DIGITAL SIGNAL PROCESSING

Processamento Digital de Sinais

Prof. Bruno Zatt
Ruhan Conceição

DIGITAL SIGNAL PROCESSING

Aula 3 - Sinais e Sistemas de Tempo Discreto

Prof. Bruno Zatt
Ruhan Conceição

REPRESENTAÇÃO DE SINAIS DISCRETOS

$$x[n] = \{\dots, x[-1], x[0], x[1], \dots\}$$

REPRESENTAÇÃO DE SINAIS DISCRETOS

$$x[n] = \{\dots, x[-1], x[0], x[1], \dots\}$$

$$\Uparrow$$

$$n = 0$$

REPR. DE SINAIS DISCRETOS NO MATLAB

Através do uso de vetores-linha

REPR. DE SINAIS DISCRETOS NO MATLAB

$$x[n] = \{2,1,-1,5,1,4,3,7\}$$

```
n = -3:1:4;
x = [2,1,-1,5,1,4,3,7];
```

REPR. DE SINAIS DISCRETOS NO MATLAB

$$x[n] = \{2,1,-1,\underset{\uparrow}{5},1,4,3,7\}$$

```
n = -3:1:4;
x = [2,1,-1,5,1,4,3,7];
```

Nos casos em que:

1. Posição das amostras não é necessária
2. Sequência começa em n=1

Não é necessário o uso do vetor-linha para a variável independente

REPR. DE SINAIS DISCRETOS NO MATLAB

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{2},1,-1,5,1,4,3,7\}$$

```
x = [2,1,-1,5,1,4,3,7];
```

Nos casos em que:

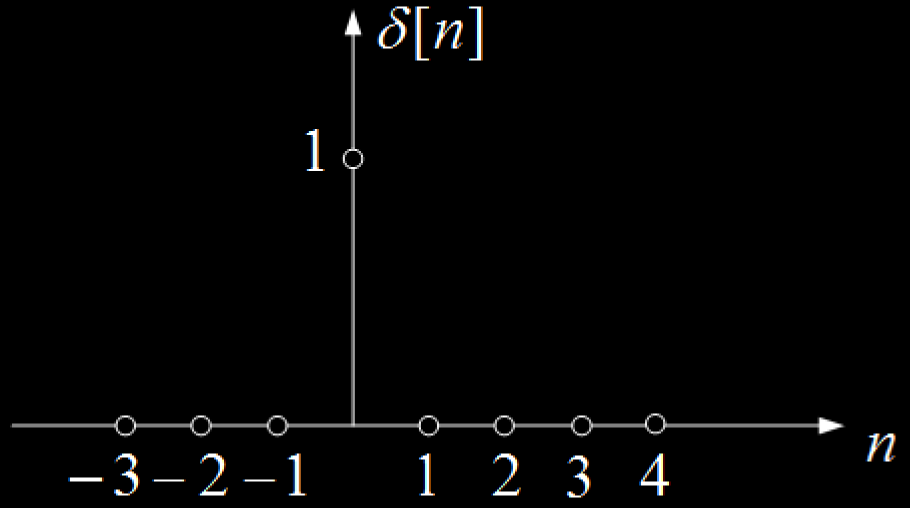
1. Posição das amostras não é necessária
2. Sequência começa em n=1

Não é necessário o uso do vetor-linha para a variável independente

SINAIS BÁSICOS

IMPULSO

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$$



IMPULSO

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, n = n_0 \\ 0, n \neq n_0 \end{cases}$$

DEGRAU

$$u[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

DEGRAU

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 1, n \geq n_0 \\ 0, n < n_0 \end{cases}$$

