

# Introdução a AVL

Prof.: Leonardo Tórtoro Pereira  
[leonardop@usp.br](mailto:leonardop@usp.br)

Baseado nos slides do Prof. Rudinei Goularte

# Conteúdo

- Conceitos Introdutórios
- Rotação Direita
- Rotação Esquerda
- Rotações Simples
- Rotações Duplas
- Qual Rotação Usar
- Implementação
- Inserção em Árvores AVL
- Remoção em Árvores AVL

# Árvores Binárias de Busca

- Altura de uma árvore binária (AB): igual à profundidade, ou nível máximo, de suas folhas
- A eficiência da busca em árvore depende do seu balanceamento
- Algoritmos de inserção e remoção em ABB não garantem que a árvore gerada a cada passo seja balanceada
- Árvore balanceada é aquela que ...

# Árvores AVL

- Proposta em 1962 pelos matemáticos russos G.M. Adelson-Velskii e E.M. Landis
- ABB na qual as alturas das duas sub-árvores de todo nó nunca diferem em mais de 1

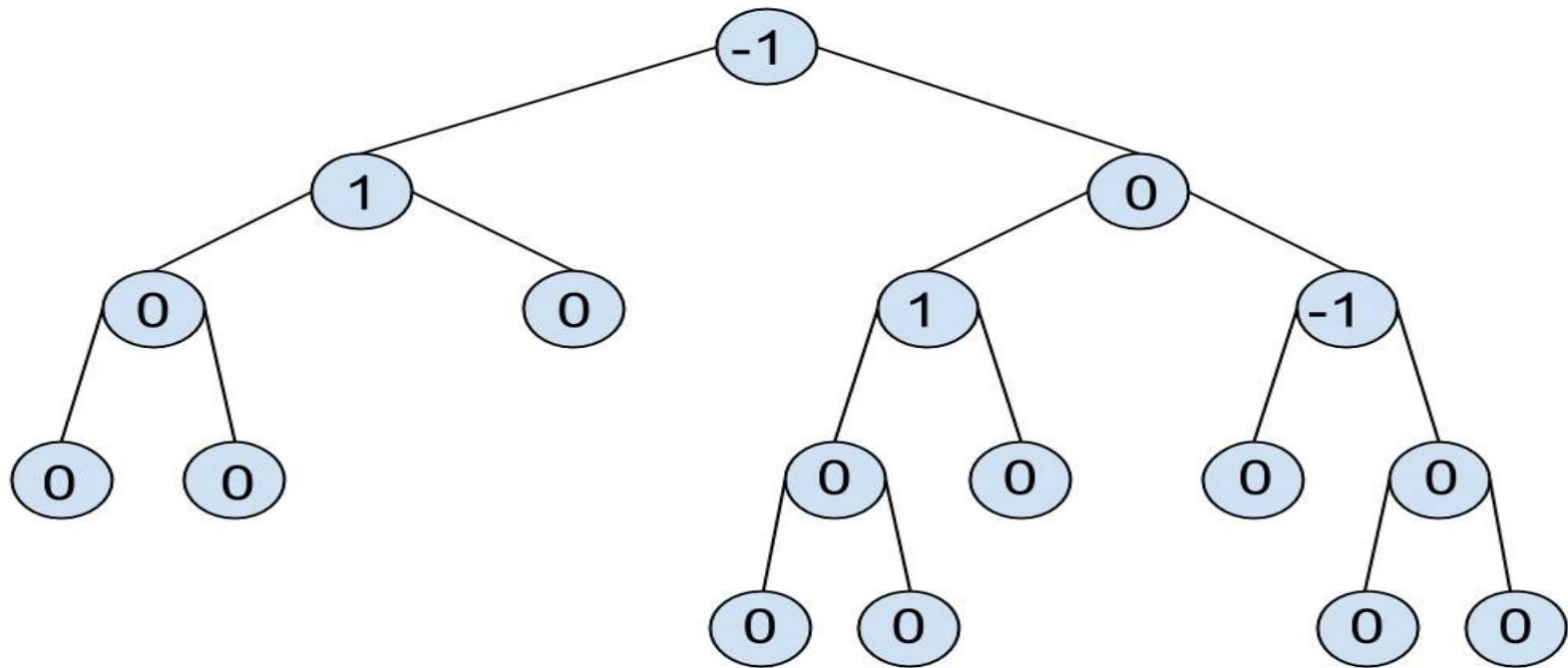
# Árvores AVL

- Fator de Balanceamento do nó: Altura da sub-árvore esquerda menos a altura da sub-árvore direita

$\text{BalanceFactor}(\text{node}) := \text{Height}(\text{RightSubtree}(\text{node})) - \text{Height}(\text{LeftSubtree}(\text{node}))$

