Relatório sobre Conjuntos, Funções e Operadores Fuzzy

Doutorado CEFET

May 8, 2025

1 Introdução

Este relatório apresenta a implementação e análise de funções de pertinência, fuzzificação, operações fuzzy e relações fuzzy. As funções de pertinência são amplamente utilizadas em lógica fuzzy para representar graus de pertencimento de elementos a conjuntos fuzzy.

2 Funções de Pertinência

2.1 Implementação de Funções de Pertinência

As funções de pertinência implementadas incluem:

As funções de pertinência implementadas incluem as formas Triangular, Trapezoidal, Gaussiana, Sigmoidal, Sinoidal (Bell), Função S, Função Z, Cauchy, Gaussiana Dupla, Logarítmica e Retangular. Cada uma dessas funções possui características específicas que as tornam adequadas para diferentes aplicações em lógica fuzzy, permitindo modelar graus de pertinência de forma contínua e adaptável às necessidades do sistema.

Para a construção dos gráficos utilizando Python, utilizamos a função $plot_results$

2.1.1 Função Triangular

A função triangular é definida por três parâmetros (a, b, c), onde:

- a é o ponto inicial onde a pertinência começa a aumentar;
- b é o ponto onde a pertinência atinge o valor máximo (1);

- c é o ponto final onde a pertinência retorna a 0.

A fórmula é dada por:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{se } b \leq x < c, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

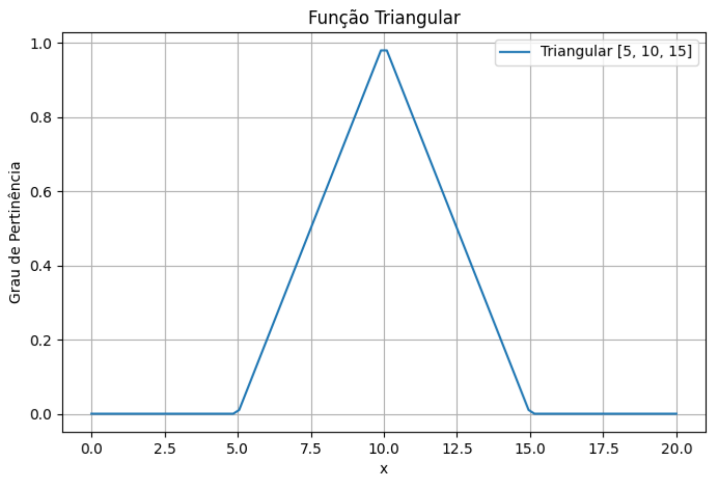

Figure 1: Exemplo de função triangular com $a = 5$, $b = 10$, $c = 15$.

2.1.2 Função Trapezoidal

A função trapezoidal é definida por quatro parâmetros (a, b, c, d), onde:

- a e d são os pontos onde a pertinência é 0;
- b e c definem a região onde a pertinência é 1.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b, \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

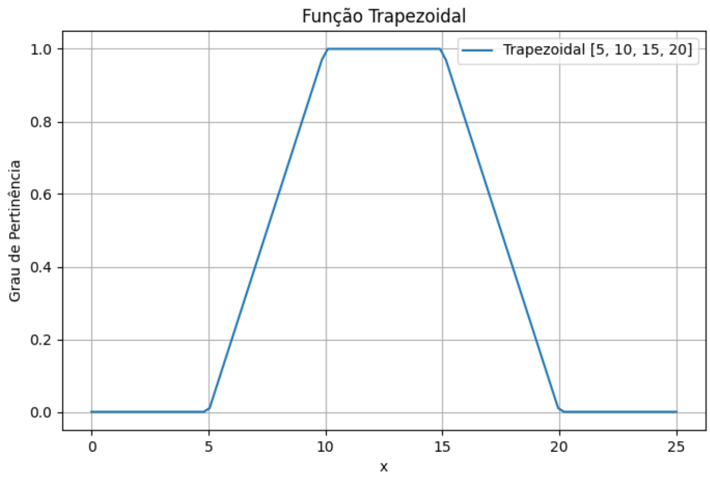

Figure 2: Exemplo de função trapezoidal com $a = 5$, $b = 10$, $c = 15$, $d = 20$.

2.1.3 Função Gaussiana

A função gaussiana é definida por dois parâmetros (c, σ), onde:

- c é o centro da curva, onde a pertinência é máxima (1);
- σ controla a largura da curva.

A fórmula é:

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}.$$

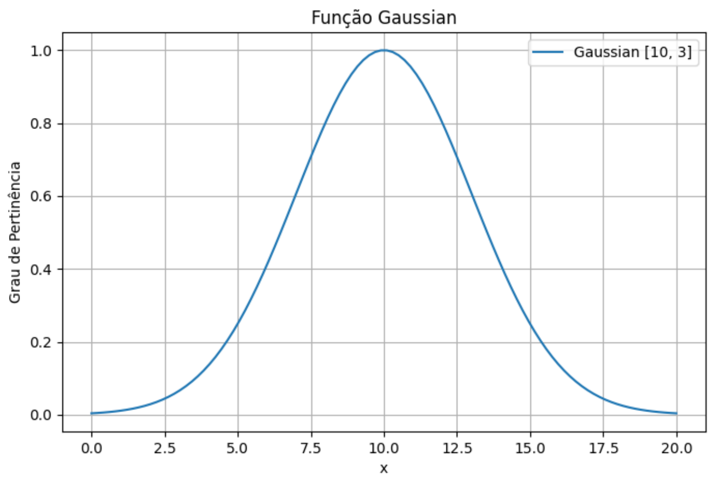

Figure 3: Exemplo de função gaussiana com $c = 10$, $\sigma = 3$.

2.1.4 Função Sigmoidal

A função sigmoidal é definida por dois parâmetros (a, c), onde:

- a controla a inclinação da curva;
- c é o ponto central onde a pertinência é 0.5.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}.$$

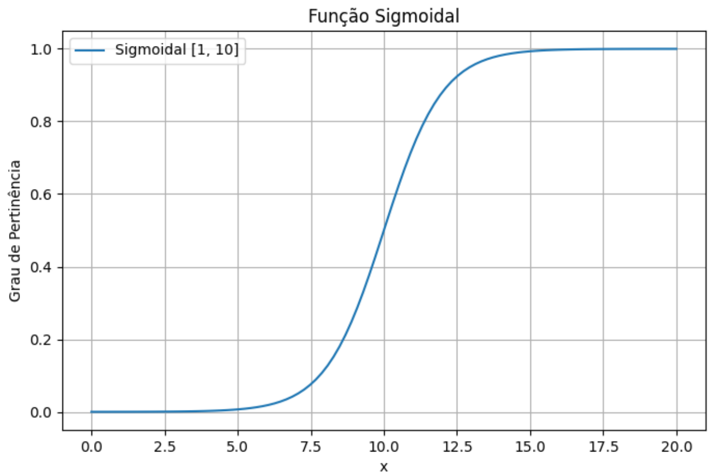

Figure 4: Exemplo de função sigmoidal com $a = 1$, $c = 10$.

2.1.5 Função Sinoidal (Bell)

A função Bell é definida por três parâmetros (a, b, c), onde:

- a controla a largura da curva;
- b controla a inclinação;
- c é o centro da curva.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}.$$

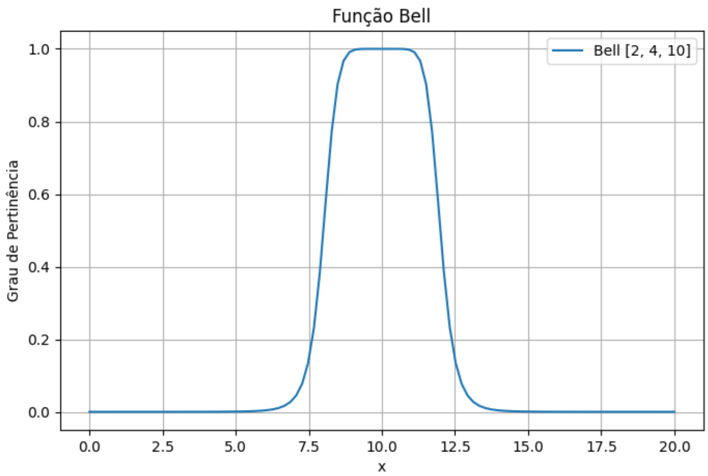

Figure 5: Exemplo de função Bell com $a = 2$, $b = 4$, $c = 10$.

2.1.6 Função S

A função S é definida por dois parâmetros (a, b), onde:

- a é o ponto onde a pertinência começa a aumentar;
- b é o ponto onde a pertinência atinge 1.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a, \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & \text{se } a < x < b, \\ 1, & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

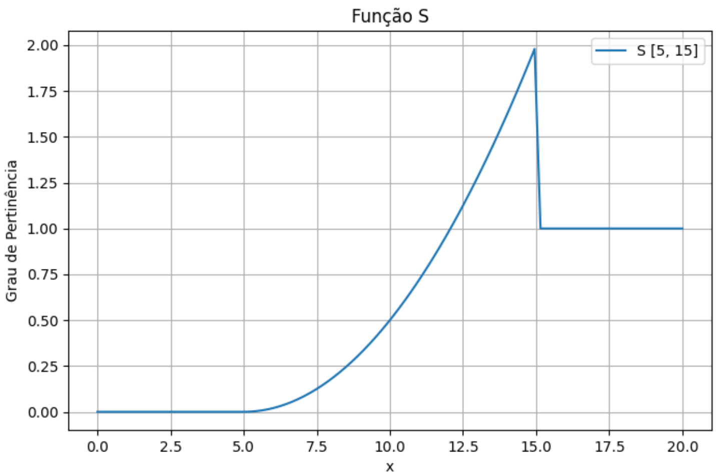

Figure 6: Exemplo de função S com $a = 5$, $b = 15$.

