PRIMERA EDICIÓN, 2020

CMI

Problemas Y Soluciones

Índice:

1 **Lista de conocimientos previos** **3**

Conocimientos previos de Combinatoria **3**
Conocimientos previos de Teoría de números **3**
Conocimientos previos de Geometría **4**
Conocimientos previos de Álgebra **5**

2 **Enunciados del nivel Smooth** **7**

3 **Soluciones del nivel Smooth** **8**

Solución 1 del problema 1 .... **8**
Solución 2 del problema 1 .... **9**
Solución 3 del problema 1 .... **10**
Solución 1 del problema 2 .... **11**
Solución 2 del problema 2 .... **13**
Solución del problema 3 .... **14**
Solución del problema 4 .... **14**

4 **Enunciados del nivel Heavy** **18**

5 **Soluciones del nivel Heavy** **19**

Solución del problema 1 .... **19**
Solución 1 del problema 2 .... **20**
Solución 2 del problema 2 .... **21**
Solución del problema 3 .... **22**
Solución 1 del problema 4 .... **22**
Solución 2 del problema 4 .... **22**
Solución 3 del problema 4 .... **23**

6 **Shortlist de la CMI 2020** **24**

Rama de Combinatoria **24**
Rama de Teoría de números **27**
Rama de Geometría **29**
Rama de Álgebra **32**

7 **Problemas para el lector** **35**

8 **Créditos, agradecimientos y despedida** **36**

Lista de conocimientos previos:

Combinatoria:

- La expresión $m!$ se lee como *m factorial* y es el producto de todos los naturales anteriores a m y él mismo. Se denota como $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot m$.

- La expresión $\binom{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ es un *coeficiente binomial* que se lee como *m combinación n* y es la manera de escoger n elementos de un referencial de m elementos. Se denota como $\binom{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} = \frac{(m-n)! \cdot m!}{n!}$.

- El término “estrategia ganadora” se refiere a una estrategia infalible, en otras palabras, quien posea una estrategia ganadora puede ganar siempre sin importar como juegue su rival.

- El *principio aditivo de conteo* es la forma en la que se cuentan posibles maneras no simultáneas de realizar una acción dada. Para hallar la cantidad de maneras posibles totales se suman sus casos.

- El *principio multiplicativo de conteo* es la forma en la que se cuentan posibles maneras simultáneas de realizar una acción dada. Para hallar la cantidad de maneras posibles totales se multiplican sus casos.

- El *principio del palomar* o principio de Dirichlet dice, en su versión generalizada, que si m objetos deben repartirse en n cajas al menos una caja debe contener no menos de $\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil$ objetos y, además, existirá otra caja que contendrá no más de $\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor$ objetos.

Teoría de números:

- Un *número primo* es un numero natural diferente de 1 que solo es divisible para él mismo y para 1.

- La expresión $mcd(m,n)$ se refiere a el mayor entero que divide, simultáneamente, a ambos números y se lee como *el máximo común divisor entre m y n*.

- Dos *números* son *coprimos* si el mayor número que divide a ambos a la vez es 1. Si definimos a dos números enteros positivos m y n, entonces son coprimos *si y sólo si* $mcd(m,n) = 1$.

- El *algoritmo de Euclides* plantea que si definimos a dos números enteros m y n tal que $m = bn + p$, entonces se cumple que $mcd(m,n) = mcd(bn+p,n) = mcd(p,n)$.

- La expresión $m|n$ se lee como *m divide a n* e implica que n es un múltiplo de m.

- Dos números enteros m y n se encuentran en la misma "*clase de congruencia*" módulo p si ambos dejan el mismo resto al dividirlos entre p, o, equivalentemente, si $m-n$ es un múltiplo de p. Esta relación se denota como $m \equiv n \pmod{p}$ y se lee como *m es congruente a n en módulo p*.

- El *pequeño teorema de Fermat* nos afirma que si p es un numero primo, entonces para cada numero entero a, con $a > 0$ y coprimo con p se cumple que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Geometría:

- La simbología "Δ" significa *triángulo*.

- La simbología "$\measuredangle$" significa *ángulo*.

- La simbología "$\cap$" significa *intersecar*.

- La simbología "$\odot$" significa *circuncentro*.

- La simbología "$\perp$" significa *perpendicular*.

- La simbología "$\parallel$" significa *paralela*.

- La simbología "$\sim$" significa *semejante*, usado particularmente entre polígonos.

- La simbología "$\cong$" significa *congruente*, usado particularmente entre polígonos.

- La *suma de ángulos internos* de un triángulo es $180°$.

- Una fórmula muy conocida para hallar *el área de un triángulo* es $\frac{b \times h}{2}$ donde b es la longitud de la base del triángulo y h su altura.

- El *teorema de Thales* establece una relación entre los lados homólogos de dos triángulos que comparten un vértice, se superponen los lados que forman el vértice en común y donde los lados no superpuestos son paralelos.

- El *teorema de Pitágoras* establece que si a y b son catetos y c la hipotenusa de un mismo triángulo rectángulo, entonces se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$.

- El *teorema del ángulo central* establece que el ángulo central subtendido por dos puntos de una circunferencia es el doble que cualquier ángulo inscrito subtendido por esos mismos dos puntos.

- Un *cuadrilátero es cíclico* si sus vértices se encuentran sobre una misma circunferencia, simultáneamente cumplen lo siguiente:
    1. Si dos ángulos formados por una misma cuerda estando en diferente semiplano comparten un arco, entonces son *iguales*.
    2. Cualesquiera dos ángulos internos *opuestos* suman 180°.

- Un segmento de recta *biseca* a otro si lo corta en dos partes iguales.

- El *teorema de Wallace-Simson* establece que si desde un punto P se trazan perpendiculares a los lados de un triángulo o a sus prolongaciones, los respectivos pies de las perpendiculares serán colineales *si y sólo si* el punto P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo.

- Es muy conocido que en un triángulo ΔABC con ortocentro H, siendo D la intersección de CH con la circunferencia circunscrita del triángulo ΔABC, entonces D es *la reflexión* de H con respecto a AB.

- Dos rectas que concurren en el vértice de un ángulo son *isogonales* entre sí cuando son simétricas con respecto a la bisectriz del ángulo dado.

- Es muy conocido que en un triángulo ΔABC con ortocentro H y circuncentro O, *la isogonal* de BH en el triángulo ΔABC pasa por el punto O.

Álgebra:

- La simbología ":=" significa "*se puede reescribir como*" y se usa mayormente para el cambio de variable.

- El conjunto de los *naturales* o también llamados *enteros positivos* se representa con $\mathbb{N}$ o bien con $\mathbb{Z}^+$ y son los números que usamos para contar, o sea, los números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$.

- El conjunto de los *enteros* se representa con $\mathbb{Z}$, se subdivide en $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$ y el 0 y abarca a los números $\{\ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$.

- El conjunto de los *racionales* se representa con $\mathbb{Q}$, se subdivide en $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ y el 0 y abarca a los números que pueden representarse como el cociente de dos números enteros, por lo que contiene a los enteros en sí, ejemplos de ellos serían: $\left\{0, 1, 0.5, 3.\bar{7}, \frac{28}{5}, 101, 6.17\overline{64}\right\}$.

- El conjunto de los *irracionales* se representa con $\mathbb{I}$, se subdivide en $\mathbb{I}^+$ e $\mathbb{I}^-$ y abarca a los números que no pueden representarse como el cociente de dos números enteros, por lo que contiene a los números con decimales no periódicos de ningún tipo, ejemplos de ellos serían: $\{\pi, e, \phi\}$.

- El conjunto de los *reales* se representa con $\mathbb{R}$, se subdivide en los $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ y el 0 y abarca a los $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

- Una progresión aritmética es una sucesión de números tales que la diferencia de cualquier par de términos sucesivos de la secuencia es constante. Por ejemplo $12, 22, 32, 42, 52, \ldots$ es una progresión aritmética con diferencia igual a 10.

- La notación *sumatoria* permite representar sumas de varios sumandos sencillamente como una sola expresión, como por ejemplo $\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$ donde la variable i es el índice del término al que se le asigna un valor inicial llamado límite inferior, m. La variable i recorrerá los valores enteros hasta alcanzar el límite superior, n. Siempre sustituyéndose en la expresión dada, la cual en este caso es a_i.

  Se lee como *la sumatoria desde* i*, que es igual a* m*, hasta* n*. En la expresión* a_i.

- Las *sumas lineales, cuadráticas y cúbicas consecutivas de Gauss* son fórmulas muy utilizadas en el campo de *sumatorias telescópicas* y se definen como:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2. \end{cases}$$

- La notación *productoria* permite representar productos de varios factores sencillamente como $\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_n$ donde la variable i es el índice del término al que se le asigna un valor inicial llamado límite inferior, m. La variable i recorrerá los valores enteros hasta alcanzar el límite superior, n. Siempre sustituyéndose en la expresión dada, la cual en este caso es a_i.

  Se lee como *la productoria desde* i*, que es igual a* m*, hasta* n*. En la expresión* a_i.

- El término f_n es el n −ésimo término de la *sucesión de Fibonacci* la cual está dada por $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ \ \forall\, n \geq 2$ con $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$.

- La *suma cíclica* de una función $f(a_1, a_2, a_3, \ \ldots, a_n)$ es denotada por $\sum_{cyc} f(a_1, a_2, a_3, \ \ldots, a_n)$ y definida como

$$\sum_{cyc} f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = f(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) + f(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1) + f(a_3, a_4, \ldots, a_n, a_1, a_2) + \cdots + f(a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$$

  Se lee como *sumatoria cíclica de una función* f.

Enunciados del nivel Smooth.

Problema 1. Sea ΔABC un triángulo equilátero de lado $10cm$, se define a D como el punto medio del lado $\overline{BC}$ y se construye otro triángulo equilátero ΔADE con E más cerca de C que de B. Si el segmento $\overline{DE}$ interseca a $\overline{AC}$ en F, hallar el área del triángulo ΔCDF.

Problema propuesto por Jiamao Yu Chen

Problema 2. Yupito escribe en su cuaderno una secuencia de números naturales en donde la diferencia entre dos términos consecutivos de dicha secuencia crece en 2 unidades después de cada término. Sabiendo que la diferencia inicial es 2 y que el primer término es 1 podemos determinar que los tres términos siguientes son 3, 7 y 13 en dicho orden ya que $1 + 2 = 3, 3 + 2 + 2 = 7, 7 + 2 + 2 + 2 = 13$. ¿Cuánto suman los primeros 61 términos de la secuencia de Yupito?

Problema propuesto por Jiamao Yu Chen

Problema 3. Giakki y Jahir juegan por turnos al siguiente juego:

Inicialmente hay 3 pilas de 2020 monedas cada una. En su turno, cada jugador puede retirar la cantidad de monedas que desee, al menos una, de una misma pila. Si gana quien retire la última moneda y Giakki comienza. ¿Existe alguna estrategia ganadora? Y en el caso de que así sea, ¿quién la tiene?

