SCC 503 - ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS II

Árvores B

Prof.: Leonardo Tórtoro Pereira
leonardop@usp.br

*Material baseado em aulas dos professores: Elaine Parros Machado de Souza, Gustavo Batista, Robson Cordeiro, Moacir Ponti Jr., Maria Cristina Oliveira e Cristina Ciferri.

O que vimos até agora?

Relembrando...

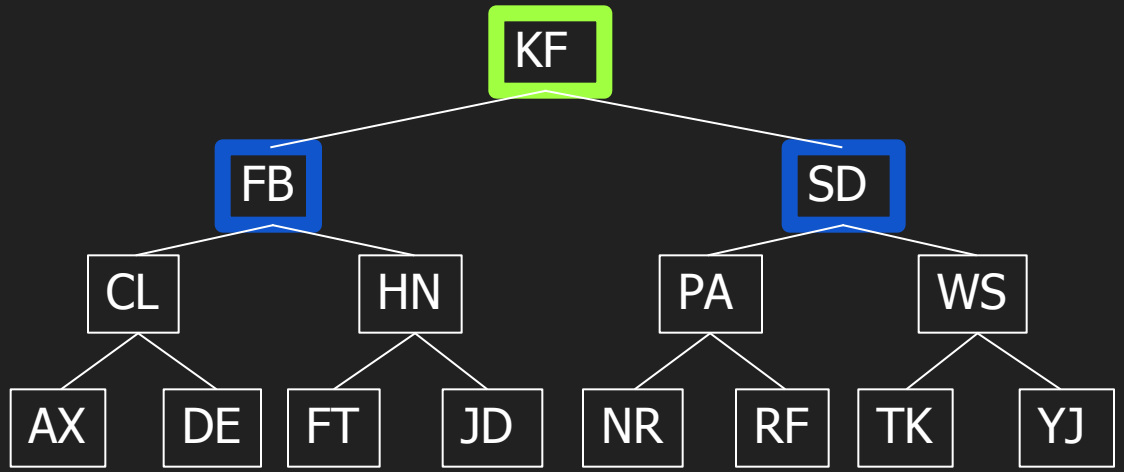
- Acesso a disco?
  - Lento
- Pode-se usar índices para guardar apenas as chaves e RRN em memória principal
  - Precisa ordenar os índices para usar busca binária
  - Podem ser índices primários e/ou secundários
- Mas índices grandes não cabem na memória principal 😢
  - Não adianta mais busca binária nem ordenação 😩

Relembrando...

- Precisamos de um método de inserção e eliminação apenas com efeitos locais
  - Que não exija reorganização total do índice
- Árvore Binária de busca?

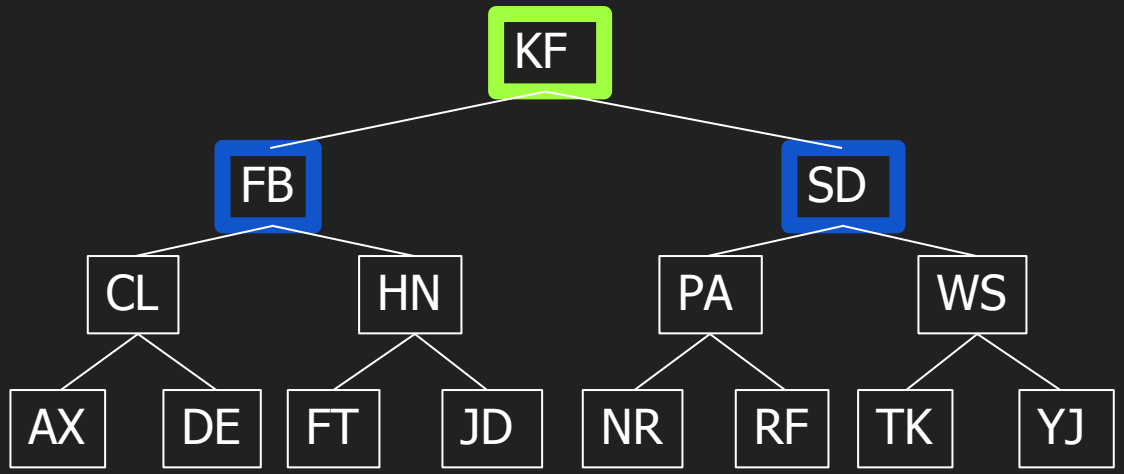
Árvore Binária de Busca

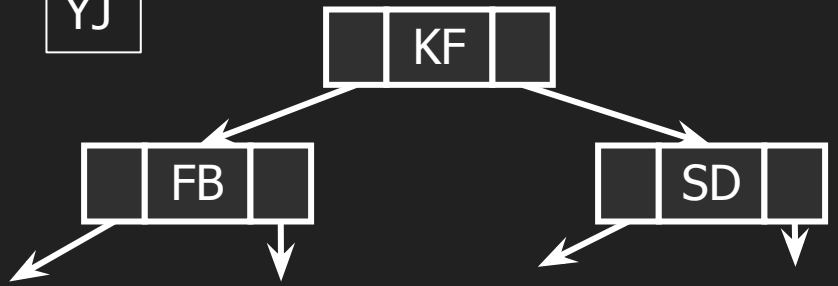
AX, CL, DE, FB, FT, HN, JD, KF, NR, PA, RF, SD, TK, WS, YJ



Vetor ordenado e representação por árvore binária

Árvore Binária de Busca



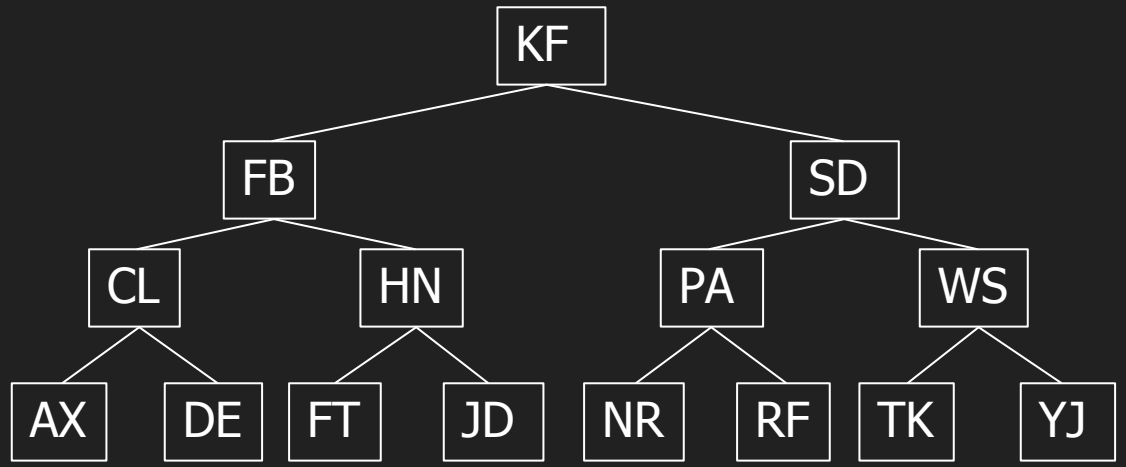


Como organizar uma árvore em disco de maneira eficiente?

