

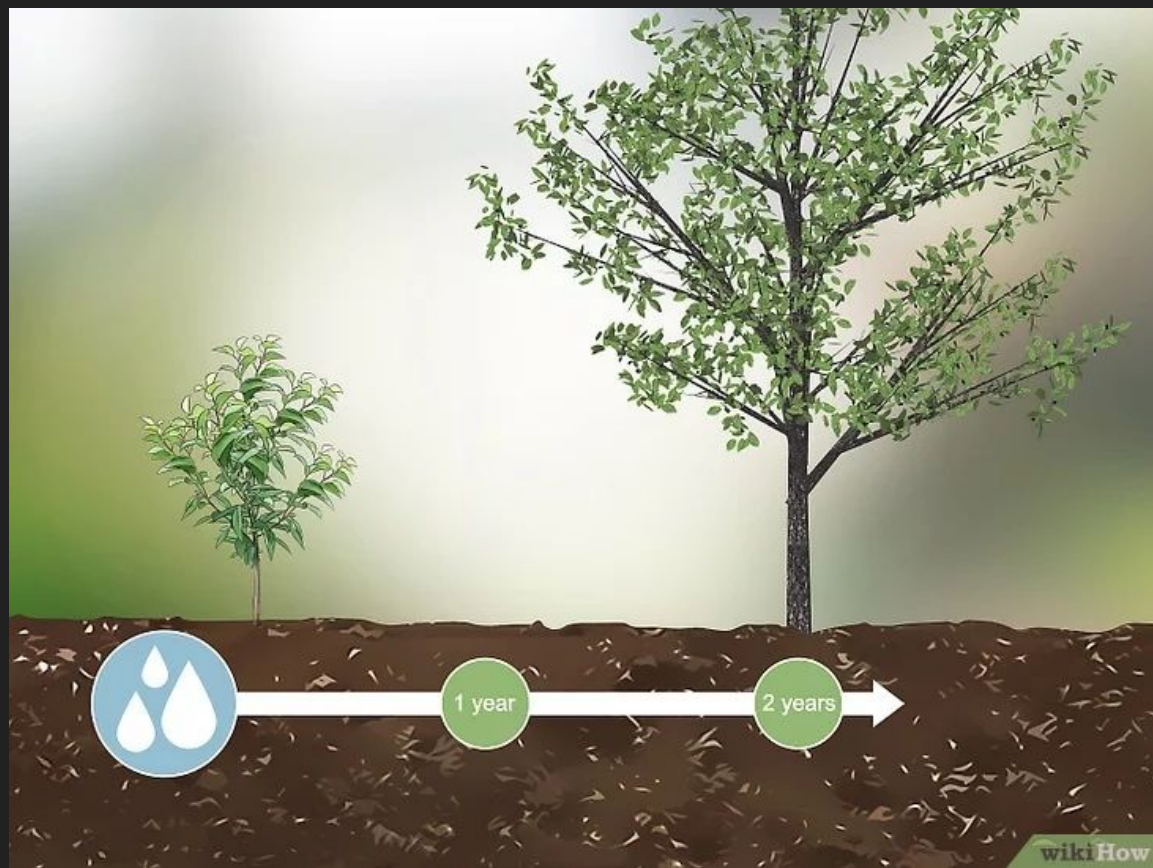
Árvores

Prof.: Leonardo Tórtoro Pereira
leonardop@usp.br

Baseado nos slides do Prof. Rudinei Goularte



lifa Tree - Final Fantasy IX (Square Enix, 2000)



<https://pt.wikihow.com/Cuidar-de-uma-%C3%81rvore>

Conteúdo

- Introdução
- Fundamentos e Terminologia
- Representações Gráficas
- Árvores N-árias
- Exercícios

Introdução

- Estrutura de listas: organização linear dos dados, onde sua propriedade básica é a relação sequencial mantida entre seus elementos
- Estrutura de árvores: organização dos dados de forma não-linear mantendo um relacionamento hierárquico entre seus elementos

Listas Lineares

TAluno
Nome
Curso
Departamento
...

