# Árvores Binárias

Prof.: Leonardo Tórtoro Pereira
leonardop@usp.br

Baseado nos slides do Prof. Rudinei Goularte

# Conteúdo

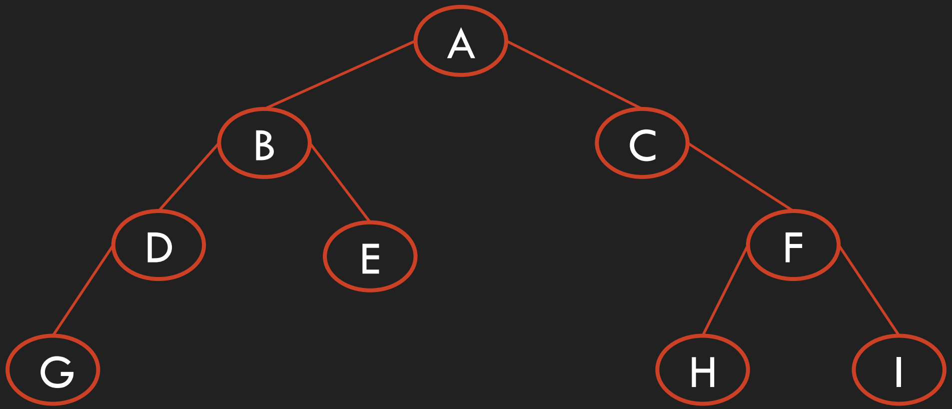
- Conceitos Básicos
- Implementação
- Percurso em Árvore Binária
- Outras Operações sobre Árvores Binárias

# Árvore Binária

- ➔ Uma Árvore Binária (AB) $T$ é um conjunto finito de elementos, denominados nós ou vértices, tal que
  1. Se $T = \emptyset$, a árvore é dita vazia, ou
  2. T contém um nó especial *r*, chamado raiz de $T$, e os demais nós podem ser subdivididos em dois sub-conjuntos distintos $T_E$ e $T_D$, os quais também são árvores binárias (possivelmente vazias)
  - $T_E$ e $T_D$ são denominados sub-árvore esquerda e sub-árvore direita de $T$, respectivamente

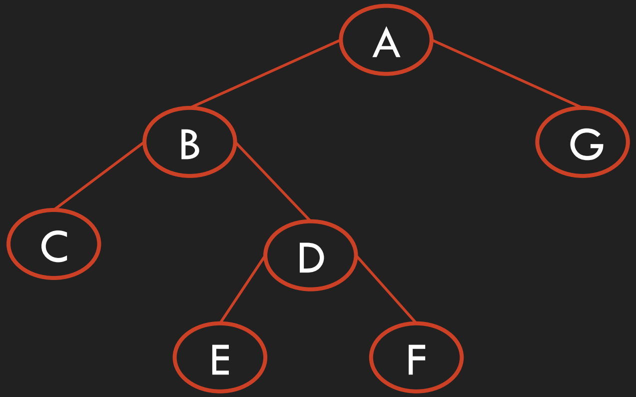
# Árvore Binária

- A raiz da sub-árvore esquerda (direita) de um nó *v*, se existir, é denominada filho esquerdo (direito) de *v*
  - Pela natureza da árvore binária, o filho esquerdo pode existir sem o direito, e vice-versa



# Árvore Estritamente Binária

- Uma Árvore Estritamente Binária (ou Árvore Própria) tem nós com 0 (nenhum) ou 2 (dois) filhos
- Nós interiores (não folhas) sempre têm 2 filhos



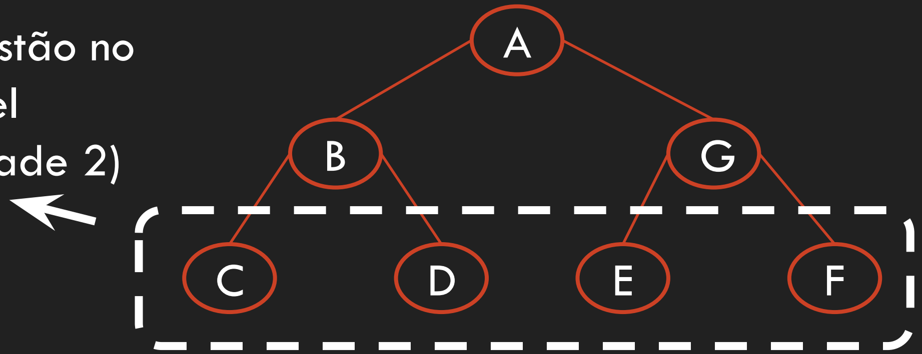
# Árvore Binária Completa

- Árvore Binária Completa (ABC)
  - Se a **profundidade da árvore** é *d*, então cada nó folha está no nível *d* - 1 ou no nível *d*
  - O nível *d* - 1 está totalmente preenchido
  - Os nós folha no nível *d* estão todos mais à esquerda possível