Representação Lógica da Árvore no Arquivo

- Nós da árvore
  - Registros em arquivo com 3 campos: chave e 2 “ponteiros” (RRN)
- “Ponteiros” (esq e dir) indicam onde estão os registros dos nós filhos
- Para indexação: um 3o “ponteiro” para o registro correspondente no arquivo de dados
- Posição da raiz no cabeçalho do arquivo

Representação Lógica da Árvore no Arquivo

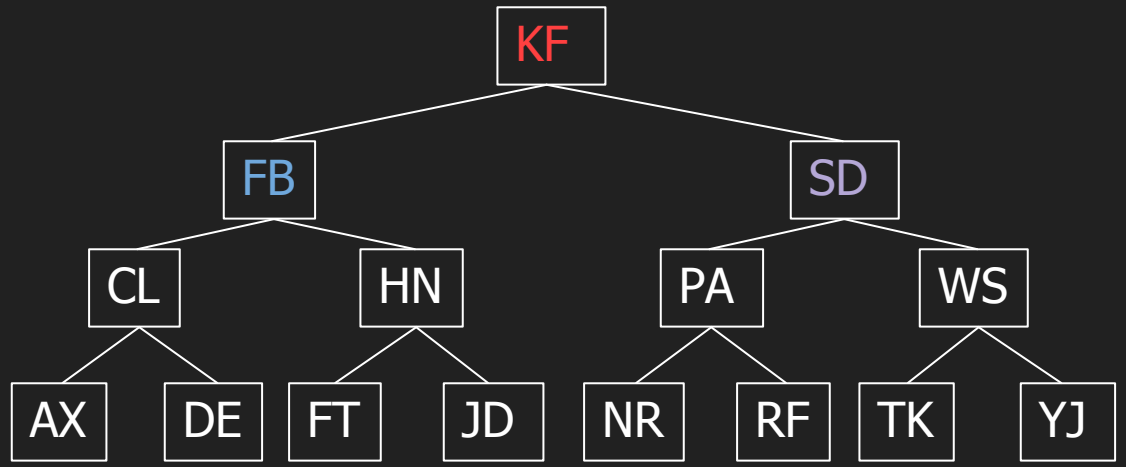


raiz →

	Chave	Filho esq.	Filho dir.
0	FB	10	8
1	JD		
2	RF		
3	SD	6	13
4	AX		
5	YJ		
6	PA	11	2
7	FT		
8	HN	7	1
9	KF	0	3
10	CL	4	12
11	NR		
12	DE		
13	WS	14	5
14	TK		

ARQUIVO

Representação Lógica da Árvore no Arquivo



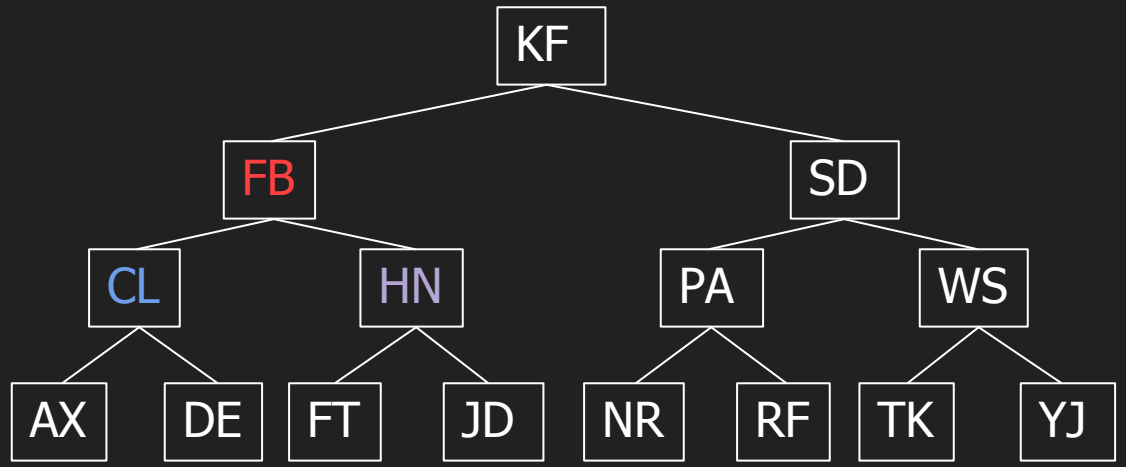
Chave | Filho esq. | Filho dir.

raiz →

0	FB	10	8
1	JD		
2	RF		
3	SD	6	13
4	AX		
5	YJ		
6	PA	11	2
7	FT		
8	HN	7	1
9	KF	0	3
10	CL	4	12
11	NR		
12	DE		
13	WS	14	5
14	TK		

ARQUIVO

Representação Lógica da Árvore no Arquivo



raiz →

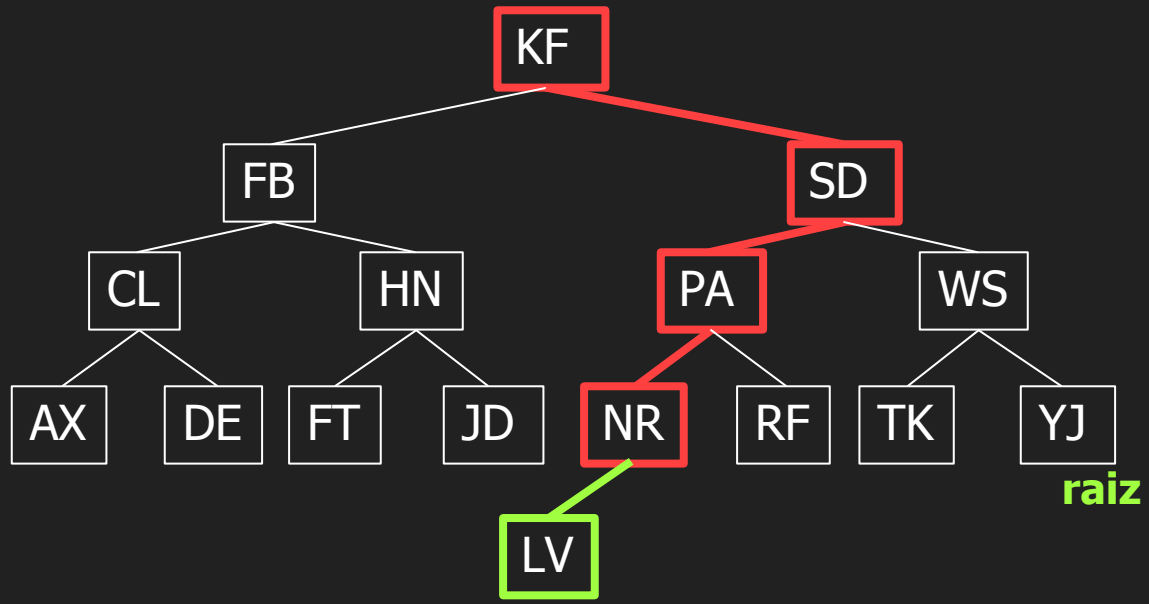
	Chave	Filho esq.	Filho dir.
0	FB	10	8
1	JD		
2	RF		
3	SD	6	13
4	AX		
5	YJ		
6	PA	11	2
7	FT		
8	HN	7	1
9	KF	0	3
10	CL	4	12
11	NR		
12	DE		
13	WS	14	5
14	TK		

ARQUIVO

Vantagens

- Ordem lógica da Estrutura de Dados não está associada à ordem lógica ou física dos registros no arquivo de índice
- Índice não precisa mais ser mantido ordenado
  - “ponteiros” esq. e dir. permitem recuperar a estrutura lógica da árvore
- Inserção de uma nova chave no arquivo
  - Necessário saber onde inserir esta chave na árvore
  - Busca é necessária, mas reorganização do arquivo não

Inserção da Chave **LV**



0	FB	10	8
1	JD		
2	RF		
3	SD	6	13
4	AX		
5	YJ		
6	PA	11	2
7	FT		
8	HN	7	1
9	KF	0	3
10	CL	4	12
11	NR	15	
12	DE		
13	WS	14	5
14	TK		
15	LV		