SINAL IMPULSO E DEGRAU

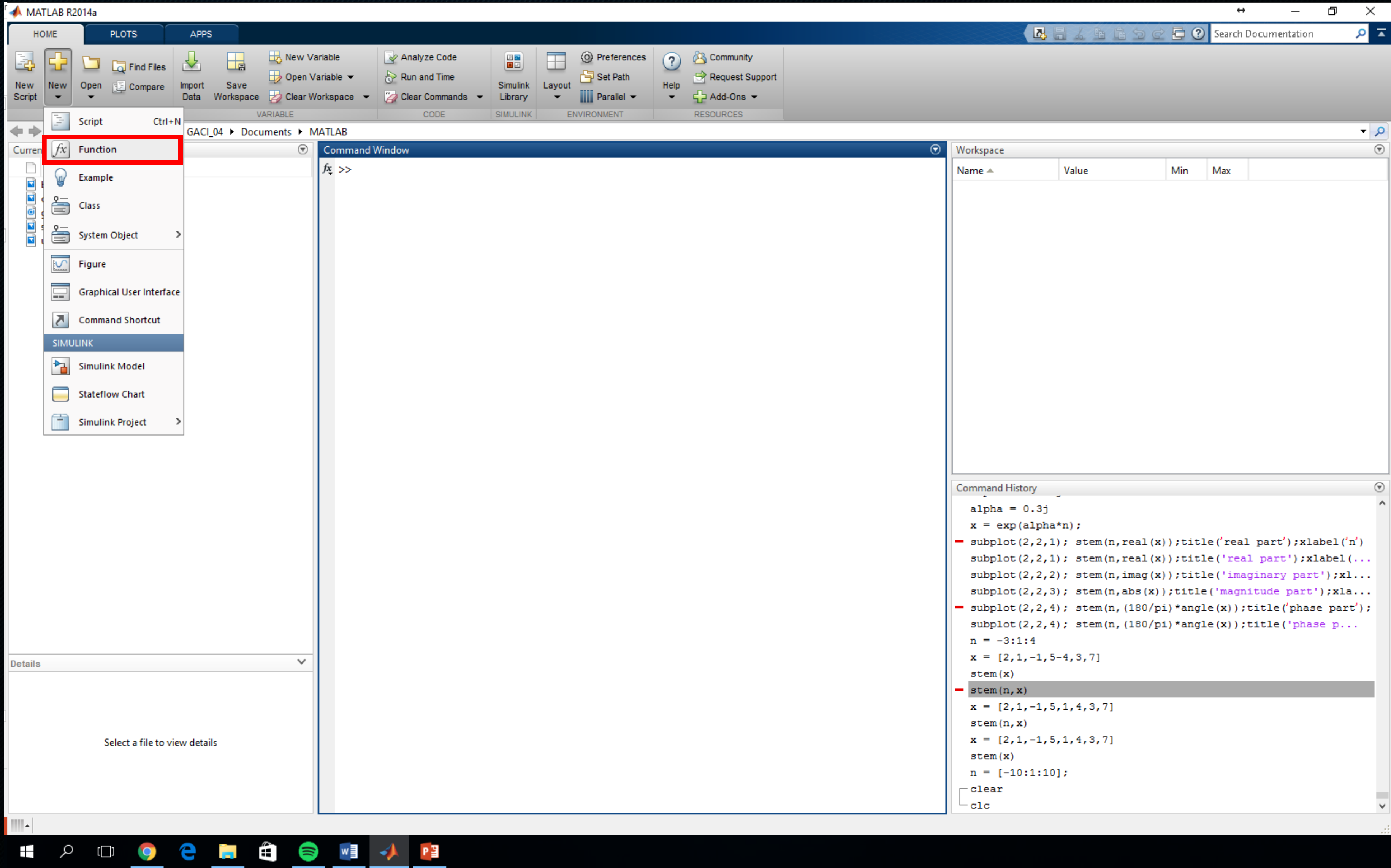
$$\delta[n] = \frac{\partial}{\partial n} u[n] = \mathrm{u[n]} - \mathrm{u[n-1]}$$

$$u[n] = \sum_{i=-\infty}^{n} \delta[i]$$

RAMPA

$$r[n] = n \times u[n]$$

CRIANDO FUNÇÕES



CRIANDO A FUNÇÃO IMPSEQ (IMPULSO)

Editor - Untitled*

Untitled*

```
function [x,n] = impseq(n0,n1,n2)
    % Generates x(n) = delta(n-n0); n1 <= n <= n2
    % ---------------------------------------------
    % [x,n] = impseq(n0,n1,n2)
    %
n = n1:n2; x = (n-n0) == 0;
```