Problema propuesto por Jiamao Yu Chen

Problema 4. Hallar todas las ternas de números primos distintos (p, q, r) tales que:

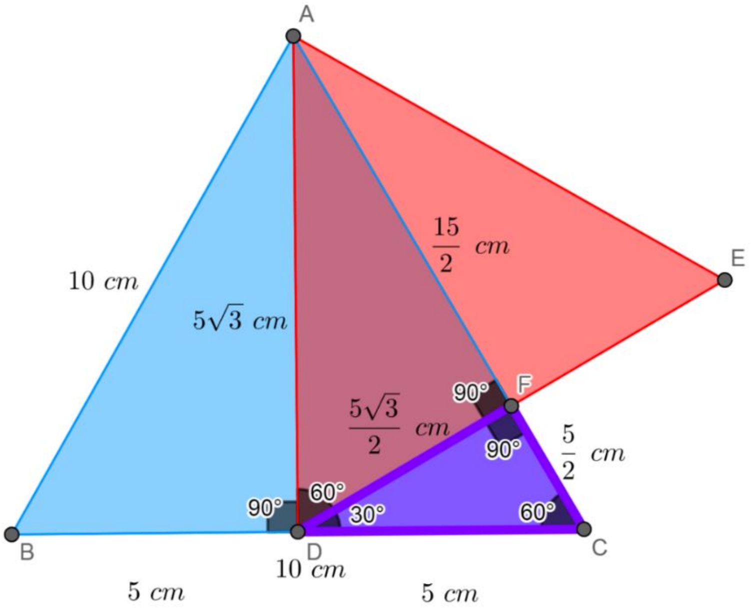
- $p\ divide\ a\ q + r,$
- $q\ divide\ a\ 2r + 3p,$
- $r\ divide\ a\ 3q + p.$

Problema propuesto por Jiamao Yu Chen

Soluciones del nivel Smooth.

Solución 1 del problema 1. *Solución por Jiamao Yu Chen*

- Es conocido que al ser D el punto medio del lado de un triángulo equilátero se cumple que también es pie de altura con respecto al tercer vértice, por tanto $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y consecuentemente $\measuredangle BDA = \measuredangle ADC = 90°.\ (\mathbf{1})$



- Además, ya que $\Delta(ABC)$ y $\Delta(ADE)$ son triángulos equiláteros, entonces $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAB = \measuredangle ADE = \measuredangle DEA = \measuredangle EAD = 60°.\ (\mathbf{2})$

- Por $(\mathbf{1})$ y $(\mathbf{2})$:

$\measuredangle FDC = \measuredangle ADC - \measuredangle ADF = \measuredangle ADC - \measuredangle ADE = 90° - 60° = 30°.\ (\mathbf{3})$

- Por $(\mathbf{2})$ y $(\mathbf{3})$, al analizar la suma de ángulos internos del triángulo $\Delta(CDF)$:

$$\measuredangle CFD = 180° - (\measuredangle FDC + \measuredangle DCF)$$
$$= 180° - (\measuredangle FDC + \measuredangle BCA)$$
$$= 180° - (30° + 60°) = 180° - 90° = 90°.\ (\mathbf{4})$$

- Es conocido que al ser F el pie de altura de un vértice sobre lado de un triángulo equilátero se cumple que también es el punto medio con respecto a ese mismo lado, por tanto F es el punto medio de $\overline{DE}$ y consecuentemente $\overline{DF} = \overline{FE} = \frac{\overline{DE}}{2}.\ (\mathbf{5})$

- Por $(\mathbf{1})$ y el Teorema de Pitágoras en $\Delta(ABD)$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2}$$
$$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AD} = 5\sqrt{3}\ cm.\ (\mathbf{6})$$

- Por $(\mathbf{5})$, $(\mathbf{6})$ y el Teorema de Pitágoras en $\Delta(ADF)$:

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DF}^2 \Rightarrow \overline{AF} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DF}^2}$$
$$\Rightarrow \overline{AF} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \left(\frac{\overline{DE}}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AF} = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AF} = \frac{15}{2}\ cm.\ (\mathbf{7})$$

- Por $(\mathbf{7})$ y datos del problema: $\overline{FC} = \overline{AC} - \overline{AF} = 10 - \frac{15}{2} = \frac{5}{2}\ cm.\ (\mathbf{8})$

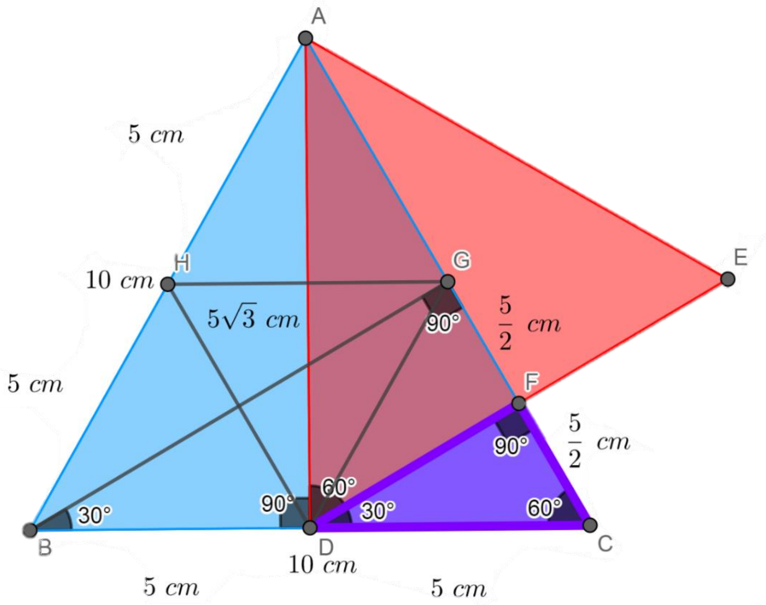
- Por $(\mathbf{4}), (\mathbf{5}), (\mathbf{6})$ y $(\mathbf{8})$:

$$\acute{A}rea\ de\ \Delta CDF = [CDF] = \frac{FC \times DF}{2} = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{8}\ cm^2.\ (\mathbf{9})$$

Solución 2 del problema 1. ***Solución por Jhosue Esteban Infante Carvajal***

- Sean $G\ y\ H$ los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. $(\mathbf{1})$

- Es conocido que como $D, G\ y\ H$ son puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se cumple que también son pies de altura con respecto a su vértice opuesto y que $\overline{BG} = \overline{AD}$, por tanto $\overline{AD} \perp \overline{BC}\ y\ \overline{BG} \perp \overline{AC}$ y consecuentemente $\measuredangle BDA = \measuredangle ADC = \measuredangle CGB = \measuredangle BGA = 90°.\ (\mathbf{2})$



- Además, ya que $\Delta(ABC)$ y $\Delta(ADE)$ son triángulos equiláteros, entonces: $\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAB = \measuredangle ADE = \measuredangle DEA = \measuredangle EAD = 60°.\ (\mathbf{3})$

- Por $(\mathbf{2})$ y $(\mathbf{3})$: $\measuredangle FDC = \measuredangle ADC - \measuredangle ADF = \measuredangle ADC - \measuredangle ADE = 90° - 60° = 30°.\ (\mathbf{4})$

- Por $(\mathbf{3})$ y $(\mathbf{4})$, al analizar la suma de ángulos internos del triángulo $\Delta(CDF)$:

$$\measuredangle CFD = 180° - (\measuredangle FDC + \measuredangle DCF)$$

$$= 180° - (\measuredangle FDC + \measuredangle BCA)$$
$$= 180° - (30° + 60°) = 180° - 90° = 90°.\ (\mathbf{5})$$

- Por $(\mathbf{2}), (\mathbf{5})$, el hecho de que $C, F\ y\ G$ son colineales y $\measuredangle CGB = \measuredangle CFD = 90°$, entonces $\overline{DF} \parallel \overline{BG}.\ (\mathbf{6})$

- Por $(\mathbf{2}), (\mathbf{6})$ y el Teorema de Thales las proporciones de los lados homólogos son las mismas:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{GC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{DF}} = 2.\ (\mathbf{7})$$

- Por $(\mathbf{2}), (\mathbf{5})$ y $(\mathbf{7})$ podemos determinar una razón entre las áreas de $\Delta(CDF)$ y $\Delta(CBG)$:

$$\frac{[CBG]}{[CDF]} = \frac{\frac{\overline{BG} \times \overline{GC}}{2}}{\frac{\overline{DF} \times \overline{FC}}{2}} = \frac{\overline{BG} \times \overline{GC}}{\overline{DF} \times \overline{FC}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{DF}} \times \frac{\overline{GC}}{\overline{FC}} = 2 \times 2 = 4. \ (\mathbf{8})$$

- Por $(\mathbf{2})$ y el Teorema de Pitágoras en $\Delta(ABD)$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2}$$

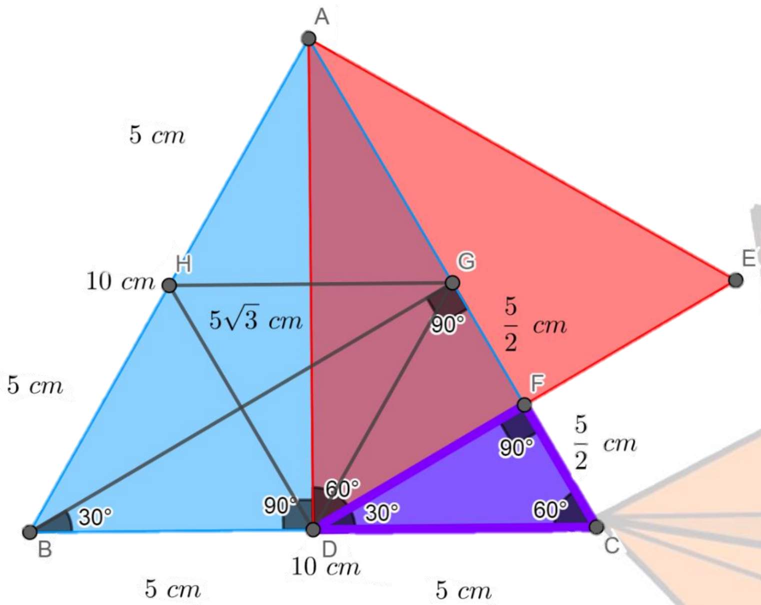
$$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{BG} = 5\sqrt{3}\ cm. \ (\mathbf{9})$$

- Por $(\mathbf{8})$ y $(\mathbf{9})$ podemos determinar el área de $\Delta(CDF)$:

$$\text{Área de } \Delta CDF = [CDF] = \frac{[CBG]}{4} = \frac{\frac{\overline{BG} \times \overline{GC}}{2}}{4} = \frac{\overline{BG} \times \overline{GC}}{8} = \frac{\overline{BG} \times \frac{\overline{AC}}{2}}{8} = \frac{5\sqrt{3} \times 5}{8} = \frac{25\sqrt{3}}{8}\ cm^2. \ (\mathbf{10})$$

Solución 3 del problema 1. *Solución por Yu Peng*

- Sean G y H los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. $(\mathbf{1})$
- Es conocido que como D, G y H son puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se cumple que también son pies de altura con respecto a su vértice opuesto y que $\overline{BG} = \overline{AD}$, por tanto $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BG} \perp \overline{AC}$ y consecuentemente $\measuredangle BDA = \measuredangle ADC = \measuredangle CGB = \measuredangle BGA = 90°$. $(\mathbf{2})$



- Además, ya que $\Delta(ABC)$ y $\Delta(ADE)$ son triángulos equiláteros, entonces:

$\measuredangle ABC = \measuredangle BCA = \measuredangle CAB = \measuredangle ADE = \measuredangle DEA = \measuredangle EAD = 60°$. $(\mathbf{3})$

- Por $(\mathbf{2})$ y $(\mathbf{3})$:

$\measuredangle FDC = \measuredangle ADC - \measuredangle ADF = \measuredangle ADC - \measuredangle ADE = 90° - 60° = 30°$. $(\mathbf{4})$

- Por $(\mathbf{3})$ y $(\mathbf{4})$, al analizar la suma de ángulos internos del triángulo $\Delta(CDF)$:

$$\measuredangle CFD = 180° - (\measuredangle FDC + \measuredangle DCF) = 180° - (\measuredangle FDC + \measuredangle BCA)$$
$$= 180° - (30° + 60°) = 180° - 90° = 90°. \ (\mathbf{5})$$

