AV2Simulado

June 17, 2025

1 Árvore Geradora Mínima e Caminho Mínimo em Grafos

Vamos entender de forma simples e visual dois conceitos essenciais em grafos: **árvore geradora mínima** e **caminho mínimo**. Ambos são fundamentais para resolver problemas de conectividade e otimização em redes, logística, energia, transporte e muito mais.

1.1 Árvore Geradora Mínima

Imagine que você precisa conectar várias cidades (vértices) usando estradas (arestas), mas quer gastar o mínimo possível e garantir que todas estejam conectadas, sem formar voltas (ciclos). A **árvore geradora mínima** é exatamente isso: um subgrafo que conecta todos os vértices com o menor custo total possível, sem ciclos, usando exatamente *n-1* arestas (onde n é o número de vértices).

- **Exemplo prático:** Instalar cabos entre cidades gastando o mínimo possível.
- **Principais algoritmos:**
  - **Kruskal:** Escolhe sempre a estrada mais barata que não forma ciclo, até conectar tudo.
  - **Prim:** Começa em um vértice e vai conectando o mais próximo, sempre escolhendo a estrada mais barata para expandir a rede.

1.2 Caminho Mínimo

Agora, suponha que você quer ir de uma cidade até outra, passando pelo menor número de estradas ou gastando o menor custo possível. O **caminho mínimo** é a rota mais curta (em número de arestas ou em custo total) entre dois vértices.

- **Exemplo prático:** Encontrar a rota mais curta ou mais barata entre dois pontos de uma cidade.
- **Principais algoritmos:**
  - **Busca em Largura (BFS):** Para grafos sem pesos, encontra o caminho com menos arestas.
  - **Busca em Profundidade (DFS):** Explora todos os caminhos possíveis a partir de um vértice, útil para percorrer ou verificar a existência de caminhos, mas não garante o caminho mais curto.
  - **Dijkstra:** Para grafos com pesos positivos, encontra o caminho de menor custo.
  - **Bellman-Ford:** Para grafos com pesos negativos (mas sem ciclos negativos).

1.3 Relação e Aplicação

- **Árvore geradora mínima** resolve o problema de conectar todos os pontos de uma rede com o menor custo total, sem redundâncias.
- **Caminho mínimo** resolve o problema de ir de um ponto a outro da forma mais eficiente possível.
- **Busca em Largura (BFS)** e **Busca em Profundidade (DFS)** são algoritmos fundamentais para explorar grafos, sendo a BFS ideal para encontrar caminhos mínimos em grafos não ponderados e a DFS útil para percorrer e analisar a estrutura do grafo.

Ambos os conceitos são usados para garantir eficiência, economia e conectividade em sistemas reais. Saber aplicar cada técnica no contexto certo é fundamental para otimizar redes

1.4 Questão 01 - Arvore Geradora Mínima

Uma empresa de energia deseja instalar cabos para conectar 7 bairros de forma eficiente. A rede deve ser construída de modo que:

Todos os bairros estejam conectados direta ou indiretamente. Não existam ciclos na rede. A remoção de qualquer cabo desconecte a rede. Com base nessas condições e nas definições de árvores em grafos, qual é o número mínimo de cabos necessários para conectar todos os bairros?

[150]:
```
## Questão 1
import networkx as nx

n_bairros = 7
# Em uma árvore com n vértices, o número de arestas é n-1
arestas_necessarias = n_bairros - 1
print(f"Número de cabos necessários: {arestas_necessarias}")
```

```
Número de cabos necessários: 6
```

1.4.1 Explicação Detalhada sobre Árvore

A situação apresentada corresponde à definição de uma **árvore** em Teoria dos Grafos. Vamos analisar cada condição:

1. **Todos os bairros devem estar conectados direta ou indiretamente.**
   Isso significa que o grafo deve ser **conexo**: é possível ir de qualquer bairro a qualquer outro, mesmo que seja passando por outros bairros intermediários.

2. **Não pode haver ciclos na rede de cabos.**
   Um ciclo ocorre quando é possível sair de um bairro, passar por outros e retornar ao bairro inicial sem repetir arestas. A ausência de ciclos caracteriza um grafo **acíclico**.

3. **Se qualquer cabo for removido, a rede ficará desconectada.**
   Isso significa que todas as conexões são essenciais para manter a rede unida. Em outras palavras, o grafo é **minimamente conexo**: não há arestas redundantes.

Essas três propriedades juntas definem uma **árvore**. Em uma árvore com n vértices (neste caso, bairros), sempre existem exatamente $n-1$ arestas (cabos). Isso é uma propriedade fundamental das árvores em grafos.

Aplicando ao problema:
- Temos $n = 7$ bairros. - Logo, o número mínimo de cabos necessários é $n - 1 = 6$.

Se usarmos menos de 6 cabos, não conseguiremos conectar todos os bairros. Se usarmos mais de 6 cabos, obrigatoriamente haverá pelo menos um ciclo, o que viola a condição 2.

Portanto, a resposta correta é **6 cabos**.

1.5 Questão 2: Busca em Largura (BFS)

Uma empresa de energia deseja monitorar o fornecimento em uma rede de subestações, representada por um grafo não direcionado. Os vértices são subestações e as arestas representam linhas de transmissão entre elas. Para garantir o monitoramento eficiente, a empresa precisa calcular o vetor de roteamento correto para alcançar todas as subestações a partir de uma subestação inicial, utilizando a Busca em Largura (BFS).

Considere o grafo abaixo, onde as subestações e as linhas são:

1. Subestação X - Subestação Y
2. Subestação X - Subestação Z
3. Subestação Y - Subestação W
4. Subestação Z - Subestação W
5. Subestação Z - Subestação V
6. Subestação W - Subestação U
7. Subestação V - Subestação U

Qual vetor de roteamento, gerado a partir da Subestação X, está correto?

1.6 Busca em Largura (BFS)

A **Busca em Largura** (BFS - *Breadth-First Search*) é um algoritmo utilizado para percorrer ou buscar elementos em grafos (ou árvores). O objetivo é visitar todos os vértices acessíveis a partir de um vértice inicial, explorando primeiro os vizinhos mais próximos antes de avançar para os mais distantes.

1.6.1 Como funciona a BFS?

1. **Escolha um vértice inicial** e marque-o como visitado.
2. **Coloque o vértice em uma fila**.
3. Enquanto a fila não estiver vazia:
   - Remova o primeiro vértice da fila.
   - Para cada vizinho não visitado desse vértice:

- Marque o vizinho como visitado.
- Adicione o vizinho à fila.

1.6.2 Características

- Garante encontrar o caminho mais curto (menor número de arestas) em grafos não ponderados.
- Utiliza uma **fila** para controlar a ordem de visitação.
- Visita todos os vértices a uma distância antes de avançar para a próxima.

1.6.3 Exemplo de aplicação

- Encontrar o caminho mais curto entre dois pontos em um mapa.
- Verificar se um grafo é conexo.
-

1.7 Encontrar todos os vértices a uma certa distância de um ponto.

Resumo:
A BFS é ideal para explorar grafos em "camadas", sendo muito útil para encontrar caminhos mínimos e analisar a estrutura de redes.

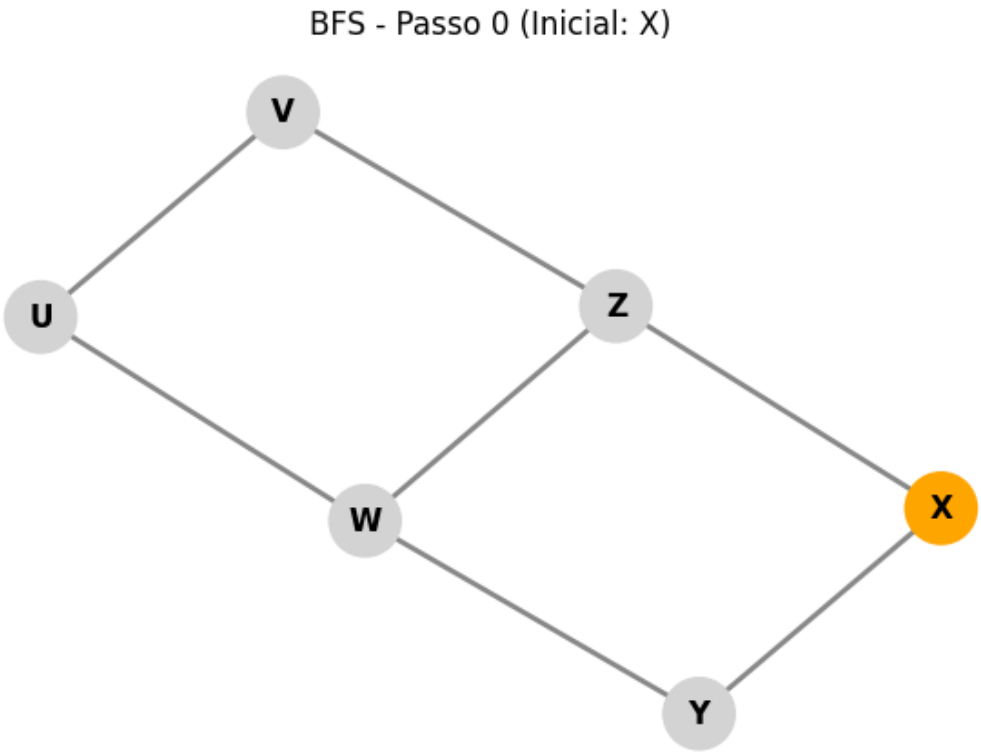
[151]:
```python
# Resolvendo o vetor de roteamento usando BFS a partir da Subestação X
import networkx as nx

# Criação do grafo
G = nx.Graph()
G.add_edges_from([
    ('X', 'Y'),
    ('X', 'Z'),
    ('Y', 'W'),
    ('Z', 'W'),
    ('Z', 'V'),
    ('W', 'U'),
    ('V', 'U')
])

# BFS a partir da subestação X
from collections import deque
import matplotlib.pyplot as plt

def bfs_routing_vector_verbose(graph, start):
    visitados = set()
    fila = deque([start])
    vetor = []
    predecessor = {start: None}
    passo = 0
```

```
    pos = nx.spring_layout(graph, seed=42)  # posição fixa para todos os plots

    print(f"Passo {passo}:")
    print(f"  Fila inicial: {list(fila)}")
    print(f"  Visitados: {vetor}")
    print(f"  Predecessores: {predecessor}")
    print(f"  Nenhum vértice processado ainda.\n")
    plt.figure(figsize=(6,4))
    nx.draw(
        graph, pos, with_labels=True,
        node_color=['orange' if n == start else 'lightgray' for n in graph.
↪nodes],
        node_size=800, font_weight='bold',
        edge_color='#888', width=2
    )
    plt.title(f"BFS - Passo {passo} (Inicial: {start})")
    plt.show()
    passo += 1

    while fila:
        atual = fila.popleft()
        print(f"Passo {passo}:")
        print(f"  Fila antes de processar: {list(fila)}")
        print(f"  Visitados até agora: {vetor}")
        print(f"  Vértice atual: {atual}")
        print(f"  Predecessores: {predecessor}")

        # Cores dos nós
        node_colors = []
        for n in graph.nodes:
            if n == atual:
                node_colors.append('orange')      # atual
            elif n in vetor:
                node_colors.append('lightgreen')  # já visitado
            elif n in fila:
                node_colors.append('yellow')      # na fila
            else:
                node_colors.append('lightgray')   # não visitado

        # Cores das arestas: destaque as arestas do nó atual
        edge_colors = []
        for u, v in graph.edges:
            if (u == atual and v in graph.neighbors(atual)) or (v == atual and␣
↪u in graph.neighbors(atual)):
                edge_colors.append('red')
            elif u in vetor and v in vetor:
                edge_colors.append('green')
```

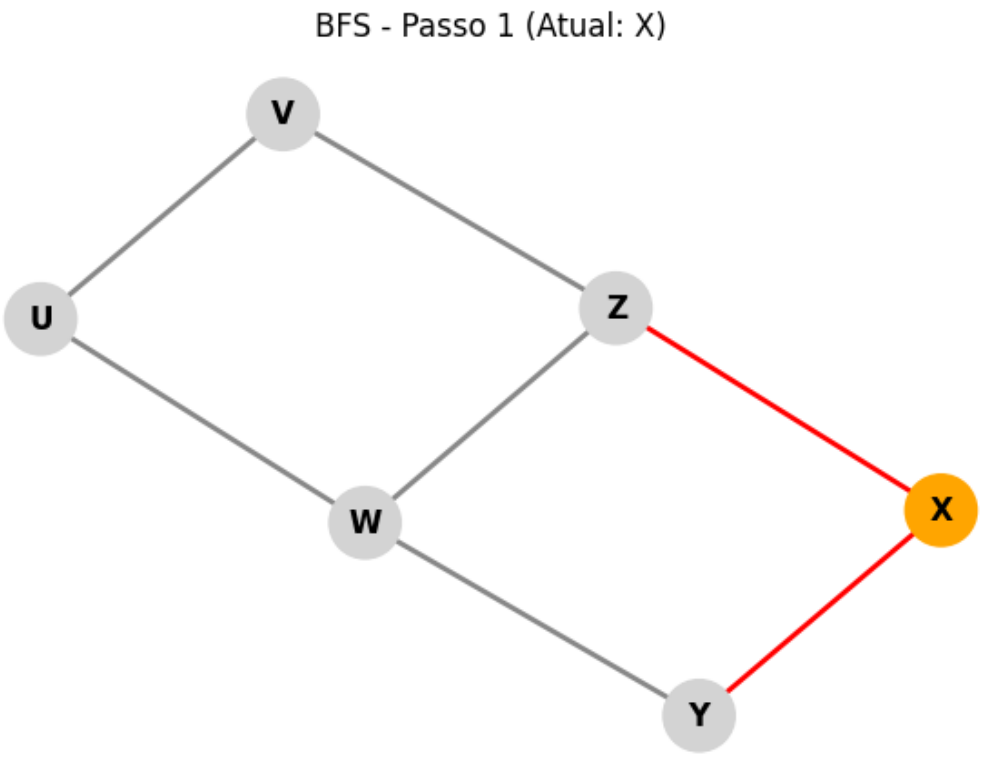
```
            else:
                edge_colors.append('#888')

        plt.figure(figsize=(6,4))
        nx.draw(
            graph, pos, with_labels=True,
            node_color=node_colors, node_size=800, font_weight='bold',
            edge_color=edge_colors, width=2
        )
        plt.title(f"BFS - Passo {passo} (Atual: {atual})")
        plt.show()

        if atual not in visitados:
            visitados.add(atual)
            vetor.append(atual)
            for vizinho in sorted(graph.neighbors(atual)):
                if vizinho not in visitados and vizinho not in fila:
                    fila.append(vizinho)
                    if vizinho not in predecessor:
                        predecessor[vizinho] = atual
        print(f"  Fila após adicionar vizinhos: {list(fila)}")
        print(f"  Predecessores atualizados: {predecessor}\n")
        passo += 1
    print("Vetor de roteamento final:", vetor)
    print("Predecessores finais:", predecessor)
    return vetor, predecessor

# Executando a versão detalhada
bfs_routing_vector_verbose(G, 'X')

import pandas as pd

# Executando a versão detalhada
vetor, predecessor = bfs_routing_vector_verbose(G, 'X')

# Montando e exibindo a tabela de roteamento com pandas (transposta)
tabela = pd.DataFrame({
    'Subestação': list(predecessor.keys()),
    'Predecessor': [predecessor[v] for v in predecessor]
})
# Exibindo a tabela transposta
print("\nTabela de Roteamento (BFS) - Transposta:")
print(tabela.T)

# ...código anterior...

# Plotando a árvore de busca (BFS) com layout hierárquico se possível
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt

# ...código anterior...

# Plotando a árvore de busca (BFS) de forma simples e orientada para cima

arvore_busca = nx.DiGraph()
for filho, pai in predecessor.items():
    if pai is not None:
        arvore_busca.add_edge(pai, filho)

pos = {
    'X': (0, 0),
    'Y': (-2, -1),
    'Z': (2, -1),
    'V': (3, -2),
    'W': (-3, -2),
    'U': (-4, -3)
}
plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(
    arvore_busca, pos, with_labels=True,
    node_color='lightgreen', node_size=800, font_weight='bold',
    edge_color='orange', width=2, arrows=True
)
plt.gca()  # Garante que a raiz fique em cima
plt.title("Árvore de Busca (BFS)")
plt.show()
```

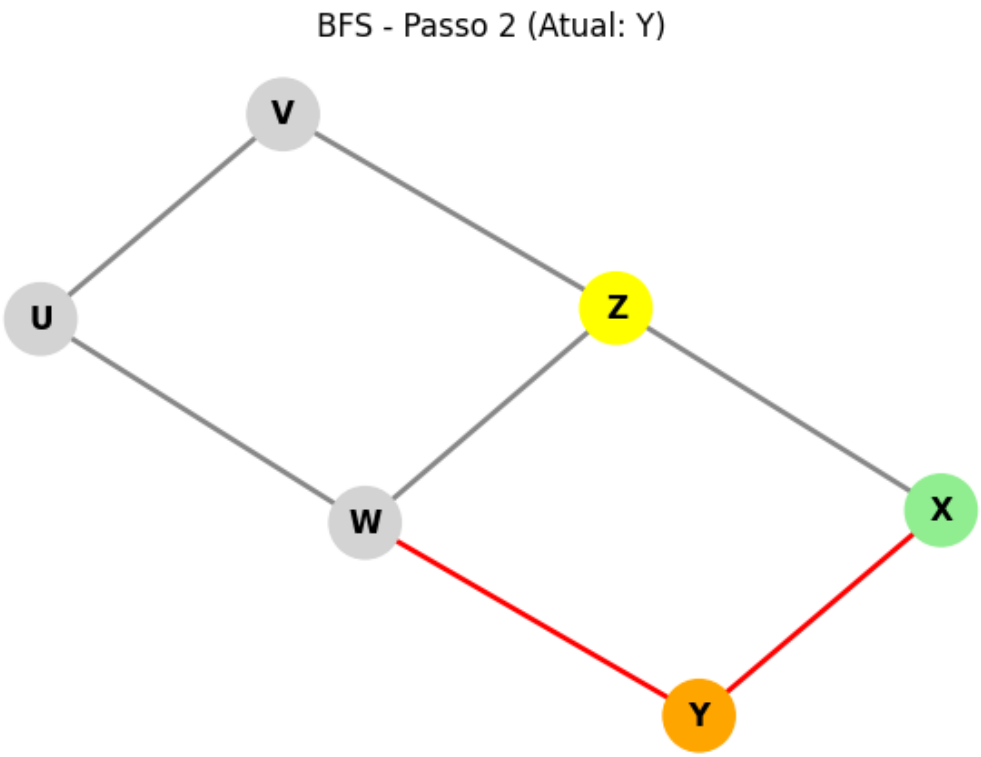
```
Passo 0:
  Fila inicial: ['X']
  Visitados: []
  Predecessores: {'X': None}
  Nenhum vértice processado ainda.
```



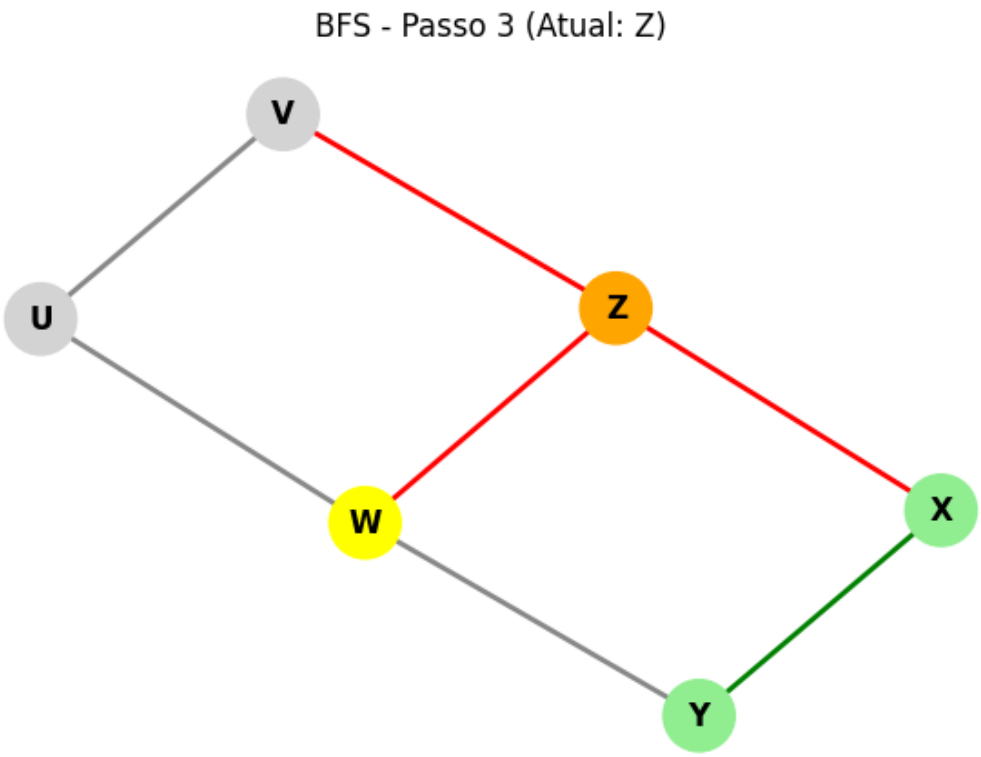

```
Passo 1:
  Fila antes de processar: []
  Visitados até agora: []
  Vértice atual: X
  Predecessores: {'X': None}
```



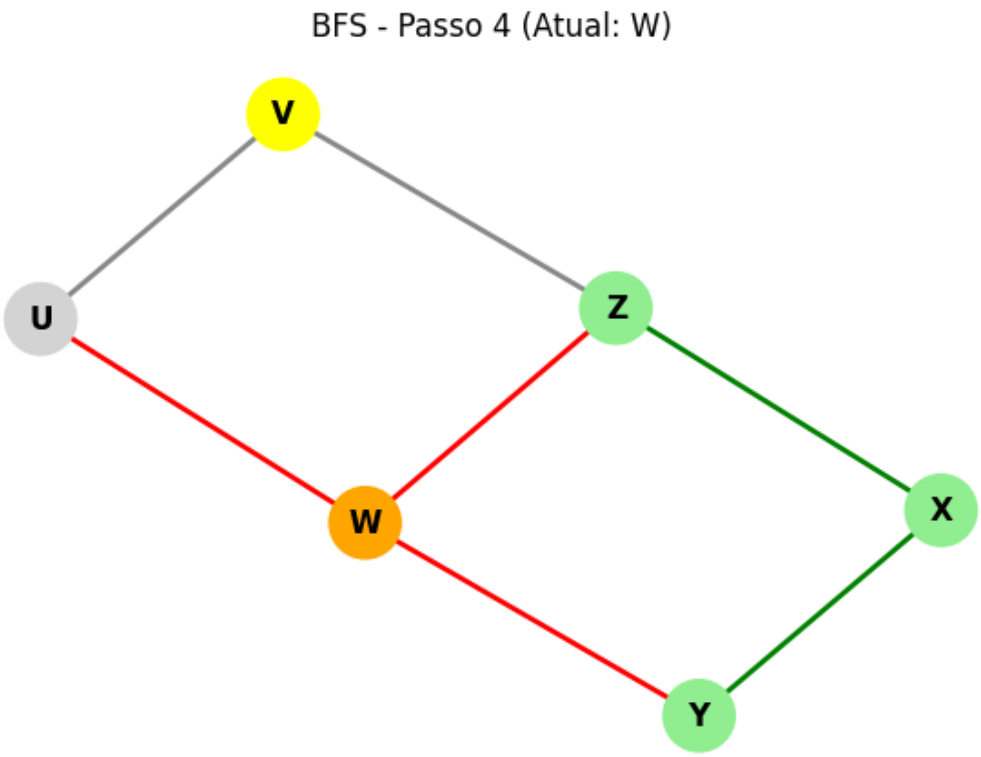

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['Y', 'Z']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X'}

Passo 2:
  Fila antes de processar: ['Z']
  Visitados até agora: ['X']
  Vértice atual: Y
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X'}
```



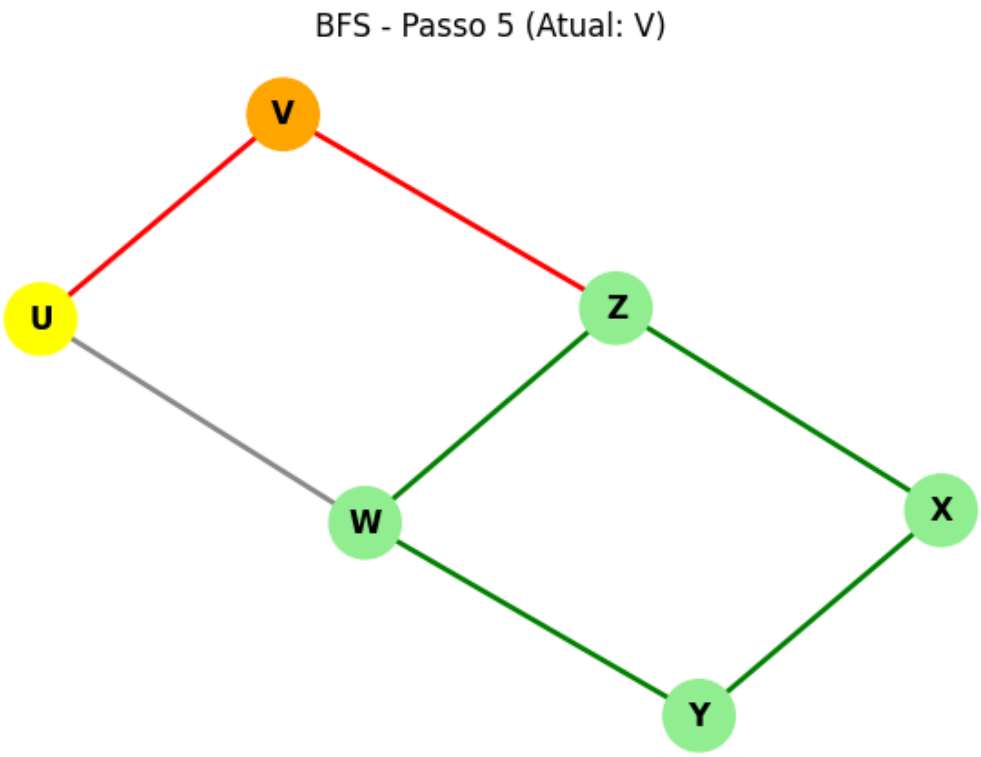

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['Z', 'W']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y'}

Passo 3:
  Fila antes de processar: ['W']
  Visitados até agora: ['X', 'Y']
  Vértice atual: Z
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y'}
```



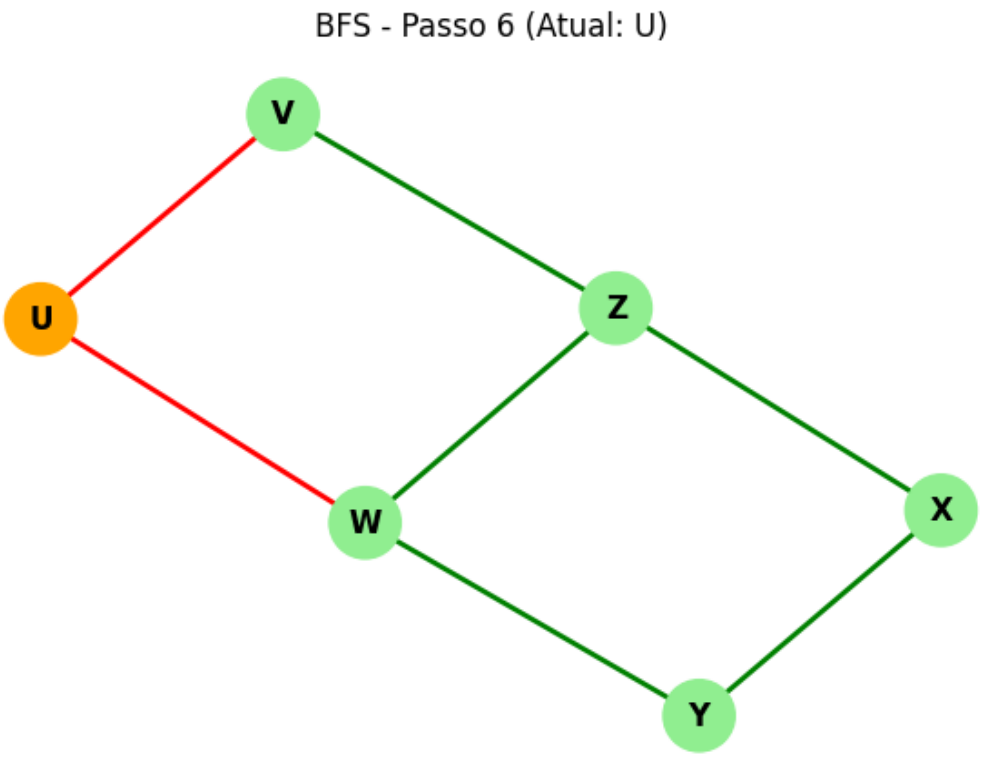

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['W', 'V']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z'}

