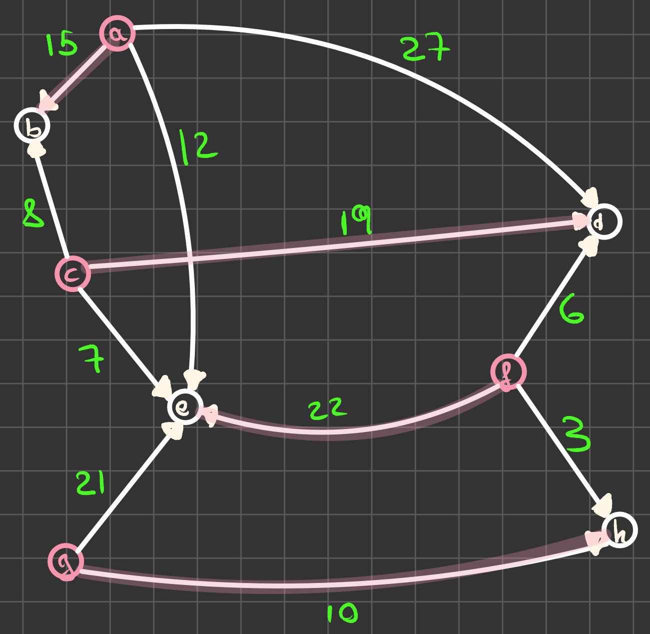
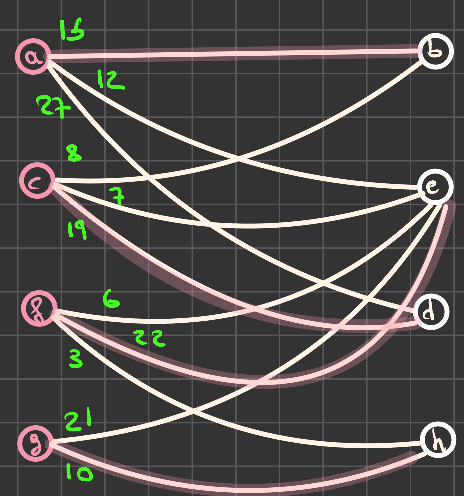
Exercise 1 (6/06/17)
Find the minimum weight perfect matching on the following graph starting from the perfect matching represented by thick arcs.



• G è BIPARTITO



$A := \{a, c, f, g\}$

$B := \{b, e, d, h\}$

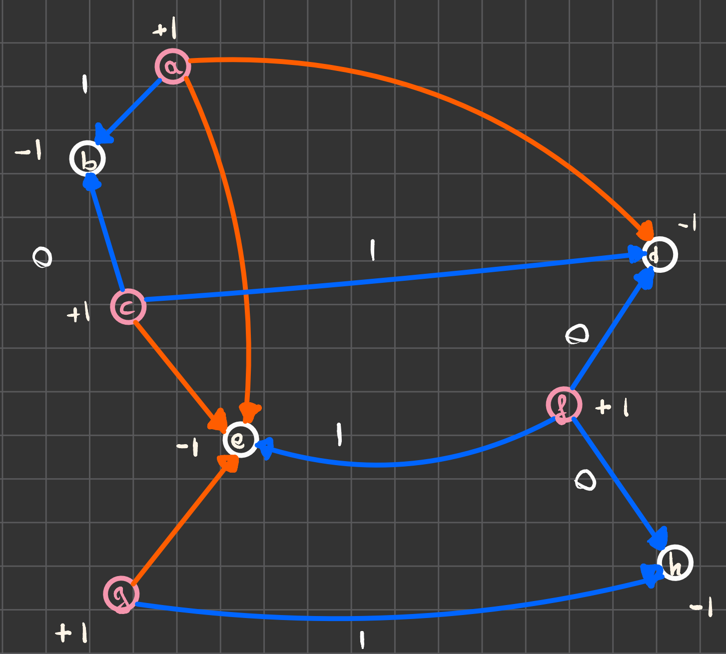
(1) Rendiamo G diretto orientando gli archi da A a B

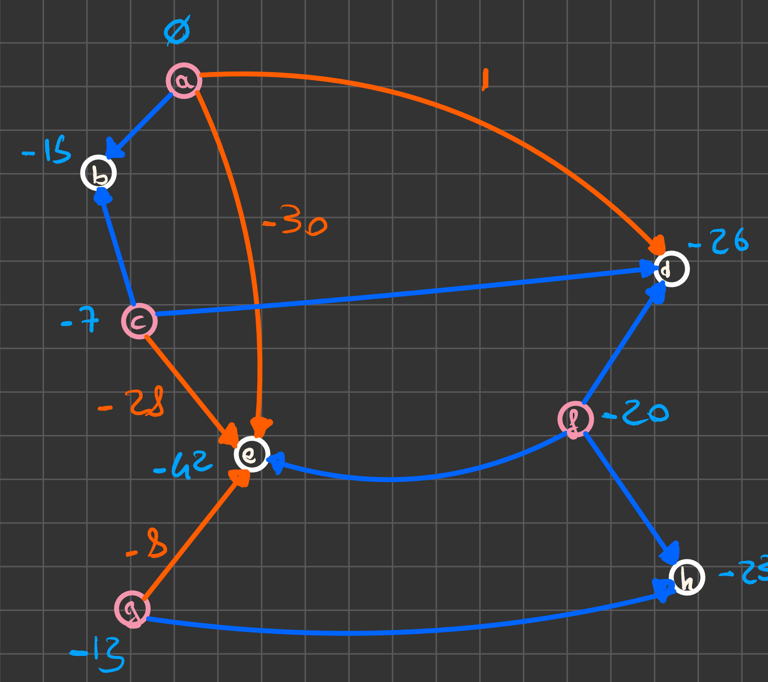
(2) Impostiamo gli eccessi $b(i) = +1 \ \forall i \in A$ e $b(i) = -1 \ \forall i \in B$

(3) Troviamo successivamente una FTSolution $\{T, L\}$

(4) Calcoliamo infine i potenziali $y_h = -\sum_{(i,j) \in FORWARD} c_{ij} + \sum_{(i,j) \in REVERSE} c_{ij}$ $\quad \forall (i,j) \in PATH_T(Root, h)$

e i reduced costs $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j$





$\Rightarrow z = 1 \cdot 15 + \cancel{0 \cdot 8} + 1 \cdot 19 + 1 \cdot 22 + \cancel{0 \cdot 6} + \cancel{0 \cdot 3} + 1 \cdot 10 = 66$

(5) La soluzione non è ottima perché $\exists \ \overline{c_{ij}} > 0$

(6) Aggiungiamo un arco (l, m) a T in modo da formare un ciclo C orientato nel verso di (l, m)

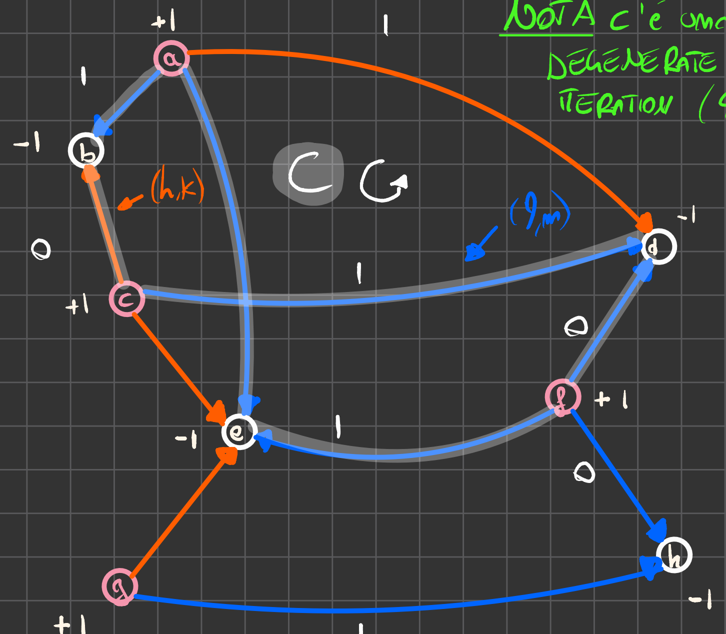
(7) Sia $\varepsilon = \min_{(h,k) \in T} \{x_{hk}\}$ e sia (h,k) l'arco con $x_{hk} = \varepsilon$

(8) ricalcoliamo gli x_{ij} $\forall (i,j)$ sul ciclo

$$\begin{cases} x_{ij} = x_{ij} + \varepsilon & \forall \text{ FORWARD } (i,j) \in C \\ x_{ij} = x_{ij} - \varepsilon & \forall \text{ REVERSE } (i,j) \in C \end{cases}$$

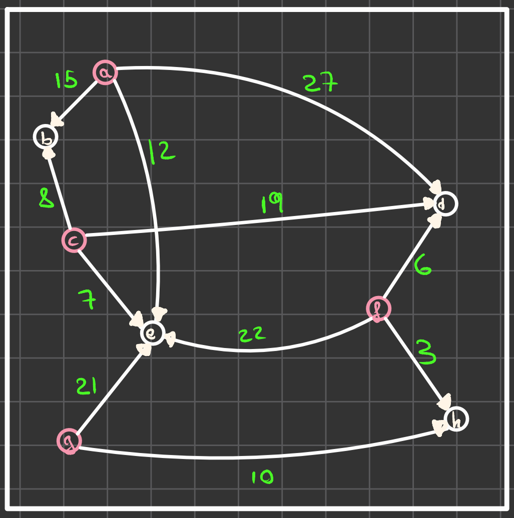
(9) Rimuoviamo infine da T l'arco (h,k) e aggiungiamolo a L

NOTA c'è una DEGENERATE ITERATION ($\varepsilon = \emptyset$)



$\Rightarrow z = 1 \cdot 15 + 1 \cdot 19 + 1 \cdot 22 + \cancel{0 \cdot 6} + \cancel{0 \cdot 3} + 1 \cdot 10 + \underbrace{0 \cdot 12}_{(a,e)} = 66$

(10) Ripetiamo dallo step (6) finché non raggiungiamo la condizione di ottimalità: $\bar{C}_{ij} \geq 0 \;\; \forall (i,j) \in L$



Exercise 2

Evaluate the optimal solution to the following linear program

$$\min \; 21x_1 + 24x_2 + 41x_3 + 36x_4 + 15x_5 + \cancel{13x_6}$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 20 \quad (a)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 22 \quad (b)$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 51 \quad (c)$$
$$x_4 + x_5 \geq 33 \quad (d)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 21 \quad (e)$$
$$x \geq 0$$

(1) Controlliamo che il problema abbia la consecutive one prop.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	1			
b	1	1	1		
c		1	1	1	1
d				1	1
e	1	1	1	1	

swap ▷

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	1			
b	1	1	1		
c		1	1	1	1
e	1	1	1	1	
d				1	1

swap ▷

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	1			
b	1	1	1		
e	1	1	1	1	
c		1	1	1	1
d				1	1

✓

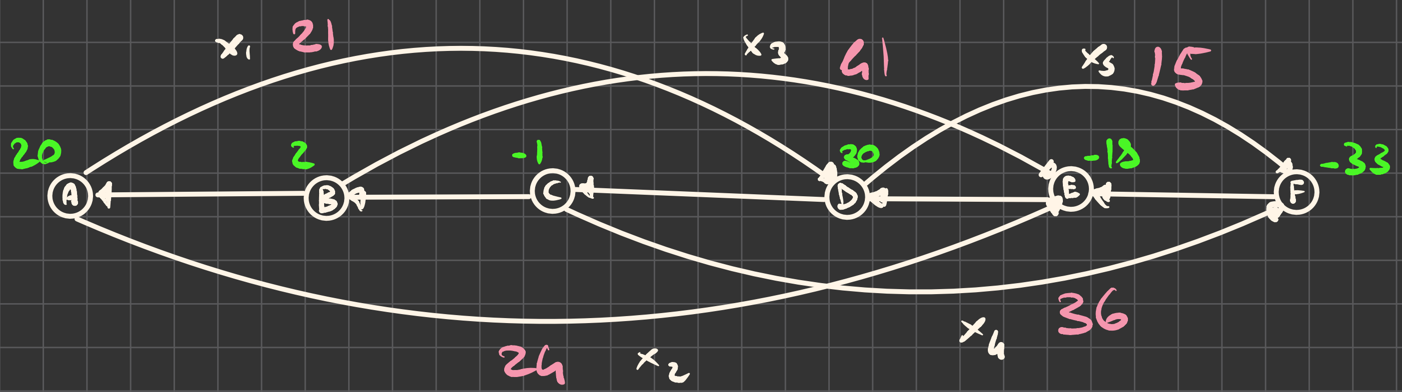
(2) Trasformiamo la matrice in una Network Matrix

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_a	y_e	y_c	y_b	y_d	RHS
a	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	20
b	1	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	22
e	1	1	1	1	0	0	0	-1	0	0	21
c	0	1	1	1	1	0	0	0	-1	0	51
d	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	33
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