- Por $(\mathbf{2})$, $(\mathbf{5})$ y el hecho de que $C, F\ y\ G$ son colineales y $\measuredangle CGB = \measuredangle CFD = 90°$, entonces $DF \parallel BG$. $(\mathbf{6})$

- Por $(\mathbf{2})$, es inmediato inferir que $\overline{GD} \parallel \overline{AB}$. $(\mathbf{7})$

- Por $(\mathbf{7})$ y el Teorema de Thales $\Delta(ABC) \sim \Delta(GDC)$, de donde es fácil llegar a que $\Delta(GDC)$ también es un triángulo equilátero. $(\mathbf{8})$

- Por $(\mathbf{5})$, $(\mathbf{8})$ y el hecho de que al ser F pie de altura de un triángulo equilátero también es punto medio del lado donde yace, por tanto F es punto medio del lado GC. $(\mathbf{9})$

- Por $(\mathbf{2})$ y como es conocido que los puntos medios de los lados de un triángulo forman un nuevo triángulo tal que su área es una cuarta parte del área del triángulo original y como en este caso el triángulo $\Delta(ABC)$ es equilátero, entonces el área de los cuatro triángulos formados son iguales, por tanto: $[AHG] = [HBD] = [GDC] = [DGH] = \frac{[ABC]}{4}$. $(\mathbf{10})$

- Por $(\mathbf{8})$ y $(\mathbf{9})$ también llegamos a que DF divide al triángulo $\Delta(GDC)$ en dos triángulos congruentes, por tanto sus áreas son iguales y equivalentes a un medio del área de $\Delta(GDC)$, entonces $[GDF] = [CDF] = \frac{[GDC]}{2}$. $(\mathbf{11})$

- Por $(\mathbf{10})$ y $(\mathbf{11})$ podemos concluir que $[CDF] = \frac{[GDC]}{2} = \frac{\frac{[ABC]}{4}}{2} = \frac{[ABC]}{8}$. $(\mathbf{12})$

- Por $(\mathbf{2})$ y el Teorema de Pitágoras en $\Delta(ABD)$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2}$$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{BG} = 5\sqrt{3}\ cm.\ (\mathbf{13})$$

- Por $(\mathbf{8})$ y $(\mathbf{9})$ podemos determinar el área de $\Delta(CDF)$:

$$Área\ de\ \Delta CDF = [CDF] = \frac{[ABC]}{8} = \frac{\frac{\overline{BC}\times\overline{AD}}{2}}{8} = \frac{\frac{\overline{BC}}{2}\times\overline{AD}}{8} = \frac{\overline{BD}\times\overline{AD}}{8} = \frac{5\times5\sqrt{3}}{8} = \frac{25\sqrt{3}}{8}\ cm^2.\ (\mathbf{14})$$

Solución 1 del problema 2. ***Solución por Yu Peng y Jhosue Esteban Infante Carvajal***

El problema define a cada término de la secuencia como la suma de su predecesor, su diferencia inicial y el aumento en 2 unidades de esta, de donde podemos establecer los parámetros fácilmente:

$$\boldsymbol{a_n} \to n - ésimo\ término\ de\ la\ secuencia,$$

$$\boldsymbol{d_i} \to diferencia\ inicial, que\ es\ 2$$

$$y\ el\ aumento\ de\ la\ diferencia\ por\ cada\ término, que\ también\ es\ 2.$$

Por tanto:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1 + 2 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_3 = 3 + 2 + 2 = 3 + 2(2) = 7,$$
$$a_4 = 7 + 2 + 2 + 2 = 7 + 2(3) = 13,$$
$$a_5 = 13 + 2 + 2 + 2 + 2 = 13 + 2(4) = 21, \dots$$
$$a_n = a_{n-1} + d_i + 2(n-2) = a_{n-1} + 2 + 2(n-2) = a_{n-1} + 2(n-1)$$

Pero como aún es una sucesión recurrente debido a que se define un término en función de otro en vez de uno solo o una constante, entonces se reemplaza para llegar a su mínima expresión:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1 + 2 = 1 + 2(1) = 3,$$
$$a_3 = 3 + 2 + 2 = 3 + 2(2) = [1 + 2(1)] + 2(2) = 1 + 2(1 + 2) = 7,$$
$$a_4 = 7 + 2 + 2 + 2 = 7 + 2(3) = [1 + 2(1 + 2)] + 2(3) = 1 + 2(1 + 2 + 3) = 13,$$
$$a_5 = 13 + 2 + 2 + 2 + 2 = 13 + 2(4) = [1 + 2(1 + 2 + 3)] + 2(4)$$
$$= 1 + 2(1 + 2 + 3 + 4) = 21.$$

Y así sucesivamente hasta determinar una forma explícita para todos los términos en función del primero, el cual es conocido.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2(n-1) \\ &= a_{n-2} + 2[(n-2) + (n-1)] \\ &= \cdots \\ &= a_1 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)] \\ &= 1 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)]. \end{aligned}$$

Y al aplicar la fórmula de Gauss para la suma de términos lineales consecutivos se puede llegar a:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-3) + (n-2) + (n-1)] \\ &= 1 + 2\left[\frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2}\right] \\ &= 1 + 2\left[\frac{(n-1)n}{2}\right] \\ &= 1 + (n-1)n \\ &= n^2 - n + 1. \end{aligned}$$

Para concluir, sumando todos los 61 primeros términos y aplicando las fórmulas de Gauss para las sumas de términos lineales y cuadráticos consecutivos al fin podemos llegar a la respuesta:

$$\boldsymbol{Suma\ de\ los\ primeros\ 61\ términos} = \sum_{n=1}^{61} a_n = \sum_{n=1}^{61} n^2 - n + 1$$
$$= (1^2 - 1 + 1) + (2^2 - 2 + 1) + (3^2 - 3 + 1) + \cdots + (61^2 - 61 + 1)$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 61^2) + (-1 - 2 - 3 - \cdots - 61) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 61^2) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 61) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)$$
$$= \frac{61(61+1)[2(61)+1]}{6} - \frac{61(61+1)}{2} + 1(61) = \frac{61 \times 62 \times 123}{6} - \frac{61 \times 62}{2} + 61$$
$$= 61 \times 31 \times 41 - 61 \times 31 + 61 = 75{,}701.$$

La respuesta es $\mathbf{75,701}$.

Solución 2 del problema 2. ***Solución sin atajos***

El problema define a cada término de la secuencia como la suma de su predecesor, su diferencia inicial y el aumento en 2 unidades de esta, de donde usando una considerable cantidad de tiempo es posible hallar todos los términos y sumarlos.
Enlistamos los términos:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1 + 2 = 1 + 2(1) = 3$
- $a_3 = 3 + 2 + 2 = 3 + 2(2) = 7$
- $a_4 = 7 + 2 + 2 + 2 = 7 + 2(3) = 13$
- $a_5 = 13 + 2 + 2 + 2 + 2 = 13 + 2(4) = 21$
- $a_6 = 21 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 21 + 2(5) = 31$
- $a_7 = 31 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 31 + 2(6) = 43$
- $a_8 = 43 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 43 + 2(7) = 57$
- $a_9 = 57 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 57 + 2(8) = 73$
- $a_{10} = 73 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 73 + 2(9) = 91$
- $a_{11} = 91 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 91 + 2(10) = 111$
- $a_{12} = 111 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 111 + 2(11) = 133$
- $a_{13} = 133 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 133 + 2(12) = 157$
- $a_{14} = 157 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 157 + 2(13) = 183$
- $a_{15} = 183 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 183 + 2(14) = 211$
- $a_{16} = 211 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 211 + 2(15) = 241$
- $a_{17} = 241 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 241 + 2(16) = 273$
- $a_{18} = 273 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 273 + 2(17) = 307$
- $a_{19} = 307 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 307 + 2(18) = 343$
- $a_{20} = 343 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 343 + 2(19) = 381$
- $a_{21} = 381 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 381 + 2(20) = 421$
- $a_{22} = 421 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 421 + 2(21) = 463$
- $a_{23} = 463 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 463 + 2(22) = 507$
- $a_{24} = 507 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 507 + 2(23) = 553$
- $a_{25} = 553 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 553 + 2(24) = 601$
- $a_{26} = 601 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 601 + 2(25) = 651$
- $a_{27} = 651 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 651 + 2(26) = 703$
- $a_{28} = 703 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 703 + 2(27) = 757$
- $a_{29} = 757 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 757 + 2(28) = 813$
- $a_{30} = 813 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 813 + 2(29) = 871$
- $a_{31} = 871 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 871 + 2(30) = 931$
- $a_{32} = 931 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 931 + 2(31) = 993$

- $a_{33} = 993 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 993 + 2(32) = 1057$
- $a_{34} = 1057 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1057 + 2(33) = 1123$
- $a_{35} = 1123 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1123 + 2(34) = 1191$
- $a_{36} = 1191 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1191 + 2(35) = 1261$
- $a_{37} = 1261 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1261 + 2(36) = 1333$
- $a_{38} = 1333 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1333 + 2(37) = 1407$
- $a_{39} = 1407 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1407 + 2(38) = 1483$
- $a_{40} = 1483 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1483 + 2(39) = 1561$
- $a_{41} = 1561 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1561 + 2(40) = 1641$
- $a_{42} = 1641 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1641 + 2(41) = 1723$
- $a_{43} = 1723 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1723 + 2(42) = 1807$
- $a_{44} = 1807 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1807 + 2(43) = 1893$
- $a_{45} = 1893 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1893 + 2(44) = 1981$
- $a_{46} = 1981 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 1981 + 2(45) = 2071$
- $a_{47} = 2071 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2071 + 2(46) = 2163$
- $a_{48} = 2163 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2163 + 2(47) = 2257$
- $a_{49} = 2257 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2257 + 2(48) = 2353$
- $a_{50} = 2353 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2353 + 2(49) = 2451$
- $a_{51} = 2451 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2451 + 2(50) = 2551$
- $a_{52} = 2551 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2551 + 2(51) = 2653$
- $a_{53} = 2653 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2653 + 2(52) = 2757$
- $a_{54} = 2757 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2757 + 2(53) = 2863$
- $a_{55} = 2863 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2863 + 2(54) = 2971$
- $a_{56} = 2971 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 2971 + 2(55) = 3081$
- $a_{57} = 3081 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 3081 + 2(56) = 3193$
- $a_{58} = 3193 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 3193 + 2(57) = 3307$
- $a_{59} = 3307 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 3307 + 2(58) = 3423$
- $a_{60} = 3423 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 3423 + 2(59) = 3541$
- $a_{61} = 3541 + 2 + 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 = 3541 + 2(60) = 3661$

Y al sumarlos obtenemos $\mathbf{75,701}$.

Solución del problema 3. ***Solución por Jiamao Yu Chen y Leonardo Emanuel Zambrano López***

Giakki empieza retirando las 2020 monedas de una pila cualquiera. Luego de eso sea X la cantidad de monedas que quita Jahir de una pila, Giakki quitará X monedas de la pila contraria por lo que despues del 3er turno quedarán $2020 - X$ monedas en cada pila.

De esta manera, con que Giakki repita siempre los movimientos de Jahir en la pila contraria llegará un momento en el cual Jahir quite la última moneda de alguna pila quedando otra pila con monedas y al Giakki quitar esta, gana.

Solución del problema 4. ***Solución por Jiamao Yu Chen***

Llamemos a las tres propiedades del enunciado del problema primera, segunda y tercera condición respectivamente.

Vamos a considerar 3 casos:

- **Caso 1:** $p > q$ y r aleatorio

  Entonces, $q + r < p + p = 2p$, por ende $q + r < 2p$.
  Por la primera condición sabemos que $q + r$ es un múltiplo de p, y como es menor que $2p$ podemos afirmar que $q + r = p$.