# Árvore Binária Completa Cheia

➔ Árvore Binária Completa Cheia (ABCC)
- É uma Árvore Estritamente Binária
- Todos os seus nós-folha estão no mesmo nível

C, D, E, F estão no mesmo nível (profundidade 2)



# Árvore Binária Completa Cheia

- Qual é o número total de nós de uma ABCC de profundidade $d$?

# Árvore Binária Completa Cheia

- Dada uma ABCC e sua profundidade *d*, pode-se calcular o número total de nós na árvore
  - $d = 0$: 1 nó (total 1 nó)
  - $d = 1$ : 2 nós (total 3 nós)
  - $d = 2$ : 4 nós (total 7 nós)
  - ...
  - Profundidade $d$ : $2^d$ nós (total $2^{d+1} - 1$ nós)

# Árvore Binária Completa Cheia

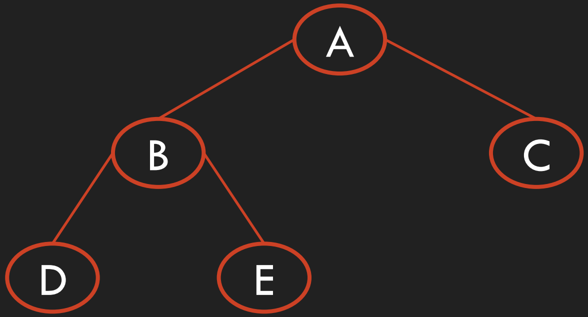
- Portanto, se o número de nós, n, para uma árvore binária completa cheia de profundidade d é
  - $n = 2^{d+1} - 1$
- Então, *n* nós podem ser distribuídos em uma árvore binária completa cheia de profundidade ...

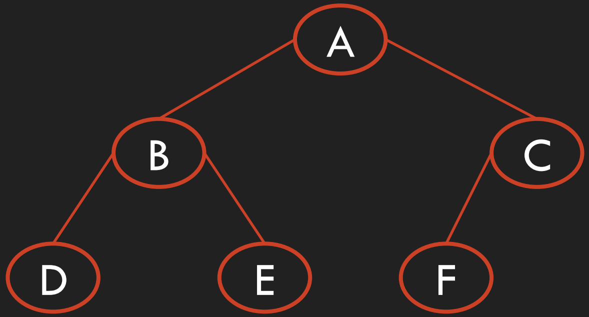
# Árvore Binária Completa Cheia

- Portanto, o número de nós, n, para uma árvore binária completa cheia de profundidade d é
  - $n = 2^{d+1} - 1$
- Então *n* nós podem ser distribuídos em uma árvore binária completa cheia de profundidade:
  - $n = 2^{d+1} - 1$
  - $\log_2(n + 1) = \log_2(2^{d+1})$
  - $d = \log_2(n + 1) - 1$

# Árvore Binária Balanceada

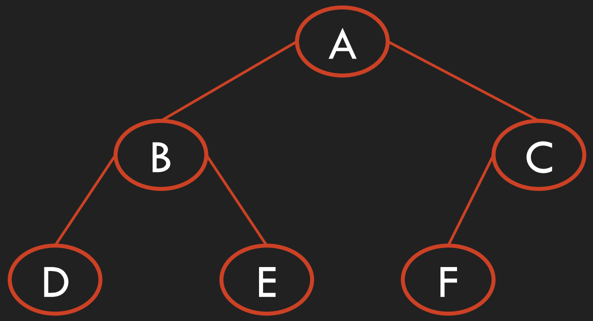
- Árvore Binária Balanceada
  - Para cada nó, as alturas de suas duas sub-árvores diferem de, no máximo, 1



