Cálculo II

Técnicas de Integração – Parte 1

A) Integração por Substituição

Roteiro:

- fazer u = f(x) (em geral para parte do integrando)
- achar dx
- determinar os novos limites de integração
- adaptar substituindo no integrando
- resolver
- escrever a antiderivada como função de x (no caso de integral indefinida)

Exemplo: Calcule $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$.

- fazendo $u = \sqrt{2x-1}$,

então, $u^2 = 2x - 1$ e $x = \frac{u^2+1}{2}$ e, ainda, dx = u du.

- novos limites de integração: x = 1 ➔ u = 1 e x = 5 ➔ u = 3.
- resolvendo: $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int_1^3 \frac{1}{u} \frac{u^2+1}{2} u du = \frac{1}{2}\int_1^3 (u^2+1) du = \frac{16}{3}$

B) Integração por Partes:

$$\frac{d}{dx}[uv] = uv' + u'v$$

$$uv = \int uv' dx + \int vu' dx$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Roteiro para escolhas:

1. dv deve ser a parte mais complicada do integrando que contenha dx. O que sobrar é u.
2. u deve ser a parte do integrando cuja derivada é uma função mais simples do que o próprio u. O que sobrar é dv.

Exercícios

1. Calcule, por substituição, a integral indefinida:

a) $\int (x-2)dx$ b) $\int \frac{2}{(x-9)^2}dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ d) $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$ e) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

2. Calcule, por substituição, a integral definida:

a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ b) $\int_0^2 e^{-2x}dx$ c) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ d) $\int_1^2 (x-1)\sqrt{2-x}\,dx$ e) $\int_{-2}^0 -x\sqrt{x+2}\,dx$

3. Calcule, por partes, a integral indefinida:

a) $\int \ln(2x)dx$ b) $\int x^2e^{2x}dx$ c) $\int x^2 \ln x\,dx$ d) $\int x(x+1)^2dx$ e) $\int xe^{-x}dx$

4. Calcule, por partes, a integral definida:

a) $\int_0^1 \ln(1+2x)dx$ b) $\int_0^2 \frac{x^2}{e^x}dx$ c) $\int_1^e x^9 \ln x\,dx$ d) $\int_0^2 x^3e^{-4x}dx$

Faça mais: Larson-Hostetler-Edwards – Cálculo com Aplicações – 4ª edição, Ed. LTC, R.J., 1995, pág. 322 e 329/330.