- Em uma árvore AVL todo nó tem fator de balanceamento igual a 1, -1 ou 0

# Árvores AVL

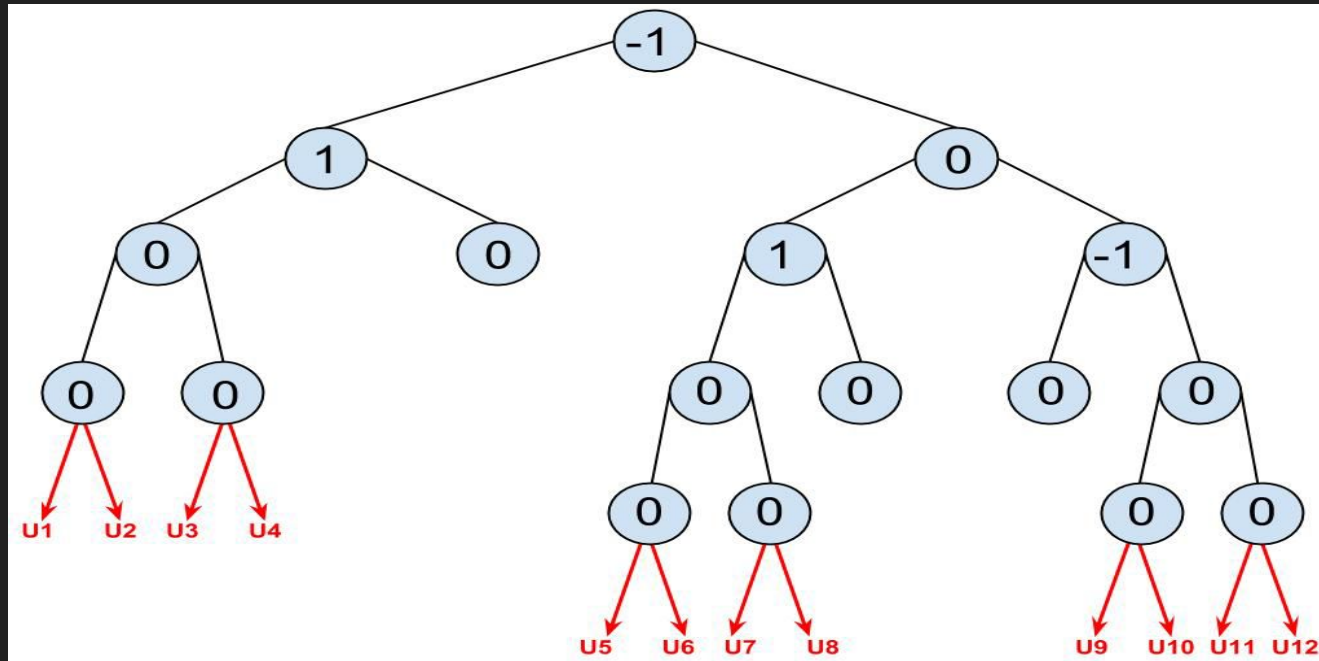


# Árvores AVL

- O problema das árvores balanceadas de uma forma geral é como manter a estrutura balanceada após operações de inserção e remoção
- As operações de inserção e remoção sobre ABBs não garantem o balanceamento

# Árvores AVL

→ As seguintes inserções tornam a árvore desbalanceada





# Árvores AVL

- As seguintes situações podem levar ao desbalaceamento de uma árvore AVL
- O nó inserido é descendente esquerdo de um nó que tinha  $FB = 1$  (U1 a U8)
- O nó inserido é descendente direito de um nó que tinha  $FB = -1$  (U9 a U12)

# Árvores AVL

- Para manter uma árvore balanceada é necessário aplicar uma transformação na árvore tal que
  1. O percurso em-ordem na árvore transformada seja igual ao da árvore original (isto é, a árvore transformada continua sendo uma ABB)
  2. A árvore transformada fique balanceada

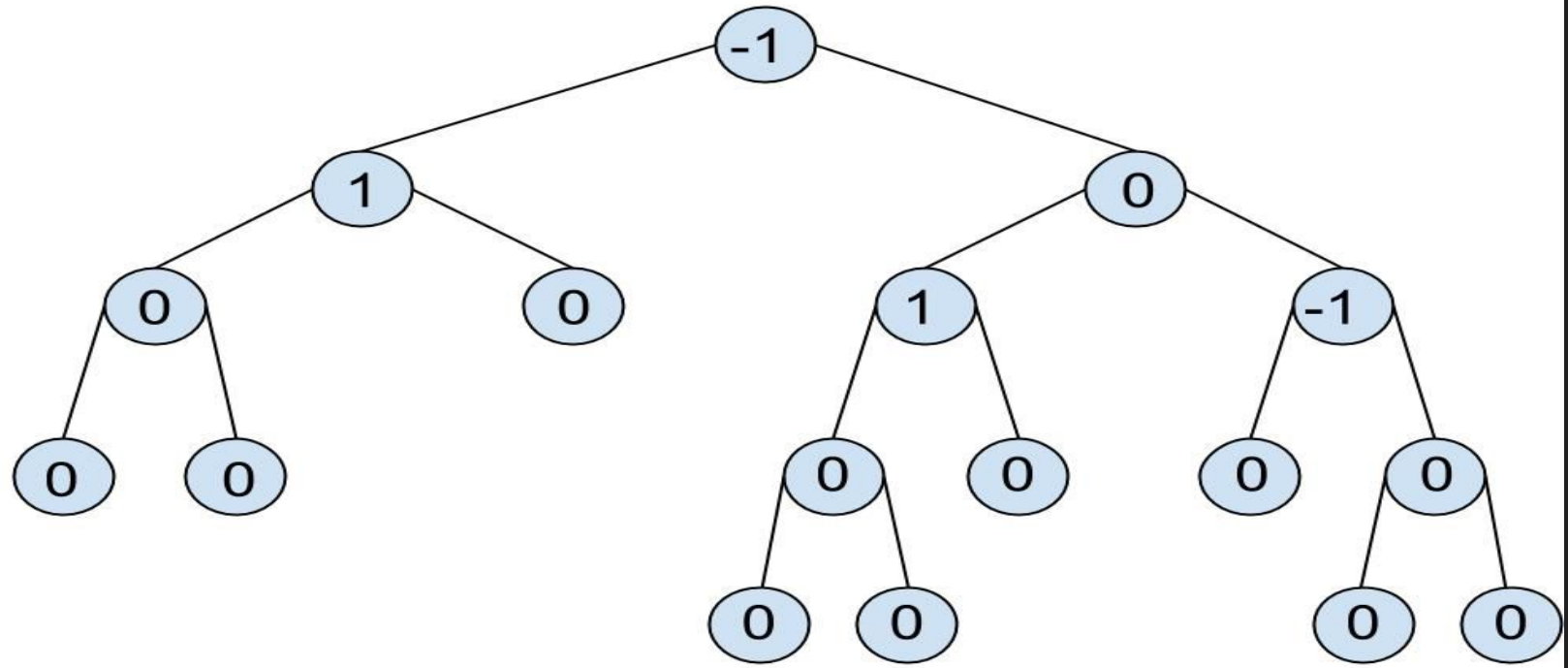
# Árvores AVL

- A transformação que mantém a árvore balanceada é chamada de rotação
- A rotação pode ser feita à esquerda ou à direita, dependendo do desbalanceamento a ser tratado
- A rotação deve ser realizada de maneira a respeitar as regras 1 e 2 definidas no slide anterior
- Dependendo do desbalanceamento a ser tratado, uma única rotação pode não ser suficiente