  Reemplazando en la segunda condición:

  $$q|2r + 3(q + r) \Rightarrow q|3q + 5r \Rightarrow q|5r$$

  Como q y r son primos distintos, q no divide a r, por ende $q|5$, concluyendo que $q = 5$.
  Reemplazando con $q = 5$ y $p = r + 5$ en la tercera condición:

  $$r|3(5) + r + 5 \Rightarrow r|20 + r \Rightarrow r|20.$$

  Como r es un primo que divide a 20, puede ser 2 o 5 pero como este es distinto de q, solo puede ser 2; $r = 2$. Y concluimos que $p = 2 + 5 = 7$.
  $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{2})\}$ es la única terna posible en este caso.

- **Caso 2:** $q > p$ y r aleatorio

  Entonces, $2r + 3p < 2q + 3q = 5q$, por ende $2r + 3p < 5q$.
  Haciendo el análisis similar al caso anterior, $2r + 3p$ es un múltiplo de q, y como es menor que $5q$ nos deja 4 subcasos que analizar.

  - **Subcaso 1:** $2r + 3p = q$

    Reemplazando en la primera condición:

    $$p|2r + 3p + r \Rightarrow p|2r + r \Rightarrow p|3r \text{ y como son distintos, } p = 3$$

    Reemplazando $p = 3$ y $q = 2r + 9$ en la tercera condición:

    $$r|3(2r + 9) + 3 \Rightarrow r|6r + 30 \Rightarrow r|30.$$

    Como r es un primo que divide a 30, puede ser 2, 3 o 5 pero como este es distinto de p, solo puede ser 2 o 5.
    Si $r = 2$, $q = 4 + 9 = 13$. Y si $r = 5$, $q = 10 + 9 = 19$.
    Por ende, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{3}, \mathbf{13}, \mathbf{2}); (\mathbf{3}, \mathbf{19}, \mathbf{5})\}$ son las únicas ternas posibles para este subcaso.

  - **Subcaso 2:** $2r + 3p = 2q$

    Analizando paridades, p debe ser par, entonces $p = 2$, por ende

    $$2r + 6 = 2q \Rightarrow r + 3 = q.$$

    Nuevamente analizando paridades, r debe ser par, entonces $r = 2$ pero como deben de ser distintos existe una contradicción y **este subcaso se descarta.**

  - **Subcaso 3:** $2r + 3p = 3q$

    Notamos que

$$3|3q \Rightarrow 3|2r + 3p \Rightarrow 3|2r \text{ concluyendo que } r = 3.$$

Entonces, $6 + 3p = 3q \Rightarrow 2 + p = q$.
Reemplazando $r = 3$ y $q = p + 2$ en la primera condición:

$$p|p + 2 + 3 \Rightarrow p|p + 5 \Rightarrow p|5$$

Concluyendo que $p = 5$, $q = 5 + 2 = 7$.
Por ende, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{3})\}$ es la única terna posible en este subcaso.

- **Subcaso 4:** $2r + 3p = 4q$

  Analizando paridades, p debe ser par, entonces $p = 2$, por ende

  $$2r + 6 = 4q \Rightarrow r + 3 = 2q.$$

  Por como está definido q, $q > p$ y ya que q es el mayor primo entre la terna, $q > 3$ e inmediatamente después $2q > p + 3$ lo cual nos lleva a una contradicción y **este subcaso se descarta.**

  Por ende, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{3}, \mathbf{13}, \mathbf{2}); (\mathbf{3}, \mathbf{19}, \mathbf{5}); (\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{3})\}$ son las únicas ternas posibles para este caso.

- **Caso 3:** $r > p$ y q aleatorio

  Entonces, $3q + p < 3r + r = 4r$, por ende $3q + p < 4r$.
  Haciendo un análisis similar a los casos anteriores tenemos 3 subcasos.

  - **Subcaso 1:** $3q + p = r$

    Reemplazando en la primera condición:

    $$p|q + 3q + p \Rightarrow p|4q + p \Rightarrow p|4q \text{ y como son distintos, } p|4 \Rightarrow p = 2.$$

    Reemplazando $p = 2$ y $3q + 2 = r$ en la segunda condición:

    $$q|2(3q + 2) + 6 \Rightarrow q|6q + 10 \Rightarrow q|10.$$

    Como q es un primo que divide a 10, puede ser 2 o 5 pero como este es distinto de p, solo puede ser 5, $q = 5$. E inmediatamente $r = 3(5) + 2 = 17$.
    Por ende, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{17})\}$ es la única terna posible en este subcaso.

  - **Subcaso 2:** $3q + p = 2r$

    Reemplazando en la segunda condición:

    $$q|3q + p + 3p \Rightarrow q|3q + 4p \Rightarrow q|4p \Rightarrow q|4 \Rightarrow q = 2.$$

    Por ende, $p + 6 = 2r$, lo cual implica que p debe ser par, entonces $p = 2$ pero como deben de ser distintos existe una contradicción y **este subcaso se descarta.**

  - **Subcaso 3:** $3q + p = 3r$

    Notamos que

    $$3|3r \Rightarrow 3|3q + p \Rightarrow 3|p \text{ concluyendo que } p = 3.$$

Entonces, $3q + 3 = 3r \Rightarrow q + 1 = r$.

Esto implica que q y r son primos y consecutivos, se sabe inmediatamente que solo pueden ser $(q, r) = \{(2, 3)\}$ pero como deben de ser distintos existe una contradicción y **este subcaso se descarta.**

Por ende, $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{17})\}$ es la única terna posible para este caso.

Juntando todos los casos, las ternas posibles son $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{2}); (\mathbf{3}, \mathbf{13}, \mathbf{2}); (\mathbf{3}, \mathbf{19}, \mathbf{5}); (\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{3}); (\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{17})\}$ de donde comprobando **se descarta** $(\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{3})$**.**

Por lo tanto, todas las ternas que cumplen con las condiciones del problema son: $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}) = \{(\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{2}); (\mathbf{3}, \mathbf{13}, \mathbf{2}); (\mathbf{3}, \mathbf{19}, \mathbf{5}); (\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{17})\}$**.**

Enunciados del nivel Heavy.

Problema 1. Determinar si existen 7 enteros positivos en progresión aritmética con diferencia igual a 3 tal que la suma de sus cuadrados es un número de 6 dígitos iguales.

Problema propuesto por Miguel Ángel Ordoñez Mera

Problema 2. Sea $PQRS$ un cuadrilátero cíclico donde la recta PS es perpendicular a la recta RS. Sean H y K los pies de las alturas desde Q hasta PR y PS respectivamente, demostrar que HK biseca QS.

Problema propuesto por Jahir Manuel Cajas Toapanta

Problema 3. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n números reales distintos. Sea B el conjunto de todas las posibles sumas de dos elementos no necesariamente distintos de A. Hallar el mínimo y máximo valor que puede tomar $|B|$.

Nota: $|B|$ representa la cantidad de elementos distintos pertenecientes al conjunto B. Por ejemplo, si consideramos el conjunto $A = \{1, 3, 8, 10\}$, entonces $B = \{2, 4, 6, 9, 11, 13, 16, 18, 20\}$ y $|B| = 9$.

Problema propuesto por Jiamao Yu Chen

Problema 4. Sean a y b números enteros positivos tales que $3a^2 + a = 4b^2 + b$. Demostrar que $a - b$ es un cuadrado perfecto.

Problema de la Olimpiada Nacional de Matemáticas de Irán, 1997

Soluciones del nivel Heavy.

Solución del problema 1. *Solución por Miguel Ángel Ordoñez Mera*

Como son 7 enteros positivos con diferencia 3 podemos asignar una variable al término de en medio y así conseguir simetría, este pudo haber sido un pensamiento común puesto que también nos beneficia al momento de elevarlos al cuadrado, y quedaría así:

$$x-9, x-6, x-3, x, x+3, x+6 \text{ y } x+9$$

Por tanto, definiendo a los dígitos iguales del número de 6 cifras como A, obtenemos:

$$(x-9)^2 + (x-6)^2 + (x-3)^2 + (x)^2 + (x+3)^2 + (x+6)^2 + (x+9)^2 = \overline{AAAAAA}$$
$$\Rightarrow (x^2-18x+81) + (x^2-12x+36) + (x^2-6x+9) + (x^2) + (x^2+6x+9)$$
$$+ (x^2+12x+36) + (x^2+18x+81) = \overline{AAAAAA}$$
$$\Rightarrow 7x^2 + 252 = \overline{AAAAAA} = 111.111 \cdot A \Rightarrow x^2 + 36 = 15.873 \cdot A$$
$$\Rightarrow x^2 + 36 = 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot A. \ (\mathbf{1})$$

Notamos que el miembro derecho de la ecuación $(\mathbf{1})$ y el sumando 36 del lado izquierdo son múltiplos de 3, por lo que podemos inferir que x^2 también lo es.

Por una simple inspección de residuos cuadráticos se puede afirmar que $3 \mid x^2 \Rightarrow 3 \mid x \therefore 9 \mid x^2$.

Ahora bien, si usamos este nuevo dato en $(\mathbf{1})$, el miembro izquierdo de la ecuación se vuelve divisible para 9 y por consiguiente el lado derecho también lo debe ser, pero al tener un solo factor 3 conocido entonces la variable A es obligatoriamente un múltiplo de 3 y como está definido como un digito solo hay 3 opciones: $3, 6$ y 9.

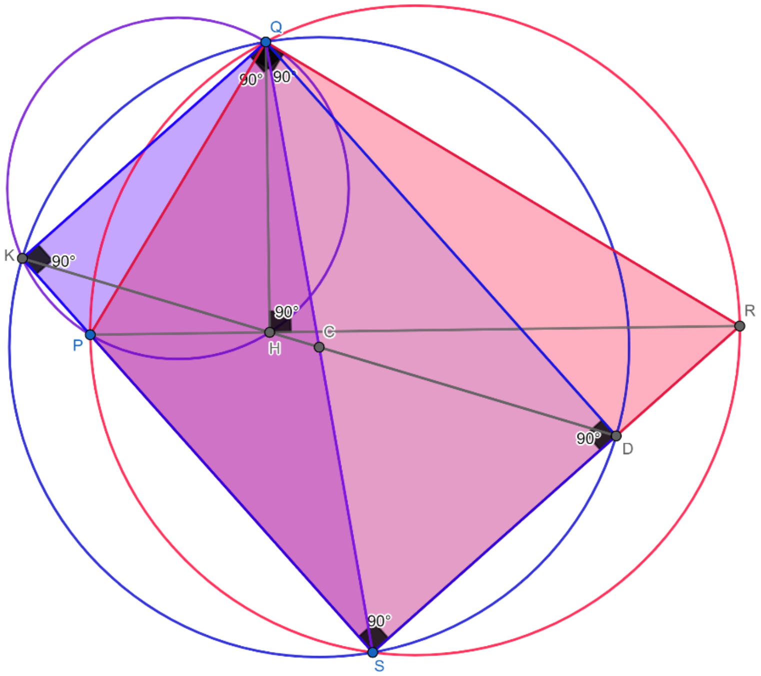
Para concluir reemplazamos con cada opción posible:

- $A = 3.$
  $\Rightarrow x^2 + 36 = 3^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \Rightarrow x^2 = 47.583$ pero **no existe** ningún x entero positivo que cumpla.

- $A = 6.$
  $\Rightarrow x^2 + 36 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \Rightarrow x^2 = 95.202$ pero **no existe** ningún x entero positivo que cumpla.

- $A = 9.$
  $\Rightarrow x^2 + 36 = 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \Rightarrow x^2 = 142.821$ pero **no existe** ningún x entero positivo que cumpla.