Passo 4:
  Fila antes de processar: ['V']
  Visitados até agora: ['X', 'Y', 'Z']
  Vértice atual: W
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z'}
```



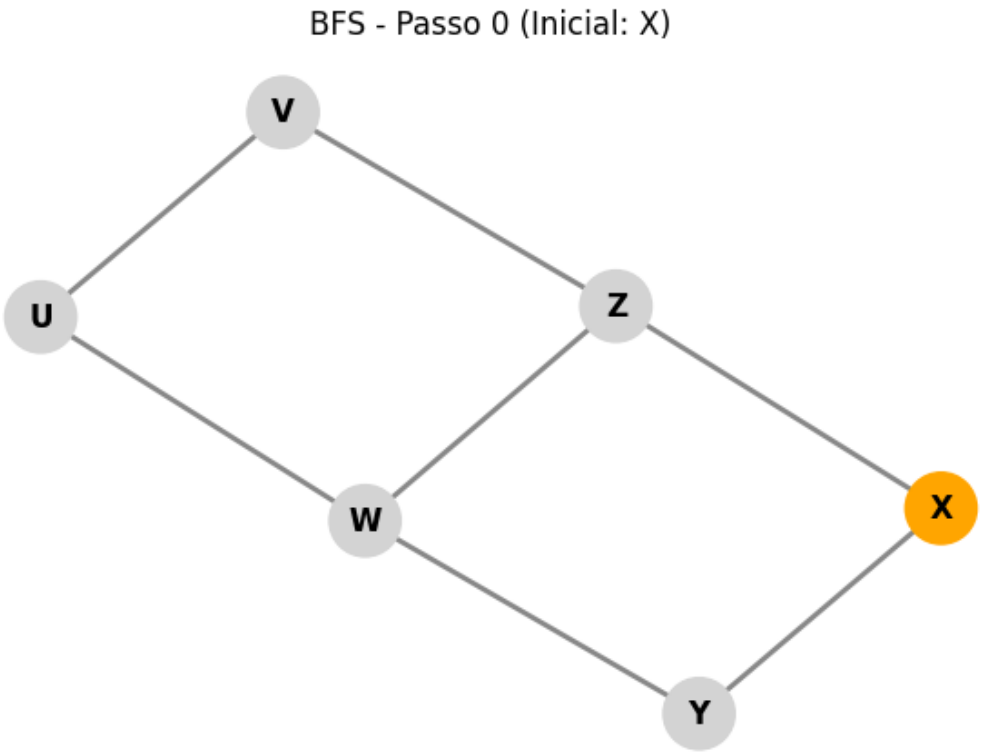

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['V', 'U']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z',
'U': 'W'}

Passo 5:
  Fila antes de processar: ['U']
  Visitados até agora: ['X', 'Y', 'Z', 'W']
  Vértice atual: V
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z', 'U': 'W'}
```



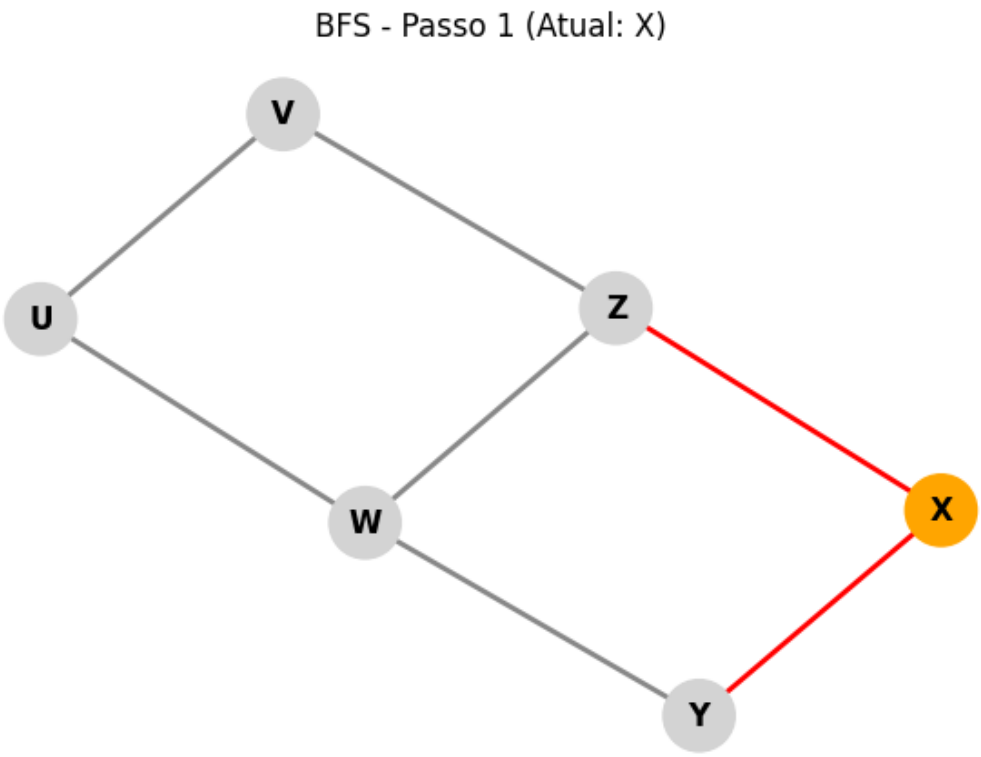

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['U']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z',
'U': 'W'}

Passo 6:
  Fila antes de processar: []
  Visitados até agora: ['X', 'Y', 'Z', 'W', 'V']
  Vértice atual: U
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z', 'U': 'W'}
```



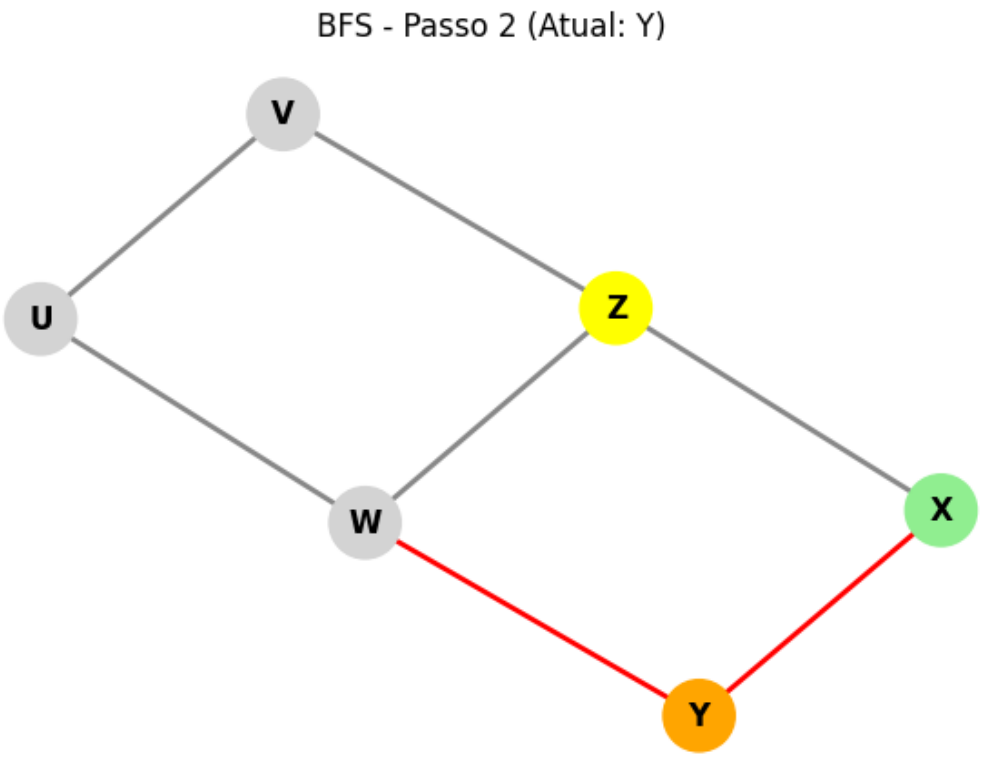

```
  Fila após adicionar vizinhos: []
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z',
'U': 'W'}

Vetor de roteamento final: ['X', 'Y', 'Z', 'W', 'V', 'U']
Predecessores finais: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z', 'U':
'W'}
Passo 0:
  Fila inicial: ['X']
  Visitados: []
  Predecessores: {'X': None}
  Nenhum vértice processado ainda.
```



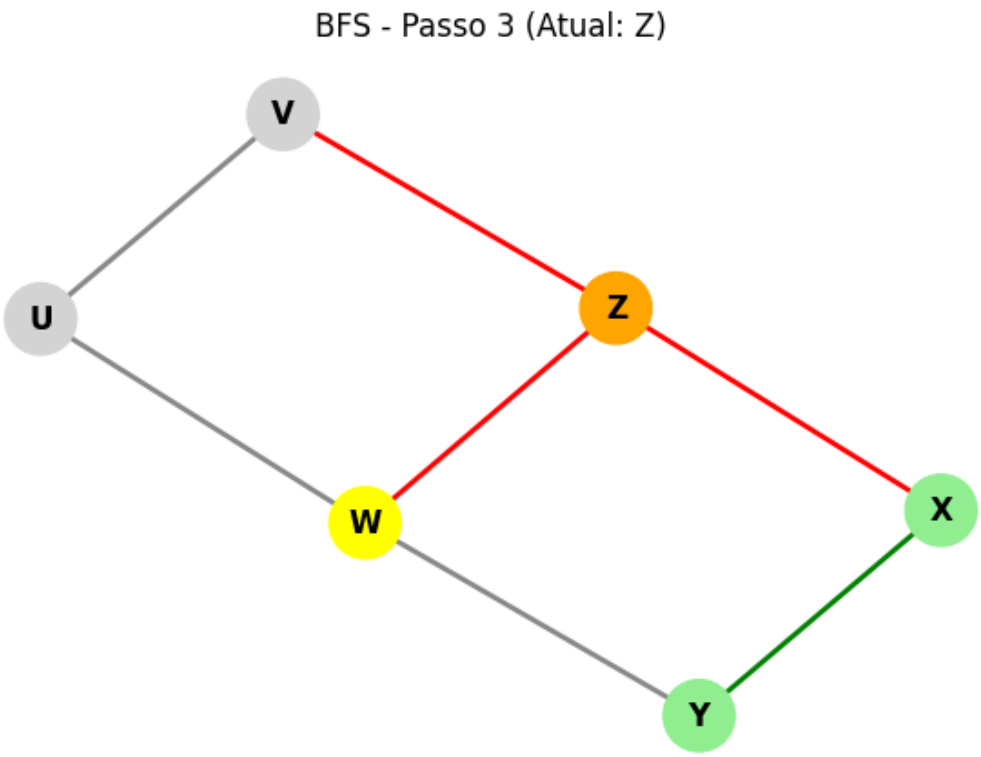

```
Passo 1:
  Fila antes de processar: []
  Visitados até agora: []
  Vértice atual: X
  Predecessores: {'X': None}
```



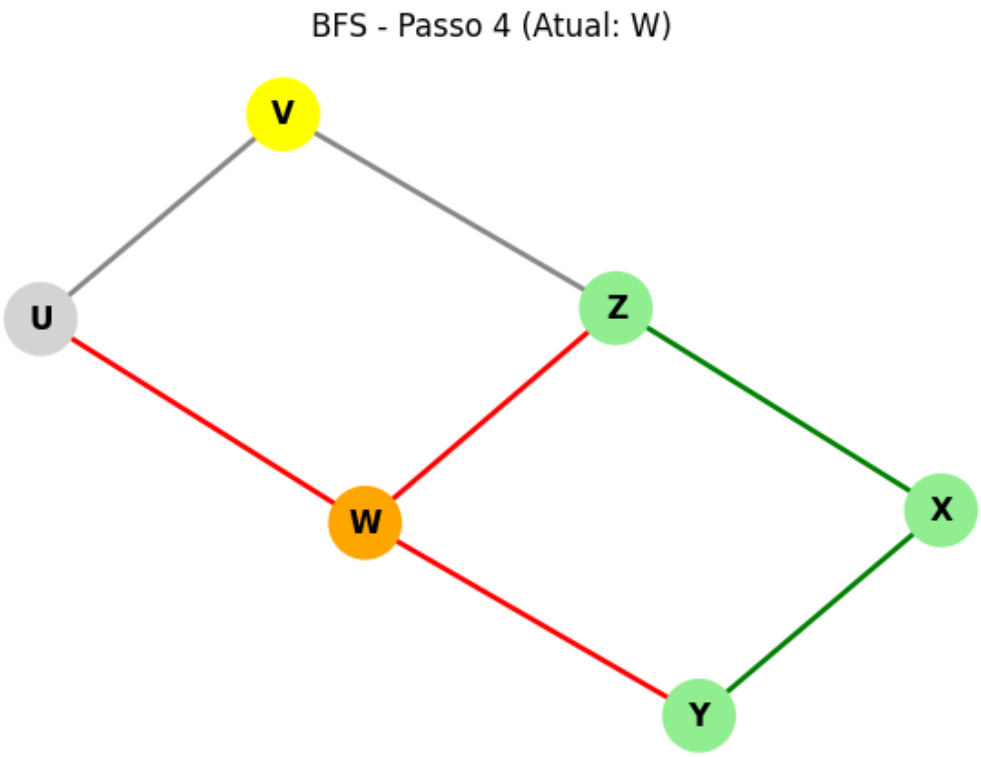

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['Y', 'Z']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X'}

Passo 2:
  Fila antes de processar: ['Z']
  Visitados até agora: ['X']
  Vértice atual: Y
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X'}
```



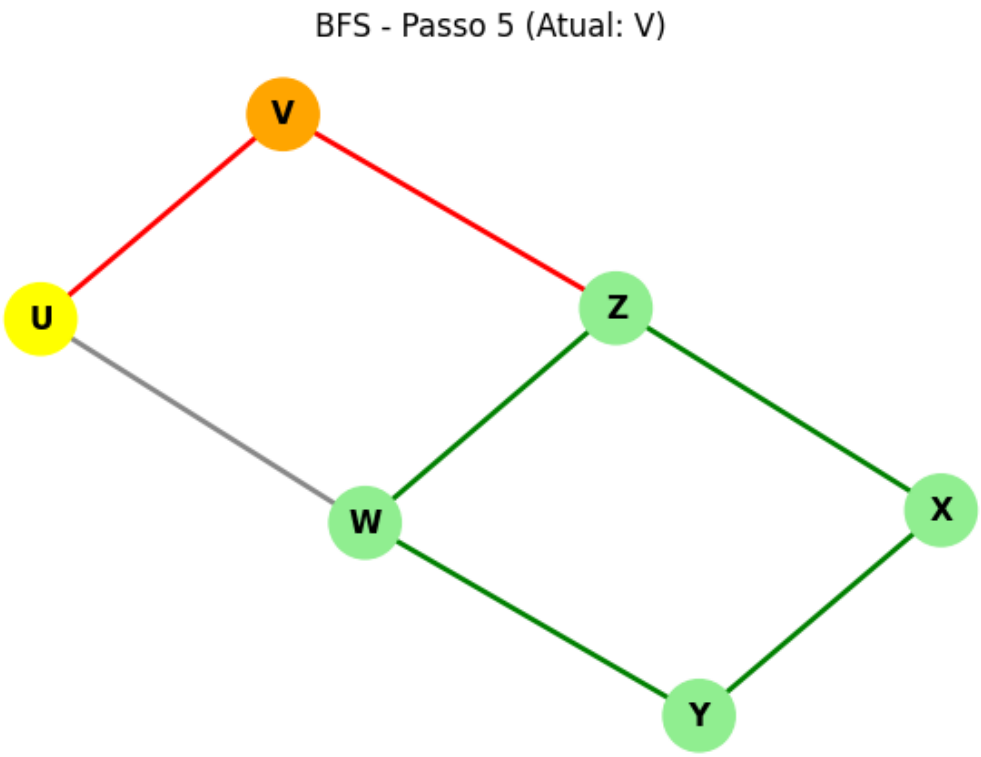

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['Z', 'W']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y'}

Passo 3:
  Fila antes de processar: ['W']
  Visitados até agora: ['X', 'Y']
  Vértice atual: Z
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y'}
```



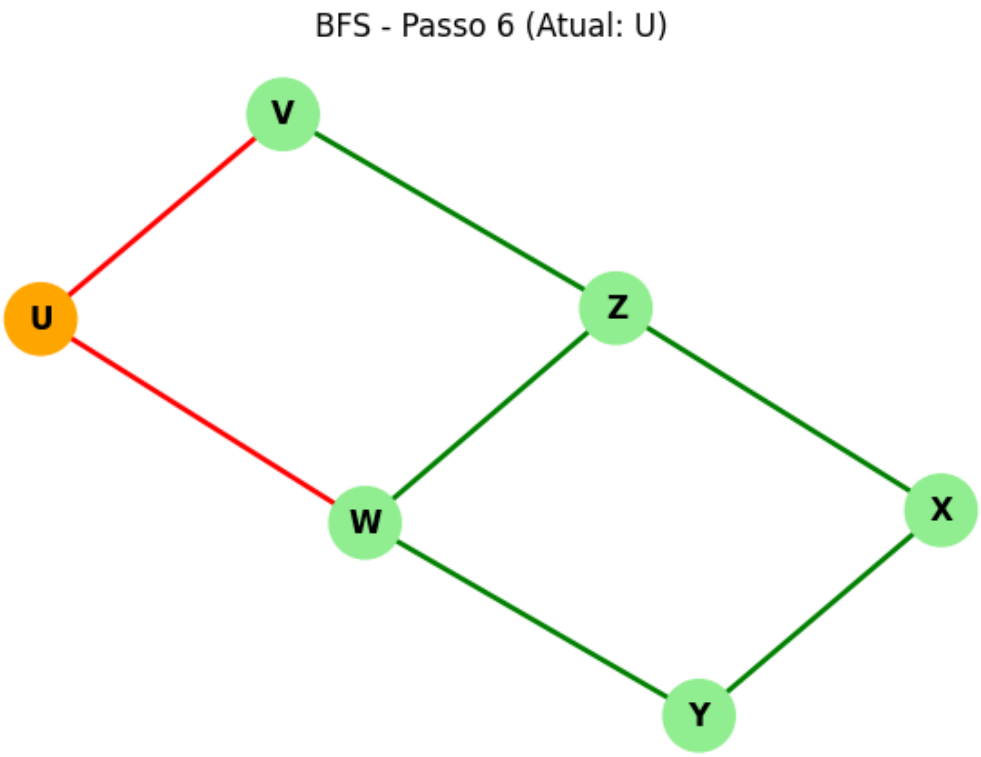

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['W', 'V']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z'}

Passo 4:
  Fila antes de processar: ['V']
  Visitados até agora: ['X', 'Y', 'Z']
  Vértice atual: W
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z'}
```



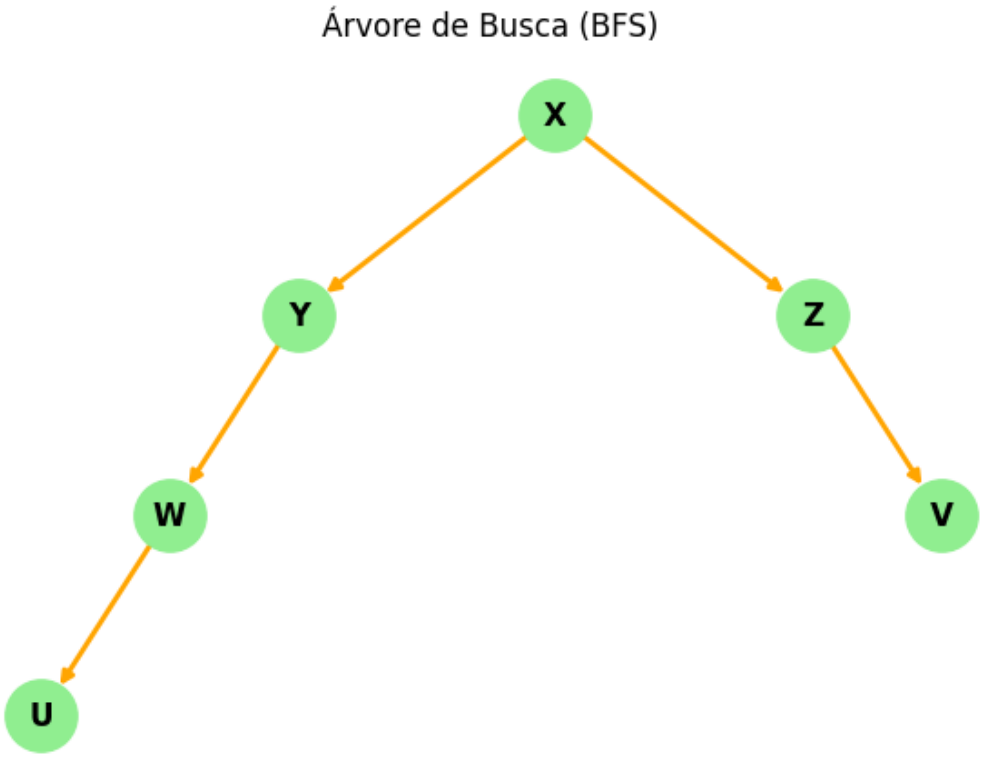

```
  Fila após adicionar vizinhos: ['V', 'U']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z',
'U': 'W'}

Passo 5:
  Fila antes de processar: ['U']
  Visitados até agora: ['X', 'Y', 'Z', 'W']
  Vértice atual: V
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z', 'U': 'W'}
```




```
  Fila após adicionar vizinhos: ['U']
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z',
'U': 'W'}

Passo 6:
  Fila antes de processar: []
  Visitados até agora: ['X', 'Y', 'Z', 'W', 'V']
  Vértice atual: U
  Predecessores: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z', 'U': 'W'}
```




```
  Fila após adicionar vizinhos: []
  Predecessores atualizados: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z',
'U': 'W'}

Vetor de roteamento final: ['X', 'Y', 'Z', 'W', 'V', 'U']
Predecessores finais: {'X': None, 'Y': 'X', 'Z': 'X', 'W': 'Y', 'V': 'Z', 'U':
'W'}

Tabela de Roteamento (BFS) - Transposta:
                0  1  2  3  4  5
Subestação      X  Y  Z  W  V  U
Predecessor  None  X  X  Y  Z  W
```



1.7.1 Explicação Detalhada

A questão pede o vetor de roteamento gerado pela **Busca em Largura (BFS)**, que é um algoritmo para percorrer grafos visitando todos os vértices acessíveis a partir de um vértice inicial, explorando primeiro os vizinhos mais próximos.

No contexto do problema: - Cada subestação é um vértice. - Cada linha de transmissão é uma aresta. - O vetor de roteamento é a ordem em que as subestações são visitadas a partir da subestação inicial (X), seguindo a BFS.

Como funciona a BFS: 1. Começa pelo vértice inicial (X), marcando-o como visitado. 2. Visita todos os vizinhos diretos de X (Y e Z). 3. Em seguida, visita os vizinhos dos vizinhos, e assim por diante, sempre explorando primeiro os vértices mais próximos do ponto de partida. 4. O algoritmo garante que cada vértice é visitado apenas uma vez.

No exemplo acima, o vetor de roteamento pode ser:
[‘X’, ‘Y’, ‘Z’, ‘W’, ‘V’, ‘U’]

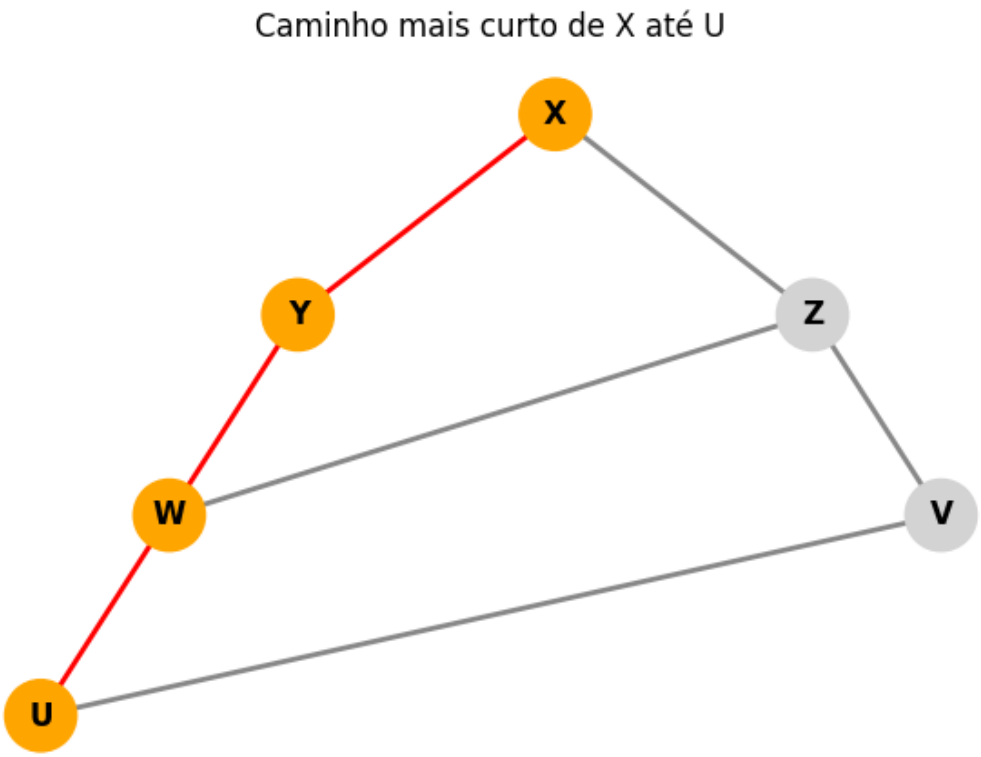
A ordem pode variar dependendo da ordem dos vizinhos, mas sempre segue o princípio de visitar primeiro os vértices mais próximos do inicial.

Portanto, o vetor de roteamento correto é aquele que reflete a ordem de visitação da BFS a partir da subestação inicial.

[152]:
```
# ...código anterior...

# Usando o vetor de predecessores da BFS para reconstruir o caminho de origem
 ↪até destino
origem = 'X'
destino = 'U'

def caminho_por_predecessor(predecessor, origem, destino):
    caminho = [destino]
    atual = destino
    while atual != origem:
        atual = predecessor.get(atual)
        if atual is None:
            return []  # Não existe caminho
        caminho.append(atual)
    caminho.reverse()
    return caminho

caminho_mais_curto = caminho_por_predecessor(predecessor, origem, destino)
print(f"Caminho mais curto de {origem} até {destino} (usando predecessor da
 ↪BFS): {caminho_mais_curto}")

# Visualizando o caminho encontrado
# Use o mesmo pos definido anteriormente para manter o layout de árvore
edge_colors = []
for u, v in G.edges:
    if (u, v) in zip(caminho_mais_curto, caminho_mais_curto[1:]) or (v, u) in
 ↪zip(caminho_mais_curto, caminho_mais_curto[1:]):
        edge_colors.append('red')
    else:
        edge_colors.append('#888')

node_colors = ['orange' if n in caminho_mais_curto else 'lightgray' for n in G.
 ↪nodes]

plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_color=node_colors, node_size=800,
 ↪font_weight='bold', edge_color=edge_colors, width=2)
plt.title(f"Caminho mais curto de {origem} até {destino}")
```

```
Caminho mais curto de X até U (usando predecessor da BFS): ['X', 'Y', 'W', 'U']
```

[152]:
```
Text(0.5, 1.0, 'Caminho mais curto de X até U')
```



1.7.2 Exemplo de busca de caminho

No exemplo acima, utilizamos o algoritmo de caminho mais curto do NetworkX (que, em grafos não ponderados, utiliza a Busca em Largura - BFS) para encontrar o caminho mais curto entre a subestação X e a subestação U.