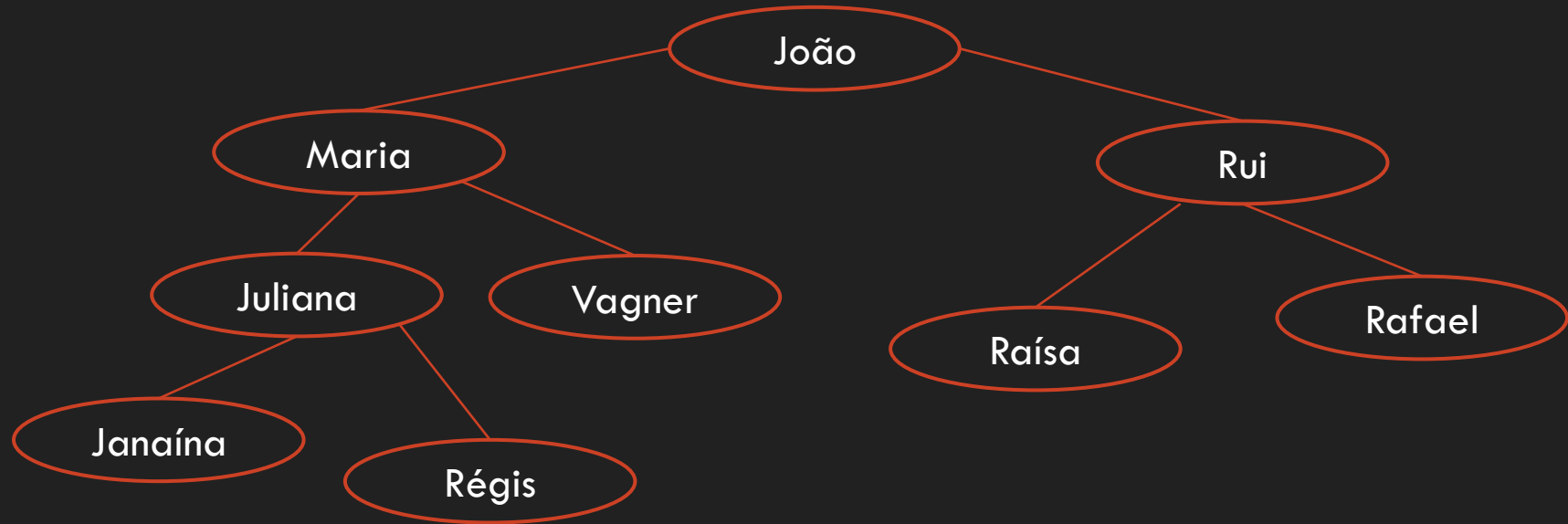
A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	...	An
----	----	----	----	----	----	----	-----	----

- Complexidade de tempo para os problemas
- ◆ Listar os alunos do departamento Dx? $O(n)$
 - ◆ Listar os alunos do curso Cx? $O(n)$
 - ◆ Idade média dos alunos do curso Cx? $O(n)$
 - ◆ Ordenar por Curso e, dentro de cada Curso, por Nome? ??

Estrutura de árvore: exemplos

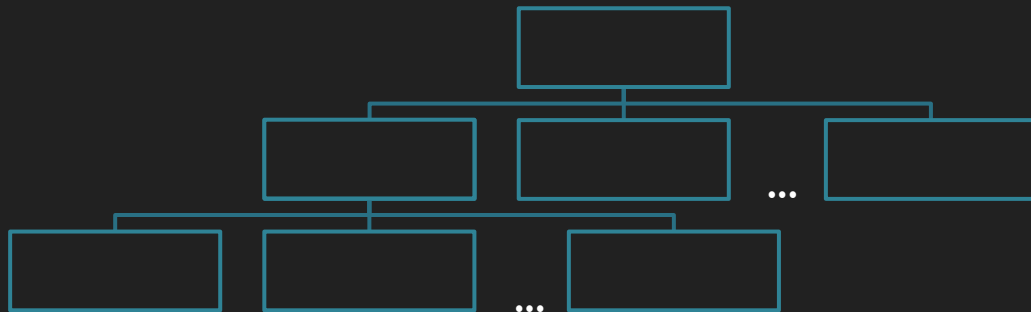
- Algumas situações onde é necessária uma representação baseada na relação hierárquica entre os elementos
 - ◆ Árvores genealógicas
 - ◆ Organização de um livro
 - ◆ Representação da estrutura organizacional de uma instituição

Estrutura de árvore: exemplo de árvore genealógica



Estrutura de árvore: exemplo de organização de um livro

- 1. Livro XYZ
 - 1.1 Cap. 1
 - 1.1.1 Seção 1
 - 1.1.2 Seção 2
 - ...
 - 1.1.n Seção n
 - 1.2 Cap. 2
 - ...
 - 1.m Cap. m



- Qual a complexidade?
 - Chegar a seção x do capítulo l...

Justificativas/vantagens

- Representatividade no relacionamento entre os dados
- Facilidades na manipulação computacional dos dados
- Utilizando essa abordagem para representar a Estrutura Organizacional da USP, teríamos maior facilidade na extração de informações como
 - ◆ Total de professores de um departamento
 - ◆ Total de salário dos funcionários de setor específico
 - ◆ Os diretores de cada centro/unidade
 - ◆ Entre outras...

Justificativas/vantagens

- Observe que para extrair informações específicas de uma determinada ramificação da árvore não é necessário o percurso por toda a estrutura de informação, uma vez que o relacionamento entre os dados nos permite uma consulta seletiva em regiões específicas da árvore!

Definição

- Uma árvore enraizada T é um conjunto finito de elementos denominados **nós** ou vértices tais que
 - ◆ $T = \emptyset$, a árvore é dita vazia
 - ◆ $T = \{r\} \cup \{T_1\} \cup \{T_2\} \cup \{T_3\} \cup \dots \cup \{T_n\}$
- Um nó especial da árvore, r , é chamado de **raiz** da árvore
- Os restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em $n \geq 1$ conjuntos disjuntos não vazios, $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, as **subárvores** de r , cada qual por sua vez uma árvore

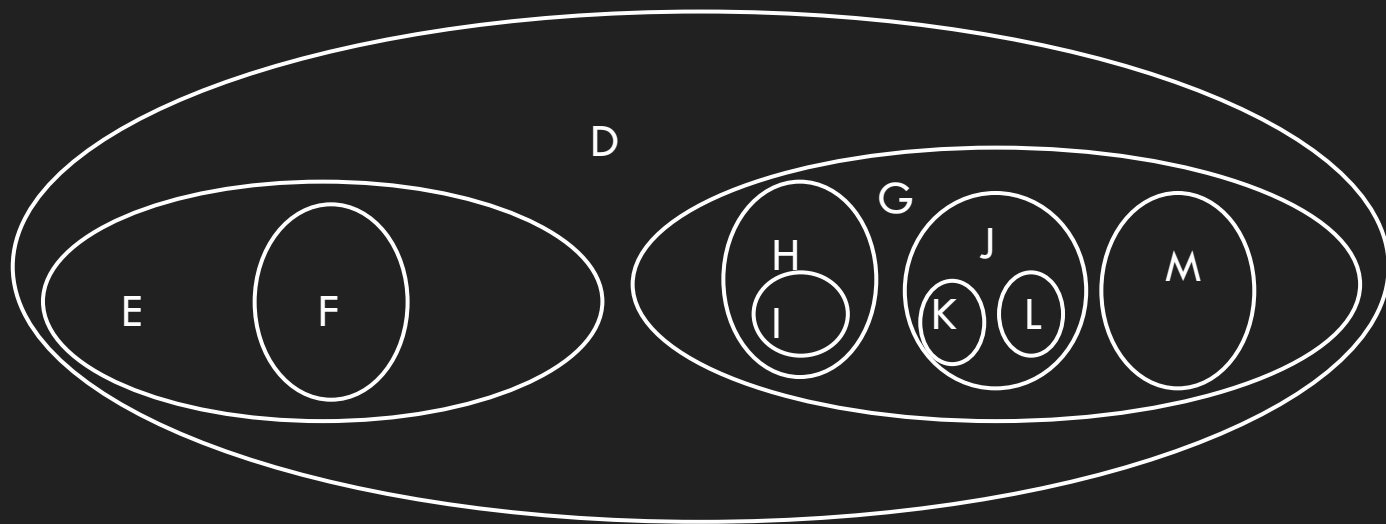
Definição

- Assim para denotar uma árvore T usamos
- $T = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_n\}$, com r a raiz da árvore e T_v a subárvore T com raiz em v
- Note que a definição apresentada é recursiva!

Representações gráficas para árvores

- A estrutura de árvore pode ser representada graficamente de diversas maneiras, dentre elas temos
 - ◆ conjuntos aninhados
 - ◆ indentação
 - ◆ grafos, sendo esta última a mais utilizada

Representação em conjuntos aninhados



Representação com indentação

D

.....E

..... F

.....G

..... H

..... I

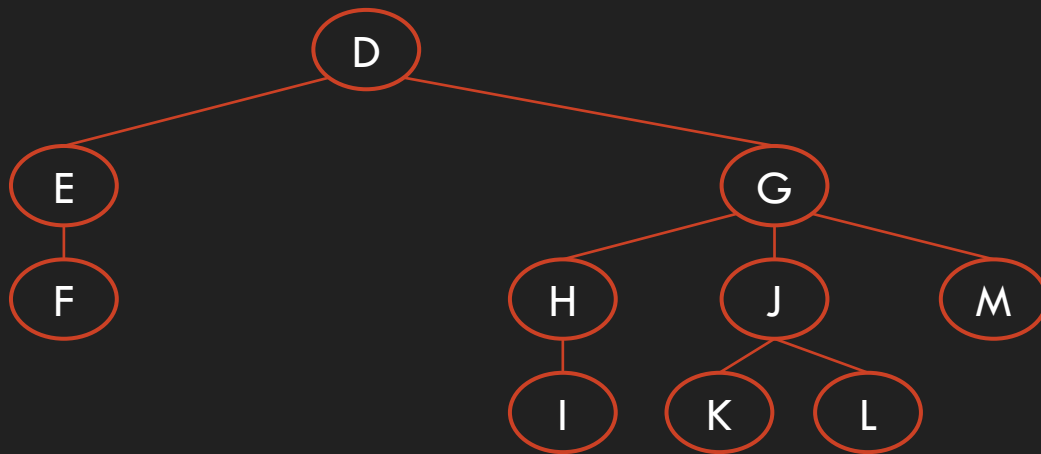
..... J

..... K

..... L

..... M

Representação utilizando grafos



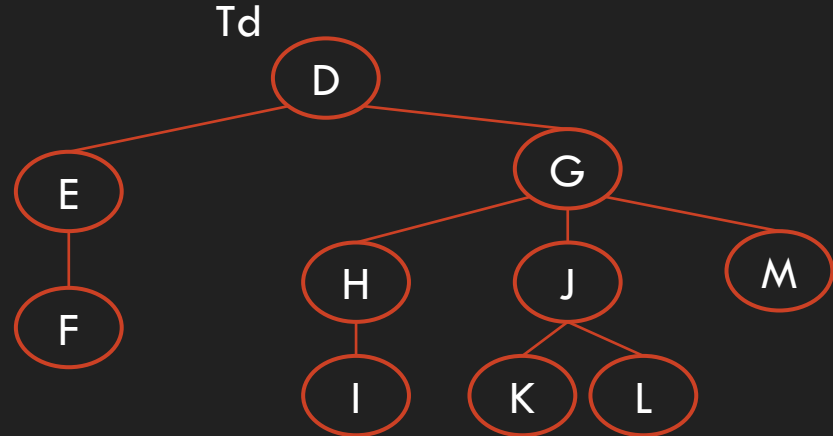
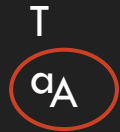
Representação Aninhada

→ Exemplo

◆ $T_a = \{A\}$

◆ $T_b = \{B, \{C\}\}$

◆ $T_d = \{D, \{E, \{F\}\}, \{G, \{H, \{I\}\}, \{J, \{K\}, \{L\}\}, \{M\}\}$



Representação Aninhada

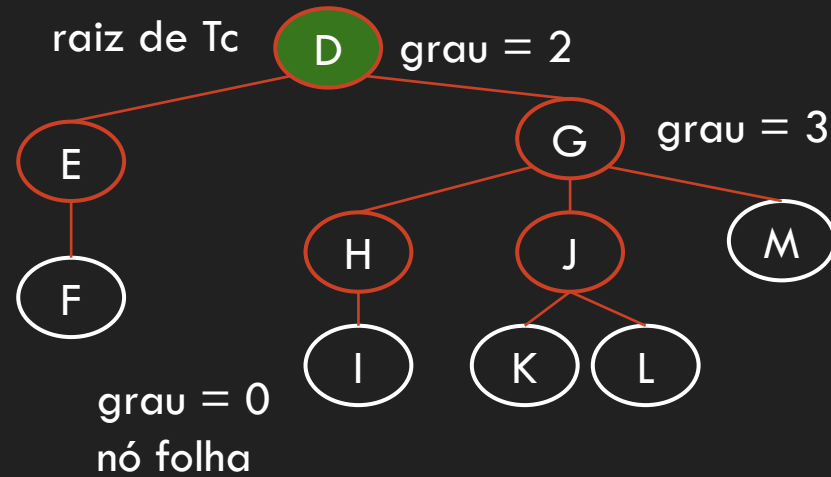
→ Exercícios

- ◆ $T_d = \{2, \{1\}, \{3\}\}$
- ◆ $T_e = \{4, \{2, \{1\}, \{3\}\}, \{6, \{5\}, \{7\}\}$
- ◆ $T_f = \{\text{Joao}, \{\text{Daniel}, \{\text{Andres}\}, \{\text{Fernanda}\}\}, \{\text{Maria}, \{\text{Marcos}\}, \{\text{Rafael}\}\}$