ARQUIVO

Desempenho

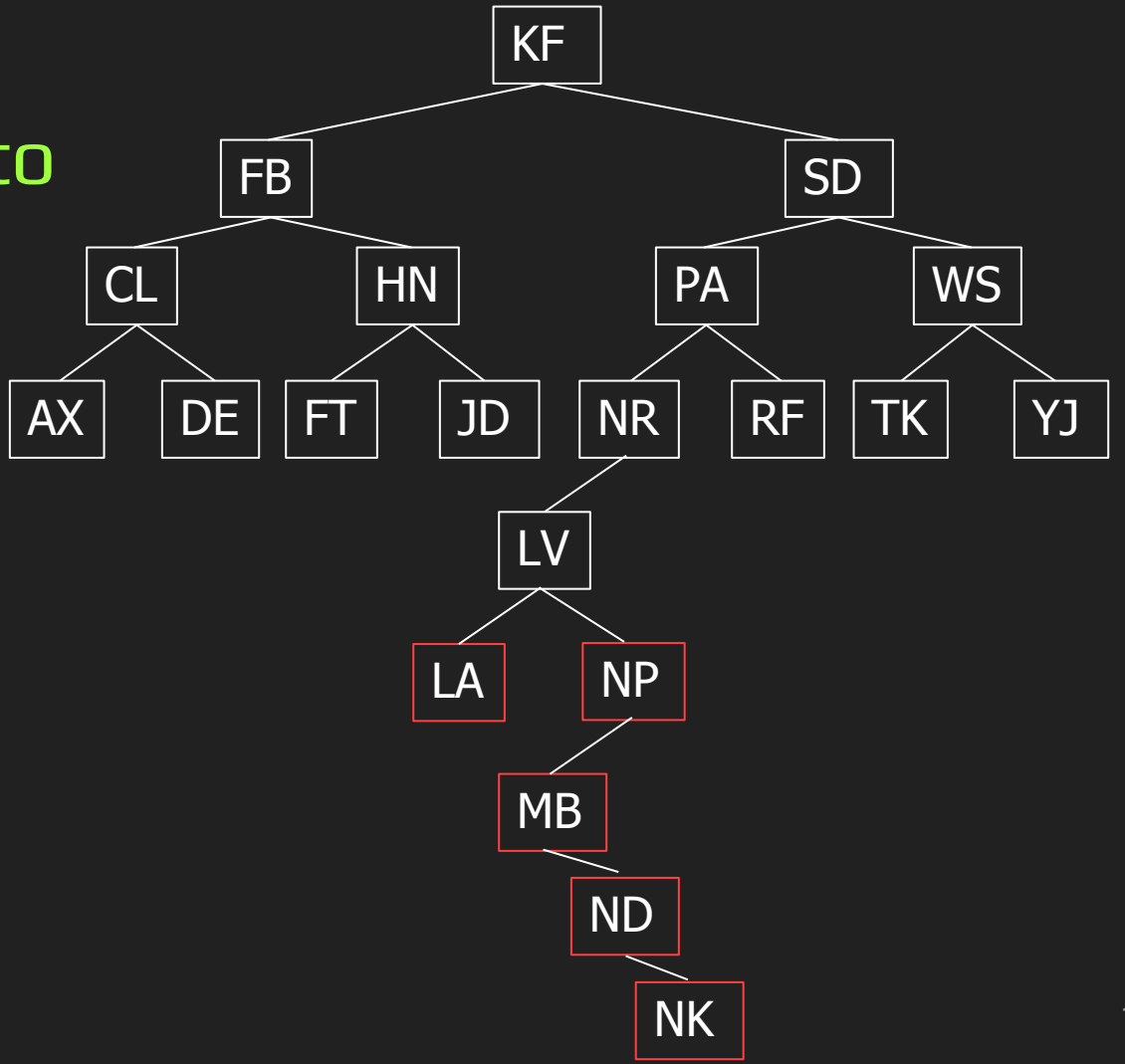
- Árvores binárias de busca perfeitamente balanceadas
  - Busca no pior caso
    - Altura da árvore
  - $O(\log_2 N)$
- Ex:
  - Para N = 1.000.000 chaves
  - ABB perfeitamente balanceada
    - Busca em até 20 níveis = 20 seeks

Problemas?

- ➔ Alto número de acesso a discos
- ➔ Desbalanceamento

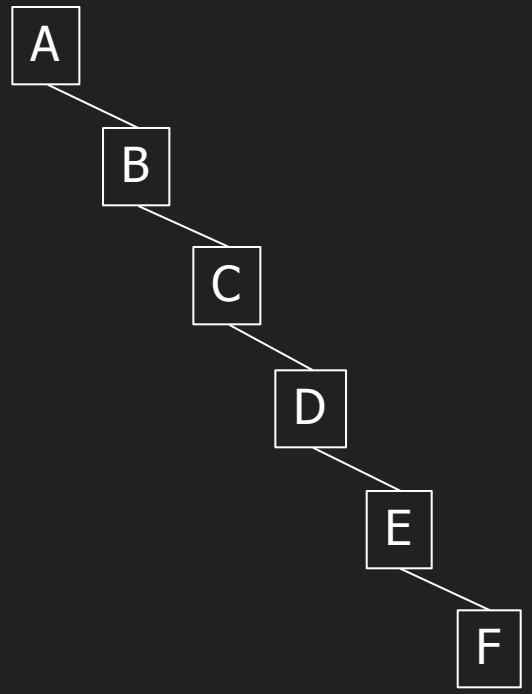
Desbalanceamento

- ➔ Inserção das chaves
- ➔ NP, MB, LA, ND e NK



Desbalanceamento

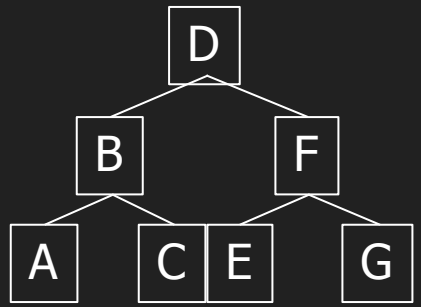
- Caso extremo:
  - Inserção em ordem alfabética

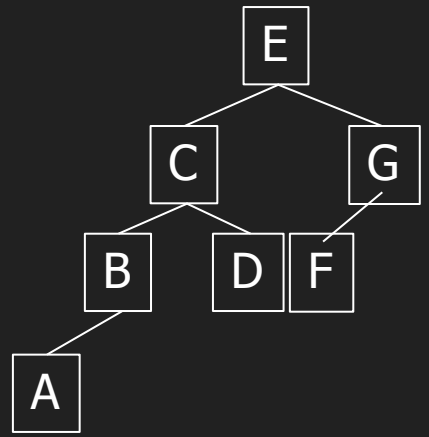


Possíveis Soluções

- Árvore AVL - Reduz Desbalanceamento
  - 1 nível de diferença entre alturas de 2 subárvores de mesma raiz
  - Garante performance aproximada de uma árvore perfeitamente balanceada

