^0 \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$ che soddisfano il vincolo dinamico (7.89), la condizione iniziale (7.90) e quella finale, il vincolo sul controllo (7.91) e che rendono minimo l'indice di costo (7.92). \square

Si dimostra il seguente teorema.

Teorema 7.20 - Con riferimento al Problema 7.19 sia (x^0, u^0) una soluzione ammissibile; condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia una soluzione ottima normale è che esista una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^0 \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$ tale che nell'intervallo $[t_i, t_f]$ risulti:

$$\lambda^0 = - \left. \frac{\partial H(x, u, 1, \lambda, t)}{\partial x} \right|^{0T} \quad (7.93)$$

$$H(x^0(t), \omega, 1, \lambda^0(t), t) \geq H(x^0(t), u^0(t), 1, \lambda^0(t), t) \quad \forall \omega \in U \quad (7.94)$$

e che nell'istante finale, se $D_f = \mathbb{R}^n$, risulti:

$$\lambda^0(t_f) = \left. \frac{dG}{dx(t_f)} \right|^{0T} \quad (7.95)$$

Dimostrazione - Il Problema 7.19, anche in considerazione delle Osservazioni 7.13, 7.14, 7.15, può considerarsi un caso particolare del Problema 7.9; pertanto la necessità delle (7.93), (7.94) e (7.95) è garantita dal Teorema 7.10 e dalla stessa Osservazione 7.15. Per quanto riguarda la sufficienza si osserva innanzitutto che, in base alle ipotesi fatte nella formulazione del Problema 7.19, la funzione $H(x(t), u(t), 1, \lambda^0(t), t)$ è convessa rispetto a $(x(t), u(t))$ in $\mathbb{R}^n \times U$ per ogni $t \in [t_i, t_f]$. Pertanto, considerata una qualunque soluzione ammissibile (x, u) , per ogni istante dell'intervallo di controllo si ha:

$$H(x, u, 1, \lambda^0, t) \geq H(x^0, u^0, 1, \lambda^0, t) + \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|^0 (x - x^0) + \left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|^0 (u - u^0)$$

Poiché U è convesso e $u(t), u^0(t) \in U$, si ha che $u(t) - u^0(t)$ appartiene al cono tangente a U in $u^0(t)$; poiché per la (7.94) $H(x^0(t), \omega, 1, \lambda^0(t), t)$ ha un minimo su U per $\omega = u^0(t)$, in base al Teorema 1.35 si ha:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|^0 (u - u^0) \geq 0 \quad \forall u(t) \in U$$

Pertanto, a maggior ragione, risulta:

$$H(x, u, 1, \lambda^0, t) \geq H(x^0, u^0, 1, \lambda^0, t) + \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|^0 (x - x^0)$$

Ricordando la (6.7) e utilizzando la (7.93) si ha:

$$\begin{aligned} L(x, u, t) &\geq L(x^0, u^0, t) - \lambda^{0T}(\dot{x} - \dot{x}^0) - \dot{\lambda}^{0T}(x - x^0) \\ &= L(x^0, u^0, t) - \frac{d}{dt}(\lambda^{0T}(x - x^0)) \end{aligned}$$

e integrando la precedente diseguaglianza sull'intervallo $[t_i, t_f]$ si ottiene:

$$J(x, u) \geq J(x^0, u^0) + G(x(t_f)) - G(x^0(t_f)) - \lambda^{0T}(t_f)(x(t_f) - x^0(t_f))$$

A questo punto si osserva che, se lo stato finale è assegnato, la precedente relazione diviene $J(x, u) \geq J(x^0, u^0)$ che, dovendo sussistere per ogni soluzione

(x, u) ammissibile, dimostra l'asserto; se lo stato finale è libero, dalla condizione finale (7.95) si ha:

$$J(x, u,) \geq J(x^0, u^0) + G(x(t_f)) - G(x^0(t_f)) - \frac{dG}{dx}(t_f) \Big|_0^0 (x(t_f) - x^0(t_f))$$

che, per la convessità di G , implica ancora $J(x, u) \geq J(x^0, u^0)$ per ogni soluzione ammissibile. \square

Esempio 7.4 - Si consideri il circuito rappresentato in Fig. 7.9 e si suppongano assegnati l'intervallo $[t_i, t_f]$ di funzionamento e i valori iniziali $x_1(t_i) = x_1^i$ e $x_2(t_i) = x_2^i$ rispettivamente della tensione ai capi del condensatore e della corrente. Supponendo che la tensione di ingresso u debba soddisfare al vincolo:

$$u(t) \in [0, M] \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

si determini l'andamento di detta tensione nell'intervallo di funzionamento in modo da rendere massima la tensione $x_1(t_f)$ ai capi del condensatore nell'istante finale. Si assume che sia verificata la diseguaglianza:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.96)$$

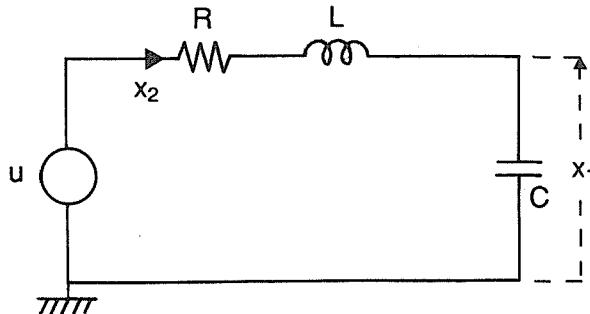


Fig. 7.9

Le equazioni che descrivono il sistema considerato sono:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} x_2 \quad (7.97)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \quad (7.98)$$

con le condizioni iniziali assegnate:

$$x_1(t_i) = x_1^i \quad (7.99)$$

$$x_2(t_i) = x_2^i \quad (7.100)$$

L'indice di costo da rendere minimo è:

$$J(x) = - \int_{t_i}^{t_f} x_2(t) dt$$

Per il problema considerato condizioni necessarie e sufficienti di ottimo sono date dal Teorema 7.20. Per determinare le soluzioni ottime normali si considera la funzione Hamiltoniana:

$$H(x, u, 1, \lambda) = -x_2 + \frac{1}{C} \lambda_1 x_2 + \lambda_2 \left(-\frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \right)$$

Le condizioni di ottimo (7.93), (7.94), (7.95) danno luogo alle:

$$\dot{\lambda}_1^0 = \frac{1}{L} \lambda_2^0 \quad (7.101)$$

$$\dot{\lambda}_2^0 = 1 - \frac{1}{C} \lambda_1^0 + \frac{R}{L} \lambda_2^0 \quad (7.102)$$

$$\lambda_2^0(t) u^0(t) \leq \lambda_2^0(t) \omega \quad \forall \omega \in [0, M], \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (7.103)$$

$$\lambda_1^0(t_f) = 0 \quad (7.104)$$

$$\lambda_2^0(t_f) = 0 \quad (7.105)$$

Integrando le equazioni di costato (7.101), (7.102) e imponendo le relative condizioni finali (7.104), (7.105), si ottiene:

$$\begin{aligned} \lambda_1^0(t) &= C - C e^{-\xi \omega_n (t_f - t)} \left[\cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} (t_f - t)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} (t_f - t)) \right] \\ \lambda_2^0(t) &= -\frac{e^{-\xi \omega_n (t_f - t)}}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} (t_f - t)) \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

e, in base all'ipotesi (7.96), risulta $0 < \xi < 1$.

Poiché λ_0^2 non può annullarsi su intervalli di tempo di misura positiva, la (7.103) fornisce il controllo ottimo:

$$\begin{aligned} u^0(t) &= \frac{M}{2}(1 - \text{sign}\{\lambda_2^0(t)\}) \\ &= \frac{M}{2}[1 + \text{sign}\{\sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}(t_f - t))\}] \end{aligned}$$

Sostituendo la precedente espressione nelle equazioni (7.97) e (7.98) si perviene a un sistema differenziale per le variabili di stato che va integrato imponendo le relative condizioni iniziali (7.99), (7.100).

Esempio 7.5 - Si consideri il sistema lineare del secondo ordine descritto dalle equazioni:

$$\dot{x}_1 = u \quad (7.106)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + d \quad (7.107)$$

ove d è un ingresso di disturbo che si suppone noto e costantemente eguale all'unità. Fissate le condizioni iniziali:

$$x_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 1$$

e la condizione finale:

$$x_2(1) = 0 \quad (7.108)$$

si desidera determinare il controllo e lo stato che minimizzano l'indice di costo:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x_1^2(t) + u^2(t)] dt + \frac{1}{2} x_1^2(1)$$

Il problema suddetto è del tipo del Problema 7.19 e pertanto condizioni necessarie e sufficienti di ottimo si deducono applicando il Teorema 7.20. In particolare, per la ricerca delle soluzioni ottime normali, si considera l'Hamiltoniano:

$$H(x, u, 1, \lambda) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 u + \lambda_2 x_1 + \lambda_2$$

La condizione (7.93) si particolarizza nelle:

$$\dot{\lambda}_1^0 = -x_1^0 - \lambda_2^0 \quad (7.109)$$

$$\dot{\lambda}_2^0 = 0 \quad (7.110)$$

Ricordando l'Osservazione 7.17, poiché nel caso considerato $U = \mathbb{R}$, la condizione (7.94) implica:

$$\frac{\partial H}{\partial u} \Big|_0 = u^0 + \lambda_1^0 = 0 \quad (7.111)$$

La condizione finale (7.95), tenuto conto del fatto che $x_1(t_f)$ è libero mentre $x_2(t_f)$ è fissato, diviene:

$$\lambda_1^0(1) = \frac{dG}{dx_1(1)} \Big|_0^0 = x_1^0(1) \quad (7.112)$$

Dalla (7.110) si ha:

$$\lambda_2^0(t) = \lambda_2^i$$

Sostituendo quest'ultima e la (7.111) nelle (7.106) e (7.109) si ha il sistema differenziale:

$$\dot{x}_1^0 = -\lambda_1^0$$

$$\dot{\lambda}_1^0 = -x_1^0 - \lambda_2^i$$

Integrando il precedente sistema si ottiene:

$$x_1^0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \lambda_2^i \quad (7.113)$$

$$\lambda_1^0(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

Sostituendo la (7.113) nella (7.107) ed integrando ancora si ha:

$$x_2^0(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (d - \lambda_2^i)t + C_3$$

Imponendo le condizioni sullo stato iniziale e quelle finali (7.108), (7.112), ricordando che si è supposto $d = 1$, si ha il sistema:

$$C_1 + C_2 - \lambda_2^i = 0$$

$$C_1 - C_2 + C_3 = 1$$

$$C_1 e - C_2 e^{-1} - \lambda_2^i + C_3 = -1$$

$$2C_1 e - \lambda_2^i = 0$$

da cui si ricava:

$$\lambda_2^i = \frac{4e}{4 - e - e^{-1}} \quad C_1 = \frac{2}{4 - e - e^{-1}}$$

$$C_2 = \frac{4e - 2}{4 - e - e^{-1}} \quad C_3 = \frac{3e - e^{-1}}{4 - e - e^{-1}}$$

In conclusione esiste un'unica soluzione ottima normale data da:

$$u^0(t) = \frac{2e^t - (4e - 2)e^{-t}}{4 - e - e^{-1}}$$

$$x_1^0(t) = \frac{2e^t + (4e - 2)e^{-t} - 4e}{4 - e - e^{-1}}$$

$$x_2^0(t) = \frac{2e^t - (4e - 2)e^{-t} + (4 - 5e - e^{-1})t + 3e - e^{-1}}{4 - e - e^{-1}}$$

in corrispondenza alla quale si ottiene:

$$J(x^0, u^0) = 4 \frac{2e - (e-1)^2}{(4-e-e^{-1})^2}$$

7.5 CENNO AI PROBLEMI DI CONTROLLO OTTIMO SINGOLARI

In questo paragrafo si darà un breve cenno a una classe di problemi di controllo ottimo, detti *singolari*, caratterizzati dal fatto di ammettere soluzioni ottime in corrispondenza alle quali la funzione Hamiltoniana risulta indipendente da alcune variabili di controllo su sottointervalli di misura positiva dell'intervallo di controllo.

In particolare si dà la seguente definizione:

Definizione 7.21 - Con riferimento al Problema 7.9, indicata con (x^0, u^0, t_f^0) una soluzione ottima e con λ_0^0, λ^0 i corrispondenti moltiplicatori, essa si dice *singolare* se esiste un sottointervallo $[t', t''] \subset [t_i, t_f^0]$ con $t'' > t'$, tale che $H(x^0(t), \omega, \lambda_0^0, \lambda^0(t), t)$ risulta indipendente da almeno una delle componenti di ω in $[t', t'']$. Il suddetto sottointervallo si dice di *singolarità*.

Una analoga definizione può essere data per un *estremale singolare*. \square

Ovviamente un estremale singolare (e quindi una soluzione ottima singolare) soddisfa tutti i risultati fin qui stabiliti per le soluzioni estremali e in particolare le condizioni necessarie fornite dal Teorema 7.10. Tuttavia, come è evidente, il principio del minimo non è utile per determinare le soluzioni estremali singolari nei rispettivi sottointervalli di singolarità, in quanto, nei suddetti sottointervalli, la condizione necessaria (7.39) è non significativa rispetto alle componenti di ω dalle quali $H(x^*, \omega, \lambda_0^*, \lambda^*, t)$ è indipendente (essa risulta soddisfatta per ogni valore ammissibile delle suddette componenti). Occorre pertanto utilizzare altre condizioni necessarie di ottimo per determinare eventuali soluzioni estremali singolari.

Un semplice risultato è disponibile nel caso in cui l'Hamiltoniano presenta la seguente struttura:

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda, t) = H_1(x, \lambda_0, \lambda, t) + H_2(x, \lambda_0, \lambda, t)N(x, u, \lambda_0, \lambda, t) \quad (7.114)$$

in cui H_1, H_2, N sono funzioni scalari dei rispettivi argomenti. Si può infatti dimostrare il seguente teorema.

Teorema 7.22 - Con riferimento al Problema 7.9, nell'ipotesi che l'Hamiltoniano presenti la struttura (7.114), sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione estremale e siano λ_0^*, λ^* i corrispondenti moltiplicatori, tali che $N(x^*, \omega, \lambda_0^*, \lambda^*, t)$ risulti dipendente da ogni componente di ω in ogni sottointervallo di misura positiva di $[t_i, t_f^*]$; condizione necessaria affinché (x^*, u^*, t_f^*) sia un estremale singolare è che esista un

sottointervallo $[t', t''] \subset [t_i, t_f^*]$, con $t'' > t'$, tale che risulti:

$$H_2(x^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t), t) = 0 \quad \forall t \in [t', t''] \quad (7.115)$$

Dimostrazione - La dimostrazione è immediata in quanto, poiché $N(x^*, \omega, \lambda_0^*, \lambda^*, t)$ si è supposto dipendente da ogni componente di ω in ogni sottointervallo di $[t_i, t_f^*]$, gli eventuali sottointervalli di singolarità per l'estremale si verificano necessariamente nei sottointervalli in cui la (7.115) è soddisfatta. \square

Esempio 7.6 - Si consideri il sistema lineare stazionario descritto dalle equazioni:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (7.116)$$

$$\dot{x}_2 = \alpha x_1 + \beta x_2 + u \quad (7.117)$$

Si desidera trasferire lo stato iniziale assegnato:

$$x(0) = x^i$$

nello stato finale:

$$x(t_f) = 0$$

utilizzando un controllo limitato in ampiezza:

$$|u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0, t_f]$$

e rendendo minimo l'indice di costo:

$$J(x, t_f) = \int_0^{t_f} [x_1^2(t) + x_2^2(t)] dt$$

Si consideri in particolare il problema dell'esistenza di estremali singolari normali.

L'Hamiltoniano del problema è:

$$H(x, u, 1, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (\alpha x_1 + \beta x_2 + u)$$

e presenta la struttura (7.114), con:

$$H_1(x, 1, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1 x_2 + \alpha \lambda_2 x_1 + \beta \lambda_2 x_2$$

$$H_2(x, 1, \lambda) = \lambda_2$$

$$N(x, u, 1, \lambda) = u$$

Sulla base dei Teoremi 7.10 e 7.22, se (x^*, u^*, t_f^*) è un estremale normale singolare in $[t', t''] \subset [0, t_f^*]$ e se λ^* è il corrispondente costato, in tale sottointervallo

sussistono le seguenti condizioni necessarie:

$$\dot{\lambda}_1^* = -2x_1^* - \alpha\lambda_2^* \quad (7.118)$$

$$\dot{\lambda}_2^* = -2x_2^* - \lambda_1^* - \beta\lambda_2^* \quad (7.119)$$

$$\lambda_2^* = 0 \quad (7.120)$$

$$H_1(x^*, 1, \lambda^*) = x_1^{*2} + x_2^{*2} + \lambda_1^*x_2^* + \alpha\lambda_2^*x_1^* + \beta\lambda_2^*x_2^* = 0 \quad (7.121)$$

$$|u^*(t)| \leq 1 \quad (7.122)$$

Dalle (7.119) e (7.120) si deduce:

$$\lambda_1^* = -2x_2^*$$

e sostituendo quest'ultima nella (7.121), utilizzando la (7.120) si ha:

$$x_1^* = \pm x_2^* \quad (7.123)$$

Eventuali archi singolari dovranno cioè svolgersi lungo le bisettrici del piano di stato.

Sostituendo la (7.123) nella (7.116) si ha:

$$\dot{x}_1^* = \pm x_1^* \quad (7.124)$$

Derivando la (7.123) e tenendo conto della (7.124) si ricava:

$$\dot{x}_2^* = \pm x_2^* \quad (7.125)$$

Sostituendo la (7.125) e la (7.123) nella (7.117) si ha:

$$x_1^*(1 - \alpha \mp \beta) = u^* \quad (7.126)$$

Dalla (7.126), tenendo conto della (7.122), si deduce:

$$|x_1^*| = |x_2^*| = \frac{|u^*|}{|1 - \alpha \mp \beta|} \leq \frac{1}{|1 - \alpha \mp \beta|} \quad (7.127)$$

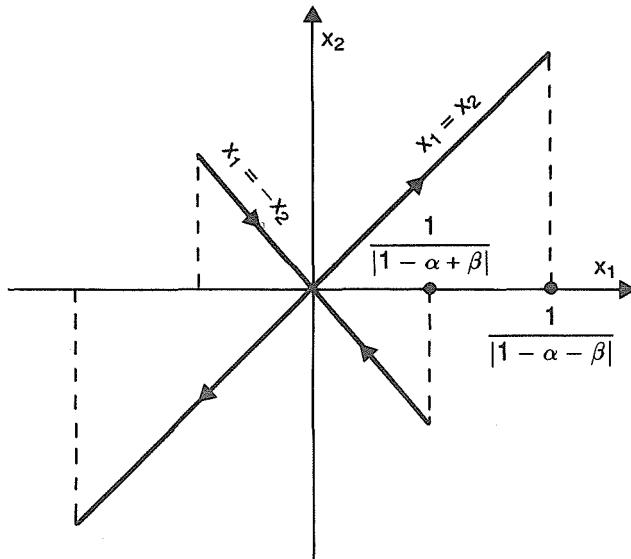


Fig. 7.10

In Fig. 7.10 sono mostrati i segmenti di bisettrici del piano di stato cui debbono appartenere gli eventuali archi estremali singolari, in base alla (7.127).

Integrando la (7.124) e la (7.125) e tenendo conto della (7.123), si ottiene inoltre:

$$x_1^*(t) = x_1^*(t') e^{\pm(t-t')}$$
 (7.128)

$$x_2^*(t) = \pm x_1^*(t') e^{\pm(t-t')}$$
 (7.129)

Si osserva cioè che al segno superiore corrispondono punti della diagonale $x_1 = x_2$ che al crescere di t si allontanano dall'origine, mentre al segno inferiore punti della diagonale $x_1 = -x_2$ che tendono all'origine (come indicato dalla frecce della Fig. 7.10).

Dalla (7.126) si ha infine:

$$u^*(t) = (1 - \alpha \mp \beta)x_1^*(t') e^{\pm(t-t')}$$
 (7.130)

Per poter affermare che le espressioni (7.128), (7.129), (7.130) costituiscono un segmento singolare di un estremale occorrerebbe determinare la parte non singolare dell'estremale stesso e cioè le funzioni x^*, u^* al di fuori dell'intervallo $[t', t'']$, nonché i valori di t_f^* , di t' e di t'' . A tale scopo si potrebbero ricercare gli eventuali estremali non singolari (utilizzando il principio del minimo) che trasferiscono, in qualche istante t' , lo stato iniziale assegnato su uno dei segmenti di singolarità individuati e rappresentati in Fig. 7.10.

7.6 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Considerazioni conclusive sul modo di utilizzare le condizioni necessarie e sufficienti dedotte in questo capitolo, nonché sulla sintetizzabilità delle soluzioni ottenute, possono essere fatte sulla stessa linea seguita nel precedente capitolo. Si rinvia pertanto alle considerazioni conclusive del Paragrafo 6.5.

Capitolo 8

Controllo ottimo di sistemi lineari con indice di costo quadratico

8.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno studiati alcuni problemi di controllo ottimo caratterizzati dal fatto che il sistema da controllare è lineare e quindi può essere descritto da equazioni ingresso–stato e stato–uscita del tipo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}$$

L'intervallo di controllo $[t_i, t_f]$ e lo stato iniziale $x(t_i) = x^i$ sono assegnati e l'indice di costo è un funzionale quadratico dello stato e del controllo.

Tale classe di problemi dà luogo ad una trattazione analitica semplice e, in tali casi, il controllo ottimo cui si perviene è sintetizzabile mediante una struttura a retroazione. Nella suddetta classe possono rientrare i problemi classici della *regolazione* e dell'*asservimento*, qualora formulati come problemi di controllo ottimo. A problemi del tipo suddetto si fa anche spesso riferimento in letteratura con la dizione *problem di minima energia* in quanto, in alcune condizioni particolarmente semplici, il funzionale quadratico nel controllo e nello stato può fornire una misura dell'energia richiesta per espletare l'azione di controllo.

Nel seguito verranno in primo luogo considerati i problemi della regolazione e dell'asservimento ottimo, caratterizzati dall'avere stato finale libero e controllo non vincolato; per tale tipo di problemi, come sarà mostrato, è possibile pervenire a strutture di controllo ottimo sintetizzabili. Verrà successivamente considerato il caso in cui lo stato finale è fissato e per il quale invece la soluzione ottima, se esiste, non è sintetizzabile. Infine verrà studiato il problema con vincoli sull'ampiezza del controllo, considerando sia il caso di stato finale libero sia quello di stato finale fissato.