2.1.7 Função Z

A função Z é definida por dois parâmetros (a, b), onde:

- a é o ponto onde a pertinência começa a diminuir;
- b é o ponto onde a pertinência atinge 0.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq a, \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & \text{se } a < x < b, \\ 0, & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

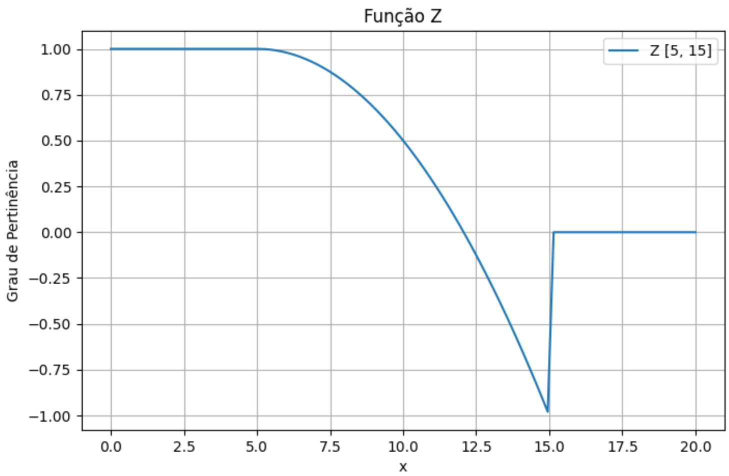

Figure 7: Exemplo de função Z com $a = 5$, $b = 15$.

2.1.8 Função Cauchy

A função Cauchy é definida por dois parâmetros (c, γ), onde:

- c é o centro da curva;
- γ controla a largura da curva.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-c}{\gamma}\right)^2}.$$

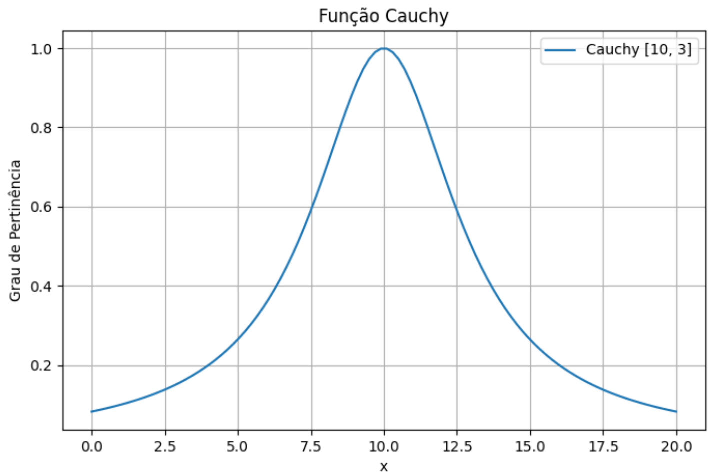

Figure 8: Exemplo de função Cauchy com $c = 10$, $\gamma = 3$.

2.1.9 Função Gaussiana Dupla

A função Gaussiana Dupla é definida por três parâmetros (c, σ_1, σ_2), onde:

- c é o centro da curva;
- σ_1 controla a largura da curva para $x \leq c$;
- σ_2 controla a largura da curva para $x > c$.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma_1}\right)^2}, & \text{se } x \leq c, \\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma_2}\right)^2}, & \text{se } x > c. \end{cases}$$

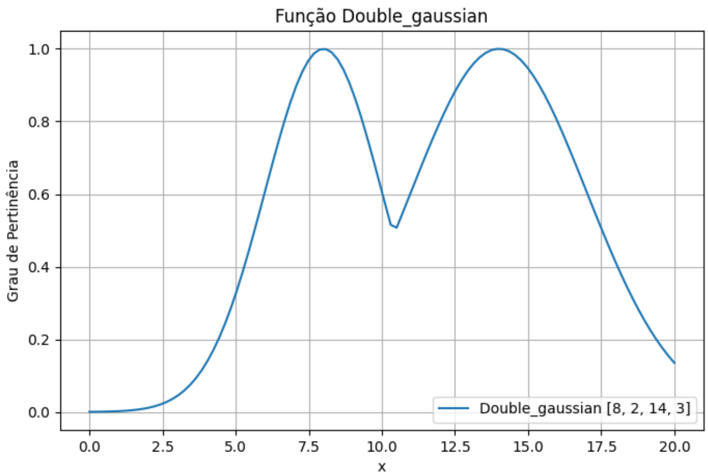

Figure 9: Exemplo de função Gaussiana Dupla com $c = 10$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 5$.

2.1.10 Função Retangular

A função Retangular é definida por dois parâmetros (a, b), onde:

- a é o início do intervalo onde a pertinência é 1;
- b é o final do intervalo onde a pertinência é 1.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

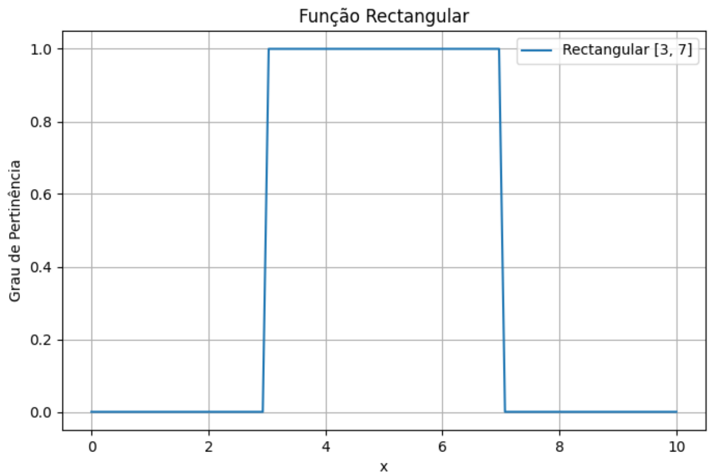

Figure 10: Exemplo de função Retangular com $a = 10$, $b = 20$.

2.1.11 Função Logarítmica

A função Logarítmica é definida por dois parâmetros (a, b), onde:

- a controla o deslocamento da curva;
- b controla a inclinação da curva.

A fórmula é:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq a, \\ \log_b(x - a + 1), & \text{se } x > a. \end{cases}$$

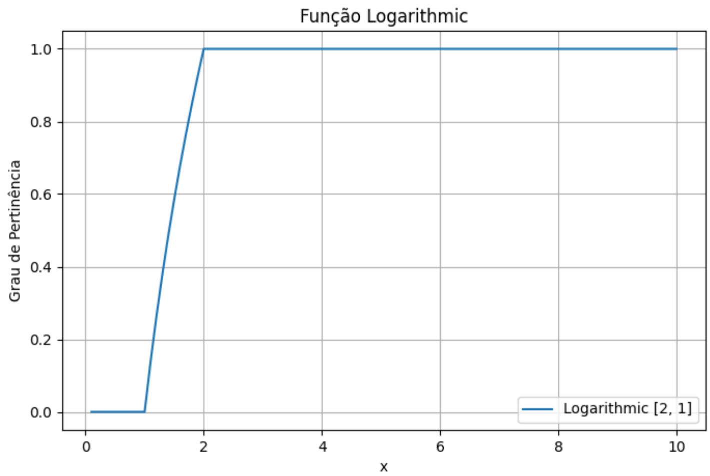

Figure 11: Exemplo de função Logarítmica com $a = 5$, $b = 2$.

2.2 Fuzzificação e Análise Comparativa

Para a fuzzificação, escolhemos uma variável de entrada com universo de discurso definido e particionamos o domínio em funções de pertinência uniformemente espaçadas. A seguir, apresentamos os resultados para duas amostras distintas.