Solución 1 del problema 2. ***Solución por Jahir Manuel Cajas Toapanta***



- Es conocido que $PS \perp RS$, por tanto $\measuredangle PSR = 90°$. $(\mathbf{1})$

- Por $(\mathbf{1})$ y como se sabe que el cuadrilatero $PQRS$ es ciclico, entonces se sabe que $\measuredangle PSR + \measuredangle RQP = 90° + \measuredangle RQP = 180°$, de donde se obtiene que $\measuredangle RQP = 90°$. $(\mathbf{2})$

- Por la definición de H y K en el problema es inmediato llegar a que $\measuredangle QKS = \measuredangle QHR = 90°$. $(\mathbf{3})$

- Se define a D como el pie de altura de Q sobre RS y análogo a (1), $\measuredangle SDQ = 90°$. $(\mathbf{4})$

- Por $(\mathbf{2}), (\mathbf{3}), (\mathbf{4})$ y Teorema de Wallace-Simson, mejor conocido como Recta de Simson, podemos determinar que ya que el cuadrilátero $PQRS$ es ciclico, entonces K, H y D son colineales. $(\mathbf{5})$

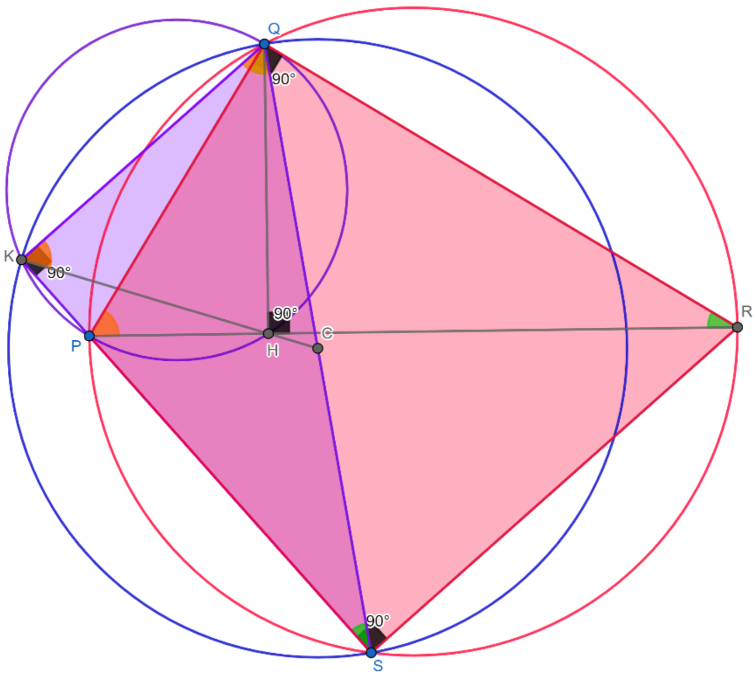
- Por $(\mathbf{3}), (\mathbf{4})$ y como $\measuredangle QKS + \measuredangle SDQ = 90° + 90° = 180°$ inferimos que el cuadrilátero $KQDS$ es ciclico. $(\mathbf{6})$

- Por $(\mathbf{6})$ y ya que K, P, S y S, D y R son colineales en ese orden, entonces $\measuredangle KSD + \measuredangle DQK = \measuredangle PSR + \measuredangle DQK = 90° + \measuredangle DQK = 180°$ que por consiguiente nos da que $\measuredangle DQK = 90°$. $(\mathbf{7})$

- Por $(\mathbf{1}), (\mathbf{3}), (\mathbf{4}), (\mathbf{5})$ y $(\mathbf{7})$ podemos concluir que el cuadrilatero $KQDS$ es un rectángulo. $(\mathbf{8})$

- Por $(\mathbf{8})$ es inmediato concluir que HK biseca QS debido a que KD y QS son diagonales del rectángulo $KQDS$. $(\mathbf{9})$

Solución 2 del problema 2. ***Solución por Jiamao Yu Chen y Miguel Ángel Guzmán Chang***



- Es conocido que $PS \perp RS$, por tanto $\measuredangle PSR = 90°$. $(\mathbf{1})$

- Por $(\mathbf{1})$ y como se sabe que el cuadrilatero $PQRS$ es ciclico, entonces se sabe que $\measuredangle PSR + \measuredangle RQP = 90° + \measuredangle RQP = 180°$, de donde se obtiene que $\measuredangle RQP = 90°$. $(\mathbf{2})$

- Por la definición de H y K en el problema es inmediato llegar a que $\measuredangle QKS = \measuredangle QHR = 90°$. $(\mathbf{3})$

- Ya que el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico podemos afirmar que $\measuredangle QRP = \measuredangle QSP$. $(\mathbf{4})$

- Por $(\mathbf{3})$ y ya que $\measuredangle QKS = \measuredangle QKP = 90°$ y $\measuredangle QHR = \measuredangle PHQ = 90°$, entonces el cuadrilátero $KQHP$ es ciclico. $(\mathbf{5})$

- Por $(\mathbf{5})$, al ser $KQHP$ un cuadrilátero cíclico podemos afirmar que $\measuredangle QKH = \measuredangle QPH$. $(\mathbf{6})$

- Definamos a C como la intersección entre HK y QS, $C = HK \cap QS$. $(\mathbf{7})$

- Ahora bien, por $(\mathbf{4})$ y $(\mathbf{6})$ notamos que en los triángulos ΔPQR y ΔQSK se cumple que:

$$\begin{gathered}\measuredangle PQR + \measuredangle QRP + \measuredangle RPQ = \measuredangle SKQ + \measuredangle QSK + \measuredangle KQS \\ \Rightarrow 90° + \measuredangle QRP + \measuredangle RPQ = 90° + \measuredangle QSK + \measuredangle KQS \\ \Rightarrow \measuredangle QRP + \measuredangle RPQ = \measuredangle QSK + \measuredangle KQS \\ \Rightarrow \measuredangle RPQ = \measuredangle KQS \Rightarrow \measuredangle HPQ = \measuredangle KQC \\ \Rightarrow \measuredangle HKQ = \measuredangle KQC \Rightarrow \measuredangle CKQ = \measuredangle KQC.\ (\mathbf{8})\end{gathered}$$

- Por $(\mathbf{8})$ vemos que el triángulo ΔCKQ es isósceles y como además $\measuredangle SKQ = 90°$, entonces podemos concluir que C es centro de la circunferencia circunscrita del triángulo ΔCKQ, $C = \odot(CKQ)$. $(\mathbf{9})$

- Por $(\mathbf{9})$: C, que se define como $C = HK \cap QS$, también es punto medio de QS, por tanto HK biseca QS. $(\mathbf{10})$

Solución del problema 3. ***Solución por Jiamao Yu Chen y Miguel Ángel Guzmán Chang***

Para hallar el máximo lo que necesitamos es que ninguna suma se repita, lo cual se puede lograr de $\binom{n}{2}$ maneras escogiendo todas las parejas, y agregandole n ya que se puede sumar consigo mismo el numero. Es decir, el máximo se halla con $\binom{n}{2}+n$.
Un conjunto que cumple que ninguna suma se repite es: $A=\{1,2,4,8,16,32,\dots,2^{n-1}\}$.

Para el mínimo empezaremos por establecer un orden, eso se puede realizar sin pérdida de generalidad ya que son reales sin parámetros, además de que sean diferentes, $a_1<a_2<a_3<a_4<\cdots<a_n$.
Luego nos damos cuenta de que las siguientes desigualdades se cumplen siempre: $a_1+a_1<a_1+a_2<a_1+a_3<\cdots<a_n+a_1<a_n+a_2<a_n+a_3<\cdots<a_n+a_n$como esto tiene $2n-1$ sumas distintas un conjunto que cumple eso es $A=\{1,2,3,4,\ \dots,n\}$.

Solución 1 del problema 4. ***Solución oficial***

Factorizando la ecuación original podemos obtener fácilmente que:

$$3a^2+a=4b^2+b\Rightarrow 3a^2+a-b-3b^2=b^2$$
$$\Rightarrow 3(a+b)(a-b)+(a-b)=b^2\Rightarrow (a-b)[3(a+b)+1]=b^2.\ (\mathbf{1})$$

Simultáneamente, podemos obtener otra expresión si agrupamos los términos de diferente manera.

$$3a^2+a=4b^2+b\Rightarrow 4a^2+a-b-4b^2=a^2$$
$$\Rightarrow 4(a+b)(a-b)+(a-b)=a^2\Rightarrow (a-b)[4(a+b)+1]=a^2.\ (\mathbf{2})$$

Ahora bien, al multiplicar $(\mathbf{1})$ y $(\mathbf{2})$**:**

$$(a-b)^2[3(a+b)+1][4(a+b)+1]=a^2b^2.\ (\mathbf{3})$$

Nos damos cuenta de que como en ambos lados de la ecuación $(\mathbf{3})$ hay cuadrados perfectos, entonces el factor que sobra, $[3(a+b)+1][4(a+b)+1]$, también es un cuadrado perfecto.

Analizando sus componentes por el Algoritmo de Euclides:

$$mcd(3(a+b)+1,4(a+b)+1)=mcd(3a+3b+1,4a+4b+1)$$
$$=mcd\big(3a+3b+1,4a+4b+1-(3a+3b+1)\big)=mcd(3a+3b+1,a+b)$$
$$=mcd(a+b,3a+3b+1)=mcd\big(a+b,3a+3b+1-3(a+b)\big)$$
$$=mcd(a+b,1)=1.$$

Lo que implica que $3(a+b)+1$ y $4(a+b)+1$ son coprimos y su producto forman un cuadrado perfecto, por tanto, cada uno de ellos también lo es. Por último, solo falta definir a $3(a+b)+1=n^2$ que al reemplazarlo en $(\mathbf{1})$ y aplicar el mismo análisis anterior nos deja que $a-b$ también es un cuadrado perfecto y con esto acaba la demostración.

Solución 2 del problema 4. ***Solución por Jiamao Yu Chen***

Al denotar al $mcd(a,b)=d$ para algún entero positivo d es muy usual crear una construcción de la forma $a=d\cdot x$ y $b=d\cdot y$ de donde $mcd(x,y)=1$ y en el que si $d=1$, entonces $(a,b)=(x,y)$ lo cual al sustiruirlo en la ecuación original nos da que:

$$3a^2+a=4b^2+b\Rightarrow 3a^2+a-b-3b^2=b^2$$

$$= 3(dx)^2 + dx - dy - 3(dy)^2 = (dy)^2 \Rightarrow 3d^2x^2 + dx - dy - 3d^2y^2 = d^2y^2$$
$$\Rightarrow (3d^2x^2 - 3d^2y^2) + (dx - dy) = d^2y^2 \Rightarrow 3d^2(x^2 - y^2) + d(x - y) = d^2y^2$$
$$\Rightarrow 3d^2(x + y)(x - y) + d(x - y) = d^2y^2 \Rightarrow d(x - y)[3d(x + y) + 1] = d^2y^2$$
$$\Rightarrow (x - y)[3d(x + y) + 1] = dy^2. \ (\mathbf{1})$$

Luego, por el Algoritmo de Euclides, $mcd(x, y) = mcd(x - y, y) = 1$ y $mcd(d, 3d(x + y) + 1) = mcd\big(d, 3d(x + y) + 1 - 3d(x + y)\big) = mcd(d, 1) = 1$ por lo que al analizar este comportamiento en $(\mathbf{1})$ podemos concluir que $x - y = d$ lo que inmediatamente nos lleva a que $a - b = dx - dy = d(x - y) = d^2$ y con esto acaba la demostración.