Terminologias

- Considerando a árvore T_c e a definição dada de árvores anteriormente vejamos algumas terminologias básicas
 - ◆ O **grau de um nó** é o número de sub-árvores relacionadas aquele nó. Por exemplo: em T_c o grau do nó D é 2, de G é 3 e dos nós K, L, I, F e M é 0 (zero)
 - ◆ Nós com grau igual a zero não possuem sub-árvores, portanto são chamados **nós folhas ou terminais**
 - ◆ Se cada nó de uma árvore possui um grau máximo e todos os demais nós possuem o mesmo grau máximo, podemos definir este grau como o **grau da árvore**

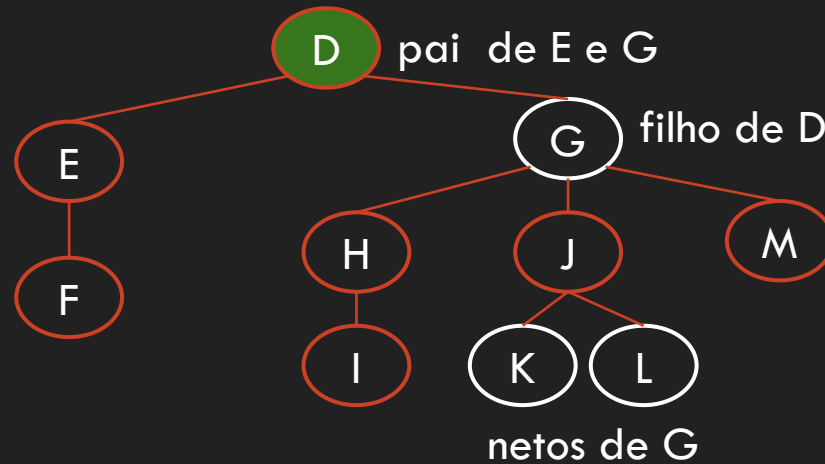
Terminologias



Terminologias

- Para identificar os nós na estrutura, usamos denominações da relação hierárquica existente em uma árvore genealógica
 - ◆ Cada raiz r_i da sub-árvore T_i é chamada **filho** de r . O termo **neto** é usado de forma análoga
 - ◆ O nó raiz r da árvore T é o **pai** de todas as raízes r_i das sub-árvores T_i . O termo **avô** é definido de forma análoga
 - ◆ Duas raízes r_i e r_j das sub-árvores T_i e T_j de T são ditas **irmãs**

Terminologias



Definição

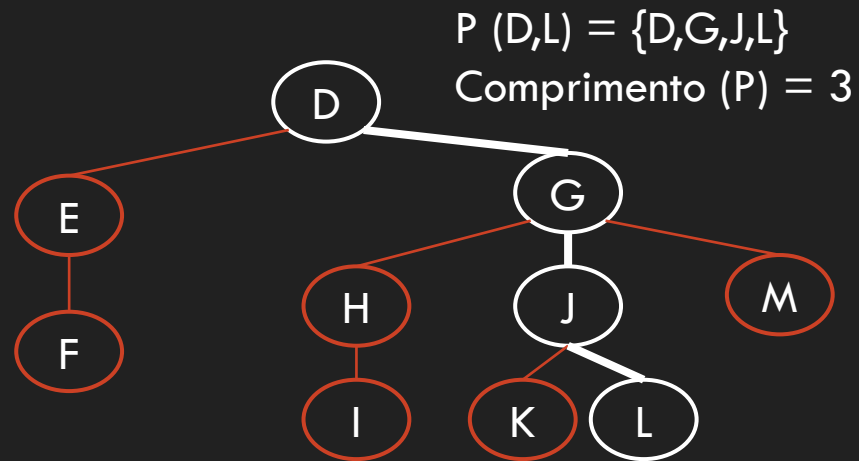
→ Outras definições importantes são obtidas a partir da distância de um nó em relação aos outros nós da árvore