Para as variáveis de entrada, definimos um universo de estudo como segue, particionando esse domínio em cinco funções de pertinência uniformemente espaçadas:

Table 1: Categorias de Temperatura e Intervalos

Categoria	**Intervalo de Temperatura (°C)**
Muito Frio	0 a 20
Frio	20 a 40
Morno	40 a 60
Quente	60 a 80
Muito Quente	80 a 100

2.2.1 Fuzzificação com Funções Triangulares

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 2: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 0.0, 25.0]$	$[0, 0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[0.0, 25.0, 50.0]$	$[0.99, 0.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[25.0, 50.0, 75.0]$	$[0.01, 0.01]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[50.0, 75.0, 100.0]$	$[0.0, 0.99]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[75.0, 100.0, 100.0]$	$[0, 0]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência triangulares e suas ativações:

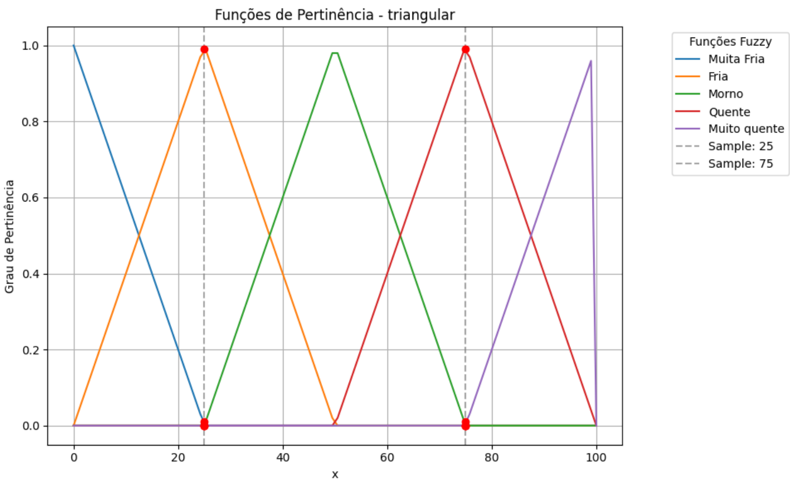

Figure 12: Funções de Pertinência Triangulares para a variável **Temperatura**.

2.2.2 Fuzzificação com Funções Trapezoidais

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 3: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 0.0, 12.5, 25.0]$	$[0, 0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[0.0, 12.5, 37.5, 50.0]$	$[1, 0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[25.0, 37.5, 62.5, 75.0]$	$[0.02, 0.02]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[50.0, 62.5, 87.5, 100.0]$	$[0, 1]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[75.0, 87.5, 100.0, 100.0]$	$[0, 0]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência trapezoidais e suas ativações:

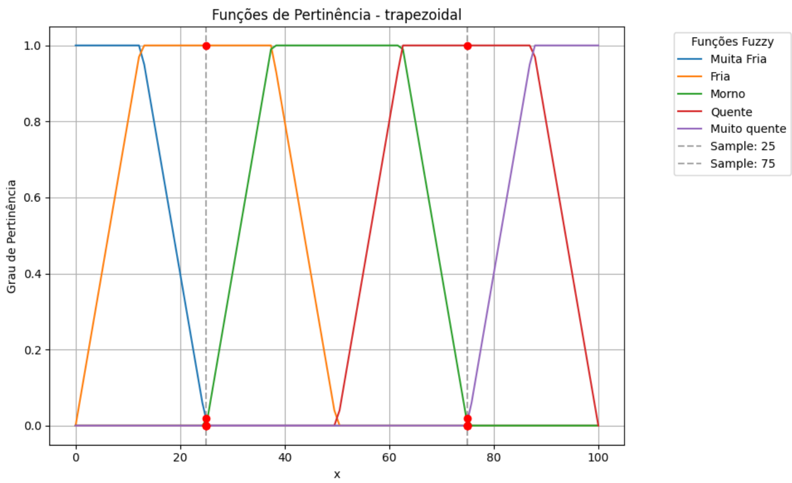

Figure 13: Funções de Pertinência Trapezoidais para a variável **Temperatura**.

2.2.3 Fuzzificação com Funções Gaussianas

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 4: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 12.5]$	$[0.13, 0.0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[25.0, 12.5]$	$[1.0, 0.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[50.0, 12.5]$	$[0.14, 0.14]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[75.0, 12.5]$	$[0.0, 1.0]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[100.0, 12.5]$	$[0.0, 0.13]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência gaussianas e suas ativações:

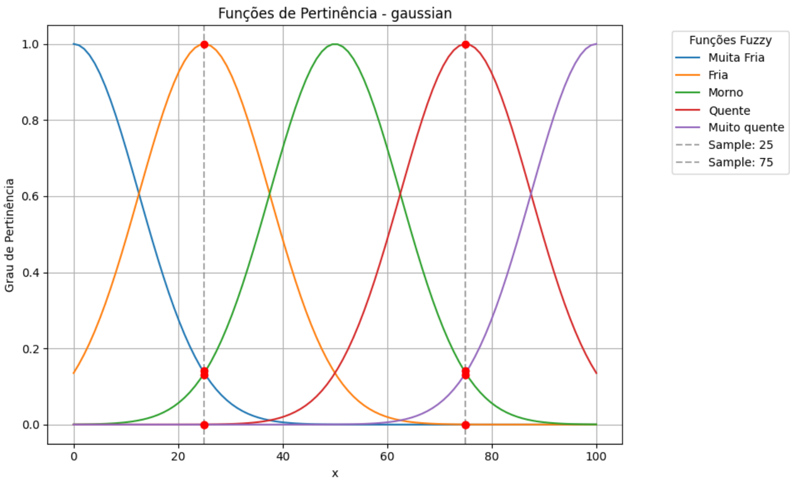

Figure 14: Funções de Pertinência Gaussianas para a variável **Temperatura**.

2.2.4 Fuzzificação com Funções Sigmoidais

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 5: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[1.0, 0.0]$	$[1.0, 1.0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[1.0, 25.0]$	$[0.56, 1.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[1.0, 50.0]$	$[0.0, 1.0]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[1.0, 75.0]$	$[0.0, 0.44]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[1.0, 100.0]$	$[0.0, 0.0]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência sigmoidais e suas ativações:

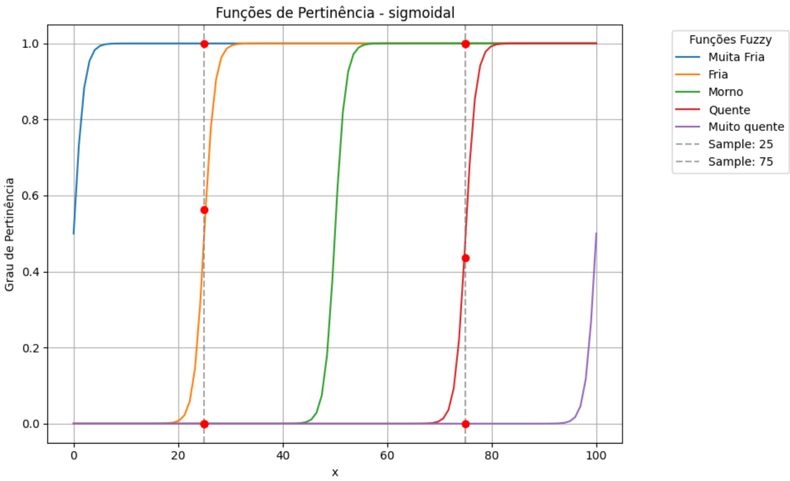

Figure 15: Funções de Pertinência Sigmoidais para a variável **Temperatura**.

2.2.5 Fuzzificação com Funções Bell

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 6: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[12.5, 2.0, 0.0]$	$[0.06, 0.0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[12.5, 2.0, 25.0]$	$[1.0, 0.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[12.5, 2.0, 50.0]$	$[0.06, 0.06]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[12.5, 2.0, 75.0]$	$[0.0, 1.0]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[12.5, 2.0, 100.0]$	$[0.0, 0.06]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Bell e suas ativações:

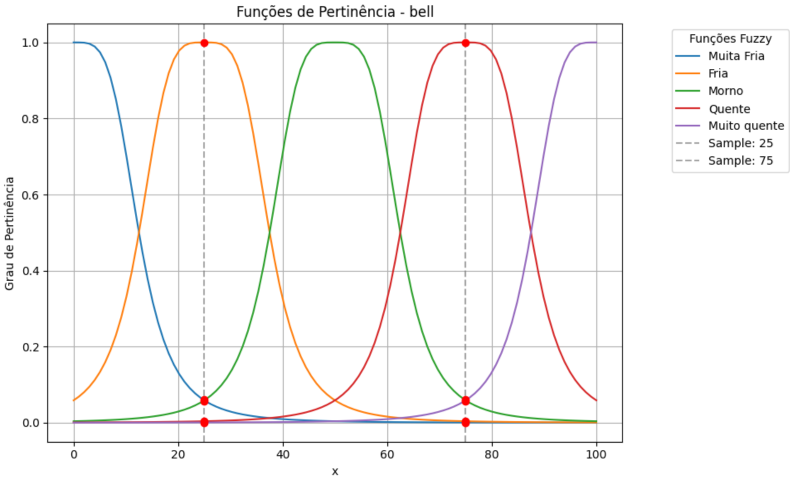

Figure 16: Funções de Pertinência Bell para a variável **Temperatura**.

2.2.6 Fuzzificação com Funções S

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 7: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 25.0]$	$[1, 1]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[25.0, 50.0]$	$[0.0, 1.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[50.0, 75.0]$	$[0.0, 1.96]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[75.0, 100.0]$	$[0, 0]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[100.0, 100.0]$	$[0, 0]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência S e suas ativações:

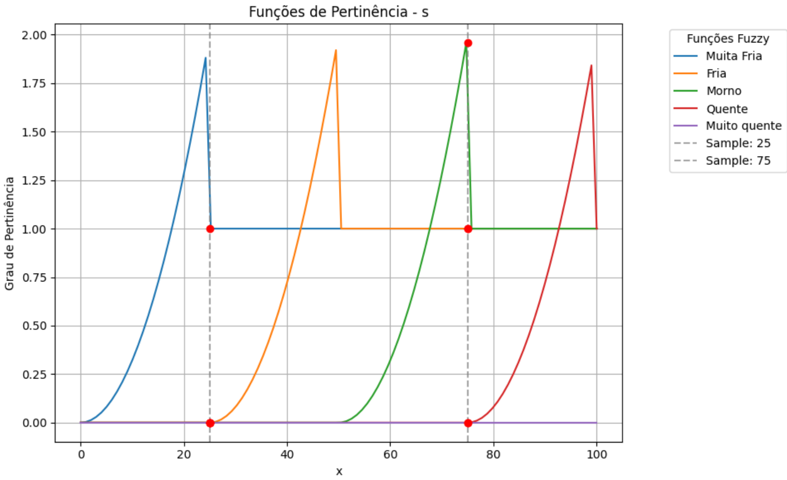

Figure 17: Funções de Pertinência S para a variável **Temperatura**.