Si desidera osservare fin d'ora che per tutti i problemi caratterizzati da uno stato finale libero, la normalità della soluzione è garantita: dovendo in effetti avversi l'annullamento del costato finale (nel caso di termine additivo nell'indice di costo

ci si riferisce evidentemente al costato $\bar{\lambda}(t_f)$ di cui alle Osservazioni 6.9 e 7.15) non può risultare $\lambda_0 = 0$ in quanto altrimenti i moltiplicatori si annullerebbero tutti in t_f . Pertanto nel seguito, per tutti i problemi con stato finale libero, si assumerà tacitamente $\lambda_0 = 1$.

È opportuno infine sottolineare che, particolarizzando i risultati forniti nei precedenti paragrafi 6.3 e 7.4, per tutti i problemi che si considereranno in questo capitolo si disporrà di condizioni necessarie e sufficienti di ottimo.

8.2 PROBLEMA DI REGOLAZIONE OTTIMA

L'obiettivo del problema di regolazione ottima dello stato è quello di mantenere lo stato stesso, nell'intervallo di controllo, per quanto possibile prossimo all'origine dello spazio di stato, che si assume come valore di riferimento. Più in particolare si considera il seguente problema.

Problema 8.1 - Considerato il sistema dinamico lineare descritto dalla equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (8.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$; assegnato l'intervallo di controllo $[t_i, t_f]$ e supposto che A e B siano matrici di dimensioni opportune, con elementi funzioni di classe $C^1[t_i, t_f]$, fissato lo stato iniziale:

$$x(t_i) = x^i \quad (8.2)$$

determinare, se esistono, il controllo $u^0 \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$ e lo stato $x^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$ che soddisfano il vincolo dinamico (8.1), la condizione iniziale (8.2) e che rendono minimo l'indice di costo quadratico:

$$J(x, u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \quad (8.3)$$

in cui F e $Q(t)$ sono matrici simmetriche semidefinite positive per ogni $t \in [t_i, t_f]$ e $R(t)$ è una matrice simmetrica definita positiva per ogni $t \in [t_i, t_f]$; si suppone inoltre che gli elementi di R e Q siano funzioni di classe $C^1[t_i, t_f]$. \square

L'indice di costo (8.3) contiene un funzionale quadratico dello stato ed uno quadratico del controllo, in modo che la soluzione ottima nasca dal compromesso tra l'esigenza della fedeltà di risposta e quella di limitare le escursioni delle variabili di controllo. A tali quantità può essere conveniente aggiungere un termine quadratico in $x(t_f)$ così da fornire una attenzione speciale alla riduzione del valore dello stato finale, considerato che, nella formulazione del problema, non è assegnato il valore nullo per lo stesso stato finale.

Per quanto riguarda l'ipotesi di simmetria delle matrici F , $Q(t)$, $R(t)$, essa è evidentemente non limitativa in quanto, per una forma quadratica, si ha ovviamente:

$$z^T S z = z^T \frac{S + S^T}{2} z$$

cosicché, se la S non è simmetrica, essa può essere sostituita da $\frac{1}{2}(S + S^T)$ che lo è.

Si osserva inoltre che la dipendenza dal tempo delle matrici $Q(t)$ ed $R(t)$ può essere motivata con due considerazioni. In primo luogo può risultare conveniente pesare diversamente gli scostamenti dello stato e l'entità del controllo, a seconda dell'istante considerato nell'intervallo $[t_i, t_f]$: in particolare un errore e un valore del controllo in un istante prossimo a t_i sono generalmente più accettabili dello stesso errore e dello stesso valore del controllo in un istante prossimo a t_f . In secondo luogo, qualora si supponessero Q ed R costanti, anche per sistemi stazionari si perverrebbe, come si mostrerà, a strutture di controllo ottime non stazionarie, senza quindi sostanziali vantaggi ai fini del calcolo della soluzione o della realizzazione del sistema controllante.

Si osserva infine che la scelta di matrici $Q(t)$ e F semidefinite positive corrisponde ad ammettere alla stessa stregua del valore nullo (di riferimento) per lo stato, valori di esso che appartengono, istante per istante, agli spazi nulli di $Q(t)$ e di F . Tale situazione ha interesse quando si desidera imporre un riferimento nullo solo ad alcune delle componenti dello stato.

Per ottenere la soluzione del problema considerato si associa ad esso una equazione differenziale matriciale non lineare, detta *equazione di Riccati*, e, sfruttando la convessità della funzione Langrangiana, si dimostra che, se la suddetta equazione ha soluzione nell'intervallo di controllo, esiste un controllo ottimo sintetizzabile. Si dimostra successivamente che l'*equazione di Riccati* ammette un'unica soluzione in $[t_i, t_f]$; si verifica infine che la soluzione del problema di controllo ottimo è unica.

Definizione 8.2 - Si definisce *equazione differenziale di Riccati* associata al Problema 8.1 la seguente equazione differenziale matriciale non lineare:

$$\dot{K}(t) = K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t) - K(t)A(t) - A^T(t)K(t) - Q(t) \quad (8.4)$$

con la condizione finale:

$$K(t_f) = F \quad (8.5)$$

□

Il problema differenziale (8.4), (8.5) va normalmente risolto per via numerica, data la non linearità dell'*equazione differenziale* (8.4). A tale proposito, però, si osserva quanto segue.

Osservazione 8.3 - Se il problema differenziale (8.4), (8.5) ammette un'unica soluzione, questa risulta simmetrica, come si può facilmente dimostrare, verificando che la matrice K^T soddisfa lo stesso problema differenziale (8.4), (8.5). Pertanto, se il problema differenziale considerato ammette un'unica soluzione, essa può essere determinata risolvendo numericamente $\frac{n(n+1)}{2}$ (anziché n^2) equazioni differenziali scalari.

Teorema 8.4 - Nell'ipotesi che l'equazione di Riccati (8.4), (8.5) associata al Problema 8.1 ammetta una soluzione K nell'intervallo $[t_i, t_f]$, il Problema 8.1 è risolubile ed ha una soluzione normale sintetizzabile, data da:

$$u^0(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)K(t)x^0(t) \quad (8.6)$$

dove lo stato x^0 è soluzione dell'equazione:

$$\dot{x}^0(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x^0(t), \quad x^0(t_i) = x^i \quad (8.7)$$

Inoltre il valore minimo dell'indice di costo è dato da:

$$J(x^0, u^0) = \frac{1}{2}x^{iT}K(t_i)x^i \quad (8.8)$$

Dimostrazione - Poiché il Problema 8.1 è un caso particolare del Problema 7.19 con $U = \mathbb{R}^p$, condizioni necessarie e sufficienti di ottimo si ottengono dal Teorema 7.20 tenuto conto anche dell'Osservazione 7.17. In particolare, considerata la funzione Hamiltoniana del problema:

$$H(x, u, 1, \lambda, t) = \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T A x + \lambda^T B u$$

le condizioni (7.93), (7.53), (7.95) si particolarizzano come segue:

$$\dot{\lambda}^0 = -Qx^0 - A^T\lambda^0$$

$$Ru^0 + B^T\lambda^0 = 0$$

$$\lambda^0(t_f) = Fx^0(t_f)$$

Tenendo presente che K soddisfa le (8.4), (8.5) si verifica facilmente che la soluzione data dalle (8.6) e (8.7) assieme al costato:

$$\lambda^0 = Kx^0$$

è ammissibile e soddisfa le precedenti condizioni; essa quindi è ottima. Inoltre si ha:

$$J(x^0, u^0) = \frac{1}{2}x^{0T}(t_f)Fx^0(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} x^{0T}(Q + KBR^{-1}B^TK)x^0 dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^{0T}(t_f)Fx^0(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} x^{0T}(2KBR^{-1}B^TK - KA - A^TK - \dot{K})x^0 dt \\
&= \frac{1}{2}x^{0T}(t_f)Fx^0(t_f) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} (2x^{0T}K\dot{x}^0 + x^{0T}\dot{K}x^0) dt \\
&= \frac{1}{2}x^{0T}(t_f)Fx^0(t_f) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}(x^{0T}Kx^0) dt = \frac{1}{2}x^{iT}K(t_i)x^i
\end{aligned} \quad \square$$

Occorre a questo punto mostrare che l'equazione di *Riccati* (8.4), (8.5) associata al Problema 8.1, ammette una soluzione unica.

Teorema 8.5 - Considerata l'equazione di *Riccati* (8.4) con la condizione finale (8.5), associata al Problema 8.1, essa ammette un'unica soluzione, che risulta semidefinita positiva, nell'intervallo $[t_i, t_f]$.

Dimostrazione - Poiché il secondo membro dell'equazione (8.4) è una funzione quadratica di K , il teorema di esistenza e unicità per la soluzione di equazioni differenziali è applicabile solo localmente. Si può affermare cioè che esiste un sottointervallo $(\hat{t}, t_f]$ in cui l'equazione (8.4) con la condizione (8.5) ammette un'unica soluzione. Per poter estendere tale soluzione sull'intero intervallo $[t_i, t_f]$ occorre escludere la possibilità che in qualche istante $t' < t_f$ qualche elemento della soluzione K diventi illimitato e cioè bisogna escludere che esista un istante $t' < t_f$ e un elemento k_{ij} della matrice K , tali che:

$$\lim_{t \rightarrow t'^+} |k_{ij}(t)| = \infty \quad (8.9)$$

Si mostrerà per assurdo che non esiste alcun istante t' finito in cui la (8.9) è verificata. Supposto quindi che la (8.9) sussista, si consideri un numero $\varepsilon > 0$, tale che $t' + \varepsilon < t_f$. Poiché nell'intervallo $[t' + \varepsilon, t_f]$ l'equazione di *Riccati* ammette soluzione, per il Teorema 8.4 esiste una soluzione ottima per il Problema 8.1, quale che sia il valore fissato per $x(t' + \varepsilon)$. In particolare il valore dell'indice di costo corrispondente sarà dato da:

$$J_{t'+\varepsilon}(x^0, u^0) = \frac{1}{2}x^T(t' + \varepsilon)K(t' + \varepsilon)x(t' + \varepsilon)$$

Poiché per le ipotesi fatte sulle matrici $F, Q(t), R(t)$ risulta necessariamente $J_{t'+\varepsilon}(x^0, u^0) \geq 0$, quale che sia $x(t' + \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, segue che la matrice $K(t' + \varepsilon)$ è semidefinita positiva. Poiché tale conclusione sussiste $\forall \varepsilon \in (0, t_f - t']$ segue che:

$$K(t) \geq 0 \quad \forall t \in (t', t_f]$$

Indicando a questo punto con e_i la colonna i -esima della matrice identica di dimensioni $n \times n$, si osserva che, essendo $K(t)$ simmetrica, deve essere:

$$(e_i \pm e_j)^T K(t)(e_i \pm e_j) = k_{ii}(t) + k_{jj}(t) \pm 2k_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall t \in (t', t_f]$$

La precedente disequazione implica:

$$k_{ii}(t) + k_{jj}(t) \geq 2|k_{ij}(t)| \quad \forall t \in (t', t_f]$$

e quindi, in base alla (8.9), si può affermare che almeno uno dei due elementi k_{ii}, k_{jj} tende all'infinito quando t tende a t'^+ ; supponiamo senza perdita di generalità che ciò sia vero per l'elemento k_{jj} . Si ha quindi:

$$\lim_{t \rightarrow t'^+} k_{jj}(t) = \infty$$

Considerato allora il problema di controllo ottimo nell'intervalle $[t' + \varepsilon, t_f]$ con condizione iniziale $x(t' + \varepsilon) = e_j$ esiste una soluzione ottima e per essa si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{t'+\varepsilon}(x^0, u^0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} e_j^T K(t' + \varepsilon) e_j \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} k_{jj}(t' + \varepsilon) = \infty \end{aligned} \quad (8.10)$$

Se però a questo punto si considera il controllo nullo sull'intervalle $[t' + \varepsilon, t_f]$ e la corrispondente evoluzione libera \hat{x} dello stato, indicando con $\Phi(t, \tau)$ la matrice di transizione dello stato corrispondente alla $A(t)$, si ha:

$$\begin{aligned} J_{t'+\varepsilon}(\hat{x}, 0) &= \frac{1}{2} \hat{x}^T(t_f) F \hat{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t'+\varepsilon}^{t_f} \hat{x}^T(t) Q(t) \hat{x}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} e_j^T \Phi^T(t_f, t' + \varepsilon) F \Phi(t_f, t' + \varepsilon) e_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t'+\varepsilon}^{t_f} e_j^T \Phi^T(t, t' + \varepsilon) Q(t) \Phi(t, t' + \varepsilon) e_j dt \end{aligned}$$

Poiché la $\Phi(t, \tau)$ è limitata in norma, segue che esiste un numero $M > 0$, tale che:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{t'+\varepsilon}(\hat{x}, 0) < M \quad (8.11)$$

D'altra parte per l'ottimalità della soluzione (x^0, u^0) , deve risultare:

$$J_{t'+\varepsilon}(x^0, u^0) \leq J_{t'+\varepsilon}(\hat{x}, 0) \quad \forall \varepsilon \in (0, t_f - t']$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e tenendo conto della (8.11) si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{t'+\varepsilon}(x^0, u^0) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} J_{t'+\varepsilon}(\hat{x}, 0) < M$$

che è in contrasto con la (8.10). Ne consegue l'assurdo della (8.9). In conclusione si deve escludere la possibilità che in qualche istante $t' < t_f$ la soluzione dell'equazione di Riccati tenda ad essere illimitata e pertanto essa ammette un'unica soluzione, semidefinita positiva, in $[t_i, t_f]$. \square

A questo punto, sulla base dei due precedenti teoremi, è possibile affermare che il problema di regolazione considerato ammette per ogni stato iniziale una soluzione ottima sintetizzabile, espressa mediante le (8.6), (8.7). Si dimostrerà ora che tale soluzione ottima è unica.

Teorema 8.6 - Il Problema 8.1 di regolazione ottima ammette un'unica soluzione ottima normale espressa mediante le (8.6), (8.7), (8.8).

Dimostrazione - Si supponga che (x', u') sia una seconda soluzione ottima del problema in esame. Ovviamente risulta $x'(t_i) = x^i$ ed inoltre:

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= Ax' + Bu' = Ax' + Bu' + BR^{-1}B^T Kx' - BR^{-1}B^T Kx' \\ &= (A - BR^{-1}B^T K)x' + Bz\end{aligned}$$

dove

$$z = u' + R^{-1}B^T Kx'$$

e dove K è la soluzione dell'equazione di Riccati (8.4) con la condizione (8.5).

Dalle due precedenti relazioni si ha:

$$\begin{aligned}Bz &= \dot{x}' - (A - BR^{-1}B^T K)x' \\ u' &= z - R^{-1}B^T Kx'\end{aligned}$$

Tenendo conto di tali espressioni risulta:

$$\begin{aligned}u'^T Ru' &= z^T Rz + x'^T KBR^{-1}B^T Kx' - 2x'^T KBz \\ &= z^T Rz + x'^T (KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K)x' - 2x'^T K\dot{x}'\end{aligned}$$

L'indice di costo in corrispondenza alla soluzione considerata è:

$$\begin{aligned}J(x', u') &= \frac{1}{2}x'^T(t_f)Fx'(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} (u'^T Ru' + x'^T Qx') dt = \frac{1}{2}x'^T(t_f)Fx'(t_f) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [z^T Rz + x'^T (KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q)x' - 2x'^T K\dot{x}'] dt \\ &= \frac{1}{2}x'^T(t_f)Fx'(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} (z^T Rz - x'^T \dot{K}x' - 2x'^T K\dot{x}') dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} x'^T(t_f) F x'(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [z^T R z - \frac{d}{dt}(x'^T K x')] dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} z^T R z dt + \frac{1}{2} x'^T K(t_i) x^i
 \end{aligned}$$

Poiché si è supposto che (x', u') è una soluzione ottima, ricordando la (8.8) si ha:

$$\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} z^T R z dt = J(x', u') - \frac{1}{2} x'^T K(t_i) x^i = J(x', u') - J(x^0, u^0) = 0$$

Essendo R una matrice definita positiva, segue che:

$$z(t) = 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
 u' &= -R^{-1} B^T K x' \\
 \dot{x}' &= (A - B R^{-1} B^T K) x' \quad x'(t_i) = x^i
 \end{aligned}$$

Da quest'ultima equazione si ha $x' = x^0$ e quindi anche $u' = u^0$, il che dimostra l'unicità della soluzione ottima. \square

La soluzione del Problema 8.1 è ottenibile, in base a quanto dimostrato, mediante la struttura di controllo lineare a retroazione mostrata in Fig. 8.1, in cui r rappresenta il segnale di riferimento per lo stato che, nel caso considerato, è nullo.

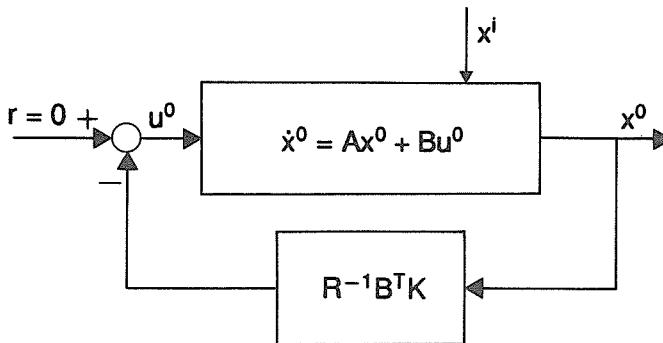


Fig. 8.1

La realizzazione del precedente sistema di controllo richiede la determinazione della matrice $K(t)$ sull'intervallo di controllo $[t_i, t_f]$, richiede cioè la soluzione dell'equazione matriciale di Riccati (8.4) a partire dalla condizione finale (8.5) che, come visto nell'Osservazione 8.3, equivale a un sistema di $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni differenziali non lineari scalari. Si osserva anche che la soluzione di tale problema differenziale non dipende dallo stato iniziale x^i e quindi può essere calcolata una volta per tutte, dato un certo sistema e un certo indice di costo. Si osservi infine che anche nel caso di problemi stazionari (matrici A, B, Q, R costanti), la matrice K , per essere soluzione di una equazione differenziale, continua in generale ad essere funzione del tempo. Pertanto la soluzione ottima del problema di regolazione stazionario è ottenuta mediante un sistema di controllo lineare ma non stazionario.

Si mostrerà nel seguito che, solo nel caso in cui l'intervallo di controllo sia infinito, si può ottenere un sistema di controllo ottimo lineare e stazionario come *soluzione di regime*. Si considererà preliminarmente il problema di regolazione con intervallo di controllo infinito e successivamente lo stesso problema nel caso stazionario. Si osservi che il considerare un intervallo di controllo infinito può avere come conseguenza che il problema non abbia soluzione: ciò in particolare si verifica nel caso in cui il sistema non è completamente controllabile e l'evoluzione della parte non controllabile dello stato diverge, così che il valore dell'indice di costo risulta illimitato quale che sia la funzione di controllo. Tale evenienza non si verifica qualora il sistema da controllare risulti completamente controllabile o esponenzialmente stabile.

Problema 8.7 - Si consideri il sistema dinamico lineare descritto dalla equazione di stato (8.1) in cui le matrici A e B si suppongono limitate in norma oltre che di classe C^1 rispetto a t , sull'intervallo di controllo assegnato $[t_i, \infty)$; nell'ipotesi che il sistema (8.1) sia completamente controllabile o stabile esponenzialmente, assegnato lo stato iniziale (8.2), determinare, se esistono, il controllo $u^0 \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, \infty)$ e lo stato $x^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, \infty)$ che soddisfano il vincolo dinamico (8.1), la condizione iniziale (8.2) e che rendono minimo l'indice di costo quadratico:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt \quad (8.12)$$

dove Q e R sono matrici simmetriche rispettivamente semidefinita e definita positiva, che si suppongono limitate in norma oltre che di classe C^1 rispetto a t in $[t_i, \infty)$. \square

Teorema 8.8 - Il Problema 8.7 di regolazione ottima ammette un'unica soluzione normale sintetizzabile espressa mediante le:

$$u^0(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\bar{K}(t)x^0(t) \quad (8.13)$$

$$\dot{x}^0(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\bar{K}(t)]x^0(t), \quad x^0(t_i) = x^i \quad (8.14)$$

dove $\overline{K}(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati:

$$\dot{\overline{K}}(t) = \overline{K}(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)\overline{K}(t) - \overline{K}(t)A(t) - A^T(t)\overline{K}(t) - Q(t) \quad (8.15)$$

con condizione finale:

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \overline{K}(t_f) = 0 \quad (8.16)$$

Inoltre il valore minimo dell'indice di costo è dato da:

$$J(x^0, u^0) = \frac{1}{2}x^{iT}\overline{K}(t_i)x^i \quad (8.17)$$

Dimostrazione - Considerando un valore finito arbitrario per l'istante finale t_f , in base al precedente Teorema 8.6, il valore minimo dell'indice di costo è dato da:

$$J_{t_f}(x^0, u^0) = \frac{1}{2}x^{iT}K(t_i)x^i$$

Tale quantità ovviamente dipende dal valore attribuito a t_f attraverso la matrice $K(t_i)$ che è il valore in t_i della soluzione dell'equazione (8.4) con condizione finale $K(t_f) = 0$. Si mostrerà in primo luogo che $J_{t_f}(x^0, u^0)$ è superiormente limitato al crescere di t_f .

Infatti se il sistema è completamente controllabile, quale che sia lo stato iniziale x^i , esisterà un controllo u' che lo trasferisce nell'origine in un istante finito t'_f . Indicata con x' la corrispondente evoluzione dello stato, si potrà sempre supporre che la coppia (x', u') sia definita per ogni valore di $t > t'_f$, ponendo eguale a zero il loro valore per $t > t'_f$.

Si può a questo punto affermare che la quantità finita:

$$\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t'_f} (x'^T Q x' + u'^T R u') dt$$

costituisce un limite superiore per $J_{t_f}(x^0, u^0)$ al crescere di t_f . Infatti per ogni $t_f \geq t'_f$ si ha:

$$\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t'_f} (x'^T Q x' + u'^T R u') dt = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} (x'^T Q x' + u'^T R u') dt \geq J_{t_f}(x^0, u^0)$$

D'altro canto, se il sistema è esponenzialmente stabile, si ha che, a partire da un qualunque stato iniziale x^i , con ingresso nullo, l'evoluzione libera dello stato \bar{x} è in norma maggiorata da una funzione esponenziale decrescente:

$$\|\bar{x}(t)\| \leq \alpha e^{-\beta t} \quad \beta > 0$$

Si verifica allora immediatamente che anche in questo caso $J_{t_f}(x^0, u^0)$ è superiormente limitato:

$$\begin{aligned} J_{t_f}(x^0, u^0) &\leq J_{t_f}(\bar{x}, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{t_i}^{\infty} \bar{x}^T Q \bar{x} dt \leq \frac{1}{2} \int_{t_i}^{\infty} \|Q(t)\| \cdot \|\bar{x}(t)\|^2 dt \\ &\leq c \int_{t_i}^{\infty} e^{-2\beta t} dt = \frac{c}{2\beta} e^{-2\beta t_i} \end{aligned}$$

essendo c una costante opportuna.