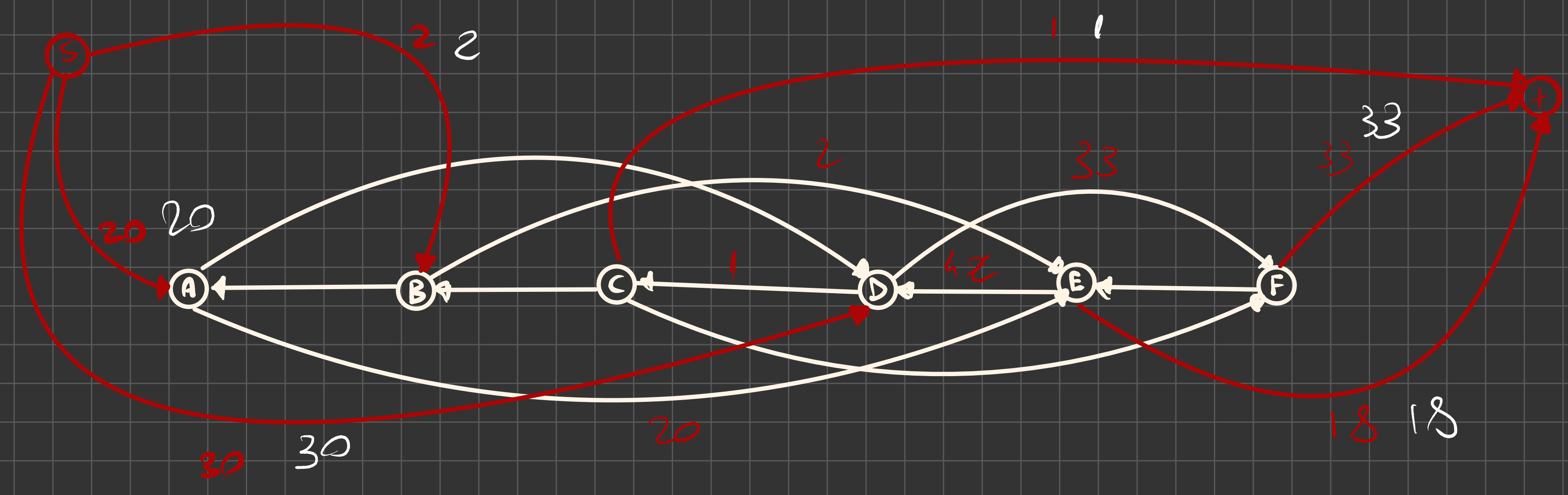
▷

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_a	y_e	y_c	y_b	y_d	RHS
A = a	1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	20
B = b − a	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	2
C = e − b	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	-1
D = c − e	-1	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	39
E = d − c	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	-1	-18
F = 8 − d	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	-33

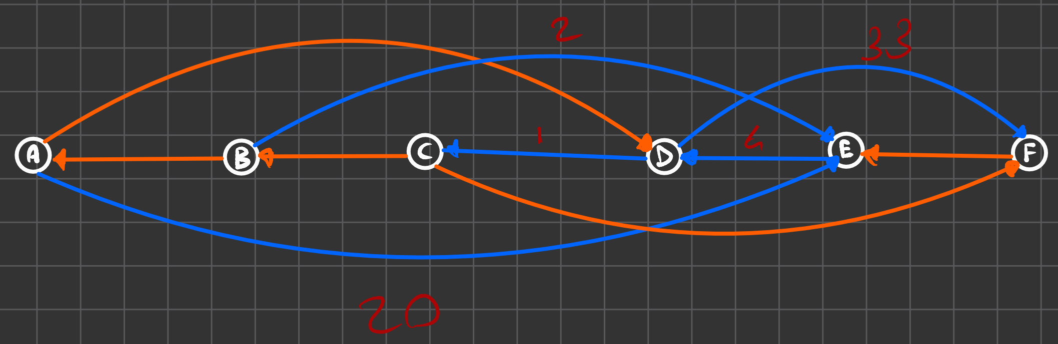
- Disegniamo il grafo indotto dalla Network Matrix, in cui le righe rappresentano i nodi, le colonne gli archi, gli RHS i supply dei nodi e i moltiplicatori della funzione obbiettivo i costi degli archi

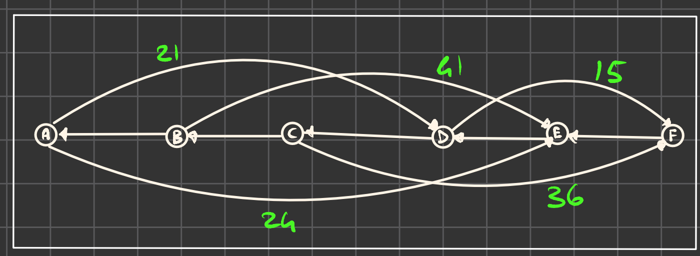


• Troviamo un FEASIBLE FLOW



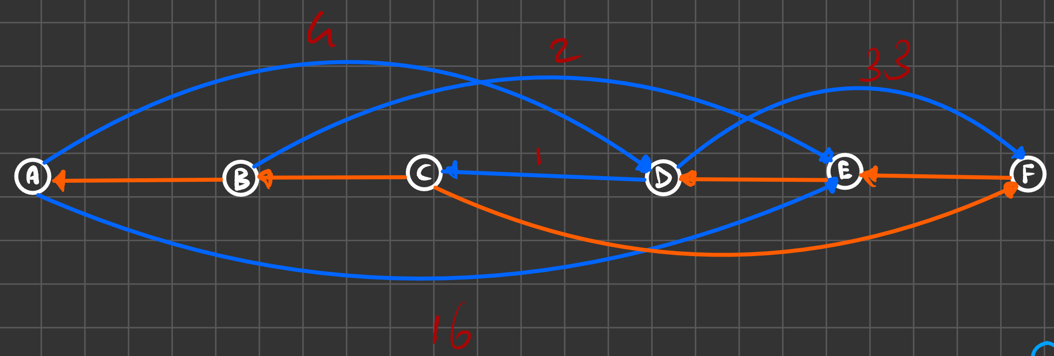
• Abbiamo una FTS $\{T, L\}$ e Applichiamo il NETWORK SIMPLEX ALGORITHM

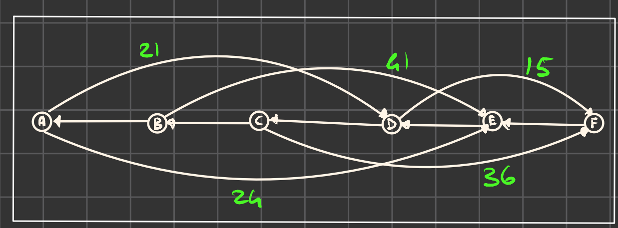


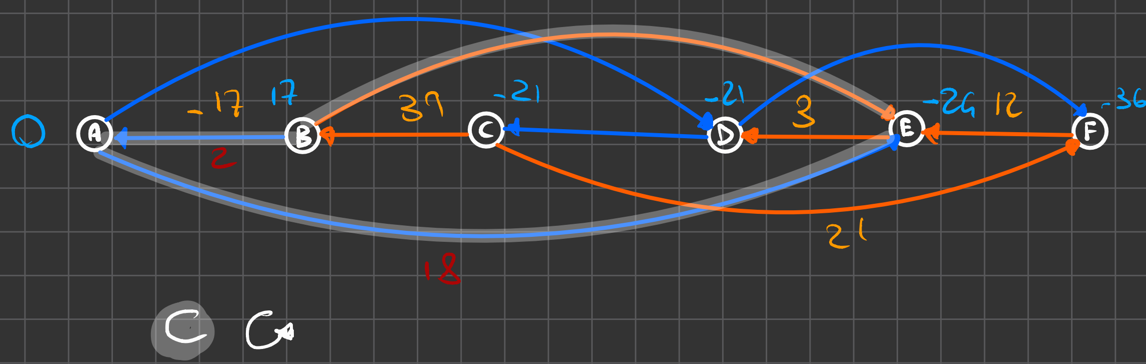


• La soluzione non è ottima $(\exists\, \bar{c}_{ij} < 0)$

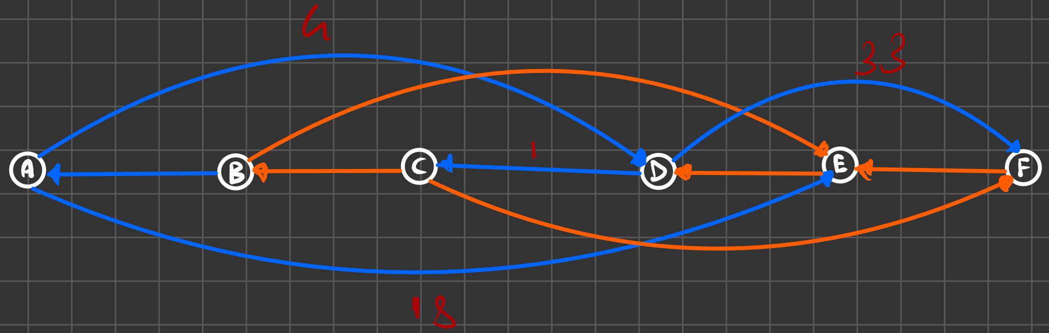
• Ricalcoliamo $\bar{c}_{ij}$ sulla nuova FTS.

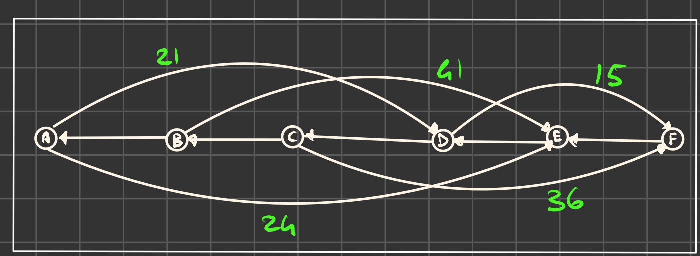


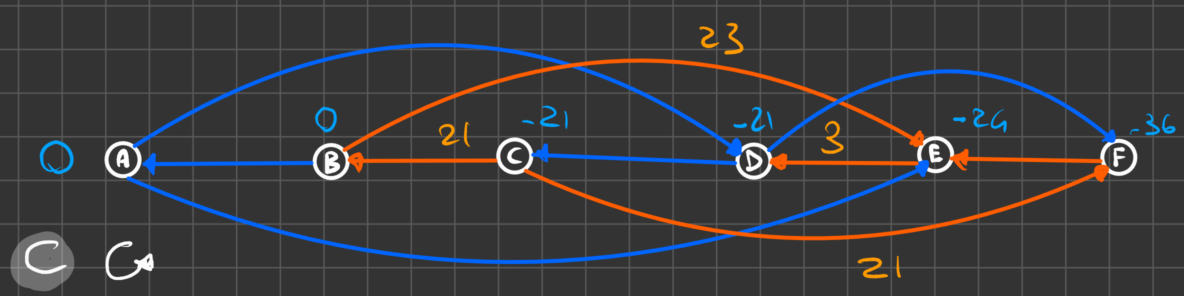




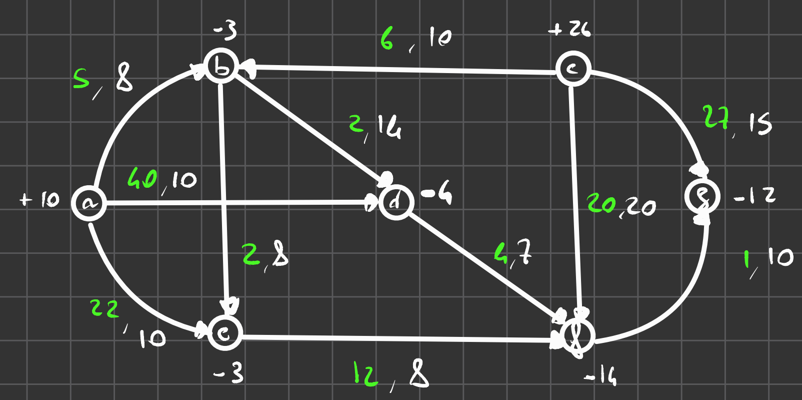
• Ricalcoliamo $\bar{c}_{ij}$ sulla nuova FTS.