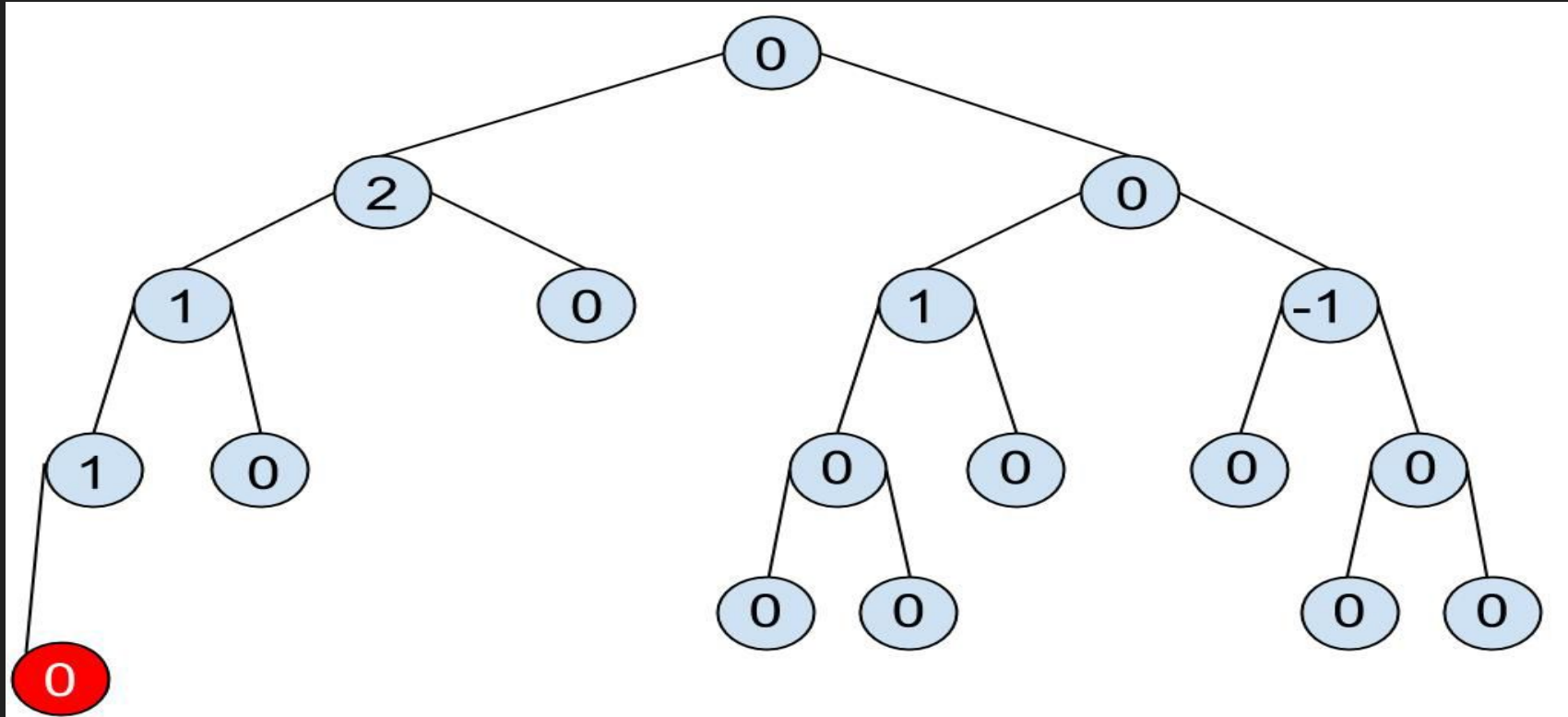
# Visualização de uma AVL

# Árvore AVL - Rotação Direita

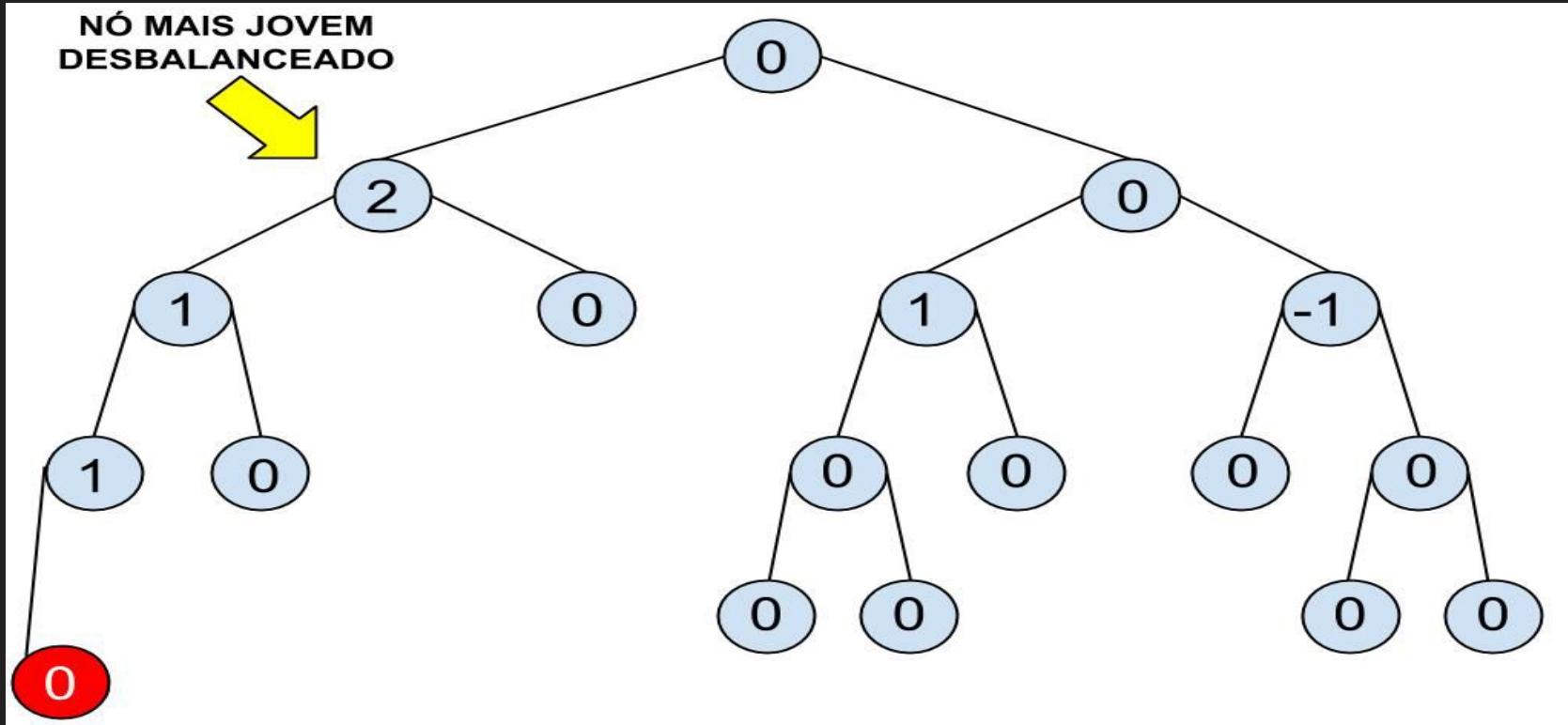
# Árvores AVL - Rotação Direita



# Árvores AVL - Rotação Direita



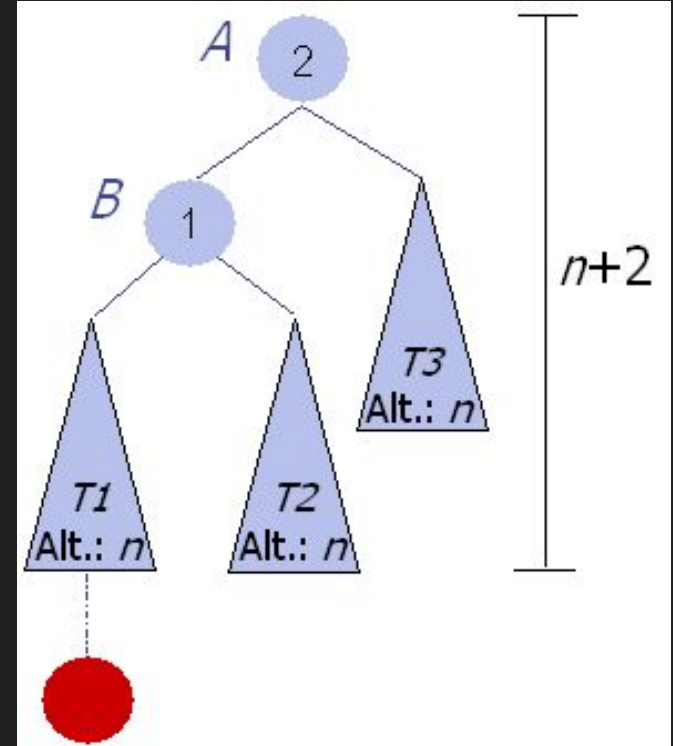
# Árvores AVL - Rotação Direita





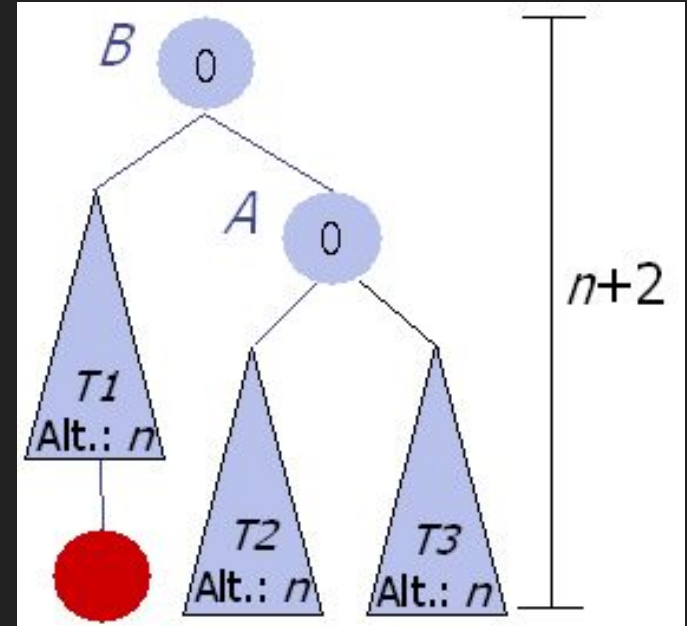
# Árvores AVL - Rotação Direita

- A rotação direita tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2 e T3 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado

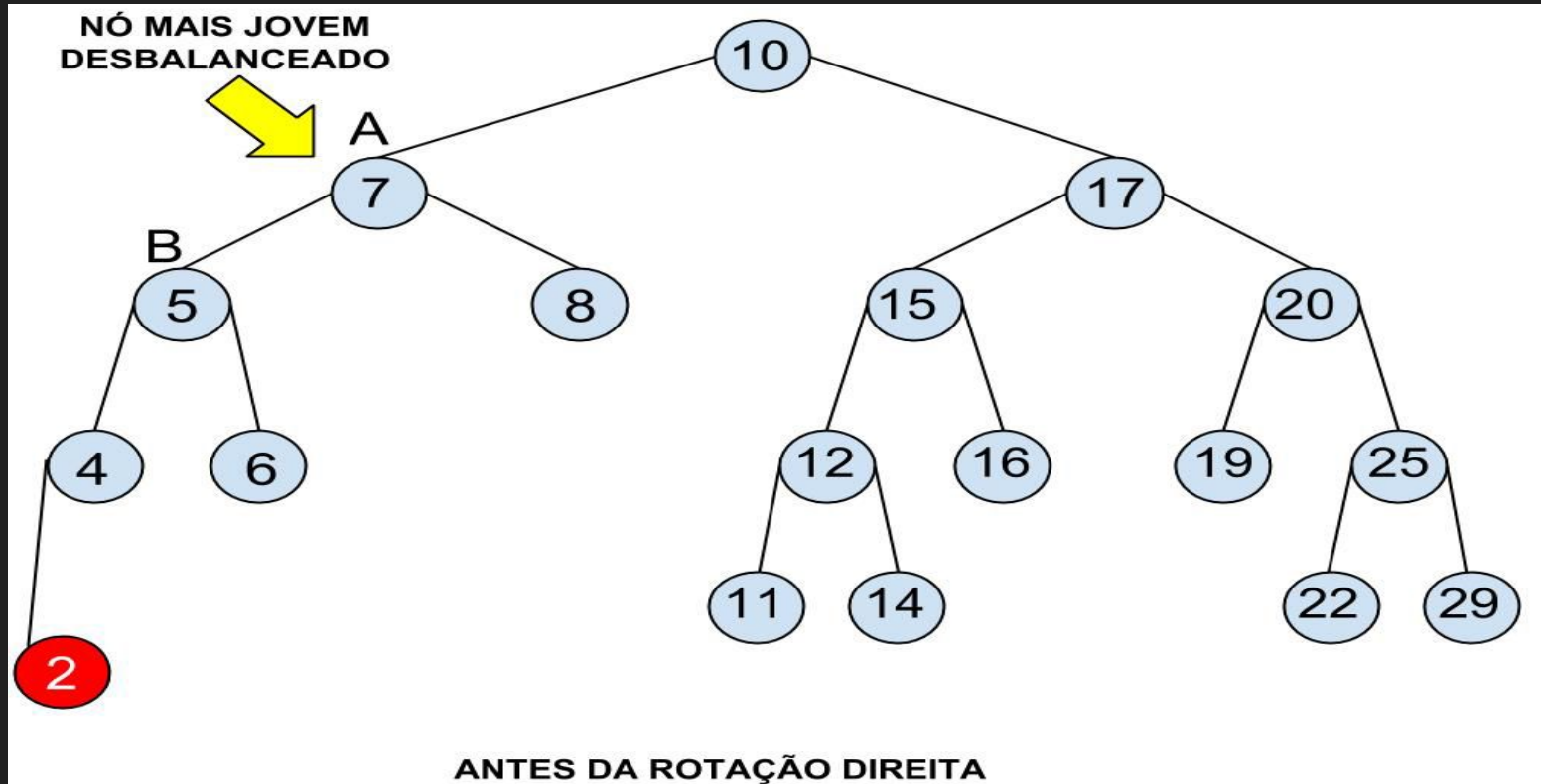


# Árvores AVL - Rotação Direita

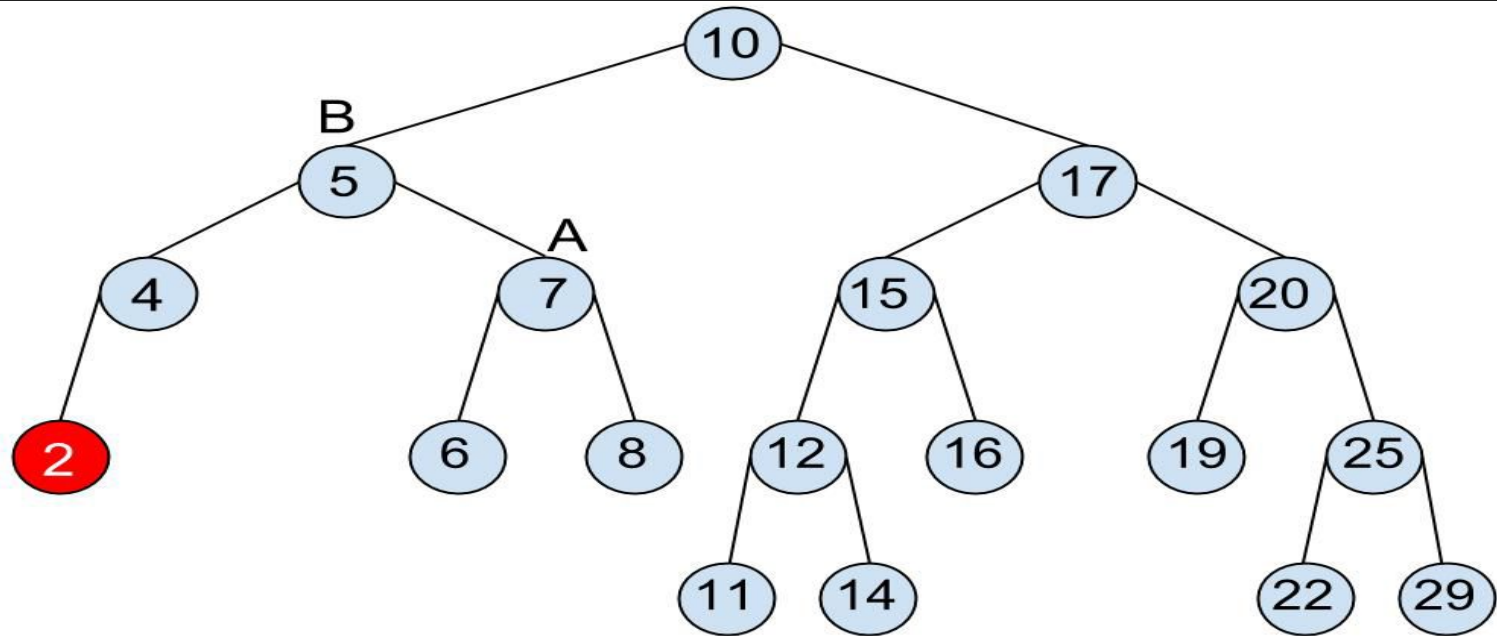
- A rotação direita tem formato geral ilustrado à direita
- $T1$ ,  $T2$  e  $T3$  podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- $A$  é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado



# Árvores AVL - Rotação Direita



# Árvores AVL - Rotação Direita



APÓS A ROTAÇÃO DIREITA

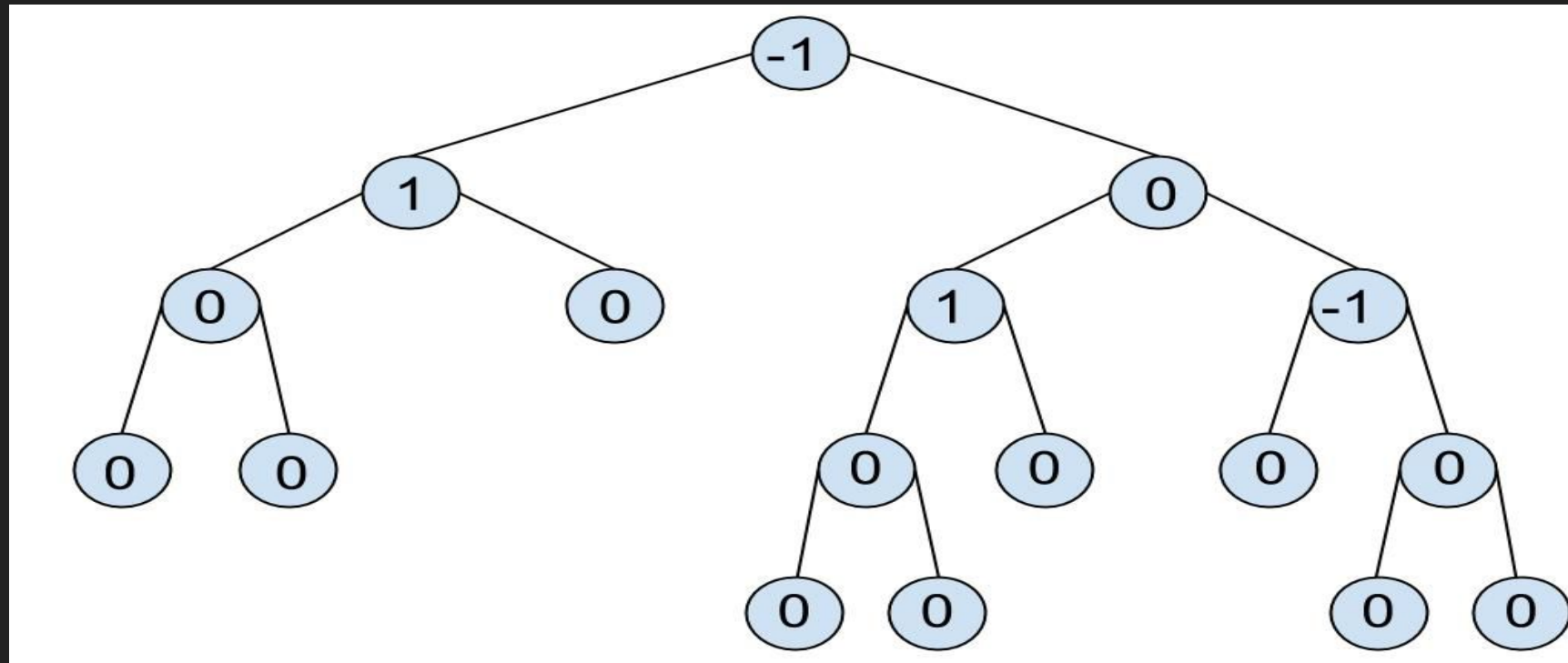
# Árvores AVL - Rotação Direita

## → Exercício

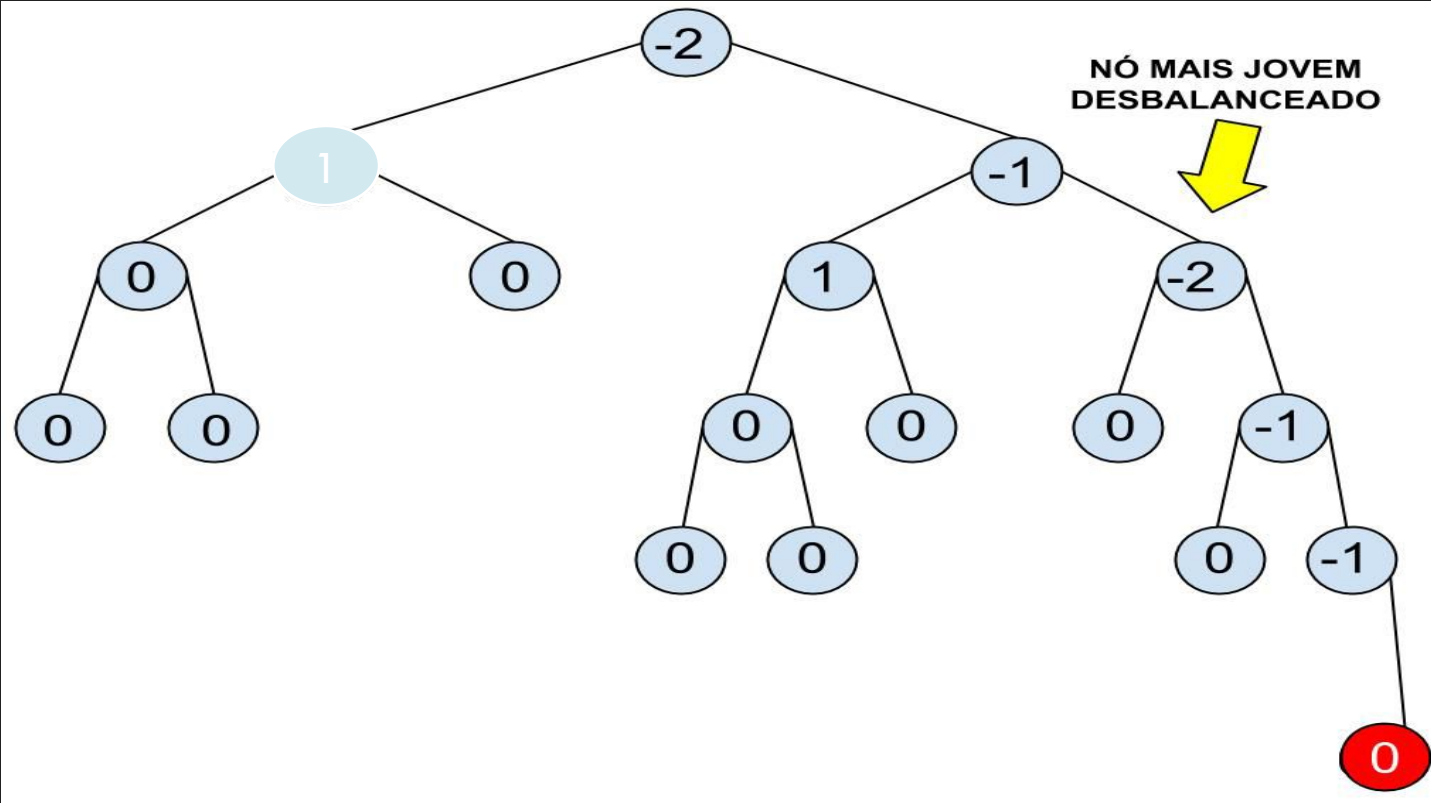
- ◆ Insira em uma árvore AVL a seqüência de valores: 5, 4, 3, 2, 1. Na ordem que os valores foram listados

# Árvore AVL - Rotação Esquerda

# Árvores AVL - Rotação Esquerda



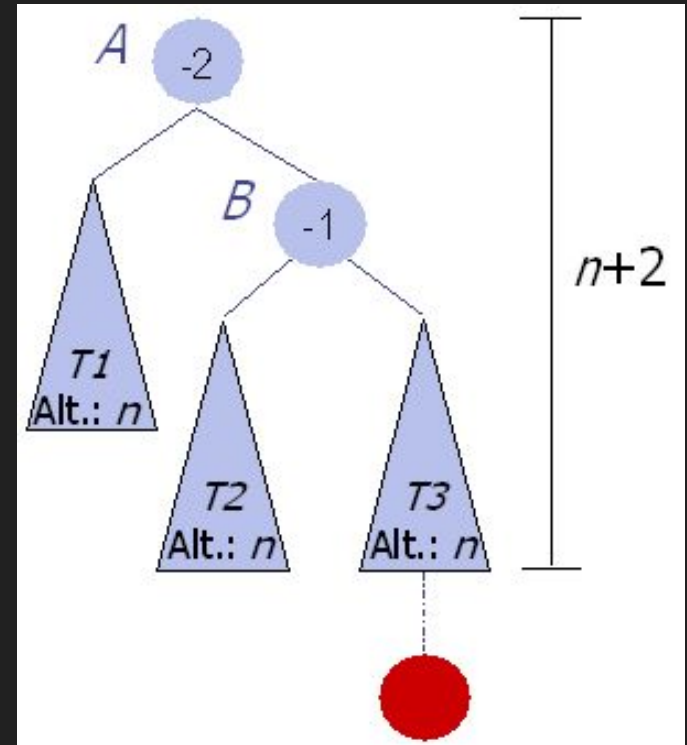
# Árvores AVL - Rotação Esquerda





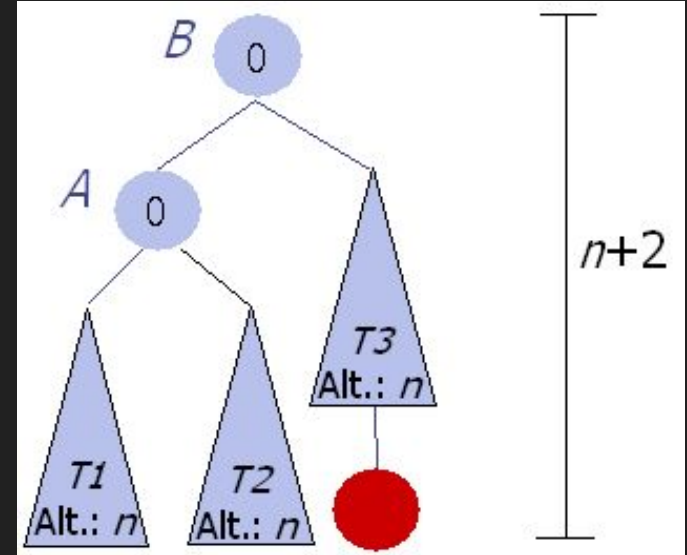
# Árvores AVL - Rotação Direita

- A rotação esquerda tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2 e T3 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado

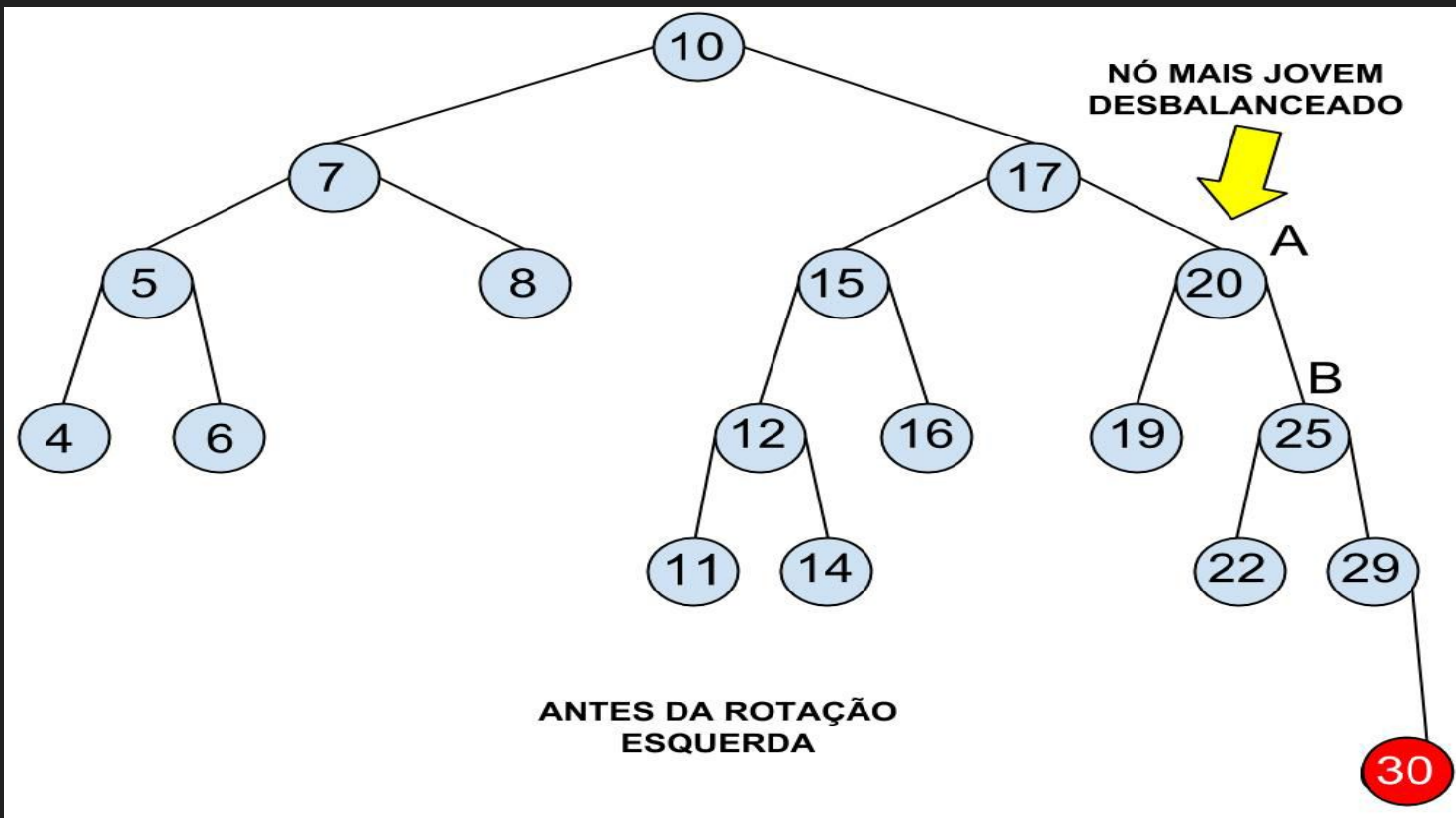


# Árvores AVL - Rotação Direita

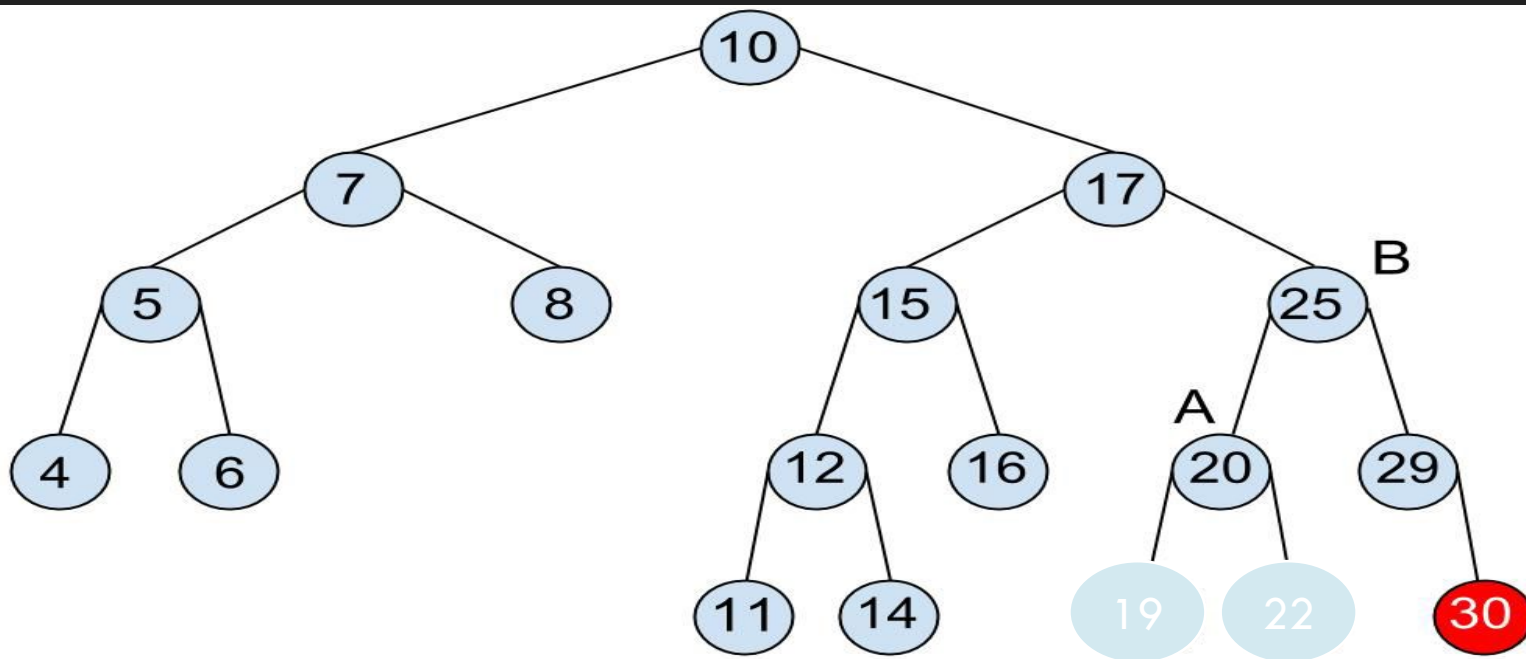
- A rotação esquerda tem formato geral ilustrado à direita
- T1, T2 e T3 podem ser sub-árvores de qualquer tamanho, inclusive 0
- A é o nó mais jovem a se tornar desbalanceado



# Árvores AVL - Rotação Esquerda



# Árvores AVL - Rotação Esquerda



APÓS A ROTAÇÃO ESQUERDA

# Árvores AVL - Rotação Esquerda

→ Exercício

- ◆ Insira em uma árvore AVL a seqüência de valores: 1, 2, 3, 4, 5. Na ordem que os valores foram listados

## Referências

- Material baseado no originais produzidos pelo professor Rudinei Gularte
- SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos, Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- TENEMBAUM, A.M., e outros Data Structures Using C, Prentice-Hall, 1990.
- ZIVIANI, N. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.
- <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html>