Solución 3 del problema 4. ***Solución por Jahir Manuel Cajas Toapanta***

Factorizando la ecuación original podemos obtener fácilmente que:

$$3a^2 + a = 4b^2 + b \Rightarrow 3a^2 + a - b - 3b^2 = b^2$$
$$\Rightarrow 3(a + b)(a - b) + (a - b) = b^2. \ (\mathbf{1})$$

Y si definimos a $a - b = x$ y $b = y$, entonces $a + b = x + 2y$. Al reemplazarlo en $(\mathbf{1})$ nos queda:

$$3(a + b)(a - b) + (a - b) = b^2 \equiv 3x(x + 2y) + x = y^2$$
$$\Rightarrow 3x^2 + 6xy + x = y^2 \Rightarrow x + 3x^2 = y^2 - 6xy$$
$$\Rightarrow x + 3x^2 + 9x^2 = y^2 - 6xy + 9x^2 \Rightarrow 12x^2 + x = (y - 3x)^2$$
$$\Rightarrow x(12x + 1) = (y - 3x)^2. \ (\mathbf{2})$$

Analizando los componentes del miembro izquierdo de la ecuación $(\mathbf{2})$ por el Algoritmo de Euclides tenemos que:

$$mcd(x, 12x + 1) = mcd(x, 12x + 1 - 12x) = mcd(x, 1) = 1.$$

Y como el miembro derecho de la ecuación $(\mathbf{2})$ es un cuadrado perfecto, entonces cada componente del lado izquierdo también lo es.

Luego, existe un entero positivo m tal que $x = m^2$ y como $a - b = x$, entonces $a - b = m^2$ lo cual es lo que queríamos demostrar.

Shortlist de la Competencia de Matemáticas Intercolegial 2020 (1^{era} CMI)

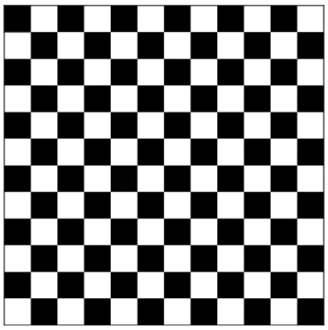
Rama de Combinatoria.

C1. ***Problema propuesto por Jiamao Yu Chen***

Cuál es la máxima cantidad de alfiles que se pueden colocar en un tablero de 12×12 tales que no se ataquen entre sí?

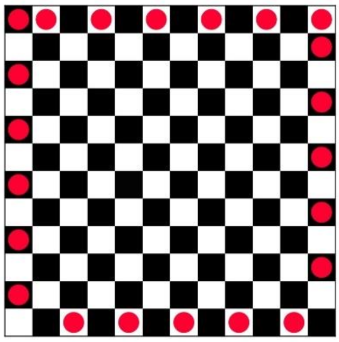
Nota: Un alfil ataca a las casillas que están en direcciones diagonales a la casilla donde se encuentra el alfil.

Solución:

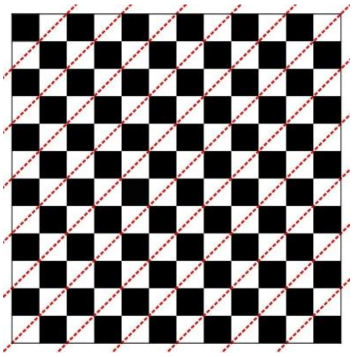


Primero, pintamos el tablero con el patrón mostrado en los gráficos, usando los colores blanco y negro.

Ahora, clasificaremos a los alfiles en 2 grupos, dependiendo del color de la casilla en el cual se encuentran, los llamaremos alfiles blancos y alfiles negros.

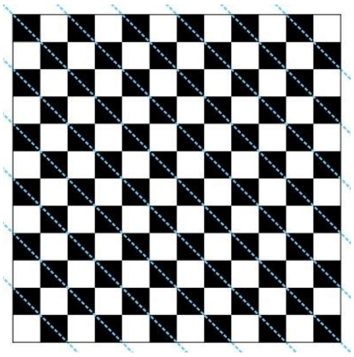


En el segundo gráfico, podemos ver un arreglo en el cual se logran colocar 22 alfiles en el tablero, 11 negros y 11 blancos. Por tanto, sabemos que es posible colocar 22 alfiles sin que se ataquen entre sí. Nuestro objetivo ahora será demostrar que es imposible colocar más de 22 alfiles en el tablero.



Primero nos fijaremos en los alfiles blancos. Para esto dirijámonos al tercer gráfico, aquí fueron marcadas mediante líneas rojas punteadas un total de 11 diagonales pertenecientes al tablero. Es fácil ver que cada casilla blanca pertenece a exactamente 1 de estas 11 diagonales, por tanto cada alfil blanco pertenece a alguna de estas diagonales.

Digamos ahora que logramos colocar al menos 12 alfiles blancos en el tablero. Por el teorema de Casillas, sabemos que al menos 2 alfiles pertenecen a la misma diagonal, por tanto al menos 2 alfiles se están atacando entre sí. De aquí se concluye que es imposible colocar 12 o más alfiles blancos sin que se ataquen entre sí.



Algo análogo se concluye sobre los alfiles negros utilizando el cuarto gráfico. Por tanto, puede haber como máximo 11 alfiles de cada color, e inmediatamente después concluimos que el máximo de alfiles que se pueden colocar en el tablero son 22.

C2. *Problema propuesto por Jiamao Yu Chen*

En una pizarra hay 10 números puestos en fila. Demostrar que siempre existen algunos números que están escritos de manera consecutiva en la pizarra (puede ser un solo número) cuya suma es un múltiplo de 10.

Solución:

Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ los enteros dados y sea S_k la suma de los primeros k números en la pizarra con $1 \leq k \leq 10$.
Si para algún k tenemos que S_k es múltiplo de 10, entonces tenemos una sucesión de enteros que cumple la condición del problema y termina la demostración por lo que asumimos que S_k no deja residuo 0 en la división para 10 para todo k entre 1 y 10 inclusive.
Ya que, entonces hay 9 posibles residuos $(1, 2, 3, \dots, 9)$ para las 10 sumas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{10}$ en su división para 10, por el Principio de palomar existen 2 sumas con mismo residuo modulo 10. Sean estos S_j y S_i donde sin pérdida de generalidad $j > i$, entonces:

$$S_j \equiv S_i \pmod{10}$$
$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_j) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_i) \equiv 0 \pmod{10}$$
$$\Rightarrow a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \dots + a_j \equiv 0 \pmod{10}.$$

Por tanto, $\{a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots, a_j\}$ es una sucesión de números escritos de manera consecutiva en la pizarra cuya suma es múltiplo de 10, contradiccion. Por tanto, siempre existen números consecutivos en dicha sucesión cuya suma es un múltiplo de 10.

C3. *Problema propuesto por Leonardo Emanuel Zambrano López*

Los hermanos Ema y Miguel desean decorar su árbol de navidad. Para esto Ema compró 7 líneas de focos navideños, con 100 focos en cada línea. Sabemos que Ema es muy quisquilloso y no usará líneas con focos dañados. Por su parte Miguel cree que si Ema usa más de 3 líneas ocurrirá un cortocircuito y se quedarán sin electricidad para las fiestas. Por tanto, Miguel decide dañar algunos de los focos, haciendo que Ema no use más de 3 líneas. ¿De cuantas maneras puede Miguel conseguir su objetivo, sabiendo que inicialmente los 700 focos funcionan perfectamente?

Nota: Todos los focos son independientes, el daño a uno de los focos no afectará a ningún otro foco.

Solución:

Veamos que cada línea tiene $2^{100} - 1$ estados donde al menos un foco está dañado.

Cada foco puede estar o dañado o funcionando (2 estados posibles para cada foco), ya que contamos con 100 focos por cada línea, tenemos un total de 2^{100} estados totales para dicha linea, pero esto incluye el estado cuando todos los focos están funcionando por lo que hay $2^{100} - 1$ estados en los cuales al menos un foco está dañado.
Si Miguel decide dañar n lineas, entonces tiene $\binom{7}{n}$ maneras de elegir que líneas dañar. Además, sabemos que Miguel puede dañar a cada una de las líneas de $\binom{7}{n} \cdot (2^{100} - 1)^n$ maneras.
Ya que inicialmente contamos con 7 líneas, Miguel debe dañar al menos 4 de ellas, pues desea que Ema use máximo 3 lineas de focos.

Caso 1:
Si daña 4 líneas, lo puede hacer de $\binom{7}{4} \cdot (2^{100}-1)^4$ maneras.

Caso 2:
Si daña 5 líneas, lo puede hacer de $\binom{7}{5} \cdot (2^{100}-1)^5$ maneras.

Caso 3:
Si daña 6 líneas, lo puede hacer de $\binom{7}{6} \cdot (2^{100}-1)^6$ maneras.

Caso 4:
Si daña 7 líneas, lo puede hacer de $\binom{7}{7} \cdot (2^{100}-1)^7$ maneras.

Finalmente tenemos un total de:

$$\binom{7}{4} \cdot (2^{100}-1)^4 + \binom{7}{5} \cdot (2^{100}-1)^5 + \binom{7}{6} \cdot (2^{100}-1)^6 + \binom{7}{7} \cdot (2^{100}-1)^7$$
$$= (2^{100}-1)^4 \cdot \left[\binom{7}{4} + \binom{7}{5} \cdot (2^{100}-1) + \binom{7}{6} \cdot (2^{100}-1)^2 + \binom{7}{7} \cdot (2^{100}-1)^3\right]$$
$$= (2^{100}-1)^4[35 + 21(2^{100}-1) + 7(2^{200}-2^{101}+1) + 1(2^{300}-3(2^{200})+3(2^{100})-1)]$$
$$= (2^{100}-1)^4 \cdot [2^{300} + 4 \cdot 2^{200} - 7 \cdot 2^{101} + 24 \cdot 2^{100} + 20]$$
$$= (2^{400} - 2^{302} + 3 \cdot 2^{201} - 2^{102} + 1)(2^{300} + 2^{202} - 7 \cdot 2^{101} + 3 \cdot 2^{103} + 20)$$

Maneras con las cuales Miguel logra su cometido.

Rama de Teoría de números.

T1. *Problema propuesto por Jahir Manuel Cajas Toapanta*

Encontrar todos los primos p tales $29^p + 1$ es divisible para p.

Solución:

Primero notamos que podemos pasar la demostración a "Encontrar todos los primos p tales $29^p + 1 \equiv 0 \pmod p$." ya que lo implica.

Luego, vemos que en el caso de que 29 y p sean coprimos, entonces podríamos aplicar el *Pequeño teorema de Fermat*, así que lo dividiremos en dos casos:

Caso 1. Si $mcd(29, p) = 1$

Por el *Pequeño teorema de Fermat*, $29^p + 1 = 29 \cdot 29^{p-1} + 1 \equiv 29 \cdot 1 + 1 = 30 \pmod p$ y como queremos que $29^p + 1 \equiv 0 \pmod p$ y $29^p + 1 \equiv 30 \pmod p$, entonces debería ocurrir que $30 \equiv 0 \pmod p$, inmediatamente después $p|30$ y al ser este primo tiene 3 posibilidades: 2, 3 y 5.

- $p = 2$
  $29^2 + 1 = (-1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod 2$ o bien $29^2 + 1 = 842 \equiv 0 \pmod 2$
- $p = 3$
  $29^3 + 1 = (-1)^3 + 1 \equiv 0 \pmod 3$ o bien $29^3 + 1 = 24.390 \equiv 0 \pmod 3$
- $p = 5$
  $29^5 + 1 = (-1)^5 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ o bien $29^5 + 1 = 20'511.150 \equiv 0 \pmod 5$

Lo que nos arroja 3 soluciones.