2.2.7 Fuzzificação com Funções Z

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 8: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 0.0]$	$[0, 0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[0.0, 25.0]$	$[0, 0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[25.0, 50.0]$	$[1.0, 0.0]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[50.0, 75.0]$	$[1.0, -0.96]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[75.0, 100.0]$	$[1, 1]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Z e suas ativações:

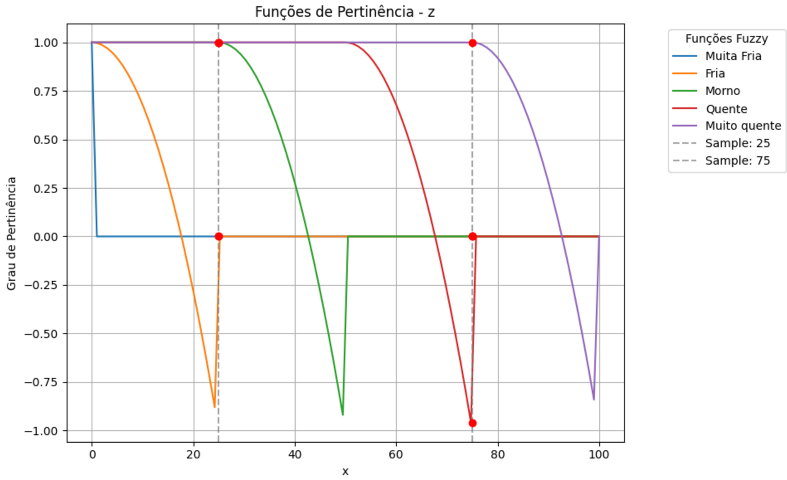

Figure 18: Funções de Pertinência Z para a variável **Temperatura**.

2.2.8 Fuzzificação com Funções Pi

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 9: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 0.0, 25.0]$	$[0, 0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[0.0, 25.0, 50.0]$	$[1.0, 0.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[25.0, 50.0, 75.0]$	$[0.0, -0.96]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[50.0, 75.0, 100.0]$	$[0.0, 1.96]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[75.0, 100.0, 100.0]$	$[0, 0]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Pi e suas ativações:

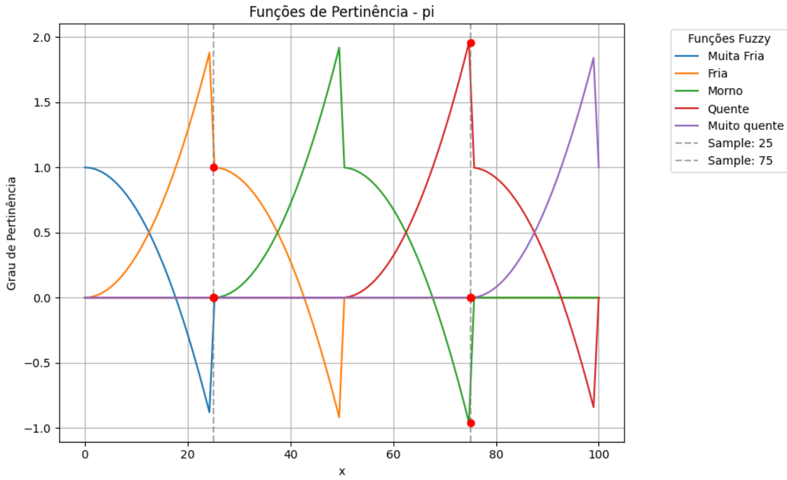

Figure 19: Funções de Pertinência Pi para a variável **Temperatura**.

2.2.9 Fuzzificação com Funções Singleton

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 10: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0]$	$[0, 0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[25.0]$	$[0, 0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[50.0]$	$[0, 0]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[75.0]$	$[0, 0]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[100.0]$	$[0, 0]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Singleton e suas ativações:

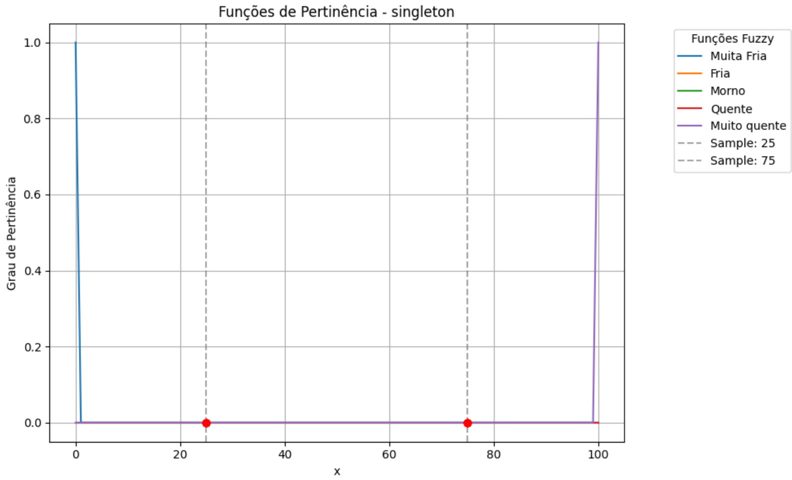

Figure 20: Funções de Pertinência Singleton para a variável **Temperatura**.

2.2.10 Fuzzificação com Funções Cauchy

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 11: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações (Cauchy)

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 12.5]$	$[0.2, 0.03]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[25.0, 12.5]$	$[1.0, 0.06]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[50.0, 12.5]$	$[0.2, 0.2]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[75.0, 12.5]$	$[0.06, 1.0]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[100.0, 12.5]$	$[0.03, 0.2]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Cauchy e suas ativações:

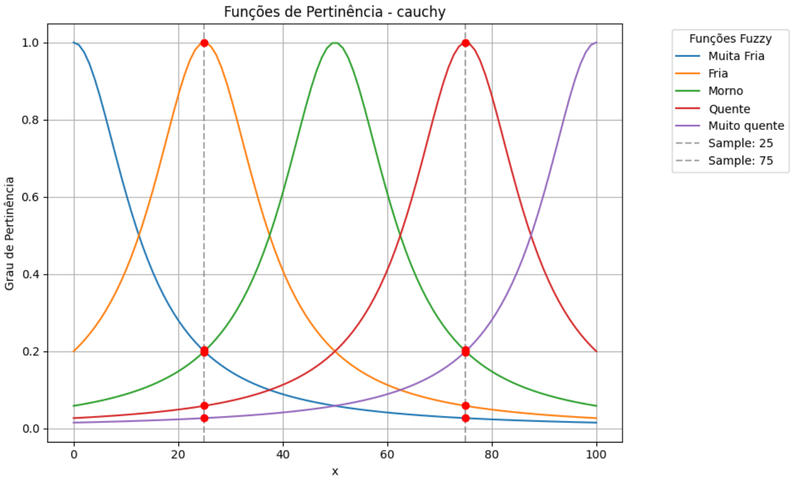

Figure 21: Funções de Pertinência Cauchy para a variável **Temperatura**.

2.2.11 Fuzzificação com Funções Double Gaussian

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 12: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações (Double Gaussian)

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 6.25, 12.5, 6.25]$	$[0.12, 0.0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[12.5, 6.25, 37.5, 6.25]$	$[0.15, 0.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[37.5, 6.25, 62.5, 6.25]$	$[0.15, 0.15]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[62.5, 6.25, 87.5, 6.25]$	$[0.0, 0.15]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[87.5, 6.25, 100.0, 6.25]$	$[0.0, 0.12]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Double Gaussian e suas ativações:

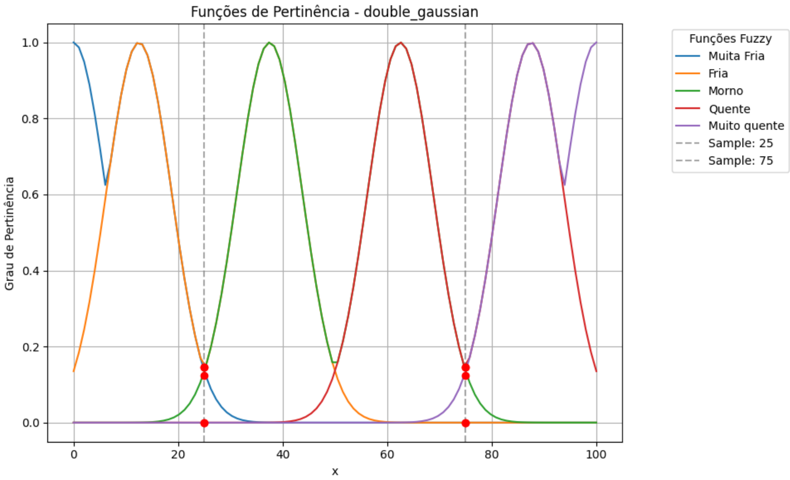

Figure 22: Funções de Pertinência Double Gaussian para a variável **Temperatura**.