Si può a questo punto dimostrare facilmente che $J_{t_f}(x^0, u^0)$ è una funzione monotona non decrescente di t_f : siano infatti $(x^{0'}, u^{0'})$ e $(x^{0''}, u^{0''})$ le soluzioni ottime corrispondenti rispettivamente a due distinti valori t'_f e t''_f dell'istante finale. Supposto $t''_f > t'_f$ si ha evidentemente:

$$J_{t''_f}(x^{0''}, u^{0''}) \geq \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t'_f} (x^{0''T} Q x^{0''} + u^{0''T} R u^{0''}) dt \geq J_{t'_f}(x^{0'}, u^{0'})$$

Si può pertanto affermare che $J_{t_f}(x^0, u^0) = \frac{1}{2} x^{iT} K(t_i) x^i$ ha un limite quando t_f tende all'infinito. Data l'arbitrarietà di x^i segue che ogni elemento della matrice simmetrica $K(t_i)$ (e quindi la stessa $K(t_i)$) ha un limite per t_f che tende all'infinito. In conclusione, osservando che t_i è un istante arbitrario, si può affermare che la soluzione K dell'equazione di Riccati (8.4), con condizione finale $K(t_f) = 0$, ammette una soluzione limitata $\bar{K}(t)$ per ogni istante finito t quando t_f tende all'infinito. L'esistenza, l'unicità della soluzione ottima del Problema 8.7 e la sua caratterizzazione mediante le (8.13-16) possono essere giustificate in base ai risultati dei precedenti Teoremi 8.4 e 8.6, considerando il limite per $t_f \rightarrow \infty$ della soluzione ivi individuata e ricordando che:

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} K(t) = \bar{K}(t)$$

□

Osservazione 8.9 - Con riferimento al Problema 8.7 si ha che, nell'ipotesi più restrittiva che la matrice $Q(t)$ abbia autovalori maggiori o uguali di un numero positivo α per ogni $t \in [t_i, \infty)$, è possibile dimostrare la stabilità asintotica del sistema di regolazione ottimo (a catena chiusa). Poiché infatti per la soluzione ottima si ha:

$$\frac{\alpha}{2} \int_{t_i}^{\infty} \|x^0(t)\|^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{t_i}^{\infty} (x^{0T} Q x^0 + u^{0T} R u^0) dt = \frac{1}{2} x^{iT} \bar{K}(t_i) x^i$$

segue che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x^0(t) = 0 \quad \forall x^i \in \mathbb{R}^n$$

La soluzione del problema di regolazione ottima con intervallo di controllo infinito nel caso stazionario si deduce facilmente dal precedente Teorema 8.8.

Teorema 8.10 - Considerato il Problema 8.7 con l'ipotesi aggiuntiva che le matrici A, B, Q, R siano costanti e che la matrice Q sia definita positiva, esiste un'unica soluzione ottima normale sintetizzabile:

$$u^0(t) = -R^{-1}B^T K_r x^0(t) \quad (8.18)$$

$$\dot{x}^0(t) = (A - BR^{-1}B^T K_r)x^0(t) \quad x^0(t_i) = x^i \quad (8.19)$$

dove K_r è la matrice costante, unica soluzione definita positiva dell'*equazione algebrica di Riccati*:

$$K_r B R^{-1} B^T K_r - K_r A - A^T K_r - Q = 0 \quad (8.20)$$

Il valore minimo dell'indice di costo è:

$$J(x^0, u^0) = \frac{1}{2} x^{iT} K_r x^i \quad (8.21)$$

e il sistema di controllo ottimo a catena chiusa è stazionario e asintoticamente stabile.

Dimostrazione - In base al precedente Teorema 8.8 si ha che il valore dell'indice di costo per il problema stazionario considerato è espresso dalla (8.17). Per la stazionarietà del problema si può però affermare che il valore di $J(x^0, u^0)$ deve risultare indipendente dal valore di t_i . Ne segue che l'unica soluzione della equazione differenziale (8.15) con la condizione finale (8.16) è costante per valori finiti di t . Indicata con K_r tale soluzione, essa deve ovviamente soddisfare l'equazione algebrica (8.20).

L'esistenza, l'unicità della soluzione ottima del problema considerato e la sua caratterizzazione mediante le (8.18-21) possono essere giustificate immediatamente in base ai risultati del precedente Teorema 8.8. L'affermazione che K_r risulta definita positiva è giustificata dal fatto che sussiste la (8.21) e che per ogni $x^i \neq 0$ risulta $J(x^0, u^0) > 0$.

□

Osservazione 8.11 - È facile verificare che la soluzione dell'equazione differenziale di *Riccati* (8.4) con la condizione finale (8.5) può essere ottenuta risolvendo un corrispondente problema differenziale lineare. Si consideri in particolare l'equazione differenziale lineare matriciale

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

con condizione finale:

$$\begin{pmatrix} X(t_f) \\ Y(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ F \end{pmatrix}$$

in cui X e Y sono matrici di dimensioni $n \times n$. Si può verificare in maniera diretta che la matrice

$$K(t) = Y(t)[X(t)]^{-1} \quad (8.22)$$

risolve il problema differenziale (8.4), (8.5). Si noti che l'espressione (8.22) per la soluzione K è ben posta in quanto è possibile dimostrare che l'esistenza della soluzione dell'equazione di *Riccati*, già acquisita, implica la non singolarità della matrice $X(t)$ per ogni t .

Osservazione 8.12 - Se all'equazione ingresso-stato (8.1) si associa una equazione stato-uscita del tipo:

$$y(t) = C(t)x(t)$$

si può definire un problema di regolazione dell'uscita del tutto analogo al Problema 8.1 di regolazione dello stato, considerando un indice di costo del tipo:

$$J'(y, u) = \frac{1}{2} y^T(t_f) F' y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [y^T(t) Q'(t) y(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

Tale problema è evidentemente immediatamente riconducibile a quello precedentemente considerato quando si osservi che le matrici

$$F = C^T(t_f) F' C(t_f) \quad (8.23)$$

$$Q(t) = C^T(t) Q'(t) C(t) \quad (8.24)$$

sono entrambe semidefinite positive qualora siano tali le matrici F' e $Q'(t)$. È opportuno osservare che il controllo ottimo che si ottiene per il problema di regolazione dell'uscita risulta ancora funzione lineare dello stato corrente, che quindi deve risultare accessibile, se si vuole realizzare la struttura di regolazione ottima dell'uscita a retroazione rappresentata in Fig. 8.2. In essa la matrice K è ancora soluzione dell'equazione di *Riccati* (8.4) con condizione finale (8.5), purché le matrici F e $Q(t)$, che in esse figurano, siano appunto definite mediante le (8.23) e (8.24).

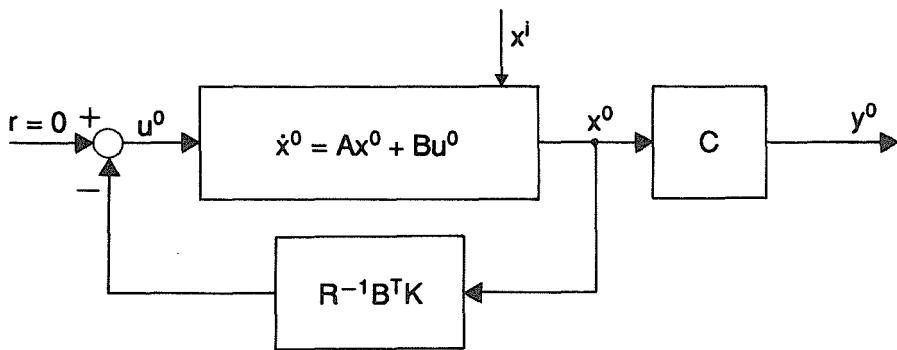


Fig. 8.2

Qualora invece lo stato non sia accessibile occorre, quando possibile, inserire nell'anello di regolazione un *osservatore* dello stato che consenta di effettuare la stima dello stato a partire dall'ingresso e dall'uscita.

Ovviamente per i problemi di regolazione ottima dell'uscita nel caso in cui $t_f \rightarrow \infty$ e nel caso stazionario possono essere sviluppate considerazioni analoghe a quelle fatte per i corrispondenti problemi di regolazione ottima dello stato.

Esempio 8.1 - Si consideri il sistema lineare stazionario descritto dall'equazione:

$$\dot{x} = -\alpha x + \beta u \quad x(0) = x^i$$

con x e u funzioni scalari e con intervallo di controllo $[0, t_f]$ fissato. L'indice di costo considerato è:

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} (x^2(t) + \rho u^2(t)) dt + \mu x^2(t_f)$$

con $\rho > 0$, $\mu \geq 0$. Il problema considerato è un caso particolare del Problema 8.1 e, in base al Teorema 8.6, è garantita l'esistenza, l'unicità e la sintetizzabilità della soluzione ottima che si ottiene particolarizzando le (8.6), (8.7), (8.8). Al fine di risolvere l'equazione di Riccati associata al problema di regolazione considerato, in base all'Osservazione 8.11, si considera il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\beta^2}{\rho} \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X(t_f) \\ Y(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

La matrice di transizione corrispondente a tale sistema è:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma - \alpha}{2\gamma} e^{\gamma t} + \frac{\gamma + \alpha}{2\gamma} e^{-\gamma t} & -\frac{\beta^2}{2\rho\gamma} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) \\ -\frac{1}{2\gamma} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) & \frac{\gamma + \alpha}{2\gamma} e^{\gamma t} + \frac{\gamma - \alpha}{2\gamma} e^{-\gamma t} \end{pmatrix}$$

con $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\rho}}$. Indicati con $\varphi_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, gli elementi di tale matrice, si ha:

$$X(t) = \frac{[\varphi_{22}(t_f) - \mu\varphi_{12}(t_f)]\varphi_{11}(t) + [\mu\varphi_{11}(t_f) - \varphi_{21}(t_f)]\varphi_{12}(t)}{\varphi_{11}(t_f)\varphi_{22}(t_f) - \varphi_{12}(t_f)\varphi_{21}(t_f)}$$

$$Y(t) = \frac{[\varphi_{22}(t_f) - \mu\varphi_{12}(t_f)]\varphi_{21}(t) + [\mu\varphi_{11}(t_f) - \varphi_{21}(t_f)]\varphi_{22}(t)}{\varphi_{11}(t_f)\varphi_{22}(t_f) - \varphi_{12}(t_f)\varphi_{21}(t_f)}$$

per cui l'equazione di Riccati associata al problema considerato, data da:

$$\dot{K} = 2\alpha K + \frac{\beta^2}{\rho} K^2 - 1 \quad K(t_f) = \mu$$

ammette l'unica soluzione:

$$K(t) = \frac{Y(t)}{X(t)} = \frac{[\varphi_{22}(t_f) - \mu\varphi_{12}(t_f)]\varphi_{21}(t) + [\mu\varphi_{11}(t_f) - \varphi_{21}(t_f)]\varphi_{22}(t)}{[\varphi_{22}(t_f) - \mu\varphi_{12}(t_f)]\varphi_{11}(t) + [\mu\varphi_{11}(t_f) - \varphi_{21}(t_f)]\varphi_{12}(t)}$$

L'espressione del controllo ottimo è infine data da:

$$u^0(t) = -\frac{\beta}{\rho} K(t) x^0(t)$$

con x^0 soluzione dell'equazione lineare:

$$\dot{x}^0(t) = -\left(\alpha + \frac{\beta^2}{\rho} K(t)\right) x^0(t) \quad x^0(t_i) = x^i$$

Il valore minimo dell'indice di costo è:

$$J(x^0, u^0) = K(0)x^{i^2} = \frac{\mu\varphi_{11}(t_f) - \varphi_{21}(t_f)}{\varphi_{22}(t_f) - \mu\varphi_{12}(t_f)} x^{i^2}$$

Esempio 8.2 - Si consideri il problema di regolazione ottima del sistema lineare:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}x + u \quad x(0) = x^i$$

con indice di costo:

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} \left[\frac{1}{2} e^{-t} x^2(t) + 2e^{-t} u^2(t) \right] dt$$

Per determinare la soluzione ottima occorre risolvere l'equazione di *Riccati* associata:

$$\dot{K} = \frac{1}{2} e^t K^2 - K - \frac{1}{2} e^{-t} \quad K(t_f) = 0$$

È possibile verificare che la soluzione di tale problema differenziale è:

$$K(t) = \frac{1 - e^{t-t_f}}{e^t + e^{2t-t_f}}$$

Il controllo ottimo è perciò dato da:

$$u^0(t) = -\frac{1 - e^{t-t_f}}{2(e^t + e^{2t-t_f})} x^0(t)$$

Lo stato corrispondente è soluzione dell'equazione:

$$\dot{x}^0(t) = \frac{e^t + e^{2t-t_f} + e^{t-t_f} - 1}{2(e^t + e^{2t-t_f})} x^0(t) \quad x^0(0) = x^i$$

Il valore minimo dell'indice di costo è:

$$J(x^0, u^0) = \frac{1 - e^{-t_f}}{1 + e^{-t_f}} x^{i^2}$$

Esempio 8.3 - Si consideri nuovamente l'Esempio 8.1 con le ipotesi aggiuntive $t_f \rightarrow \infty$, $\mu = 0$. In questo caso il problema diviene del tipo considerato nel Teorema 8.10. L'equazione di *Riccati* algebrica (8.20) diviene:

$$\frac{\beta^2}{\rho} K_r^2 + 2\alpha K_r - 1 = 0$$

L'unica soluzione positiva di tale equazione è:

$$K_r = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 / \rho}$$

Pertanto la soluzione del problema, particolarizzando le (8.18), (8.19) e (8.21), è data da:

$$u^0(t) = \frac{\beta}{\rho} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\rho}} \right) x^0(t)$$

$$\dot{x}^0(t) = - \left[\alpha + \frac{\beta^2}{\rho} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\rho}} \right) \right] x^0(t) \quad x^0(0) = x^i$$

$$J(x^0, u^0) = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\rho}} \right) x^{i^2}$$

8.3 PROBLEMA DI ASSERVIMENTO OTTIMO

Il problema dell'asservimento è quello di mantenere per quanto possibile l'evoluzione dello stato o dell'uscita prossima all'evoluzione di un segnale di riferimento assegnato e diverso da zero. In particolare una formulazione di questo problema di controllo ottimo è la seguente.

Problema 8.13 - Considerato il sistema dinamico lineare descritto dalla equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (8.25)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$; assegnato l'intervallo di controllo $[t_i, t_f]$ e supposto che A e B siano matrici di dimensioni opportune con elementi funzioni di classe $C^1[t_i, t_f]$, fissato lo stato iniziale:

$$x(t_i) = x^i \quad (8.26)$$

assegnata una funzione vettoriale $r \in C^1[t_i, t_f]$ di dimensione n che costituisce un riferimento per lo stato, determinare, se esistono, il controllo $u^0 \in \bar{C}^0[t_i, t_f]$ e lo stato $x^0 \in \bar{C}^1[t_i, t_f]$, che soddisfano il vincolo dinamico (8.25), la condizione iniziale (8.26) e che rendono minimo l'indice di costo quadratico:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \{ [r(t) - x(t)]^T Q(t) [r(t) - x(t)] + u^T(t) R(t) u(t) \} dt \quad (8.27)$$

in cui $Q(t)$ è una matrice simmetrica semidefinita positiva per ogni $t \in [t_i, t_f]$ e $R(t)$ è una matrice simmetrica definita positiva per ogni $t \in [t_i, t_f]$; si suppone inoltre che gli elementi di Q e R siano funzioni di classe $C^1[t_i, t_f]$. \square

Considerazioni analoghe a quelle fatte in relazione al Problema 8.1 possono qui ovviamente essere ripetute. Nell'indice di costo (8.27) non si è però introdotto un termine quadratico nell'errore finale $r(t_f) - x(t_f)$, analogo a quello presente nell'indice (8.3) per il problema di regolazione, in quanto, potendo r variare nel tempo, la riduzione dell'errore nell'istante finale non presenta particolare interesse ai fini della fedeltà di risposta in istanti successivi a t_f (si osservi invece che se nel problema di regolazione si avesse $x(t_f) = 0$ e si assumesse $u(t) = 0$ per $t > t_f$, si continuerebbe ad avere $x(t) = 0$ per ogni $t > t_f$).

Anche al Problema 8.13 di asservimento ottimo può essere associata l'equazione matriciale di *Riccati* (8.4) con la condizione finale:

$$K(t_f) = 0 \quad (8.28)$$

con le considerazioni di cui all'Osservazione 8.3.

La soluzione del Problema 8.13 può essere ottenuta sulla base dei seguenti teoremi.

Teorema 8.14 - Il Problema 8.13 di asservimento ottimo è risolubile ed ha una sola soluzione normale sintetizzabile data da:

$$u^0(t) = R^{-1}(t)B^T(t)[g(t) - K(t)x^0(t)] \quad (8.29)$$

dove lo stato x^0 è soluzione dell'equazione:

$$\dot{x}^0(t) = [A(t) - B(t)R^{-1}(t)B^T(t)K(t)]x^0(t) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) \quad x^0(t_i) = x^i \quad (8.30)$$

e dove g è soluzione dell'equazione differenziale lineare:

$$\dot{g}(t) = [K(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t) - A^T(t)]g(t) - Q(t)r(t) \quad (8.31)$$

con condizione finale:

$$g(t_f) = 0 \quad (8.32)$$

Inoltre il valore minimo dell'indice di costo è dato da:

$$J(x^0, u^0) = \frac{1}{2}x^{0T}(t_i)K(t_i)x^0(t_i) - x^{0T}(t_i)g(t_i) + v(t_i) \quad (8.33)$$

dove v è soluzione dell'equazione differenziale lineare:

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{2}g^T(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)g(t) - \frac{1}{2}r^T(t)Q(t)r(t) \quad (8.34)$$

con condizione finale:

$$v(t_f) = 0 \quad (8.35)$$

Dimostrazione - Anche per il Problema 8.13 sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 7.20, pertanto tutte e sole le soluzioni ottime sono le soluzioni ammissibili che soddisfano le condizioni che particolarizzano le (7.93), (7.53), (7.95). Poiché la funzione Hamiltoniana del problema ha espressione:

$$H(x, u, 1, \lambda, t) = \frac{1}{2}(r - x)^T Q(r - x) + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T A x + \lambda^T B u$$

tali condizioni diventano:

$$\dot{\lambda}^0 = -Qx^0 - A^T\lambda^0 + Qr$$

$$\begin{aligned} Ru^0 + B^T \lambda^0 &= 0 \\ \lambda^0(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

Tenendo presente che, in base al Teorema 8.5, l'equazione di Riccati (8.4) con condizione (8.28) ammette una soluzione, si verifica facilmente che la soluzione data dalle (8.29-32) è ammissibile e assieme al costato:

$$\lambda^0 = Kx^0 - g$$

soddisfa le precedenti equazioni; pertanto essa è ottima.

Per quanto riguarda il valore minimo dell'indice di costo, si osserva che:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x^{0T}(t_i)K(t_i)x^0(t_i) - x^{0T}(t_i)g(t_i) + v(t_i) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}x^{0T}Kx^0 - x^{0T}g + v \right) dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} (-\dot{x}^{0T}Kx^0 - \frac{1}{2}x^{0T}\dot{K}x^0 + \dot{x}^{0T}g + x^{0T}\dot{g} - \dot{v}) dt \end{aligned}$$

Sostituendo le (8.30), (8.4), (8.31), (8.34) nella precedente espressione e manipolando il risultato, si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x^{0T}(t_i)K(t_i)x^0(t_i) - x^{0T}(t_i)g(t_i) + v(t_i) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \{ [r(t) - x^0(t)]^T Q(t) [r(t) - x^0(t)] + u^{0T}(t) R(t) u^0(t) \} dt \quad \square \end{aligned}$$

Resta a questo punto da dimostrare l'unicità della soluzione ottima di cui si è finora acquisita l'esistenza.

Teorema 8.15 - Il Problema 8.13 di asservimento ottimo ammette l'unica soluzione ottima normale data dal precedente Teorema 8.14.

Dimostrazione - Si supponga che (x', u') sia una seconda soluzione ottima del problema in esame. Ovviamente risulta:

$$x'(t_i) = x^i$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= Ax' + Bu' = Ax' + Bu' + BR^{-1}B^T K x' - BR^{-1}B^T K x' \\ &\quad + BR^{-1}B^T g - BR^{-1}B^T g \\ &= (A - BR^{-1}B^T K)x' + Bz + BR^{-1}B^T g \end{aligned}$$

dove:

$$z = u' + R^{-1}B^T K x' - R^{-1}B^T g$$

e dove K e g sono rispettivamente soluzione dell'equazione di *Riccati* (8.4) con condizione finale (8.28) e dell'equazione (8.31) con condizione finale (8.32). Dalle due precedenti relazioni si ha:

$$\begin{aligned} Bz &= \dot{x}' - (A - BR^{-1}B^T K)x' - BR^{-1}B^T g \\ u' &= z - R^{-1}B^T K x' + R^{-1}B^T g \end{aligned}$$

Tenendo conto di tali espressioni si ricava:

$$\begin{aligned} u'^T Ru' &= z^T Rz + x'^T KBR^{-1}B^T K x' + g^T BR^{-1}B^T g \\ &\quad - 2x'^T KBz + 2g^T Bz - 2x'^T KBR^{-1}B^T g \\ &= z^T Rz + x'^T (KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K)x' - 2x'^T K\dot{x}' \\ &\quad + 2g^T \dot{x}' - 2g^T Ax' + 2g^T BR^{-1}B^T K x' - g^T BR^{-1}B^T g \end{aligned}$$

Utilizzando la funzione v , soluzione dell'equazione (8.34) con condizione finale (8.35), l'indice di costo in corrispondenza alla soluzione considerata è:

$$\begin{aligned} J(x', u') &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [u'^T Ru' + (r - x')^T Q(r - x')] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [z^T Rz + x'^T (KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q)x' \\ &\quad - 2x'^T K\dot{x}' + 2g^T \dot{x}' + 2(-g^T A + g^T BR^{-1}B^T K - r^T Q)x' \\ &\quad - g^T BR^{-1}B^T g + r^T Qr] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [z^T Rz - x'^T K x' - 2x'^T K\dot{x}' + 2g^T \dot{x}' + 2g^T x' - v] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [z^T Rz - \frac{d}{dt}(x'^T K x' - 2x'^T g + v)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} z^T Rz dt + \frac{1}{2} x'^T K(t_i) x^i - x'^T g(t_i) + v(t_i) \end{aligned}$$

Confrontando quest'ultima espressione con il valore dell'indice di costo minimo, dato dalla (8.33), e ricordando che $R(t)$ è definita positiva in $[t_i, t_f]$, segue che:

$$z(t) = 0 \quad \forall t \in [t_i, t_f]$$

Conseguentemente:

$$u' = R^{-1}B^T(g - Kx')$$

$$\dot{x}' = (A - BR^{-1}B^T K)x' + BR^{-1}B^T g \quad x'(t_i) = x^i$$

Da quest'ultima equazione si ha che $x' = x^0$ e quindi anche $u' = u^0$, il che dimostra l'unicità della soluzione ottima. \square

La soluzione del Problema 8.13 è ottenibile, in base a quanto dimostrato, mediante la struttura di controllo lineare a retroazione mostrata in Fig. 8.3.