# Árvore Binária Perfeitamente Balanceada

- Árvore Binária Perfeitamente Balanceada
  - Para cada nó, o número de nós de suas sub-árvores esquerda e direita difere em, no máximo, 1
  - Toda Árvore Binária Perfeitamente Balanceada é Balanceada, mas o inverso não é necessariamente verdade

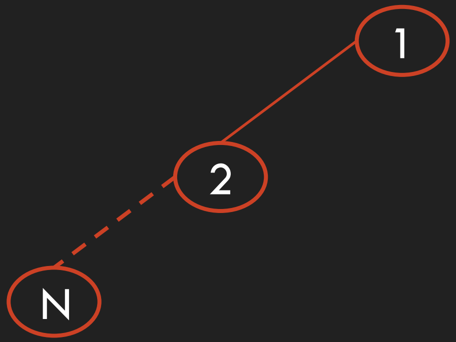


# Questões

➔ Qual a altura máxima de uma AB com *n* nós?

# Questões

- Qual a altura máxima de uma AB com $n$ nós?
  - Resposta: $n - 1$
  - Árvore degenerada ≡ Lista

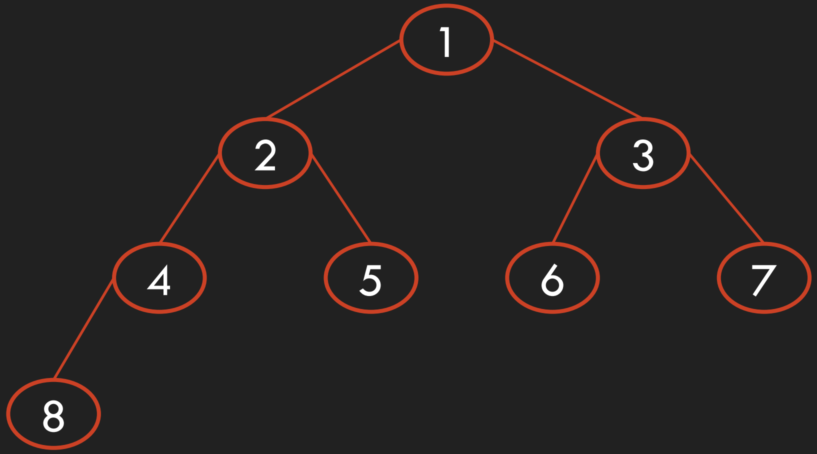


# Questões

- Qual a altura mínima de uma AB com *n* nós?

# Questões

- Qual a altura mínima de uma AB com *n* nós?
  - Resposta: a mesma de uma AB Perfeitamente Balanceada com *n* nós

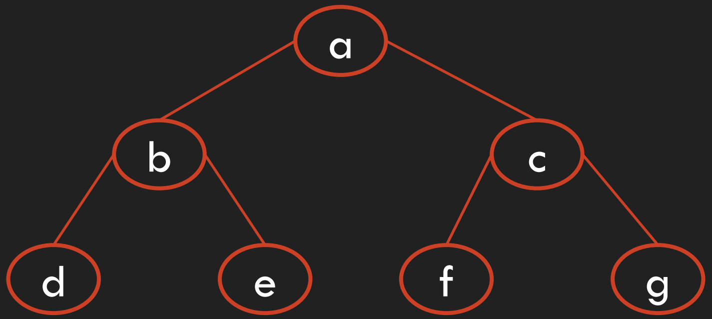



| | |
|---|---|
| N = 1 | H = 0 |
| N = 2, 3 | H = 1 |
| N = 4 ... 7 | H = 2 |
| N = 8 ... 15 | H = 3 |

$$H_{\min} = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

# Implementação de ABCC (alocação sequencial)

➔ Armazenar os nós, por nível, em um array




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | e | f | g | | ... |

# Implementação de ABC (alocação sequencial)

- Para um vetor indexado a partir da posição 0, se um nó está na posição i, seus filhos diretos estão nas posições
  - $2_i + 1$ : filho da esquerda
  - $2_i + 2$ : filho da direita
- Vantagem: espaço só p/ armazenar conteúdo; ligações implícitas
- Desvantagem: espaços vagos se árvore não é completa por níveis, ou se sofrer eliminação