Árvore perfeitamente balanceada

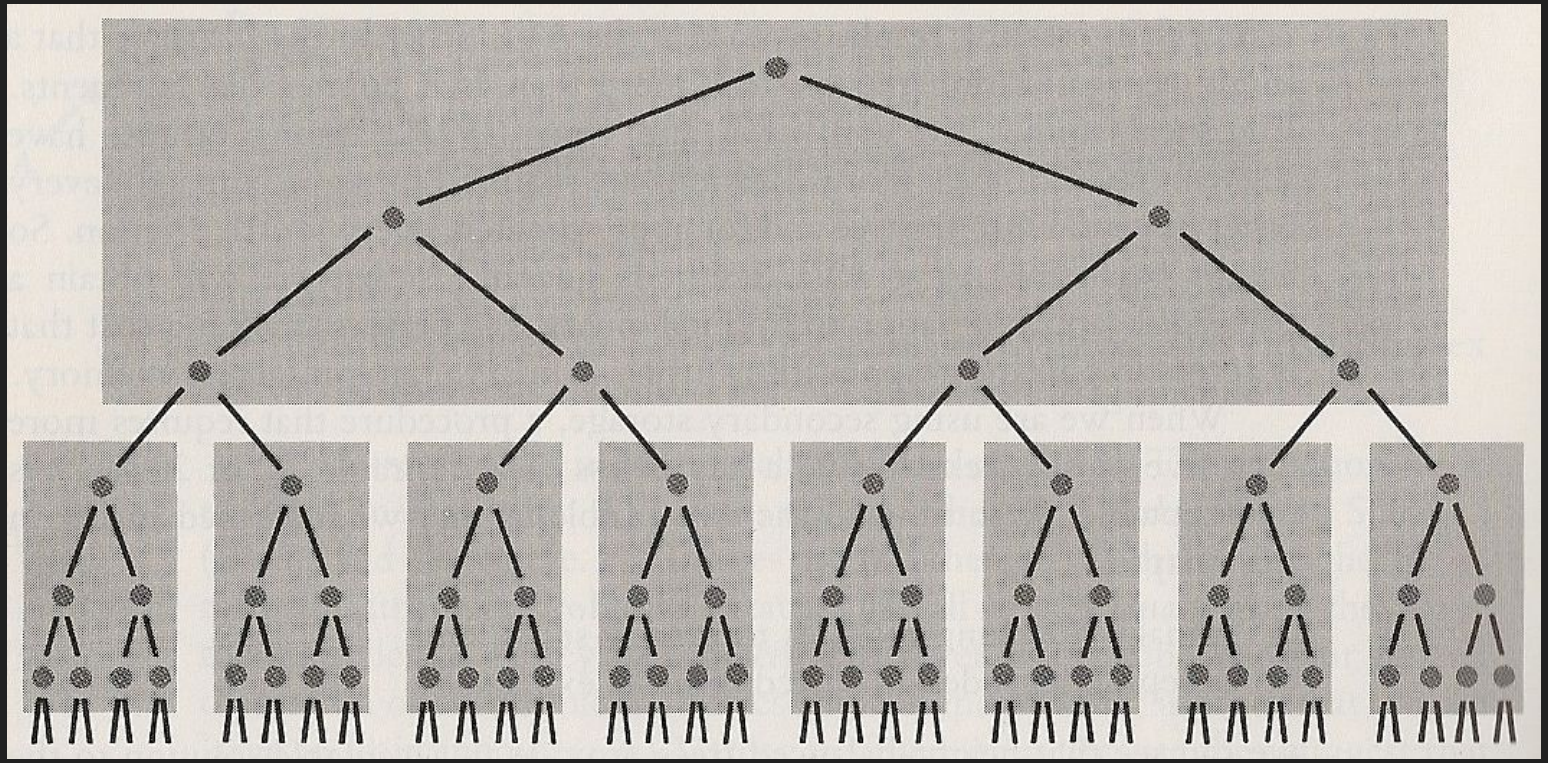




AVL

Possíveis Soluções

- ➔ Paginação - Reduz número de acessos a disco
  - ◆ ABB (ou AVL) paginada
  - ◆ Leitura de vários registros num único acesso (seek) à página (bloco) de disco



Alocar múltiplos nós na mesma página

Problemas?

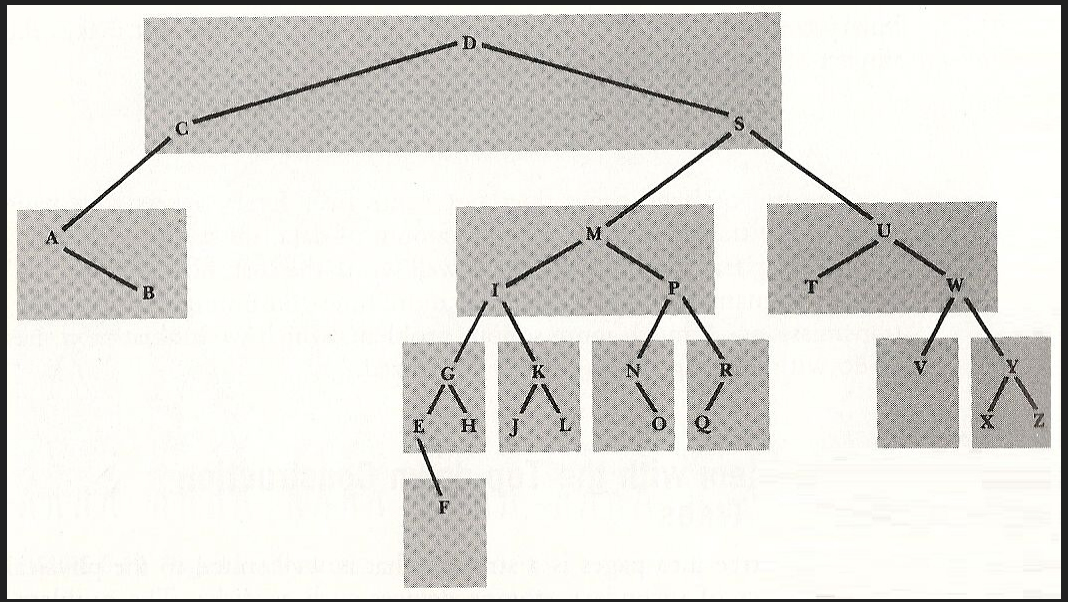
- ABB ou AVL paginadas
  - O problema do Desbalanceamento (ABB) ainda existe
  - Se conjunto de chaves é conhecido
    - Construção da árvore é simples
      - Ordena-se o conjunto de chaves
      - Inicia-se a construção pela chave do meio para obter uma árvore balanceada

Problemas?

- ABB ou AVL paginadas
  - Se as chaves são recebidas em uma sequência aleatória
    - Inserção pode levar a desbalanceamento

Problemas?

- ➔ ABB ou AVL paginadas
- ➔ C-S-D-T-A-M-P-I-B-W-N-G-U-R-K-E-H-O-L-J-Y-Q-Z-F-X-V



Problemas?

- ABB ou AVL paginadas
  - Na inserção de uma chave
    - A subárvore dentro da página pode sofrer rotações para manter o balanceamento, mas não é possível rotacionar as páginas

Problemas?

- ABB ou AVL paginadas
  - Construção top-down, a partir da raiz
    - As chaves iniciais tendem a ficar na raiz
    - No exemplo, C e D não deveriam estar no topo
      - Acabam desbalanceando a árvore

Problemas?

- Como garantir que as chaves na página raiz são boas separadoras
  - Dividem o conjunto de chaves de maneira balanceada?
- Como impedir o agrupamento de chaves que não deveriam estar na mesma página?
  - Ex: C, D e S
- Como garantir que cada página contenha um número mínimo de chaves?

Árvore B

Árvore B

- Generalização de uma ABB paginada
  - Não é binária
  - Conteúdo de uma página não é mantido como árvore
- 1960s: competição entre fabricantes e pesquisadores
  - Descobrir um método eficiente para armazenamento e recuperação em sistemas com grandes arquivos de dados

Árvore B

- 1972: Bayer and McGreight (trabalhando pela Boeing) publicam o artigo Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes
- 1979: árvores-B viram padrão em sistemas de arquivos de propósito geral
- Atualmente: árvores-B são o padrão em SGBDs (Sistemas de Gerenciamento de Banco de Dados)
  - Na verdade, suas variantes, como B*, B+, B-link, etc.

Modern B-Tree Techniques: https://w6113.github.io/files/papers/btreesurvey-graefe.pdf

Modern B-Tree Techniques

“In summary, the core design of B-trees has remained unchanged in 40 years: balanced trees, pages or other units of I/O as nodes, efficient root-to-leaf search, splitting and merging nodes, etc. On the other hand, an enormous amount of research and development has improved every aspect of B-trees including data contents such as multi-dimensional data, access algorithms such as multi-dimensional queries, data organization within each node such as compression and cache optimization, concurrency control such as separation of latching and locking, recovery such as multi-level recovery, etc.”

- Goetz Graefe. 2011. Modern B-Tree Techniques. Found. Trends databases 3, 4 (April 2011), 203–402. DOI:https://doi.org/10.1561/1900000028

Evolution of tree data structures for indexing: more exciting than it sounds

Variantes de B-Tree

B-tree	B^+-tree	B_{link}-tree	DPTree
wB^+-tree	NV Tree	FPTree	FASTFAIR
HiKV	Masstree	Skip List	ART
WORT	CDDS Tree	Bw Tree	HOT
KISS Tree	VAST Tree	FAST	HV Tree
UB Tree	LHAM	MDAM	Hybrid B^+ Tree

Características Gerais

- Método genérico para armazenamento e recuperação de dados
- Propósito principal:
  - Organizar e manter um índice para um arquivo de acesso aleatório altamente dinâmico

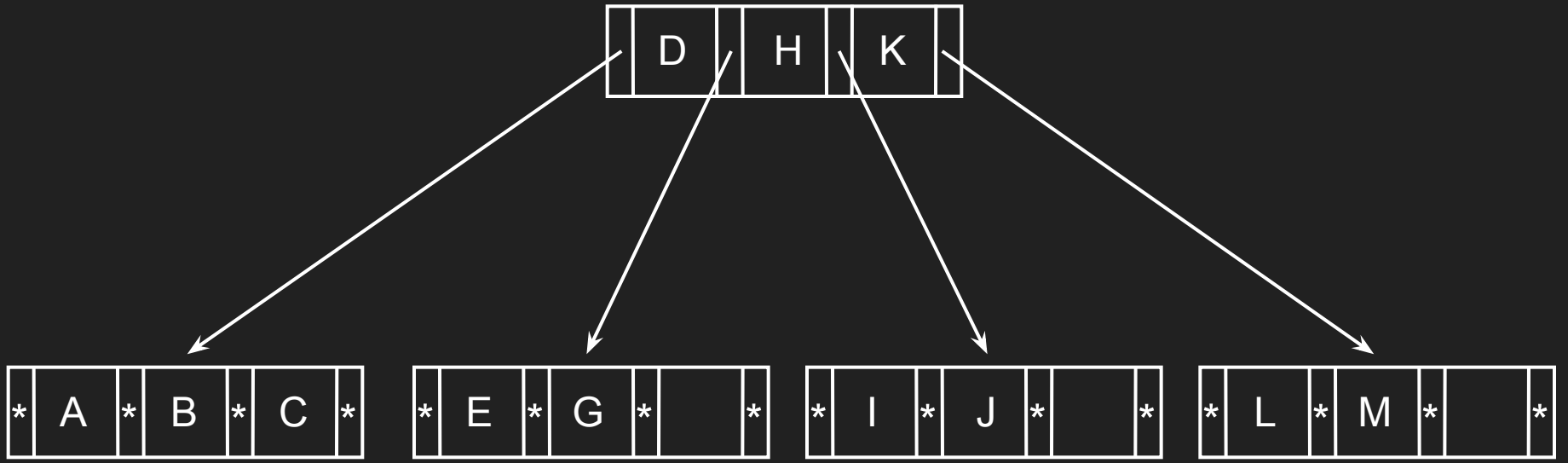
Características Gerais

- Voltada para índices extremamente volumosos
  - Com Pool de buffers pequeno
    - Apenas uma parcela do índice pode ser carregada em memória principal
    - Operações baseadas em disco
- Balanceada
- Paginada
- Construção bottom-up (em disco)
  - Nós folhas --> nó raiz

Construção Bottom-up

- Chaves “indevidas” não são alocadas na raiz
  - Chaves adequadas emergem para a raiz naturalmente
- Elimina os problemas de chaves separadoras inadequadas e de chaves extremas
- Não é necessário tratar o problema de desbalanceamento
  - Balanceamento ocorre naturalmente

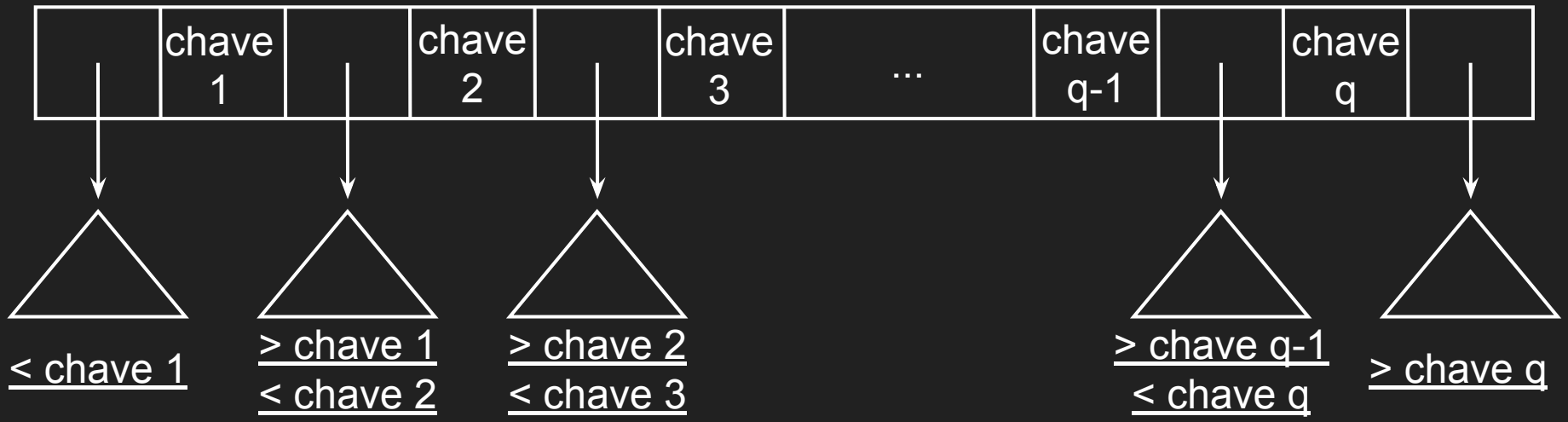
Exemplo



Características - Nó

- Cada nó
  - Página de disco
  - Sequência ordenada de chaves
  - Conjunto de “ponteiros” para subárvores (descendentes)
    - Número de ponteiros = número de chaves + 1

Estrutura Lógica do Nó



Características - Ordem

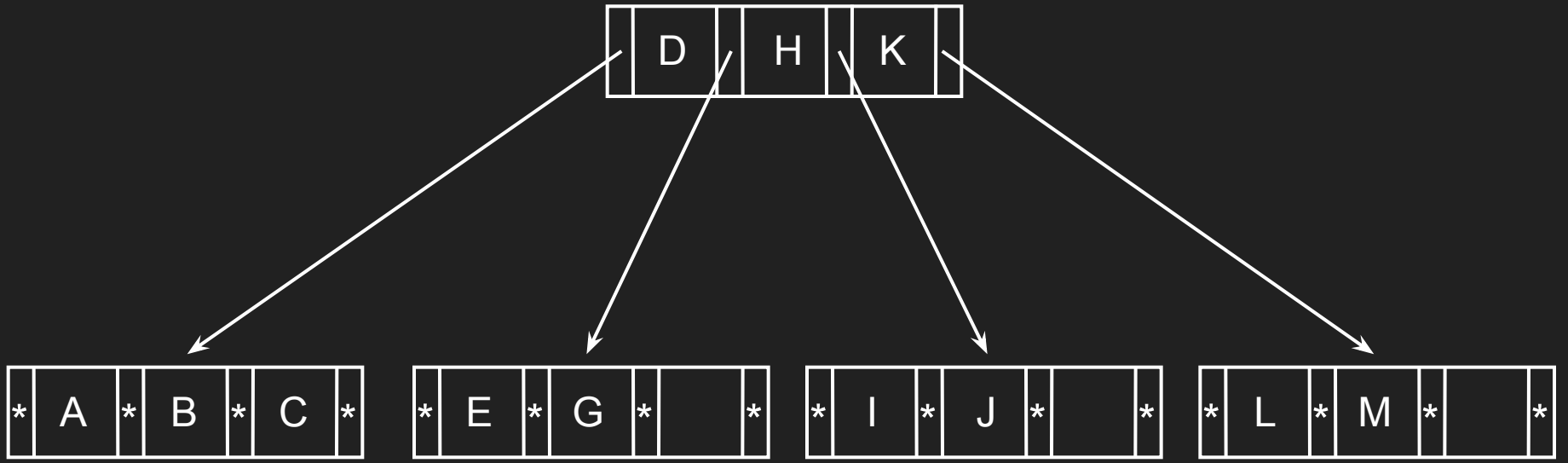
- Ordem
  - Número máximo de ponteiros para descendentes que podem ser armazenados em um nó
- Ex: árvore-B de ordem 8
  - Máximo de 7 chaves e 8 ponteiros

Características - Ordem

- Observações
  - Número máximo de ponteiros é igual ao número máximo de descendentes de um nó
  - Nós folhas não possuem filhos
    - Seus ponteiros são nulos

Exemplo

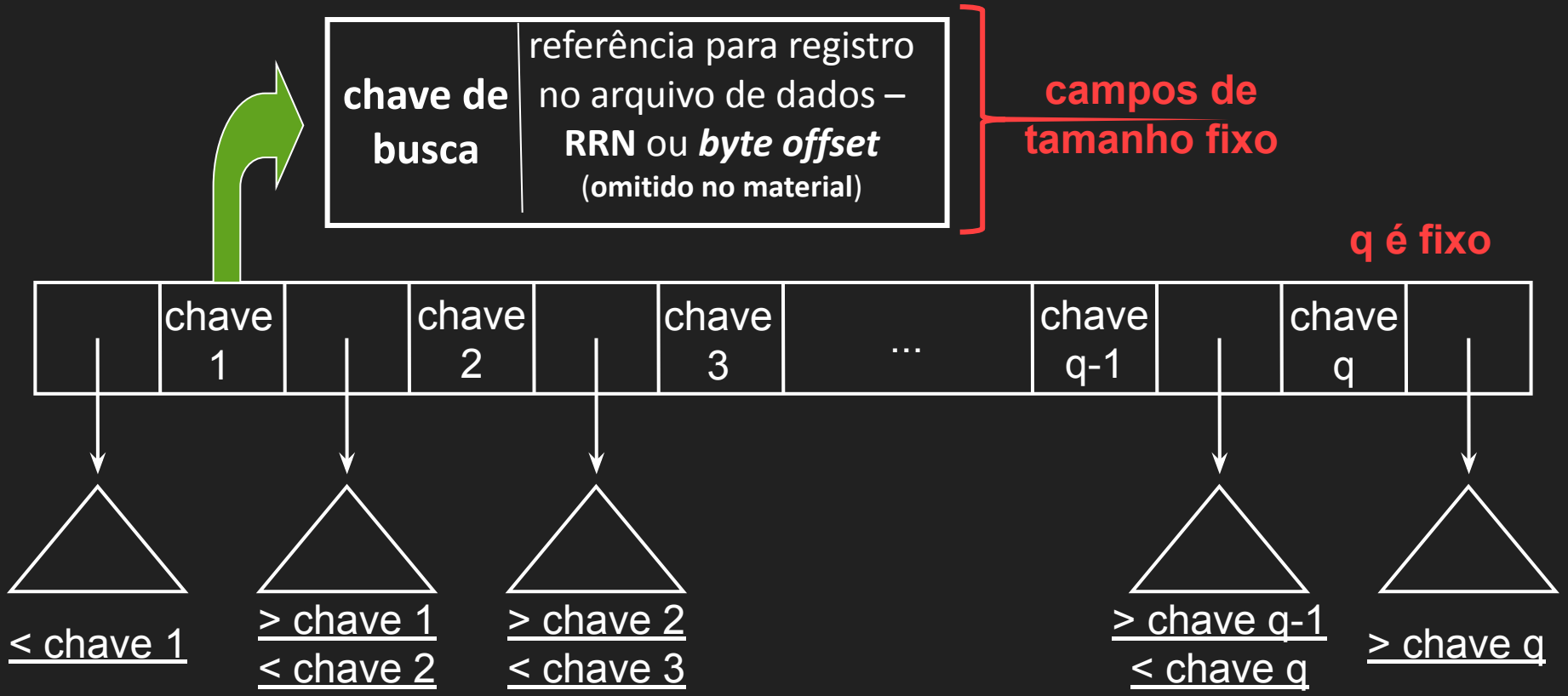
Ordem = 4



Estrutura Lógica do Nó

- Nó com registro de índice
  - Árvore-B utilizada como estrutura de indexação
  - mais comum... (utilizada nas discussões posteriores)

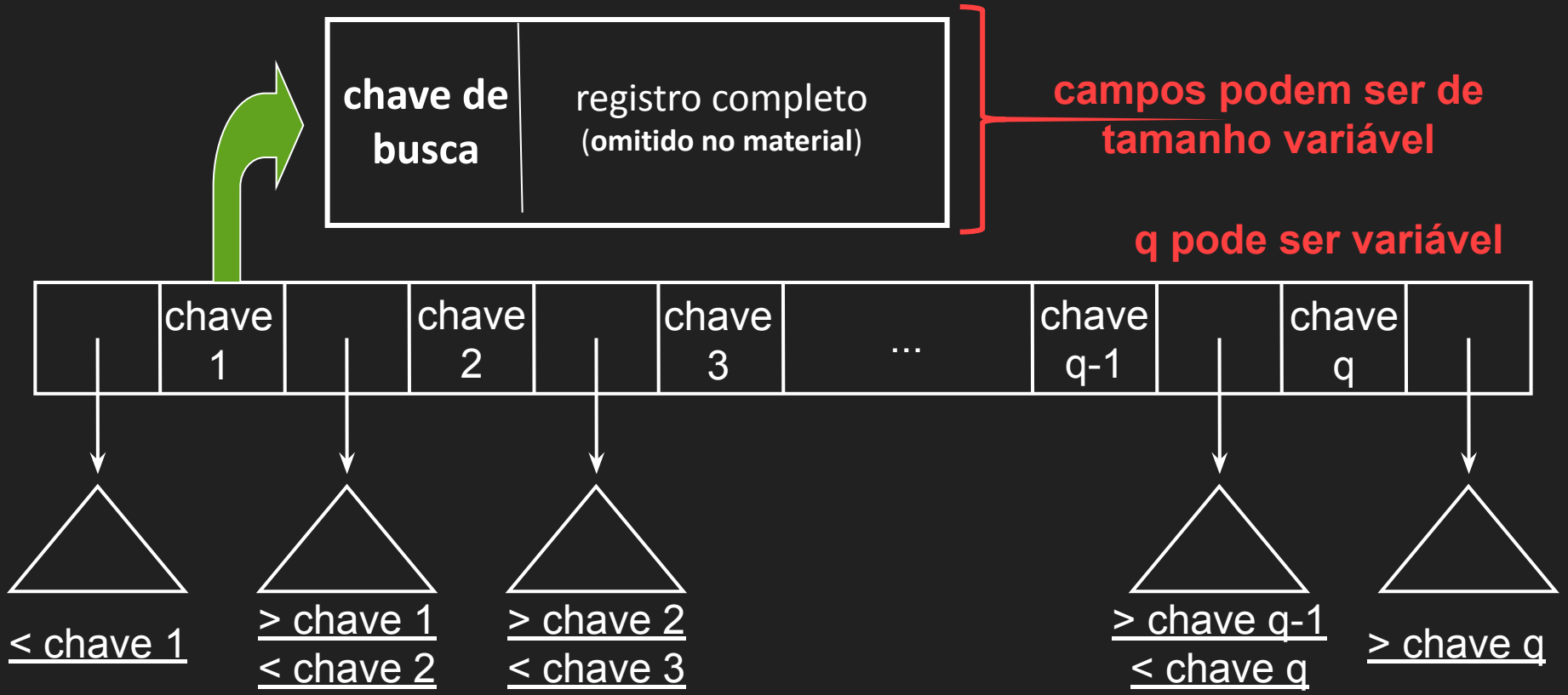
Estrutura do Nó



Estrutura Lógica do Nó

- Nó com registro de dados
  - Árvore-B utilizada como estrutura de organização de registro de dados

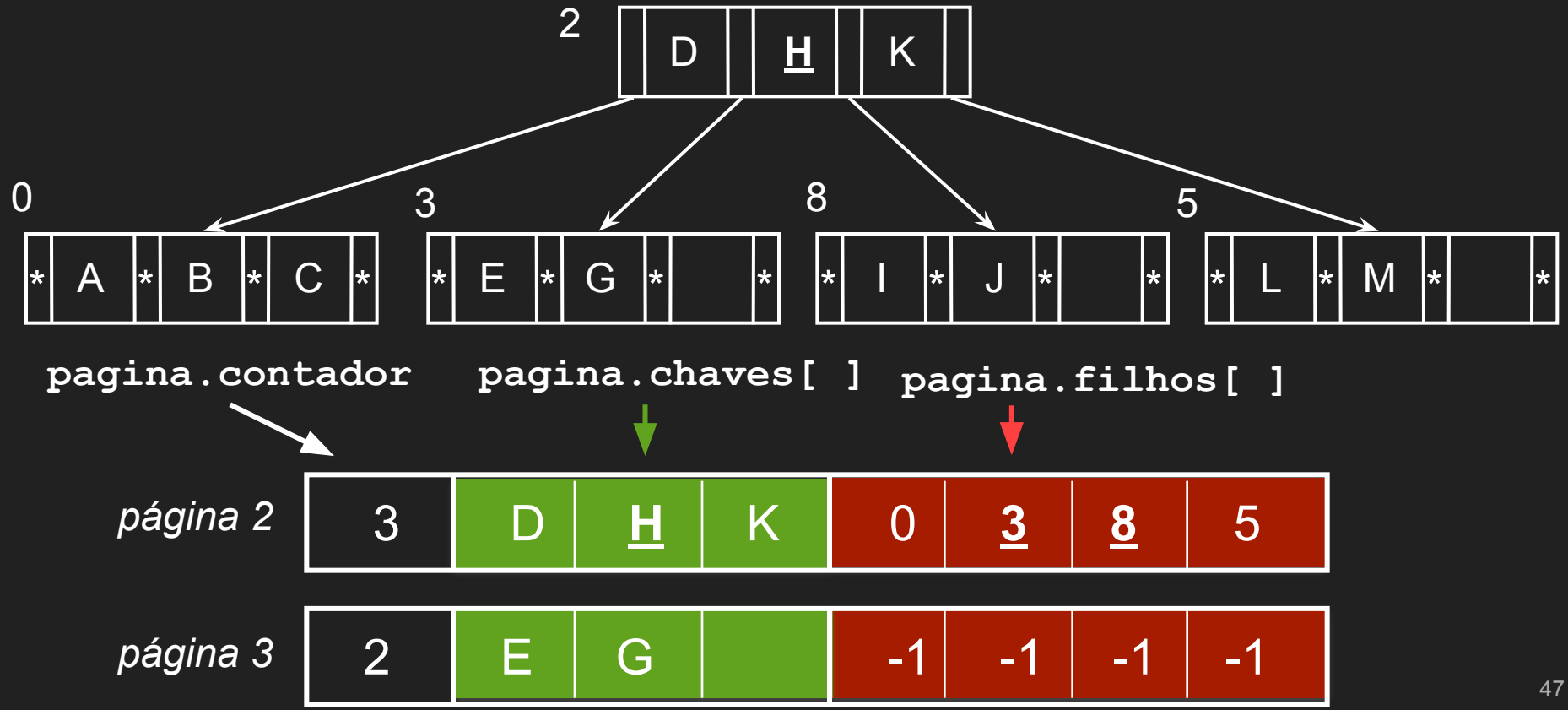
Estrutura do Nó



Exemplo de implementação de nó

```
#define ordem X /* X é calculado considerando o tamanho de página de disco do sistema, o tamanho da chave e dos itens de armazenados no nó */

typedef struct pagina {

    int contador; //nro de chaves armazenadas

    char chaves[ordem-1]; //assumindo chaves char

    int filhos[ordem]; // armazena o RRN dos filhos

    bool folha;

} PAGINA;
```

Exemplo de arquivo na árvore B



Propriedades da Árvore B

- Uma árvore-B é n-ária
  - Possui mais de 2 descendentes por nó (página)

Propriedades da Árvore B

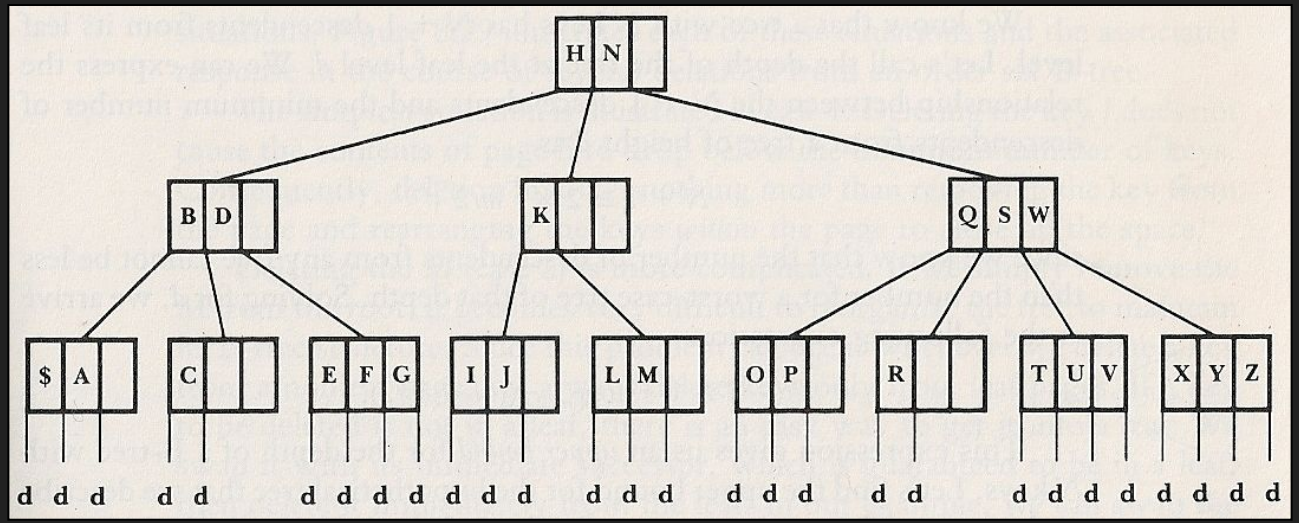
- ➔ Numa árvore-B de ordem m
  - ◆ Cada página tem:
    - No máximo m descendentes e m-1 chaves
    - No mínimo $\lceil m/2 \rceil$ descendentes (exceto raiz e folhas)
      - Taxa de ocupação
    - A raiz tem, no mínimo, 2 descendentes
      - A menos que seja uma folha

Propriedades da Árvore B

- Todas as folhas estão no mesmo nível
- Uma página não folha com k descendentes contém k-1 chaves
  - $\lceil m/2 \rceil \leq k \leq m$
- Uma página folha contém:
  - No mínimo $\lceil m/2 \rceil - 1$ chaves
    - Taxa de ocupação
  - No máximo m-1 chaves

Profundidade da Árvore B

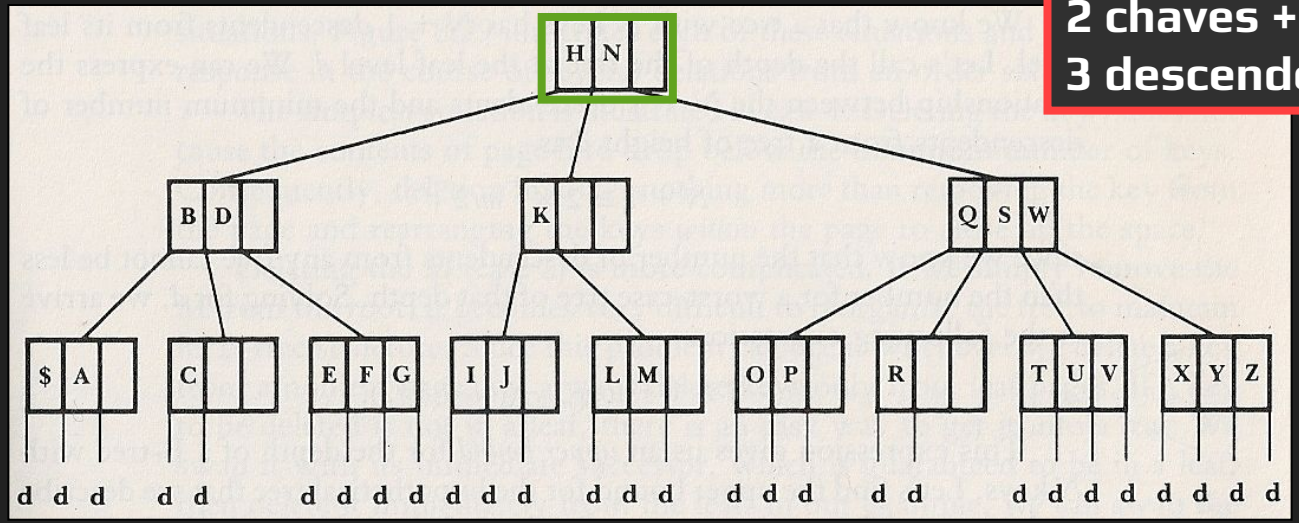
- Número de descendentes possíveis de um nível d da árvore
  - (número de chaves até o nível d) + 1



Profundidade da Árvore B

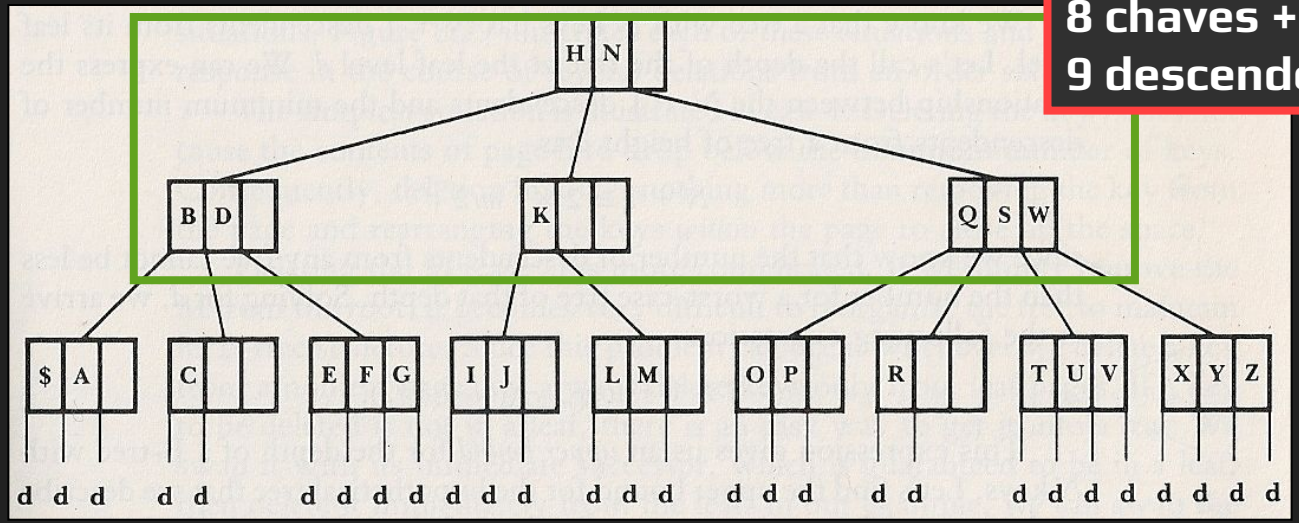
- Número de descendentes possíveis de um nível d da árvore
  - (número de chaves até o nível d) + 1

Nível 1:
2 chaves + 1 =
3 descendentes



Profundidade da Árvore B

- Número de descendentes possíveis de um nível d da árvore
  - (número de chaves até o nível d) + 1

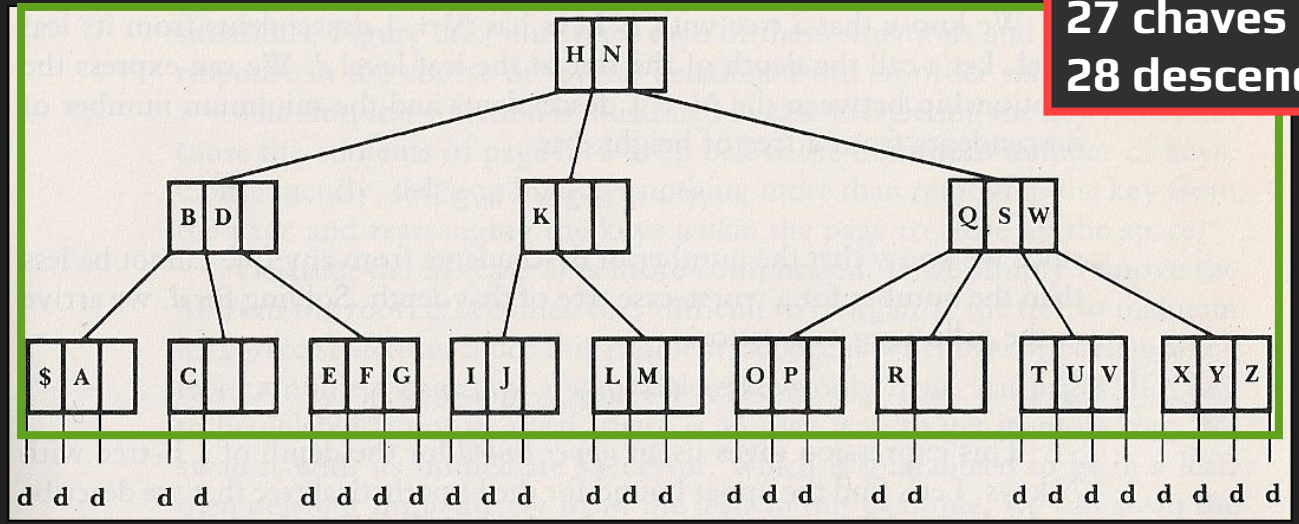


Nível 2:
8 chaves + 1 =
9 descendentes

Profundidade da Árvore B

- ➔ Número de descendentes possíveis de um nível d da árvore
  - (número de chaves até o nível d) + 1

Nível 3:
27 chaves + 1 =
28 descendentes



Profundidade da Árvore B

- ➔ Pior Caso
  - Cada nó terá o mínimo de descendentes
  - Árvore terá sua maior altura e menor largura
  - Ocupação mínima: $\lceil m/2 \rceil$ descendentes (exceto raiz e folhas)

Profundidade da Árvore B

- Para uma árvore de ordem m
  - Raiz (nível 1)
    - 2 descendentes
  - Nível 2
    - 2 nós, tendo cada um $\lceil m/2 \rceil$ descendentes
    - $2 \times \lceil m/2 \rceil$ descendentes para o segundo nível

Profundidade da Árvore B

- Para uma árvore de ordem m
  - Nível 3
    - $2 \times \lceil m/2 \rceil_{nós} \times \lceil m/2 \rceil_{descendentes}$ para cada nó
    - $2 \times \lceil m/2 \rceil^2$ descendentes
  - O nível d terá ?
    - $2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1}$ descendentes

Profundidade da Árvore B

- Número mínimo de descendentes para um nível d da árvore:

$$2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1}$$

- Propriedade
  - Número de descendentes de um nível d da árvore com N chaves até d:

$$N+1$$

Profundidade da Árvore B

- Considerando...
  - d = nível das folhas
  - m = ordem da árvore
  - N = número de chaves até o nível das folhas (N é o total de chaves armazenadas)
- Calcula-se o limite superior da profundidade da árvore:

$$(N + 1) \geq 2 \times \lceil m/2 \rceil^{d-1} \Rightarrow d \leq 1 + \log_{\lceil m/2 \rceil}((N+1)/2)$$

$$d \leq 1 + \log_{\lceil m/2 \rceil}((N+1)/2)$$

Número máximo de acessos a disco para encontrar qualquer chave!

Próximas Aulas...

- Principais operações
  - Inserção de chaves
  - Remoção de chaves
  - Pesquisa (Busca)
- Principais variações
  - Árvore-B*
  - Árvore-B+

Exemplo

Referências

➔ M. J. Folk and B. Zoellick, File Structures: A Conceptual Toolkit, Addison Wesley, 1987.