Caminho encontrado:
[‘X’, ‘Y’, ‘W’, ‘U’]

Ou seja, para ir de X até U, o trajeto mais curto passa por Y e W.

Explicação:
- O algoritmo procura o menor número de arestas entre o ponto de origem e o destino. - No grafo dado, existem múltiplos caminhos possíveis entre X e U, mas o caminho com menos arestas é X → Y → W → U (com 3 arestas). - O caminho é destacado em vermelho no grafo plotado.

Portanto, a resposta correta para o caminho mais curto entre X e U é:
[‘X’, ‘Y’, ‘W’, ‘U’]

1.8 Questão 3: Busca em Profundidade (DFS)

Uma empresa de tecnologia deseja analisar a conectividade entre os computadores de sua rede interna. A rede é representada como um grafo, onde os vértices são computadores e as arestas representam conexões diretas entre eles. A empresa quer calcular o vetor de roteamento correto

para alcançar todos os computadores a partir de um computador inicial, utilizando a busca em profundidade (DFS).

Considere o grafo abaixo, onde os computadores e as conexões são representados como:

1. Computador A - Computador B
2. Computador A - Computador C
3. Computador B - Computador D
4. Computador C - Computador D
5. Computador C - Computador E
6. Computador D - Computador F
7. Computador E - Computador F

Qual vetor de roteamento, gerado a partir do Computador A, está correto? Mostre o passo a passo da DFS.

1.9 Busca em Profundidade (DFS)

A **Busca em Profundidade** (DFS - *Depth-First Search*) é um algoritmo utilizado para percorrer ou buscar elementos em grafos (ou árvores). O objetivo é explorar o grafo indo o mais fundo possível em cada ramificação antes de retroceder.

1.9.1 Como funciona a DFS?

1. **Escolha um vértice inicial** e marque-o como visitado.
2. Para cada vizinho não visitado desse vértice:
   - Visite o vizinho e repita o processo recursivamente.
3. Se não houver mais vizinhos não visitados, volte (retroceda) para o vértice anterior e continue a busca.

A DFS pode ser implementada de forma recursiva ou utilizando uma pilha.

1.9.2 Características

- Explora o grafo em profundidade, indo até o final de cada caminho antes de voltar.
- Utiliza uma **pilha** (explícita ou implícita via recursão) para controlar a ordem de visitação.
- Pode ser usada para detectar ciclos, componentes conexas, caminhos e ordenação topológica.

1.9.3 Exemplo de aplicação

- Verificar se existe um caminho entre dois vértices.
- Encontrar componentes conexas em grafos.
- Resolver labirintos.
- Ordenação topológica em grafos direcionados acíclicos.

Resumo:
A DFS é ideal para explorar todos os caminhos possíveis a partir de um vértice, sendo muito útil para análise estrutural de grafos e resolução de problemas que exigem percorrer todas as possibilidades.

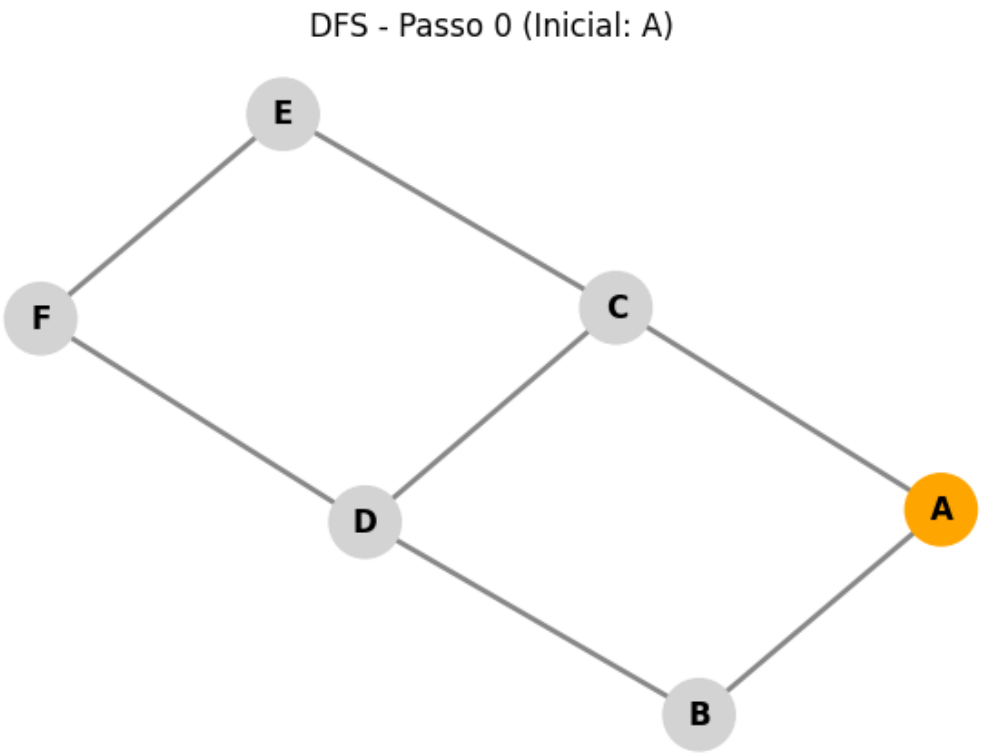
[153]:
```
# Passo a passo da DFS com visualização

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

G_dfs = nx.Graph()
G_dfs.add_edges_from([
    ('A', 'B'),
    ('A', 'C'),
    ('B', 'D'),
    ('C', 'D'),
    ('C', 'E'),
    ('D', 'F'),
    ('E', 'F')
])

def dfs_routing_vector_verbose(graph, start):
    visitados = set()
    vetor = []
    pilha = [start]
    predecessor = {start: None}
    passo = 0
    pos = nx.spring_layout(graph, seed=42)

    print(f"Passo {passo}:")
    print(f"  Pilha inicial: {pilha}")
    print(f"  Visitados: {vetor}")
    print(f"  Predecessores: {predecessor}")
    print(f"  Nenhum vértice processado ainda.\n")
    plt.figure(figsize=(6,4))
    nx.draw(
        graph, pos, with_labels=True,
        node_color=['orange' if n == start else 'lightgray' for n in graph.
 ↪nodes],
        node_size=800, font_weight='bold',
        edge_color='#888', width=2
    )
    plt.title(f"DFS - Passo {passo} (Inicial: {start})")
    plt.show()
    passo += 1

    while pilha:
        atual = pilha.pop()
```

```
        if atual not in visitados:
            print(f"Passo {passo}:")
            print(f"  Pilha: {pilha}")
            print(f"  Visitados: {vetor}")
            print(f"  Vértice atual: {atual}")
            print(f"  Predecessores: {predecessor}")

            # Cores dos nós
            node_colors = []
            for n in graph.nodes:
                if n == atual:
                    node_colors.append('orange')
                elif n in vetor:
                    node_colors.append('lightgreen')
                elif n in pilha:
                    node_colors.append('yellow')
                else:
                    node_colors.append('lightgray')

            # Cores das arestas: destaque as arestas do nó atual
            edge_colors = []
            for u, v in graph.edges:
                if (u == atual and v in graph.neighbors(atual)) or (v == atual␣
↪and u in graph.neighbors(atual)):
                    edge_colors.append('red')
                elif u in vetor and v in vetor:
                    edge_colors.append('green')
                else:
                    edge_colors.append('#888')

            plt.figure(figsize=(6,4))
            nx.draw(
                graph, pos, with_labels=True,
                node_color=node_colors, node_size=800, font_weight='bold',
                edge_color=edge_colors, width=2
            )
            plt.title(f"DFS - Passo {passo} (Atual: {atual})")
            plt.show()

            visitados.add(atual)
            vetor.append(atual)
            # Adiciona vizinhos não visitados na pilha (ordem reversa para␣
↪manter ordem alfabética)
            for vizinho in sorted(graph.neighbors(atual), reverse=True):
                if vizinho not in visitados and vizinho not in pilha:
                    pilha.append(vizinho)
                    if vizinho not in predecessor:
```

```
                        predecessor[vizinho] = atual
            print(f"  Pilha após adicionar vizinhos: {pilha}")
            print(f"  Predecessores atualizados: {predecessor}\n")
            passo += 1
    print("Vetor de roteamento final (DFS):", vetor)
    print("Predecessores finais:", predecessor)
    return vetor, predecessor

# Executando a versão detalhada
dfs_routing_vector_verbose(G_dfs, 'A')


import pandas as pd

# Executando a versão detalhada
vetor, predecessor = dfs_routing_vector_verbose(G_dfs, 'A')

# Montando e exibindo a tabela de roteamento com pandas (transposta)
tabela = pd.DataFrame({
    'Subestação': list(predecessor.keys()),
    'Predecessor': [predecessor[v] for v in predecessor]
})
# Exibindo a tabela transposta
print("\nTabela de Roteamento (BFS) - Transposta:")
print(tabela.T)

# ...código anterior...

# Plotando a árvore de busca (BFS) com layout hierárquico se possível
import matplotlib.pyplot as plt

# ...código anterior...

# Plotando a árvore de busca (BFS) de forma simples e orientada para cima
pos = {
    'A': (0, 0),
    'B': (-2, -1),
    'C': (2, -1),
    'D': (-3, -2),
    'E': (-4, -3),
    'F': (-5, -4)
}


arvore_busca = nx.DiGraph()
for filho, pai in predecessor.items():
    if pai is not None:
```

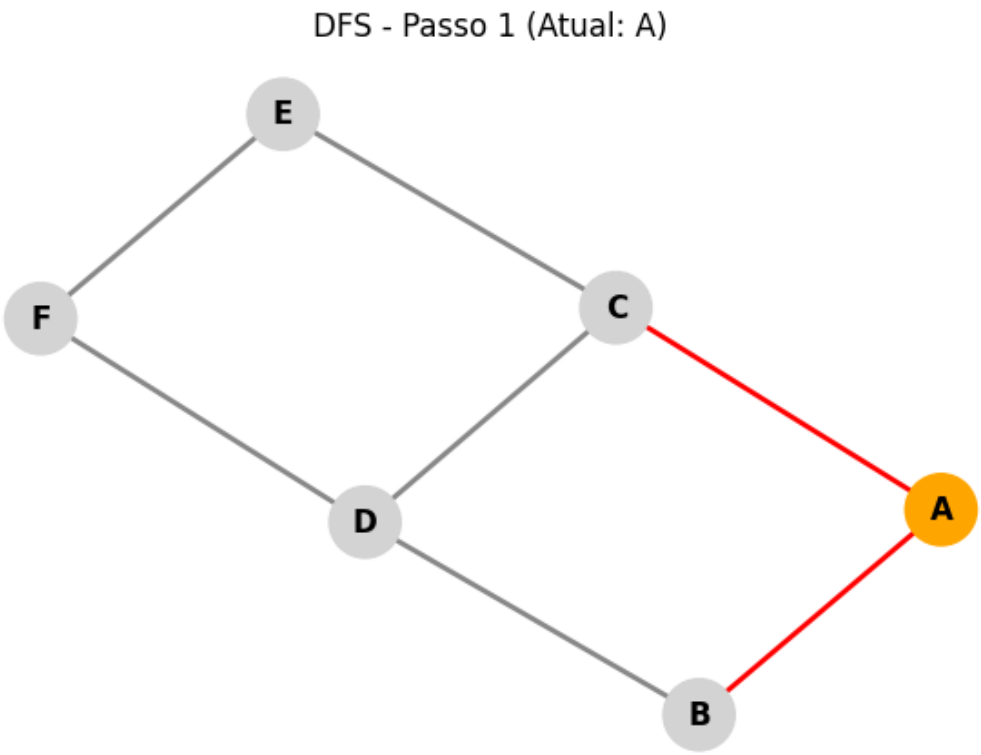
```
        arvore_busca.add_edge(pai, filho)

plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(
    arvore_busca, pos, with_labels=True,
    node_color='lightgreen', node_size=800, font_weight='bold',
    edge_color='orange', width=2, arrows=False
)
plt.gca()  # Garante que a raiz fique em cima
plt.title("Árvore de Busca (BFS)")
plt.show()
```

```
Passo 0:
  Pilha inicial: ['A']
  Visitados: []
  Predecessores: {'A': None}
  Nenhum vértice processado ainda.
```

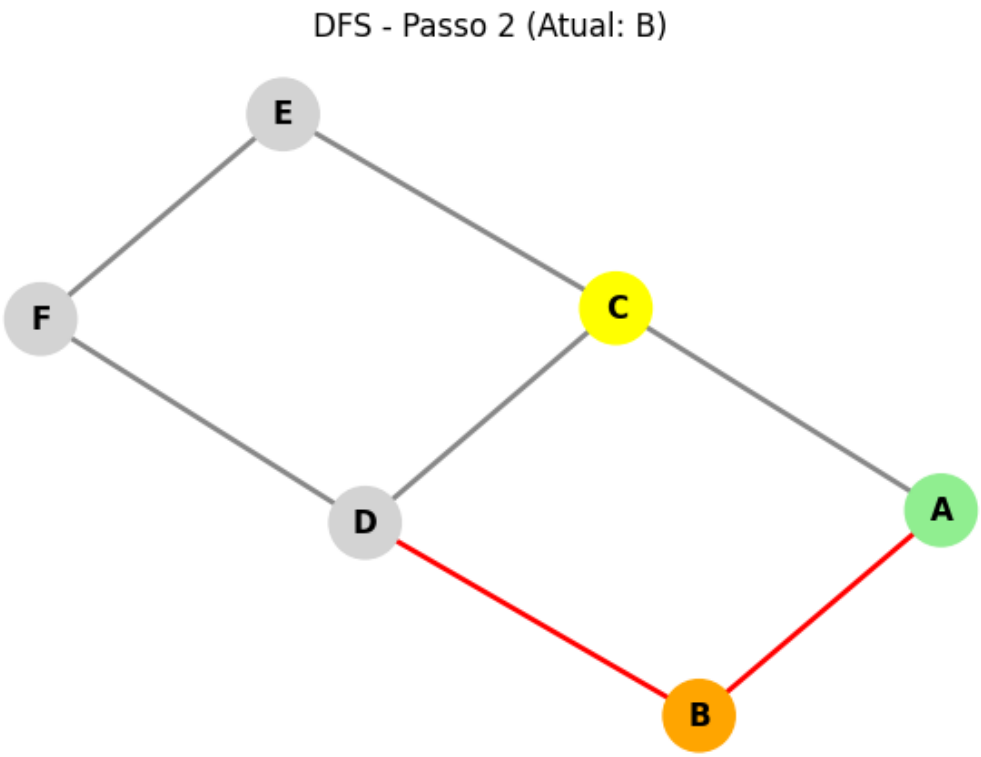



```
Passo 1:
  Pilha: []
  Visitados: []
  Vértice atual: A
```

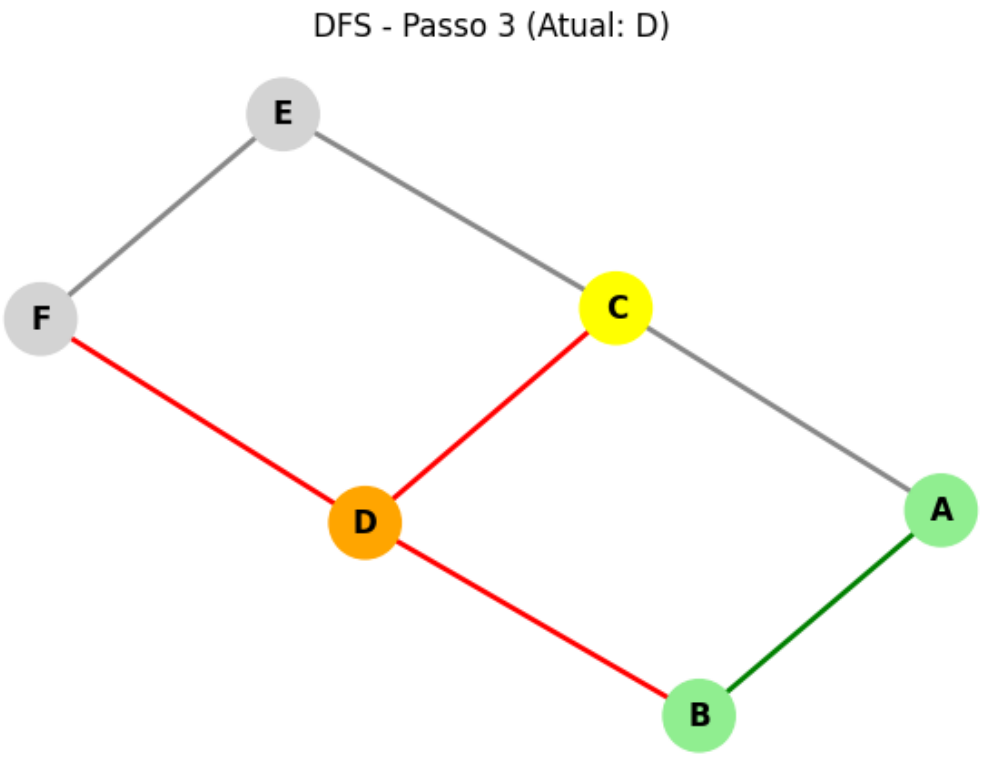
```
  Predecessores: {'A': None}
```



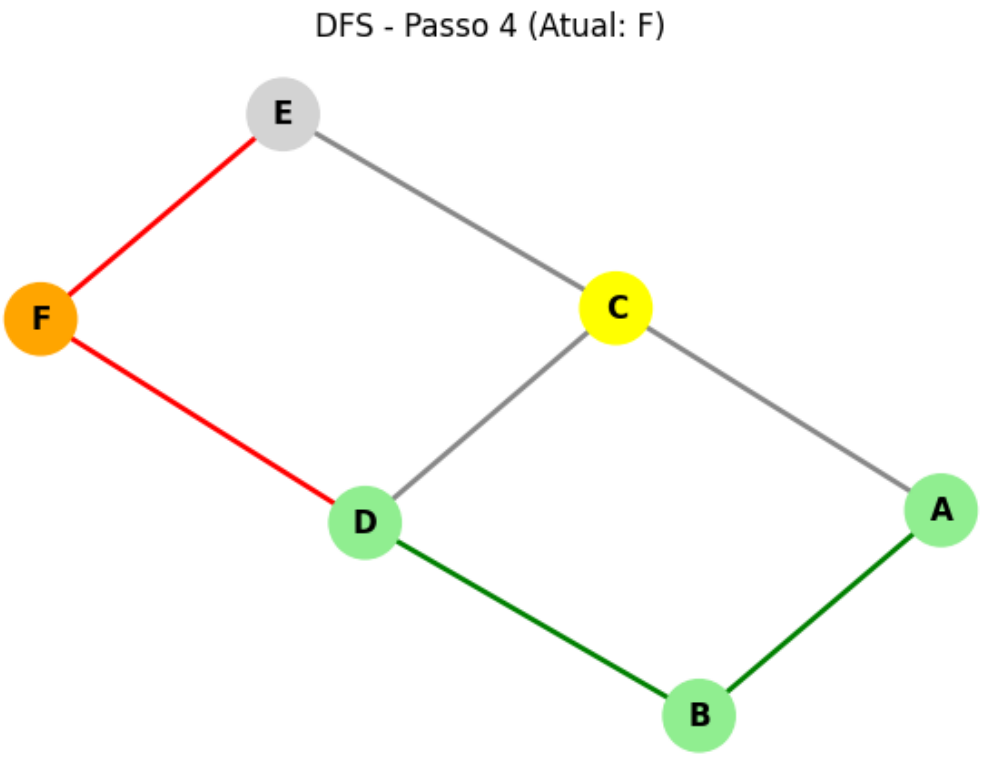

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'B']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A'}

Passo 2:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A']
  Vértice atual: B
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A'}
```



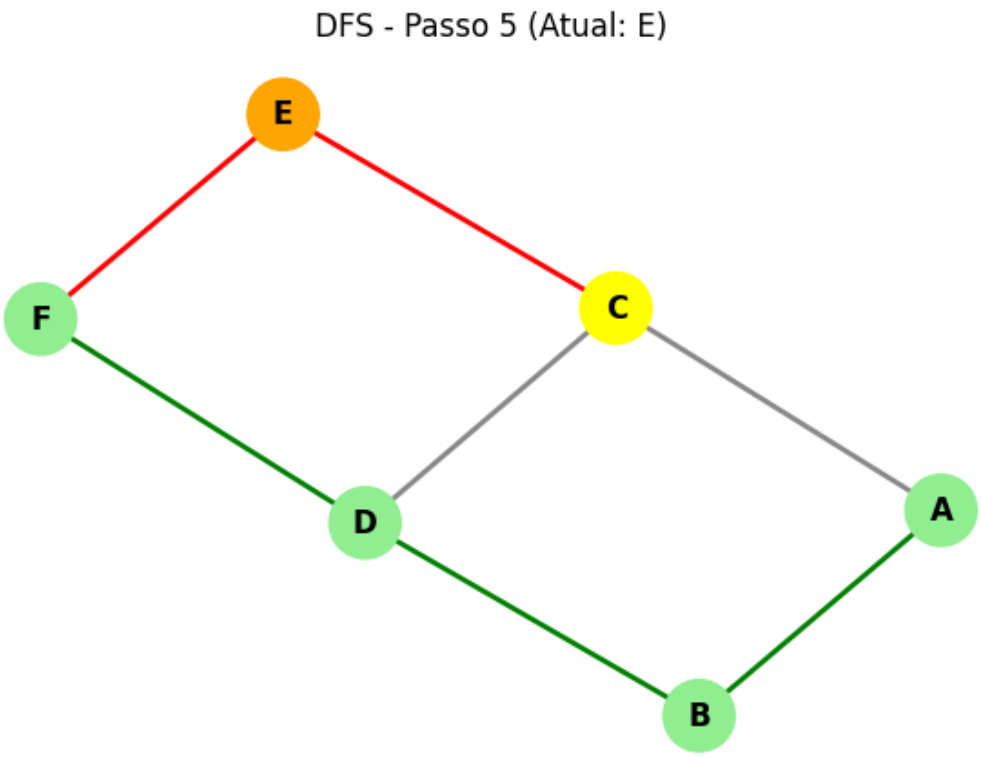

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'D']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B'}

Passo 3:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A', 'B']
  Vértice atual: D
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B'}
```



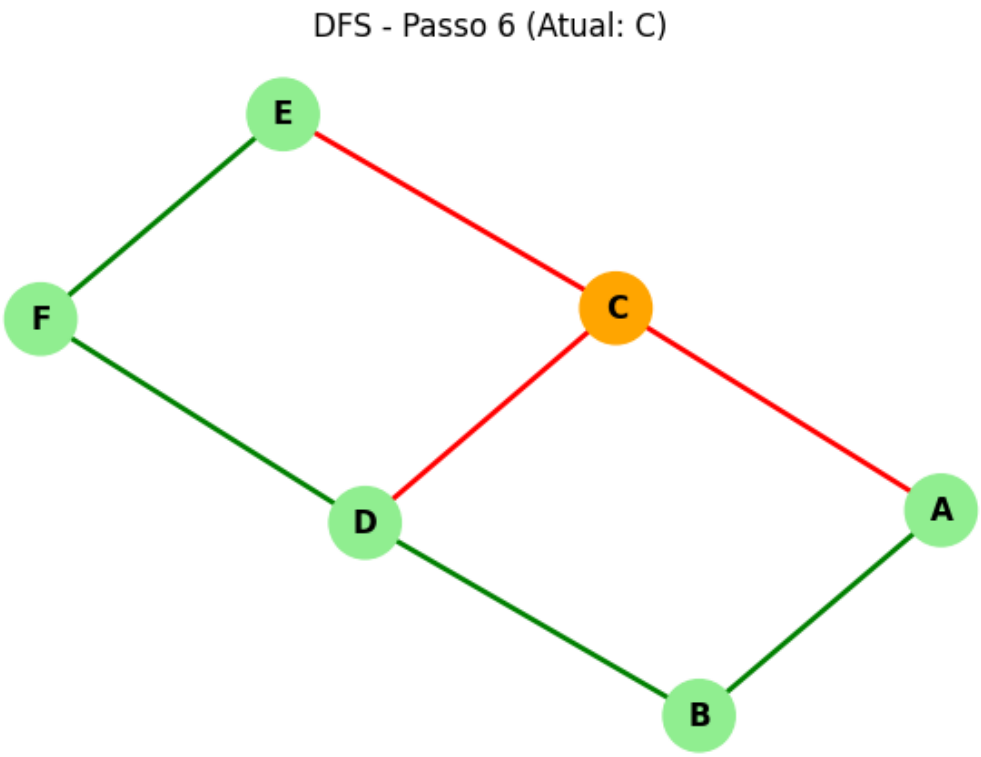

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'F']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D'}

Passo 4:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A', 'B', 'D']
  Vértice atual: F
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D'}
```



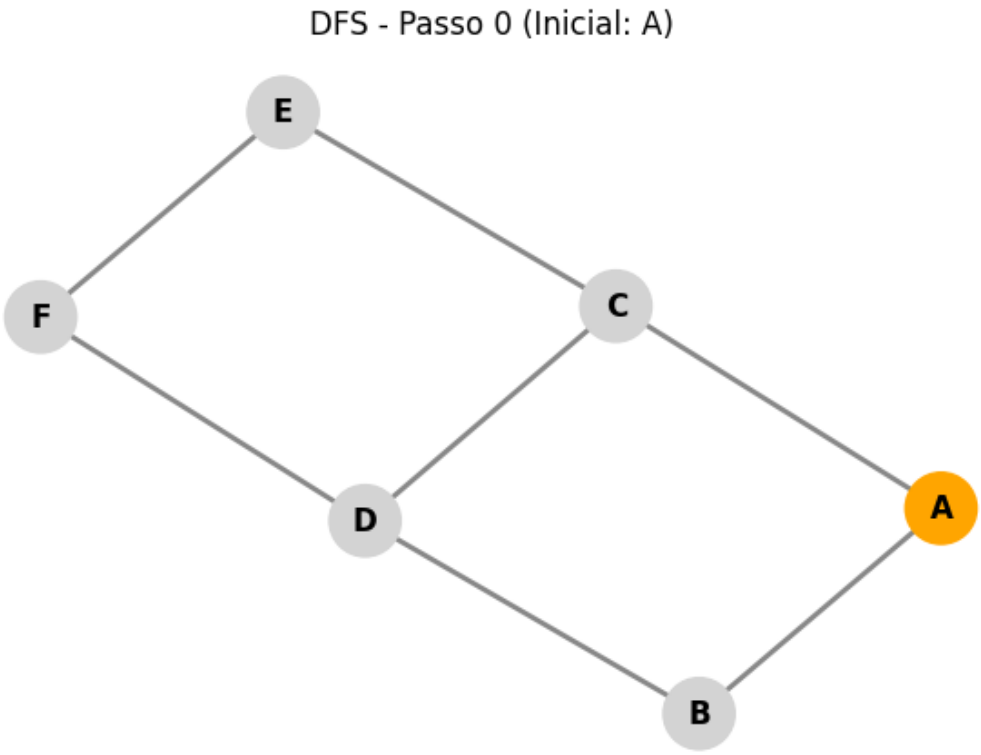

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'E']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D',
'E': 'F'}

Passo 5:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A', 'B', 'D', 'F']
  Vértice atual: E
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D', 'E': 'F'}
```