La realizzazione di tale sistema di controllo richiede la determinazione della matrice $K(t)$ e del vettore $g(t)$ nell'intervallo di controllo $[t_i, t_f]$, richiede cioè la soluzione sia dell'equazione di Riccati (8.4) sia dell'equazione lineare (8.31) a partire dalle condizioni finali (8.28) e (8.32). Si noti che tali soluzioni non dipendono dallo stato iniziale x^i . Per quanto riguarda la soluzione dell'equazione di Riccati sussistono le considerazioni già fatte con riferimento al Problema 8.1 di regolazione; per quanto riguarda l'equazione (8.31) occorre osservare che la sua soluzione a partire dalla condizione finale richiede la conoscenza a priori del segnale di riferimento su tutto l'intervallo di controllo. Nel caso che tale conoscenza non sia disponibile (evoluzione del riferimento non prevedibile) la soluzione precedentemente ottenuta non è realizzabile.

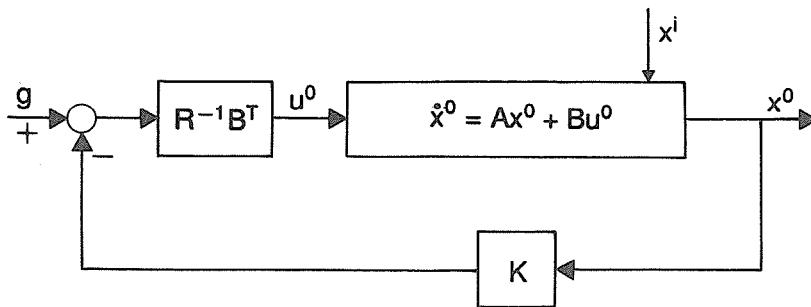


Fig. 8.3

Osservazione 8.16 - L'ipotesi che il riferimento sia una funzione di classe $C^1[t_i, t_f]$, prevista nella formulazione del Problema 8.13, può risultare eccessivamente limitativa rispetto a possibili esigenze applicative. In effetti essa può essere rimossa arrivando a considerare problemi con segnali di riferimento che presentano istanti isolati di discontinuità di prima specie.

Osservazione 8.17 - Il problema di asservimento ottimo stazionario su intervallo di controllo infinito richiede ipotesi particolari sull'andamento asintotico di r . Infatti, anche supponendo di essere nelle ipotesi del Teorema 8.10, così che la matrice K tende al valore costante K_r soluzione dell'equazione algebrica (8.20), il calcolo di g richiederebbe la soluzione dell'equazione (8.31) su un intervallo di tempo infinito con la condizione finale:

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} g(t_f) = 0$$

Tale integrazione è possibile solo se esiste una soluzione di regime e cioè solo ammettendo per il riferimento r andamenti particolari (ad esempio polinomiali, sinusoidali, esponenziali). Per un valore costante \bar{r} del riferimento la (8.31) ammette la soluzione costante di regime:

$$g_r = [K_r B R^{-1} B^T - A^T]^{-1} Q \bar{r}$$

dove l'inversa indicata esiste nelle ipotesi del Teorema 8.10, in quanto la matrice da invertire è la trasposta col segno cambiato di quella che caratterizza il sistema (8.19), che ha autovalori non nulli in quanto il sistema stesso a catena chiusa è asintoticamente stabile.

Osservazione 8.18 - Per quanto riguarda il problema di asservimento ottimo dell'uscita è possibile ripetere considerazioni analoghe a quelle fatte nell'Osservazione 8.12 per il problema di regolazione ottima dell'uscita.

Esempio 8.4 - Si consideri il problema di asservimento ottimo per il sistema descritto dall'equazione ingresso-stato:

$$\dot{x} = u \quad x(0) = 0$$

con l'indice di costo:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(r(t) - x(t))^2 + \rho u^2(t)] dt$$

con $\rho > 0$ e con r funzione di riferimento assegnata nell'intervallo $[0, t_f]$.

Particularizzando i risultati del Teorema 8.14, si ha che la soluzione ottima del problema è la seguente:

$$\begin{aligned} u^0(t) &= \frac{1}{\rho}(g(t) - K(t)x^0(t)) \\ \dot{x}^0(t) &= -\frac{K(t)}{\rho}x^0(t) + \frac{1}{\rho}g(t) \quad x^0(0) = 0 \end{aligned}$$

dove K e g sono rispettivamente soluzioni delle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= \frac{K^2(t)}{\rho} - 1 & K(t_f) &= 0 \\ \dot{g}(t) &= \frac{K(t)}{\rho}g(t) - r(t) & g(t_f) &= 0 \end{aligned}$$

Integrando la prima delle due si ottiene:

$$K(t) = \sqrt{\rho} \operatorname{tgh} \frac{t_f - t}{\sqrt{\rho}}$$

Per ottenere la soluzione ottima occorre a questo punto integrare l'equazione differenziale lineare:

$$\dot{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\operatorname{tgh} \frac{t_f - t}{\sqrt{\rho}} \right) g(t) - r(t) \quad g(t_f) = 0$$

avendo preliminarmente assegnato l'andamento di r .

In particolare, posto $r(t) = 1$ e $t_f = 1$, si ottengono numericamente per g, u^0, x^0 gli andamenti riportati in Fig. 8.4 a), b), c) per diversi valori di ρ . Come prevedibile la fedeltà di risposta aumenta al diminuire di ρ , quando cioè nell'indice di costo il termine relativo allo scostamento fra andamento desiderato e andamento attuale dello stato diventa prevalente.

In Fig. 8.5 a), b) sono riportati, per diversi valori di ρ , gli andamenti calcolati rispettivamente per g e x^0 , supponendo che sia $x(0) = 1$, $t_f = 5$ e che per il riferimento (alla luce della Osservazione 8.16) si abbia:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [0, 2.5] \\ 1 & \forall t \in [2.5, 5] \end{cases}$$

È interessante osservare l'andamento “anticipatorio” della soluzione ottima del problema: lo stato del sistema comincia a crescere (attorno a $t = 2$) prima che nel riferimento si abbia la variazione a gradino (per $t = 2.5$), in modo che

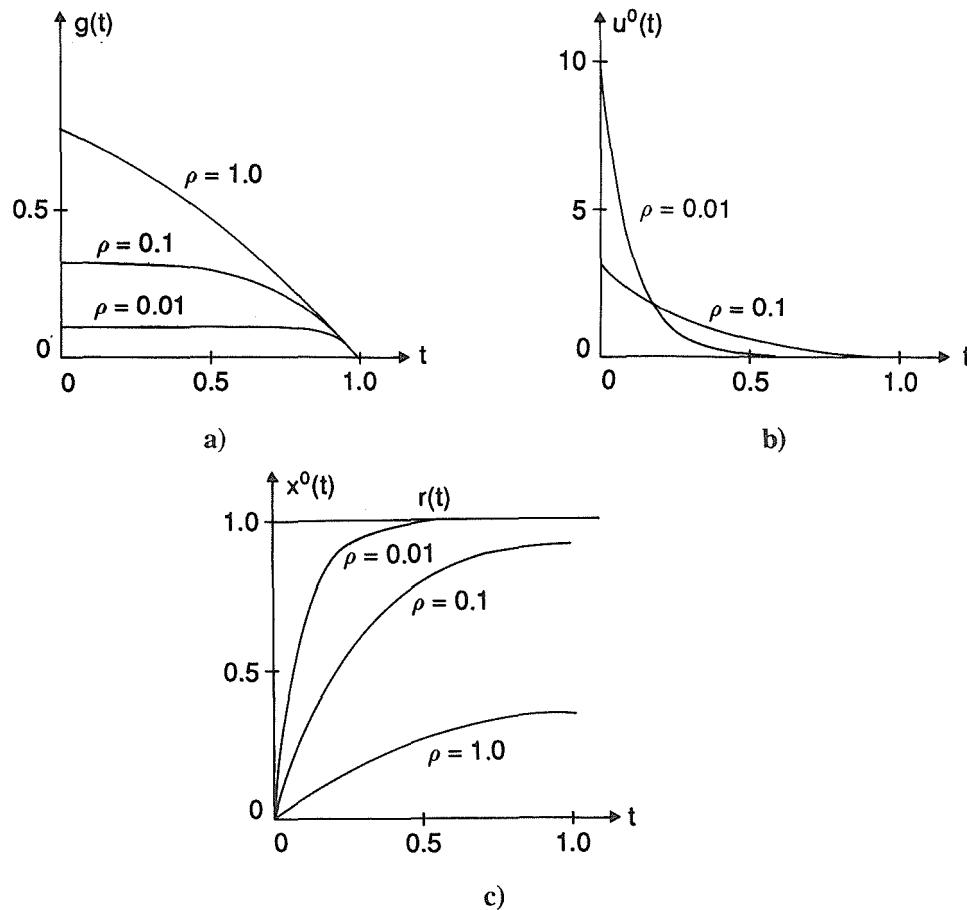


Fig. 8.4

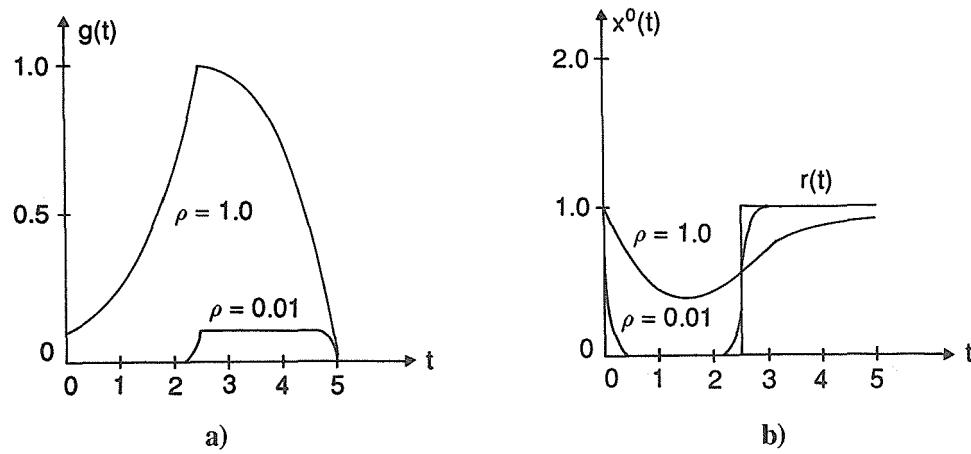


Fig. 8.5

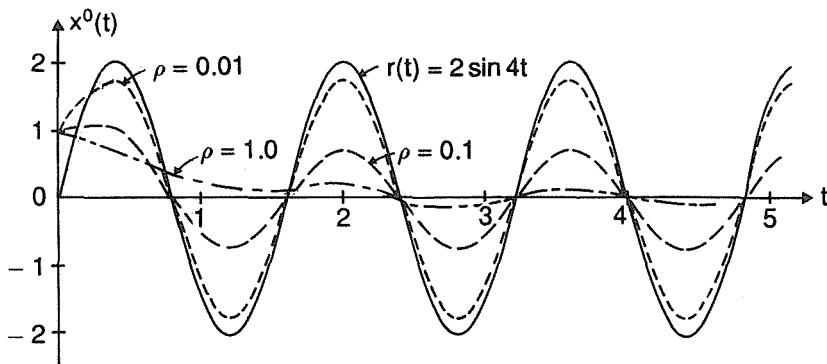


Fig. 8.6

lo scostamento sia abbastanza piccolo negli istanti immediatamente successivi. Anche in questo caso si nota che la fedeltà di risposta aumenta al decrescere di ρ .

Infine in Fig. 8.6 è riportato per diversi valori di ρ l'andamento calcolato per x^0 , supponendo $x(0) = 1$, $t_f = 5$, $r(t) = 2 \sin 4t$. Si osserva che, dopo un transitorio iniziale, l'andamento di x^0 segue le oscillazioni del riferimento senza apprezzabili sfasamenti e con scostamenti tanto minori quanto più ρ è piccolo.

8.4 PROBLEMA DI REGOLAZIONE CON ERRORE FINALE NULLO

In questo paragrafo si considererà il seguente problema di regolazione ottima.

Problema 8.19 - Considerato il sistema dinamico lineare descritto dalla equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (8.36)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$, assegnato l'intervallo di controllo $[t_i, t_f]$ e supposto che A e B siano matrici di dimensioni opportune, con elementi funzioni di classe $C^1[t_i, t_f]$, fissati gli stati iniziale e finale:

$$x(t_i) = x^i \quad (8.37)$$

$$x(t_f) = 0 \quad (8.38)$$

determinare, se esistono, il controllo $u^0 \in \bar{\mathcal{C}}^0[t_i, t_f]$ e lo stato $x^0 \in \bar{\mathcal{C}}^1[t_i, t_f]$, che soddisfano il vincolo dinamico (8.36), le condizioni iniziale e finale (8.37), (8.38) e che rendono minimo l'indice di costo quadratico:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \quad (8.39)$$

in cui $Q(t)$ e $R(t)$ sono matrici simmetriche, rispettivamente semidefinita positiva e definita positiva per ogni $t \in [t_i, t_f]$, con elementi funzioni di classe $C^1[t_i, t_f]$. \square

Il presente problema è coincidente con il Problema 8.1 già considerato, con l'aggiunta della ulteriore condizione che lo stato finale sia assegnato. Esso viene considerato separatamente in quanto la suddetta condizione sullo stato finale ha effetti rilevanti sull'esistenza e sulla struttura della eventuale soluzione ottima e, più in particolare, fa sì che questa, se esiste, non risulti sintetizzabile.

La soluzione del Problema 8.19 è data dal seguente teorema.

Teorema 8.20 - Introdotta la matrice di dimensioni $2n \times 2n$:

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} A(t) & -B(t)R^{-1}(t)B^T(t) \\ -Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \quad (8.40)$$

e indicata con:

$$\Phi(t, \tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t, \tau) & \Phi_{12}(t, \tau) \\ \Phi_{21}(t, \tau) & \Phi_{22}(t, \tau) \end{pmatrix}$$

la relativa matrice di transizione, con la parzializzazione indicata in quattro sottomatrici di dimensioni $n \times n$, nell'ipotesi che $\Phi_{12}(t_f, t_i)$ sia non singolare, il Problema 8.19 ammette un'unica soluzione ottima normale data da:

$$u^0(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)[\Phi_{21}(t, t_i) - \Phi_{22}(t, t_i)\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_i)\Phi_{11}(t_f, t_i)]x^i \quad (8.41)$$

$$x^0(t) = [\Phi_{11}(t, t_i) - \Phi_{12}(t, t_i)\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_i)\Phi_{11}(t_f, t_i)]x^i \quad (8.42)$$

Dimostrazione - Poiché il Problema 8.19 è un caso particolare del Problema 7.19 con $U = \mathbb{R}^p$, condizioni necessarie e sufficienti di ottimo si ottengono dal Teorema 7.20 tenuto anche conto della Osservazione 7.17. In particolare, considerata la funzione Hamiltoniana del problema:

$$H(x, u, 1, \lambda, t) = \frac{1}{2}x^T Q x + \frac{1}{2}u^T R u + \lambda^T A x + \lambda^T B u$$

le condizioni (7.93), (7.53) si particolarizzano come segue:

$$\dot{\lambda}^0 = -Qx^0 - A^T \lambda^0 \quad (8.43)$$

$$Ru^0 + B^T \lambda^0 = 0 \quad (8.44)$$

Dalla (8.44), data la non singolarità di $R(t)$, si ottiene:

$$u^0 = -R^{-1}B^T \lambda^0 \quad (8.45)$$

Sostituendo la (8.45) nella (8.36) e ricordando la definizione (8.40) si ottiene il sistema differenziale:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{\lambda}^0 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} x^0 \\ \lambda^0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione, imponendo la condizione iniziale (8.37), è data da:

$$\begin{pmatrix} x^0(t) \\ \lambda^0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(t, t_i) & \Phi_{12}(t, t_i) \\ \Phi_{21}(t, t_i) & \Phi_{22}(t, t_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ \lambda^0(t_i) \end{pmatrix} \quad (8.46)$$

Imponendo la condizione finale (8.38), grazie all'ipotesi di non singolarità della matrice $\Phi_{12}(t_f, t_i)$, si ricava univocamente:

$$\lambda^0(t_i) = -\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_i)\Phi_{11}(t_f, t_i)x^i$$

Sostituendo tale espressione nella (8.46), si dimostra la (8.42) e si ottiene per il costato:

$$\lambda^0(t) = [\Phi_{21}(t, t_i) - \Phi_{22}(t, t_i)\Phi_{12}^{-1}(t_f, t_i)\Phi_{11}(t_f, t_i)]x^i$$

Sostituendo infine la precedente nella (8.45), anche la (8.41) risulta dimostrata. \square

Osservazione 8.21 - L'espressione (8.41) ricavata per il controllo ottimo, chiarisce l'affermazione fatta circa la non sintetizzabilità della soluzione, in quanto il controllo stesso, nel generico istante, risulta dipendente dallo stato iniziale.

Osservazione 8.22 - L'ipotesi di non singolarità della matrice $\Phi_{12}(t_f, t_i)$ è cruciale per l'esistenza e per l'unicità della soluzione ottima. Se infatti $\Phi_{12}(t_f, t_i)$ è singolare o non esistono soluzioni ottime o se ne hanno infinite, a seconda che il sistema di equazioni lineari:

$$\Phi_{12}(t_f, t_i)\lambda^0(t_i) = -\Phi_{11}(t_f, t_i)x^i$$

non ammetta soluzioni o ne ammetta infinite, rispetto a $\lambda^0(t_i)$.

Esempio 8.5 - Si consideri (Fig. 8.7) un montacarichi, la cui cabina, di massa costante m , debba essere calata da un livello h al livello zero, rendendo minimo un funzionale quadratico della forza u applicata dal motore M alla cabina stessa (si suppone che la coppia del motore sia bidirezionale e conseguentemente che la forza u possa assumere entrambi i segni).

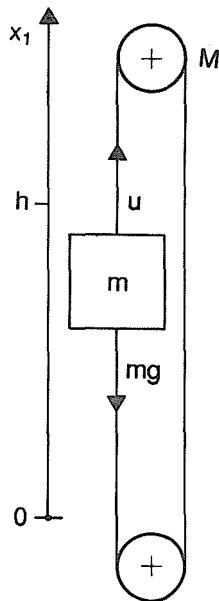


Fig. 8.7

Indicando con $[0, t_f]$ l'intervallo di controllo assegnato, con x_1 e x_2 rispettivamente il livello e la velocità della cabina e con g l'accelerazione di gravità, supponendo nulla la velocità nell'istante iniziale e finale, il problema può essere formulato come segue.

Dato il sistema lineare:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{m} - g$$

trasferire lo stato iniziale:

$$x_1(0) = h$$

$$x_2(0) = 0$$

nello stato finale:

$$x_1(t_f) = 0$$

$$x_2(t_f) = 0$$

rendendo minimo l'indice di costo:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

Il problema considerato può essere interpretato come un problema di regolazione con errore finale nullo del tipo del Problema 8.19 con la variante della presenza dell'ingresso g , costante e noto, nella seconda equazione di stato. Tale circostanza non altera tuttavia la procedura per la determinazione della soluzione ottima né il tipo di conclusioni cui si perviene.

In effetti, definita la funzione Hamiltoniana:

$$H(x, u, 1, \lambda) = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \frac{1}{m} \lambda_2 u - g \lambda_2$$

le condizioni necessarie e sufficienti di ottimo (8.43), (8.44) diventano:

$$\dot{\lambda}_1^0 = 0$$

$$\dot{\lambda}_2^0 = -\lambda_1^0$$

$$u^0 + \frac{1}{m} \lambda_2^0 = 0$$

Integrando le equazioni del costato si ottiene:

$$\begin{aligned}\lambda_1^0(t) &= K_1 \\ \lambda_2^0(t) &= -K_1 t + K_2\end{aligned}$$

Dall'equazione del controllo si ricava:

$$u^0(t) = \frac{K_1}{m}t - \frac{K_2}{m}$$

Integrando le equazioni di stato e imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$\begin{aligned}x_2^0(t) &= \frac{K_1}{m^2} \frac{t^2}{2} - \frac{K_2}{m^2} t - gt \\ x_1^0(t) &= \frac{K_1}{m^2} \frac{t^3}{6} - \frac{K_2}{m^2} \frac{t^2}{2} - g \frac{t^2}{2} + h\end{aligned}$$

Imponendo le condizioni finali si ricava univocamente:

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{12m^2h}{t_f^3} \\ K_2 &= \frac{6m^2h}{t_f^2} - m^2g\end{aligned}$$

Sostituendo queste ultime nell'espressione del controllo ottimo si perviene all'unica soluzione:

$$u^0(t) = \frac{12mh}{t_f^3} \left(t - \frac{t_f}{2} \right) + mg$$

8.5 PROBLEMA DI REGOLAZIONE CON CONTROLLO LIMITATO

In questo paragrafo verrà considerato il problema di regolazione con l'introduzione di un vincolo sull'ampiezza del controllo.

Problema 8.23 - Si considera il Problema 8.1 con l'aggiunta del vincolo:

$$|u_j(t)| \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad \forall t \in [t_i, t_f] \quad (8.47)$$

e con l'ipotesi che $R(t)$ sia diagonale. □

L'introduzione dei vincoli (8.47), come si vedrà, produce l'effetto di rendere non lineare il sistema differenziale delle equazioni di stato e costato; l'esistenza

della soluzione ottima non è garantita. Si osservi anche che l'ipotesi di diagonalità per la matrice $R(t)$ è introdotta allo scopo di effettuare in forma esplicita la minimizzazione della funzione Hamiltoniana.