# Implementação de AB (dinâmica)

➔ Para qualquer árvore, cada nó é do tipo

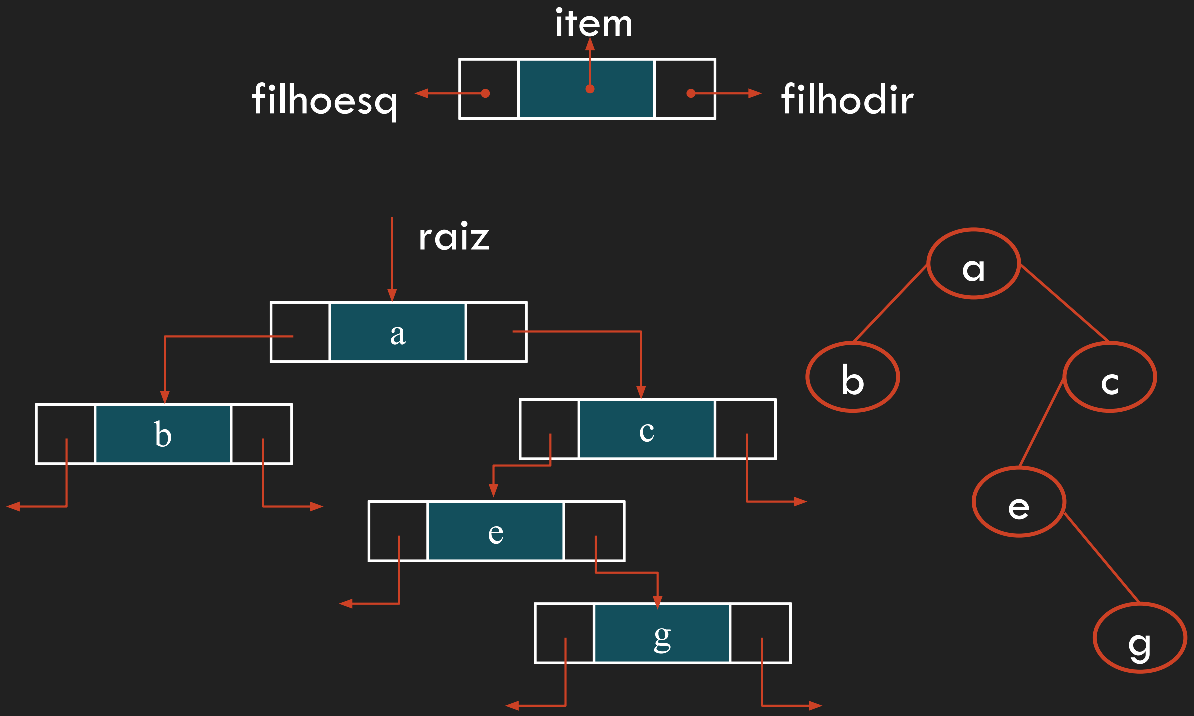
```
//.h
#include “item.h”
typedef struct arv_bin AB;
```

```
//main.c
ARV *T;
T= arv_criar();
```

```
//.c
typedef struct No NO;
struct No {
   ITEM *item;
   NO *esq;
   NO *dir;
};
struct arv_bin {
   NO *raiz;
   int profundidade;
   ...
};
```

# Implementação de AB (dinâmica)

- Para qualquer árvore, cada nó é do tipo



# Operações do TAD AB I

- Criar árvore
  - Pré-condição: nenhuma
  - Pós-condição: inicia a estrutura de dados

# Operações do TAD AB II

- Inserir um nó filho
  - Pré-condição: nó pai não nulo.
  - Pós-condição: dado um nó pai, cria seu nó filho e o insere à direita ou esquerda do pai. Retorna VERDADEIRO se o pode ser criado, FALSO caso contrário.

# Operações do TAD AB (Criar)

```
AB *ab_criar(void) {
    AB *r = (AB *) malloc(sizeof(AB));
    if (r != NULL) {
        r->raiz = NULL;
        r->profundidade = -1;
    }
    return (r);
}
```

# AB - Percursos

- Percorrer uma AB “visitando” cada nó uma única vez
  - “Visitar” um nó pode ser
    - Mostrar o seu valor
    - Modificar o valor do nó…
- Um percurso gera uma sequência linear de nós, e podemos então falar de nó predecessor ou sucessor, segundo um dado percurso
- Não existe um percurso único para árvores (binárias ou não): diferentes percursos podem ser realizados, dependendo da aplicação

# AB - Percursos em Árvores

- 3 percursos básicos para AB's:
  - pré-ordem (Pre-order)
    - visita a raiz
    - percorre a subárvore a esquerda em pré-ordem
    - percorre a subárvore a direita em pré-ordem