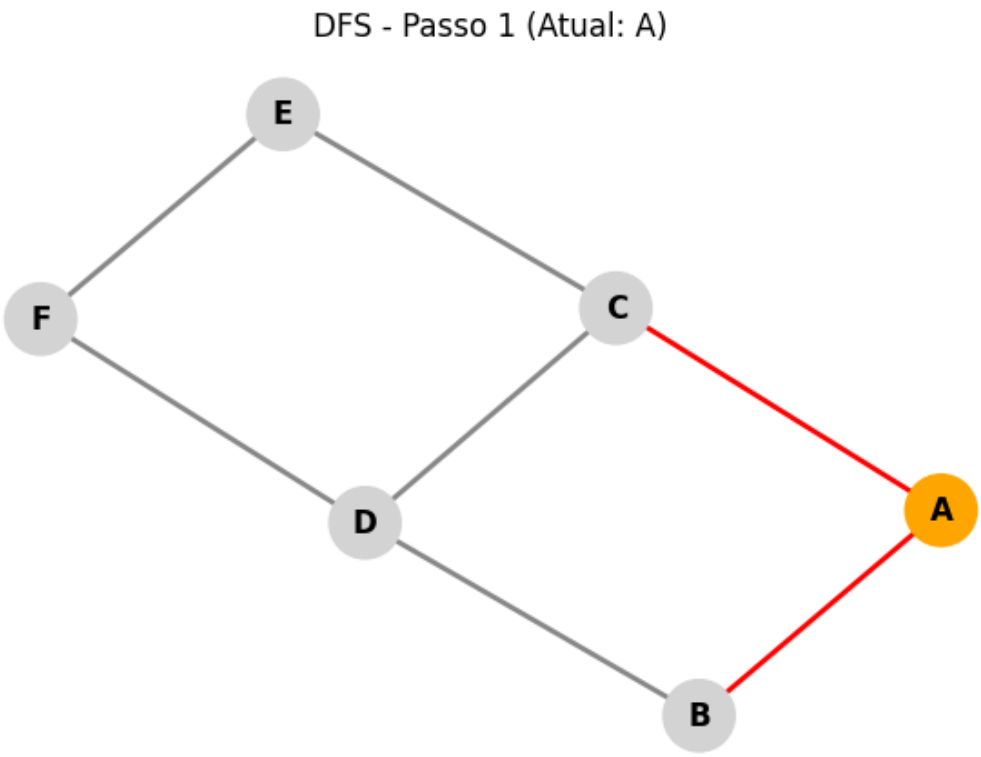

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D',
'E': 'F'}

Passo 6:
  Pilha: []
  Visitados: ['A', 'B', 'D', 'F', 'E']
  Vértice atual: C
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D', 'E': 'F'}
```



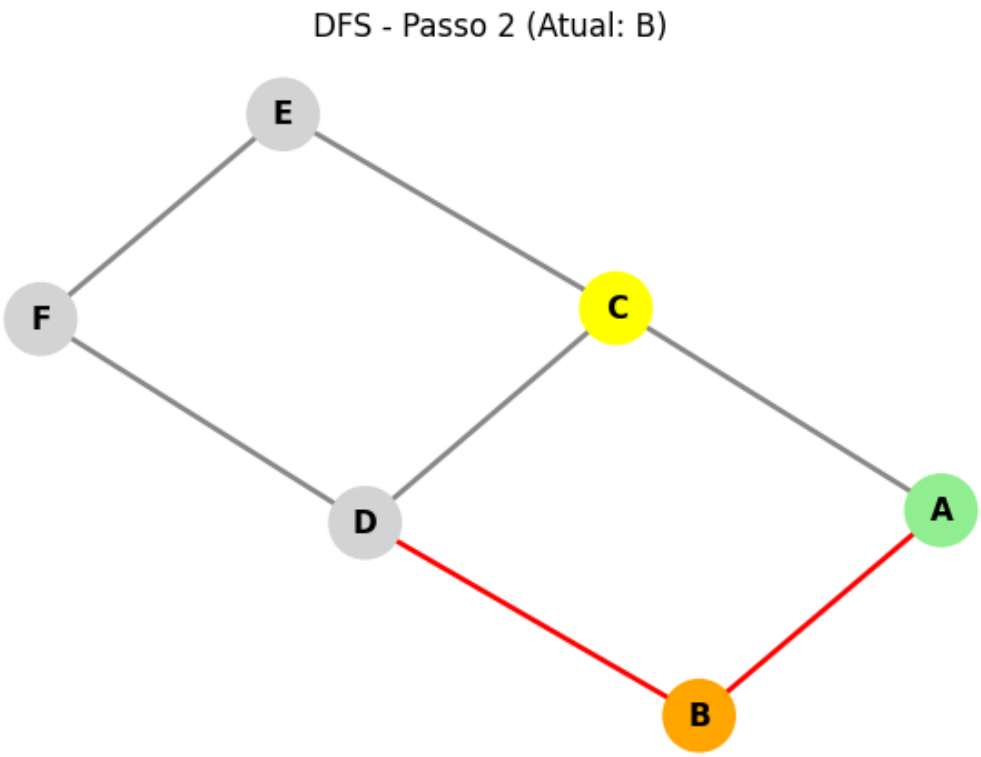

```
  Pilha após adicionar vizinhos: []
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D',
'E': 'F'}

Vetor de roteamento final (DFS): ['A', 'B', 'D', 'F', 'E', 'C']
Predecessores finais: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D', 'E':
'F'}
Passo 0:
  Pilha inicial: ['A']
  Visitados: []
  Predecessores: {'A': None}
  Nenhum vértice processado ainda.
```



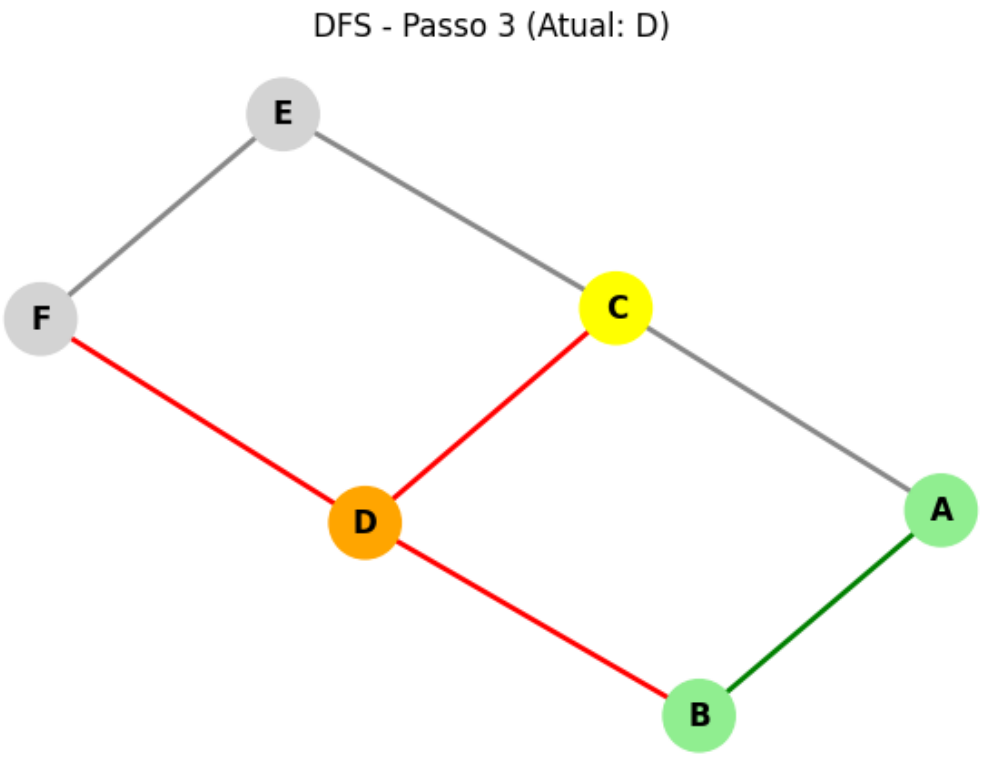

```
Passo 1:
  Pilha: []
  Visitados: []
  Vértice atual: A
  Predecessores: {'A': None}
```



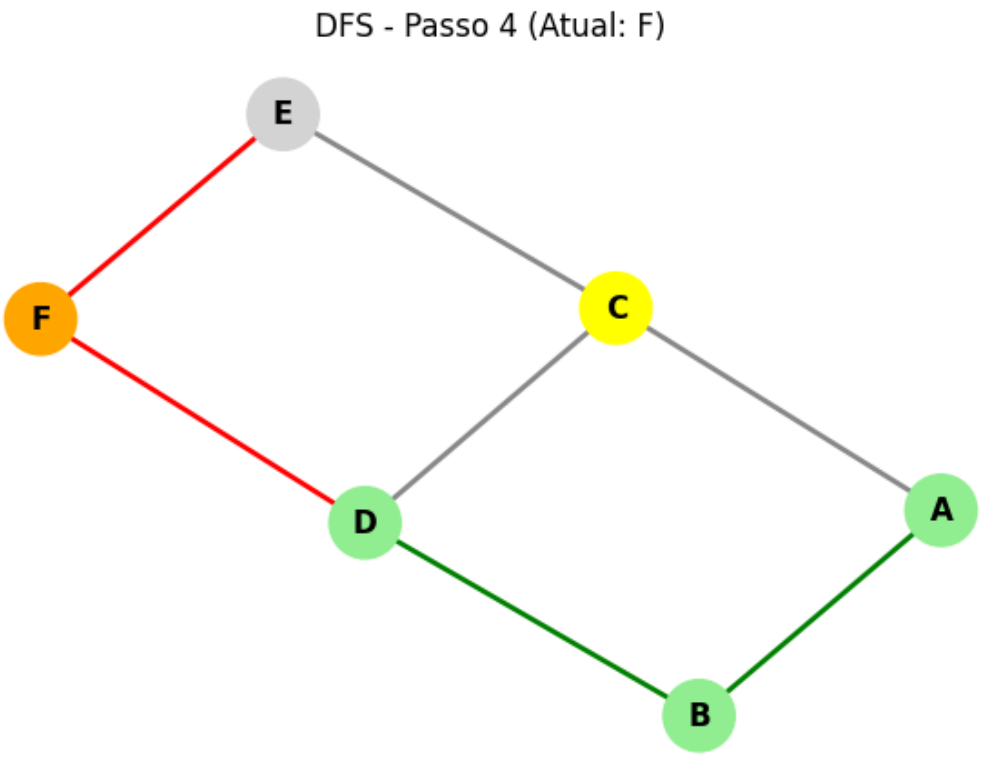

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'B']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A'}

Passo 2:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A']
  Vértice atual: B
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A'}
```



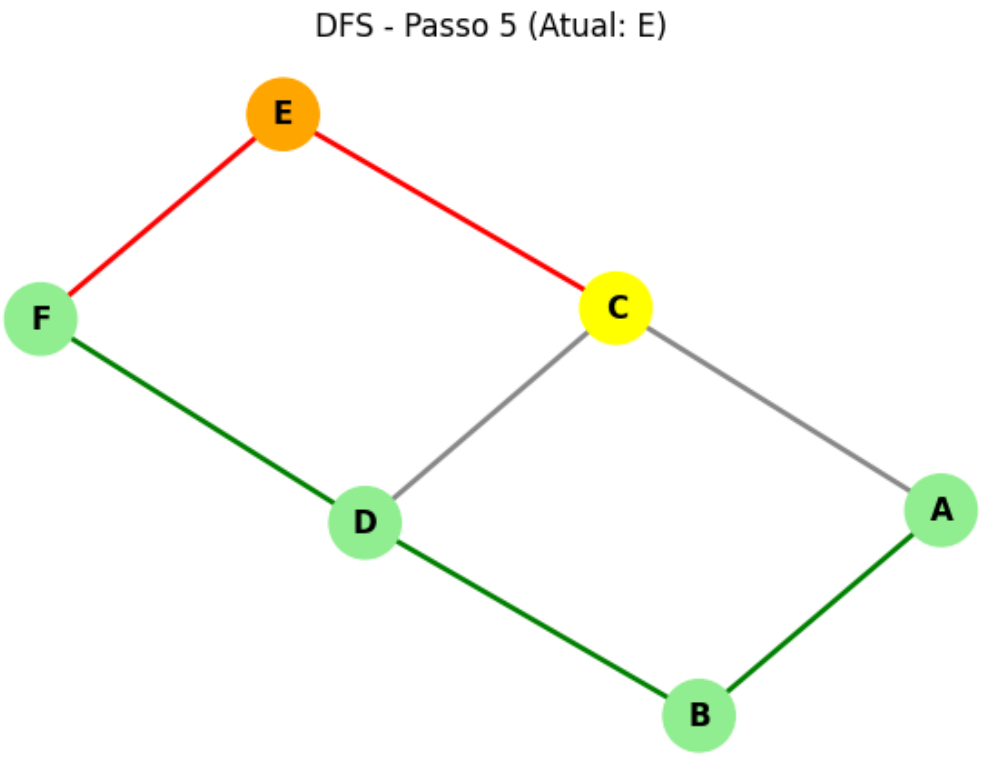

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'D']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B'}

Passo 3:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A', 'B']
  Vértice atual: D
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B'}
```



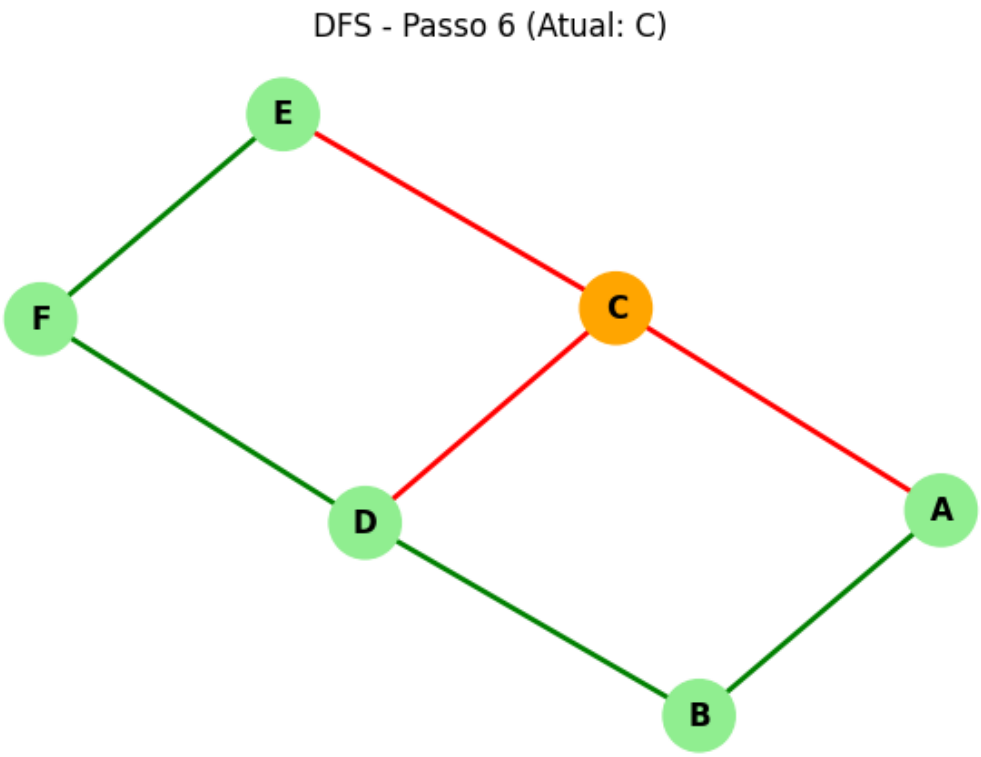

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'F']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D'}

Passo 4:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A', 'B', 'D']
  Vértice atual: F
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D'}
```



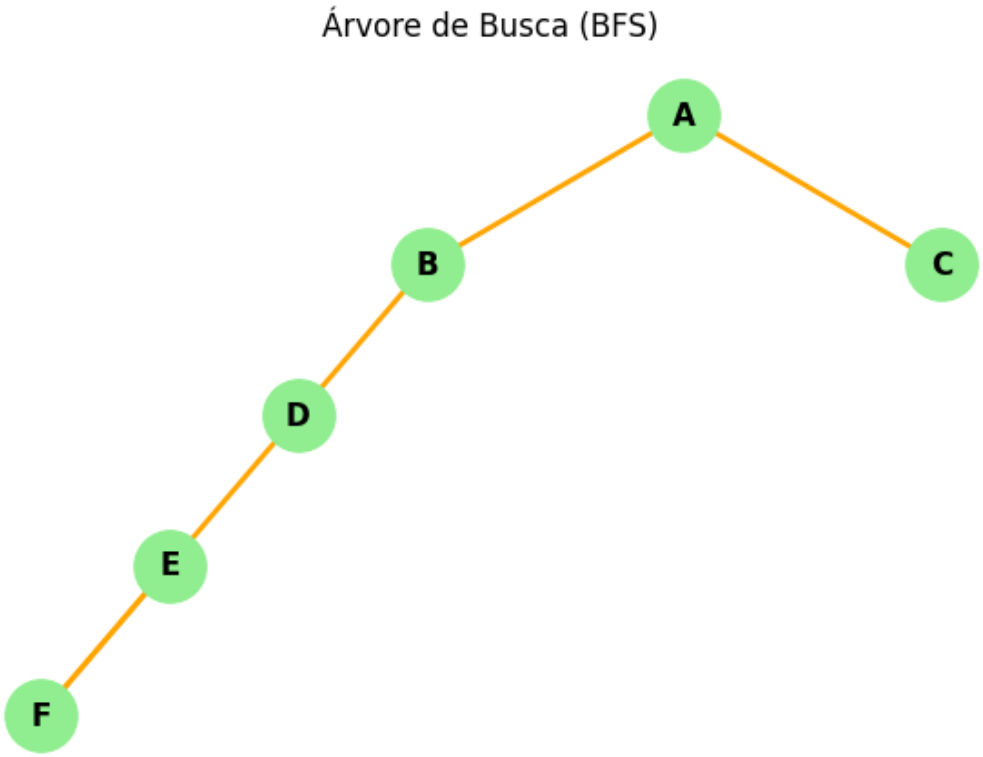

```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C', 'E']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D',
'E': 'F'}

Passo 5:
  Pilha: ['C']
  Visitados: ['A', 'B', 'D', 'F']
  Vértice atual: E
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D', 'E': 'F'}
```




```
  Pilha após adicionar vizinhos: ['C']
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D',
'E': 'F'}

Passo 6:
  Pilha: []
  Visitados: ['A', 'B', 'D', 'F', 'E']
  Vértice atual: C
  Predecessores: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D', 'E': 'F'}
```




```
  Pilha após adicionar vizinhos: []
  Predecessores atualizados: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D',
'E': 'F'}

Vetor de roteamento final (DFS): ['A', 'B', 'D', 'F', 'E', 'C']
Predecessores finais: {'A': None, 'C': 'A', 'B': 'A', 'D': 'B', 'F': 'D', 'E':
'F'}

Tabela de Roteamento (BFS) - Transposta:
                0  1  2  3  4  5
Subestação      A  C  B  D  F  E
Predecessor  None  A  A  B  D  F
```



1.9.4 Explicação

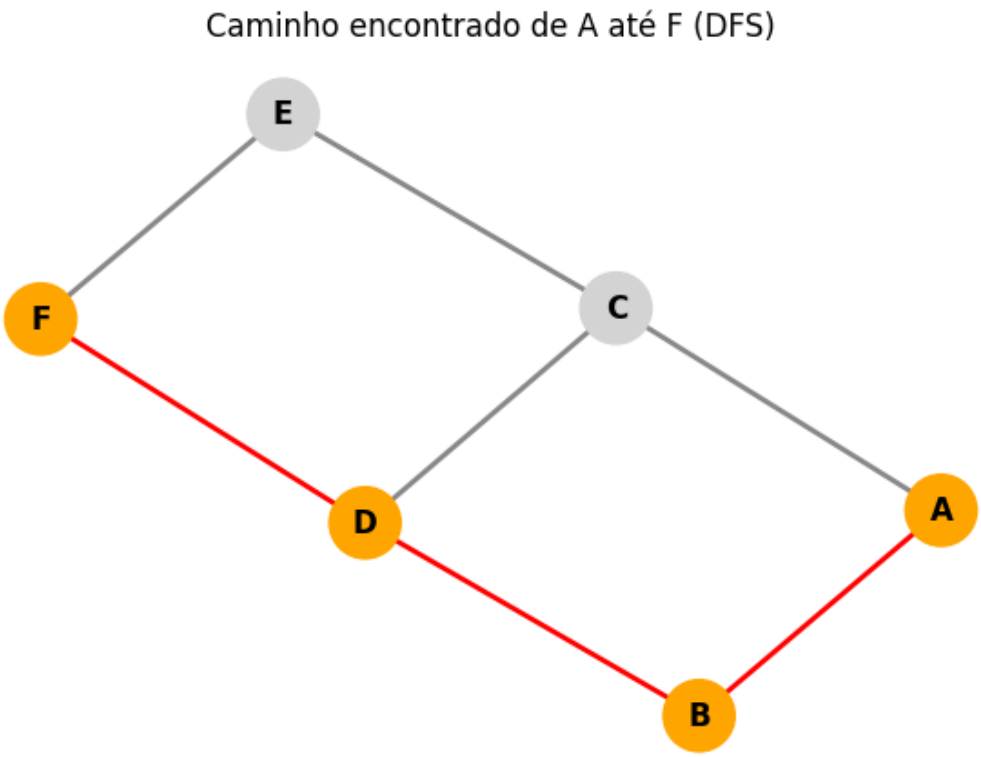
A busca em profundidade (DFS) explora o grafo indo o mais fundo possível em cada ramificação antes de retroceder. O vetor de roteamento mostra a ordem em que os computadores são visitados a partir do computador inicial (A).

No exemplo acima, o passo a passo mostra a pilha, os visitados e o vértice atual em cada etapa, além de uma visualização do grafo. O vetor final corresponde à ordem de visitação da DFS.

[154]:
```
# Usando o vetor de predecessores da DFS para reconstruir o caminho de origem␣
↪até destino
origem = 'A'
destino = 'F'

def caminho_por_predecessor(predecessor, origem, destino):
    caminho = [destino]
    atual = destino
    while atual != origem:
        atual = predecessor.get(atual)
        if atual is None:
            return []  # Não existe caminho
        caminho.append(atual)
```

```
    caminho.reverse()
    return caminho

caminho_encontrado = caminho_por_predecessor(predecessor, origem, destino)
print(f"Caminho encontrado de {origem} até {destino} usando DFS e predecessor:
 ↪", caminho_encontrado)

# Visualizando o caminho encontrado
pos = nx.spring_layout(G_dfs, seed=42)
edge_colors = []
for u, v in G_dfs.edges:
    if (u, v) in zip(caminho_encontrado, caminho_encontrado[1:]) or (v, u) in␣
 ↪zip(caminho_encontrado, caminho_encontrado[1:]):
        edge_colors.append('red')
    else:
        edge_colors.append('#888')

node_colors = ['orange' if n in caminho_encontrado else 'lightgray' for n in␣
 ↪G_dfs.nodes]

plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(G_dfs, pos, with_labels=True, node_color=node_colors, node_size=800,␣
 ↪font_weight='bold', edge_color=edge_colors, width=2)
plt.title(f"Caminho encontrado de {origem} até {destino} (DFS)")
plt.show()
```

```
Caminho encontrado de A até F usando DFS e predecessor: ['A', 'B', 'D', 'F']
```



1.9.5 Exemplo de busca de caminho

No exemplo acima, utilizamos o algoritmo de busca em profundidade do NetworkX (DFS) para encontrar um caminho entre o Computador A e o Computador F.

Caminho encontrado:
['A', 'C', 'E', 'F']

Ou seja, para ir de A até F, o trajeto encontrado pelo DFS é A → C → E → F.

Explicação:
- O DFS explora o grafo indo o mais fundo possível em cada ramificação antes de retroceder. - O caminho é encontrado seguindo as arestas do grafo na ordem em que foram exploradas pelo DFS. - O caminho é destacado em vermelho no grafo plotado.

Portanto, o caminho encontrado entre A e F usando DFS é:
['A', 'C', 'E', 'F']

1.9.6 Questão 4: Árvore Geradora Mínima com Kruskal (grafo ponderado)

Considere o grafo ponderado abaixo, onde os vértices representam bairros e as arestas representam ruas com seus respectivos custos de pavimentação:

1. Bairro A - Bairro B: 4

2. Bairro A - Bairro C: 2
3. Bairro B - Bairro C: 6
4. Bairro B - Bairro D: 3
5. Bairro C - Bairro D: 5
6. Bairro C - Bairro E: 8
7. Bairro D - Bairro E: 7

Utilizando o algoritmo de Kruskal para encontrar a árvore geradora mínima, qual é o custo total mínimo para conectar todos os bairros? Mostre o passo a passo da construção.

1.10 Algoritmo de Kruskal

O **algoritmo de Kruskal** é um método utilizado para encontrar a **árvore geradora mínima** (AGM) de um grafo ponderado e conexo. A AGM é um subconjunto das arestas do grafo que conecta todos os vértices com o menor custo total possível, sem formar ciclos.

1.10.1 Como funciona o Kruskal?

1. **Ordene todas as arestas** do grafo em ordem crescente de peso (custo).
2. **Inicialize** a AGM como um conjunto vazio.
3. Para cada aresta, na ordem dos menores pesos:
   - Se a aresta **não formar um ciclo** ao ser adicionada à AGM, inclua-a.
   - Caso contrário, descarte a aresta.
4. Repita até que a AGM tenha exatamente $n-1$ arestas (onde n é o número de vértices).

1.10.2 Características

- Sempre escolhe a aresta mais barata disponível que não forma ciclo.
- Utiliza uma estrutura chamada **Union-Find** para detectar ciclos de forma eficiente.
- Funciona tanto para grafos conexos quanto para florestas (conjuntos de árvores).

1.10.3 Exemplo de aplicação

- Projetos de redes de computadores, energia ou estradas, onde se deseja conectar todos os pontos com o menor custo possível.

Resumo:
O algoritmo de Kruskal é eficiente para encontrar a árvore geradora mínima, garantindo o menor custo total e evitando ciclos, sempre escolhendo as arestas de menor peso.