2.2.12 Fuzzificação com Funções Logarítmicas

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 13: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações (Logarítmica)

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[2.0, 1.0]$	$[1, 1]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[2.0, 1.0]$	$[1, 1]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[2.0, 1.0]$	$[1, 1]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[2.0, 1.0]$	$[1, 1]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[2.0, 1.0]$	$[1, 1]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Logarítmicas e suas ativações:

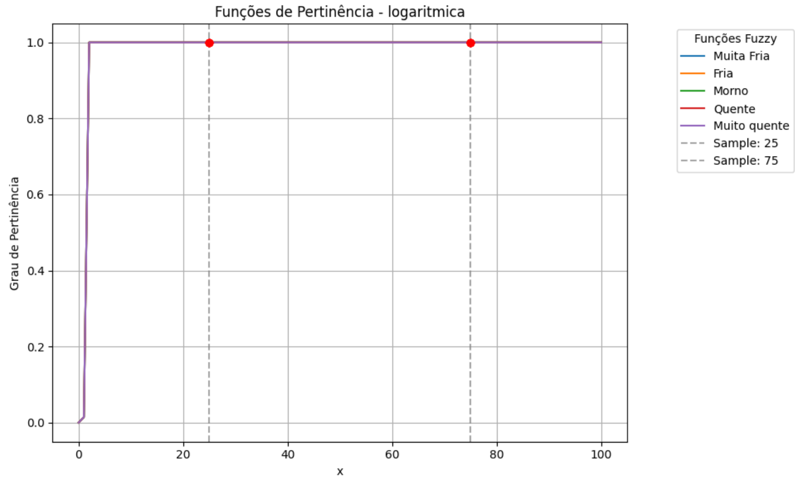

Figure 23: Funções de Pertinência Logarítmicas para a variável **Temperatura**.

2.2.13 Fuzzificação com Funções Retangulares

Para a variável linguística **Temperatura**, foram definidos cinco conjuntos fuzzy com os seguintes intervalos e parâmetros, além das ativações calculadas para as amostras **25** e **75**:

Table 14: Conjuntos Fuzzy, Intervalos, Parâmetros e Ativações (Retangular)

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 12.5]$	$[0, 0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[12.5, 37.5]$	$[1, 0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[37.5, 62.5]$	$[0, 0]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[62.5, 87.5]$	$[0, 1]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[87.5, 100.0]$	$[0, 0]$

A seguir, apresentamos o gráfico das funções de pertinência Retangulares e suas ativações:

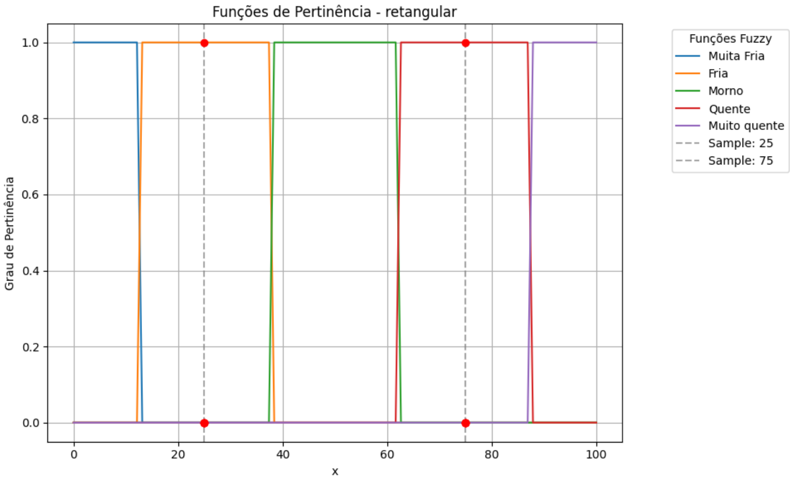

Figure 24: Funções de Pertinência Retangulares para a variável **Temperatura**.

2.3 Conclusão

Nesta seção, analisamos os resultados obtidos para as diferentes funções de pertinência aplicadas à variável linguística **Temperatura**. A análise considera como o grau de ativação varia entre as funções e identifica quais apresentam maior suavidade ou sensibilidade às variações no domínio. Os resultados mostram que o grau de ativação varia de forma distinta entre as funções de pertinência:

- **Funções Gaussianas**: Apresentam transições suaves e contínuas, com ativação máxima (1.0) para as categorias *Fria* e *Quente* nas amostras 25 e 75, respectivamente. As categorias adjacentes (*Muita Fria* e *Morno*) exibem ativações moderadas (0.13 e 0.14), indicando boa sensibilidade às variações no domínio.

- **Funções Sigmoidais**: Demonstram transições suaves e assimétricas. A categoria *Muita Fria* apresenta ativação constante (1.0) para ambas as amostras, enquanto a categoria *Fria* exibe uma ativação moderada (0.56) na amostra 25 e máxima (1.0) na amostra 75. As categorias *Morno* e *Quente* apresentam ativações crescentes, refletindo alta sensibilidade em torno dos pontos centrais.

- **Funções Bell**: Apresentam características semelhantes às gaussianas, mas com maior controle sobre a largura e inclinação. A categoria *Fria* atinge ativação máxima (1.0) na amostra 25, enquanto as categorias adjacentes (*Muita Fria* e *Morno*) exibem ativações moderadas (0.06). Na amostra 75, a categoria *Quente* apresenta ativação máxima (1.0), enquanto as categorias adjacentes exibem ativações baixas.

- **Funções S**: Apresentam transições suaves e crescentes. A categoria *Muita Fria* exibe ativação constante (1.0) para ambas as amostras, enquanto a categoria *Fria* apresenta ativação máxima (1.0) na amostra 75. A categoria *Morno* exibe a maior ativação (1.96) na amostra 75, indicando alta sensibilidade em regiões de transição.

- **Funções Z**: Apresentam transições suaves e decrescentes. A categoria *Morno* exibe ativação máxima (1.0) na amostra 25, enquanto a categoria *Quente* apresenta ativação negativa (-0.96) na amostra 75, refletindo a natureza decrescente da função.

- **Funções Pi**: Combinam as características das funções S e Z, apresentando transições suaves em ambas as extremidades. A categoria *Fria* exibe ativação máxima (1.0) na amostra 25, enquanto a categoria *Quente* apresenta ativação elevada (1.96) na amostra 75.

- **Funções Singleton**: Apresentam ativações discretas, com valores nulos para todas as categorias e amostras. Isso reflete a ausência de transições, sendo adequadas apenas para modelar pontos específicos no domínio.

- **Funções Cauchy**: Apresentam transições suaves, com caudas mais longas em comparação às gaussianas. A categoria *Fria* exibe ativação máxima (1.0) na amostra 25, enquanto as categorias adjacentes (*Muita Fria* e *Morno*) apresentam ativações moderadas (0.2). Na amostra 75, a categoria *Quente* exibe ativação máxima (1.0).

- **Funções Double Gaussian**: Apresentam duas regiões de ativação controladas por parâmetros independentes. As categorias *Fria* e *Morno* exibem ativações moderadas (0.15) na amostra 25, enquanto a categoria *Quente* apresenta ativação moderada (0.15) na amostra 75.

- **Funções Logarítmicas**: Apresentam ativações constantes (1.0) para todas as categorias e amostras, indicando baixa sensibilidade às variações no domínio.

- **Funções Retangulares**: Apresentam regiões planas com ativação constante (1.0) e transições abruptas nas bordas. A categoria *Fria* exibe ativação máxima (1.0) na amostra 25, enquanto a categoria *Quente* apresenta ativação máxima (1.0) na amostra 75.

A suavidade e a sensibilidade às variações no domínio variam significativamente entre as funções:

- **Maior Suavidade**: As funções Gaussianas, Sigmoidais, Bell e Cauchy apresentam as transições mais suaves, sendo ideais para modelar mudanças graduais no grau de ativação.
- **Maior Sensibilidade**: As funções S e Pi demonstram alta sensibilidade em regiões de transição, enquanto as funções Gaussianas e Sigmoidais apresentam sensibilidade moderada.
- **Menor Suavidade e Sensibilidade**: As funções Retangulares e Singleton apresentam transições abruptas ou ausência de transição, sendo menos adequadas para modelar mudanças contínuas.

Os resultados mostram que as funções Gaussianas, Sigmoidais, Bell e Cauchy são as mais adequadas para modelar transições suaves e graduais. As funções S e Pi são úteis em cenários que exigem alta sensibilidade em regiões de transição. Por outro lado, as funções Retangulares e Singleton são mais indicadas para modelar intervalos bem definidos ou pontos discretos. A escolha da função de pertinência ideal depende do contexto da aplicação e das características desejadas para o sistema fuzzy.

3 Operações Fuzzy

As operações fuzzy são fundamentais para manipular conjuntos fuzzy e modelar incertezas em sistemas baseados em lógica fuzzy. Elas incluem complemento, união (t-conormas) e interseção (t-normas), permitindo combinar ou modificar graus de pertinência. Essas operações são amplamente utilizadas em aplicações práticas, como controle fuzzy, tomada de decisão e sistemas especialistas.