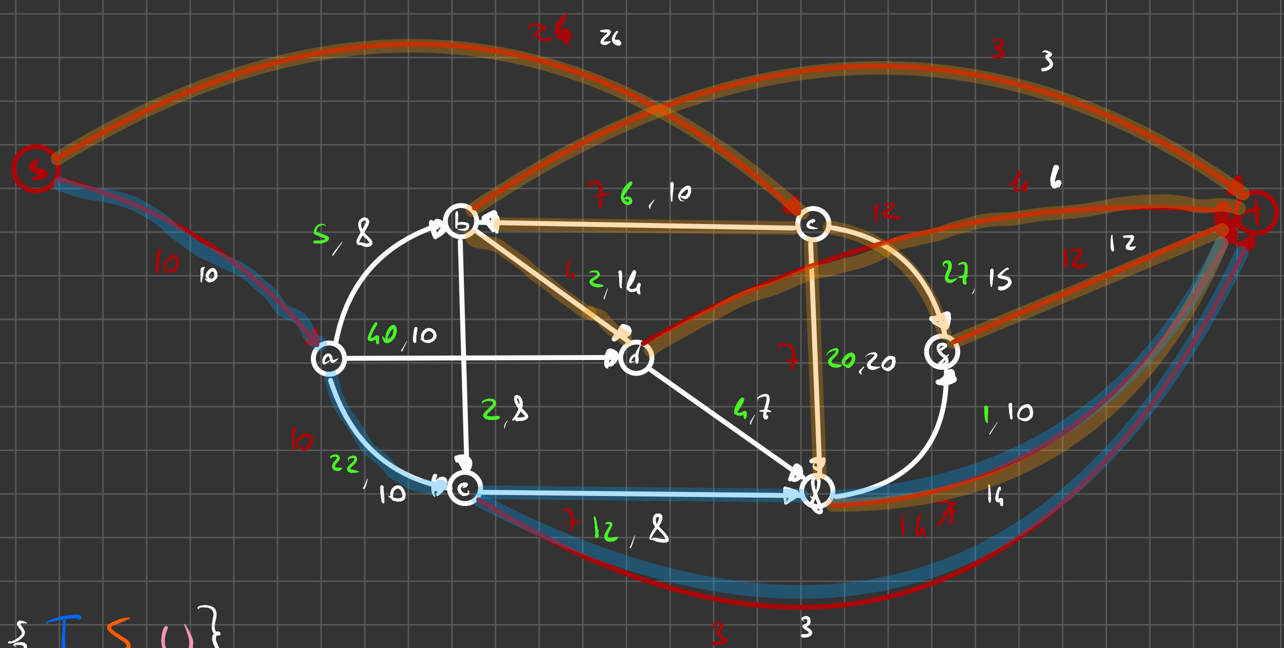




Exercise 3
Evaluate the min cost flow on the following graph.
[($c_{ij}.u_{ij}$) are the figures represented on the arcs]



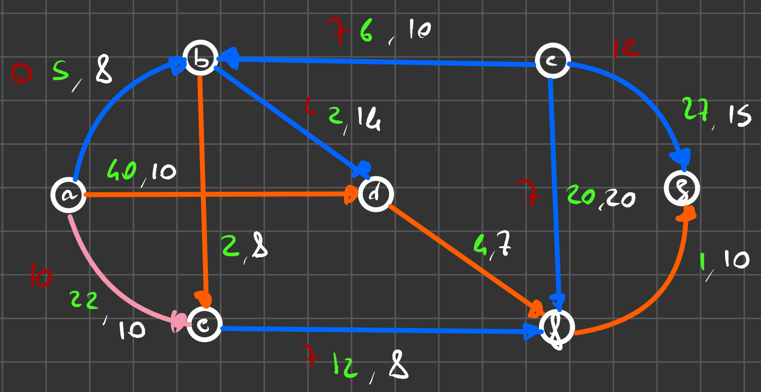
• Inizializziamo un FEASIBLE FLOW

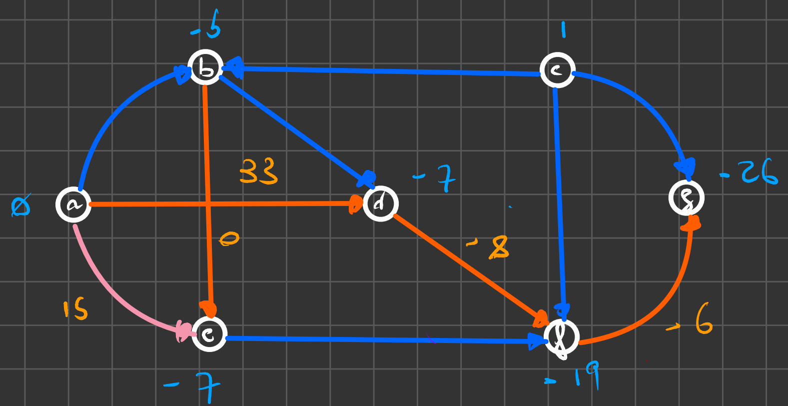


• Troviamo FTSol := {T, S, U}

• Dobbiamo aggiungere (a, b) a T per renderlo un albero

• Calcoliamo POTENZIALI y_i e COSTI RIDOTTI $\bar{c}_{ij}$



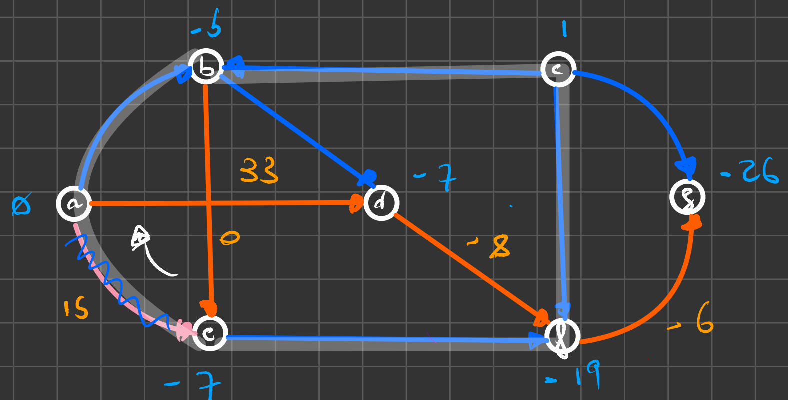


$Z = 7\cdot 6 + 12\cdot 27 + 4\cdot 2 + 7\cdot 20 + 7\cdot 12 + 10\cdot 22 = 818$

• La soluzione non è ottima $(\exists\, \bar{c}_{ij} > 0 \mid (i,j) \in U$ e/o $\exists\, \bar{c}_{ij} < 0 \mid (i,j) \in L)$

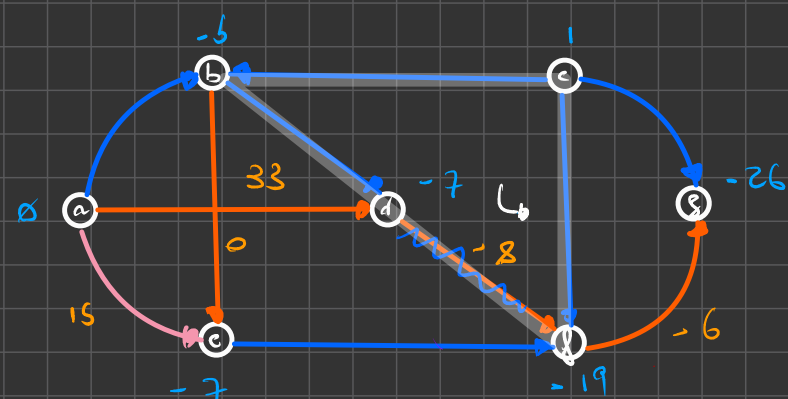
• Applico PIVOTING: per scegliere l'arco da aggiungere supponiamo di aggiungerlo, moltiplichiamo il valore ε per $\bar{c}_{ij}$ dell'arco scelto poiché $z' = z - \varepsilon \cdot \bar{c}_{ij}$

① → SUPPONIAMO DI AGGIUNGERE (a, e)



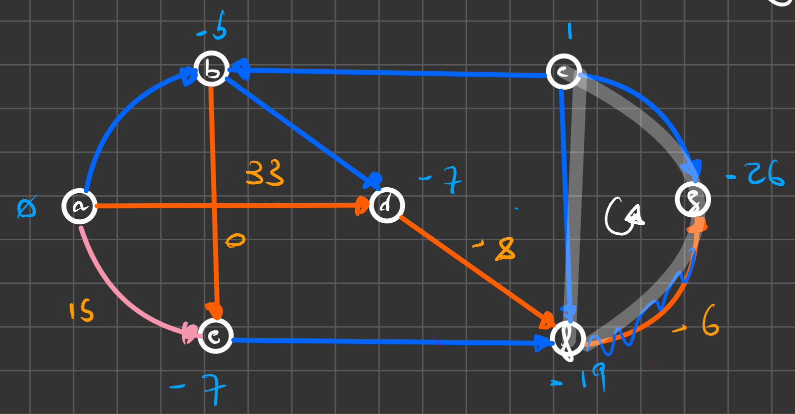
$\varepsilon = 7 \Rightarrow z' = z - 7 \cdot 15$

② → SUPPONIAMO DI AGGIUNGERE (d, f)



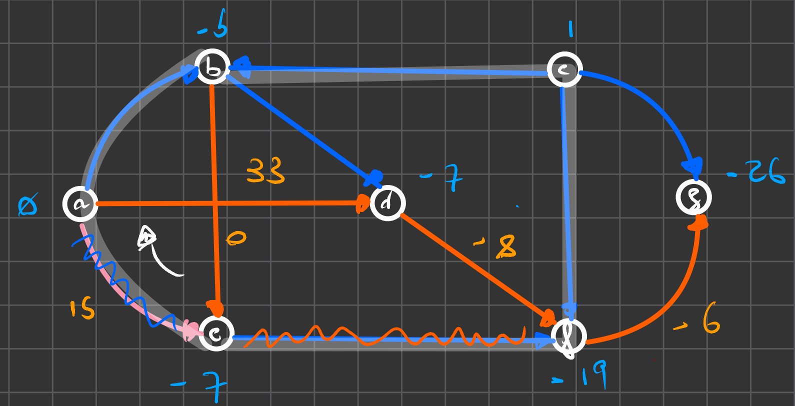
$\varepsilon = 3 \Rightarrow z' = z - 3 \cdot 8$

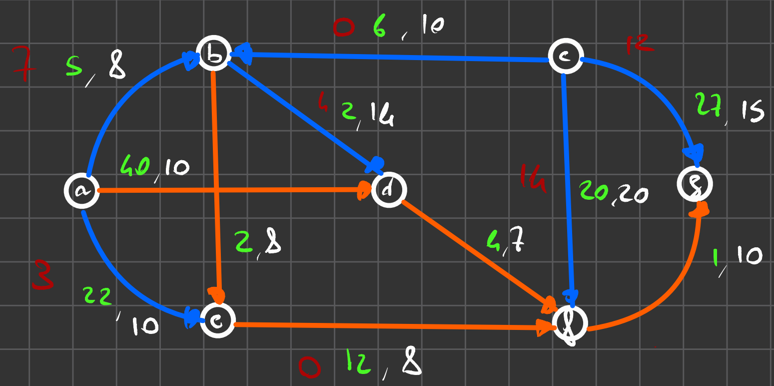
③ → SUPPONIAMO DI AGGIUNGERE (f, g)



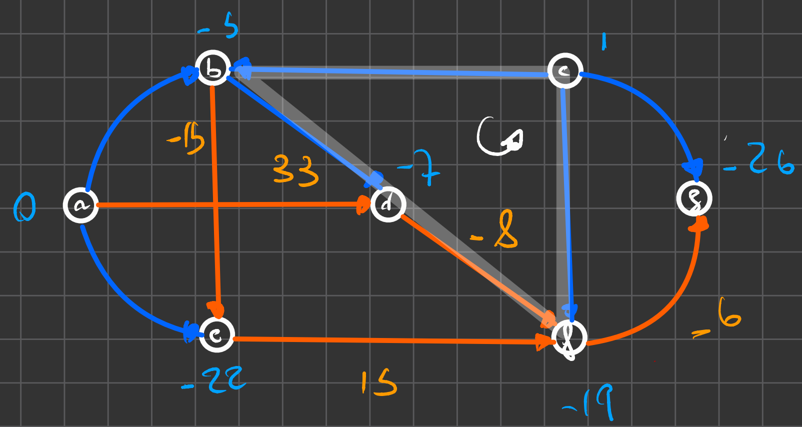
$\varepsilon = 10 \Rightarrow z' = z - 10 \cdot 6$