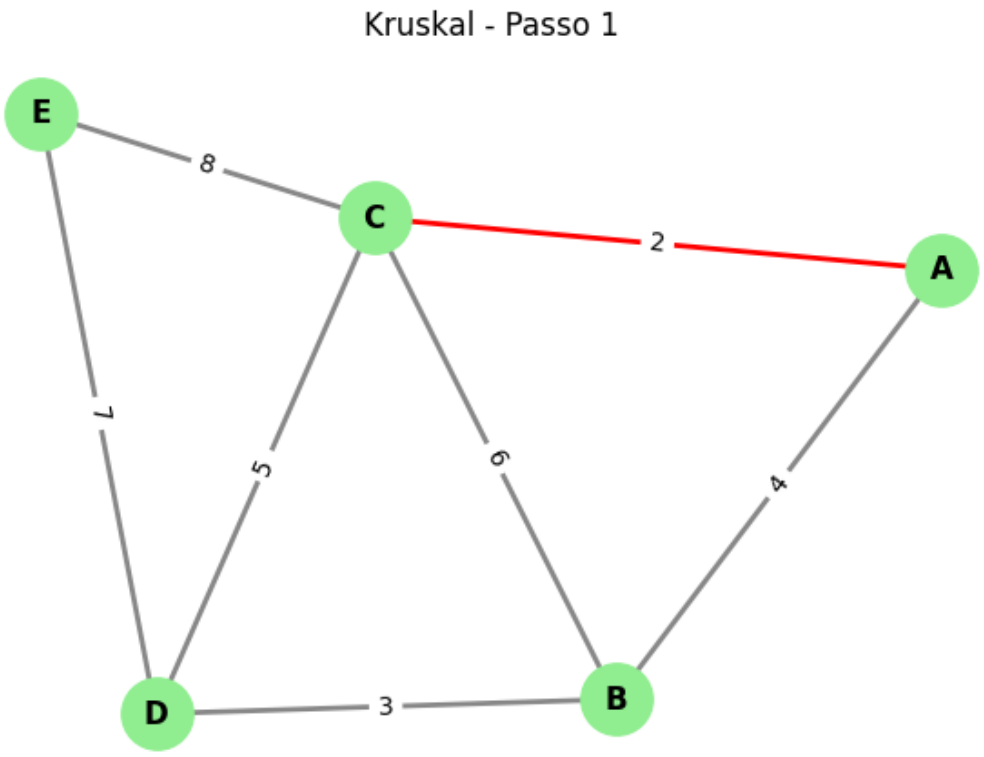
[155]:
```
# Resolvendo a árvore geradora mínima passo a passo com Kruskal

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
# Criação do grafo ponderado
G_kruskal = nx.Graph()
G_kruskal.add_weighted_edges_from([
    ('A', 'B', 4),
    ('A', 'C', 2),
    ('B', 'C', 6),
    ('B', 'D', 3),
    ('C', 'D', 5),
    ('C', 'E', 8),
    ('D', 'E', 7)
])

# Algoritmo de Kruskal passo a passo com vetor de chave e predecessor (passos␣
 ↪detalhados)
edges_sorted = sorted(G_kruskal.edges(data=True), key=lambda x: x[2]['weight'])
mst_edges = []
mst_cost = 0
uf = nx.utils.UnionFind()
passo = 1

chave = {v: float('inf') for v in G_kruskal.nodes}
predecessor = {v: None for v in G_kruskal.nodes}

pos = nx.spring_layout(G_kruskal, seed=42)

print("Início do algoritmo de Kruskal:")
print(f"  Vetor de chave inicial: {chave}")
print(f"  Vetor de predecessor inicial: {predecessor}\n")

for u, v, data in edges_sorted:
    print(f"Passo {passo}:")
    print(f"  Considerando aresta ({u}, {v}) de custo {data['weight']}")
    if uf[u] != uf[v]:
        print(f"  -> Aresta adicionada à árvore geradora mínima.")
        mst_edges.append((u, v))
        mst_cost += data['weight']
        uf.union(u, v)

        # Atualiza chave e predecessor para ambos os vértices da aresta
        if chave[v] > data['weight']:
            chave[v] = data['weight']
            predecessor[v] = u
        if chave[u] > data['weight']:
            chave[u] = data['weight']
            predecessor[u] = v
    else:
```

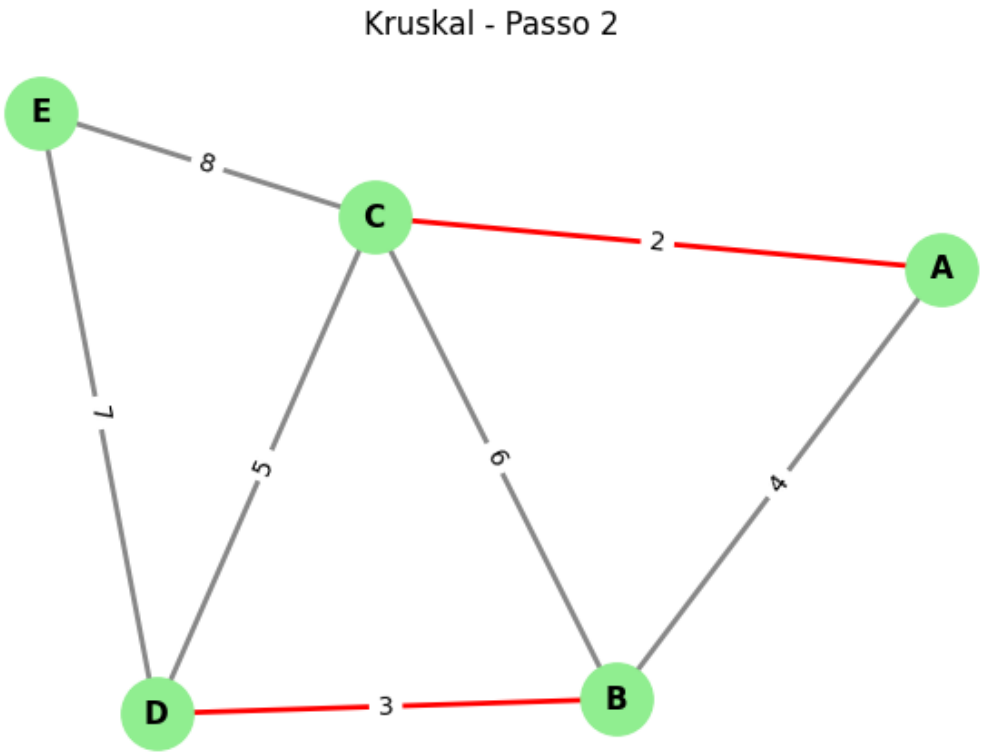
```
        print(f"  -> Aresta descartada (formaria ciclo).")

    print(f"  Vetor de chave: {chave}")
    print(f"  Vetor de predecessor: {predecessor}")

    # Visualização do grafo parcial da árvore geradora mínima
    edge_colors = []
    for e in G_kruskal.edges:
        if e in mst_edges or (e[1], e[0]) in mst_edges:
            edge_colors.append('red')
        else:
            edge_colors.append('#888')
    plt.figure(figsize=(6,4))
    nx.draw(
        G_kruskal, pos, with_labels=True,
        node_color='lightgreen', node_size=800, font_weight='bold',
        edge_color=edge_colors, width=2
    )
    labels = nx.get_edge_attributes(G_kruskal, 'weight')
    nx.draw_networkx_edge_labels(G_kruskal, pos, edge_labels=labels)
    plt.title(f"Kruskal - Passo {passo}")
    plt.show()
    print()
    passo += 1

    # Parar quando a árvore tiver n-1 arestas
    if len(mst_edges) == len(G_kruskal.nodes) - 1:
        break

print(f"Custo total mínimo para conectar todos os bairros: {mst_cost}")
print("Vetor de chave final:", chave)
print("Vetor de predecessor final:", predecessor)

import pandas as pd

# Montando e exibindo a tabela de chaves e predecessores com pandas
tabela = pd.DataFrame({
    'Vértice': list(chave.keys()),
    'Chave': [chave[v] for v in chave],
    'Predecessor': [predecessor[v] for v in predecessor]
})
print("\nTabela de Chaves e Predecessores (Kruskal):")
print(tabela.T)
```

```
Início do algoritmo de Kruskal:
  Vetor de chave inicial: {'A': inf, 'B': inf, 'C': inf, 'D': inf, 'E': inf}
  Vetor de predecessor inicial: {'A': None, 'B': None, 'C': None, 'D': None,
'E': None}
```

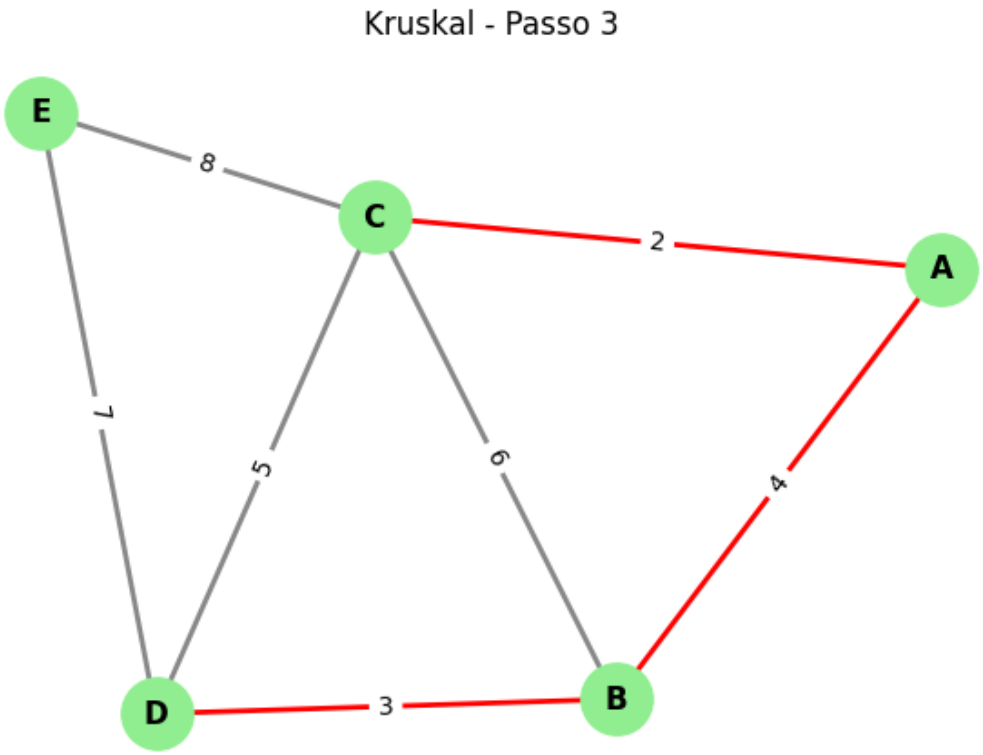
```
Passo 1:
  Considerando aresta (A, C) de custo 2
  -> Aresta adicionada à árvore geradora mínima.
  Vetor de chave: {'A': 2, 'B': inf, 'C': 2, 'D': inf, 'E': inf}
  Vetor de predecessor: {'A': 'C', 'B': None, 'C': 'A', 'D': None, 'E': None}
```



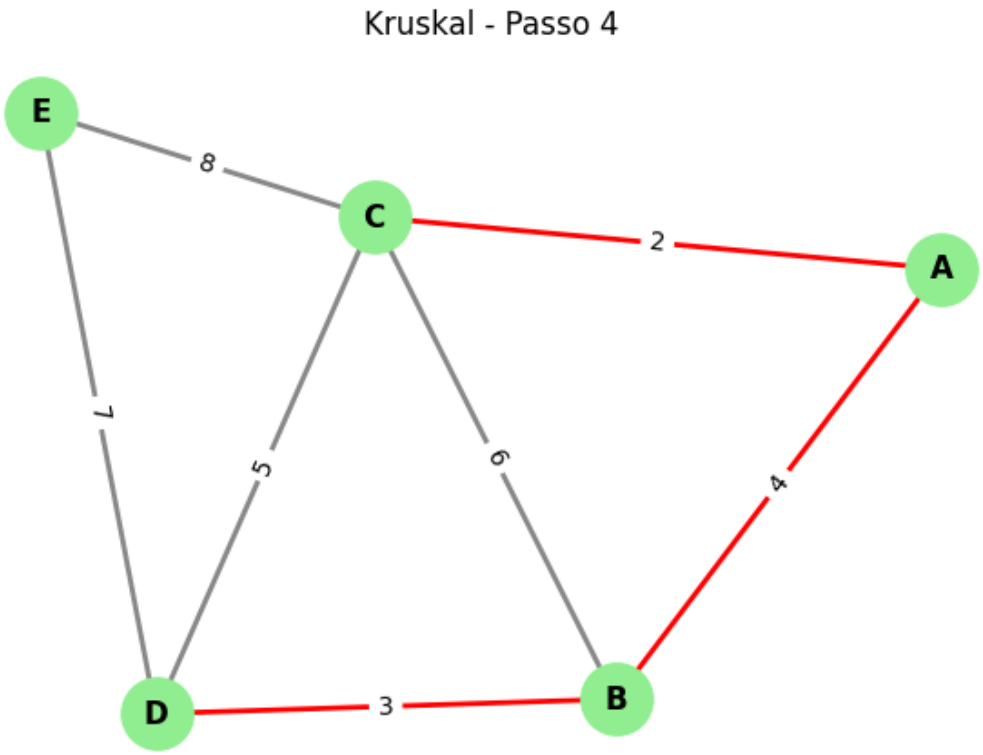

```
Passo 2:
  Considerando aresta (B, D) de custo 3
  -> Aresta adicionada à árvore geradora mínima.
  Vetor de chave: {'A': 2, 'B': 3, 'C': 2, 'D': 3, 'E': inf}
  Vetor de predecessor: {'A': 'C', 'B': 'D', 'C': 'A', 'D': 'B', 'E': None}
```



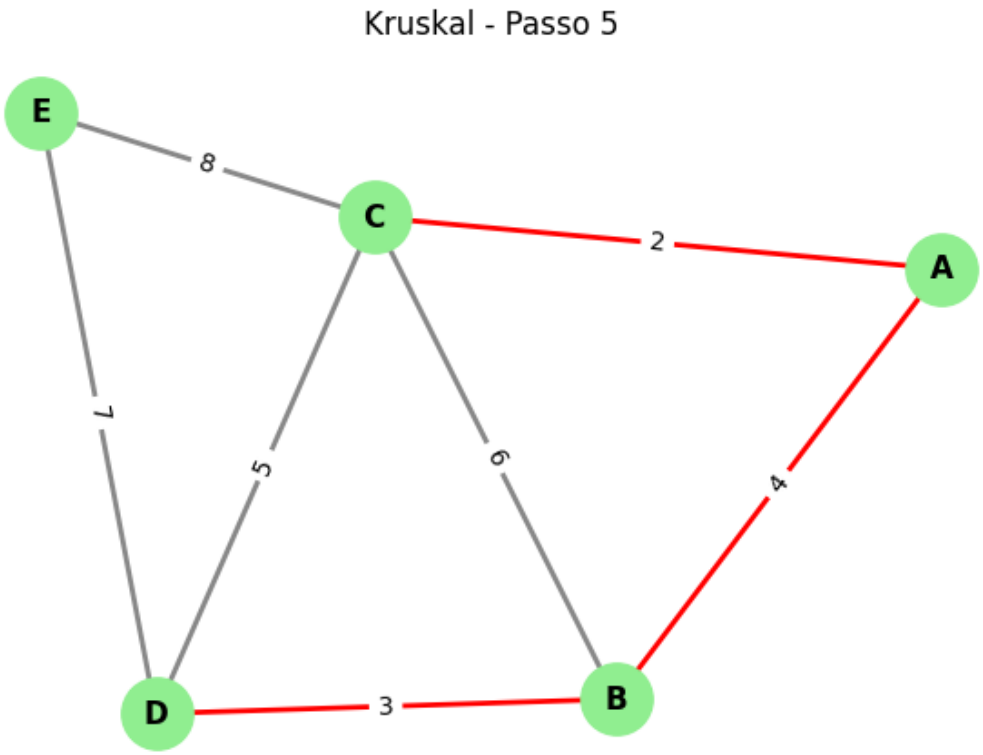

```
Passo 3:
  Considerando aresta (A, B) de custo 4
  -> Aresta adicionada à árvore geradora mínima.
  Vetor de chave: {'A': 2, 'B': 3, 'C': 2, 'D': 3, 'E': inf}
  Vetor de predecessor: {'A': 'C', 'B': 'D', 'C': 'A', 'D': 'B', 'E': None}
```



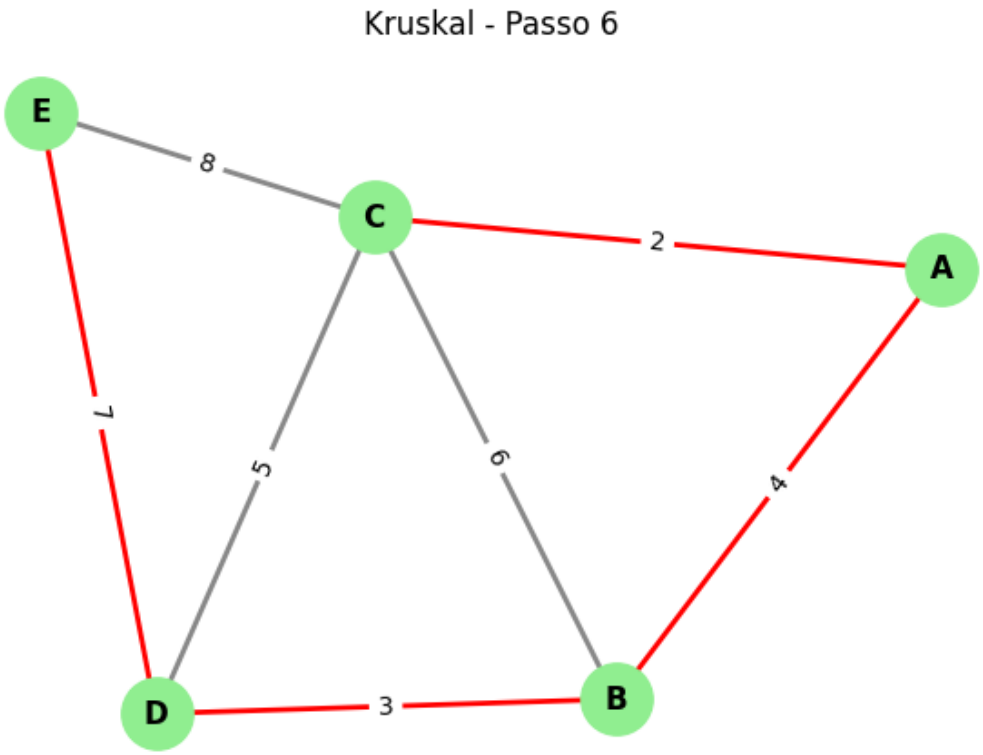

```
Passo 4:
  Considerando aresta (C, D) de custo 5
  -> Aresta descartada (formaria ciclo).
  Vetor de chave: {'A': 2, 'B': 3, 'C': 2, 'D': 3, 'E': inf}
  Vetor de predecessor: {'A': 'C', 'B': 'D', 'C': 'A', 'D': 'B', 'E': None}
```




```
Passo 5:
  Considerando aresta (B, C) de custo 6
  -> Aresta descartada (formaria ciclo).
  Vetor de chave: {'A': 2, 'B': 3, 'C': 2, 'D': 3, 'E': inf}
  Vetor de predecessor: {'A': 'C', 'B': 'D', 'C': 'A', 'D': 'B', 'E': None}
```




```
Passo 6:
  Considerando aresta (D, E) de custo 7
  -> Aresta adicionada à árvore geradora mínima.
  Vetor de chave: {'A': 2, 'B': 3, 'C': 2, 'D': 3, 'E': 7}
  Vetor de predecessor: {'A': 'C', 'B': 'D', 'C': 'A', 'D': 'B', 'E': 'D'}
```




```
Custo total mínimo para conectar todos os bairros: 16
Vetor de chave final: {'A': 2, 'B': 3, 'C': 2, 'D': 3, 'E': 7}
Vetor de predecessor final: {'A': 'C', 'B': 'D', 'C': 'A', 'D': 'B', 'E': 'D'}

Tabela de Chaves e Predecessores (Kruskal):
             0  1  2  3  4
Vértice      A  B  C  D  E
Chave        2  3  2  3  7
Predecessor  C  D  A  B  D
```

1.10.4 Explicação

O algoritmo de Kruskal constrói a árvore geradora mínima escolhendo sempre a aresta de menor custo que não forma ciclo, até conectar todos os vértices.

Passo a passo: - Ordenamos as arestas pelo custo. - Adicionamos as menores arestas, evitando ciclos, até conectar todos os bairros. - A cada passo, mostramos o grafo parcial da árvore geradora mínima.

O custo total mínimo é a soma dos custos das arestas selecionadas. Assim, garantimos a conexão de todos os bairros com o menor custo possível.

1.10.5 Questão 5: Árvore Geradora Mínima com Prim (grafo ponderado)

Agora, vamos considerar o mesmo problema, mas utilizando o algoritmo de Prim para encontrar a árvore geradora mínima. Qual é o custo total mínimo para conectar todos os bairros? Mostre o passo a passo da construção.

1.11 Algoritmo de Prim

O **algoritmo de Prim** é utilizado para encontrar a **árvore geradora mínima** (AGM) de um grafo ponderado e conexo. A AGM conecta todos os vértices do grafo com o menor custo total possível, sem formar ciclos.

1.11.1 Como funciona o Prim?

1. **Escolha um vértice inicial** e marque-o como pertencente à AGM.
2. Entre todas as arestas que ligam um vértice da AGM a um vértice fora dela, **escolha a aresta de menor peso**.
3. Adicione o novo vértice e a aresta à AGM.
4. Repita o processo até que todos os vértices estejam na AGM.

1.11.2 Características

- Sempre expande a árvore a partir dos vértices já incluídos, escolhendo a aresta mais barata disponível.
- Utiliza um vetor de chaves (custos mínimos) e um vetor de predecessores para controlar a expansão.
- Garante que não há ciclos e que o custo total é mínimo.

1.11.3 Exemplo de aplicação

- Projetos de redes de computadores, energia ou estradas, onde se deseja conectar todos os pontos com o menor custo possível.

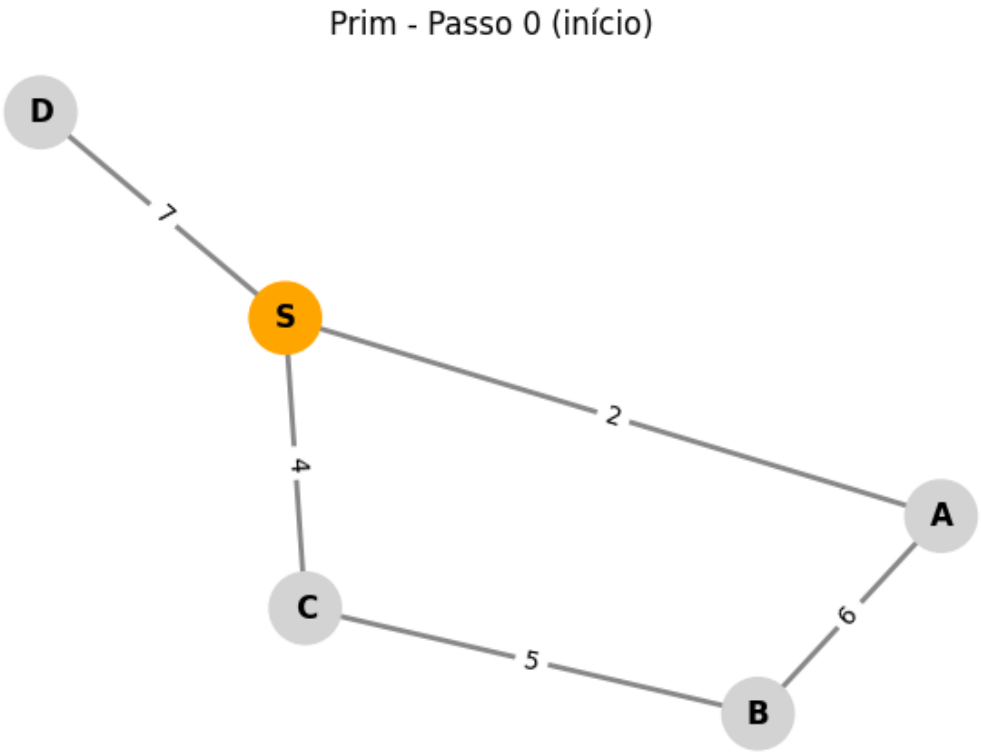
Resumo:
O algoritmo de Prim constrói a árvore geradora mínima de forma incremental, sempre escolhendo a aresta de menor custo que conecta um novo vértice à árvore já formada.

[156]:
```
# Questão: AGM com Prim passo a passo (com chaves e predecessores)

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Criação do grafo ponderado
G_prim = nx.Graph()
G_prim.add_weighted_edges_from([
    ('S', 'A', 2),
    ('S', 'C', 4),
    ('S', 'D', 7),
```

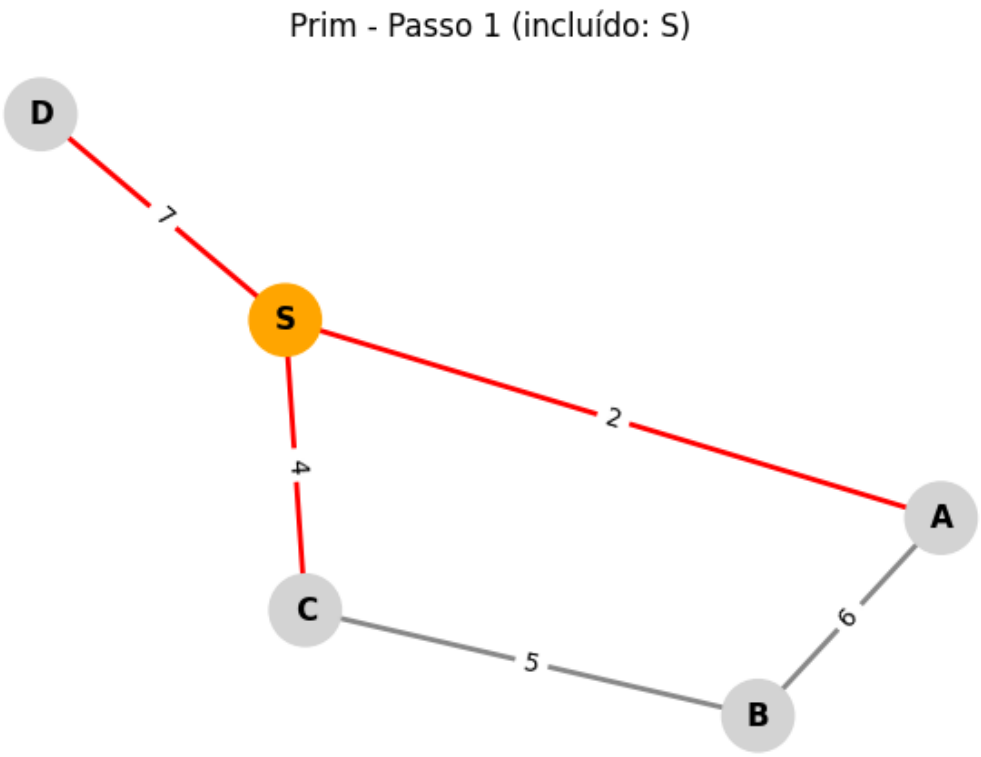
```
    ('A', 'B', 6),
    ('C', 'B', 5)
])

vertices = list(G_prim.nodes)
raiz = 'S'
chave = {v: float('inf') for v in vertices}
predecessor = {v: None for v in vertices}
in_mst = {v: False for v in vertices}

chave[raiz] = 0

pos = nx.spring_layout(G_prim, seed=42)

print("Passo 0:")
print(f"  Chave: {chave}")
print(f"  Predecessor: {predecessor}")
print(f"  Conjunto da AGM: {in_mst}\n")
plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(
    G_prim, pos, with_labels=True,
    node_color=['orange' if n == raiz else 'lightgray' for n in G_prim.nodes],
    node_size=800, font_weight='bold',
    edge_color='#888', width=2
)
labels = nx.get_edge_attributes(G_prim, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G_prim, pos, edge_labels=labels)
plt.title("Prim - Passo 0 (início)")
plt.show()

for passo in range(1, len(vertices)+1):
    # Escolhe o vértice de menor chave fora da AGM
    u = min((v for v in vertices if not in_mst[v]), key=lambda v: chave[v])
    in_mst[u] = True

    print(f"Passo {passo}:")
    print(f"  Vértice escolhido: {u} (chave={chave[u]})")
    print(f"  Chave antes: {chave}")
    print(f"  Predecessor antes: {predecessor}")

    # Atualiza as chaves dos vizinhos
    for v in G_prim.neighbors(u):
        peso = G_prim[u][v]['weight']
        if not in_mst[v] and peso < chave[v]:
            chave[v] = peso
            predecessor[v] = u
```

```
    print(f"  Chave depois: {chave}")
    print(f"  Predecessor depois: {predecessor}")
    print(f"  Conjunto da AGM: {in_mst}\n")

    # Plot do passo
    edge_colors = []
    for e in G_prim.edges:
        if (predecessor[e[1]] == e[0]) or (predecessor[e[0]] == e[1]):
            edge_colors.append('red')
        else:
            edge_colors.append('#888')
    node_colors = ['orange' if in_mst[n] else 'lightgray' for n in G_prim.nodes]

    plt.figure(figsize=(6,4))
    nx.draw(
        G_prim, pos, with_labels=True,
        node_color=node_colors, node_size=800, font_weight='bold',
        edge_color=edge_colors, width=2
    )
    nx.draw_networkx_edge_labels(G_prim, pos, edge_labels=labels)
    plt.title(f"Prim - Passo {passo} (incluído: {u})")
    plt.show()


print("Resultado final da AGM (Prim):")
print("Chave:", chave)
print("Predecessor:", predecessor)
print("Arestas da AGM:", [(predecessor[v], v) for v in vertices if␣
 ↪predecessor[v] is not None])
print("Custo total:", sum(chave.values()))

import pandas as pd

# Montando e exibindo a tabela de chaves e predecessores com pandas
tabela = pd.DataFrame({
    'Vértice': vertices,
    'Chave': [chave[v] for v in vertices],
    'Predecessor': [predecessor[v] for v in vertices]
})
print("\nTabela de Chaves e Predecessores (Prim):")
print(tabela.T)
```