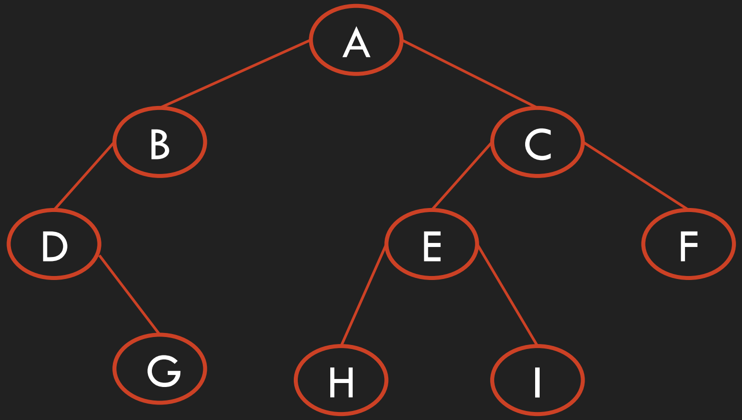
# AB - Percursos em Árvores

- ➔ 3 percursos básicos para AB's:
  - ◆ em-ordem (In-order)
    - percorre e subárvore a esquerda em-ordem
    - visita a raiz
    - percorre a subárvore a direita em-ordem

# AB - Percursos em Árvores

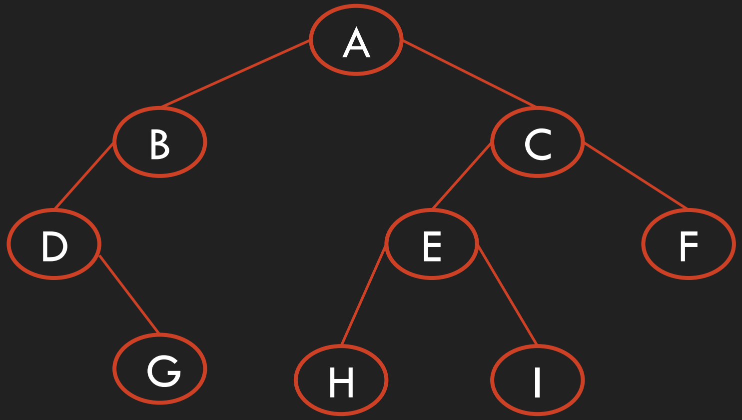
- 3 percursos básicos para AB's:
  - pós-ordem (Post-order)
    - percorre e subárvore a esquerda em pós-ordem
    - percorre a subárvore a direita em pós-ordem
    - visita a raiz
- A diferença entre eles está, basicamente, na ordem em que os nós são "visitados"

# AB - Percurso Pré-Ordem



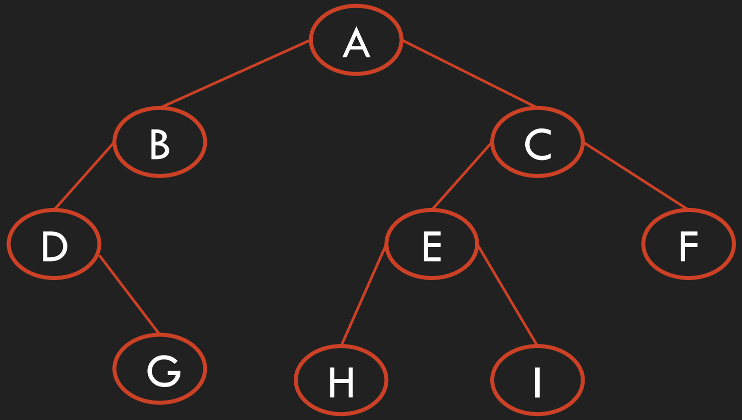
# AB - Percurso Pré-Ordem

```
void ab_preordem(NO *raiz) {
  if (raiz != NULL) {
    item_imprimir(raiz->item);
    ab_preordem(raiz->esq);
    ab_preordem(raiz->dir);
  }
}
```