◆ **Caminho:** sequência não vazia de nós,

$P = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, onde o i -ésimo nó r_i da sequência é pai de r_{i+1}

◆ **Comprimento:** tomando a definição de caminho, o comprimento de um caminho P é igual a $k - 1$

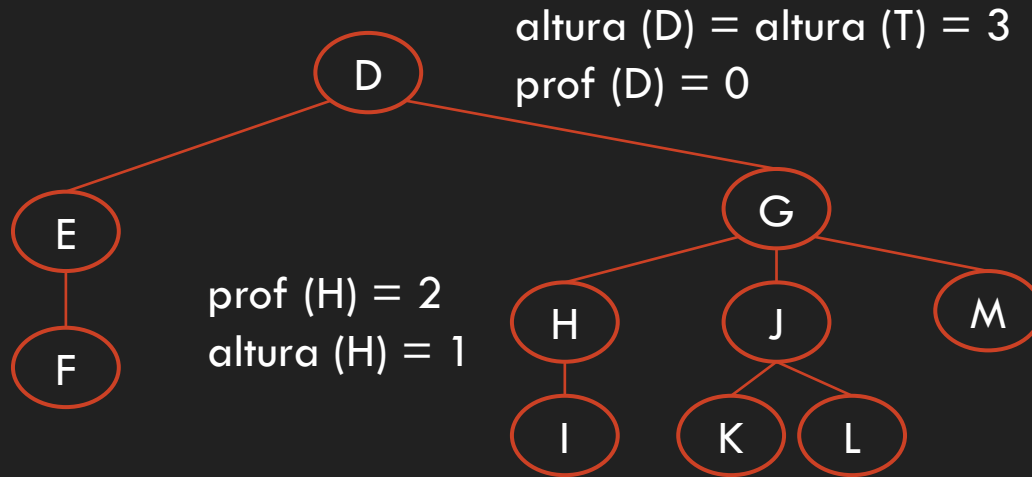
Definição



Terminologia

- **Altura de um nó:** a altura de um nó r_i é o comprimento do **caminho mais longo** do nó r_i a uma folha
 - ◆ As folhas têm altura 0 (zero)
- **Altura de uma árvore:** é igual a altura da raiz r de T
- **Profundidade:** a profundidade de um nó r_i de uma árvore T é o comprimento do **único caminho** em T entre a raiz r e o nó r_i
 - ◆ Qual é a maior profundidade entre todos os nós de uma árvore?
- **Nível:** um conjunto de nós com a mesma profundidade é denominado nível da árvore
 - ◆ A raiz está no nível 0 (zero)

Terminologia



Terminologia

- **Ascendência e descendência:** considerando dois nós r_i e r_j , o nó r_i é um ancestral de r_j se existe um caminho em T de r_i a r_j , tal que, o comprimento de P entre r_i e r_j seja diferente de 0 (zero)
- ◆ De forma análoga se define o **descendente** de um nó

Árvores N-árias

- Uma árvore N-ária T é um conjunto finito de nós com as seguintes propriedades
 - ◆ $T = \emptyset$ e a árvore é dita vazia; ou
 - ◆ o conjunto consiste de um nó especial r , que é a raiz de T , e os nós restantes podem ser sempre divididos em n subconjuntos disjuntos, as i -ésimas subárvores de r , tal que $1 \leq i \leq n$, as quais também são árvores N-árias
- A i -ésima subárvore de um nó v de T , se existir, é denominada i -ésimo filho de v

Exercícios

1. Considere a seguinte árvore:

$$T_e = \{a, \{b, \{c, \{d\}\}, \{e, \{f\}, \{g\}\}\}, \{h, \{i\}\}\}$$

- Obtenha as representações por conjunto, indentação e grafos
 - Encontre o grau, altura e profundidade de cada nó
 - Encontre todos os caminhos possíveis a partir da raiz com seus respectivos comprimentos
2. Partindo da definição de árvores n-árias, encontre a definição para árvores binárias

Referências

- Material baseado nos originais produzidos pelos professores:
 - ◆ Rudinei Gularte
 - ◆ Gustavo E. de A. P. A. Batista
 - ◆ Fernando V. Paulovich
 - ◆ Maria das Graças Volpe Nunes
- Referências (material parcialmente baseado em):
 - ◆ SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos, Livros Técnicos e Científicos, 1994.
 - ◆ TENEMBAUM, A.M., e outros Data Structures Using C, Prentice-Hall, 1990.
 - ◆ ZIVIANI, N. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.