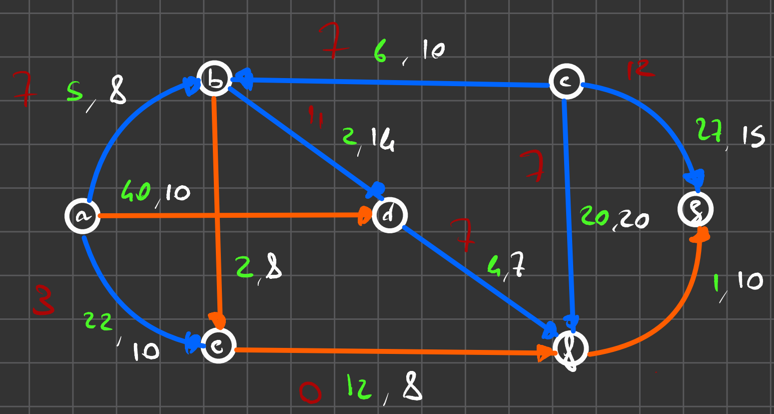
• LA miglior soluzione è la ①



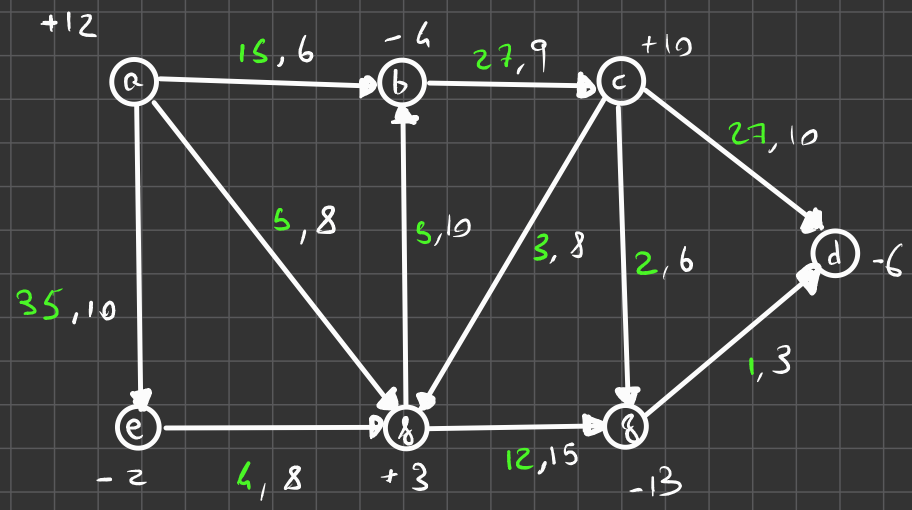


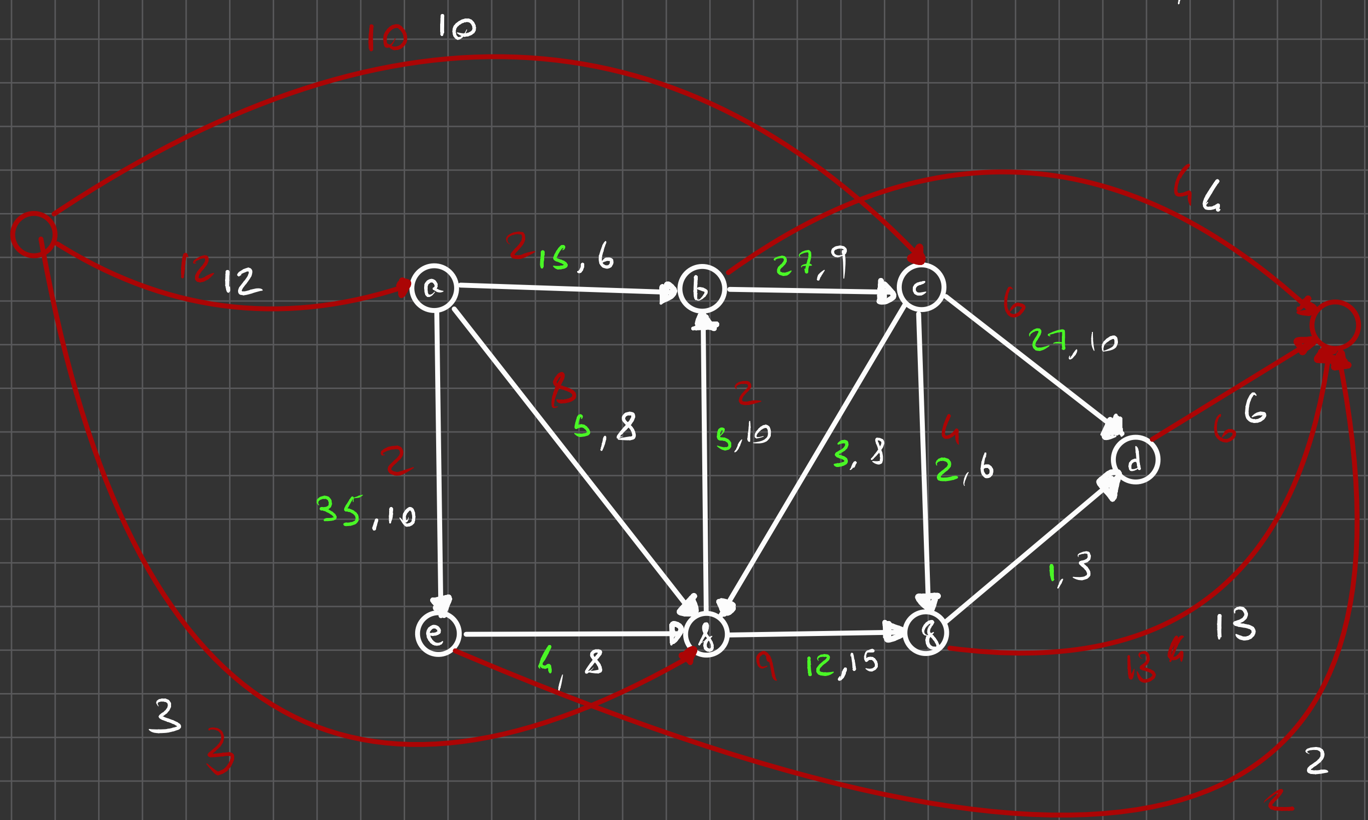
$z = z - 7 \cdot 15 = 818 - 105 = 713$

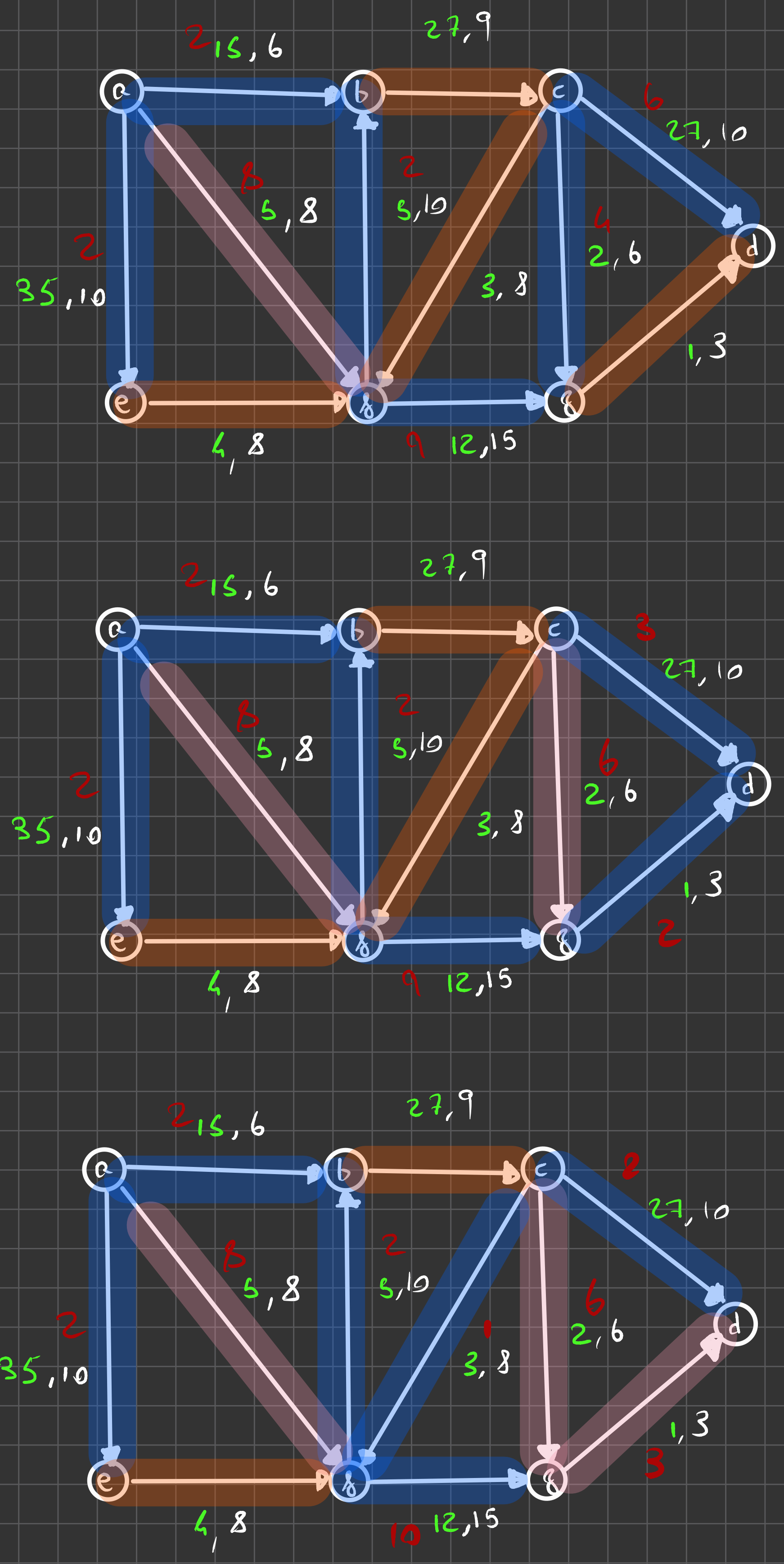


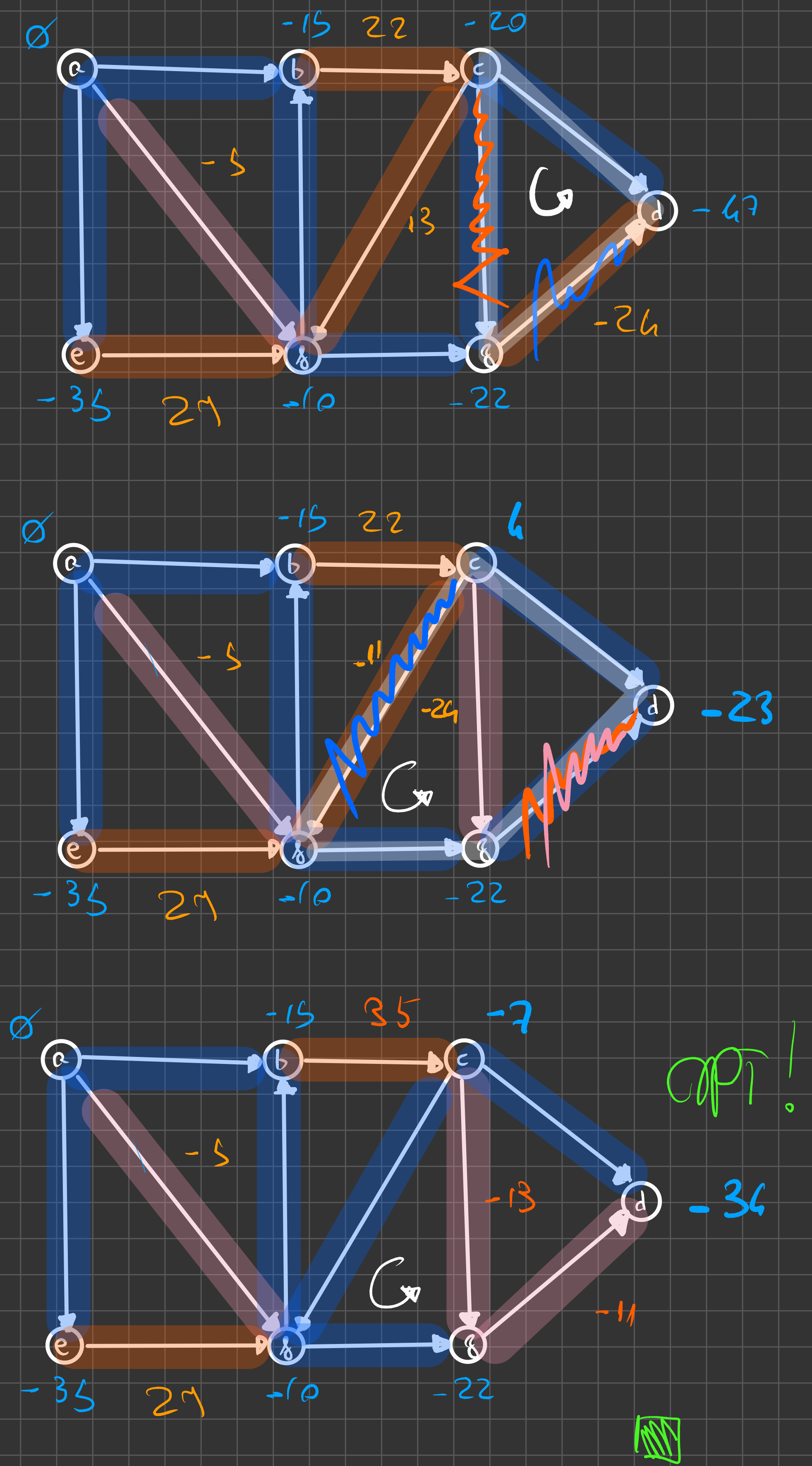


Exercise 3
Evaluate the min cost flow on the following graph.
[($c_{ij}.u_{ij}$) are the figures represented on the arcs]







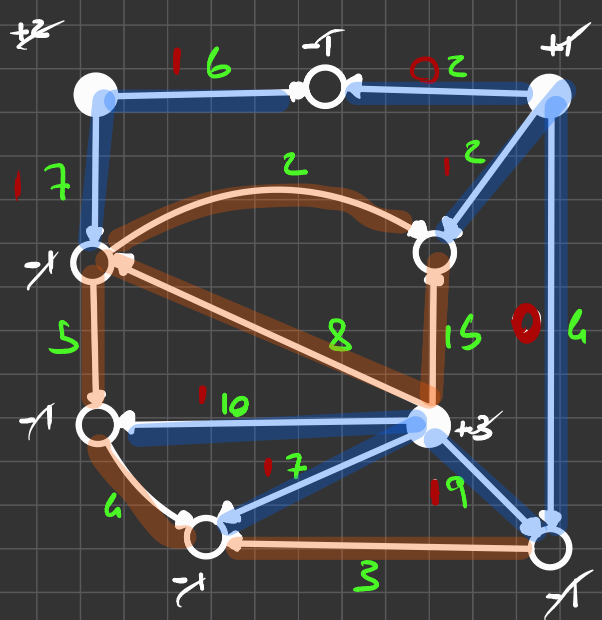


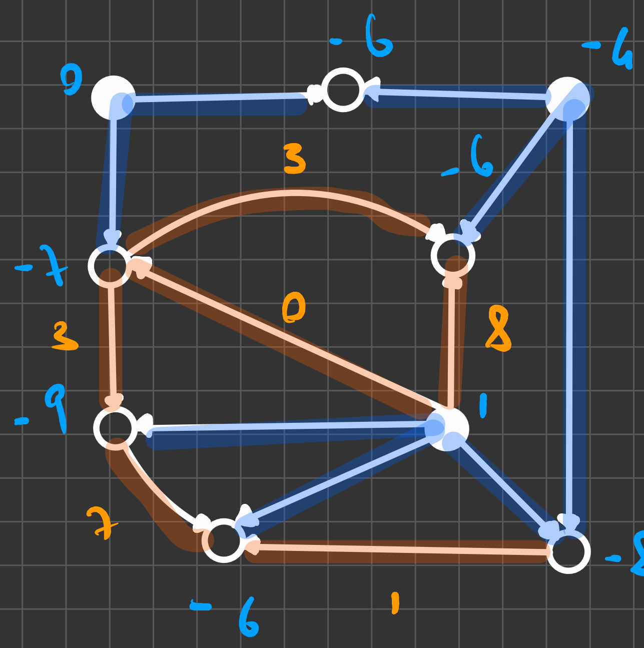
Exercise 3 (27/06/19)

The following graph represents a distribution network in which black nodes are warehouses and white nodes customers. Each customer requires one unit of a good that can be supplied from any warehouse. Figures on the arcs represent the cost of shipping the good on that arc (arcs are uncapacitated), while numbers in the box represent the availability of the good in each warehouse.