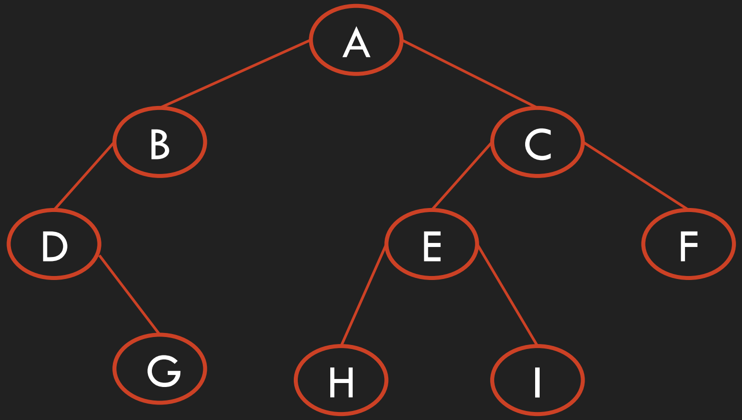

→ Resultado: ABDGCEHIF

# AB - Percurso Em-Ordem



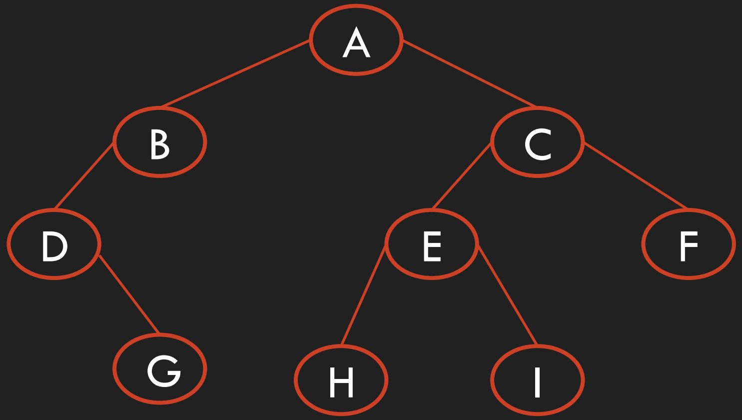
# AB - Percurso Em-Ordem

```c
void ab_emordem(NO *raiz) {
  if (raiz != NULL) {
    ab_emordem(raiz->esq);
    item_imprimir(raiz->item);
    ab_emordem(raiz->dir);
  }
}
```



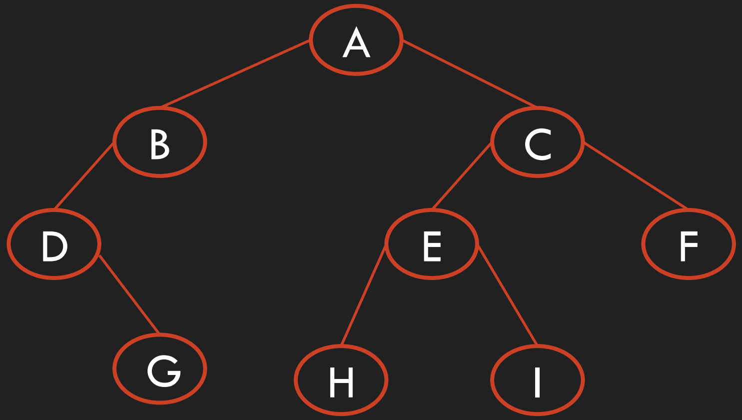

→ Resultado: DGBAHEICF

# AB - Percurso Pós-Ordem



# AB - Percurso Pós-Ordem

```
void ab_posordem(NO *raiz) {
  if (raiz != NULL) {
     ab_posordem(raiz->esq);
     ab_posordem(raiz->dir);
     item_imprimir(raiz->item);
  }
}
```