Salve a função como *impseq.m*

UTILIZANDO IMPSEQ

```
[x, n] = impseq(0,-10,10);
stem(n,x,'filled');
```

EXPONENCIAIS

EXPONENCIAIS

1. Exponenciais Reais
2. Exponenciais Complexas Periódicas
   Sinais Senoidais
3. Exponenciais Complexas Gerais

SINAIS EXPONENCIAIS

Exponencial real

EXPONENCIAL REAL

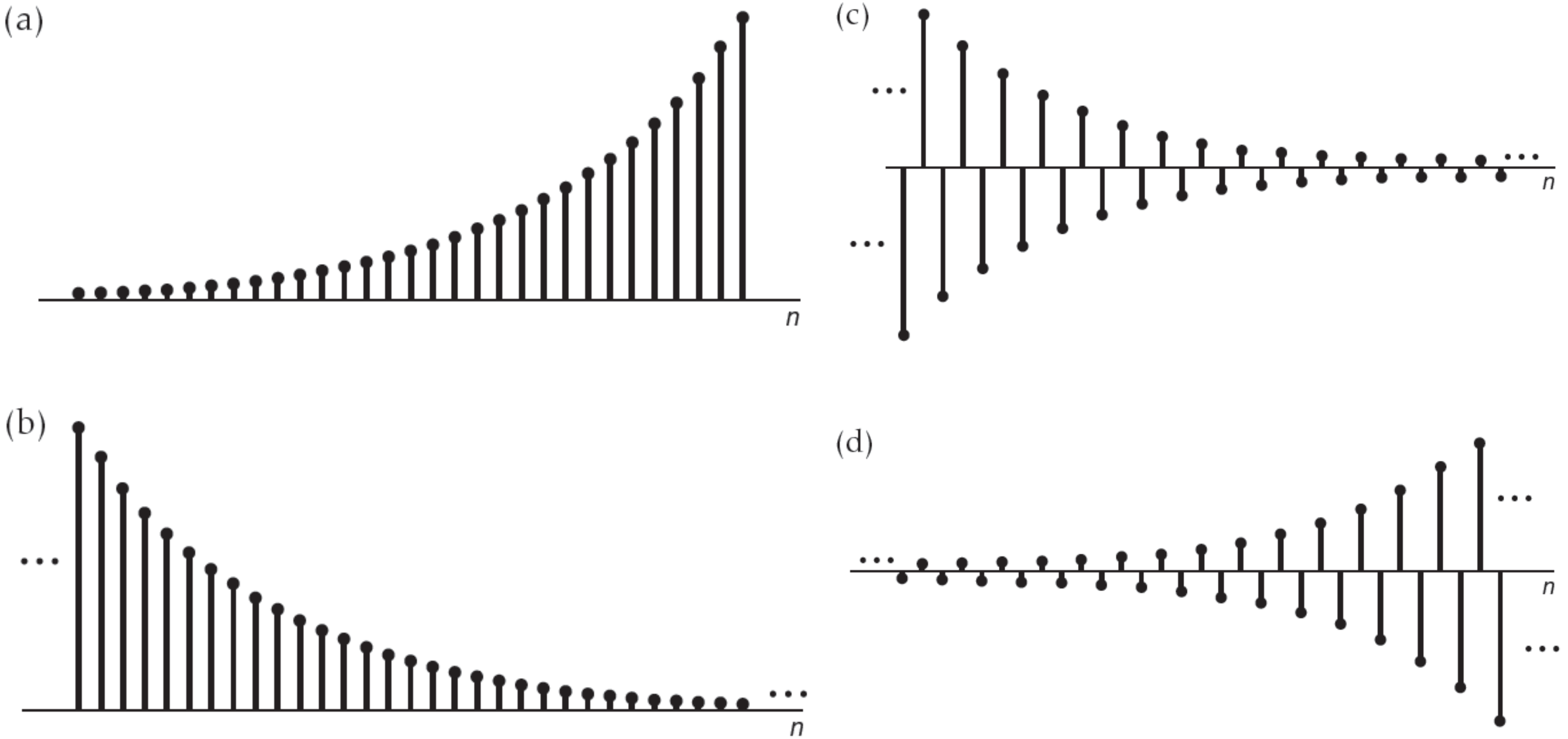
$$x[n] = a^n$$

EXPONENCIAL REAL

$$x[n] = a^n$$

$a>1$

$-1<a<0$



$0<a<1$

$a<-1$

EXPONENCIAL REAL (EXEMPLO)