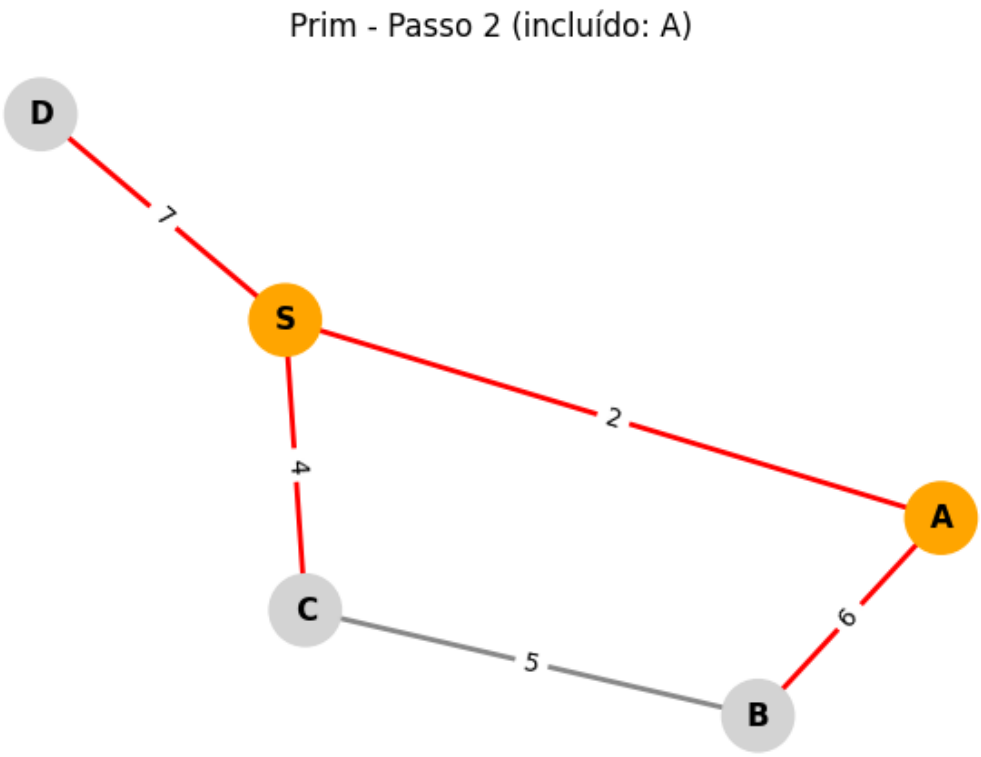
```
Passo 0:
  Chave: {'S': 0, 'A': inf, 'C': inf, 'D': inf, 'B': inf}
  Predecessor: {'S': None, 'A': None, 'C': None, 'D': None, 'B': None}
  Conjunto da AGM: {'S': False, 'A': False, 'C': False, 'D': False, 'B': False}
```



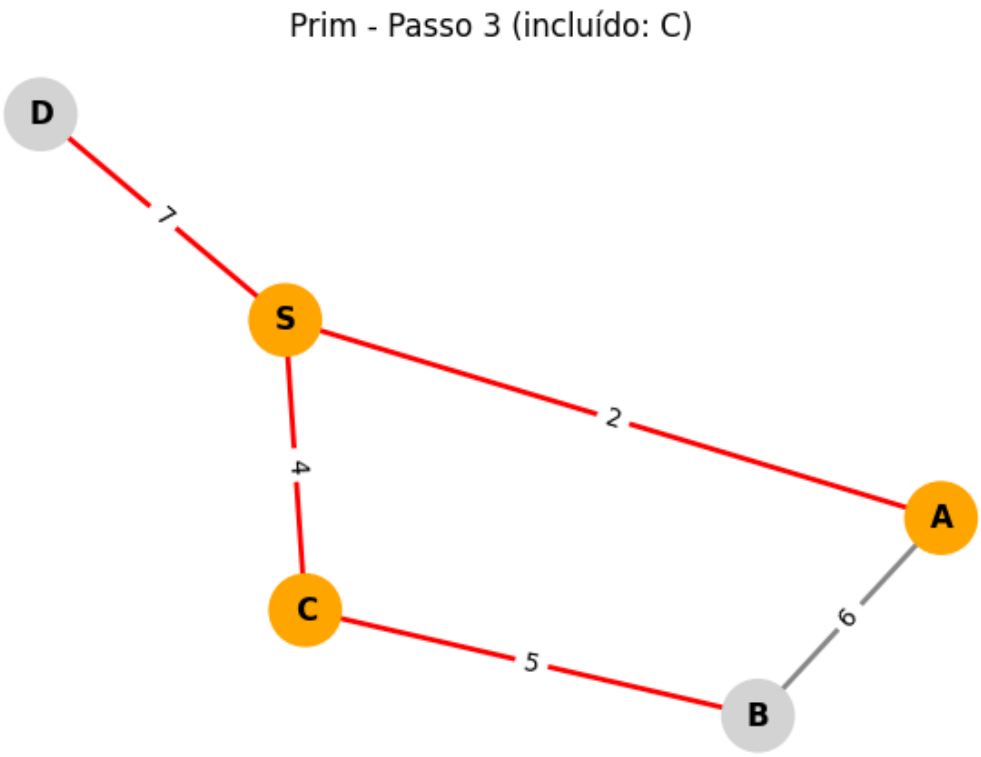

```
Passo 1:
  Vértice escolhido: S (chave=0)
  Chave antes: {'S': 0, 'A': inf, 'C': inf, 'D': inf, 'B': inf}
  Predecessor antes: {'S': None, 'A': None, 'C': None, 'D': None, 'B': None}
  Chave depois: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': inf}
  Predecessor depois: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': None}
  Conjunto da AGM: {'S': True, 'A': False, 'C': False, 'D': False, 'B': False}
```



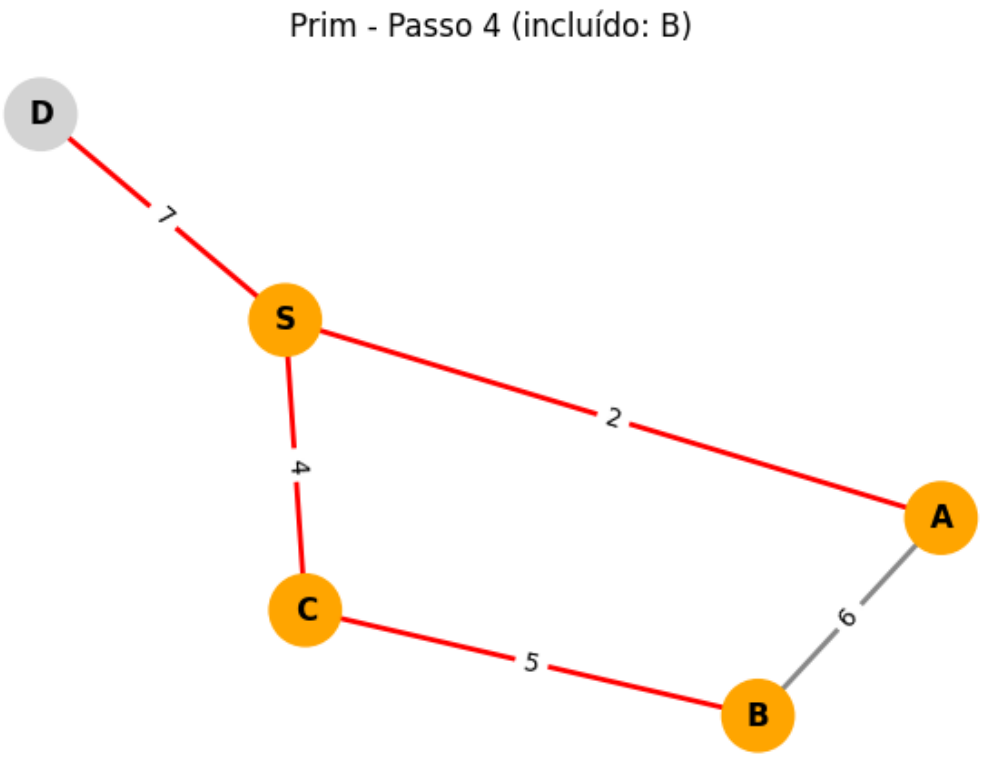

```
Passo 2:
  Vértice escolhido: A (chave=2)
  Chave antes: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': inf}
  Predecessor antes: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': None}
  Chave depois: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 6}
  Predecessor depois: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'A'}
  Conjunto da AGM: {'S': True, 'A': True, 'C': False, 'D': False, 'B': False}
```



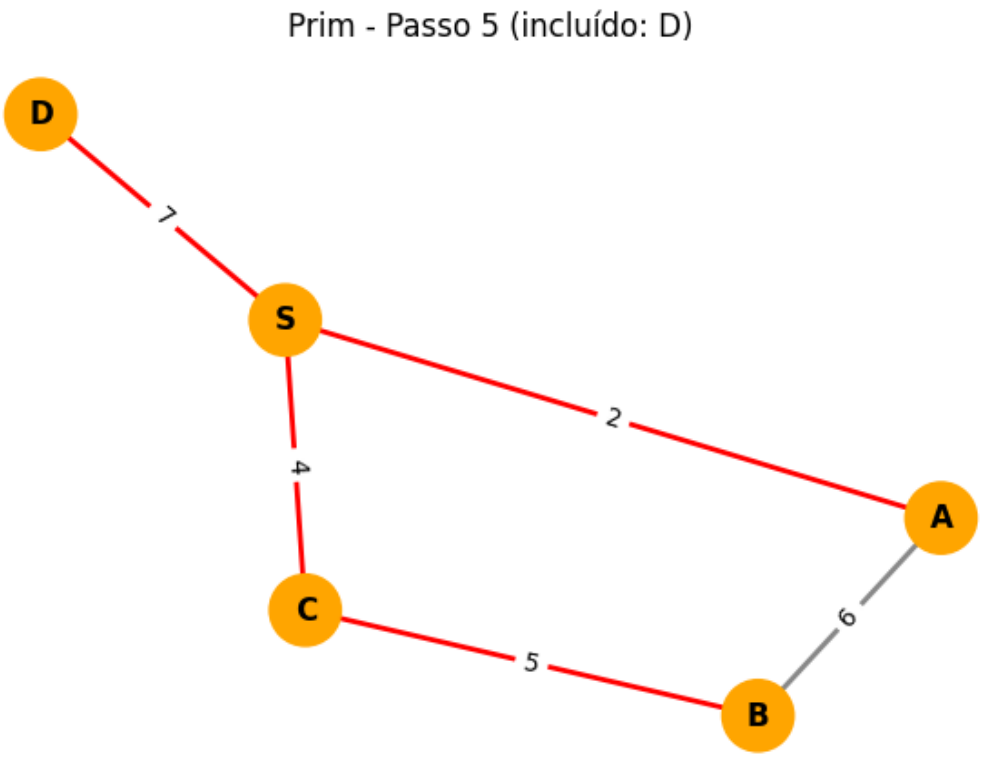

```
Passo 3:
  Vértice escolhido: C (chave=4)
  Chave antes: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 6}
  Predecessor antes: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'A'}
  Chave depois: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 5}
  Predecessor depois: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'C'}
  Conjunto da AGM: {'S': True, 'A': True, 'C': True, 'D': False, 'B': False}
```




```
Passo 4:
  Vértice escolhido: B (chave=5)
  Chave antes: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 5}
  Predecessor antes: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'C'}
  Chave depois: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 5}
  Predecessor depois: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'C'}
  Conjunto da AGM: {'S': True, 'A': True, 'C': True, 'D': False, 'B': True}
```




```
Passo 5:
  Vértice escolhido: D (chave=7)
  Chave antes: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 5}
  Predecessor antes: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'C'}
  Chave depois: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 5}
  Predecessor depois: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'C'}
  Conjunto da AGM: {'S': True, 'A': True, 'C': True, 'D': True, 'B': True}
```




```
Resultado final da AGM (Prim):
Chave: {'S': 0, 'A': 2, 'C': 4, 'D': 7, 'B': 5}
Predecessor: {'S': None, 'A': 'S', 'C': 'S', 'D': 'S', 'B': 'C'}
Arestas da AGM: [('S', 'A'), ('S', 'C'), ('S', 'D'), ('C', 'B')]
Custo total: 18

Tabela de Chaves e Predecessores (Prim):
                0  1  2  3  4
Vértice         S  A  C  D  B
Chave           0  2  4  7  5
Predecessor  None  S  S  S  C
```

1.11.4 Explicação

O algoritmo de Prim constrói a árvore geradora mínima a partir de um vértice inicial, sempre escolhendo a aresta de menor custo que expande a árvore até conectar todos os vértices.

Passo a passo: - Começamos com um vértice inicial (raiz) e vamos adicionando vértices à árvore. - A cada passo, escolhemos o vértice de menor chave que não está na árvore e atualizamos as chaves dos seus vizinhos. - O processo se repete até que todos os vértices estejam na árvore.

O custo total mínimo é a soma dos custos das arestas da árvore geradora mínima.

1.11.5 Questão 6: AGM com Kruskal

Uma empresa deseja conectar 4 de suas filiais (A, B, C, D) utilizando o menor comprimento de cabos possível. As distâncias entre as filiais são as seguintes:

- A - B: 1
- A - C: 4
- B - C: 2
- B - D: 5
- C - D: 3

Utilize o algoritmo de Kruskal para determinar o comprimento mínimo de cabo necessário e quais filiais estarão conectadas.

1.12 Algoritmo de Kruskal

O **algoritmo de Kruskal** é um método para encontrar a **árvore geradora mínima** (AGM) de um grafo ponderado e conexo. A AGM conecta todos os vértices do grafo com o menor custo total possível, sem formar ciclos.

1.12.1 Como funciona o Kruskal?

1. **Ordena todas as arestas** do grafo em ordem crescente de peso (custo).
2. **Inicializa** a AGM como um conjunto vazio.
3. Para cada aresta, na ordem dos menores pesos:
   - Se a aresta **não formar um ciclo** ao ser adicionada à AGM, inclua-a.
   - Caso contrário, descarte a aresta.
4. Repita até que a AGM tenha exatamente $n - 1$ arestas (onde n é o número de vértices).

1.12.2 Características

- Sempre escolhe a aresta mais barata disponível que não forma ciclo.
- Utiliza uma estrutura chamada **Union-Find** para detectar ciclos de forma eficiente.
- Funciona para grafos conexos e florestas.

1.12.3 Exemplo de aplicação

- Projetos de redes de computadores, energia ou estradas, onde se deseja conectar todos os pontos com o menor custo possível.

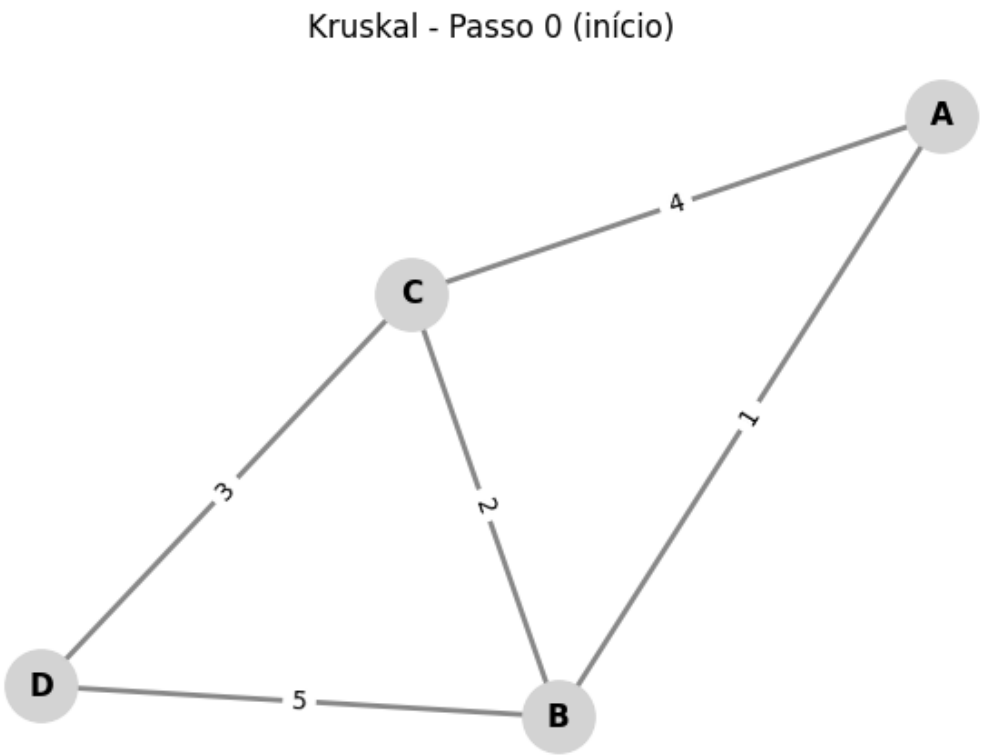
Resumo:
O algoritmo de Kruskal constrói a árvore geradora mínima escolhendo sempre as arestas de menor peso, evitando ciclos, até conectar todos os vértices.

[157]:
```
# Questão 6: AGM com Kruskal passo a passo (com plot e prints)

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
```

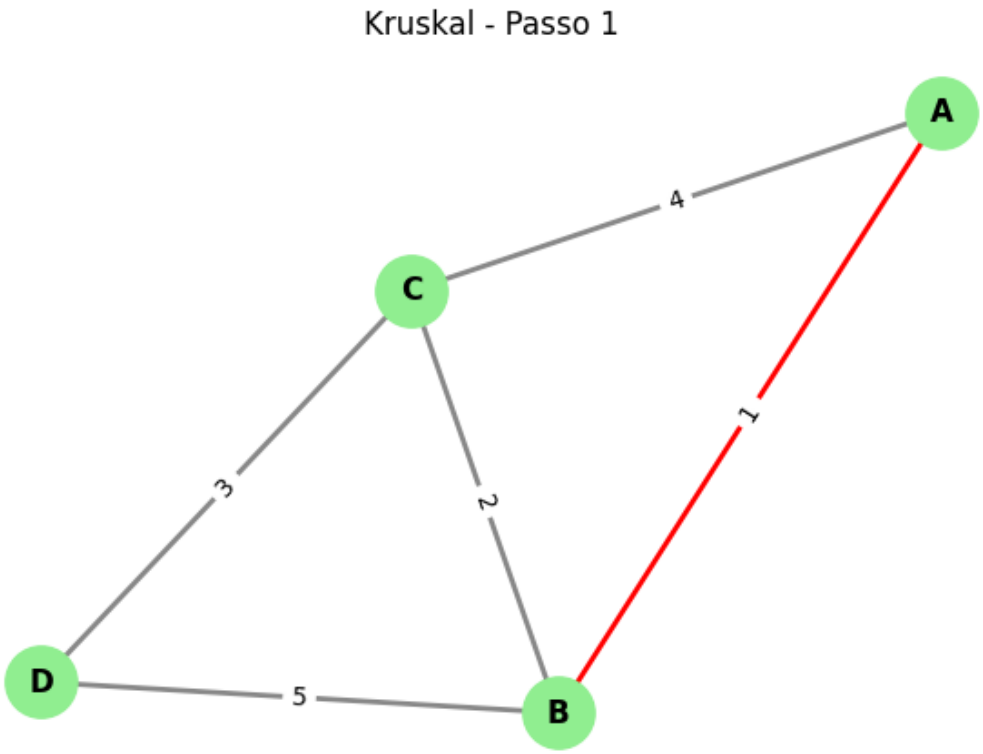
```python
# Criação do grafo ponderado
G_kruskal2 = nx.Graph()
G_kruskal2.add_weighted_edges_from([
    ('A', 'B', 1),
    ('A', 'C', 4),
    ('B', 'C', 2),
    ('B', 'D', 5),
    ('C', 'D', 3)
])

edges_sorted = sorted(G_kruskal2.edges(data=True), key=lambda x: x[2]['weight'])
mst_edges = []
mst_cost = 0
uf = nx.utils.UnionFind()
passo = 0

pos = nx.spring_layout(G_kruskal2, seed=42)

print(f"Passo {passo}: Estado inicial do grafo (nenhuma aresta selecionada)")
plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(
    G_kruskal2, pos, with_labels=True,
    node_color='lightgray', node_size=800, font_weight='bold',
    edge_color='#888', width=2
)
labels = nx.get_edge_attributes(G_kruskal2, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G_kruskal2, pos, edge_labels=labels)
plt.title("Kruskal - Passo 0 (início)")
plt.show()
passo += 1

for u, v, data in edges_sorted:
    print(f"Passo {passo}:")
    print(f"  Considerando aresta ({u}, {v}) de custo {data['weight']}")
    if uf[u] != uf[v]:
        print(f"  -> Aresta adicionada à AGM.")
        mst_edges.append((u, v))
        mst_cost += data['weight']
        uf.union(u, v)
    else:
        print(f"  -> Aresta descartada (formaria ciclo).")

    # Visualização do grafo parcial da AGM
    edge_colors = []
    for e in G_kruskal2.edges:
        if e in mst_edges or (e[1], e[0]) in mst_edges:
            edge_colors.append('red')
```

```
        else:
            edge_colors.append('#888')
    plt.figure(figsize=(6,4))
    nx.draw(
        G_kruskal2, pos, with_labels=True,
        node_color='lightgreen', node_size=800, font_weight='bold',
        edge_color=edge_colors, width=2
    )
    nx.draw_networkx_edge_labels(G_kruskal2, pos, edge_labels=labels)
    plt.title(f"Kruskal - Passo {passo}")
    plt.show()
    print(f"  Arestas na AGM até agora: {mst_edges}")
    print(f"  Custo parcial: {mst_cost}\n")
    passo += 1

    # Parar quando a AGM tiver n-1 arestas
    if len(mst_edges) == len(G_kruskal2.nodes) - 1:
        break

print("Resultado final da AGM (Kruskal):")
print("Arestas selecionadas:", mst_edges)
print("Custo total:", mst_cost)
```

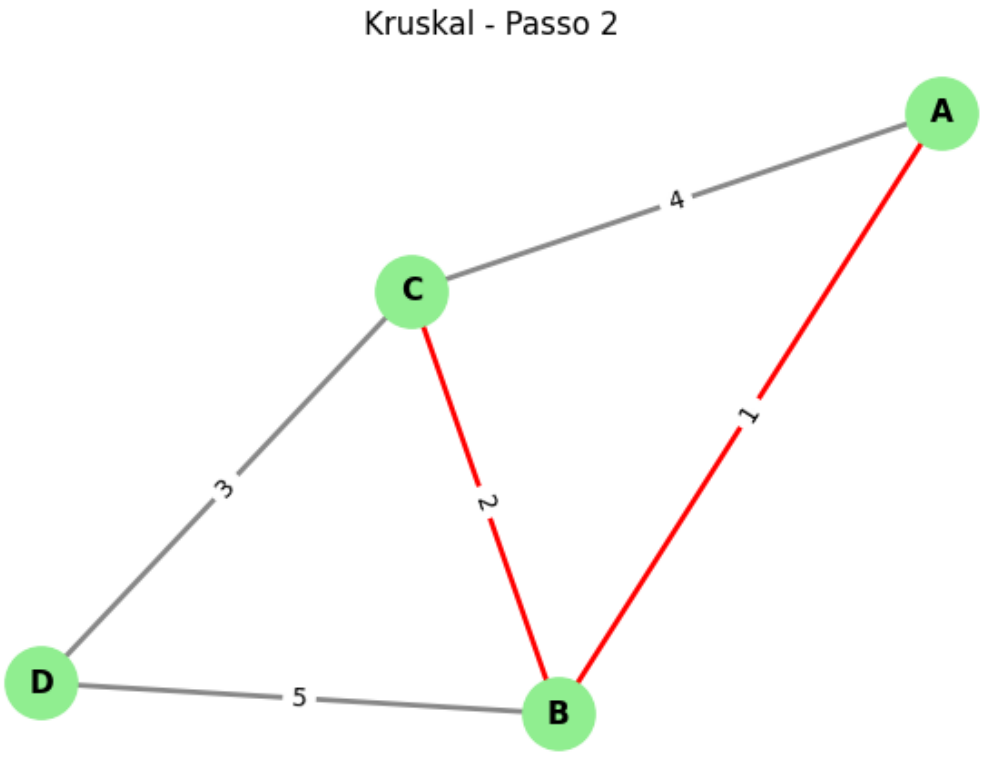
```
Passo 0: Estado inicial do grafo (nenhuma aresta selecionada)
```



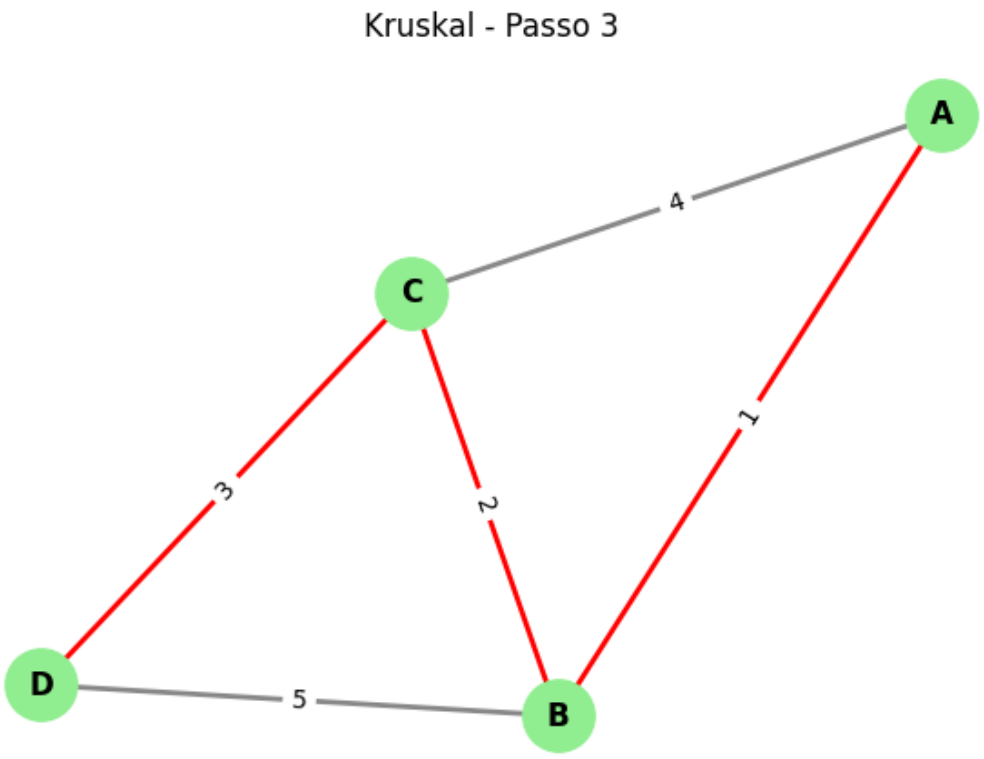
```
Passo 1:
  Considerando aresta (A, B) de custo 1
  -> Aresta adicionada à AGM.
```




```
  Arestas na AGM até agora: [('A', 'B')]
  Custo parcial: 1

Passo 2:
  Considerando aresta (B, C) de custo 2
  -> Aresta adicionada à AGM.
```




```
  Arestas na AGM até agora: [('A', 'B'), ('B', 'C')]
  Custo parcial: 3

Passo 3:
  Considerando aresta (C, D) de custo 3
  -> Aresta adicionada à AGM.
```




```
  Arestas na AGM até agora: [('A', 'B'), ('B', 'C'), ('C', 'D')]
  Custo parcial: 6

Resultado final da AGM (Kruskal):
Arestas selecionadas: [('A', 'B'), ('B', 'C'), ('C', 'D')]
Custo total: 6
```

1.12.4 Explicação

Neste exercício, aplicamos o algoritmo de Kruskal para encontrar a árvore geradora mínima (AGM) de um grafo ponderado que representa as distâncias entre filiais de uma empresa.

Passo a passo: - O algoritmo começa ordenando as arestas do grafo pelo seu peso (custo). - Em seguida, ele adiciona as arestas uma a uma à AGM, começando pela de menor peso, desde que não formem um ciclo. - O processo continua até que todas as filiais estejam conectadas.

Resultado:
A AGM encontrada é a que conecta todas as filiais com o menor comprimento total de cabos, garantindo a economia e eficiência na instalação da rede de filiais da empresa.

1.12.5 Questão 7: Menor custo entre todos os pares (Floyd-Warshall passo a passo)

Uma empresa deseja analisar o custo mínimo de transporte entre todas as suas filiais, considerando as distâncias diretas entre elas. As filiais e as distâncias são as seguintes:

- A → B: 3
- A → C: 10
- B → C: 1
- B → D: 2
- C → D: 4

Utilize o algoritmo de Floyd-Warshall para determinar a matriz de custos mínimos entre todas as filiais. Mostre o passo a passo do algoritmo, explicando o que acontece em cada iteração/intermediário.

1.13 Algoritmo de Floyd-Warshall

O **algoritmo de Floyd-Warshall** é utilizado para encontrar o menor custo (ou menor caminho) entre **todos os pares de vértices** em um grafo ponderado, podendo ser direcionado ou não. Ele calcula a matriz de menores distâncias entre todos os pares, considerando todos os caminhos possíveis.