Caso 2. Si $mcd(29, p) \neq 1$

Como p es primo y debe tener factores en común con 29, entonces $p = 29$ pero como $29^p \equiv 0 \pmod{29} \Rightarrow 29^p + 1 \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod{29}$ lo que no nos arroja ninguna solución.

Los primos que cumplen el enunciado son $p = 2$, 3 y 5.

T2. *Problema propuesto por Miguel Ángel Guzmán Chang y Leonardo Emanuel Zambrano López*

Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $8x^{2020} + 2020^{2021} = y^{2022}$.

Solución:

Es aceptable pensar en aplicar el *Pequeño teorema de Fermat* ya que las potencias de los términos son números grandes y consecutivos, por lo que deberíamos expresar cada una en una función del antecedente de un mismo primo.

Y así decimos que $2020 = 336 \times 6 + 4 = 288 \times 7 + 4$, $2021 = 336 \times 6 + 5$ y $2022 = 337 \times 6$ para después:

$$8x^{2020} = 8 \cdot (x^{336})^6 \cdot x^4 \equiv 1 \cdot 1 \cdot x^4 = x^4 \pmod 7,$$

$$2020^{2021} = (2020^{336})^6 \cdot 2020^5 \equiv 1 \cdot 2020^5 = 2020^5 \equiv (288 \times 7 + 4)^5 \equiv 4^5 = 2^{10} = (2^3)^3 \cdot 2 = (8)^3 \cdot 2 \equiv (1)^3 \cdot 2 = 2 \pmod 7$$

Y analizando residuos cuadráticos y cúbicos en

$$y^{2022} = y^{337\times 6} = ((y^3)^2)^{337} \equiv ((-1,0,1)^2)^{337} \equiv (0 \text{ } o \text{ } 1)^{337} \equiv 0 \text{ } o \text{ } 1 \pmod 7$$

Por tanto:

$$x^4 + 2 \equiv 8x^{2020} + 2020^{2021} = y^{2022} \equiv 0 \text{ } o \text{ } 1 \pmod 7 \Rightarrow x^4 \equiv -2 \text{ } o \text{ } -1 \equiv 5 \text{ } o \text{ } 6 \pmod 7$$

Pero los únicos posibles residuos de potencias de grado 4 en $(mod\ 7)$ son $0, 1, 2\ y\ 4$ por lo cual hemos llegado a una contradicción y concluimos que no existen soluciones de enteros (x, y) que cumplan el enunciado.

T3. *Problema propuesto por Jiamao Yu Chen*

Demostrar que existe una lista de 2020 enteros positivos y consecutivos tal que hay exactamente 20 primos en dicha lista.

Solución:

Definimos A_n como el conjunto de 2020 enteros consecutivos desde n hasta $n + 2019$ inclusive, P_n la cantidad de números primos del conjunto A_n y a $M = 2021! + 2$. Para todo $1 \leq n < M$ observamos que $P_{n+1} - P_n \in \{-1, 0, 1\}$.

- $P_{n+1} - P_n = -1$ cuando n es primo y $n + 2020$ no lo es.
- $P_{n+1} - P_n = 0$ cuando n y $n + 2020$ son ambos son primos o ninguno lo es.
- $P_{n+1} - P_n = 1$ cuando n no es primo, pero $n + 2020$ si lo es.

Por lo tanto, obtenemos que en la sucesión $\{P_n\}$, la máxima diferencia entre términos consecutivos es 1.
Por otro lado, sabemos que P_1 es mayor que 20 y que P_M es 0 ya que $i | 2021! + i$, para todo $2 \leq i \leq 2021$. De donde concluimos que existe un j, $1 < j < M$, tal que $P_j = 20$ y se concluye la demostración.

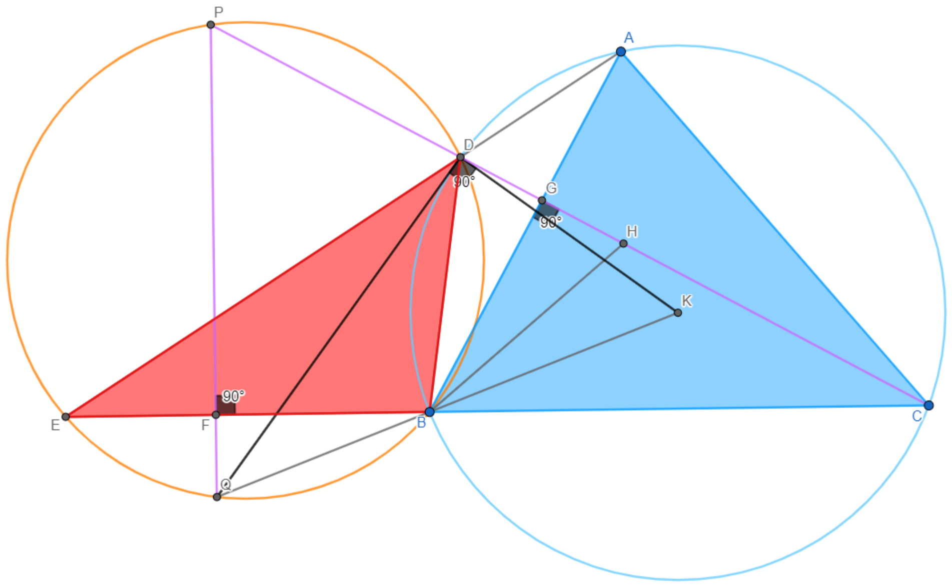
Rama de Geometría.

G1. *Problema propuesto por Jiamao Yu Chen*

Sea un ΔABC un triángulo con ortocentro H y circuncírculo Γ. Se definen a D y a E como las intersecciones de la recta CH con Γ y AD con BC. El circuncírculo del triángulo ΔBDE interseca a CD por segunda vez en P y desde ese punto se traza una perpendicular con respecto a BC la cual a su vez interseca al circuncírculo de ΔBDE en Q. Sea K la intersección de BQ con la mediatriz de BC. Demostrar que KD es perpendicular a QD.

Solución:

- Vamos a demostrar que K es el circuncentro del triángulo ΔABC. $(\mathbf{1})$



- Por la definición que tiene D en el enunciado, rápidamente se puede inferir que D es la reflexión de H con respecto a AB, de donde $\measuredangle HBA = \measuredangle ABD$. $(\mathbf{2})$

- Sean F y G los puntos de intersección de PQ con BC y AB con CH, respectivamente. $(\mathbf{3})$

- Ya que el cuadrilátero $PEBD$ es cíclico, $\measuredangle BEP = \measuredangle BDG$, y por datos del problema: $\measuredangle BFP = \measuredangle DGB = 90°$. Entonces, $\Delta PEF \sim \Delta BDG$ de donde $\measuredangle EPF = \measuredangle GBD$. $(\mathbf{4})$

- Ya que el cuadrilátero $PEQB$ es cíclico y por ángulos opuestos por un vértice: $\measuredangle EPF = \measuredangle FBQ$ y $\measuredangle FBQ = \measuredangle CBK$. Entonces, $\measuredangle EPF = \measuredangle CBK$. $(\mathbf{5})$

- Usando $(\mathbf{2}), (\mathbf{4})$ y $(\mathbf{5})$: $\measuredangle CBK = \measuredangle HBA$, lo que implica que BK es la isogonal de BH en ΔABC. $(\mathbf{6})$

- Es conocido que el circuncentro de ΔABC está en BQ, y también sabemos que el circuncentro de ΔABC está en la mediatriz de BC. Entonces, K es el circuncentro de ΔABC, ya que es la intersección de BQ con la mediatriz de BC. $(\mathbf{7})$

- Ahora, demostrar que $KD \perp QD$ es equivalente a demostrar que QD es tangente a Γ. QD es tangente a $\Gamma \Leftrightarrow \measuredangle QDB = \measuredangle DAB$. $(\mathbf{8})$

- Ya que el cuadrilátero $EDBQ$ es cíclico, $\measuredangle BQE = \measuredangle BDA$. $(\mathbf{9})$

- Por $(\mathbf{4})$ sabemos que $\measuredangle EBQ = \measuredangle ABD$, por ende $\Delta EBQ = \Delta ABD$, entonces $\measuredangle QEB = \measuredangle DAB$ y usando nuevamente el cuadrilátero cíclico $EDBQ$, $\measuredangle QDB = \measuredangle QEB$. $(\mathbf{10})$

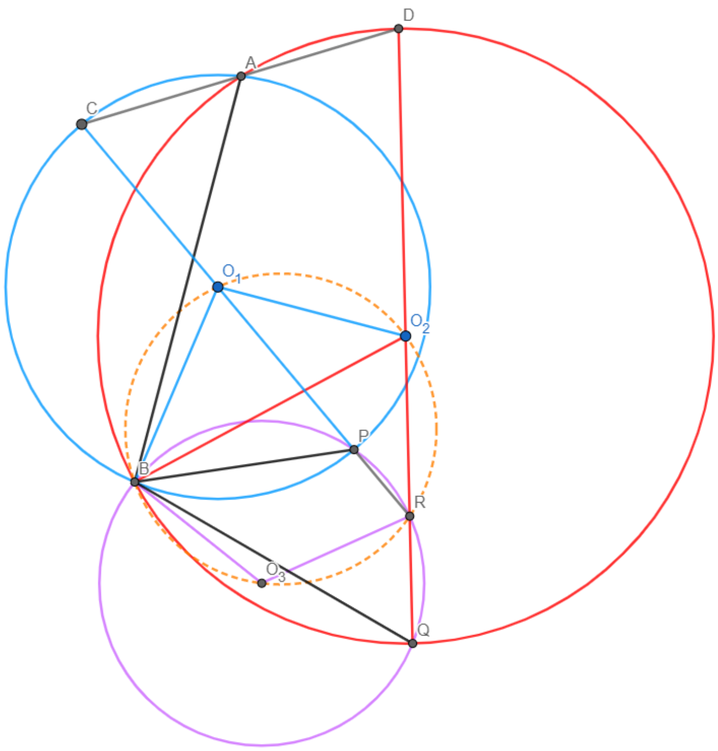
- Por lo tanto $\measuredangle QDB = \measuredangle DAB$, concluyendo que QD es tangente a Γ y $KD \perp QD$. $(\mathbf{11})$

G2. *Problema propuesto por Jiamao Yu Chen*

Sean Ω_1 y Ω_2 dos circunferencias con centros O_1 y O_2 respectivamente, estas se intersecan en los puntos A y B. Se define a CD como una recta que pasa por el punto A e interseca a Ω_1 y a Ω_2 en C y D respectivamente. CO_1 y DO_2 intersecan nuevamente a Ω_1 y Ω_2 en P y Q respectivamente. Sea R la intersección de CO_1 y DO_2 y sea O_3 el circuncentro del triángulo ΔBPQ. Demostrar que O_1, O_2, O_3 y R son puntos concíclicos.