$$x[n] = 0.9^n$$

```
n = [-10:10];
a = 0.9;
x = a .^ n;
stem(n,x);
```

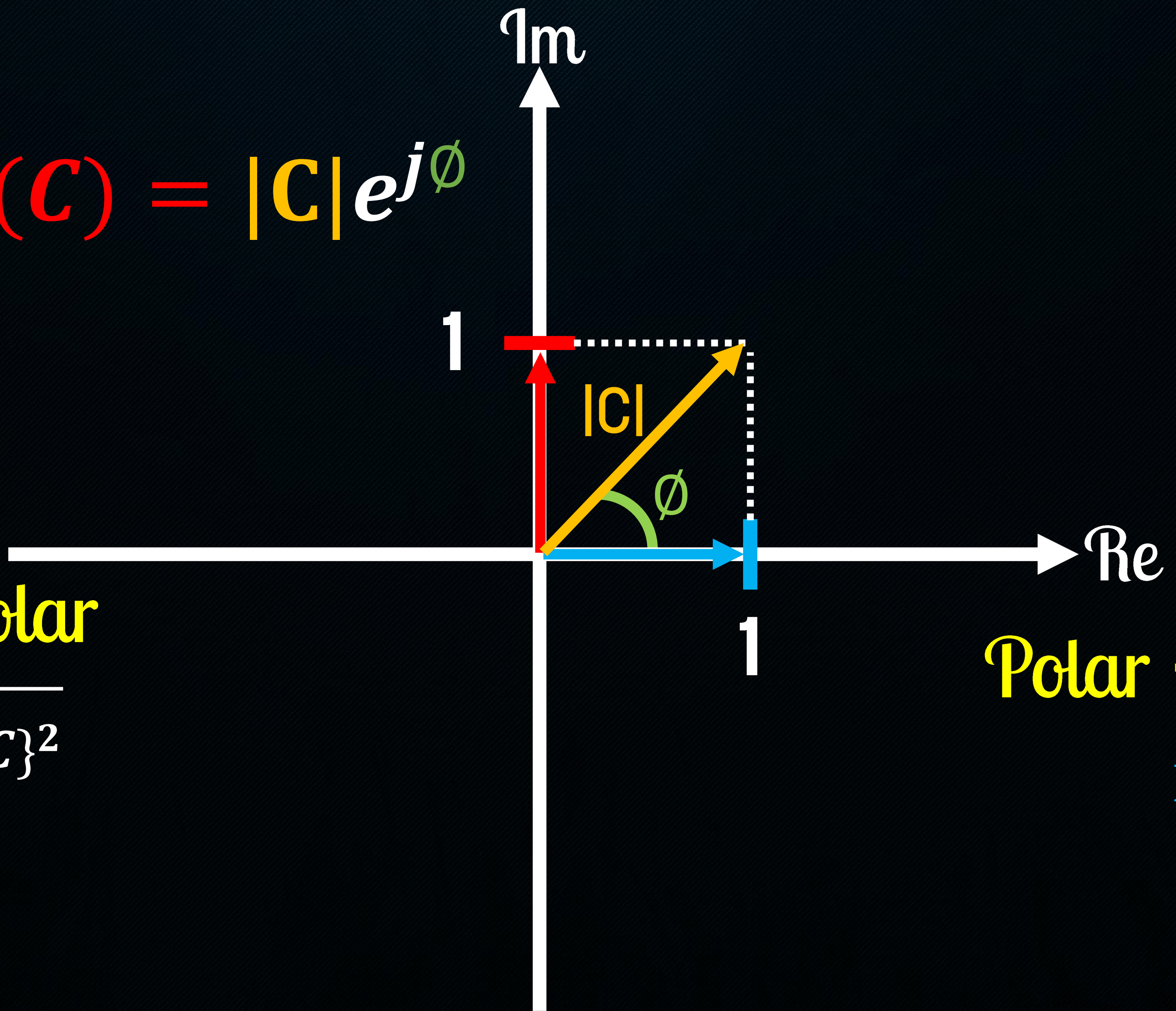
Exemplo em Matlab

SINAIS EXPONENCIAIS

Exponencial Complexa Periódica

RELEMBRANDO NÚMEROS COMPLEXOS

$$Re\{C\} + jIm(C) = |C|e^{j\emptyset}$$



Retangular → Polar

$$|C| = \sqrt{Re\{C\}^2 + Im\{C\}^2}$$

$$\emptyset = tan^{-1}\left(\frac{Im\{C\}}{Re\{C\}}\right)$$

Polar → Retangular

$$Re\{C\} = |C|\cos(\emptyset)$$

$$Im\{C\} = |C|\sin(\emptyset)$$

EXPONENCIAL COMPLEXA

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

EXPONENCIAL COMPLEXA

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

σ = 0 → Sinal periódico

Exponencial Complexa Periódica

EXPONENCIAL COMPLEXA PERIÓDICA

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

Comporta-se como uma senoide

EXPONENCIAL COMPLEXA PERIÓDICA

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

IDENTIDADE DE EULER:

$$e^{jx} = \cos(x) + jsin(x)$$

EXPONENCIAL COMPLEXA PERIÓDICA

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$
$$= \cos(\omega_0 n) + j sin(\omega_0 n)$$

EXPONENCIAL COMPLEXA PERIÓDICA

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$
$$= \cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$$

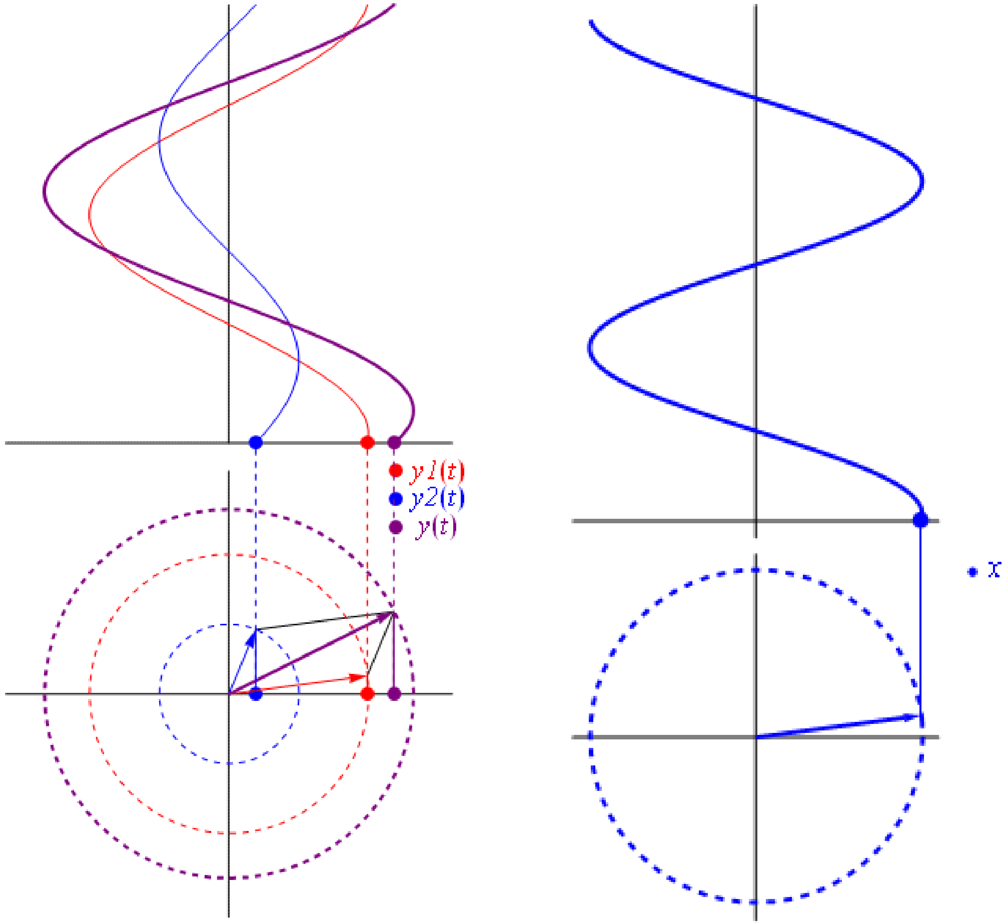
Parte real do sinal

EXPONENCIAL COMPLEXA PERIÓDICA

$$Re\{e^{j\omega_0 n}\} = \cos(\omega_0 n)$$

EXPONENCIAL COMPLEXA PERIÓDICA

- Vetor de faso (fasor)
- Vetor girando a partir da origem do plano complexo
- Função cosseno é a projeção do vetor no eixo real
- Amplitude igual ao módulo do vetor
- Argumento é a fase ($w_0+\varphi$)
- φ = ângulo em n = 0



EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}e^{j\emptyset}$$

EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}e^{j\emptyset}$$

Amplitude do sinal

EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}e^{j\emptyset}$$

Avanço de fase (Fase quando n = 0)

EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}e^{j\emptyset}$$
$$= Ae^{(\omega_0 n+\emptyset)j}$$

Agrupando os termos da exponencial

EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}e^{j\emptyset}$$
$$= Ae^{(\omega_0 n+\emptyset)j}$$
$$= A[cos(\omega_0 n + \emptyset) + jsin(\omega_0 n + \emptyset)]$$

Aplicando a identidade de Euler

EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}e^{j\emptyset}$$
$$= Ae^{(\omega_0 n+\emptyset)j}$$
$$= A[cos(\omega_0 n + \emptyset) + jsin(\omega_0 n + \emptyset)]$$
$$= Acos(\omega_0 n + \emptyset) + jAsin(\omega_0 n + \emptyset)$$

EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

$$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}e^{j\emptyset}$$
$$= Ae^{(\omega_0 n+\emptyset)j}$$
$$= A[cos(\omega_0 n + \emptyset) + jsin(\omega_0 n + \emptyset)]$$
$$= Acos(\omega_0 n + \emptyset) + jAsin(\omega_0 n + \emptyset)$$

Considerando a parte real do sinal exponencial

EXP. COMP. PER. → SENÓIDE

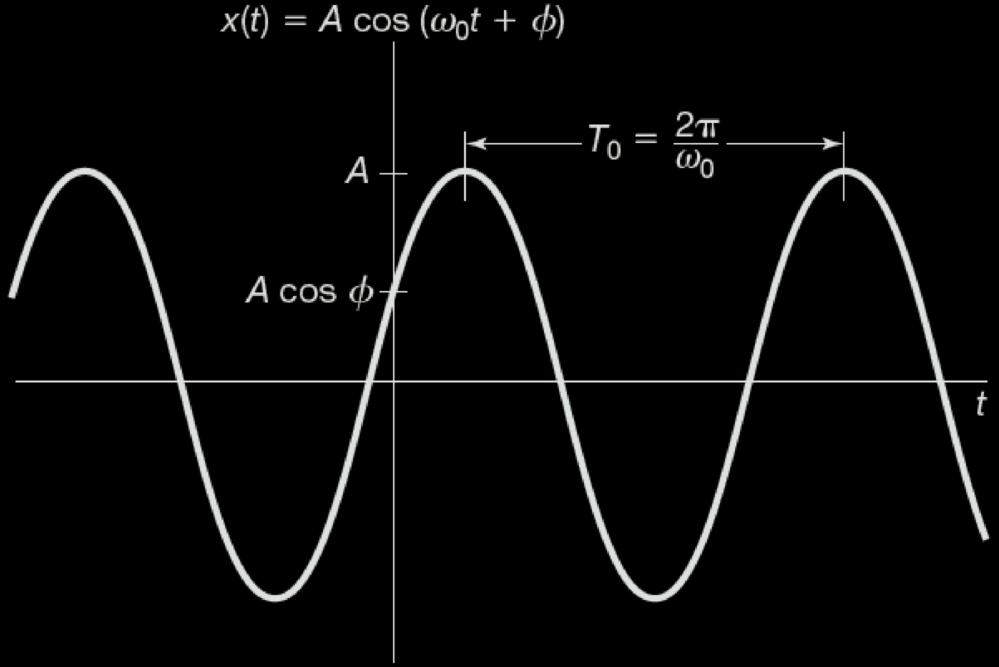
Logo:

$$A\cos(\omega_0 n + \phi) = Re\{Ae^{j\omega_0 n}e^{j\phi}\}$$

Sinal Senoidal

SINAIS SENOIDAIS

$$x[n] = A\,cos(\omega_0 n + \emptyset)$$



SINAIS SENOIDAIS

$$A\,cos(\omega_0 n + \emptyset)$$

$$= A\,\frac{e^{j(\omega_0 n+\emptyset)} + e^{-j(\omega_0 n+\emptyset)}}{2}$$

SINAIS SENOIDAIS

$$A\,cos(\omega_0 n + \emptyset)$$

IDENTIDADE DE EULER:

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

SINAIS SENOIDAIS

$$A\,cos(\omega_0 n + \emptyset)$$

IDENTIDADE DE EULER:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

RELAÇÃO ENTRE SENO E COSSENO

$$A\,cos(\omega_0 n) = A\,sin\left(\omega_0 n - \frac{\pi}{2}\right)$$

PERIODICIDADE DE SENOIDES E EXP. COMPLEXAS DE TEMPO DISCRETO

$$x[n] = A\,cos(\omega_0 n)$$

PERIODICIDADE DE SENOIDES E EXP. COMPLEXAS DE TEMPO DISCRETO

$$x[n] = A\,cos(\omega_0 n)$$

Frequência angular, caso f_S=1

PERIODICIDADE DE SENOIDES E EXP. COMPLEXAS DE TEMPO DISCRETO

$$x[n] = A\,cos(\omega_0 n)$$

Somente assume valores inteiros

PERIODICIDADE DE SENOIDES E EXP. COMPLEXAS DE TEMPO DISCRETO

$$x[n] = A\, cos(\omega_0 n)$$

Somente assume valores inteiros

Logo, $x[n]$ é periódico somente se $\omega_0 N$ é múltiplo de 2π,
onde N é o período (em amostras) de $x[n]$

PERIODICIDADE DE SENOIDES E EXP. COMPLEXAS DE TEMPO DISCRETO

$$\omega_0 N = 2\pi m$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

$$N = m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right), onde\ m \in Z$$

SINAIS EXPONENCIAIS

Exponencial Complexa Geral

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

σ diferente de zero

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

$$= e^{(\sigma n + j\omega_0 n)} = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

$$= e^{(\sigma n + j\omega_0 n)} = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

Identidade de Euler...

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

$$e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

$$= e^{\sigma n}[\cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)]$$

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$

$\sigma > 0$ produz uma amplificação do sinal

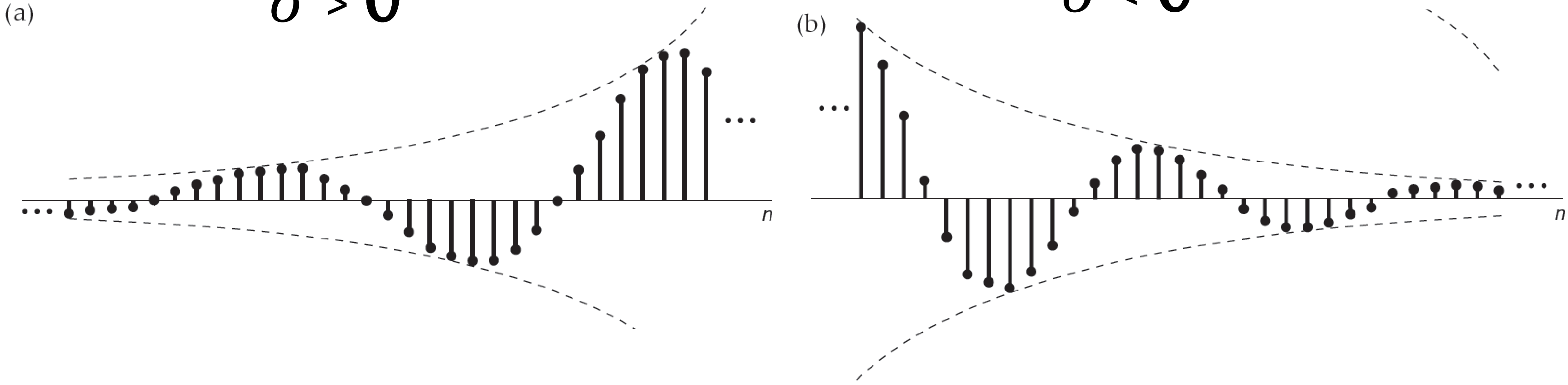
$\sigma < 0$ produz uma atenuação do sinal

$$e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

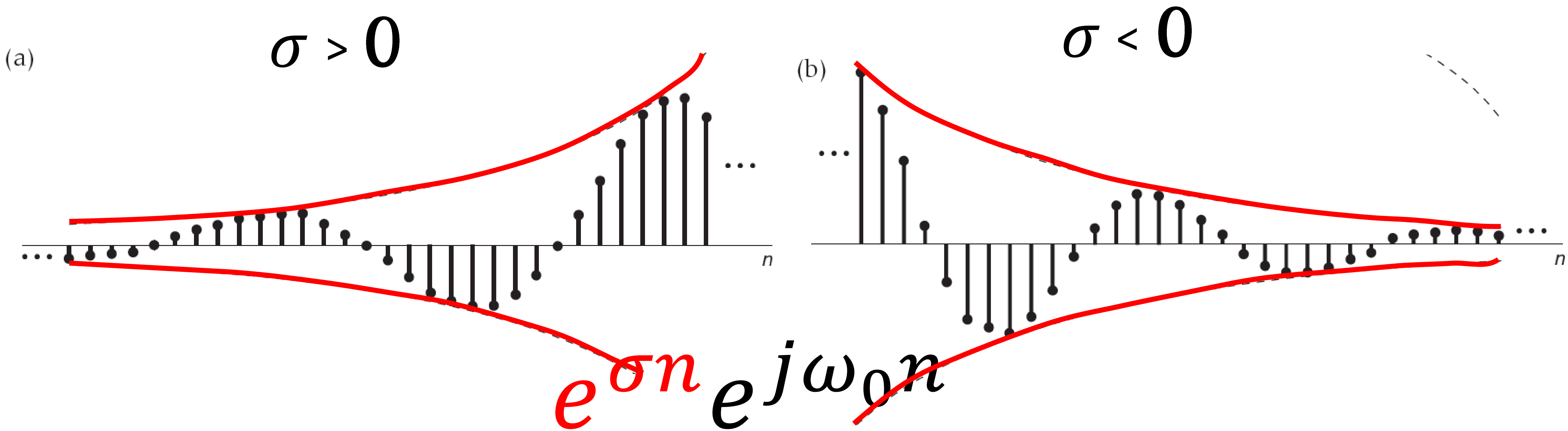
$$= e^{\sigma n}[\cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)]$$