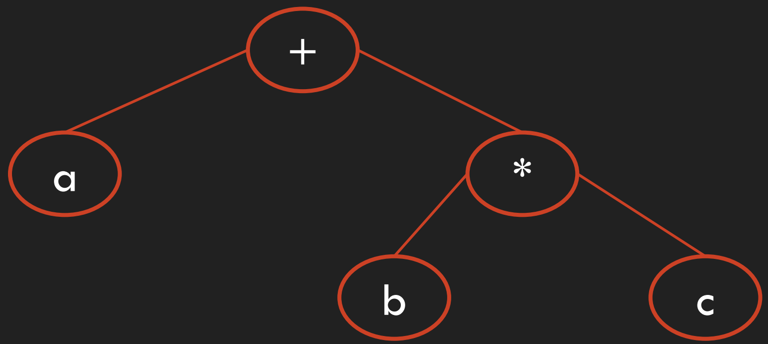



→ Resultado: GDBHIEFCA

# AB - Percursos

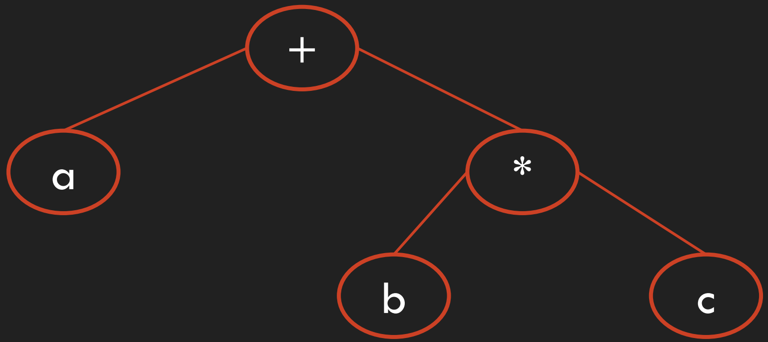
- Percurso para expressões aritméticas
  - Em-ordem: a+(b*c)
  - Pré-ordem: +a*bc
  - Pós-ordem: abc*+

  - Qual percurso utilizar?
  - Como calcular?



# AB - Percursos

- Percurso para expressões aritméticas
  - Pré-ordem: +a*bc
  - Em-ordem: a+(b*c)
  - Pós-ordem: abc*+




- Algoritmos para cálculo podem usar pilhas.

# Operações do TAD AB (Inserção)

# Operações do TAD AB (Inserção)

```
/* .h: #define FILHO_ESQ 0
       #define FILHO_DIR 1 */

NO *ab_inserir_no(NO *raiz, ITEM *item, int lado, int chave) {
    if (raiz != NULL) {
        raiz->esq = ab_inserir_no(raiz->esq, item, lado, chave);
        raiz->dir = ab_inserir_no(raiz->dir, item, lado, chave);
        if (chave == item_get_chave(raiz->item)){
            if (lado == FILHO_ESQ)
                raiz->esq->ab_cria_no(item);
            else if (lado == FILHO_DIR)
                raiz->dir->ab_cria_no(item);
        }
    }
    return(raiz);
}
```

# Operações do TAD AB (Inserção)

```
boolean ab_inserir(AB *T, ITEM *item, int lado, int chave){
    if (T->raiz == NULL)
        return((T->raiz = ab_cria_no(item)) != NULL);
    else
        return((T->raiz = ab_inserir_no(T->raiz, item, lado, chave)) != NULL);
}
```

# Exercícios

- ➔ Uma árvore binária completa cheia é uma árvore binária completa?
- ➔ Uma árvore estritamente binária é uma árvore binária completa?
- ➔ Escreva um procedimento recursivo que calcula a profundidade de uma AB
- ➔ Escreva um procedimento recursivo que apaga uma árvore

# Função recursiva para calcular profundidade de uma árvore

```c
int ab_profundidade(NO *no) {
    if (no == NULL)
        return -1;
    int e = ab_profundidade(no->esq);
    int d = ab_profundidade(no->dir);
    return ((e > d) ? e : d) + 1;
}
```

# Procedimento recursivo p/ destruir árvore, liberando o espaço alocado

```
void apagar_arvore(NO **raiz) {
    if (*raiz != NULL) {
        apagar_arvore(&(*raiz)->esq);
        apagar_arvore(&(*raiz)->dir);
        item_apagar(&(*raiz)->item));
        free(*raiz);
        *raiz = NULL;
    }
}
void ab_apagar_arvore(AB **T) {
    apagar_arvore(&(*T)->raiz);
    free(*T);
    *T = NULL;
}
```

# Exercícios

- Considerando uma árvore que armazene inteiros
  - Implemente um método que retorne a quantidade de elementos em uma árvore
  - Implemente um método que retorne o maior elemento de uma árvore
  - Implemente um método que retorne o menor elemento de uma árvore
  - Implemente um método que retorne a soma de todos elementos de uma árvore

# Referências


- Material baseado no originais produzidos pelo professor Rudinei Gularte
- SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. Estruturas de Dados e seus Algoritmos, Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- TENEMBAUM, A.M., e outros Data Structures Using C, Prentice-Hall, 1990.
- ZIVIANI, N. Projeto de Algoritmos, Thomson, 2a. Edição, 2004.