3.1 Complemento, União e Interseção

A lógica fuzzy estende a lógica clássica, permitindo lidar com incertezas ao atribuir graus de pertinência contínuos no intervalo $[0, 1]$. Agora vamos explora operações fuzzy fundamentais, como complemento (Zadeh, Sugeno, Yager), união (máximo, soma probabilística, soma limitada, soma drástica) e interseção (mínimo, produto, produto limitado, produto drástico). Utilizamos conjuntos fuzzy definidos por funções de pertinência (triangular, trapezoidal, gaussiana, etc.) para realizar análises gráficas e textuais comparativas, destacando as características e aplicações práticas de cada operador.

3.1.1 Complemento

As operações de complemento são utilizadas para calcular o grau de não-pertinência de um elemento a um conjunto fuzzy. Abaixo, apresentamos as fórmulas para os operadores de complemento Zadeh, Sugeno e Yager.

Operador Zadeh O complemento de Zadeh é definido como:

$$\mu_{\text{Zadeh}}(x) = 1 - \mu(x)$$

Os resultados para o operador de complemento Zadeh aplicado às funções de pertinência triangulares são apresentados na tabela abaixo. As ativações foram calculadas para as amostras **25** e **75**.

Table 15: Ativações para o Operador Zadeh com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 0.0, 25.0]$	$[1.0, 1.0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[0.0, 25.0, 50.0]$	$[0.01, 1.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[25.0, 50.0, 75.0]$	$[0.99, 0.99]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[50.0, 75.0, 100.0]$	$[1.0, 0.01]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[75.0, 100.0, 100.0]$	$[1.0, 1.0]$

A figura abaixo apresenta o gráfico das funções de pertinência triangulares e seus complementos calculados utilizando o operador de Zadeh.

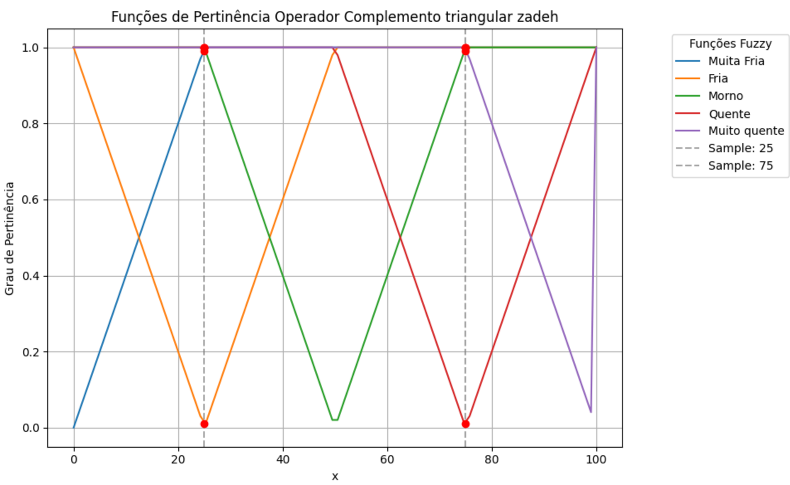

Figure 25: Funções de pertinência triangulares e seus complementos (Zadeh).

Os resultados das ativações para os operadores de complemento Sugeno e Yager aplicados às funções de pertinência triangulares são apresentados nas tabelas abaixo. As ativações foram calculadas para as amostras **25** e **75**.

Operador Sugeno O complemento de Sugeno é definido como:

$$\mu_{\text{Sugeno}}(x) = \frac{1 - \mu(x)}{1 + \lambda \cdot \mu(x)}$$

onde $\lambda \geq 0$ é um parâmetro que controla a suavidade do complemento.

Table 16: Ativações para o Operador Sugeno com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 0.0, 25.0]$	$[1.0, 1.0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[0.0, 25.0, 50.0]$	$[0.01, 1.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[25.0, 50.0, 75.0]$	$[0.98, 0.98]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[50.0, 75.0, 100.0]$	$[1.0, 0.01]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[75.0, 100.0, 100.0]$	$[1.0, 1.0]$

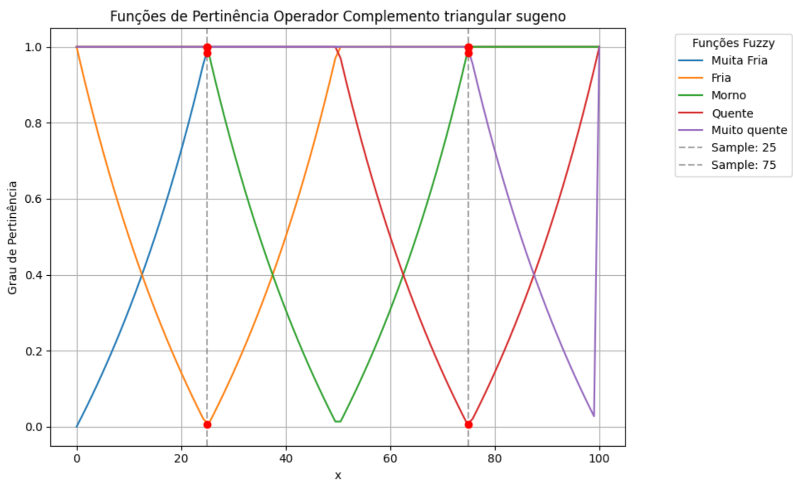

Figure 26: Funções de pertinência triangulares e seus complementos (Sugeno).

Operador Yager O complemento de Yager é definido como:

$$\mu_{\text{Yager}}(x) = (1 - \mu(x)^w)^{\frac{1}{w}}$$

onde $w > 0$ é um parâmetro que ajusta a forma do complemento.

Table 17: Ativações para o Operador Yager com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Muita Fria	$[0.0, 20.0]$	$[0.0, 0.0, 25.0]$	$[1.0, 1.0]$
Fria	$[20.0, 40.0]$	$[0.0, 25.0, 50.0]$	$[0.14, 1.0]$
Morno	$[40.0, 60.0]$	$[25.0, 50.0, 75.0]$	$[1.0, 1.0]$
Quente	$[60.0, 80.0]$	$[50.0, 75.0, 100.0]$	$[1.0, 0.14]$
Muito Quente	$[80.0, 100.0]$	$[75.0, 100.0, 100.0]$	$[1.0, 1.0]$

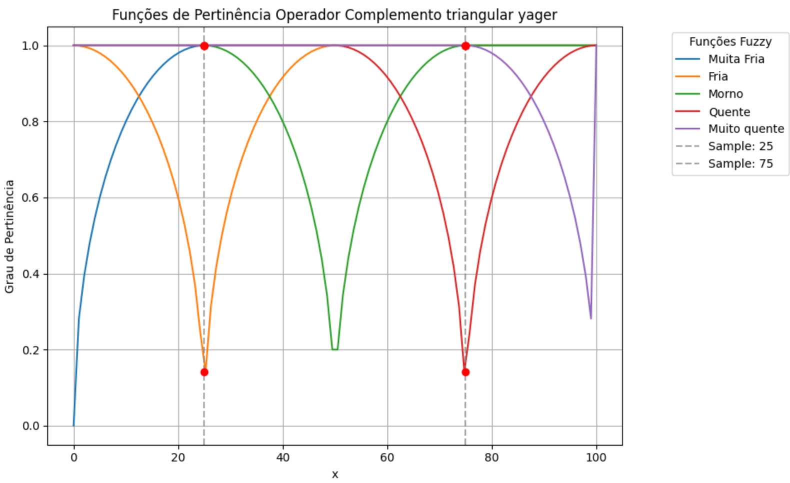

Figure 27: Funções de pertinência triangulares e seus complementos (Yager).

3.2 União (t-conormas)

Os resultados das ativações para os operadores de união (t-conormas) aplicados às funções de pertinência triangulares são apresentados nas tabelas abaixo. As ativações foram calculadas para as amostras **25** e **75**.

Operador Máximo A união pelo operador máximo é definida como:

$$\mu_{\text{Máximo}}(x) = \max(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

Table 18: Ativações para o Operador Máximo com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Fria	$[0.0, 25.0]$	$[0.0, 0.0, 33.33]$	$[0.24, 0.0]$
Morno	$[25.0, 50.0]$	$[0.0, 33.33, 66.67]$	$[0.76, 0.0]$
Quente	$[50.0, 75.0]$	$[33.33, 66.67, 100.0]$	$[0.0, 0.76]$
Muito Quente	$[75.0, 100.0]$	$[66.67, 100.0, 100.0]$	$[0.0, 0.24]$
Máximo	-	-	$[0.76, 0.0]$

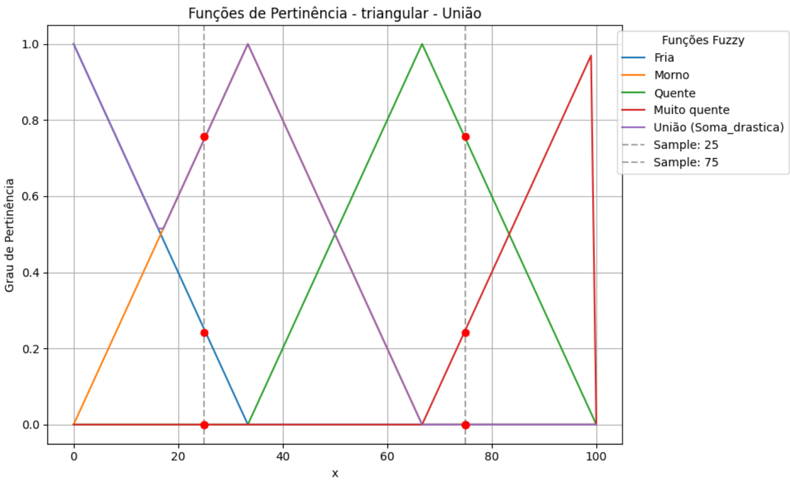

Figure 28: Funções de pertinência triangulares e suas uniões (Máximo).