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$\sigma > 0$ $\qquad\qquad$ $\sigma < 0$



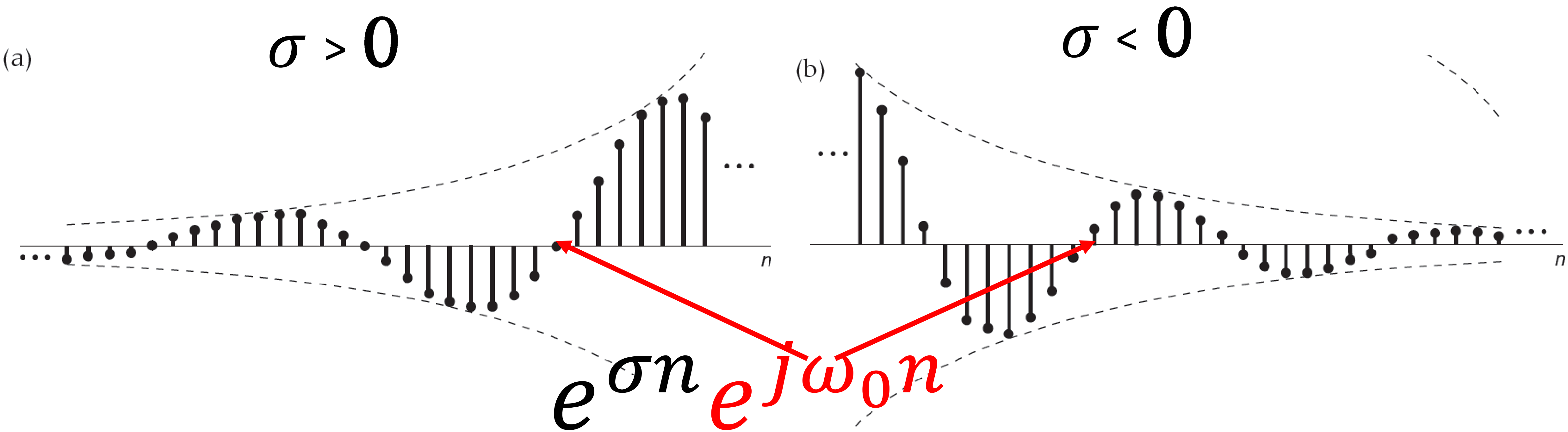
EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL



$$e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

Parte real da exponencial complexa



$$e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$
$$= e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$
$$= e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n) + j e^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$
$$= e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$
$$= e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n) + j e^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

Magnitude

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$
$$= e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$
$$= e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n) + j e^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

Fase

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$
$$= e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$
$$= e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n) + j e^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

Parte Real

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL

$$x[n] = e^{(\sigma + j\omega_0)n}$$
$$= e^{\sigma n} e^{j\omega_0 n}$$
$$= e^{\sigma n}\cos(\omega_0 n) + j e^{\sigma n}\sin(\omega_0 n)$$

Parte Imaginária

EXPONENCIAL COMPLEXA GERAL (EXEMPLO)

$$x[n] = e^{(-0.1+j0.3)n}$$

```
n = [-10:1:10]; alpha = -0.1+0.3j;
x = exp(alpha*n);
subplot(2,2,1); stem(n,real(x));title('real part');xlabel('n');
subplot(2,2,2); stem(n,imag(x));title('imaginary part');xlabel('n');
subplot(2,2,3); stem(n,abs(x));title('magnitude part');xlabel('n');
subplot(2,2,4); stem(n,(180/pi)*angle(x));title('phase part');
        xlabel('n');
```

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Matlab

- *Implementar as funções stepseq (degrau) e rampseq (rampa) em*
- *Plotar (stem) função de impulso/degrau/rampa descritas diversos parâmetros*
- *Criar uma função que implemente exponencial real*
  - *Parâmetros de entrada: base, intervalo de n*
  - *Retorno: vetor-linha* $x[n] = a^n$
- *Criar uma função que implemente exponencial complexa*
- *Criar um script (subprograma) que plote uma exponencial real, exponencial complexa periódica (parte real) e uma exponencial complexa geral*
  - *Utilizar subplot*
  - *Utilizar funções implementadas acima*

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Leitura

- *Ler seção introdutória do capítulo 2 e seção e 2.1 do livro de Ingle & Proakis*
    - *Discrete-time Signals and Systems*
- *Implementar problemas P2.1*

"That's all Folks!"