Teorema 8.24 - Tutte e sole le soluzioni normali del Problema 8.23 sono ottenute risolvendo il sistema differenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}^0(t) = A(t)x^0(t) - B(t)\text{sat}\{R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^0(t)\} \\ \dot{\lambda}^0(t) = -Q(t)x^0(t) - A^T(t)\lambda^0(t) \end{cases} \quad (8.48)$$

$$(8.49)$$

con le condizioni agli estremi:

$$x^0(t_i) = x^i \quad (8.50)$$

$$\lambda^0(t_f) = Fx^0(t_f) \quad (8.51)$$

e assumendo:

$$u^0(t) = -\text{sat}\{R^{-1}(t)B^T(t)\lambda^0(t)\} \quad (8.52)$$

Dimostrazione - Poiché il Problema 8.23 è un caso particolare del Problema 7.19, condizioni necessarie e sufficienti di ottimo si ottengono dal Teorema 7.20. In particolare le (7.93), (7.94) e (7.95) si particolarizzano come segue:

$$\dot{\lambda}^0 = -Qx^0 - A^T\lambda^0$$

$$\frac{1}{2}u^{0T}Ru^0 + \lambda^{0T}Bu^0 \leq \frac{1}{2}\omega^T R\omega + \lambda^{0T}B\omega \quad \forall \omega: |\omega_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (8.53)$$

$$\lambda^0(t_f) = Fx^0(t_f)$$

Aggiungendo a primo e secondo membro della (8.53) la quantità $\frac{1}{2}\lambda^{0T}BR^{-1}B^T\lambda^0$, la stessa diseguaglianza può riscriversi nella forma:

$$(u^0 + R^{-1}B^T\lambda^0)^TR(u^0 + R^{-1}B^T\lambda^0) \leq (\omega + R^{-1}B^T\lambda^0)^TR(\omega + R^{-1}B^T\lambda^0) \quad \forall \omega: |\omega_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (8.54)$$

Poiché la matrice $R(t)$ è diagonale e definita positiva $\forall t \in [t_i, t_f]$, la soluzione della condizione di minimo (8.54) è data dalla (8.52). Sostituendo quest'ultima nell'equazione di stato anche la (8.48) è verificata. \square

Osservazione 8.25 - Ovviamente è possibile considerare un problema del tipo del Problema 8.23 con l'aggiunta di una condizione sullo stato finale:

$$x(t_f) = x^f \quad (8.55)$$

In tal caso, evidentemente, nell'indice di costo non sarà presente il termine additivo funzione dello stato finale. Le condizioni necessarie e sufficienti fornite dal Teorema 8.24 rimangono valide ad eccezione della (8.51) che viene sostituita dalla (8.55).

Esempio 8.6 - Si consideri nuovamente il problema proposto nell'Esempio 8.5 con l'introduzione del vincolo sul controllo:

$$u(t) \in [0, M]$$

Le equazioni del costato λ^0 e la forma delle relative soluzioni restano identiche a quelle già ottenute nell'Esempio 8.5. Per quanto riguarda il controllo, occorre imporre il principio del minimo, e cioè:

$$\frac{1}{2}u^{0^2}(t) + \frac{\lambda_2^0(t)}{m}u^0(t) \leq \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{\lambda_2^0(t)}{m}\omega \quad \begin{aligned} \forall \omega &\in [0, M] \\ \forall t &\in [0, t_f] \end{aligned}$$

La precedente condizione equivale alla:

$$\left(u^0(t) + \frac{\lambda_2^0(t)}{m}\right)^2 \leq \left(\omega + \frac{\lambda_2^0(t)}{m}\right)^2 \quad \begin{aligned} \forall \omega &\in [0, M] \\ \forall t &\in [0, t_f] \end{aligned}$$

Risolvendo la precedente disequazione e tenendo conto della espressione di $\lambda_2^0(t)$, si deduce:

$$u^0(t) = \frac{M}{2} \left(1 - \text{sat} \left\{ \frac{2(K_2 - K_1 t)}{mM} + 1 \right\} \right)$$

La precedente espressione va sostituita nelle equazioni di stato pervenendo a un problema differenziale non lineare con condizioni sullo stato iniziale e sullo stato finale. Tutte e sole le soluzioni ottime, se esistono, si ottengono risolvendo il suddetto problema differenziale.

Capitolo 9

Controllo a tempo minimo di sistemi lineari

9.1 INTRODUZIONE

Verrà considerato in questo capitolo il problema del controllo ottimo di un sistema lineare con stato iniziale e stato finale fissati, con vincoli sull'ampiezza delle variabili di controllo e con indice di costo dato dall'ampiezza dell'intervallo di controllo. Per tale problema di notevole rilevanza applicativa, che verrà indicato col nome di problema di *regolazione a tempo minimo*, possono essere dedotti risultati analitici interessanti e, in taluni casi più semplici, particolarmente espressivi.

Nel paragrafo seguente verranno dimostrati alcuni risultati generali relativi all'esistenza, all'unicità e alla non singolarità della soluzione ottima.

I suddetti risultati verranno quindi particolarizzati al caso stazionario, ponendo in evidenza le semplificazioni che ne derivano e fornendo ulteriori risultati che in tal caso si possono dedurre; in particolare viene sottolineato che la soluzione ottima, se esiste, è in linea di principio sintetizzabile, anche se l'espressione esplicita della legge di regolazione in retroazione non è deducibile per il caso generale.

Infine, a titolo esemplificativo, verranno analizzati in dettaglio alcuni problemi di controllo a tempo minimo di sistemi lineari stazionari del secondo ordine, deducendo in particolare per essi la legge di controllo ottimo in retroazione.

9.2 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA E RISULTATI GENERALI

L'obiettivo del problema di regolazione a tempo minimo è quello di trasferire nell'origine nel minimo tempo uno stato iniziale assegnato, utilizzando controlli limitati in ampiezza. Più specificamente si può formulare il seguente problema.

Problema 9.1 - Considerato il sistema dinamico lineare descritto dall'equazione di stato:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (9.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ sottoposto al vincolo:

$$|u_j(t)| \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (9.2)$$

con A e B matrici di dimensioni opportune i cui elementi sono funzioni di t che si suppongono rispettivamente di classe C^{n-2} e C^{n-1} e comunque almeno di classe C^1 ; assegnato l'istante iniziale t_i e gli stati iniziale e finale:

$$x(t_i) = x^i \quad (9.3)$$

$$x(t_f) = 0 \quad (9.4)$$

determinare, se esistono, l'istante finale $t_f^0 \in \mathbb{R}$, il controllo $u^0 \in \bar{C}^0(\mathbb{R})$ e lo stato $x^0 \in \bar{C}^1(\mathbb{R})$ che soddisfano il vincolo dinamico (9.1), il vincolo (9.2), le condizioni iniziale (9.3) e finale (9.4) e che rendono minimo l'indice di costo:

$$J(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt = t_f - t_i \quad (9.5)$$

□

I vincoli (9.2) sull'ampiezza del controllo, che si prestano ad una ovvia interpretazione fisica, sono necessari al fine di compensare l'assenza nell'indice di costo di termini atti a contenere l'escursione del controllo: in assenza di tali vincoli il precedente problema di controllo ottimo non ammette soluzione, in quanto si potrebbe far tendere a zero la durata dell'intervallo di controllo, rendendo corrispondentemente illimitata l'ampiezza del controllo.

Osservando che il Problema 9.1 è una particolarizzazione del Problema 7.9, le relative condizioni necessarie di ottimo si possono ottenere particolarizzando le condizioni fornite dal Teorema 7.10.

Teorema 9.2 - Con riferimento al Problema 9.1 sia (x^*, u^*, t_f^*) una soluzione ammissibile; condizione necessaria affinché essa sia una soluzione ottima è che esistano una costante $\lambda_0^* \geq 0$ e una funzione vettoriale di dimensione n di moltiplicatori $\lambda^* \in \bar{C}^1[t_i, t_f^*]$, mai simultaneamente nulle in alcun istante di $[t_i, t_f^*]$ e tali che in tale intervallo risultino:

$$\dot{\lambda}^* = -A^T \lambda^* \quad (9.6)$$

$$\lambda^{*T} B \omega \geq \lambda^{*T} B u^* \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^p: |\omega_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (9.7)$$

Inoltre le discontinuità di $\dot{\lambda}^*$ possono verificarsi solo nei punti \bar{t} in cui u^* ha una discontinuità, mentre $H|^*$ è una funzione continua rispetto a t e risulta:

$$H|_{t_f^*}^* = 0 \quad (9.8)$$

Dimostrazione - L'Hamiltoniano del Problema 9.1 è dato da:

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda, t) = \lambda_0 + \lambda^T A x + \lambda^T B u$$

Inoltre il vincolo (7.36) del Problema 7.9 si particolarizza nella condizione finale (9.4) e quindi la condizione di rango alla base del Teorema 7.10 è automaticamente soddisfatta. Si verifica pertanto banalmente che le (7.38), (7.39), (7.42) si particolarizzano nelle (9.6), (9.7), (9.8). Infine la continuità di $H|^*$ è garantita dalla (7.40). \square

Nel seguito verrà assunta per il sistema (9.1) una proprietà che garantisce una controllabilità forte e cioè la proprietà di controllabilità nell'istante t_i su un qualunque intervallo di tempo e mediante una qualunque singola componente del vettore di controllo. Tale proprietà è la seguente:

$$\det\{G_j(t)\} = \det\{(b_j^{(1)}(t) \ b_j^{(2)}(t) \dots b_j^{(n)}(t))\} \neq 0 \quad j = 1, 2, \dots, p \quad \forall t \geq t_i \quad (9.9)$$

dove, indicata con $b_j(t)$ la generica colonna della matrice $B(t)$, si è posto:

$$\begin{aligned} b_j^{(1)}(t) &= b_j(t) \\ b_j^{(k)}(t) &= \dot{b}_j^{(k-1)}(t) - A(t)b_j^{(k-1)}(t) \quad k = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Si osserva che nel caso non stazionario, qui considerato, la (9.9) è una condizione sufficiente ma non necessaria rispetto alla proprietà di controllabilità forte suddetta; nel caso stazionario essa è invece necessaria e sufficiente e si riduce alla ben nota condizione:

$$\det\{(b_j \ Ab_j \ \dots \ A^{n-1}b_j)\} \neq 0 \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (9.10)$$

A questo punto è possibile dimostrare un primo risultato generale, relativo alla non singolarità delle soluzioni ottime nel senso stabilito nella Definizione 7.21.

Teorema 9.3 - Con riferimento al Problema 9.1, se la condizione (9.9) è soddisfatta e se esiste una soluzione ottima, essa è non singolare; inoltre ciascuna componente del controllo ottimo è una funzione costante a tratti che assume soltanto i valori estremi ± 1 e gli istanti di discontinuità sono in numero finito.

Dimostrazione - Si dimostrerà in primo luogo la non singolarità della soluzione ottima. Se per assurdo tale soluzione fosse singolare, in base alla condizione necessaria (9.7), dovrebbe esistere un valore di $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ e un sottointervallo di misura positiva $[t', t''] \subset [t_i, t_f^0]$, tali che:

$$\lambda^{0T}(t)b_j(t) = 0 \quad \forall t \in [t', t''] \quad (9.11)$$

Infatti, secondo quanto stabilito dal Teorema 7.22, l'indipendenza dell'Hamiltoniano dalla componente j -esima del controllo in $[t', t'']$ implica la (9.11).

Derivando successivamente la (9.11) e utilizzando la condizione necessaria (9.6) si ha:

$$\frac{d^i(\lambda^{0T}(t)b_j(t))}{dt^i} = \lambda^{0T}(t)b_j^{(i+1)}(t) = 0 \quad \forall t \in [t', t''] \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

Le precedenti $n-1$ eguaglianze assieme alla (9.11) possono essere riscritte in forma compatta utilizzando la matrice $G_j(t)$, definita mediante la (9.9):

$$\lambda^{0T}(t)G_j(t) = 0 \quad \forall t \in [t', t''] \quad (9.12)$$

D'altra parte $\lambda^0(t)$ deve essere diverso da zero per ogni t in $[t_i, t_f^0]$ poiché altrimenti, in base alla condizione necessaria (9.6), esso sarebbe costantemente nullo in tale intervallo e in particolare, essendo $\lambda^0(t_f^0) = 0$, si avrebbe $H|_{t_f^0} = \lambda_0^0$.

In base alla condizione necessaria (9.8) dovrebbe allora risultare anche $\lambda_0^0 = 0$ il che è assurdo poiché λ_0^0 e $\lambda^0(t)$ non possono annullarsi simultaneamente in alcun istante di $[t_i, t_f^0]$. Dovendo quindi essere $\lambda^0(t) \neq 0$, la (9.12) implicherebbe $\det\{G_j(t)\} = 0$ per ogni $t \in [t', t'']$, contrariamente all'ipotesi (9.9).

Dalla non singolarità della soluzione ottima discende che per ogni $j = 1, 2, \dots, p$ il prodotto $\lambda^{0T}(t)b_j(t)$ può annullarsi soltanto in istanti isolati $\bar{t}_k^{(j)}$ nell'intervallo $[t_i, t_f^0]$. Conseguentemente la condizione necessaria (9.7) può essere riscritta nella forma:

$$u_j^0(t) = -\operatorname{sign}\{\lambda^{0T}(t)b_j(t)\} \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, p \\ \forall t \in [t_i, t_f^0] \end{cases} \quad (9.13)$$

la quale consente di affermare che ciascuna componente del controllo ottimo è una funzione costante a tratti che assume soltanto i valori estremi ± 1 .

Per dimostrare che gli istanti di discontinuità sono in numero finito, si supponga per assurdo che ciò non sia vero per una componente u_j^0 . Ciò implicherebbe l'esistenza di un istante $\tau \in [t_i, t_f^0]$, punto di accumulazione degli istanti $\bar{t}_k^{(j)}$ e, per continuità, sarebbe anche:

$$\lambda^{0T}(\tau)b_j(\tau) = 0$$

Per la continuità della funzione $\lambda^{0T}(t)b_j(t)$ si può anche affermare che fra ogni coppia di istanti $\bar{t}_k^{(j)}, \bar{t}_{k+1}^{(j)}$ esiste un istante $\tilde{t}_k^{(j)}$ in cui si annulla la $\frac{d}{dt}(\lambda^{0T}(t)b_j(t))$.

La successione degli istanti $\tilde{t}_k^{(j)}$ ammette l'istante τ come punto di accumulazione e per continuità risulta:

$$\left. \frac{d}{dt}(\lambda^{0T}(t)b_j(t)) \right|_{\tau} = 0$$

Procedendo in maniera analoga si può verificare che:

$$\left. \frac{d^i}{dt^i}(\lambda^{0T}(t)b_j(t)) \right|_{\tau} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Ragionando come già fatto per dimostrare la non singolarità della soluzione ottima, si avrebbe che le precedenti n condizioni implicano che:

$$\det\{G_j(\tau)\} = 0$$

contrariamente all'ipotesi. Resta pertanto dimostrato che gli istanti di discontinuità per ciascuna componente dell'ingresso sono in numero finito. \square

Nella terminologia usuale dei controlli automatici, una funzione di controllo costante a tratti e che assume soltanto i valori limite si indica con il termine “controllo bang–bang” mentre i relativi istanti di discontinuità si indicano col termine “istanti di commutazione”.

Nelle stesse ipotesi del precedente Teorema 9.3 è facilmente dimostrabile l'unicità della soluzione ottima:

Teorema 9.4 - Con riferimento al Problema 9.1, se la condizione (9.9) è soddisfatta e se esiste una soluzione ottima essa è unica.

Dimostrazione - Si supponga per assurdo che esistano due soluzioni ottime diverse che si indicheranno rispettivamente con $(u^{0'}, x^{0'}, t_f^0)$ e con $(u^{0''}, x^{0''}, t_f^0)$ (i valori dell'istante finale dovranno essere coincidenti, trattandosi di due soluzioni a tempo minimo); si indichino inoltre con $\lambda_0^{0'}, \lambda^{0'}(t)$ e $\lambda_0^{0''}, \lambda^{0''}(t)$ i corrispondenti moltiplicatori.

In virtù del Teorema 9.3 le due soluzioni ottime sono non singolari, e quindi si ha:

$$\begin{aligned} u^{0'}(t) &= -\operatorname{sign}\{B^T(t)\lambda^{0'}(t)\} \quad \forall t \in [t_i, t_f^0] \\ u^{0''}(t) &= -\operatorname{sign}\{B^T(t)\lambda^{0''}(t)\} \quad \forall t \in [t_i, t_f^0] \end{aligned}$$

Per il principio del minimo si ha inoltre:

$$\lambda^{0'T}(t)B(t)u^{0''}(t) \geq \lambda^{0'T}(t)B(t)u^{0'}(t) \quad \forall t \in [t_i, t_f^0]$$

e sostituendo le precedenti espressioni dei controlli ottimi si ha:

$$-\lambda^{0'T}(t)B(t)\operatorname{sign}\{B^T(t)\lambda^{0''}(t)\} \geq -\lambda^{0'T}(t)B(t)\operatorname{sign}\{B^T(t)\lambda^{0'}(t)\} \quad \forall t \in [t_i, t_f^0]$$

Se le due soluzioni sono diverse deve necessariamente esistere un sottointervallo di $[t_i, t_f^0]$ di misura positiva in cui la precedente diseguaglianza è soddisfatta in senso stretto. Pertanto integrando si ha:

$$\int_{t_i}^{t_f^0} \lambda^{0'T}(t)B(t)u^{0''}(t)dt > \int_{t_i}^{t_f^0} \lambda^{0'T}(t)B(t)u^{0'}(t)dt \quad (9.14)$$

D'altra parte per le due soluzioni ottime, indicando con $\Phi(t, \tau)$ la matrice di transizione associata alla matrice $A(t)$, si deve avere:

$$\begin{aligned} x^{0'}(t_f^0) &= \Phi(t_f^0, t_i)x^i + \int_{t_i}^{t_f^0} \Phi(t_f^0, t)B(t)u^{0'}(t)dt = 0 \\ x^{0''}(t_f^0) &= \Phi(t_f^0, t_i)x^i + \int_{t_i}^{t_f^0} \Phi(t_f^0, t)B(t)u^{0''}(t)dt = 0 \end{aligned}$$

Eguagliando le precedenti relazioni, si ha:

$$\int_{t_i}^{t_f^0} \Phi(t_f^0, t)B(t)u^{0'}(t)dt = \int_{t_i}^{t_f^0} \Phi(t_f^0, t)B(t)u^{0''}(t)dt$$

Premoltiplichiamo la precedente eguaglianza per il vettore riga $\lambda^{0'T}(t_i)\Phi(t_i, t_f^0)$. Osservando che, in base alla condizione necessaria (9.6), si ha:

$$\lambda^{0'T}(t_i)\Phi(t_i, t_f^0)\Phi(t_f^0, t) = \lambda^{0'T}(t)$$

si ottiene che:

$$\int_{t_i}^{t_f^0} \lambda^{0'T}(t)\Phi(t, t_f^0)B(t)u^{0'}(t)dt = \int_{t_i}^{t_f^0} \lambda^{0'T}(t)\Phi(t, t_f^0)B(t)u^{0''}(t)dt$$

che contraddice la (9.14). Pertanto non possono esistere due soluzioni ottime non singolari tra loro diverse. \square

È possibile a questo punto dimostrare un teorema che assicura l'esistenza di una soluzione ottima qualora esista una soluzione ammissibile. Occorre però stabilire preliminarmente l'esistenza di una soluzione ottima considerando uno spazio più ampio per le funzioni di controllo rispetto a quello $\bar{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R})$ in cui è stato formulato il Problema 9.1. Subito dopo verrà però stabilito, con ipotesi opportune, che il controllo ottimo di cui si sarà mostrata l'esistenza appartiene in effetti a $\bar{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R})$ ed anzi che esso è una funzione "bang-bang". Lo spazio funzionale più ampio a cui occorre far riferimento è lo spazio $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ delle *funzioni misurabili* su \mathbb{R} , di cui all'Esempio 1.5. Si dimostra infatti il seguente teorema di esistenza.

Teorema 9.5 - Con riferimento al Problema 9.1 ove si assuma che le funzioni di controllo appartengano a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, se esiste una soluzione ammissibile allora esiste una soluzione ottima.

Dimostrazione - Si nota innanzitutto che l'insieme delle soluzioni ammissibili è non vuoto per ipotesi. Se tale insieme è costituito da un numero finito di elementi il presente teorema è dimostrato in quanto la soluzione ammissibile con t_f minimo costituisce evidentemente una soluzione ottima.

Nel caso in cui le soluzioni ammissibili siano in numero infinito si indichi con t_f^0 l'estremo inferiore degli istanti t_f che corrispondono alle soluzioni ammissibili. È possibile costruire una successione di soluzioni ammissibili $\{(x^{(k)}, u^{(k)}, t_f^{(k)})\}$ tale che $t_f^{(k)} \geq t_f^0$, $k = 1, 2, \dots$ e tale che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_f^{(k)} = t_f^0$$

Risulta evidentemente:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} [x^{(k)}(t_f^{(k)}) - x^{(k)}(t_f^0)] &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\Phi(t_f^{(k)}, t_i) - \Phi(t_f^0, t_i)]x^i \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_i}^{t_f^0} [\Phi(t_f^{(k)}, t) - \Phi(t_f^0, t)]B(t)u^{(k)}(t)dt \\ &+ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_f^0}^{t_f^{(k)}} \Phi(t_f^{(k)}, t)B(t)u^{(k)}(t)dt = 0 \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza a zero è giustificata dal fatto che ciascuno dei tre addendi tende a zero separatamente in quanto $t_f^{(k)}$ tende a t_f^0 e Φ è funzione continua dei suoi argomenti. Poiché $x^{(k)}(t_f^{(k)}) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, in quanto valori finali di evoluzioni ammissibili dello stato, discende che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}(t_f^0) = 0 \quad (9.15)$$

Si indichi ora con $\bar{u}^{(k)}$ la funzione ottenuta da $u^{(k)}$ troncandola sull'intervallo $[t_i, t_f^0]$. Poiché $\bar{u}^{(k)}$ è limitata, essendo $|u_j^{(k)}(t)| \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, p$, $\forall t \in [t_i, t_f^0]$, essa risulta di quadrato integrabile. Sia M il sottoinsieme dello spazio delle funzioni misurabili $\mathcal{M}[t_i, t_f^0]$ e di quadrato integrabile, che soddisfano al vincolo:

$$|u_j(t)| \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad \forall t \in [t_i, t_f^0]$$

La successione $\{\bar{u}^{(k)}\}$ è contenuta in M e per un noto teorema di analisi funzionale ⁽¹⁾ essa ammette una sottosuccessione (che per semplicità si identifierà con la stessa successione) convergente debolmente a una funzione $u^0 \in M$, nel senso che, per ogni funzione h misurabile e di quadrato integrabile in $[t_i, t_f^0]$, risulta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_i}^{t_f^0} h^T(t) \bar{u}^{(k)}(t) dt = \int_{t_i}^{t_f^0} h^T(t) u^0(t) dt.$$

⁽¹⁾ Si veda ad esempio A.V. Balakrishnan: *Applied Functional Analysis*, Springer Verlag, New York, 1976; Teorema 1.8.1, pag. 26.