Solución:

- Primero, vamos a demostrar que $BPRQ$ es un cuadrilátero cíclico. $(\mathbf{1})$



- Ya que los cuadriláteros $QBAD$ y $CAPB$ son cíclicos, $\measuredangle DQB = \measuredangle CAB = \measuredangle CPB$, entonces $BPRQ$ es cíclico con centro en O_1 ya que este es el circuncentro del triángulo ΔBPQ. $(\mathbf{2})$

- Siguiendo con la demostración original, por el teorema del ángulo central en una circunferencia, $\measuredangle RO_3B = 2 \cdot \measuredangle RQB$. $(\mathbf{3})$

- Por $(\mathbf{2})$, $\measuredangle RQB = \measuredangle O_1PB$, entonces $\measuredangle RO_3B = 2 \cdot \measuredangle O_1PB$. $(\mathbf{4})$

- Como O_1P y O_1B son radios de Ω_1, $O_1P = O_1B \Rightarrow \measuredangle O_1PB = \measuredangle PBO_1$. $(\mathbf{5})$

- Por la suma de ángulos internos de ΔO_1PB: $\measuredangle O_1PB + \measuredangle PBO_1 + \measuredangle BO_1P = 180° \Rightarrow 2 \cdot \measuredangle O_1PB + \measuredangle BO_1P = 180°$.$(\mathbf{6})$

- Reemplazando $(\mathbf{4})$ en $(\mathbf{6})$: $\measuredangle RO_3B + \measuredangle BO_1P = 180°$, por ende BO_1RO_3 es cíclico. $(\mathbf{7})$

- Como O_2Q y O_2B son radios de Ω_2, $O_2B = O_2Q \Rightarrow \measuredangle O_2QB = \measuredangle QBO_2$. $(\mathbf{8})$

- Nuevamente, por $(\mathbf{2})$, $\measuredangle O_2QB = \measuredangle O_1PB$, por ende $\measuredangle QBO_2 = \measuredangle PBO_1$, concluyendo que $\Delta O_1PB \sim \Delta O_2QB$. $(\mathbf{9})$

- Luego, $\measuredangle BO_2Q = \measuredangle BO_1P$, lo cual implica que BO_1O_2R es cíclico. $(\mathbf{10})$

- Juntando $(\mathbf{7})$ y $(\mathbf{10})$, como los dos cuadriláteros cíclicos tienen el triángulo ΔBO_1R en común, entonces B, O_1, O_2, O_3 y R son puntos concíclicos. $(\mathbf{11})$

Rama de Álgebra.

A1. *Problema propuesto por Jhosue Esteban Infante Carvajal*

Hallar: $(f_{2020})^2 - \sum_{n=7}^{2018} f_n \cdot f_{n+3}$.

Solución:

En base a la definición de la sucesión podemos inferir que $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ y $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1}$

$$\Rightarrow f_n \cdot f_{n+3} = (f_{n+2} - f_{n+1})(f_{n+2} + f_{n+1}) = {f_{n+2}}^2 - {f_{n+1}}^2.$$

Inmediatamente después:

$$(f_{2020})^2 - \sum_{n=7}^{2018} f_n \cdot f_{n+3} = (f_{2020})^2 - \sum_{n=7}^{2018} \left[{f_{n+2}}^2 - {f_{n+1}}^2\right]$$
$$= (f_{2020})^2 - \left[\sum_{n=7}^{2018} {f_{n+2}}^2 - \sum_{n=7}^{2018} {f_{n+1}}^2\right] = (f_{2020})^2 - \sum_{n=7}^{2018} {f_{n+2}}^2 + \sum_{n=7}^{2018} {f_{n+1}}^2$$
$$= (f_{2020})^2 - \sum_{n=9}^{2020} {f_n}^2 + \sum_{n=8}^{2019} {f_n}^2 = (f_{2020})^2 - (f_{2020})^2 + (f_8)^2 = (f_8)^2.$$

Por último, reemplazamos hasta hallar $f_8 = 21$ y concluimos que lo que queríamos hallar es $(f_8)^2 = 21^2 = 441$.

A2. *Problema propuesto por Alexander Palma Pozo*

Determine, si existe, un número entero k tal que:

$$\sqrt{2021} - \sqrt{2020} = \sqrt[2022]{k - \sqrt{k^2 - 1}}.$$

Solución:

Se probará una generalización de este resultado.
Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt[2m]{k - \sqrt{k^2 - 1}} \quad \Longrightarrow \quad k = \sum_{i=0}^{m} \binom{2m}{2i} n^{m-i}(n+1)^i \in \mathbb{Z}$$

Para probar este resultado, hagamos $x := \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^{2m}$ y $y := \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)^{2m}$, de donde se obtiene que $x = k - \sqrt{k^2 - 1}$.
Y como sabemos que $xy = \left[\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\right]^{2m} = 1$, entonces $y = \frac{1}{k - \sqrt{k^2-1}} = \frac{(k-\sqrt{k^2-1})(k+\sqrt{k^2-1})}{k-\sqrt{k^2-1}} = k + \sqrt{k^2 - 1}$. Por lo tanto $x + y = k - \sqrt{k^2 - 1} + k + \sqrt{k^2 - 1} = 2k$ e inmediatamente $k = \frac{x+y}{2}$.

Para concluir, como $\frac{1+(-1)^{2m-i}}{2}=1$ si i es un número par y $\frac{1+(-1)^{2m-i}}{2}=0$ si i es un número impar, entonces podemos usar el Binomio de Newton para obtener una forma implícita.

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}\left(\sum_{0\le i\le 2m}\binom{2m}{i}\left(\sqrt{n}\right)^{2m-i}\left(\sqrt{n+1}\right)^{i}+\sum_{0\le i\le 2m}\binom{2m}{i}\left(-\sqrt{n}\right)^{2m-i}\left(\sqrt{n+1}\right)^{i}\right) \\ &= \sum_{0\le i\le 2m}\binom{2m}{i}\left(\sqrt{n}\right)^{2m-i}\left(\sqrt{n+1}\right)^{i}\left(\frac{1+(-1)^{2m-i}}{2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m}\binom{2m}{2i}n^{m-i}(n+1)^{i} \end{aligned}$$

Lo que finaliza la prueba de la generalización y donde claramente $k\in\mathbb{Z}$. Reemplazamos esto con $m=1011$ y $n=2020$, y obtenemos que un número entero k que cumple el enunciado del problema existe y viene dado por

$$k=\sum_{i=0}^{1011}\binom{2022}{2i}(2020)^{1011-i}(2021)^{i}.$$

A3. *Problema propuesto por Alexander Palma Pozo*

Sean x, y y z números reales positivos. Demostrar que:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{2x^2}{y+z}+\frac{x^3}{y^2+z^2}\right)\ge\frac{9}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)$$

Solución:

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que:

$$\sum_{cyc}\frac{x}{y+z}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{x(y+z)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}.$$

Ahora, multiplicando por $x+y+z$ la expresión anterior, se tiene que

$$(x+y+z)\sum_{cyc}\frac{x}{y+z}=\sum_{cyc}\frac{x^2+x(y+z)}{y+z}=\sum_{cyc}\left(\frac{x^2}{y+z}+x\right)\ge\frac{(x+y+z)^3}{2(xy+yz+zx)}$$

de donde se sigue que

$$\sum_{cyc}\frac{2x^2}{y+z}\ge\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{xy+yz+zx}.$$

Usando una vez más la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{y^2+z^2}=\sum_{cyc}\frac{x^4}{x(y^2+z^2)}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)}$$

entonces es suficiente probar que

$$\sum_{cyc}\frac{2x^2}{y+z}+\sum_{cyc}\frac{x^3}{y^2+z^2}=\sum_{cyc}\left(\frac{2x^2}{y+z}+\frac{x^3}{y^2+z^2}\right)$$

$$=\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{xy+yz+zx}+\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)}\geq\frac{9}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)$$

Por lo cual podemos pasar la demostración a

$$\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}+\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)}\geq\frac{9}{2}$$

y usando el hecho de que $(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$, entonces:

$$\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)}\geq\frac{9}{2}-\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)}\geq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2},$$

reescribiendo la desigualdad anterior, debemos mostrar que

$$2(x^3+y^3+z^3)\geq x^2y+x^2z+y^2z+xy^2+xz^2+yz^2.$$

Luego, es bien conocido que para todo $a,b,c\ \in\mathbb{R}^+$ se cumple que

$$a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}\geq a^mb^n+b^mc^n+c^ma^n$$

tomando $m=2$, $n=1$ para un caso y para el otro caso $m=1$ y $n=2$ juntamente con los cambios de variable adecuados $a:=x, b:=y$ y $c:=z$, tenemos que

$$x^3+y^3+z^3\geq x^2y+y^2z+xz^2 \qquad \text{y} \qquad x^3+y^3+z^3\geq xy^2+yz^2+x^2z$$

Y nótese que, sumando estas dos desigualdades, justificados previamente por la buena forma de los signos se obtiene

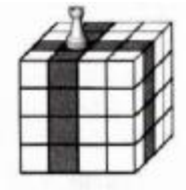
$$2(x^3+y^3+z^3)\geq x^2y+x^2z+y^2z+xy^2+xz^2+yz^2$$

que es lo que se deseaba probar.

El caso de igualdad se cumple para todo real positivo k donde $x=y=z=k$.

Problemas para el lector.

P1. *Problema de la Olimpiada de Matemáticas de San Petersburgo, 2016*



La torre, que se encuentra en la superficie de un cubo cuadriculado, controla los cuadrados en la misma línea en ambas direcciones, incluyendo las extensiones de estas líneas alrededor de uno o varios bordes. (La imagen muestra un ejemplo de un cubo de $4 \times 4 \times 4$, con cuadrados visibles controlados por la torre de color gris). ¿Cuál es la mayor cantidad de torres que se pueden colocar en la superficie de un cubo de $50 \times 50 \times 50$ para que ninguno de ellos puede capturar a otro?

P2. *Problema de la Olimpiada Europea Femenina de Matemáticas (EGMO), 2012*

Los enteros positivos p y q son números primos que satisfacen la siguiente expresión:

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

Para algún entero positivo n. Hallar los posibles valores de $q - p$

P3. *Problema de la Olimpiada de Matemáticas de San Petersburgo, 2016*

En un triángulo ΔABC, las extensiones de las medianas de los vértices A y B intersecan el círculo circunferencial de ΔABC en los puntos A_1 y B_1, respectivamente. Los puntos P y Q se eligen en los lados AC y BC, respectivamente, de modo que $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Demuestre que $\measuredangle APB_1 = \measuredangle BQA_1$.

P4. *Problema de la Olimpiada Nacional de Matemáticas de Grecia, 2011*

Resolver en números enteros la siguiente ecuación:

$$x^3 y^2 (2y - x) = x^2 y^4 - 36.$$

P5. *Problema propuesto por Jiamao Yu Chen*

Sea $\{a_n\}$ una secuencia infinita donde $a_1 = 1$, $a_2 = 2020$, $a_3 = 2$ y

$$a_{n+3} = a_n \cdot a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+1}} - 1 \ \ \forall n \geq 0$$

Demostrar que: $a_n > \prod_{i=0}^{n-3} a_i \ \ \forall n \geq 3, n \in \mathbb{Z}^+$.

Créditos, agradecimientos y despedida

Estamos muy contentos de cómo se llevó a cabo *1era Edición de la Competencia de Matemáticas Intercolegial* pero más que nada agradecidos con el equipo de olímpicos que estuvo detrás de toda la organización, desde crear el formato de la prueba o vigilar a los participantes hasta proponer los problemas y pensar en diferentes soluciones de estos.

También queremos agradecer a la *Academia de Ciencias Exactas APOL* y la *Olimpiada Matemática Ecuatoriana OMEC* por habernos guiado en esta primera edición como competencias con historial y mayor alcance.

Dicho esto, a continuación, está el listado de colaboradores y organizadores:

Colaboradores	*Organizadores*
Olimpiada Matemática Ecuatoriana OMEC	***Jiamao Yu Chen***
Academia de Ciencias Exactas APOL	***Yu Peng***
Zhiron Cristina Wu Yuan	***Leonardo Emanuel Zambrano López***
Alexander Palma Pozo	***Jahir Manuel Cajas Toapanta***
Miguel Ángel Ordoñez Mera	***Miguel Ángel Guzmán Chang***
Chen Yi Fan	***Jhosue Esteban Infante Carvajal***

Todo el equipo organizador les agradece por haber participado y les desea éxitos en sus entrenamientos y olimpiadas venideras.

Agradecimientos especiales:

Nixon Herrera - Creador del sitio web
Zhiron Wu y Jhosue Infante - Solucionario y Diplomas