Operador Soma Probabilística A união pelo operador soma probabilística é definida como:

$$\mu_{\text{Soma Probabilística}}(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) - \mu_1(x) \cdot \mu_2(x)$$

Table 19: Ativações para o Operador Soma Probabilística com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Fria	$[0.0, 25.0]$	$[0.0, 0.0, 33.33]$	$[0.24, 0.0]$
Morno	$[25.0, 50.0]$	$[0.0, 33.33, 66.67]$	$[0.76, 0.0]$
Quente	$[50.0, 75.0]$	$[33.33, 66.67, 100.0]$	$[0.0, 0.76]$
Muito Quente	$[75.0, 100.0]$	$[66.67, 100.0, 100.0]$	$[0.0, 0.24]$
Soma Probabilística	-	-	$[0.82, 0.0]$

Operador Soma Limitada A união pelo operador soma limitada é definida como:

$$\mu_{\text{Soma Limitada}}(x) = \min(1, \mu_1(x) + \mu_2(x))$$

Table 20: Ativações para o Operador Soma Limitada com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Fria	$[0.0, 25.0]$	$[0.0, 0.0, 33.33]$	$[0.24, 0.0]$
Morno	$[25.0, 50.0]$	$[0.0, 33.33, 66.67]$	$[0.76, 0.0]$
Quente	$[50.0, 75.0]$	$[33.33, 66.67, 100.0]$	$[0.0, 0.76]$
Muito Quente	$[75.0, 100.0]$	$[66.67, 100.0, 100.0]$	$[0.0, 0.24]$
Soma Limitada	-	-	$[1.0, 0.0]$

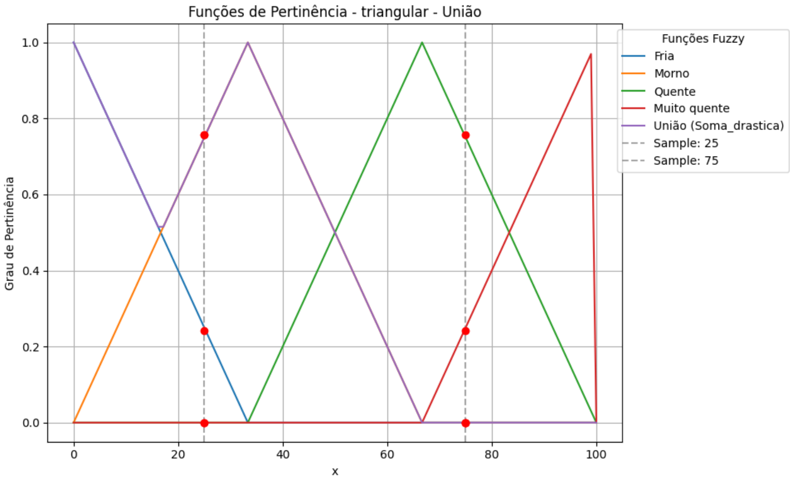

Figure 29: Funções de pertinência triangulares e suas uniões (Soma Limitada).

Operador Soma Drástica A união pelo operador soma drástica é definida como:

$$\mu_{\text{Soma Drástica}}(x) = \begin{cases} \max(\mu_1(x), \mu_2(x)), & \text{se } \min(\mu_1(x), \mu_2(x)) > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Table 21: Ativações para o Operador União (Soma Drástica) com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Fria	$[0.0, 25.0]$	$[0.0, 0.0, 33.33]$	$[0.24, 0.0]$
Morno	$[25.0, 50.0]$	$[0.0, 33.33, 66.67]$	$[0.76, 0.0]$
Quente	$[50.0, 75.0]$	$[33.33, 66.67, 100.0]$	$[0.0, 0.76]$
Muito Quente	$[75.0, 100.0]$	$[66.67, 100.0, 100.0]$	$[0.0, 0.24]$
Soma Drástica	-	-	$[0.76, 0.0]$

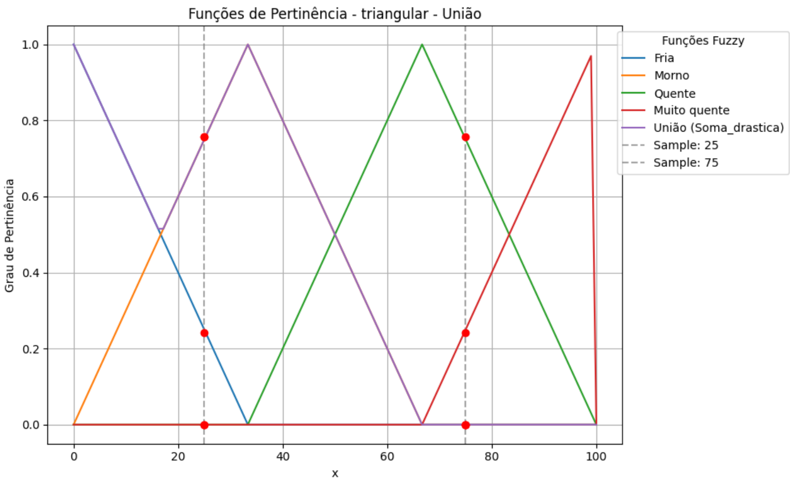

Figure 30: Funções de pertinência triangulares e suas uniões (Soma Drástica).

3.3 Intersecão (t-normas):

Operador Produto Drástico A interseção pelo operador produto drástico é definida como:

$$\mu_{\text{Produto Drástico}}(x) = \begin{cases} \max(\mu_1(x), \mu_2(x)), & \text{se } \min(\mu_1(x), \mu_2(x)) > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Table 22: Ativações para o Operador Produto Drástico com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Fria	$[0.0, 25.0]$	$[0.0, 0.0, 33.33]$	$[0.24, 0.0]$
Morno	$[25.0, 50.0]$	$[0.0, 33.33, 66.67]$	$[0.76, 0.0]$
Quente	$[50.0, 75.0]$	$[33.33, 66.67, 100.0]$	$[0.0, 0.76]$
Muito Quente	$[75.0, 100.0]$	$[66.67, 100.0, 100.0]$	$[0.0, 0.24]$
Produto Drástico	-	-	$[0.0, 0.0]$

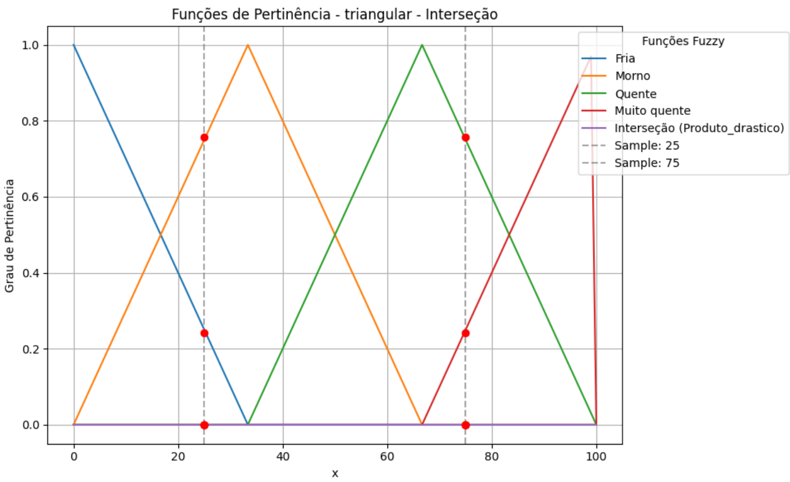

Figure 31: Funções de pertinência triangulares e suas interseções (Produto Drástico).