1.13.1 Como funciona o Floyd-Warshall?

1. **Inicialize** uma matriz de distâncias, onde cada posição `[i][j]` contém o peso da aresta de `i` para `j` (ou infinito, se não houver ligação direta).
2. Para cada vértice intermediário `k`:
   - Para cada par de vértices `(i, j)`:
     - Atualize a distância de `i` para `j` se passar por `k` for mais barato:

```
se dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j]:
    dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j]
```

3. Repita até considerar todos os vértices como intermediários.

1.13.2 Características

- Resolve o problema de **todos os pares de caminhos mínimos**.
- Aceita pesos negativos (mas não pode haver ciclos negativos).
- Complexidade: $O(n^3)$, onde n é o número de vértices.

1.13.3 Exemplo de aplicação

- Análise de rotas em redes de transporte, logística, telecomunicações, etc.
- Determinação do menor custo entre todas as cidades de uma malha viária.

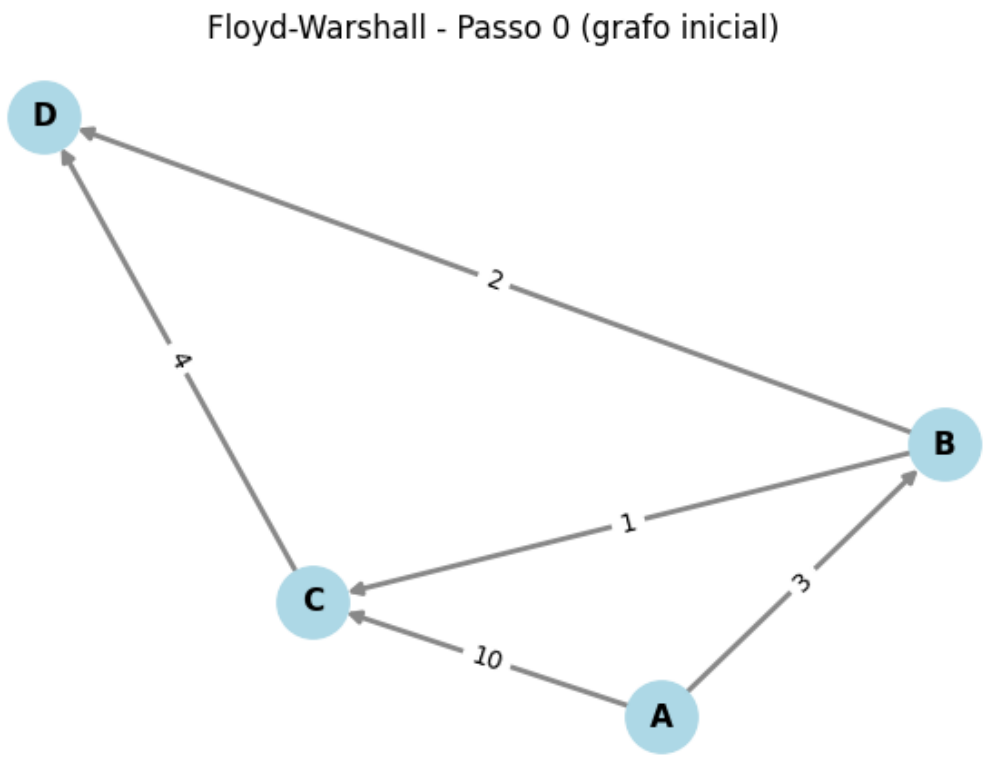
Resumo:
O algoritmo de Floyd-Warshall encontra o menor custo entre todos os pares de vértices, atualizando a matriz de distâncias ao considerar cada vértice como possível intermediário nos caminhos.

[158]:
```
# Floyd-Warshall passo a passo com explicação

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

G_fw = nx.DiGraph()
```

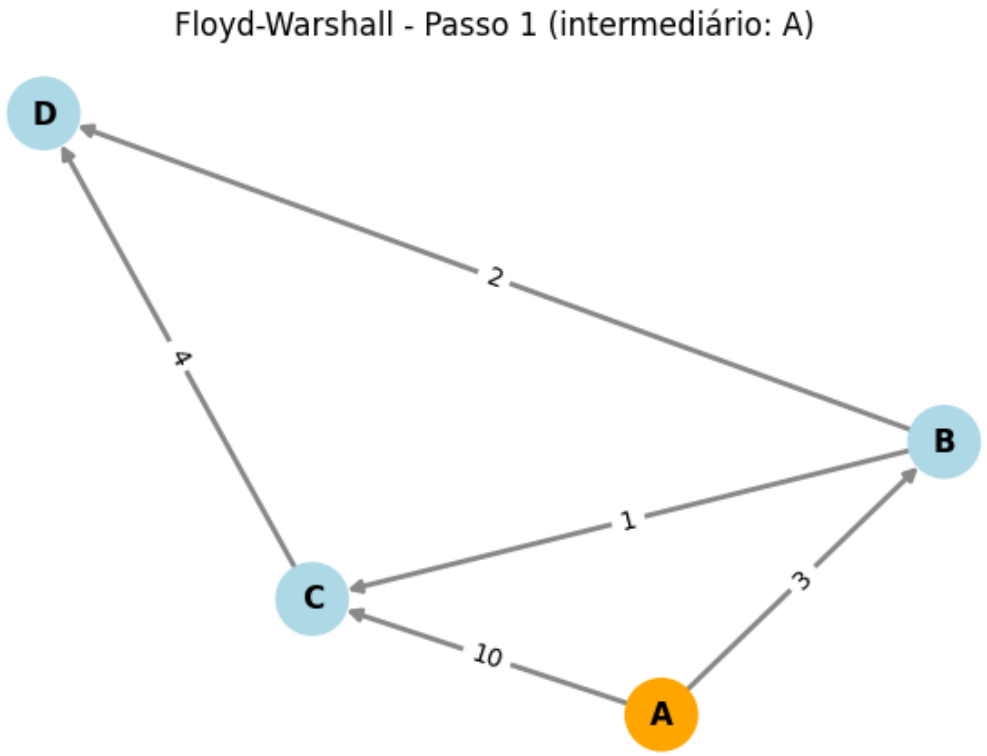
```
G_fw.add_weighted_edges_from([
    ('A', 'B', 3),
    ('A', 'C', 10),
    ('B', 'C', 1),
    ('B', 'D', 2),
    ('C', 'D', 4)
])

vertices = ['A', 'B', 'C', 'D']
dist = {u: {v: float('inf') for v in vertices} for u in vertices}
for v in vertices:
    dist[v][v] = 0
for u, v, data in G_fw.edges(data=True):
    dist[u][v] = data['weight']

print("Passo 0: Matriz inicial de custos diretos entre as filiais")
df = pd.DataFrame(dist).T
print(df.replace(float('inf'), 'ϖ'))

# Plot inicial
pos = nx.spring_layout(G_fw, seed=42)
plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(G_fw, pos, with_labels=True, node_color='lightblue', node_size=800,␣
 ↪font_weight='bold', edge_color='#888', width=2, arrows=True)
labels = nx.get_edge_attributes(G_fw, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G_fw, pos, edge_labels=labels)
plt.title("Floyd-Warshall - Passo 0 (grafo inicial)")
plt.show()

passo = 1
for k in vertices:
    print(f"\nPasso {passo}: Considerando '{k}' como intermediário")
    print(f"  - Verificamos se passar por '{k}' reduz o custo entre outros␣
 ↪pares de filiais.")
    alterou = False
    for i in vertices:
        for j in vertices:
            if dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j]:
                print(f"    * Atualizando custo de {i} para {j}: {dist[i][j]} →␣
 ↪{dist[i][k] + dist[k][j]} (via {k})")
                dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j]
                alterou = True
    if not alterou:
        print("  - Nenhuma atualização de custo neste passo.")
    df = pd.DataFrame(dist).T
    print("  Matriz de custos atualizada:")
    print(df.replace(float('inf'), 'ϖ'))
```

```
    # Plot do passo: destacar o intermediário
    plt.figure(figsize=(6,4))
    node_colors = ['orange' if n == k else 'lightblue' for n in G_fw.nodes]
    nx.draw(G_fw, pos, with_labels=True, node_color=node_colors, node_size=800,␣
 ↪font_weight='bold', edge_color='#888', width=2, arrows=True)
    nx.draw_networkx_edge_labels(G_fw, pos, edge_labels=labels)
    plt.title(f"Floyd-Warshall - Passo {passo} (intermediário: {k})")
    plt.show()
    passo += 1

print("\nMatriz final de menores custos entre todos os pares (Floyd-Warshall):")
df = pd.DataFrame(dist).T
print(df.replace(float('inf'), 'ϖ'))
```

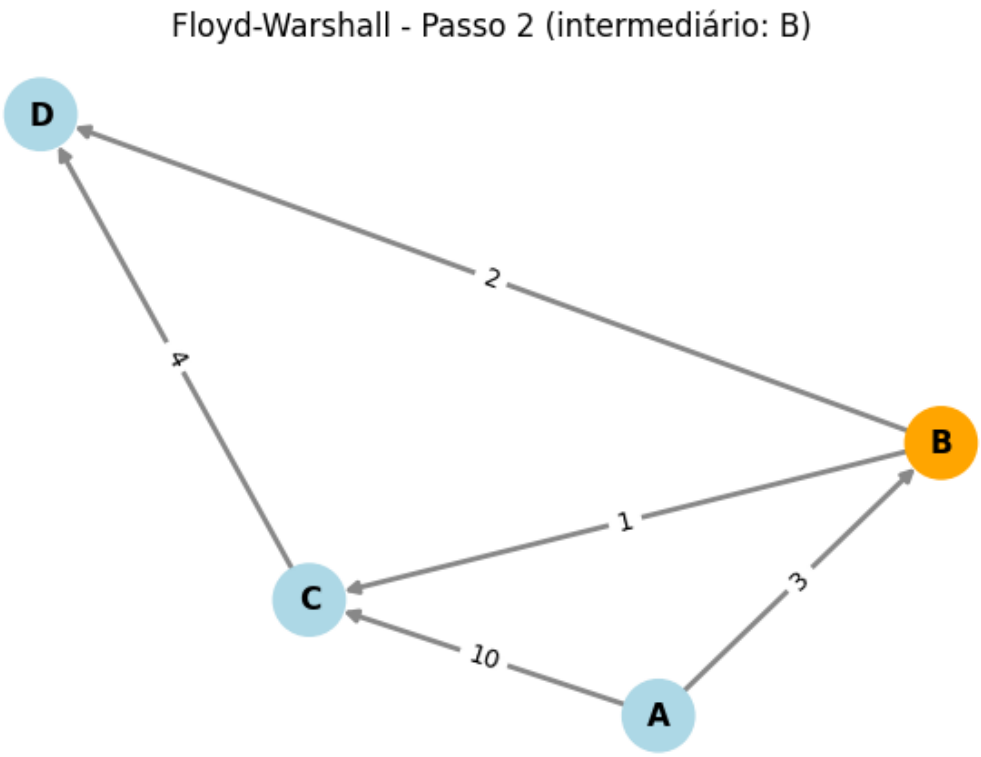
```
Passo 0: Matriz inicial de custos diretos entre as filiais
     A    B     C    D
A  0.0  3.0  10.0    ϖ
B    ϖ  0.0   1.0  2.0
C    ϖ    ϖ   0.0  4.0
D    ϖ    ϖ     ϖ  0.0
```



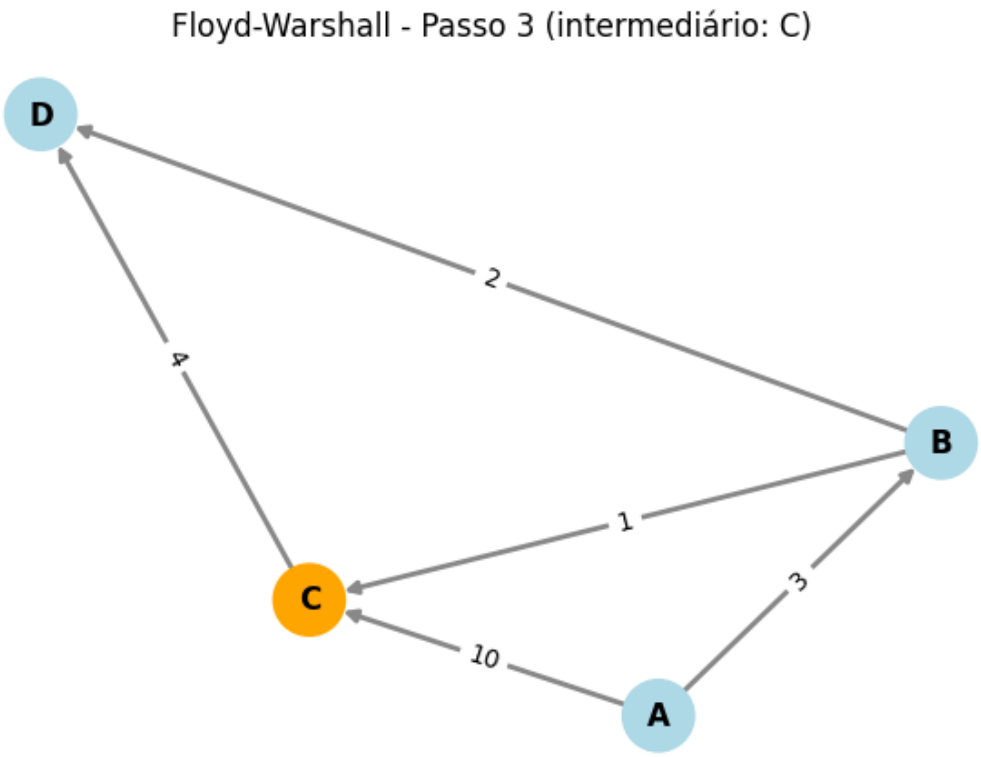
```
Passo 1: Considerando 'A' como intermediário
  - Verificamos se passar por 'A' reduz o custo entre outros pares de filiais.
  - Nenhuma atualização de custo neste passo.
  Matriz de custos atualizada:
     A    B     C    D
A  0.0  3.0  10.0    ∞
B    ∞  0.0   1.0  2.0
C    ∞    ∞   0.0  4.0
D    ∞    ∞     ∞  0.0
```



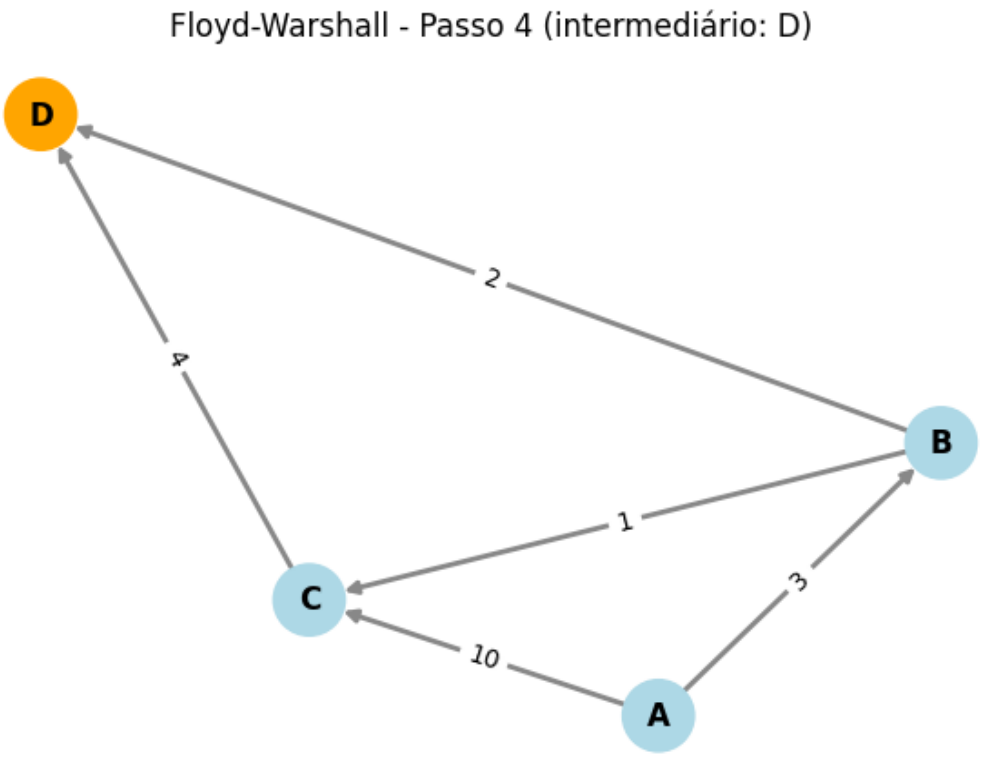

```
Passo 2: Considerando 'B' como intermediário
  - Verificamos se passar por 'B' reduz o custo entre outros pares de filiais.
    * Atualizando custo de A para C: 10 → 4 (via B)
    * Atualizando custo de A para D: inf → 5 (via B)
  Matriz de custos atualizada:
     A    B    C    D
A  0.0  3.0  4.0  5.0
B    ∞  0.0  1.0  2.0
C    ∞    ∞  0.0  4.0
D    ∞    ∞    ∞  0.0
```




```
Passo 3: Considerando 'C' como intermediário
  - Verificamos se passar por 'C' reduz o custo entre outros pares de filiais.
  - Nenhuma atualização de custo neste passo.
  Matriz de custos atualizada:
     A    B    C    D
A  0.0  3.0  4.0  5.0
B    ∞  0.0  1.0  2.0
C    ∞    ∞  0.0  4.0
D    ∞    ∞    ∞  0.0
```




```
Passo 4: Considerando 'D' como intermediário
  - Verificamos se passar por 'D' reduz o custo entre outros pares de filiais.
  - Nenhuma atualização de custo neste passo.
  Matriz de custos atualizada:
     A    B    C    D
A  0.0  3.0  4.0  5.0
B    ∞  0.0  1.0  2.0
C    ∞    ∞  0.0  4.0
D    ∞    ∞    ∞  0.0
```




```
Matriz final de menores custos entre todos os pares (Floyd-Warshall):
     A    B    C    D
A  0.0  3.0  4.0  5.0
B    ∞  0.0  1.0  2.0
C    ∞    ∞  0.0  4.0
D    ∞    ∞    ∞  0.0
```

[159]:
```python
# Função para reconstruir o caminho mínimo entre dois vértices usando a matriz de predecessores
def floyd_warshall_caminho(dist, vertices):
    # Inicializa a matriz de predecessores
    pred = {u: {v: None for v in vertices} for u in vertices}
    for u in vertices:
        for v in vertices:
            if u != v and dist[u][v] != float('inf'):
                pred[u][v] = u

    # Atualiza predecessores durante o Floyd-Warshall
    for k in vertices:
        for i in vertices:
            for j in vertices:
```

```
                if dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j]:
                    dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j]
                    pred[i][j] = pred[k][j]
    return pred

# Calculando a matriz de predecessores
# (precisa copiar dist para não alterar a matriz já impressa)
import copy
dist_fw = copy.deepcopy(dist)
pred = floyd_warshall_caminho(dist_fw, vertices)

# Função para reconstruir o caminho de i até j
def reconstruir_caminho(pred, i, j):
    if pred[i][j] is None:
        return []
    caminho = [j]
    while j != i:
        j = pred[i][j]
        caminho.append(j)
    caminho.reverse()
    return caminho

# Exemplo: caminho e custo de A até D
origem = 'A'
destino = 'D'
caminho = reconstruir_caminho(pred, origem, destino)
custo = dist_fw[origem][destino] if caminho else float('inf')

print(f"\nCaminho mínimo de {origem} até {destino}: {caminho}")
print(f"Custo mínimo de {origem} até {destino}: {custo}")
```

```
Caminho mínimo de A até D: ['A', 'D']
Custo mínimo de A até D: 5
```

1.13.4 Questão 8: Caminhos Euleriano e Hamiltoniano em um grafo de cidades

Considere o grafo G(V, A) abaixo, onde os vértices representam cidades e as arestas representam estradas entre elas. O objetivo é analisar as propriedades do grafo em relação aos trajetos Hamiltonianos e Eulerianos.

Grafo G(V, A): - Vértices: V = {A, B, C, D, E, F} - Arestas e seus pesos: 1. A - B: 5
2. A - C: 7
3. B - C: 4
4. B - D: 6
5. C - D: 3
6. C - E: 8
7. D - E: 2
8. D - F: 9

9. E - F: 6

Analise as afirmações abaixo:

a) No Grafo G(V, A), não é possível ter um trajeto Euleriano de “A” até “F”.

b) No Grafo G(V, A), não é possível ter um trajeto Hamiltoniano de “A” até “F”.

c) É possível construir um trajeto Euleriano entre “A” e “F”, com tamanho total igual a 28.

d) É possível construir um trajeto Hamiltoniano entre “A” e “F”, com tamanho total igual a 30.

Com base nas propriedades do grafo, qual das afirmações acima é correta? Justifique sua resposta detalhadamente, explicando:

- O que caracteriza um caminho Euleriano e um caminho Hamiltoniano.
- Como identificar se o grafo admite cada tipo de caminho entre os vértices dados.
- Se possível, mostre o caminho correspondente e o cálculo do tamanho total.

1.14 Caminho Euleriano e Caminho Hamiltoniano

1.14.1 Caminho Euleriano

Um **caminho Euleriano** em um grafo é um trajeto que percorre **todas as arestas exatamente uma vez**.
- Em grafos não direcionados, existe um caminho Euleriano entre dois vértices se e somente se **apenas esses dois vértices têm grau ímpar** (os demais têm grau par). - Se todos os vértices têm grau par, existe um **circuito Euleriano** (começa e termina no mesmo vértice).

1.14.2 Caminho Hamiltoniano

Um **caminho Hamiltoniano** é um trajeto que passa **por todos os vértices exatamente uma vez** (não necessariamente todas as arestas). - Se existe um caminho Hamiltoniano que começa em um vértice e termina em outro, dizemos que o grafo é **semi-hamiltoniano**. - Se existe um ciclo Hamiltoniano (começa e termina no mesmo vértice), o grafo é **hamiltoniano**.

1.14.3 Como identificar no grafo?

- **Euleriano:** Verifique o grau dos vértices. Se só dois vértices têm grau ímpar (por exemplo, A e F), pode haver um caminho Euleriano de A até F.
- **Hamiltoniano:** Não há um critério simples, é preciso testar as possibilidades (busca exaustiva ou algoritmos específicos).

1.14.4 Resumindo:

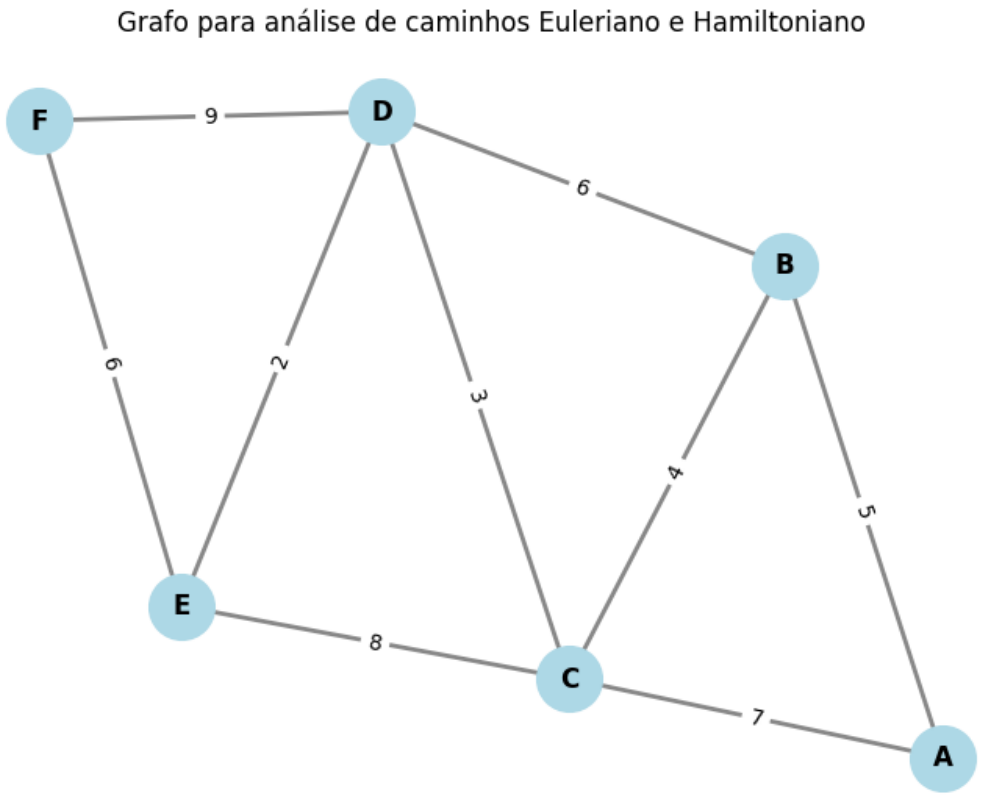
- **Caminho Euleriano:** percorre todas as arestas uma vez.
- **Caminho Hamiltoniano:** passa por todos os vértices uma vez.

No contexto do seu exercício, para saber se existe um caminho Euleriano ou Hamiltoniano entre A e F, analise os graus dos vértices e tente construir os caminhos conforme as definições acima.

[160]:
```python
# Análise detalhada de caminhos Euleriano e Hamiltoniano (Questão 8)

import networkx as nx

# Criação do grafo
G8 = nx.Graph()
G8.add_weighted_edges_from([
    ('A', 'B', 5),
    ('A', 'C', 7),
    ('B', 'C', 4),
    ('B', 'D', 6),
    ('C', 'D', 3),
    ('C', 'E', 8),
    ('D', 'E', 2),
    ('D', 'F', 9),
    ('E', 'F', 6)
])

# Verificando caminho Euleriano de A até F
grau_impar = [v for v in G8.nodes if G8.degree(v) % 2 == 1]
print("Vértices de grau ímpar:", grau_impar)
if len(grau_impar) == 2 and 'A' in grau_impar and 'F' in grau_impar:
    print("Existe caminho Euleriano de A até F.")
    # Encontrar caminho Euleriano (se existir)
    caminho_euleriano = list(nx.eulerian_path(G8, source='A'))
    print("Caminho Euleriano:", caminho_euleriano)
    custo_euleriano = sum(G8.get_edge_data(u, v)['weight'] for u, v in␣
 ↪caminho_euleriano)
    print("Custo total do caminho Euleriano:", custo_euleriano)
else:
    print("Não existe caminho Euleriano de A até F.")

# Verificando caminho Hamiltoniano de A até F
def hamiltonian_path(G, start, end):
    from itertools import permutations
    nodes = list(G.nodes)
    nodes.remove(start)
    nodes.remove(end)
    for perm in permutations(nodes):
        path = [start] + list(perm) + [end]
        if all(G.has_edge(path[i], path[i+1]) for i in range(len(path)-1)):
            return path
    return None

caminho_hamiltoniano = hamiltonian_path(G8, 'A', 'F')
if caminho_hamiltoniano:
    print("Existe caminho Hamiltoniano de A até F.")
```

```
    print("Caminho Hamiltoniano:", caminho_hamiltoniano)
    custo_hamiltoniano = sum(G8.get_edge_data(caminho_hamiltoniano[i],␣
 ↪caminho_hamiltoniano[i+1])['weight'] for i in␣
 ↪range(len(caminho_hamiltoniano)-1))
    print("Custo total do caminho Hamiltoniano:", custo_hamiltoniano)
else:
    print("Não existe caminho Hamiltoniano de A até F.")

# Visualização do grafo
import matplotlib.pyplot as plt
pos = nx.spring_layout(G8, seed=42)
plt.figure(figsize=(7,5))
nx.draw(G8, pos, with_labels=True, node_color='lightblue', node_size=900,␣
 ↪font_weight='bold', edge_color='#888', width=2)
labels = nx.get_edge_attributes(G8, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G8, pos, edge_labels=labels)
plt.title("Grafo para análise de caminhos Euleriano e Hamiltoniano")
plt.show()
```

```
Vértices de grau ímpar: ['B', 'E']
Não existe caminho Euleriano de A até F.
Existe caminho Hamiltoniano de A até F.
Caminho Hamiltoniano: ['A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F']
Custo total do caminho Hamiltoniano: 20
```



1.14.5 Questão 9: Menor custo de transporte com Dijkstra passo a passo

Uma empresa de entregas deseja calcular o menor custo de transporte entre o depósito principal (vértice A) e os demais centros de distribuição em uma cidade. O grafo abaixo representa os centros (vértices) e as estradas (arestas com pesos):

- Vértices: A, B, C, D, E
- Arestas e seus custos:
  1. A – B: 2
  2. A – C: 5
  3. B – C: 1
  4. B – D: 2
  5. C – D: 3
  6. C – E: 1
  7. D – E: 2

Utilizando o algoritmo de Dijkstra a partir do vértice A, mostre o passo a passo do algoritmo, incluindo a tabela de menores custos (`dv`) e predecessores (`pv`) para cada vértice em cada passo, além da visualização do grafo.