1. Find the minimum cost shipping solution.

[Bonus] 2. Suppose to have the possibility of moving all goods from the central warehouse to the warehouse on the top right corner. How much would you be willing to pay for this?





Bonus question (24/05/18)

A company has 2 types of employees: part-time (5 hour workshift) and full-time (7 hour workshift). An employee can start working at {8:00, 9:00, 12:00, 13:00}. For each hourly slot the request of personnel is the following:

8:00 9:00	9:00 10:00	10:00 11:00	11:00 12:00	12:00 13:00	13:00 14:00	14:00 15:00	15:00 16:00	16:00 17:00	17:00 18:00	19:00 20:00
12	15	17	16	12	13	7	6	5	5	2

Given a cost of 250 Euro/day for part time employees and 370 Euro/day for full time employees, find the mix of employees that fulfills the request minimizing the total cost.

Is it useful to allow full time employees start working at 11:00?

- Lo slot di orario '18-19' non è richiesto dal problema
- Alcuni constraint sono ridondanti e possono essere rimossi

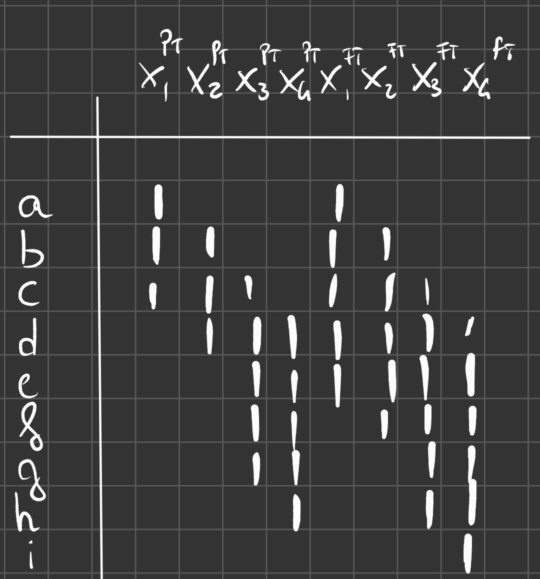
$\boxed{8\text{-}9}$	$x_1^{PT} + x_1^{FT} \geq 12$
$\boxed{9\text{-}10}$	$\cancel{x_1^{PT} + x_2^{PT} + x_1^{FT} + x_2^{FT} \geq 15}$
10-11	$x_1^{PT} + x_2^{PT} + x_1^{FT} + x_2^{FT} \geq 17$
11-12	$\cancel{x_1^{PT} + x_2^{PT} + x_1^{FT} + x_2^{FT} \geq 16}$
$\boxed{12\text{-}13}$	$x_1^{PT} + x_2^{PT} + x_3^{PT} + x_1^{FT} + x_2^{FT} + x_3^{FT} \geq 12$
$\boxed{13\text{-}14}$	$x_2^{PT} + x_3^{PT} + x_4^{PT} + x_1^{FT} + x_2^{FT} + x_3^{FT} + x_4^{FT} \geq 13$
14-15	$x_3^{PT} + x_4^{PT} + x_1^{FT} + x_2^{FT} + x_3^{FT} + x_4^{FT} \geq 7$
15-16	$x_3^{PT} + x_4^{PT} + x_2^{FT} + x_3^{FT} + x_4^{FT} \geq 6$
16-17	$x_3^{PT} + x_4^{PT} + x_3^{FT} + x_4^{FT} \geq 5$
17-18	$x_4^{PT} + x_3^{FT} + x_4^{FT} \geq 5$
19-20	$x_4^{FT} \geq 2$

⇒ FORMA $Ax \geq b$

- La funzione obiettivo è

$$\boxed{\min \sum_{i=1}^{4} 250\, x_i^{PT} + \sum_{i=1}^{4} 370\, x_i^{FT}}$$

- Verifichiamo se la matrice **A** ha 'consecutive one prop'



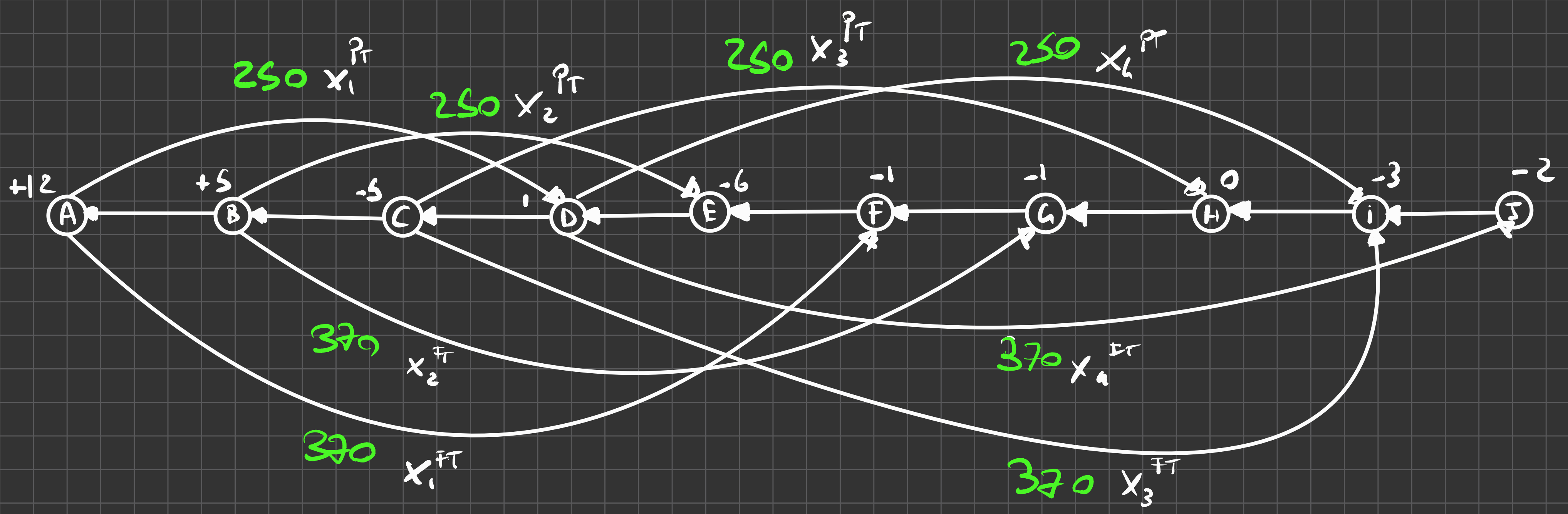
▷ SODDISFA 'CONS. 1s PROP'

• Trasformiamo la matrice in una NETWORK MATRIX

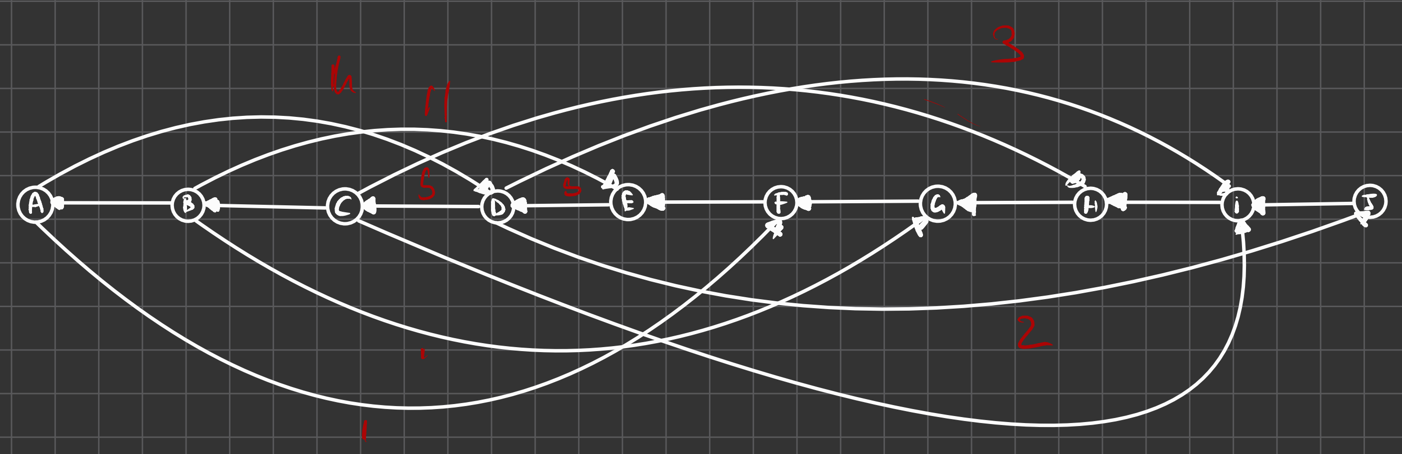
	x_1^{PT}	x_2^{PT}	x_3^{PT}	x_4^{PT}	x_1^{FT}	x_2^{FT}	x_3^{FT}	x_4^{FT}	y_a	y_b	y_c	y_d	y_e	y_f	y_g	y_h	y_i	b
a	1				1				-1									12
b	1	1			1	1				-1								17
c	1	1	1		1	1	1				-1							12
d		1	1	1	1	1	1	1				-1						13
e			1	1	1	1	1	1					-1					7
f			1	1		1	1	1						-1				6
g			1	1			1	1							-1			5
h				1			1	1								-1		5
i								1									-1	2
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

▷

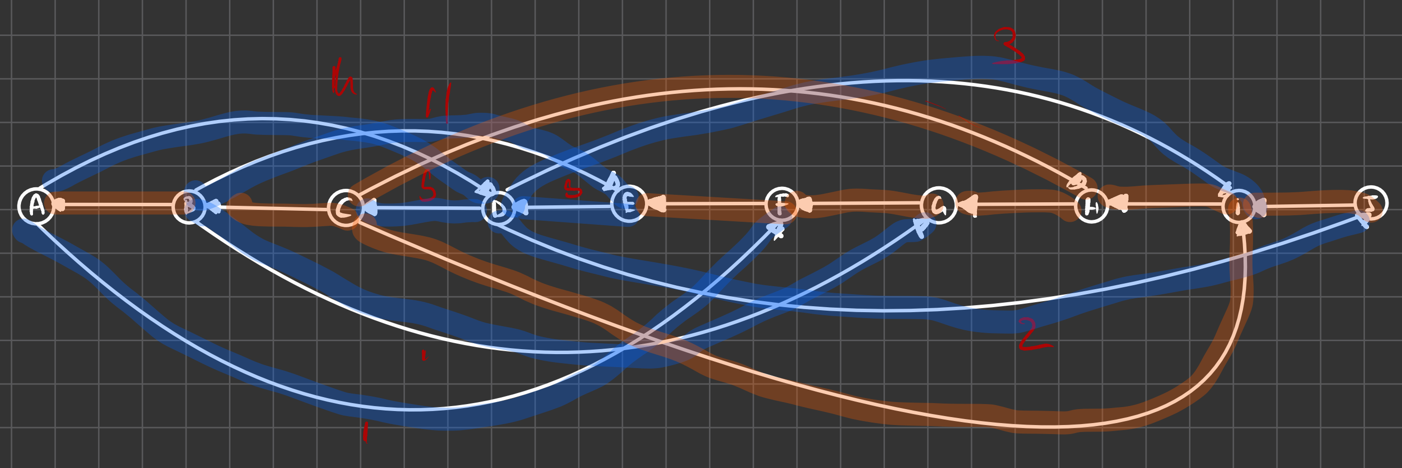
	x_1^{PT}	x_2^{PT}	x_3^{PT}	x_4^{PT}	x_1^{FT}	x_2^{FT}	x_3^{FT}	x_4^{FT}	y_a	y_b	y_c	y_d	y_e	y_f	y_g	y_h	y_i	b
A	1				1				-1									12
B		1				1				-1								5
C			1				1				-1							-5
D	-1			1				1				-1						1
E		-1											-1					-6
F					-1									-1				-1
G						-1									-1			-1
H			-1													-1		0
I				-1			-1										-1	-3
J								-1									1	-2



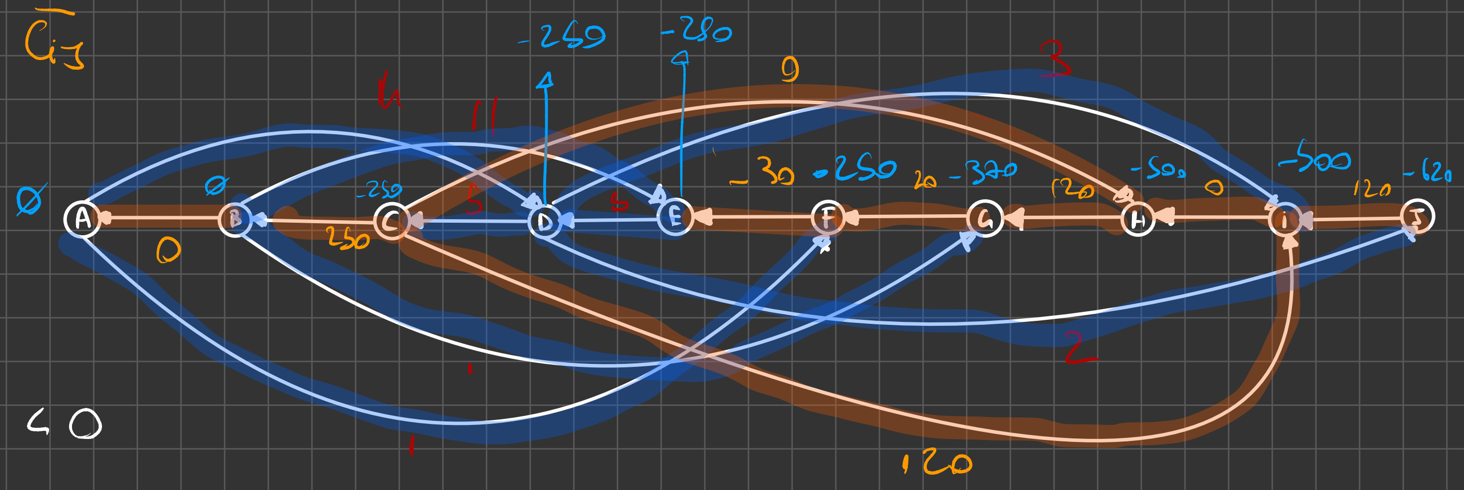
• Troviamo un FLOW AMMISSIBILE, per poi ricavare una FT Solution {T, L}



• FTS := {T, L}



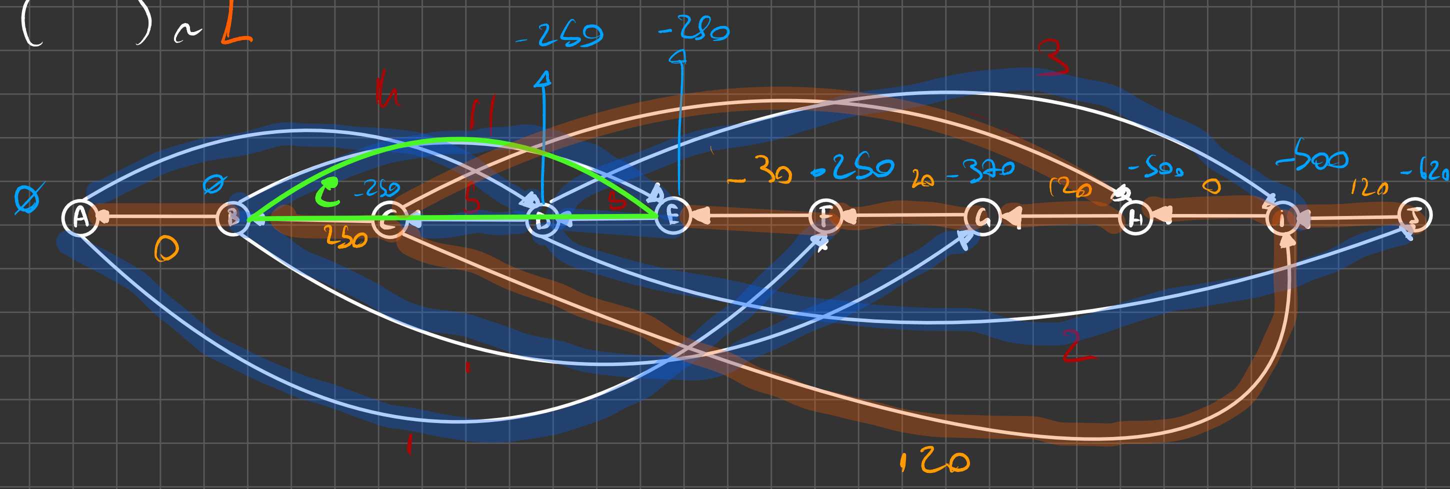
• Calcolo eccessi y_i e costi ridotti $\bar{C}_{ij}$



• La soluzione non è ottima $\bar{C}_{ge} < 0$

• Effettuo PIVOTING:

  • Aggiungo (g,e) a T e $(\quad)$ a L

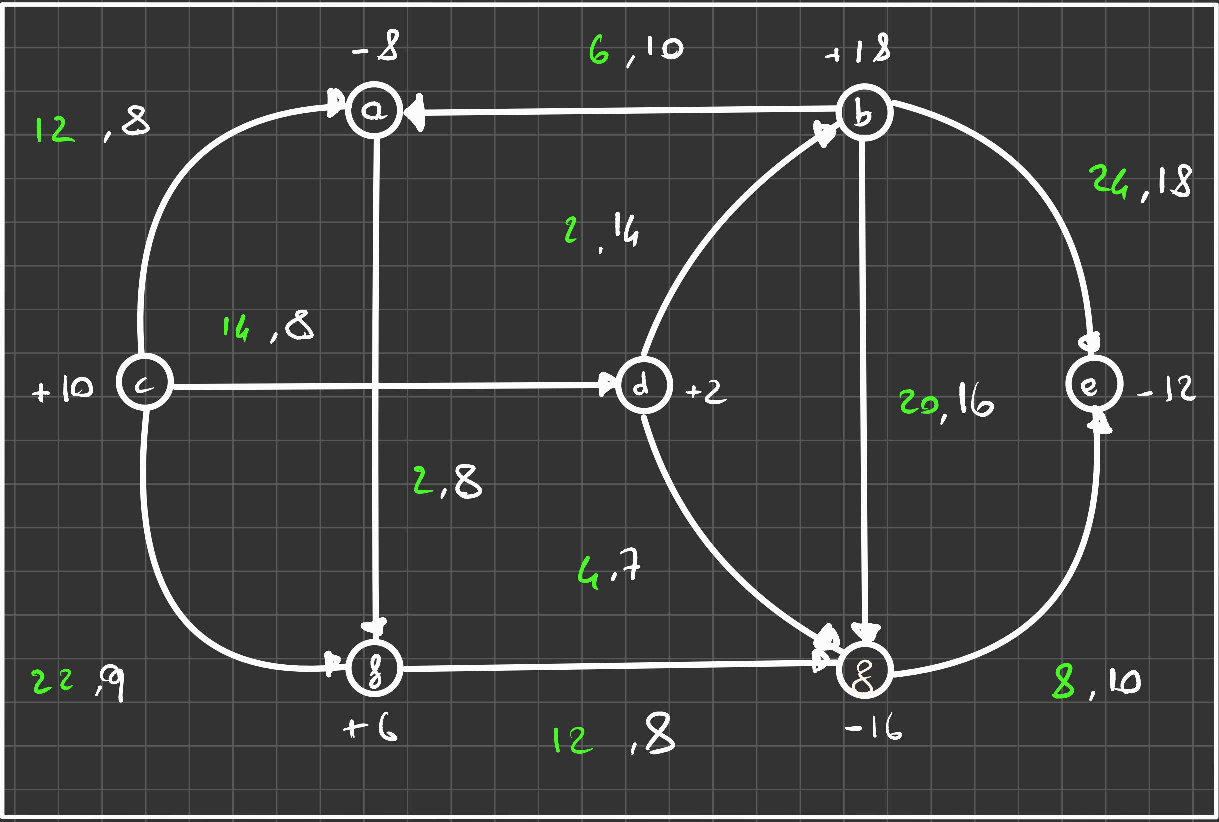


• il ciclo C non ha reverse arcs

• $z = 250(4+11+3) + 370(1+1+2) =$

Exercise 2
Evaluate the min cost flow on the following graph.
[(c_{ij},u_{ij}) are the figures represented on the arcs]

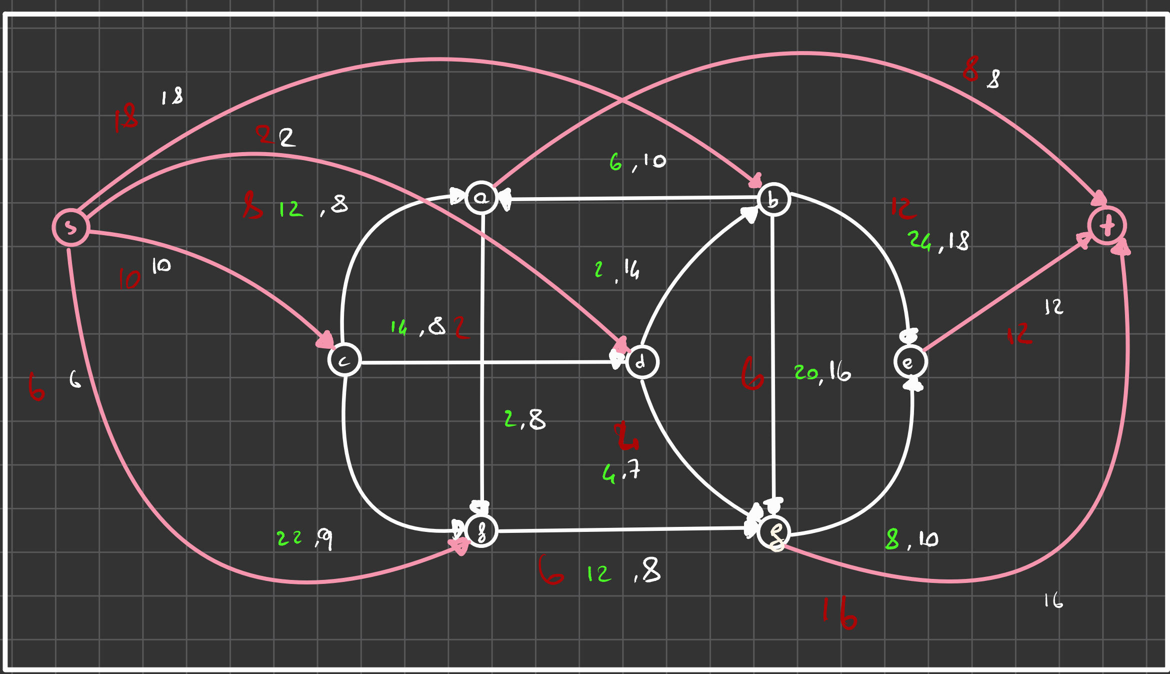
• Applichiamo il capacitated SIMPLEX FLOW ALGORITHM

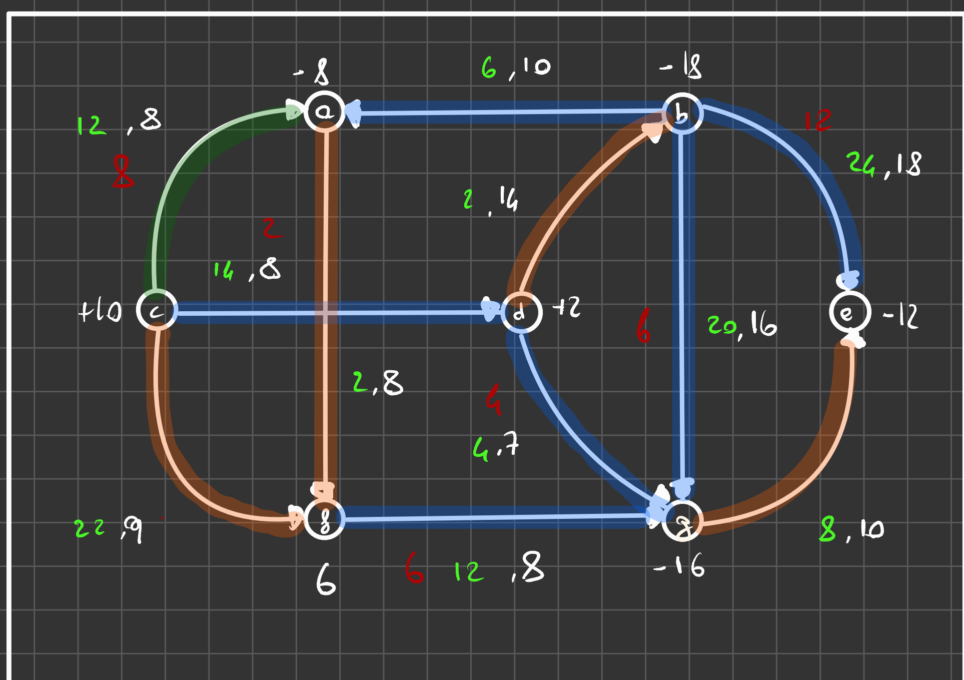


(1) Troviamo una FEASIBLE TREE SOLUTION $\{T, L, U\}$; per farlo abbiamo bisogno di inizializzare un FEASIBLE FLOW x tramite l'aggiunta di due nodi s, t connessi. s ai nodi con LABEL > 0 (supply) e t a quelli con LABEL < 0 (DOMANDA). connettiamo i due nodi s e t tramite archi (s,i) e (i,t) le cui capacity sono pari al valore assoluto della LABEL di i.

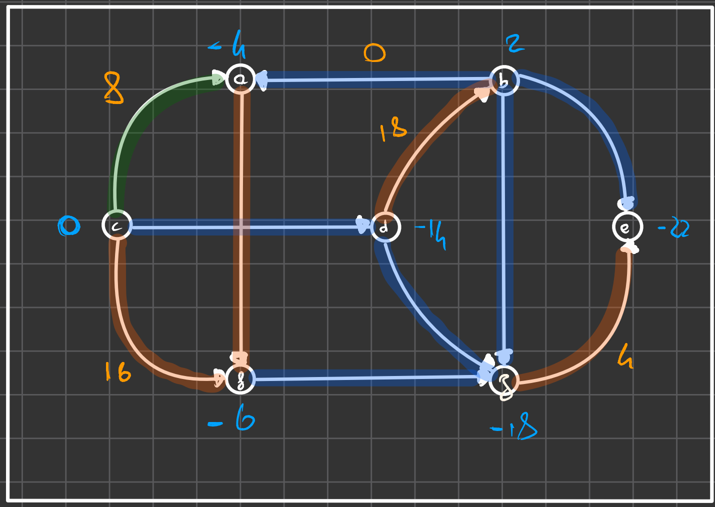
(2) Poiché esiste un feasible flow X che satura ogni arco (s,i) e (i,t) possiamo trovare $\{T, L, U\}$:

- mettiamo in U ogni arco (i,j) t/c $x_{ij} = u_{ij}$
- mettiamo in T ogni arco (i,j) t/c $0 \leq x_{ij} < u_{ij}$, dando però la priorità agli archi con $x_{ij} > 0$, aggiungendo quelli con $x_{ij} = 0$ solo per rendere T un albero
- mettiamo in L ogni arco (i,j) t/c $x_{ij} = 0$, a meno che (i,j) non sia già stato aggiunto a T





(3) Calcoliamo i potenziali $y_h = -\sum_{(i,j) \in \text{FOR ARS}} c_{ij} + \sum_{(i,j) \in \text{REVERSE}} c_{ij}$ $\forall (i,j) \in \text{PATH}_T(\text{Root}, h)$,
e i COSTI RIDOTTI $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - y_i + y_j$ della soluzione $\{T, L, U\}$



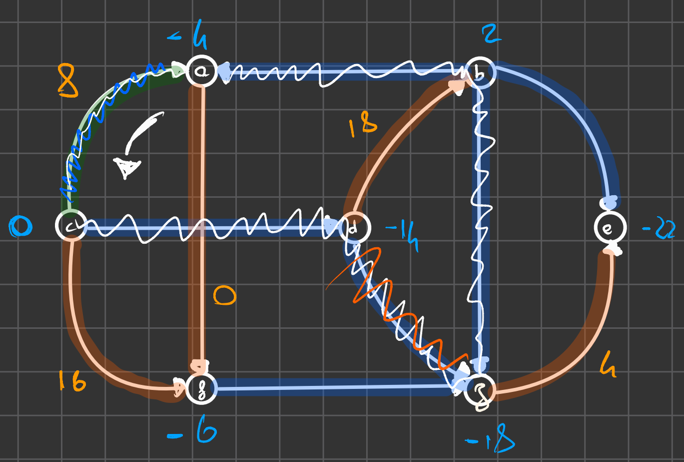
(4) La soluzione Z non è ottima perché non soddisfa la condizione di ottimalità:

$$\begin{cases} \bar{c}_{ij} \le 0 & \forall (i,j) \in U \\ \bar{c}_{ij} \ge 0 & \forall (i,j) \in L \end{cases}$$

(5) PIVOTING: Preso un arco (i,j) che viola la condizione di ottimalità, aggiungendolo alla soluzione, troviamo il ciclo C generato, orientiamo il ciclo nel verso opposto a (i,j) se $(i,j) \in U$, nello stesso se invece $(i,j) \in L$ e calcoliamo il valore di massimo cambiamento nel ciclo ε T/C:

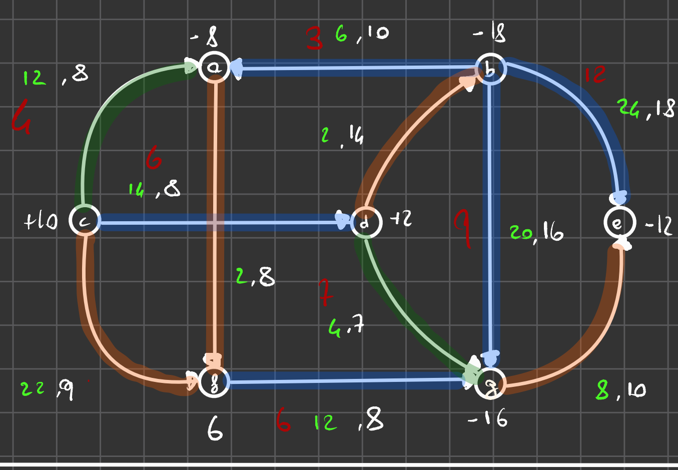
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \min\{ u_{ij} - x_{ij} \mid (i,j) \in C \text{ e ha stesso verso} \} \\ \varepsilon_2 = \min\{ x_{ij} \mid (i,j) \in C \text{ e ha verso opposto} \} \\ \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \end{cases}$$

(6) Incrementiamo il flow di ε sugli archi forward rispetto il ciclo e lo decrementiamo sugli archi con direzione opposta

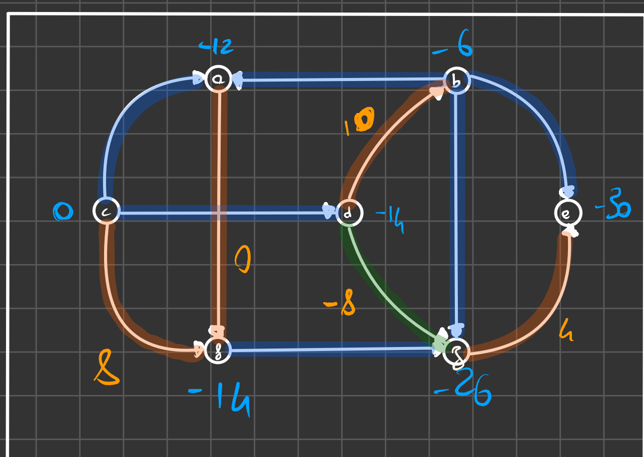


- Aggiungiamo (c,a) →
- Il ciclo C →
- $\varepsilon = 3$ ed è data dall'arco (d,g)

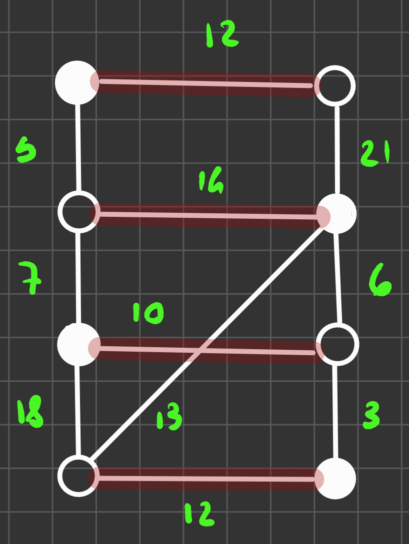
- Ricalcoliamo i flow come descritto prima
- rimuoviamo (d,g) perché viene saturato →



(7) Verifichiamo l'ottimalità della nuova soluzione, ripetendo quindi dallo STEP (3)



Exercise 1 (27/05/19)
Find the minimum weight perfect matching on the following graph starting from the perfect matching represented by thick arcs.



// ● ∈ A
// ○ ∈ B
// M matching perfetto

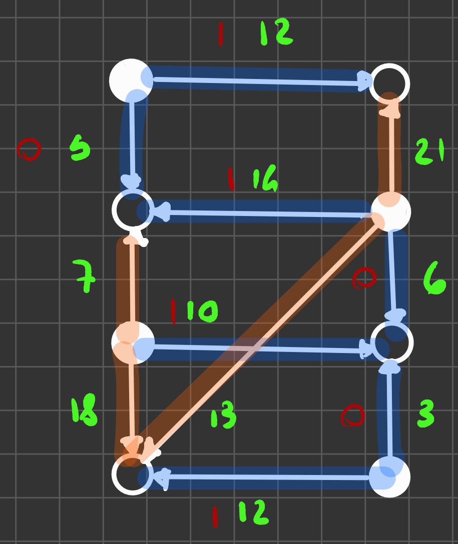
(1) Data un MATCHING PERFETTO M, costruiamoci una FTSolution {T, L} inizializzando sui nodi dell'insieme A una LABEL (supply) a +1 e sui nodi di B una LABEL (demand) a -1; orientiamo quindi gli archi da A a B inizializziamo un FEASIBLE FLOW x ponendo $x_{ij}=1$ $\forall (i,j) \in M$.

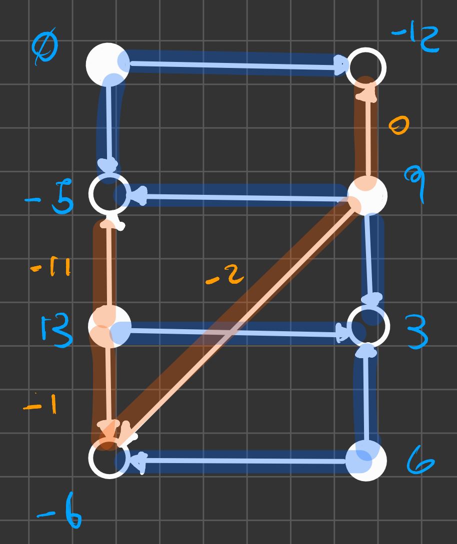
(2) Aggiungiamo a T tutti gli archi con $x_{ij}>0$ e abbastanza con $x_{ij}=0$ tali da rendere T un albero (iniziando da quelli di costo minimo)

(3) Aggiungiamo in L gli archi rimanenti

(4) Abbiamo ridotto il problema al MIN COST FLOW, applichiamo perciò il network simplex Algorithm

• Verifichiamo se l'attuale soluzione è ottima calcolando prima i POTENZIALI y_h, poi i COSTI RIDOTTI $\bar{c}_{ij}$

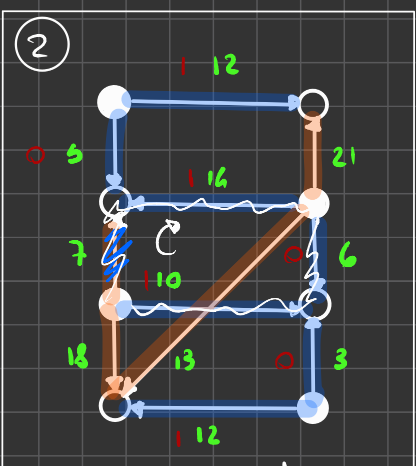




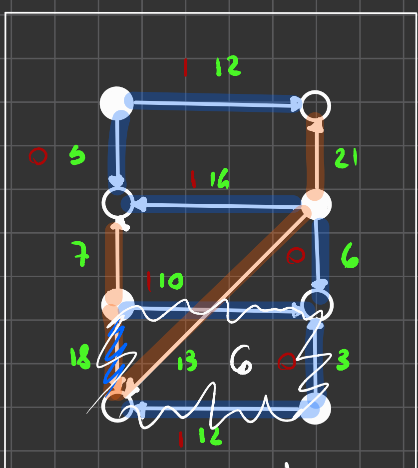
• Verifichiamo qual è il miglior arco da aggiungere a T supponendo di aggiungerlo e calcolando $\varepsilon \cdot |\bar{c}_{ij}|$; L'arco con il massimo valore $\varepsilon \cdot |\bar{c}_{ij}|$ è la miglior scelta

⇒ Degenerate iteration

$\varepsilon=0 \to 0\cdot|-21|=0$



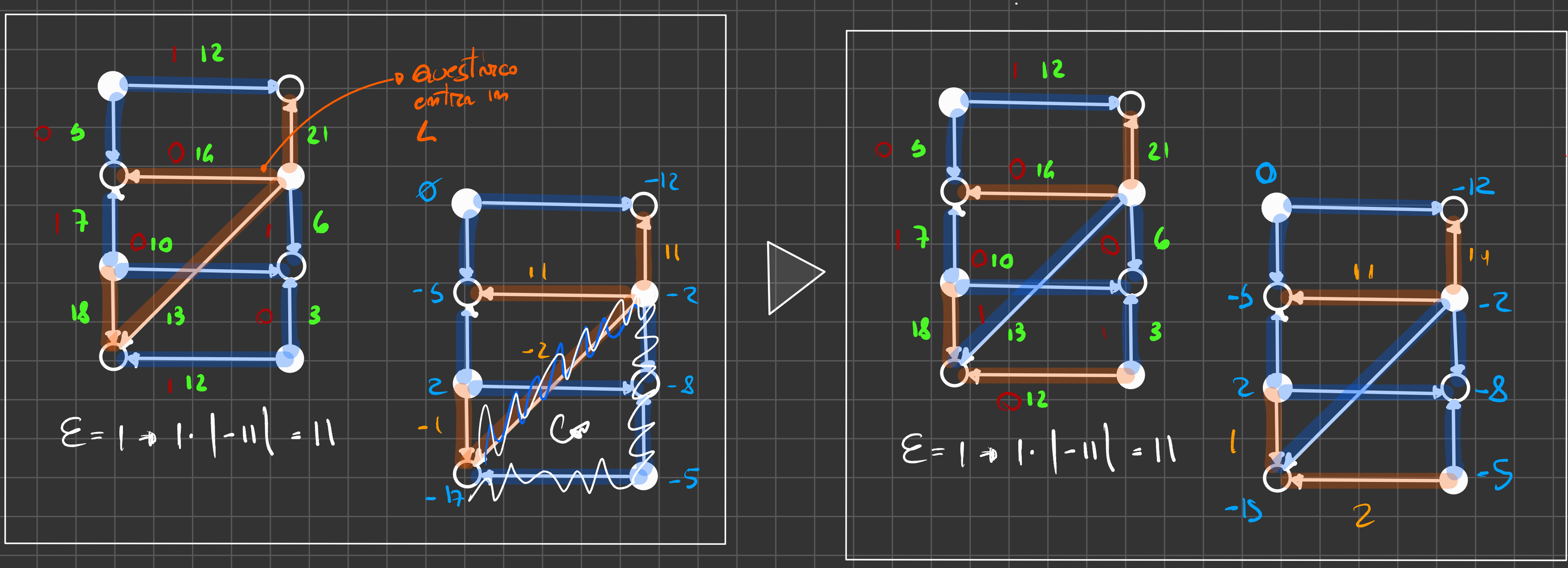
$\varepsilon=1 \to 1\cdot|-11|=11$



$\varepsilon=1 \to 1\cdot|-1|=1$

// Aggiungo
// Ciclo

• L'opzione migliore è la seconda, continuo da tale soluzione



• La soluzione è ottima e ha valore $z = 12 + 7 + 3 + 13 = 35$

Exercise 2

Evaluate the optimal solution to the following linear program

$$\min \; 51x_1 + 34x_2 + 27x_3 + 16x_4 + 25x_5 + \cancel{19x_6}$$

s.t.

$$
\begin{array}{ll}
x_1 + x_4 \geq 25 & (a)\\
x_2 + x_3 + x_5 \geq 23 & (b)\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 21 & (c)\\
x_2 + x_5 \geq 14 & (d)\\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \geq 39 & (e)\\
x \geq 0 &
\end{array}
$$

// LA VARIABILE X_6 PUÒ ESSERE IGNORATA, POICHÉ NON APPARE NEI COSTRAINTS, PERCIÒ NELLA SOL. OTTIMA AVRÀ VALORE $X_6 = \phi$

(1) Ricaviamo la matrice A dai constraint e verifichiamo abbia la CONSECUTIVE ONES PROPERTY

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	0	0	1	0
b	0	1	1	0	1
c	1	1	1	0	1
d	0	1	0	0	1
e	1	1	0	1	1

SWAP

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	0	0	1	0
e	1	1	0	1	1
c	1	1	1	0	1
d	0	1	0	0	1
b	0	1	1	0	1

SWAP

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
a	1	0	0	1	0
e	1	1	0	1	1
c	1	1	1	0	1
b	0	1	1	0	1
d	0	1	0	0	1

✓

Nota: Ci sono due colonne uguali, possiamo rimuoverne una; scegliamo x_2 poiché ho costo associato maggiore di x_5

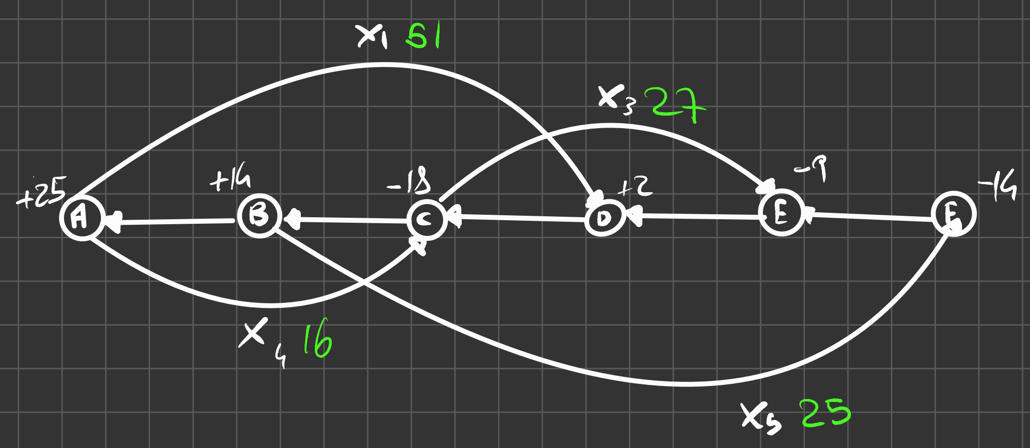
(2) Ricaviamo la Network Matrix associata, aggiungendo una riga nulla, gli RHS e le variabili di surplus y_i

(3) otteniamo infine la NETWORK MATRIX sottraendo ogni riga dalla superiore

	x_1	x_3	x_4	x_5	y_a	y_e	y_c	y_b	y_d	RHS
a	1	0	1	0	-1					25
e	1	0	1	1		-1				39
c	1	1	0	1			-1			21
b	0	1	0	1				-1		23
d	0	0	0	1					-1	14
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

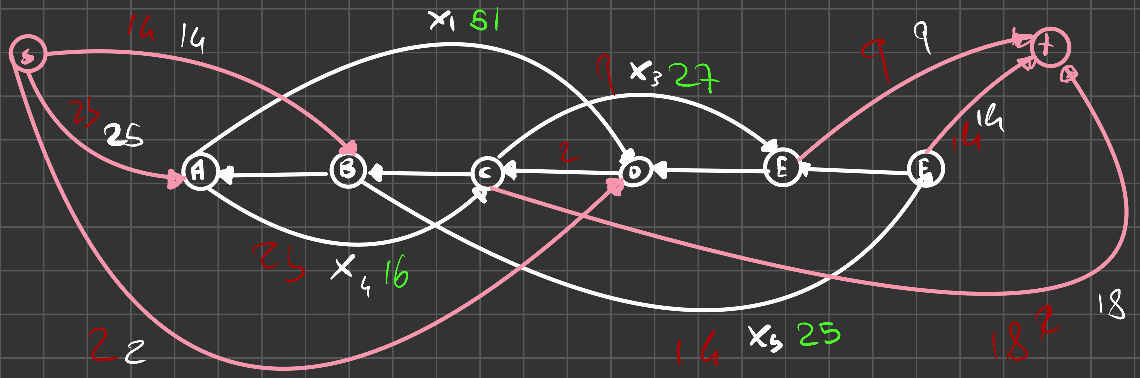
	x_1	x_3	x_4	x_5	y_a	y_e	y_c	y_b	y_d	RHS
A	1	0	1	0	-1	0	0	0	0	25
B	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	14
C	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	-18
D	-1	0	0	0	0	0	1	-1	0	2
E	0	-1	0	0	0	0	0	1	-1	-9
F	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-14

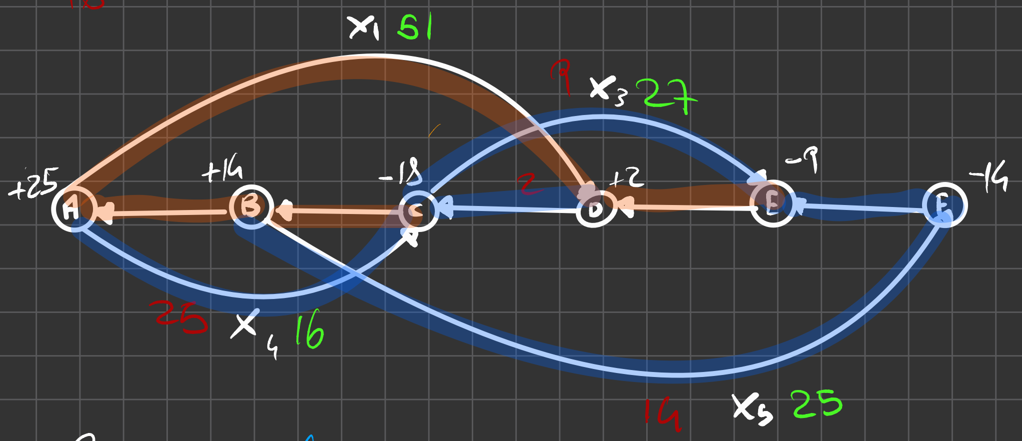
(4) Disegniamo il grafo associato alla matrice ottenuta



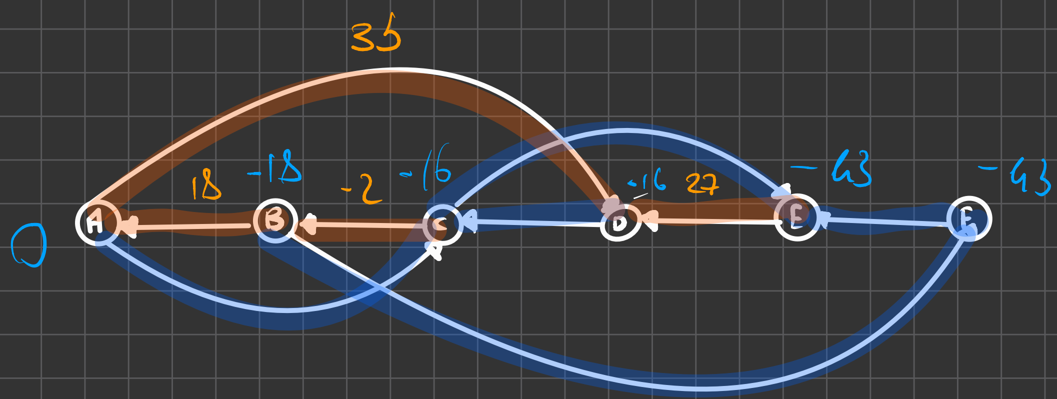
(5) Abbiamo ridotto il problema a un MIN COST FLOW, ora è risolvibile tramite il SIMPLEX FLOW ALGORITHM

• Ricaviamo una FTS $\{T, L\}$, inizializzando un feasible flow

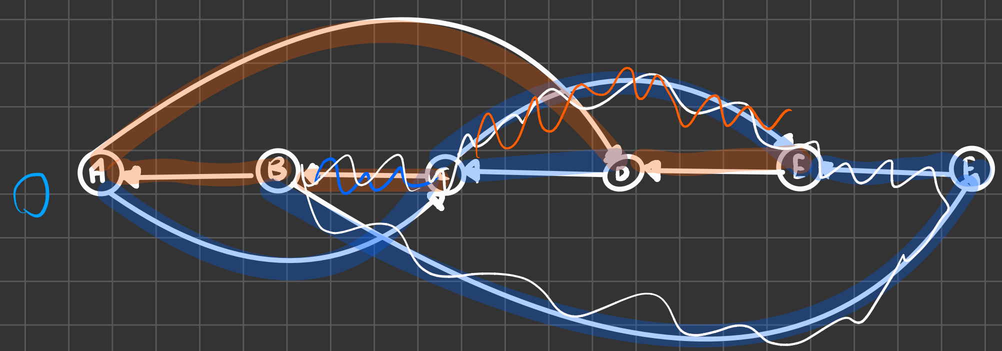




• Verifichiamo i costi ridotti $\bar{C}_{ij}$ tramite i POTENZIALI y_i



• Non è ottima $\bar{C}_{BC} < 0$ ⇒ PIVOTING: Aggiungiamo (B,C) a T e calcoliamo ε

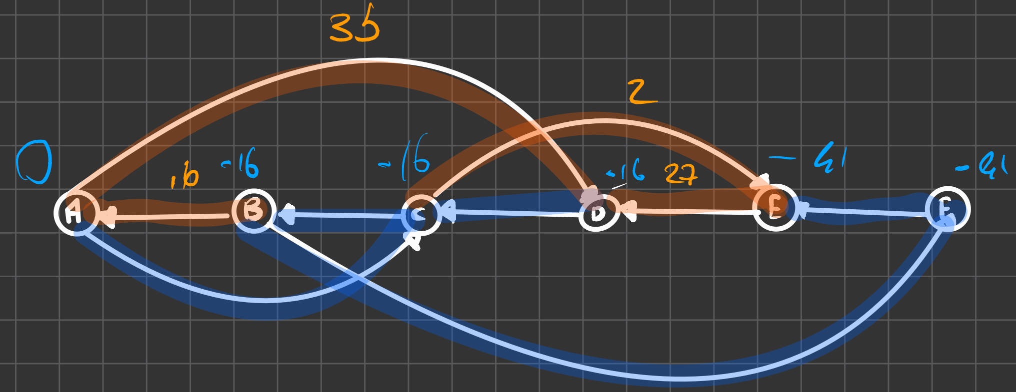


// CICLO:

// AGGIUNGO:

// RIMUOVO

// $\varepsilon = 9$ ⇒ RIMUOVO (C,E)



• La soluzione è ottima: $z = 25 \cdot 23 + 25 \cdot 16 = \ldots$