Operador Produto Drástico A interseção pelo operador produto drástico é definida como:

$$\mu_{\text{Produto Drástico}}(x) = \begin{cases} \max(\mu_1(x), \mu_2(x)), & \text{se } \min(\mu_1(x), \mu_2(x)) > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Table 23: Ativações para o Operador Produto Drástico com Funções Triangulares

Categoria	**Intervalo (°C)**	**Parâmetros**	**Ativações [25, 75]**
Fria	$[0.0, 25.0]$	$[0.0, 0.0, 33.33]$	$[0.24, 0.0]$
Morno	$[25.0, 50.0]$	$[0.0, 33.33, 66.67]$	$[0.76, 0.0]$
Quente	$[50.0, 75.0]$	$[33.33, 66.67, 100.0]$	$[0.0, 0.76]$
Muito Quente	$[75.0, 100.0]$	$[66.67, 100.0, 100.0]$	$[0.0, 0.24]$
Produto Drástico	-	-	$[0.0, 0.0]$

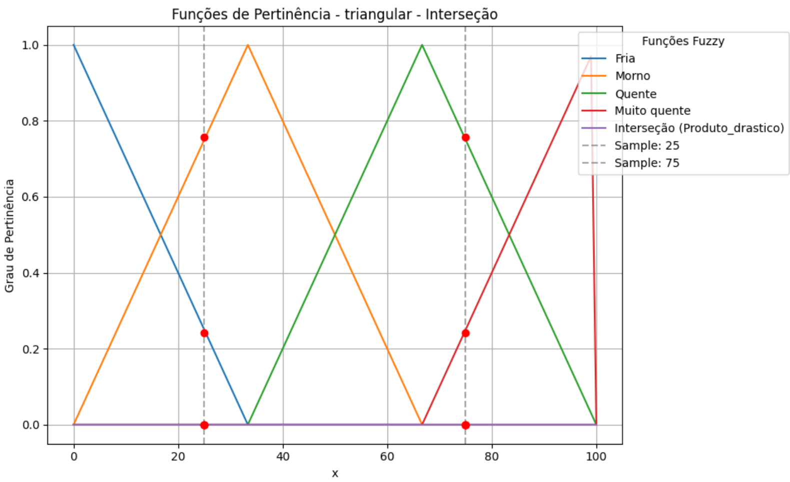

Figure 32: Funções de pertinência triangulares e suas interseções (Produto Drástico).

3.3.1 Conclusão

Os operadores de complemento analisados apresentam características distintas que os tornam adequados para diferentes aplicações:

- **Zadeh**: Simples e direto, ideal para aplicações gerais onde não há necessidade de ajustes adicionais na suavidade do complemento.
- **Sugeno**: Permite ajuste de suavidade por meio do parâmetro λ, sendo mais flexível e adaptável a diferentes cenários.
- **Yager**: Oferece maior controle sobre a forma do complemento por meio do parâmetro w, sendo útil em cenários específicos que exigem maior personalização.

A escolha do operador de complemento deve considerar o contexto da aplicação e os requisitos específicos do sistema fuzzy.

3.4 Relação Fuzzy

Neste exemplo, consideramos dois conjuntos fuzzy representando categorias de *Temperatura* (*Fria*, *Morna*, *Quente*, *Muito Quente*) e *Umidade* (*Baixa*, *Moderada*, *Alta*, *Muito Alta*). Os graus de pertinência para cada categoria são definidos como:

- Conjunto A (*Temperatura*): $[0.1, 0.5, 0.8, 1.0]$
- Conjunto B (*Umidade*): $[0.2, 0.4, 0.7, 0.9]$

Utilizamos diferentes operadores t-norma e s-norma para calcular as matrizes de relação fuzzy entre os conjuntos, destacando as interações entre os graus de pertinência.

3.4.1 t-Norma (Mínimo)

t-Norma (Mínimo):

$$\mu_{\text{Mínimo}}(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

$$R_{\text{Mínimo}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.8 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$$

3.4.2 t-Norma (Produto)

t-Norma (Produto):

$$\mu_{\text{Produto}}(x, y) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

$$R_{\text{Produto}} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.04 & 0.07 & 0.09 \\ 0.10 & 0.20 & 0.35 & 0.45 \\ 0.16 & 0.32 & 0.56 & 0.72 \\ 0.20 & 0.40 & 0.70 & 0.90 \end{bmatrix}$$

3.4.3 s-Norma (Máximo)

s-Norma (Máximo):

$$\mu_{\text{Máximo}}(x, y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

$$R_{\text{Máximo}} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.7 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 0.7 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.9 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

3.4.4 s-Norma (Soma Probabilística)

s-Norma (Soma Probabilística):

$$\mu_{\text{Soma Probabilística}}(x, y) = \mu_A(x) + \mu_B(y) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$$

$$R_{\text{Soma Probabilística}} = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.46 & 0.73 & 0.91 \\ 0.60 & 0.70 & 0.85 & 0.95 \\ 0.84 & 0.88 & 0.94 & 0.98 \\ 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

3.4.5 Conclusão

A seguir, destacamos as principais características de cada operador com base nos resultados obtidos:

- **t-Norma (Mínimo)**:
  - Este operador reflete a interseção mais conservadora entre os conjuntos fuzzy.
  - A matriz resultante apresenta valores que representam o menor grau de pertinência entre os elementos dos conjuntos.
  - É útil em aplicações onde se deseja garantir que a relação fuzzy seja restritiva e conservadora.
- **t-Norma (Produto)**:
  - Este operador permite suavização, gerando valores intermediários que refletem a interação proporcional entre os conjuntos fuzzy.
  - A matriz resultante apresenta valores que são o produto dos graus de pertinência dos elementos.

  - É ideal para modelar relações mais flexíveis e contínuas.

- **s-Norma (Máximo)**:
  - Este operador reflete a união mais abrangente entre os conjuntos fuzzy.
  - A matriz resultante apresenta valores que representam o maior grau de pertinência entre os elementos dos conjuntos.
  - É adequado para cenários onde se deseja destacar a união dos conjuntos.

- **s-Norma (Soma Probabilística)**:
  - Este operador reflete a união com suavização, garantindo que o resultado não ultrapasse 1.
  - A matriz resultante apresenta valores que combinam os graus de pertinência dos elementos de forma probabilística.
  - É útil em aplicações onde se deseja modelar interações suaves entre os conjuntos.

Os operadores analisados apresentam comportamentos distintos que os tornam adequados para diferentes aplicações:

- O **t-Norma (Mínimo)** é mais conservador e restritivo, sendo útil em cenários onde a precisão é essencial.
- O **t-Norma (Produto)** oferece uma abordagem mais suave e proporcional, sendo ideal para modelar interações contínuas.
- O **s-Norma (Máximo)** destaca a união dos conjuntos, sempre puxando para o maior grau de pertinência.
- O **s-Norma (Soma Probabilística)** combina suavidade e flexibilidade, sendo útil em aplicações que exigem modelagem probabilística.

3.5 Composição de Relações Fuzzy

Neste exemplo, consideramos dois conjuntos fuzzy representando categorias de *Temperatura* (*Fria*, *Morna*, *Quente*) e *Umidade* (*Baixa*, *Moderada*, *Alta*). As matrizes fuzzy foram calculadas utilizando diferentes operadores de composição.

Matriz de Temperatura (*Fria, Morna, Quente*):

$$\text{Temperatura} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.8 \\ 0.2 & 0.6 & 0.9 \\ 0.3 & 0.7 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Matriz de Umidade (*Baixa, Moderada, Alta*):

$$\text{Umidade} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.3 & 0.5 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}$$

As matrizes de composição fuzzy calculadas para os operadores acima são apresentadas a seguir:

3.5.1 Máximo-Mínimo

Máximo-Mínimo:

$$\mu_R(x, z) = \max_y \min(\mu_A(x, y), \mu_B(y, z))$$

$$R_{\text{Máximo-Mínimo}} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.9 \end{bmatrix}$$

3.5.2 Mínimo-Máximo

Mínimo-Máximo:

$$\mu_R(x, z) = \min_y \max(\mu_A(x, y), \mu_B(y, z))$$

$$R_{\text{Mínimo-Máximo}} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.7 \\ 0.3 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$$

3.5.3 Máximo-Produto

Máximo-Produto:

$$\mu_R(x, z) = \max_y(\mu_A(x, y) \cdot \mu_B(y, z))$$

$$R_{\text{Máximo-Produto}} = \begin{bmatrix} 0.32 & 0.48 & 0.72 \\ 0.36 & 0.54 & 0.81 \\ 0.40 & 0.60 & 0.90 \end{bmatrix}$$

3.6 Conclusão

A seguir, destacamos as principais características de cada operador com base nos resultados obtidos:

- **Máximo-Mínimo**:
  - Este operador reflete a interseção mais conservadora entre os conjuntos fuzzy.
  - A matriz resultante apresenta valores que representam o maior grau de pertinência mínimo entre os elementos dos conjuntos.
  - É útil em aplicações onde se deseja garantir que a relação fuzzy seja restritiva e conservadora.
- **Mínimo-Máximo**:
  - Este operador reflete a união mais conservadora entre os conjuntos fuzzy.
  - A matriz resultante apresenta valores que representam o menor grau de pertinência máximo entre os elementos dos conjuntos.
  - É adequado para cenários onde se deseja modelar relações menos restritivas, mas ainda conservadoras.
- **Máximo-Produto**:
  - Este operador permite suavização, considerando o produto dos graus de pertinência.
  - A matriz resultante apresenta valores intermediários, refletindo a interação proporcional entre os conjuntos fuzzy.
  - É ideal para aplicações onde se deseja modelar relações mais flexíveis e contínuas.

Os operadores analisados apresentam comportamentos distintos que os tornam adequados para diferentes aplicações:

- O **Máximo-Mínimo** é mais conservador e restritivo, sendo útil em cenários onde a precisão é essencial.
- O **Mínimo-Máximo** oferece uma abordagem mais flexível, mas ainda conservadora, sendo adequado para modelar relações menos restritivas.
- O **Máximo-Produto** é o mais suave e flexível, permitindo modelar interações contínuas e graduais entre os conjuntos fuzzy.