Indicata con x^0 l'evoluzione dello stato che, a partire dallo stato iniziale x^i , corrisponde all'ingresso u^0 , si ha a questo punto che:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}(t_f^0) &= \Phi(t_f^0, t_i) x^i + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_i}^{t_f^0} \Phi(t_f^0, t) B(t) \bar{u}^{(k)}(t) dt \\ &= \Phi(t_f^0, t_i) x^i + \int_{t_i}^{t_f^0} \Phi(t_f^0, t) B(t) u^0(t) dt = x^0(t_f^0)\end{aligned}$$

in quanto gli elementi di $\Phi(t_f^0, t) B(t)$ sono funzioni misurabili e di quadrato integrabile in $[t_i, t_f^0]$.

Dalla precedente eguaglianza, tenendo conto della (9.15), si deduce che:

$$x^0(t_f^0) = 0$$

Risulta pertanto dimostrato che esiste un controllo ammissibile u^0 misurabile e di quadrato integrabile capace di trasferire x^i nell'origine nell'istante t_f^0 .

La terna (x^0, u^0, t_f^0) costituisce pertanto una soluzione ottima. □

Osservazione 9.6 - Al fine di caratterizzare meglio il controllo ottimo u^0 , conviene osservare che i risultati stabiliti dai Teoremi 9.2–4 si estendono al caso in cui le funzioni di controllo si suppongano appartenenti ad $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ anziché a $\bar{\mathcal{C}}^0(\mathbb{R})$. In particolare si può affermare che, se è soddisfatta la condizione (9.9) e se esiste una soluzione ottima con $u^0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, allora tale soluzione è unica, non singolare e u^0 è un controllo “bang–bang”.

Si ha a questo punto il seguente risultato.

Corollario 9.7 - Con riferimento al Problema 9.1, se la condizione (9.9) è soddisfatta e se esiste una soluzione ammissibile, allora esiste un'unica soluzione ottima non singolare, e il controllo è di tipo “bang–bang”.

Dimostrazione - La dimostrazione segue immediatamente dal Teorema 9.5 e dalla Osservazione 9.6. □

Osservazione 9.8 - È bene osservare che il risultato stabilito dal Teorema 9.5 e dal Corollario 9.7 va riferito al particolare istante iniziale t_i e al particolare stato iniziale x^i fissati; in altri termini l'esistenza della soluzione ottima è garantita per le sole coppie (t_i, x^i) per le quali esiste una soluzione ammissibile.

9.3 CONTROLLO A TEMPO MINIMO DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

La particolarizzazione del Problema 9.1 e dei risultati forniti dai Teoremi 9.2–5 e dal Corollario 9.6 al caso di sistemi lineari stazionari è immediata. La stazionarietà del sistema consente peraltro di dedurre ulteriori risultati che caratterizzano la

soluzione ottima, sia in rapporto alle condizioni di esistenza, sia in rapporto al numero di istanti di commutazione. In particolare si ha il seguente risultato.

Teorema 9.9 - Con riferimento al Problema 9.1 nel caso stazionario, ove si assuma che le funzioni di controllo appartengano a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, se il sistema è controllabile esiste in \mathbb{R}^n un intorno Ω dell'origine, tale che per $x^i \in \Omega$ esiste una soluzione ottima.

Dimostrazione - La dimostrazione viene effettuata mostrando che è possibile individuare un intorno Ω dell'origine dello spazio di stato, tale che per ogni $x^i \in \Omega$ esiste una soluzione ammissibile. Tenendo conto del Teorema 9.5 segue l'esistenza di una soluzione ottima. Fissato un qualunque valore $T > 0$ l'esistenza di un controllo che trasferisce lo stato iniziale x^i nell'origine nell'istante T equivale al fatto che l'equazione:

$$e^{A(T-t_i)}x^i + \int_{t_i}^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 0 \quad (9.16)$$

sia risolubile rispetto alla funzione di controllo u compatibilmente con il vincolo posto sulla sua ampiezza. Si assuma per u una espressione del tipo:

$$u(\tau) = B^T e^{-A^T \tau} v \quad t_i \leq \tau \leq T$$

con v vettore costante di \mathbb{R}^p . Sostituendo la precedente espressione nell'equazione (9.16), essa diviene:

$$-e^{-At_i}x^i = \left(\int_{t_i}^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau \right) v$$

Per l'ipotesi di controllabilità la *matrice Gramiana* in parentesi è non singolare e conseguentemente si deduce:

$$u(\tau) = -B^T e^{-A^T \tau} \left(\int_{t_i}^T e^{-A\sigma} B B^T e^{-A^T \sigma} d\sigma \right)^{-1} e^{-At_i} x^i \quad t_i \leq \tau \leq T$$

La precedente espressione corrisponde ovviamente a un controllo misurabile e certamente esso è ammissibile (con componenti in modulo minori o eguali di uno) purché x^i sia sufficientemente prossimo all'origine. Resta così verificata l'esistenza di un intorno Ω dell'origine, costituito da stati iniziali per i quali esiste una soluzione ammissibile e quindi una soluzione ottima. \square

Si ha inoltre il seguente risultato immediato.

Corollario 9.10 - Considerato il Problema 9.1 nel caso stazionario, se è soddisfatta la condizione (9.10) esiste in \mathbb{R}^n un intorno Ω dell'origine, tale che per $x^i \in \Omega$ esiste un'unica soluzione ottima non singolare, e il controllo è di tipo "bang-bang".

Dimostrazione - La dimostrazione è immediata ove si consideri il precedente Teorema 9.9 assieme al Corollario 9.7. \square

Per poter garantire l'esistenza della soluzione ottima quale che sia lo stato iniziale non bastano ipotesi di controllabilità (anche se forte), ma occorre introdurre delle ipotesi di stabilità sul sistema. Più in particolare si hanno i seguenti risultati.

Teorema 9.11 - Considerato il Problema 9.1 nel caso stazionario, ove si assuma che le funzioni di controllo appartengano a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, se il sistema è controllabile e se gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa, esiste una soluzione ottima quale che sia lo stato iniziale.

Dimostrazione - In considerazione dei precedenti risultati per dimostrare il teorema è sufficiente verificare l'esistenza di una soluzione ammissibile per ogni stato iniziale. Qualunque sia lo stato iniziale una soluzione ammissibile può essere costruita come segue. Sia Ω l'intorno dell'origine costituito dagli stati iniziali per i quali esiste una soluzione ammissibile, intorno certamente non vuoto per la controllabilità del sistema (cfr. dimostrazione del Teorema 9.9) e sia $\Omega' \subset \Omega$ un intorno chiuso dell'origine. Per la stabilità asintotica del sistema è evidentemente possibile pervenire in Ω' in un tempo finito con ingresso nullo a partire da un qualunque stato iniziale. Ciò dimostra che nelle ipotesi fatte esiste una soluzione ammissibile per qualunque stato iniziale. Segue l'esistenza di una soluzione ottima. \square

Un risultato alternativo a quello fornito dal precedente Teorema 9.11 può essere ottenuto con un'ipotesi meno restrittiva sul segno degli autovalori della matrice A , purché venga opportunamente rafforzata l'ipotesi che si riferisce alla controllabilità del sistema.

Teorema 9.12 - Con riferimento al Problema 9.1 nel caso stazionario, ove si assuma che le funzioni di controllo appartengano a $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, se il sistema è controllabile mediante almeno una delle componenti dell'ingresso e se gli autovalori della matrice A hanno parte reale non positiva, esiste una soluzione ottima quale che sia lo stato iniziale.

Dimostrazione - Un risultato preliminare di cui si omette la dimostrazione ⁽¹⁾ assicura che, nelle ipotesi fatte, esiste una soluzione ammissibile per ogni stato iniziale. In base al Teorema 9.5 è allora garantita l'esistenza di una soluzione ottima nell'ambito delle funzioni di controllo misurabili. \square

Corollario 9.13 - Considerato il Problema 9.1 nel caso stazionario, se è soddisfatta la condizione (9.10) e se gli autovalori della matrice A hanno parte reale non positiva, esiste un'unica soluzione ottima non singolare quale che sia lo stato iniziale e il controllo è di tipo "bang-bang".

⁽¹⁾ Cfr. [16], Teorema 8, pag. 92.

Dimostrazione - È immediata in base al precedente Teorema 9.12 e ai Teoremi 9.3 e 9.4. \square

Per quanto riguarda il numero delle commutazioni del controllo ottimo esso risulta uniformemente limitato rispetto allo stato iniziale se gli autovalori della matrice A sono reali. Si ha in proposito il seguente teorema.

Teorema 9.14 - Considerato il Problema 9.1 nel caso stazionario, se è soddisfatta la condizione (9.10) e se gli autovalori della matrice A sono reali non positivi, allora il numero di commutazioni per ciascuna componente del controllo ottimo risulta minore o eguale di $n - 1$, qualunque sia lo stato iniziale.

Dimostrazione - Nelle ipotesi fatte, in base al precedente Corollario 9.13 la soluzione ottima esiste, è unica, con controllo “bang–bang”. Dalla (9.13) si ha:

$$u_j^0(t) = -\operatorname{sign}\{\lambda^{0T}(t)b_j\} \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad \forall t \in [t_i, t_f^0] \quad (9.17)$$

dove il costato λ^0 , per essere soluzione dell'equazione (9.6), nel caso stazionario è esprimibile come:

$$\lambda^0(t) = e^{-A^T(t-t_i)} \lambda^i$$

Come è noto, se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sono gli autovalori reali distinti della matrice A , rispettivamente di molteplicità m_1, m_2, \dots, m_k , la generica componente del vettore $\lambda^0(t)$ è esprimibile nella forma:

$$\lambda_r^0(t) = \sum_{s=1}^k p_{rs}(t) e^{-\alpha_s(t-t_i)} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

dove p_{rs} è un polinomio in t di grado minore di m_s . Sostituendo la precedente nella (9.17), si ha:

$$\begin{aligned} u_j^0(t) &= -\operatorname{sign}\left\{\sum_{s=1}^k \left(\sum_{r=1}^n b_{jr} p_{rs}(t)\right) e^{-\alpha_s(t-t_i)}\right\} \\ &= -\operatorname{sign}\left\{\sum_{s=1}^k P_{js}(t) e^{-\alpha_s(t-t_i)}\right\} \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad \forall t \in [t_i, t_f^0] \end{aligned}$$

dove P_{js} è ancora un polinomo in t di grado minore di m_s . Per un noto teorema di analisi si ha che l'argomento della funzione segno nella precedente espressione ha al più $m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1 = n - 1$ radici reali nella variabile t . Conseguentemente u_j^0 commuta al più $n - 1$ volte, quale che sia lo stato iniziale. \square

Osservazione 9.15 - È opportuno osservare che se gli autovalori della matrice A non sono tutti reali il numero di commutazioni di ciascuna componente del controllo

ottimo è limitato ma non uniformemente limitato rispetto allo stato iniziale, nel senso che tale numero può crescere indefinitamente all'aumentare della distanza dello stato iniziale dall'origine. Ad esempio, se gli autovalori della matrice A sono due numeri complessi coniugati $\alpha \pm j\omega$, in base alle (9.17) e (9.6) si ha:

$$\begin{aligned} u_j^0(t) &= -\operatorname{sign}\{\lambda^i e^{-A^T(t-t_i)} b_j\} \\ &= -\operatorname{sign}\{m e^{\alpha t} \cos[\omega(t-t_i) + \psi]\} \end{aligned}$$

dove m e ψ sono due numeri opportuni. Fissata la pulsazione ω la funzione coseno si annulla un numero di volte finito ma comunque grande a seconda dell'ampiezza dell'intervallo $[t_i, t_f^0]$ e quest'ultima dipende ovviamente dalla distanza di x^i dall'origine.

Per quanto concerne la sintetizzabilità della soluzione ottima, si ha che per il problema stazionario tale proprietà sussiste anche se in generale non è deducibile l'espressione analitica esplicita del controllo ottimo in funzione dello stato corrente. Una giustificazione della precedente affermazione può essere data come segue.

Supposto che per il Problema 9.1 nel caso stazionario esista un'unica soluzione ottima non singolare, dalla (9.17) si ha:

$$u^0(t) = -\operatorname{sign}\{B^T \lambda^0(t)\} \quad \forall t \in [t_i, t_f^0]$$

Pertanto il problema di stabilire un legame istantaneo fra stato e controllo è ricondotto a quello di stabilire un legame istantaneo fra costato e stato. La condizione finale sull'evoluzione dello stato implica che, per ogni $t \in [t_i, t_f^0]$, risulti:

$$x^0(t_f^0) = e^{A(t_f^0 - t)} x^0(t) + \int_t^{t_f^0} e^{A(t_f^0 - \tau)} B u^0(\tau) d\tau = 0$$

da cui si ha:

$$x^0(t) = \int_t^{t_f^0} e^{A(t-\tau)} B \operatorname{sign}\{B^T \lambda^0(\tau)\} d\tau \quad (9.18)$$

Si può osservare a questo punto che, per il problema di controllo a tempo minimo considerato, la differenza $t_f^0 - t$ è univocamente determinata dal valore dello stato nell'istante t e cioè da $x^0(t)$; risulta cioè:

$$t_f^0 - t = h(x^0(t))$$

Inoltre dalla (9.6) si ha:

$$\lambda^0(\tau) = e^{-A^T(\tau-t)} \lambda^0(t)$$

Sostituendo le due precedenti relazioni nella (9.18), si ha:

$$x^0(t) = \int_t^{t+h(x^0(t))} e^{A(t-\tau)} B \operatorname{sign}\{B^T e^{A^T(t-\tau)} \lambda^0(\tau)\} d\tau \quad (9.19)$$

La (9.19) stabilisce una relazione analitica fra $x^0(t)$ e $\lambda^0(t)$ la quale, nell'ipotesi di risolubilità rispetto a $\lambda^0(t)$, consente di giustificare l'affermazione fatta circa la sintetizzabilità del controllo ottimo.

La difficoltà di risolvere la (9.19) rispetto a $\lambda^0(t)$ ha come conseguenza che in generale non si riesce a fornire l'espressione analitica esplicita del controllo in funzione dello stato. Supponendo tuttavia di rappresentare tale soluzione nella forma:

$$\lambda^0(t) = g(x^0(t))$$

e posto:

$$B^T g(x^0(t)) = \varphi[x^0(t)]$$

per il controllo ottimo si ha una espressione sintetizzabile del tipo:

$$u_j^0(t) = -\operatorname{sign}\{\varphi_j[x^0(t)]\} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, p \\ \forall t \in [t_i, t_f^0] \end{matrix} \quad (9.20)$$

Al luogo dei punti di \mathbb{R}^n per i quali risulta:

$$\varphi_j(x) = 0$$

ci si riferisce con la denominazione di *luogo* (*curva* in \mathbb{R}^2 , *superficie* in \mathbb{R}^3 , *ipersuperficie* in \mathbb{R}^n con $n > 3$) di *commutazione* relativo alla variabile j -esima di controllo, poiché quando la traiettoria ottima dello stato attraversa tale luogo, il controllo u_j^0 cambia di segno. Per ciascun valore di j , cioè, lo spazio di stato è suddiviso in regioni a cui sono associati valori costanti del controllo u_j^0 (+1 o -1 a seconda che in tali regioni risulti $\varphi_j(x) < 0$ o $\varphi_j(x) > 0$) separate appunto fra loro dai luoghi di commutazione suddetti.

Si vuole infine osservare che, anche nell'ipotesi fatta di non singolarità della soluzione ottima, può verificarsi che, in sottointervalli di tempo di misura positiva, la traiettoria ottima appartenga a qualche luogo di commutazione e quindi risulti $\varphi_j(x^0(t)) = 0 \quad \forall t \in [t', t''] \subset [t_i, t_f^0]$. In tali casi, evidentemente, l'espressione (9.20) non è analiticamente definita e occorre indicare esplicitamente il valore del controllo ottimo nel sottointervallo $[t', t'']$.

Esempio 9.1 - Si consideri il Problema 9.1 di regolazione a tempo minimo nel caso del *doppio integratore* e cioè di un sistema lineare stazionario del secondo ordine con ingresso scalare e con autovalori nulli, descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (9.21)$$

Tale modello può rappresentare la dinamica di un corpo mobile (legge di *Newton*) e in particolare il legame fra la forza (o coppia) u e la posizione (o posizione angolare) x_1 , in presenza di inerzia (massa o momento d'inerzia) unitaria, e in assenza di attrito. Il vincolo (9.2) sull'ampiezza del controllo rappresenta evidentemente limitazioni fisiche al valore che può assumere la forza (o la coppia) motrice. Il problema della regolazione a tempo minimo di tale sistema può pertanto presentare notevole interesse in applicazioni di tipo meccanico.

Si osserva innanzitutto che la coppia di matrici A, b che caratterizza il sistema (9.21) soddisfa la condizione (9.10) (condizione di controllabilità nel caso di ingresso scalare) e che gli autovalori di A hanno parte reale non positiva (sono nulli). Pertanto utilizzando il Corollario 9.13 si può affermare che esiste un'unica soluzione ottima con controllo “bang–bang”, per ogni stato iniziale. Inoltre, poiché gli autovalori di A sono reali, in base al Teorema 9.14 si può affermare che il controllo ottimo presenta al più un istante di commutazione \bar{t} , quale che sia lo stato iniziale. Infine, ricordando quanto osservato circa la sintetizzabilità della soluzione ottima, ci si deve aspettare che il controllo ottimo sia ottenibile mediante una reazione istantanea dallo stato.

La determinazione della soluzione ottima, la sua caratterizzazione e la sua espressione in forma sintetizzabile verranno ottenute mostrando che, per il problema considerato, esiste un'unica soluzione ammissibile di tipo “bang–bang”, capace di trasferire nell'origine un qualunque stato iniziale assegnato con non più di una commutazione.

A tale scopo conviene individuare l'andamento delle traiettorie nel piano di stato che corrispondono a controlli costanti $u(t) = \pm 1$. Integrando le equazioni (9.21) con tale assunzione si ha:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \pm \frac{1}{2}(t - t_i)^2 + x_2^i(t - t_i) + x_1^i \\x_2(t) &= \pm(t - t_i) + x_2^i\end{aligned}$$

Dalle precedenti equazioni si ricava:

$$t - t_i = \pm(x_2 - x_2^i) \quad (9.22)$$

$$x_1 - x_1^i = \pm \frac{1}{2}(x_2^2 - x_2^{i2}) \quad (9.23)$$

Si osserva che le traiettorie così ottenute sono costituite da due famiglie di parabole, con l'andamento rappresentato in Fig. 9.1, dove la freccia rappresenta il verso del moto all'aumentare di t (le traiettorie continue sono generate da $u = 1$, quelle tratteggiate da $u = -1$).

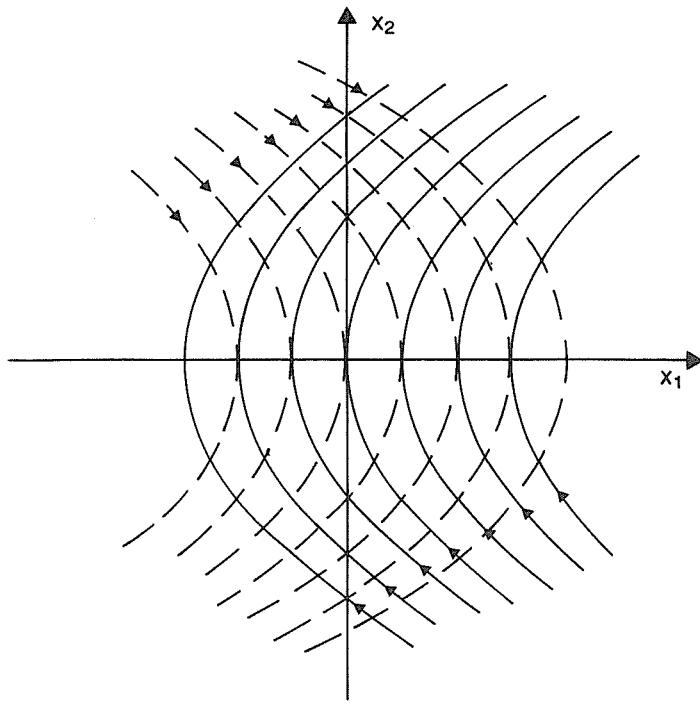


Fig. 9.1

Si osserva anche che soltanto una traiettoria per ciascuna famiglia passa per l'origine e in particolare le equazioni corrispondenti sono:

$$x_1 = \pm \frac{1}{2}x_2^2$$

Conviene a questo punto definire i seguenti insiemi rappresentati in Fig. 9.2:

$$\begin{aligned}\gamma^+ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, x_2 < 0\} \\ \gamma^- &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2, x_2 > 0\} \\ \gamma &= \gamma^+ \cup \gamma^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|, x \neq 0\} \\ \Gamma^+ &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 < -\frac{1}{2}x_2|x_2|\} \\ \Gamma^- &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > -\frac{1}{2}x_2|x_2|\}\end{aligned}\tag{9.24}$$

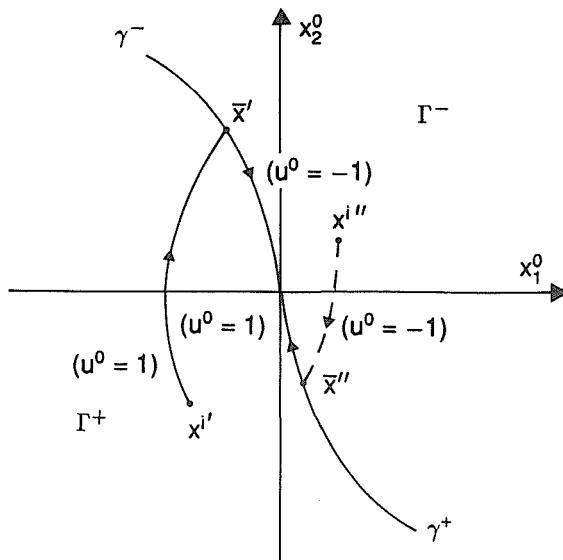


Fig. 9.2

È immediato verificare (Fig. 9.2) che per stati iniziali che appartengono all'insieme γ^- , e solo per essi, è possibile pervenire nell'origine senza alcuna commutazione e più in particolare con controllo ottimo pari a 1 per $x^i \in \gamma^+$, e pari a -1 per $x^i \in \gamma^-$.

Per stati iniziali $x^{ii} \in \Gamma^+$ è possibile pervenire nell'origine assumendo un controllo ottimo pari a 1 fino all'istante di commutazione \bar{t}' , che si verifica quando la traiettoria interseca (in \bar{x}') l'insieme γ^- , e successivamente pari a -1 , mentre non sono possibili altre traiettorie se non con un numero di commutazioni maggiore di 1. Analogamente, per stati iniziali $x^{iii} \in \Gamma^-$ è possibile pervenire nell'origine assumendo un controllo ottimo pari a -1 fino all'istante di commutazione \bar{t}'' , che si verifica quando la traiettoria interseca (in \bar{x}'') l'insieme γ^+ , e successivamente pari a 1.

A questo punto, osservando che al generico stato di $\Gamma^+ \cup \gamma^+$, quale che sia stata la traiettoria precedente, deve essere associato il controllo ottimo di valore 1, mentre a stati di $\Gamma^- \cup \gamma^-$ deve essere associato il controllo ottimo di valore -1 , resta dimostrata la legge di controllo ottimo (sintetizzabile):

$$u^0(x^0(t)) = \begin{cases} 1 & \forall x^0(t) \in \gamma^+ \cup \Gamma^+ \\ -1 & \forall x^0(t) \in \gamma^- \cup \Gamma^- \end{cases} \quad (9.25)$$

Ovviamente l'evoluzione ottima dello stato è soluzione delle equazioni differen-

ziali:

$$\dot{x}_1^0 = x_2^0$$

$$\dot{x}_2^0 = u^0(x^0)$$

con condizione iniziale assegnata:

$$x^0(t_i) = x^i$$

Per quanto riguarda il tempo minimo di trasferimento di x^i nell'origine si hanno i seguenti casi.

- i) Se $x^i \in \gamma$, dalla (9.22) si deduce $t_f^0 - t_i = \mp x_2^i$ e osservando che $x_2^i < 0$ per $x^i \in \gamma^+$ mentre $x_2^i > 0$ per $x^i \in \gamma^-$, si ha:

$$t_f^0 - t_i = |x_2^i|$$

- ii) Se $x^i \in \Gamma^+$ si ha un istante di commutazione in \bar{t}' e ovviamente risulta:

$$t_f^0 - t_i = (t_f^0 - \bar{t}') + (\bar{t}' - t_i)$$

Dalla (9.22) si deduce ancora facilmente che:

$$\bar{t}' - t_i = \bar{x}_2' - x_2^i$$

$$t_f^0 - \bar{t}' = \bar{x}_2'$$

e quindi:

$$t_f^0 - t_i = 2\bar{x}_2' - x_2^i \quad (9.26)$$

Per esprimere \bar{x}_2' in funzione dello stato iniziale si può imporre che lo stato di commutazione \bar{x}' appartenga sia all'insieme γ^- sia alla traiettoria passante per lo stato iniziale e caratterizzata da un controllo pari a 1. Si ha allora rispettivamente in base al¹ (9.23):

$$\bar{x}_1' = -\frac{1}{2}\bar{x}_2'^2 \quad \bar{x}_2' > 0$$

$$\bar{x}_1' - x_1^i = \frac{1}{2}(\bar{x}_2'^2 - x_2^{i2})$$

Risolvendo il precedente sistema rispetto a \bar{x}_2' si ottiene:

$$\bar{x}_2' = \sqrt{\frac{1}{2}x_2^{i2} - x_1^i}$$

e sostituendo tale espressione nella (9.26) si ottiene infine:

$$t_f^0 - t_i = \sqrt{2x_2^{i2} - 4x_1^i} - x_2^i$$

iii) Se $x^i \in \Gamma^-$, procedendo in maniera analoga si ottiene:

$$t_f^0 - t_i = \sqrt{2x_2^{i2} + 4x_1^i} + x_2^i$$

Per quanto detto, si ha che le commutazioni del controllo ottimo si verificano quando la traiettoria perviene sulla curva γ . Tale insieme costituisce perciò la curva di commutazione per il problema considerato e, come risulta dalla (9.24), la sua equazione è:

$$\varphi(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2| = 0$$

Poiché però, come si è visto, quale che sia lo stato iniziale, la traiettoria ottima appartiene, tutta o in parte, alla suddetta curva γ , l'espressione:

$$u^0(x^0) = -\operatorname{sign}\left\{x_1^0 + \frac{1}{2}x_2^0|x_2^0|\right\}$$

non è ben definita su tutta la traiettoria ottima e non può quindi essere sostituita alla (9.25).

Esempio 9.2 - Si consideri il Problema 9.1 di regolazione a tempo minimo nel caso di un sistema lineare stazionario del secondo ordine con ingresso scalare e con autovalori reali negativi, descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_1 u \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_2 + \alpha_2 u\end{aligned}\tag{9.27}$$

con $\alpha_2 < \alpha_1 < 0$.

Tale semplice modello può descrivere il moto rettilineo di un punto materiale di massa unitaria sottoposto ad una forza applicata $u(t)$, ad una forza di richiamo e ad una forza di attrito. Infatti, indicata con $y(t)$ la posizione istantanea del punto, l'equazione del moto ha la forma:

$$\ddot{y} = u - c_1 \dot{y} - c_2 y \quad c_1, c_2 > 0\tag{9.28}$$

Si può verificare facilmente che, posto $c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ e $c_2 = \alpha_1 \alpha_2$ e definite le variabili:

$$x_1 = -\alpha_1 \alpha_2 y + \alpha_1 \dot{y}$$

$$x_2 = -\alpha_1 \alpha_2 y + \alpha_2 \dot{y}$$

L'equazione (9.28) equivale alle (9.27).

Si osserva che la coppia di matrici A, b che caratterizza il sistema (9.27) soddisfa la condizione (9.10) (condizione di controllabilità) e che gli autovalori di A sono reali negativi. Pertanto, in base al Corollario 9.13 si può affermare che esiste un'unica soluzione ottima con controllo "bang-bang", per ogni stato iniziale. Inoltre

poiché gli autovalori di A sono reali, in base al Teorema 9.14, il controllo ottimo presenta al più un istante di commutazione \bar{t} , quale che sia lo stato iniziale. Tale controllo risulterà sintetizzabile.

Come già nell'esempio precedente la soluzione ottima verrà dedotta mostrando che esiste una sola soluzione ammissibile di tipo "bang-bang" capace di trasferire nell'origine un qualunque stato iniziale assegnato, con non più di una commutazione.

Assumendo per il controllo $u(t) = \pm 1$, integrando le (9.27) si ha:

$$x_1(t) = e^{\alpha_1(t-t_i)} x_1^i \pm (e^{\alpha_1(t-t_i)} - 1)$$

$$x_2(t) = e^{\alpha_2(t-t_i)} x_2^i \pm (e^{\alpha_2(t-t_i)} - 1)$$

Dalle precedenti equazioni si ricava:

$$t - t_i = \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{x_1 \pm 1}{x_1^i \pm 1} = \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{x_2 \pm 1}{x_2^i \pm 1} \quad (9.29)$$

$$\left(\frac{x_1 \pm 1}{x_1^i \pm 1} \right)^{\alpha_2} = \left(\frac{x_2 \pm 1}{x_2^i \pm 1} \right)^{\alpha_1} \quad (9.30)$$

Si osserva cioè che in questo caso le traiettorie sono costituite da due famiglie di curve dipendenti dal rapporto α_1/α_2 e che esse tendono allo stato $(-1, -1)$ nel caso $u = 1$, e allo stato $(1, 1)$ nel caso $u = -1$; il loro andamento è rappresentato in Fig. 9.3 a) per $u = 1$ e in Fig. 9.3 b) per $u = -1$, dove le frecce indicano il verso del moto al crescere del tempo.

Si osserva anche che soltanto una traiettoria per ciascuna famiglia passa per l'origine e in particolare le relative equazioni sono:

$$(1 + x_1)^{\alpha_2} = (1 + x_2)^{\alpha_1} \quad x_1, x_2 \geq -1$$

$$(1 - x_1)^{\alpha_2} = (1 - x_2)^{\alpha_1} \quad x_1, x_2 \leq 1$$

Conviene a questo punto definire i seguenti insiemi, rappresentati in Fig. 9.4:

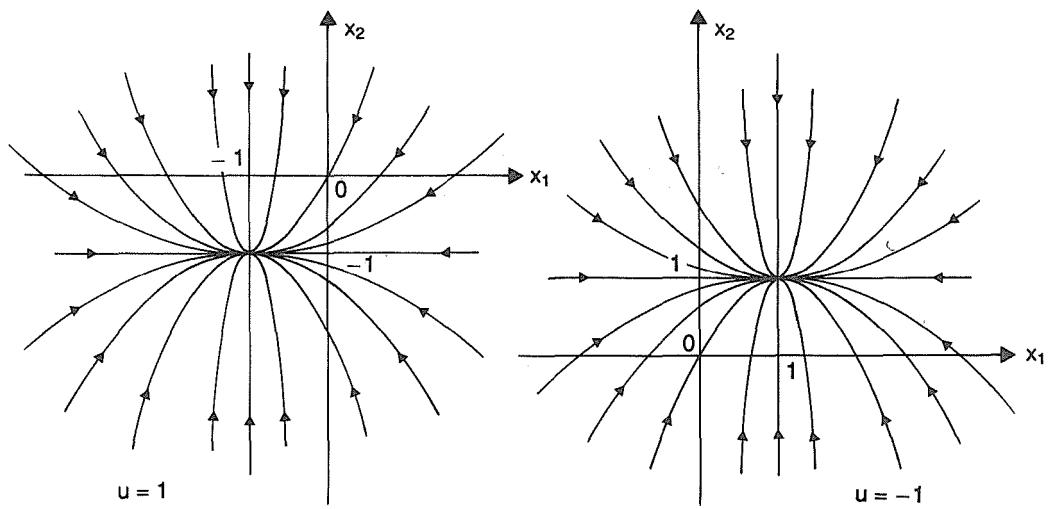
$$\gamma^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = (1 + x_1)^{\alpha_2/\alpha_1} - 1, x_1 > 0\}$$

$$\gamma^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = -(1 - x_1)^{\alpha_2/\alpha_1} + 1, x_1 < 0\}$$

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \frac{x_1}{|x_1|} [(1 + |x_1|)^{\alpha_2/\alpha_1} - 1], x \neq 0\} \quad (9.31)$$

$$\Gamma^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < \frac{x_1}{|x_1|} [(1 + |x_1|)^{\alpha_2/\alpha_1} - 1]\}$$

$$\Gamma^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > \frac{x_1}{|x_1|} [(1 + |x_1|)^{\alpha_2/\alpha_1} - 1]\}$$



a)

b)

Fig. 9.3

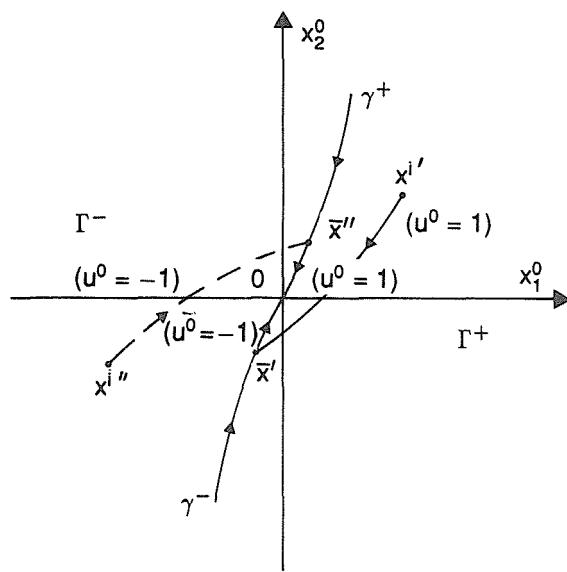


Fig. 9.4

È immediato verificare (Fig. 9.4) che per stati iniziali che appartengono all'insieme γ , e solo per essi, è possibile pervenire nell'origine senza alcuna commutazione e più in particolare con controllo ottimo pari a 1 per $x^i \in \gamma^+$ e pari a -1 per $x^i \in \gamma^-$. Per stati iniziali $x^{ii} \in \Gamma^+$ è possibile pervenire nell'origine assumendo un controllo ottimo pari a 1 fino all'istante di commutazione \bar{t}' che si verifica quando la traiettoria interseca (in \bar{x}') l'insieme γ^- , e successivamente pari a -1 , mentre non sono possibili altre traiettorie se non con un numero di commutazioni maggiore di 1. Analogamente, per stati iniziali $x^{ii} \in \Gamma^-$ è possibile pervenire nell'origine assumendo un controllo ottimo pari a -1 fino all'istante di commutazione \bar{t}'' , che si verifica quando la traiettoria interseca (in \bar{x}'') l'insieme γ^+ , e successivamente pari a 1. A questo punto, osservando che al generico stato di $\Gamma^+ \cup \gamma^+$, quale che sia stata la traiettoria precedente, deve essere associato il controllo ottimo di valore 1, mentre a stati di $\Gamma^- \cup \gamma^-$ deve essere associato il controllo ottimo di valore -1 , resta dimostrata la legge di controllo ottimo sintetizzabile:

$$u^0(x^0(t)) = \begin{cases} 1 & \forall x^0(t) \in \gamma^+ \cup \Gamma^+ \\ -1 & \forall x^0(t) \in \gamma^- \cup \Gamma^- \end{cases} \quad (9.32)$$

Ovviamente l'evoluzione ottima dello stato è soluzione delle equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^0 &= \alpha_1 x_1^0 + \alpha_1 u^0(x^0) \\ \dot{x}_2^0 &= \alpha_2 x_2^0 + \alpha_2 u^0(x^0) \end{aligned}$$

con condizione iniziale assegnata:

$$x^0(t_i) = x^i$$

Per quanto riguarda il tempo minimo di trasferimento di x^i nell'origine si hanno i seguenti casi.

i) Se $x^i \in \gamma$, dalla (9.29) si deduce:

$$t_f^0 - t_i = \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{1 \pm x_1^i} = \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{1}{1 \pm x_2^i}$$

e, osservando che $x^i > 0$ per ogni $x^i \in \gamma^+$ mentre $x^i < 0$ per ogni $x^i \in \gamma^-$, si ha:

$$t_f^0 - t_i = \frac{1}{|\alpha_1|} \ln(1 + |x_1^i|) = \frac{1}{|\alpha_2|} \ln(1 + |x_2^i|)$$

ii) Se $x^i \in \Gamma^+$ si ha un istante di commutazione \bar{t}' e ovviamente risulta:

$$t_f^0 - t_i = (t_f^0 - \bar{t}') + (\bar{t}' - t_i)$$

Dalla (9.29) si deduce facilmente che:

$$\begin{aligned}\bar{t}' - t_i &= \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1 + \bar{x}'_1}{1 + x^i_1} \\ t_f^0 - \bar{t}' &= \frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1}{1 - \bar{x}'_1}\end{aligned}$$

e quindi:

$$t_f^0 - t_i = \frac{1}{|\alpha_1|} \ln \frac{(1 + x^i_1)(1 - \bar{x}'_1)}{1 + \bar{x}'_1} \quad (9.33)$$

Per esprimere \bar{x}'_1 in funzione dello stato iniziale si può imporre che lo stato di commutazione \bar{x}' appartenga sia all'insieme γ^- sia alla traiettoria passante per lo stato iniziale e caratterizzata da un controllo pari a 1. Si ha allora rispettivamente in base alle (9.30):

$$\begin{aligned}\bar{x}'_2 &= -(1 - \bar{x}'_1)^{\alpha_2/\alpha_1} + 1 \quad \bar{x}'_1 < 0 \\ \frac{\bar{x}'_2 + 1}{x^i_2 + 1} &= \left(\frac{\bar{x}'_1 + 1}{x^i_1 + 1} \right)^{\alpha_2/\alpha_1}\end{aligned}$$

Dalle precedenti equazioni, eliminando \bar{x}'_2 , si ha:

$$\frac{2 - (1 - \bar{x}'_1)^{\alpha_2/\alpha_1}}{x^i_2 + 1} = \left(\frac{\bar{x}'_1 + 1}{x^i_1 + 1} \right)^{\alpha_2/\alpha_1} \quad \bar{x}'_1 < 0 \quad (9.34)$$

La soluzione esplicita della precedente equazione (9.34) rispetto a \bar{x}'_1 non è in generale possibile; tuttavia, fissato x^i , essa può essere risolta numericamente.

Si osservi che, pur essendo $\bar{x}'_1 < 0$, il rapporto $\frac{\bar{x}'_1 + 1}{x^i_1 + 1}$ risulta sempre positivo, come potrebbe verificarsi in base all'andamento delle traiettorie ottime. Si osservi anche che espressioni analoghe alle (9.33) e (9.34) possono essere dedotte con riferimento alle quantità \bar{x}'_2, x^i_2 e α_2 .

iii) Se $x^i \in \Gamma^-$, procedendo in maniera analoga si ottiene:

$$t_f^0 - t_i = \frac{1}{|\alpha_1|} \ln \frac{(1 - x^i_1)(1 + \bar{x}''_1)}{1 - \bar{x}''_1}$$

dove \bar{x}''_1 è soluzione dell'equazione:

$$\frac{2 - (1 + \bar{x}''_1)^{\alpha_2/\alpha_1}}{1 - x^i_2} = \left(\frac{1 - \bar{x}''_1}{1 - x^i_1} \right)^{\alpha_2/\alpha_1} \quad \bar{x}''_1 > 0$$

Anche in questo esempio le commutazioni si verificano quando la traiettoria perviene sulla curva γ che costituisce pertanto la curva di commutazione per il problema considerato. Come risulta dalla (9.31), la sua equazione è:

$$\varphi(x) = x_2 - \frac{x_1}{|x_1|} [(1 + |x_1|)^{\alpha_2/\alpha_1} - 1] = 0$$

ma poiché, come si è visto, la traiettoria ottima appartiene, tutta o in parte, alla suddetta curva γ , l'espressione:

$$u^0(x^0) = -\operatorname{sign}\left\{x_2^0 - \frac{x_1^0}{|x_1^0|} [(1 + |x_1^0|)^{\alpha_2/\alpha_1} - 1]\right\}$$

non è ben definita su tutta la traiettoria ottima e non può quindi essere sostituita alla (9.32).

Esempio 9.3 - Si consideri il Problema 9.1 di regolazione a tempo minimo nel caso dell'*oscillatore armonico* e cioè di un sistema lineare stazionario del secondo ordine con ingresso scalare e con autovalori immaginari coniugati, descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega x_1 + u\end{aligned}\tag{9.35}$$

con $\omega > 0$. Un modello del tipo considerato può presentare interesse in applicazioni meccaniche, elettroniche, aereospaziali e più in generale della fisica applicata in quanto l'evoluzione libera del suddetto sistema è soluzione della equazione differenziale dei moti armonici.

Poiché la coppia di matrici A, b che caratterizza il sistema (9.35) soddisfa la condizione (9.10) (condizione di controllabilità) e gli autovalori di A hanno parte reale non positiva, in base al Corollario 9.13 si può affermare che esiste un'unica soluzione ottima, con controllo "bang-bang", per ogni stato iniziale. Poiché gli autovalori di A non sono reali, il numero di commutazioni della soluzione ottima non è uniformemente limitato rispetto allo stato iniziale. È però possibile dedurre facilmente un limite superiore per la durata di ciascun sottointervallo fra due commutazioni successive.

L'Hamiltoniano per il problema considerato, con riferimento a soluzioni non singolari, ha espressione:

$$H(x, u, 1, \lambda) = 1 + \omega \lambda_1 x_2 - \omega \lambda_2 x_1 + \lambda_2 u$$

La condizione necessaria (9.6) si particolarizza nelle equazioni di costato:

$$\dot{\lambda}_1^0 = \omega \lambda_2^0$$

$$\dot{\lambda}_2^0 = -\omega \lambda_1^0$$

mentre la (9.13) dà luogo alla espressione del controllo ottimo:

$$u^0(t) = -\operatorname{sign}\{\lambda^{0T}(t)b\} = -\operatorname{sign}\{\lambda_2^0(t)\}$$

Risolvendo le equazioni di costato si deduce una espressione del tipo:

$$\begin{aligned}\lambda_2^0(t) &= \lambda_1^i \sin \omega(t-t_i) - \lambda_2^i \cos \omega(t-t_i) \\ &= m \sin[\omega(t-t_i) + \psi]\end{aligned}$$

dove m e ψ sono due numeri opportuni. Sostituendo tale espressione in quella del controllo si ha:

$$u^0(t) = -\operatorname{sign}\{m \sin[\omega(t-t_i) + \psi]\}$$

Come si deduce dalla precedente espressione e dalla Fig. 9.5, tutti i sottointervalli di commutazione hanno una durata pari a $\frac{\pi}{\omega}$, ad eccezione eventualmente del primo e dell'ultimo che hanno durata minore o uguale di $\frac{\pi}{\omega}$.

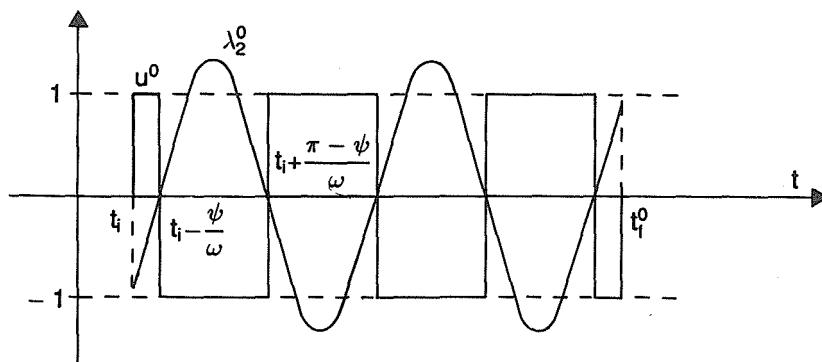


Fig. 9.5

La soluzione ottima del problema verrà dedotta mostrando che esiste una sola soluzione ammissibile di tipo "bang-bang" capace di trasferire nell'origine lo stato iniziale assegnato, con sottointervalli di commutazione di durata non superiore a $\frac{\pi}{\omega}$.

Assumendo per il controllo $u(t) = \pm 1$, integrando le (9.35) si ha:

$$x_1(t) = \left(x_1^i \mp \frac{1}{\omega} \right) \cos \omega(t-t_i) + x_2^i \sin \omega(t-t_i) \pm \frac{1}{\omega}$$

$$x_2(t) = - \left(x_1^i \mp \frac{1}{\omega} \right) \sin \omega(t-t_i) + x_2^i \cos \omega(t-t_i)$$

Dalle precedenti equazioni, elevando al quadrato e sommando, si deduce:

$$\left(x_1 \mp \frac{1}{\omega} \right)^2 + x_2^2 = \left(x_1^i \mp \frac{1}{\omega} \right)^2 + x_2^{i2}$$

che consente di affermare che le traiettorie con ingresso ± 1 sono circonferenze passanti per lo stato iniziale x^i e con centro $(\pm \frac{1}{\omega}, 0)$, come rappresentato in Fig. 9.6. Si può anche verificare facilmente che il verso di percorrenza delle circonferenze al crescere del tempo è quello orario. Si osserva inoltre che soltanto una traiettoria per ciascuna famiglia passa per l'origine e che le relative equazioni sono:

$$\left(x_1 \mp \frac{1}{\omega} \right)^2 + x_2^2 = \frac{1}{\omega^2}$$

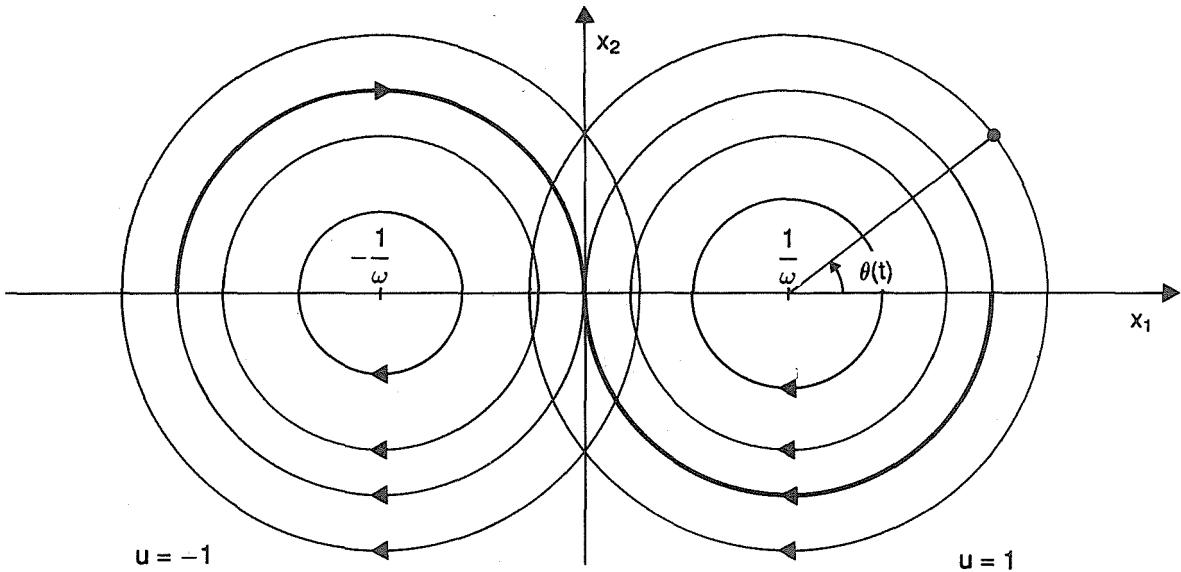


Fig. 9.6

Dalla Fig. 9.6 si ha che, in un generico istante t , l'angolo $\vartheta(t)$ è dato da:

$$\vartheta(t) = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{x_2(t)}{x_1(t) \mp 1/\omega} \right\}$$

Derivando la precedente equazione e ricordando le equazioni (9.35) per $u(t) = \pm 1$,

si ha:

$$\dot{\vartheta}(t) = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2(t)}{(x_1(t) \mp 1/\omega)^2}} \cdot \frac{\dot{x}_1(t)(x_1(t) \mp 1/\omega) - x_2(t)\dot{x}_1(t)}{(x_1(t) \mp 1/\omega)^2} = -\omega$$

Si può quindi affermare che le traiettorie precedentemente determinate vengono percorse con velocità angolare costante e pari a ω , in senso orario. Conseguentemente l'intervallo di tempo richiesto per descrivere un arco di ampiezza β con controllo costante e pari a ± 1 , è dato da β/ω .

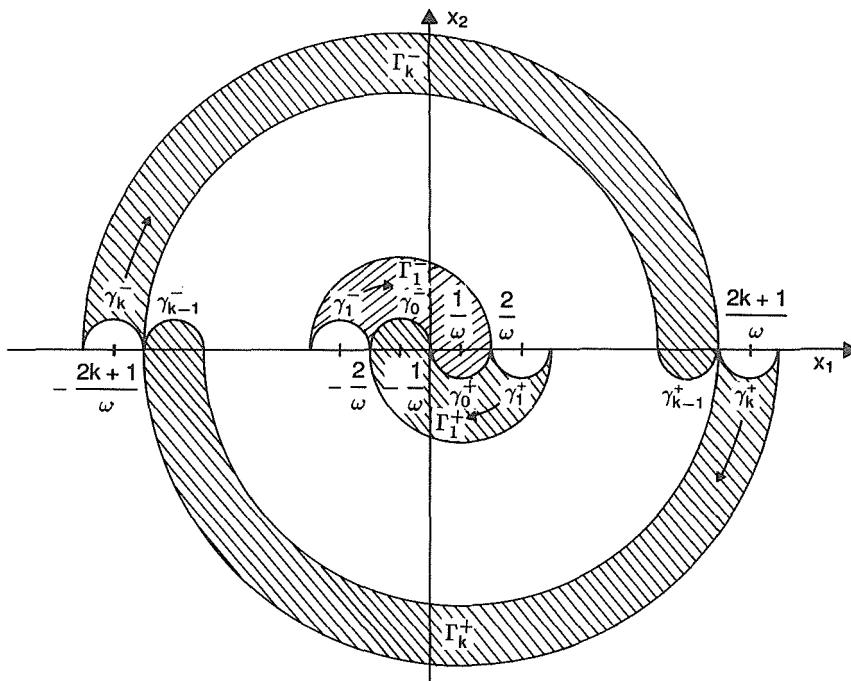


Fig. 9.7

Conviene a questo punto definire i seguenti insiemi:

$$\gamma_k^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : \left(x_1 - \frac{2k+1}{\omega}\right)^2 + x_2^2 = \frac{1}{\omega^2}; x_2 \leq 0\} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\gamma_k^- = \{x \in \mathbb{R}^2 : \left(x_1 + \frac{2k+1}{\omega}\right)^2 + x_2^2 = \frac{1}{\omega^2}; x_2 \geq 0\} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

che nel piano di stato sono, come mostrato in Fig. 9.7, le semicirconferenze di

raggio $\frac{1}{\omega}$ e rispettivamente di centro $\left(\frac{2k+1}{\omega}, 0\right)$ e $\left(-\frac{2k+1}{\omega}, 0\right)$, contenute nel semipiano inferiore e superiore rispetto all'asse delle ascisse.

Siano inoltre Γ_k^+ e Γ_k^- , $k = 1, 2, \dots$ rispettivamente gli insiemi del piano di stato descritti da γ_k^+ e da γ_k^- mediante una rotazione di π in senso orario attorno ai punti $(1/\omega, 0)$ e $(-1/\omega, 0)$ (attraverso tale rotazione la generica γ_k^+ , $k = 1, 2, \dots$ viene a sovrapporsi alla γ_{k-1}^- e la γ_k^- , $k = 1, 2, \dots$ alla γ_{k-1}^+).

Sia infine:

$$\gamma^+ = \bigcup_{k=0}^{\infty} \gamma_k^+$$

$$\gamma^- = \bigcup_{k=0}^{\infty} \gamma_k^-$$

$$\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$$

$$\Gamma^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^+$$

$$\Gamma^- = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^-$$

Dalla Fig. 9.8 si può dedurre a questo punto che stati iniziali del tipo x^i appartenenti alle curve γ_0^+ e γ_0^- possono essere trasferiti nell'origine con un controllo costante e rispettivamente pari a 1 o a -1 applicato per un intervallo di tempo non superiore a π/ω e quindi le relative traiettorie sono ottime; si può anche affermare che i punti di γ_0^+ e di γ_0^- sono gli unici che possono essere trasferiti nell'origine con un controllo ottimo senza commutazioni. Si può successivamente osservare (Fig. 9.8) che ciascuno stato iniziale del tipo x^{ii} appartenente a $\Gamma_1^+ \setminus (\gamma_0^- \cup \gamma_0^+)$ o a $\Gamma_1^- \setminus (\gamma_0^- \cup \gamma_0^+)$, può essere trasferito in γ_0^- e rispettivamente in γ_0^+ mediante un controllo costantemente pari a ± 1 , applicato per un intervallo di tempo non superiore a π/ω . La soluzione ottima non potrà quindi che essere data dal controllo pari a ± 1 finché lo stato iniziale non sia trasferito in γ_0^+ e successivamente dal controllo pari a ∓ 1 ; essa presenta perciò una commutazione. Analogamente stati iniziali del tipo x^{iii} appartenenti a $\Gamma_2^+ \setminus \gamma_1^-$ ovvero a $\Gamma_2^- \setminus \gamma_1^+$ possono essere trasferiti in γ_1^- e rispettivamente in γ_1^+ con controllo costante e pari a 1 o a -1 di durata non superiore a π/ω , riconducendo così il problema al caso precedentemente considerato; la soluzione ottima presenta perciò due commutazioni. Analoghe considerazioni possono essere via via ripetute al crescere di k per stati iniziali appartenenti a $\Gamma_k^+ \setminus \gamma_{k-1}^-$ o a $\Gamma_k^- \setminus \gamma_{k-1}^+$.

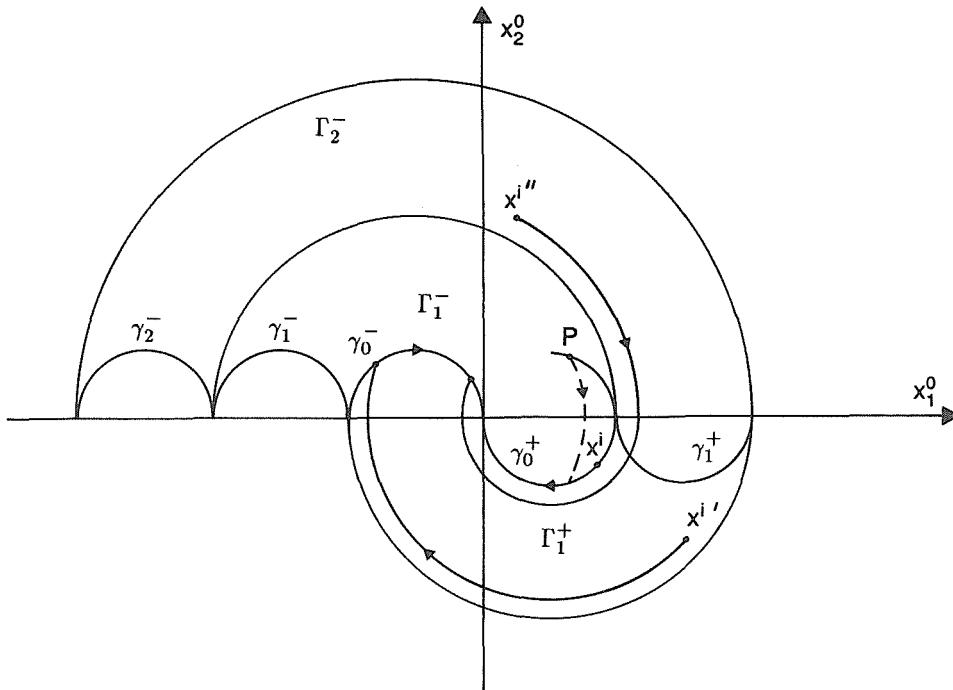


Fig. 9.8

Osservando a questo punto che al generico stato di $\Gamma^+ \setminus \gamma^-$, quale che sia stata la traiettoria precedente, deve essere associato il controllo ottimo $u^0(t) = 1$, mentre a stati di $\Gamma^- \setminus \gamma^+$ deve essere associato il controllo ottimo $u^0(t) = -1$, resta verificata la legge di controllo ottimo sintetizzabile:

$$u^0(x^0(t)) = \begin{cases} 1 & \forall x^0(t) \in \Gamma^+ \setminus \gamma^- \\ -1 & \forall x^0(t) \in \Gamma^- \setminus \gamma^+ \end{cases} \quad (9.36)$$

Ovviamente l'evoluzione ottima dello stato è soluzione delle equazioni differenziali:

$$\dot{x}_1^0 = \omega x_2^0$$

$$\dot{x}_2^0 = -\omega x_1^0 + u^0(x^0)$$

con condizione iniziale assegnata:

$$x^0(t_i) = x^i$$

Inoltre il numero di commutazioni richieste dal controllo ottimo è pari al minimo fra gli indici k che caratterizzano gli insiemi Γ_k^+ e gli insiemi Γ_k^- cui appartiene x^i eccezion fatta per gli x^i appartenenti a $\gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$ che come visto possono essere trasferiti nell'origine senza commutazioni.

Una osservazione che differenzia il problema dell'oscillatore armonico da quelli considerati negli esempi precedenti è che per il primo il controllo a tempo minimo non è necessariamente quello che richiede il minor numero di commutazioni. Ad esempio, con riferimento alla Fig. 9.8, lo stato indicato con la lettera P potrebbe essere trasferito nell'origine senza alcuna commutazione con un controllo costantemente pari a 1 applicato per un intervallo di tempo superiore a π/ω , ma tale controllo non è a tempo minimo; d'altra parte, essendo $P \in \Gamma_1^+ \setminus (\gamma_0^- \cup \gamma_0^+)$, si può affermare in base a quanto detto che il controllo ottimo presenta una commutazione.

Per quanto riguarda il tempo minimo richiesto per raggiungere l'origine si ha che, se ν^0 è il numero di commutazioni del controllo ottimo, tale intervallo di tempo può essere suddiviso in $\nu^0 + 1$ sottointervalli in cui il controllo resta costante. In base a quanto visto precedentemente, se $\nu^0 \geq 1$ si ha che il tempo richiesto è dato da una espressione del tipo:

$$t_f^0 - t_i = \frac{\beta'(x^i)}{\omega} + (\nu^0 - 1) \frac{\pi}{\omega} + \frac{\beta''(x^i)}{\omega}$$

in cui $\beta'(x^i)$ e $\beta''(x^i)$ rappresentano rispettivamente le rotazioni sulla traiettoria ottima per passare dallo stato iniziale al primo stato di commutazione e per passare dall'ultimo stato di commutazione nell'origine. Tali angoli sono funzione dello stato iniziale ma la loro espressione è difficilmente deducibile in generale. Se $\nu^0 = 0$ il tempo minimo di controllo è dato da una espressione del tipo:

$$t_f^0 - t_i = \frac{\beta(x^i)}{\omega}$$

dove $\beta(x^i)$ indica l'angolo descritto della traiettoria ottima per passare dallo stato iniziale nell'origine e che vale:

$$\beta(x^i) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega x_2^i}{1 \mp \omega x_1^i}$$

con il segno superiore se $x^i \in \gamma_0^+$ e con il segno inferiore se $x^i \in \gamma_0^-$.

Anche in questo esempio le commutazioni si verificano quando la traiettoria perviene sulla curva γ che costituisce pertanto la curva di commutazione per l'oscillatore armonico. A differenza dei problemi studiati nei precedenti esempi e caratterizzati da autovalori reali della matrice A , si ha evidentemente che solo una parte della curva di commutazione (e cioè $\gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$) può far parte delle traiettorie ottime.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B.D.O. ANDERSON, J.B. MOORE: *Linear Optimal Control*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1971.
- [2] M. ATHANS, P.L. FALB: *Optimal Control*, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1966.
- [3] D.J. BELL, D.H. JACOBSON: *Singular Optimal Control Problems*, Academic Press, London, 1975.
- [4] L.D. BERKOVITZ: *Optimal Control Theory*, Springer Verlag, New York, 1974.
- [5] G.A. BLISS: "The Problem of Lagrange in the Calculus of Variations", *Am. J. Math.*, Vol. 52, pag. 673–741, 1930.
- [6] G.A. BLISS: *Lectures on the Calculus of Variations*, The University of Chicago Press, Chicago, 1946.
- [7] A.E. BRYSON Jr., Y.C. HO: *Applied Optimal Control*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [8] J. CEA: *Lectures on Optimization – Theory and Algorithms*, Springer Verlag, New York, 1978.
- [9] C.K. CHUI, G. CHEN: *Linear Systems and Optimal Control*, Springer Verlag, Berlin, 1989.
- [10] R.V. GAMKRELIDZE: *Principles of Optimal Control Theory*, Plenum Press, New York, 1978.
- [11] I.M. GELFAND, S.V. FOMIN: *Calculus of Variation*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [12] G. HADLEY, M.C. KEMP: *Variational Methods in Economics*, North-Holland Publishing Company, 1971.
- [13] M.R. HESTENES: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [14] G. KNOWLES: *An Introduction to Applied Optimal Control*, Academic Press, New York, 1981.
- [15] H. KWAKERNAAK, R. SIVAN: *Linear Optimal Control System*, John Wiley & Sons, New York, 1972.

- [16] E.B. LEE, L. MARKUS: *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1967.
- [17] D.G. LUENBERGER: *Introduction to Dynamic Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [18] I.P. PETROV: *Variational Methods in Optimum Control Theory*, Academic Press, New York, 1968.
- [19] D.A. PIERRE: *Optimization Theory with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [20] L.S. PONTRYAGIN, V.G. BOLTYANSKII, R.V. GAMKRELIDZE, E.F. MISHCHENKO: *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
- [21] H. SAGAN: *Introduction to the Calculus of Variations*, Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1969.
- [22] D.R. SMITH: *Variational Methods in Optimization*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [23] J.L. TROUTMAN: *Variational Calculus with Elementary Convexity*, Springer Verlag, New York, 1983.
- [24] P.N.V. TU: *Introductory Optimization Dynamics*, Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [25] F.A. VALENTINE: “The Problem of Lagrange with Differential Inequalities as Added Side Conditions”, in *Contribution to the Calculus of Variation 1933–37*, University of Chicago Press, Chicago, 1937.

INDICE ANALITICO

- Base di uno spazio lineare, 3
Brachistocrona, 88
Bolza (problema di), 78
- Cauchy* (successione di), 6
Chiusura di un insieme, 6
Clebsch (teorema di), 147
Condizioni di trasversalità, 83, 101, 214, 219
Cono tangente, 21
– simmetrico, 21
Controllo “bang–bang”, 283
Controllo estremale singolare, 241
Controllo ottimo singolare, 241
Controllo ottimo sintetizzabile, 200
Costato, 179
- Dimensione di uno spazio lineare, 3
Dini (Teorema di), 23
Discrezione tangente, 21
- Estremale, 29, 41, 86, 106, 148, 213, 223
– non singolare, 86, 106, 149
– normale, 41, 149, 213, 223
Eulero (equazione di), 82, 100
Eulero (lemma di), 79
- Frontiera di un insieme, 6
Funzionale, 8
– bilineare, 8
– continuo, 10
– convesso, 9
– definito positivo, 8
– fortemente positivo, 8
– lineare, 8
– quadratico, 8
– semidefinito positivo, 8
– strettamente convesso, 9
– uniformemente continuo, 10
- Funzione di classe C^k , 2
Funzione di classe \bar{C}^k , 2
Funzione Hamiltoniana, 177, 202
Funzione Lagrangiana, 37
Funzione limitata, 1
Funzione misurabile, 2
- Geodetica, 95
Gradiente, 30
- Hilbert* (integrale di), 125
- Incremento ammissibile, 21
Indipendenza lineare, 3
Insieme aperto, 6
Insieme chiuso, 6
Insieme compatto, 6
Insieme convesso, 7
Insieme limitato, 6
Interno di un insieme, 6
Intorno di un punto, 6
Istante di commutazione, 283
- Jacobi* (equazione di), 114, 115
Jacobi (teorema di), 115
- Lagrange* (funzionale di), 17
Lagrange (moltiplicatori di), 37
Lagrange (problema di), 77, 78, 139, 154, 161
Legendre (teorema di), 112, 120
Luogo di commutazione, 291
- Kuhn Tucker* (moltiplicatori di), 37
Kuhn Tucker (teorema di), 40
- Mayer* (campo di), 124
Mayer (problema di), 78

- Matrice Hessiana, 9
- Matrice Jacobiana, 37
- Minimo globale (o assoluto), 20, 36
- Minimo globale stretto, 21, 36
- Minimo locale debole, 20
- Minimo locale forte, 20
- Minimo locale (o relativo), 20, 36
- Minimo locale stretto, 20, 36
- Norma, 3
- Norme equivalenti, 4
- Pontryagin* (teorema di), 202, 214, 218
- Princípio del minimo, 201, 203
- Problema di appuntamento, 104
- Problema di asservimento ottimo, 247, 263
- Problema di controllo stazionario, 182
- Problema di minima energia, 247
- Problema di regolazione a tempo minimo, 279, 286
- Problema di regolazione ottima, 247, 248, 271, 275
- Problema lineare quadratiko, 247
- Punto coniugato, 114
- Punto di frontiera, 6
- Punto interno, 6
- Regolarità dei vincoli, 37
- Riccati* (equazione algebrica di), 258
- Riccati* (equazione differenziale di), 249
- Saturazione, 64
- Schwarz* (diseguaglianza di), 10, 11
- Spazio lineare, 1
- Spazio normato, 3
- Sottospazio lineare, 2
- Stretta complementarietà, 52
- Successione convergente, 5
- Valentine* (teorema di), 162
- Variazione di ordine k di un funzionale, 14
- Variazione totale di un funzionale, 13
- Vincoli, 36
- Vincoli attivi, 36
- Vincolo isoperimetrico, 154
- Weierstrass Erdmann* (condizioni di), 81, 100
- Weierstrass* (funzione eccesso di), 125
- Weierstrass* (teorema di), 34, 148

ANNOTAZIONI

ANNOTAZIONI

ANNOTAZIONI

ANNOTAZIONI

ANNOTAZIONI

AREE SCIENTIFICO-DISCIPLINARI

- Area 01 – Scienze matematiche e informatiche
- Area 02 – Scienze fisiche
- Area 03 – Scienze chimiche
- Area 04 – Scienze della terra
- Area 05 – Scienze biologiche
- Area 06 – Scienze mediche
- Area 07 – Scienze agrarie e veterinarie
- Area 08 – Ingegneria civile e Architettura
- Area 09 – Ingegneria industriale e dell'informazione**
- Area 10 – Scienze dell'antichità, filologico-letterarie e storico-artistiche
- Area 11 – Scienze storiche, filosofiche, pedagogiche e psicologiche
- Area 12 – Scienze giuridiche
- Area 13 – Scienze economiche e statistiche
- Area 14 – Scienze politiche e sociali

Le pubblicazioni di Aracne editrice sono su

www.aracneedittrice.it

Finito di stampare nel mese di settembre del 2011
dalla ERMES. Servizi Editoriali Integrati S.r.l.
00040 Ariccia (RM) – via Quarto Negroni, 15
per la Aracne editrice S.r.l. di Roma