1.15 Algoritmo de Dijkstra

O **algoritmo de Dijkstra** é utilizado para encontrar o menor caminho (menor custo) entre um vértice de origem e todos os outros vértices em um grafo ponderado com pesos não negativos.

1.15.1 Como funciona o Dijkstra?

1. **Inicialize** o custo de todos os vértices como infinito, exceto o vértice de origem, que recebe custo zero.
2. Marque todos os vértices como não visitados.
3. Escolha o vértice não visitado de menor custo atual.
4. Para cada vizinho desse vértice, atualize o custo se for possível chegar até ele por um caminho mais barato.
5. Marque o vértice atual como visitado.
6. Repita até visitar todos os vértices ou não houver mais atualizações possíveis.

1.15.2 Características

- Garante o menor caminho em grafos com pesos positivos.
- Utiliza uma fila de prioridade (ou seleção sequencial) para escolher o próximo vértice.
- Complexidade: $O(n^2)$ para implementação simples, $O(m \log n)$ com heap (n = vértices, m = arestas).

1.15.3 Exemplo de aplicação

- Cálculo de rotas mais curtas em mapas e redes de transporte.
- Otimização de custos em redes de comunicação e logística.

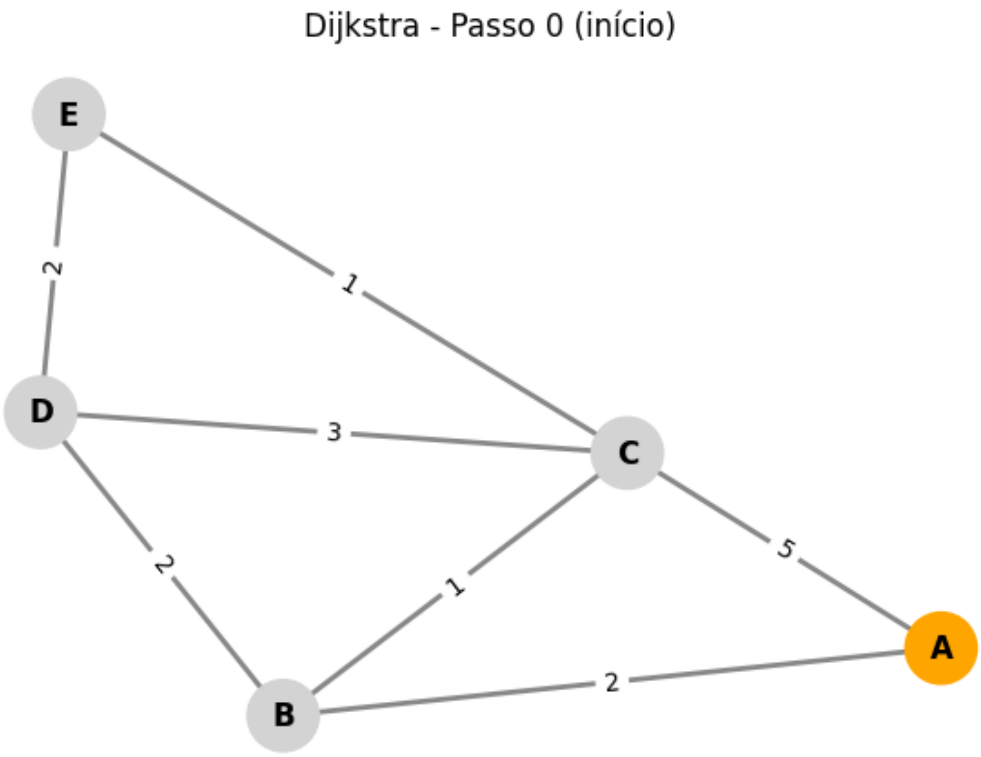
Resumo:
O algoritmo de Dijkstra encontra o menor custo de um ponto a todos os outros em um grafo com pesos positivos, atualizando os custos mínimos e predecessores a cada passo.

[161]:
```python
# Dijkstra passo a passo a partir do vértice A

import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd

G9 = nx.Graph()
G9.add_weighted_edges_from([
    ('A', 'B', 2),
    ('A', 'C', 5),
    ('B', 'C', 1),
    ('B', 'D', 2),
```

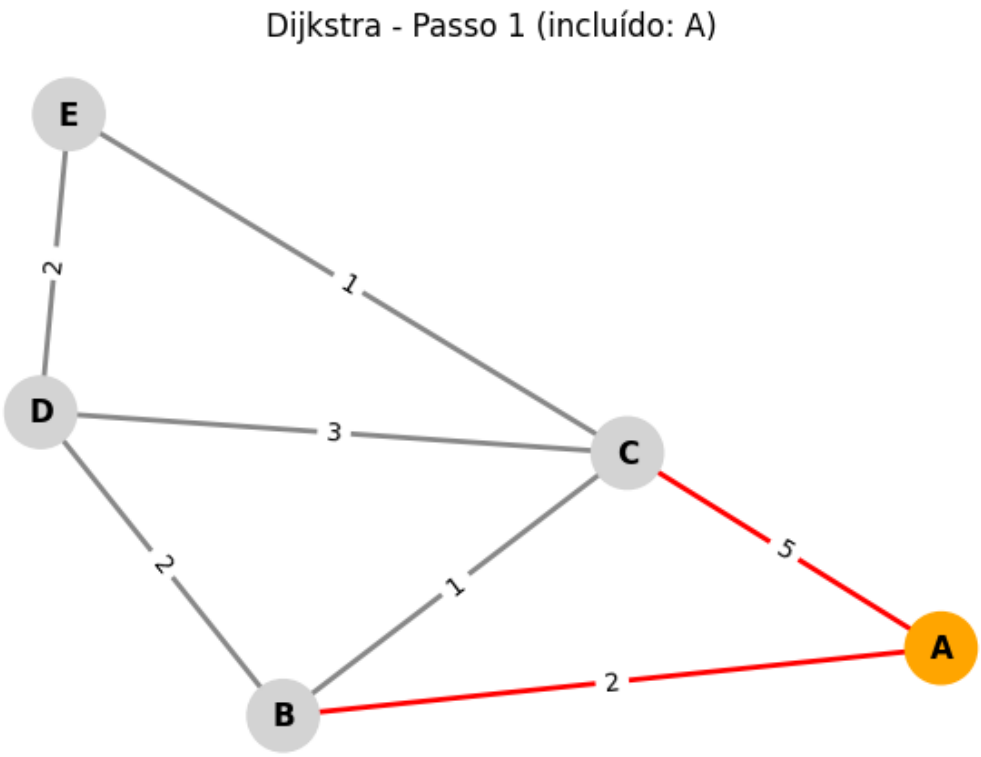
```
    ('C', 'D', 3),
    ('C', 'E', 1),
    ('D', 'E', 2)
])

vertices = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E']
dv = {v: float('inf') for v in vertices}
pv = {v: None for v in vertices}
dv['A'] = 0
visitados = set()

pos = nx.spring_layout(G9, seed=42)

print("Passo 0: Inicialização")
print("  Custos mínimos (dv):", dv)
print("  Predecessores (pv):", pv)
print("  Visitados:", visitados)
plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(G9, pos, with_labels=True, node_color=['orange' if n == 'A' else␣
 ↪'lightgray' for n in G9.nodes], node_size=800, font_weight='bold',␣
 ↪edge_color='#888', width=2)
labels = nx.get_edge_attributes(G9, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G9, pos, edge_labels=labels)
plt.title("Dijkstra - Passo 0 (início)")
plt.show()

passo = 1
while len(visitados) < len(vertices):
    # Seleciona o vértice não visitado de menor custo
    u = min((v for v in vertices if v not in visitados), key=lambda v: dv[v])
    visitados.add(u)
    print(f"\nPasso {passo}:")
    print(f"  Vértice escolhido: {u} (dv={dv[u]})")
    for v in G9.neighbors(u):
        if v not in visitados:
            custo = G9[u][v]['weight']
            if dv[v] > dv[u] + custo:
                print(f"    * Atualizando dv[{v}]: {dv[v]} → {dv[u] + custo}␣
 ↪(via {u})")
                dv[v] = dv[u] + custo
                pv[v] = u
    print("  Custos mínimos (dv):", dv)
    print("  Predecessores (pv):", pv)
    print("  Visitados:", visitados)

    # Visualização do grafo no passo
```

```
    node_colors = ['orange' if n == u else ('lightgreen' if n in visitados else␣
 ↪'lightgray') for n in G9.nodes]
    edge_colors = []
    for e in G9.edges:
        if (pv[e[1]] == e[0]) or (pv[e[0]] == e[1]):
            edge_colors.append('red')
        else:
            edge_colors.append('#888')
    plt.figure(figsize=(6,4))
    nx.draw(G9, pos, with_labels=True, node_color=node_colors, node_size=800,␣
 ↪font_weight='bold', edge_color=edge_colors, width=2)
    nx.draw_networkx_edge_labels(G9, pos, edge_labels=labels)
    plt.title(f"Dijkstra - Passo {passo} (incluído: {u})")
    plt.show()
    passo += 1

print("\nResultado final de Dijkstra a partir de A:")
print("Custos mínimos (dv):", dv)
print("Predecessores (pv):", pv)

# ...código anterior...

# Montando e exibindo a tabela de custos mínimos e predecessores com pandas
tabela = pd.DataFrame({
    'Vértice': vertices,
    'Custo Mínimo (dv)': [dv[v] for v in vertices],
    'Predecessor (pv)': [pv[v] for v in vertices]
})
print("\nTabela de Custos Mínimos e Predecessores (Dijkstra):")
print(tabela.T)
```

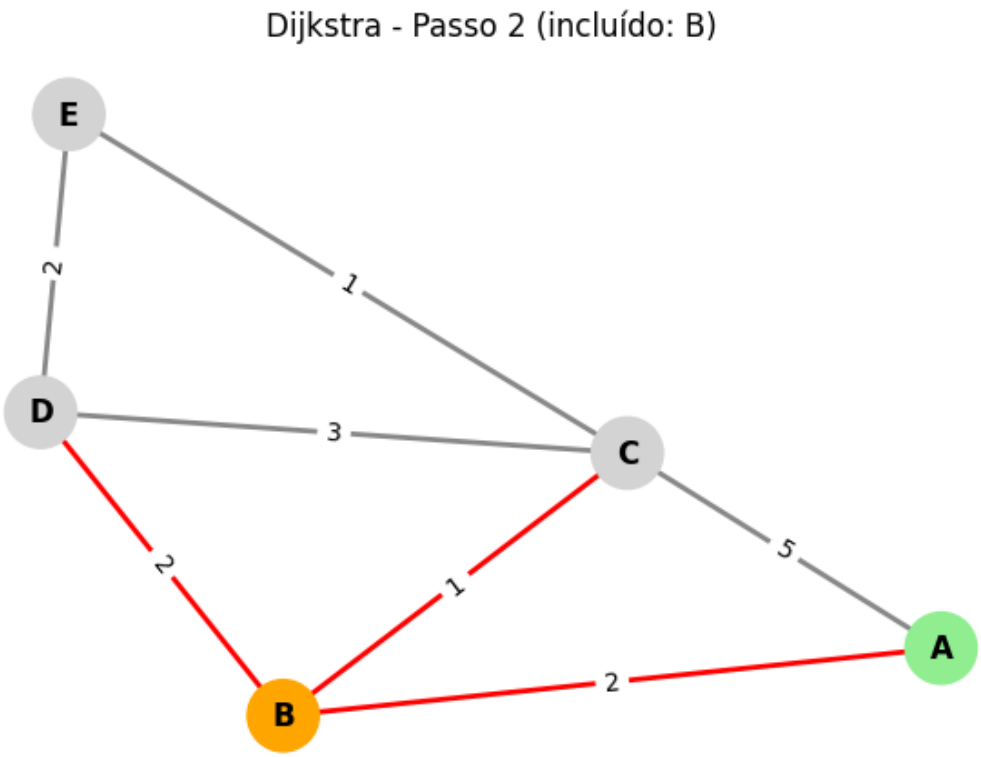
```
Passo 0: Inicialização
  Custos mínimos (dv): {'A': 0, 'B': inf, 'C': inf, 'D': inf, 'E': inf}
  Predecessores (pv): {'A': None, 'B': None, 'C': None, 'D': None, 'E': None}
  Visitados: set()
```



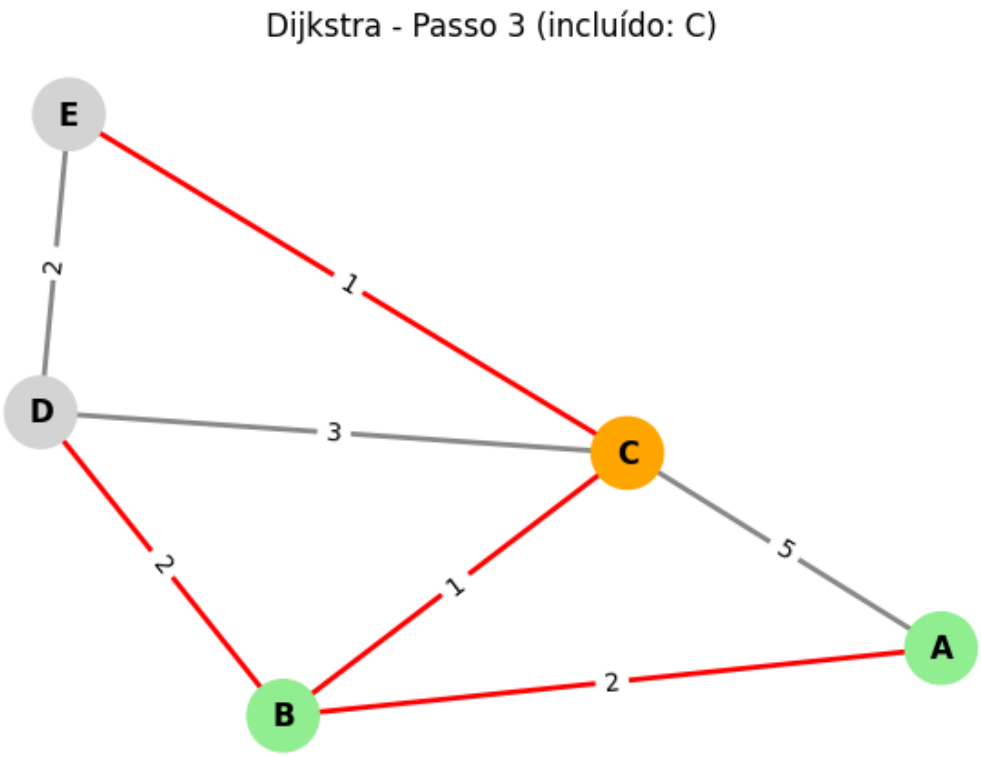

```
Passo 1:
  Vértice escolhido: A (dv=0)
    * Atualizando dv[B]: inf → 2 (via A)
    * Atualizando dv[C]: inf → 5 (via A)
  Custos mínimos (dv): {'A': 0, 'B': 2, 'C': 5, 'D': inf, 'E': inf}
  Predecessores (pv): {'A': None, 'B': 'A', 'C': 'A', 'D': None, 'E': None}
  Visitados: {'A'}
```



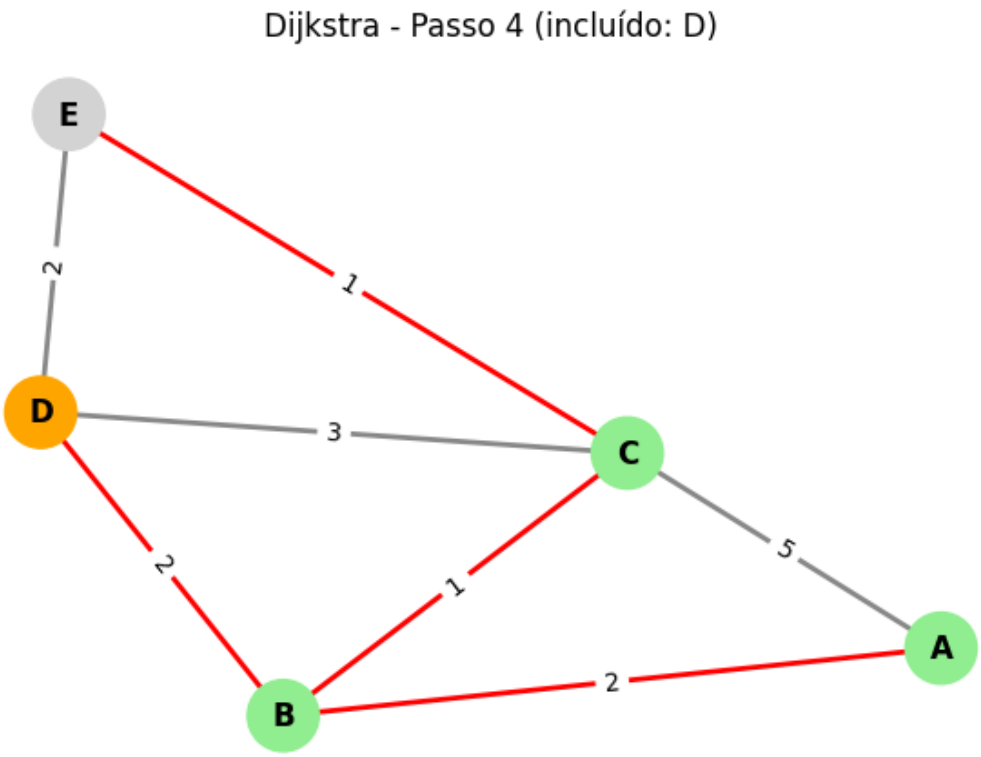

```
Passo 2:
  Vértice escolhido: B (dv=2)
    * Atualizando dv[C]: 5 → 3 (via B)
    * Atualizando dv[D]: inf → 4 (via B)
  Custos mínimos (dv): {'A': 0, 'B': 2, 'C': 3, 'D': 4, 'E': inf}
  Predecessores (pv): {'A': None, 'B': 'A', 'C': 'B', 'D': 'B', 'E': None}
  Visitados: {'A', 'B'}
```



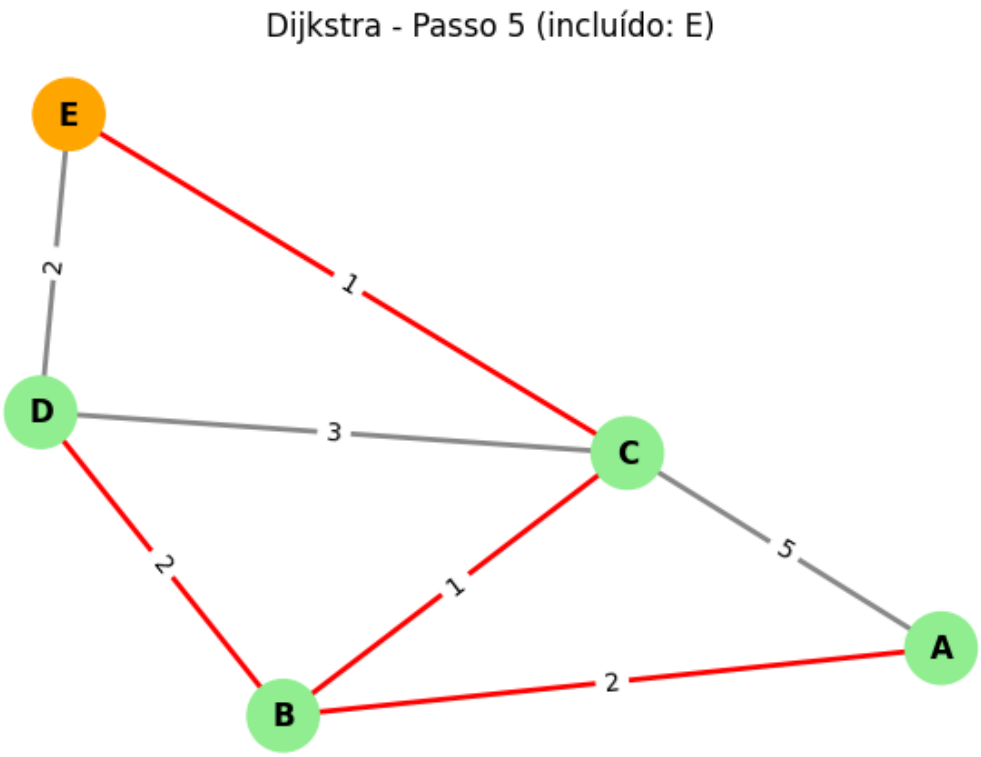

```
Passo 3:
  Vértice escolhido: C (dv=3)
    * Atualizando dv[E]: inf → 4 (via C)
  Custos mínimos (dv): {'A': 0, 'B': 2, 'C': 3, 'D': 4, 'E': 4}
  Predecessores (pv): {'A': None, 'B': 'A', 'C': 'B', 'D': 'B', 'E': 'C'}
  Visitados: {'A', 'C', 'B'}
```




```
Passo 4:
  Vértice escolhido: D (dv=4)
  Custos mínimos (dv): {'A': 0, 'B': 2, 'C': 3, 'D': 4, 'E': 4}
  Predecessores (pv): {'A': None, 'B': 'A', 'C': 'B', 'D': 'B', 'E': 'C'}
  Visitados: {'A', 'C', 'B', 'D'}
```




```
Passo 5:
  Vértice escolhido: E (dv=4)
  Custos mínimos (dv): {'A': 0, 'B': 2, 'C': 3, 'D': 4, 'E': 4}
  Predecessores (pv): {'A': None, 'B': 'A', 'C': 'B', 'D': 'B', 'E': 'C'}
  Visitados: {'D', 'A', 'E', 'C', 'B'}
```




```
Resultado final de Dijkstra a partir de A:
Custos mínimos (dv): {'A': 0, 'B': 2, 'C': 3, 'D': 4, 'E': 4}
Predecessores (pv): {'A': None, 'B': 'A', 'C': 'B', 'D': 'B', 'E': 'C'}

Tabela de Custos Mínimos e Predecessores (Dijkstra):
                      0  1  2  3  4
Vértice               A  B  C  D  E
Custo Mínimo (dv)     0  2  3  4  4
Predecessor (pv)   None  A  B  B  C
```

1.15.4 Questão 10: Matriz de custos (matriz de adjacência valorada) de um grafo de cidades

Uma empresa de energia está planejando instalar cabos entre cinco cidades: A, B, C, D e E. O custo de instalação entre cada par de cidades está representado nas arestas do grafo abaixo:

- Arestas e custos:
  - A–B: 4
  - A–C: 7
  - B–C: 2
  - B–D: 5
  - C–D: 3

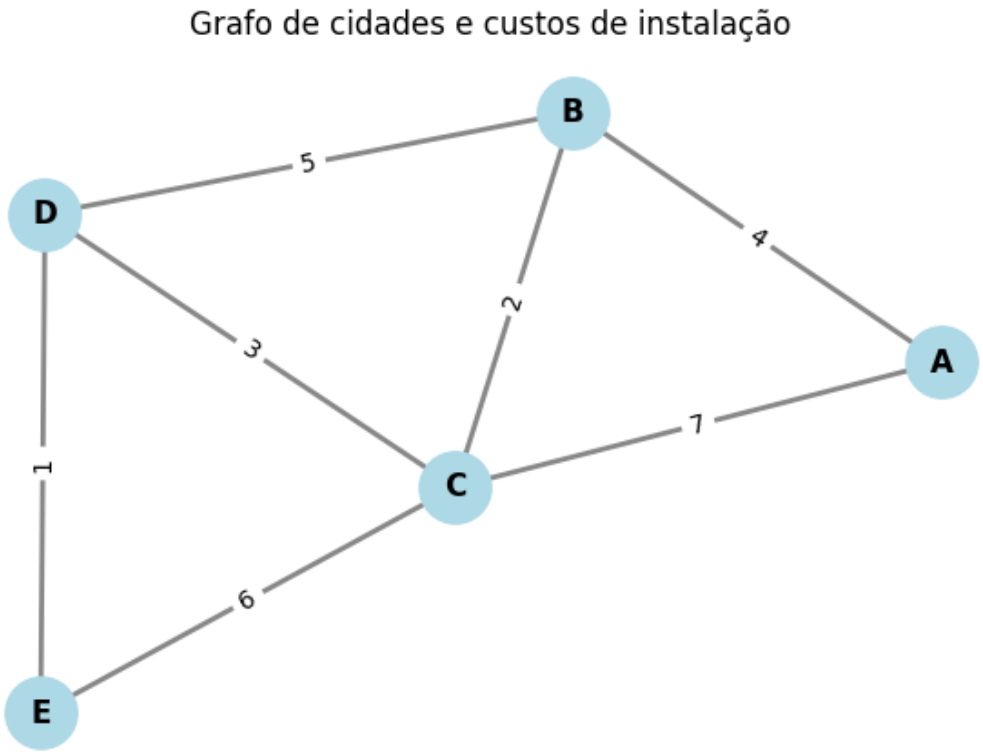
- C–E: 6
- D–E: 1

Monte a matriz de custos (matriz de adjacência valorada) desse grafo e explique como ela representa os custos de instalação entre as cidades.

[162]:
```
# Questão 10: Matriz de custos (matriz de adjacência valorada)

import networkx as nx
import pandas as pd

G10 = nx.Graph()
G10.add_weighted_edges_from([
    ('A', 'B', 4),
    ('A', 'C', 7),
    ('B', 'C', 2),
    ('B', 'D', 5),
    ('C', 'D', 3),
    ('C', 'E', 6),
    ('D', 'E', 1)
])

vertices = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E']
matriz = pd.DataFrame(float('inf'), index=vertices, columns=vertices)
for u, v, data in G10.edges(data=True):
    matriz.loc[u, v] = data['weight']
    matriz.loc[v, u] = data['weight']
for v in vertices:
    matriz.loc[v, v] = 0

print("Matriz de custos (matriz de adjacência valorada):")
print(matriz.replace(float('inf'), 'ϖ'))

# Visualização do grafo
import matplotlib.pyplot as plt
pos = nx.spring_layout(G10, seed=42)
plt.figure(figsize=(6,4))
nx.draw(G10, pos, with_labels=True, node_color='lightblue', node_size=800,␣
 ↪font_weight='bold', edge_color='#888', width=2)
labels = nx.get_edge_attributes(G10, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G10, pos, edge_labels=labels)
plt.title("Grafo de cidades e custos de instalação")
plt.show()

# Explicação:
print("\nExplicação:")
print("A matriz de adjacência valorada mostra o custo mínimo para instalar␣
 ↪cabos entre cada par de cidades.")
```

```
print("Se não existe ligação direta entre duas cidades, o valor é ϖ (infinito).
  ↪")
print("A diagonal principal é zero, pois o custo de uma cidade para ela mesma é␣
  ↪zero.")
```

```
Matriz de custos (matriz de adjacência valorada):
     A    B    C    D    E
A  0.0  4.0  7.0    ϖ    ϖ
B  4.0  0.0  2.0  5.0    ϖ
C  7.0  2.0  0.0  3.0  6.0
D    ϖ  5.0  3.0  0.0  1.0
E    ϖ    ϖ  6.0  1.0  0.0
```



Explicação:
A matriz de adjacência valorada mostra o custo mínimo para instalar cabos entre cada par de cidades.
Se não existe ligação direta entre duas cidades, o valor é ϖ (infinito).
A diagonal principal é zero, pois o custo de uma cidade para ela mesma é zero.

[163]:
```
# Salva o notebook atual como PDF (executar na última célula)
import os
```

```
notebook = "AV2Simulado.ipynb"  # Substitua pelo nome do seu arquivo
os.system(f'jupyter nbconvert --to pdf "{notebook}"')
```

[163]: 0

[ ]: