DIGITAL SIGNAL PROCESSING

Processamento Digital de Sinais

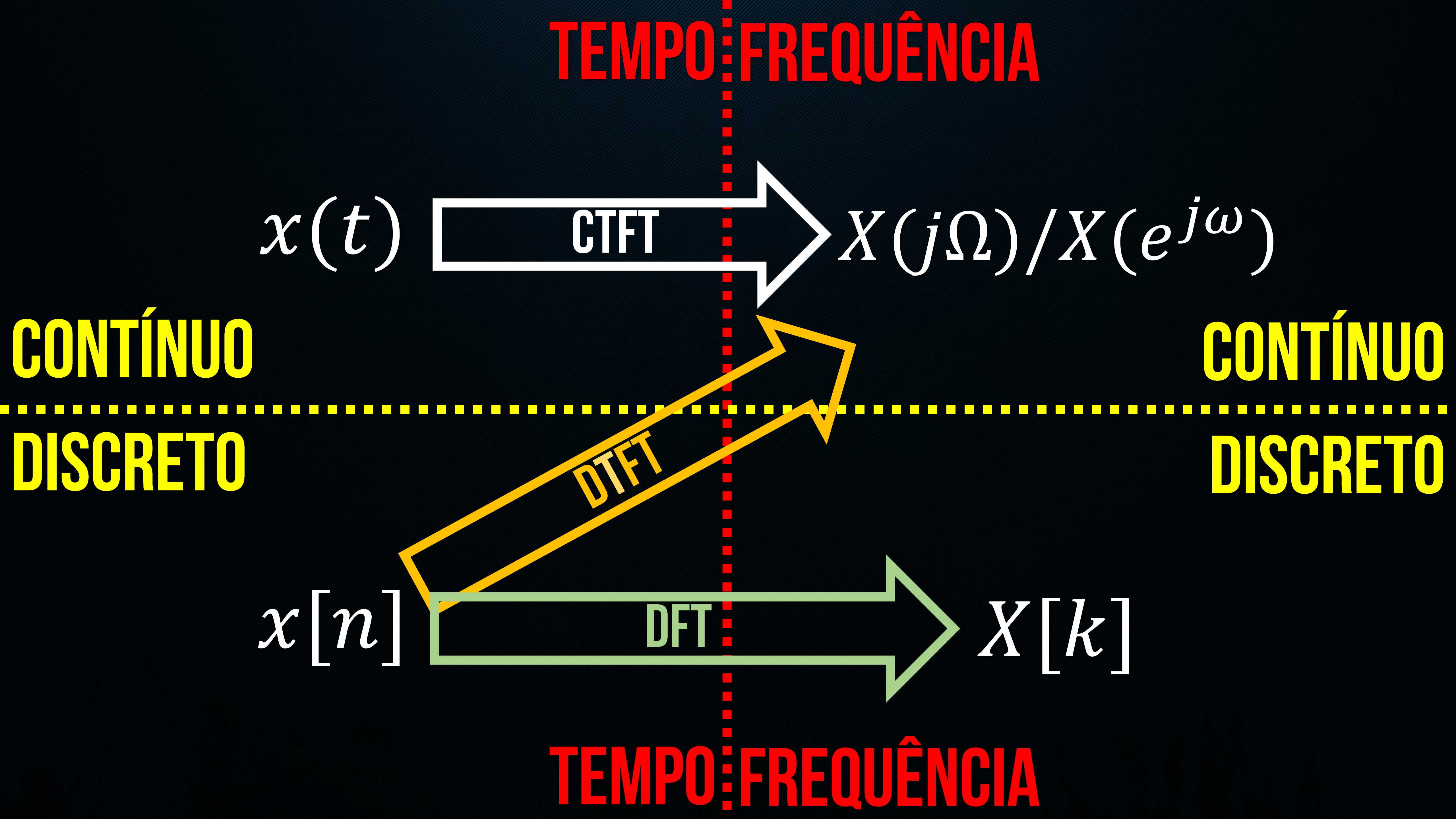
Prof. Bruno Zatt
Ruhan Conceição

DIGITAL SIGNAL PROCESSING

Aula 10 - Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Prof. Bruno Zatt
Ruhan Conceição

QUAL A DIFERENÇA ENTRE DTFT E DFT?


TEMPO
FREQUÊNCIA
$x(t)$
CTFT
$X(j\Omega)/X(e^{j\omega})$
CONTÍNUO
CONTÍNUO
DISCRETO
DISCRETO
DTFT
$x[n]$
DFT
$X[k]$
TEMPO
FREQUÊNCIA

POR QUE DFT?

POR QUE DFT?

- ✓ DTFT é uma função de variável contínua (ω)
- ✓ DTFT necessita de infinitas somas em infinitas frequências
- ✓ DTFT não é numericamente computável (somente aproximações)

- ✓ DFT é numericamente computável

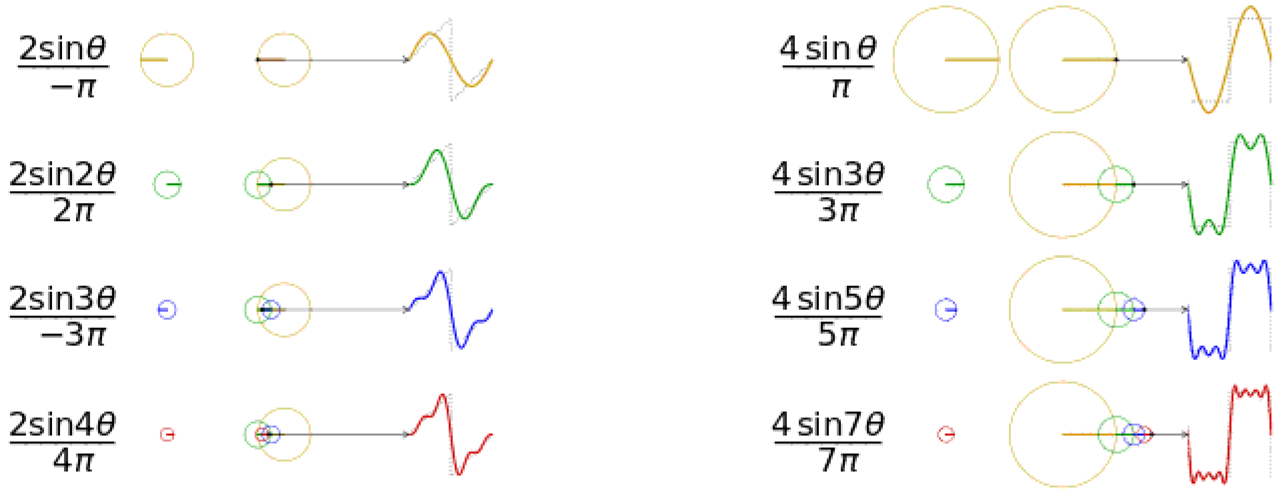
Para entender o funcionamento da **Transformada de Fourier Discreta**, é importante compreender primeiramente a **Série de Fourier Discreta** (DFS)

DISCRETE FOURIER SERIES

Um sinal é dito periódico se:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + kN], \forall n, k$$

Sabe-se que funções periódicas podem ser sintetizadas como uma combinação linear de exponenciais complexas que possuem frequência múltipla (ou harmônicas) da frequência fundamental ($2\pi/N$).



Sabe-se que funções periódicas podem ser sintetizadas como uma combinação linear de exponenciais complexas que possuem frequência múltipla (ou harmônicas) da frequência fundamental $(2\pi/N)$.

Visto que o sinal transformado é discreto e periódico no tempo, na frequência este sinal:

- Será periódico a cada período $2\pi\omega$ (assim como a DTFT)
- Será composto por uma frequência fundamental e suas respectivas frequências harmônicas:

$$\left\{\frac{2\pi}{N}k, onde\ k = 0, 1, \dots, N-1\right\}$$

DISCRETE FOURIER SERIES

DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

DFS

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DISCRETE FOURIER SERIES

DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Sinal aperiódico

DFS

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Sinal periódico a cada N amostras

DISCRETE FOURIER SERIES

DTFT

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Contínuo na frequência (ω)

DFS

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Discreto na frequência $\left(\frac{2\pi}{N}k\right)$

INVERSE DISCRETE FOURIER SERIES

IDTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

IDFS

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[n] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

INVERSE DISCRETE FOURIER SERIES

IDTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

IDFS

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[n]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Integral

Somatório

Discrete Fourier Series

Definindo

$$W_N \triangleq e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Pode-se reescrever as definições de DFS (e IDFS) como sendo:

DISCRETE FOURIER SERIES

DFS

$$\tilde{X}[k] \triangleq DFS\left[\tilde{x}[n]\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{nk}$$

IDFS

$$\tilde{x}[n] \triangleq IDFS\left[\tilde{X}[k]\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-nk}$$

Destaca-se que:

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k+N]$$

POR QUE ESTUDAR DFS PARA COMPREENDER DFT?

POR QUE APRENDER DFS?

- Sinais processados digitalmente (alvo da DFT) geralmente possuem as seguintes características
  - ✓ São aleatórios (possivelmente não periódico)
  - ✓ São finitos

POR QUE APRENDER DFS?

- Sinais processados digitalmente (alvo da DFT) geralmente possuem as seguintes características
  - ✓ São aleatórios (possivelmente não periódico)
  - ✓ São finitos

Mas a série de Fourier discreta (DFS) processa sinais infinitos e periódicos... Qual a relação entre DFT e DFS?

POR QUE APRENDER DFS?

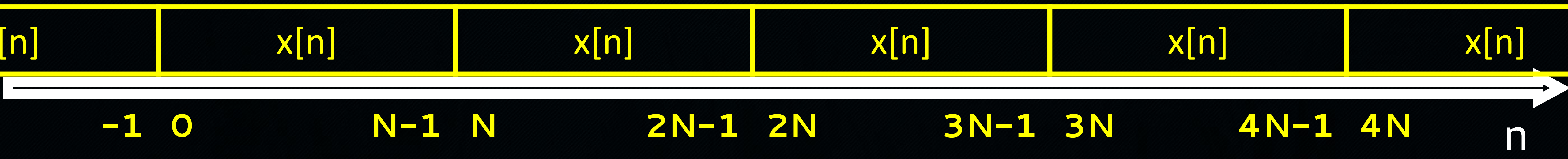
Suponha que $x[n]$ seja um sinal finito e aleatório...

POR QUE APRENDER DFS?

Suponha que $x[n]$ seja um sinal finito e aleatório...

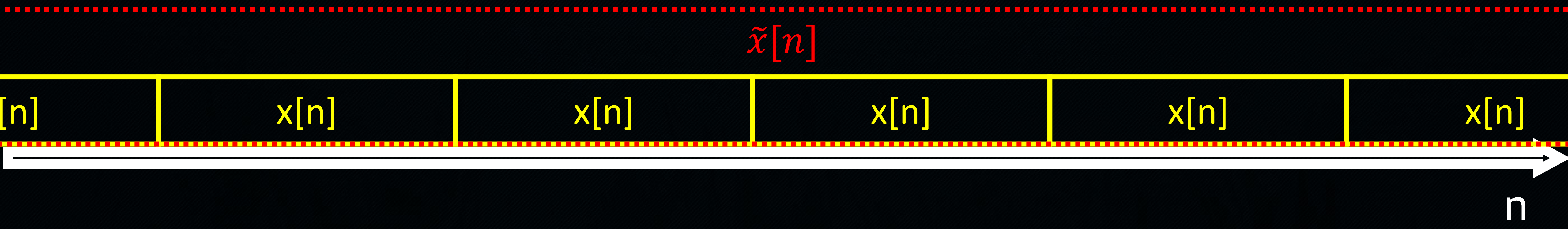
POR QUE APRENDER DFS?

Suponha que $x[n]$ seja um sinal finito e aleatório...
Imagine que replicamos este sinal infinitas vezes...



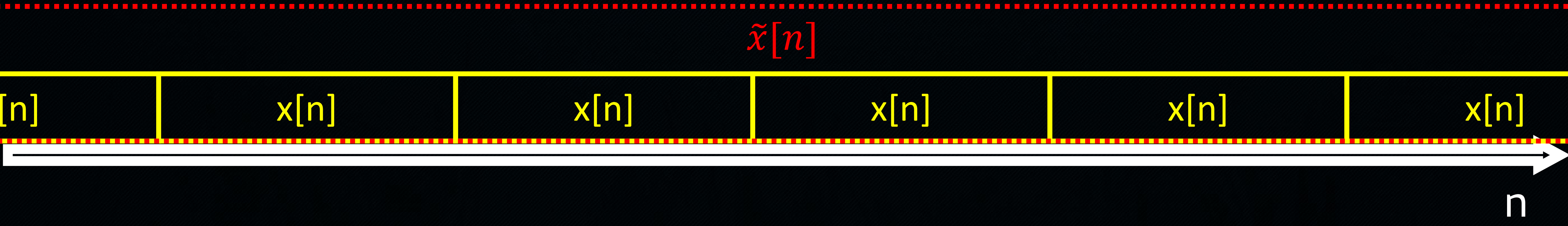
POR QUE APRENDER DFS?

Suponha que $x[n]$ seja um sinal finito e aleatório...
Imagine que replicamos este sinal infinitas vezes...
Gerando o sinal $\tilde{x}[n]$



POR QUE APRENDER DFS?

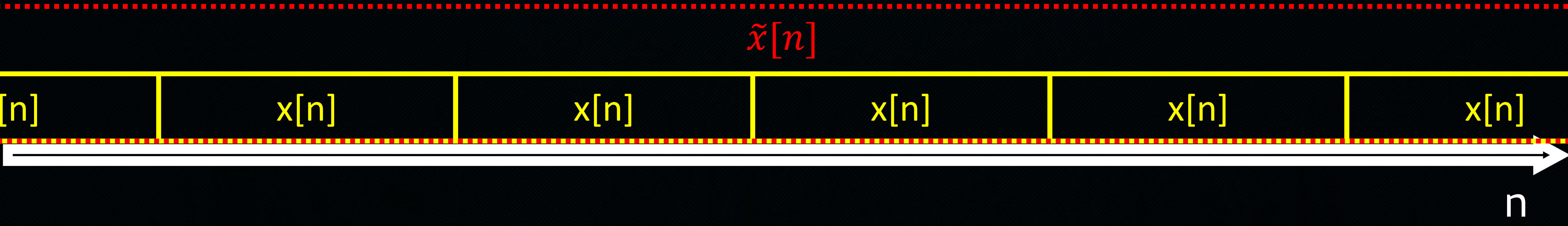
O sinal $\tilde{x}[n]$ gerado será infinito e periódico com frequência fundamental de N amostras...



POR QUE APRENDER DFS?

O sinal $\tilde{x}[n]$ gerado será infinito e periódico com frequência fundamental de N amostras...

Compatível com **DFS**



DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Fórmula da DFT (muito similar à DFS):

$$\boxed{X[k] \triangleq DFT\left[x[n]\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}\,, 0 \leq k \leq N-1}$$

Lembrando que: $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Fórmula da IDFT

$$\boxed{x[n] \triangleq IDFT\big[X[k]\big] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}\,, 0 \leq n \leq N-1}$$

Lembrando que: $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

IMPLEMENTAÇÃO EM MATLAB

Definindo W_N como sendo uma matriz...

$$W_N \triangleq \left[W_N^{kn}\right]_{0\le k,n\le N-1} = \begin{array}{cc} & \mathrm{n}\rightarrow \\ \begin{array}{c}\mathrm{k} \\ \downarrow\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{1} & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \end{array}$$

A DFT $X[k]$ pode ser descrita como a multiplicação matricial:

$$X = W_N x$$

E a IDFT $x[n]$ pode ser descrita como a multiplicação matricial:

$$x = \frac{1}{N} W_N^{*} X$$

DFT IN MATLAB

```
function [Xk] = dft(xn,N)
% Computes Discrete Fourier Transform
% -----------------------------------
% [Xk] = dft(xn,N)
% Xk = DFT coeff. array over 0 <= k <= N-1
% xn = N-point finite-duration sequence
% N = Length of DFT
%
        n = [0:1:N-1]; % row vector for n
        k = [0:1:N-1]; % row vector for k
        WN = exp(-j*2*pi/N); % Wn factor
        nk = n'*k; % creates a N by N matrix of nk values
        WNnk = WN .^ nk; % DFT matrix
        Xk = xn * WNnk; % row vector for DFT coefficients
```

IDFT IN MATLAB

```
function [xn] = idft(Xk,N)
% Computes Inverse Discrete Transform
% -----------------------------------
% [xn] = idft(Xk,N)
% xn = N-point sequence over 0 <= n <= N-1
% Xk = DFT coeff. array over 0 <= k <= N-1
% N = length of DFT
%
    n = [0:1:N-1]; % row vector for n
    k = [0:1:N-1]; % row vecor for k
    WN = exp(-j*2*pi/N); % Wn factor
    nk = n'*k; % creates a N by N matrix of nk values
    WNnk = WN .^ (-nk); % IDFT matrix
    xn = (Xk * WNnk)/N; % row vector for IDFT values
```

MODIFICAÇÃO NA DTFT

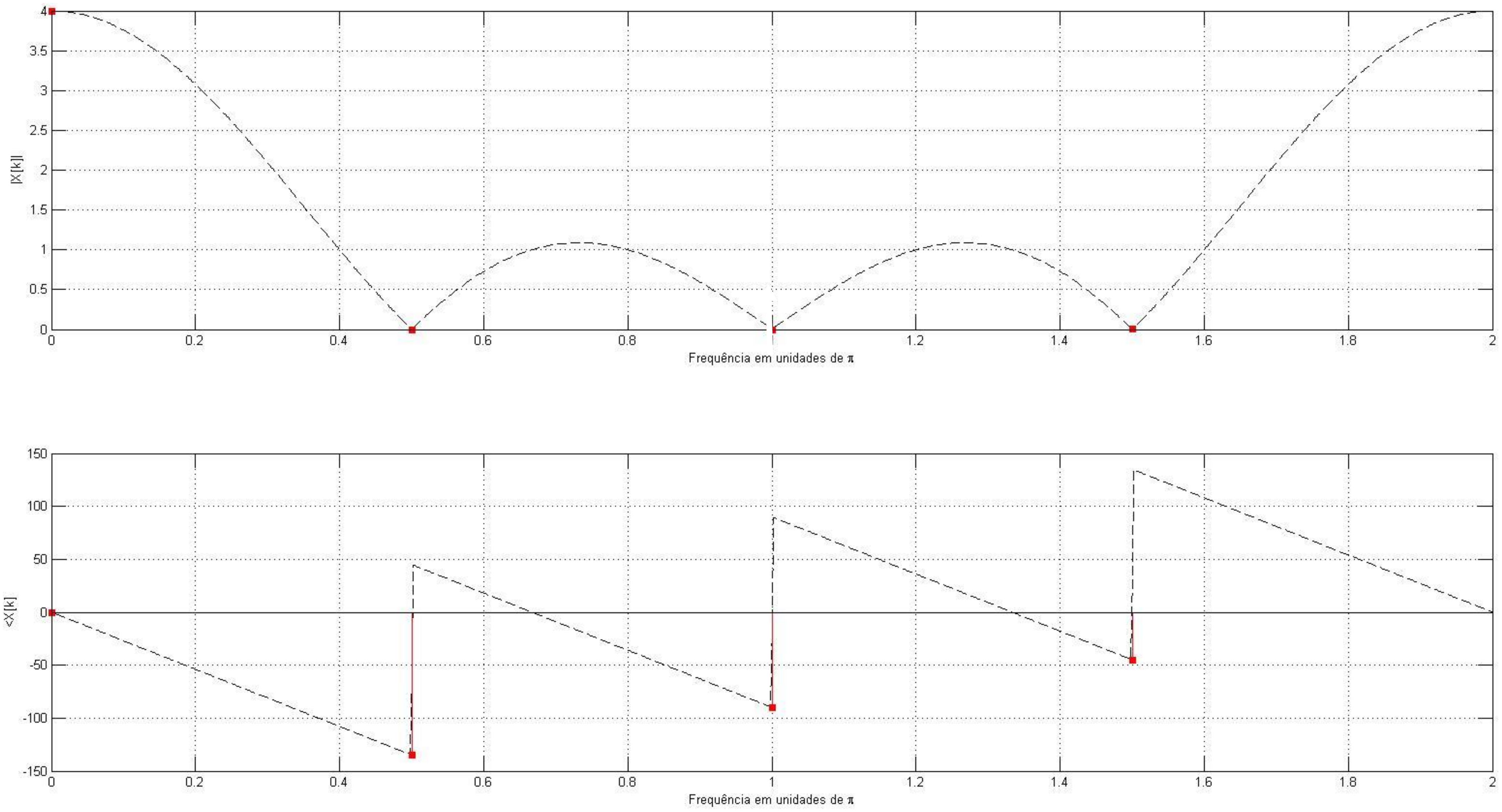
Modificaremos a função da DTFT para apresentar a resposta em frequência do sinal no período entre 0 e 2π, conforme a DFT

```
function [X,k] = dtft(x,n,M)
   if (nargin < 3) %se apenas 2 argumentos são passados como parâmetro, seta M como 500
      M = 500;
   end

   k = 0:2*M;
   X = x * (exp(-j*pi/M)).^(n'*k);

end
```

EXERCÍCIO 1

Faça a DTFT e a DFT do sinal abaixo e compare os resultados:

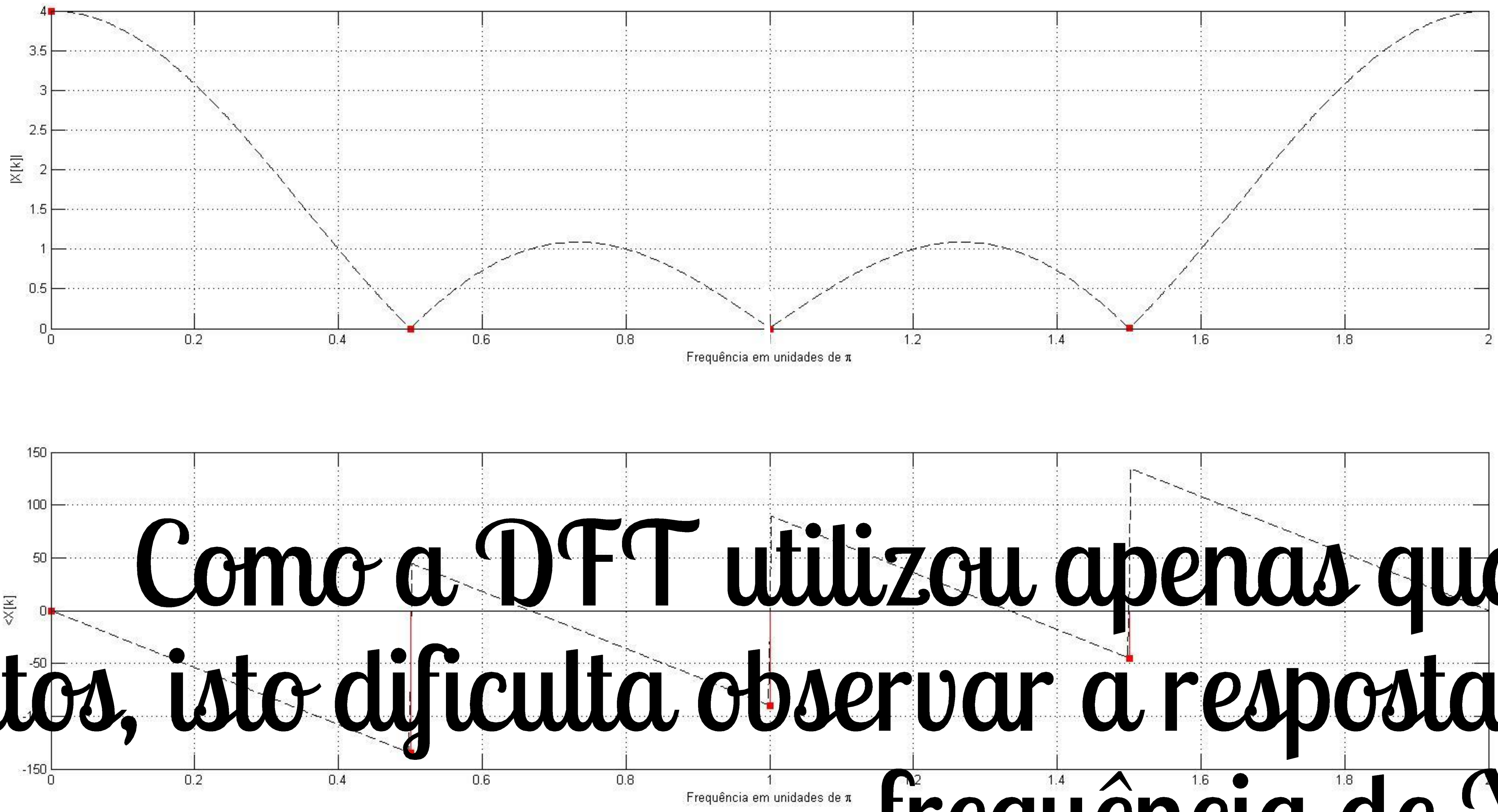
$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1},1,1,1\}$$



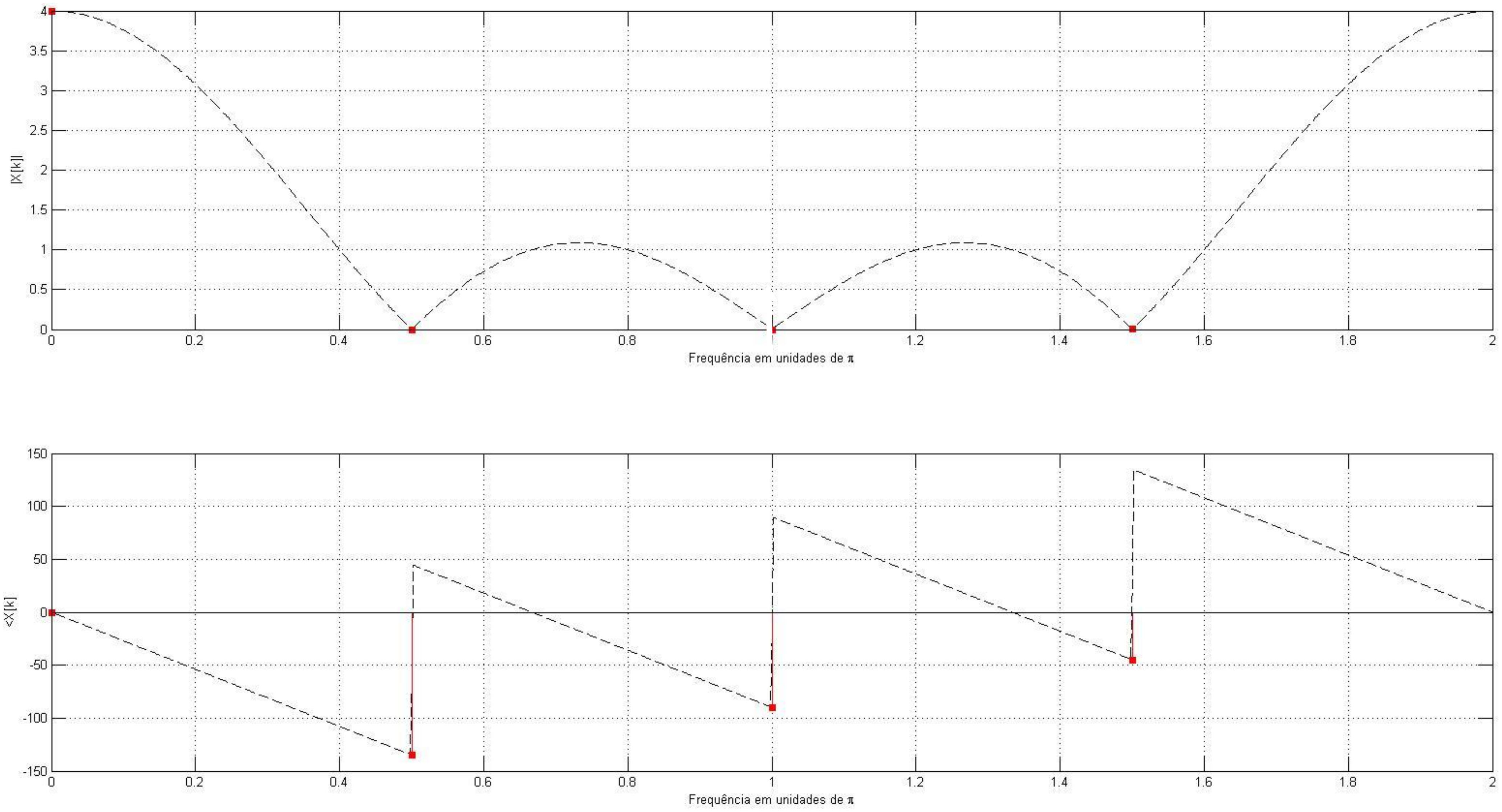
|X[k]|
Frequência em unidades de π
<X[k]
Frequência em unidades de π

RESPOSTA DO EXERCÍCIO 1

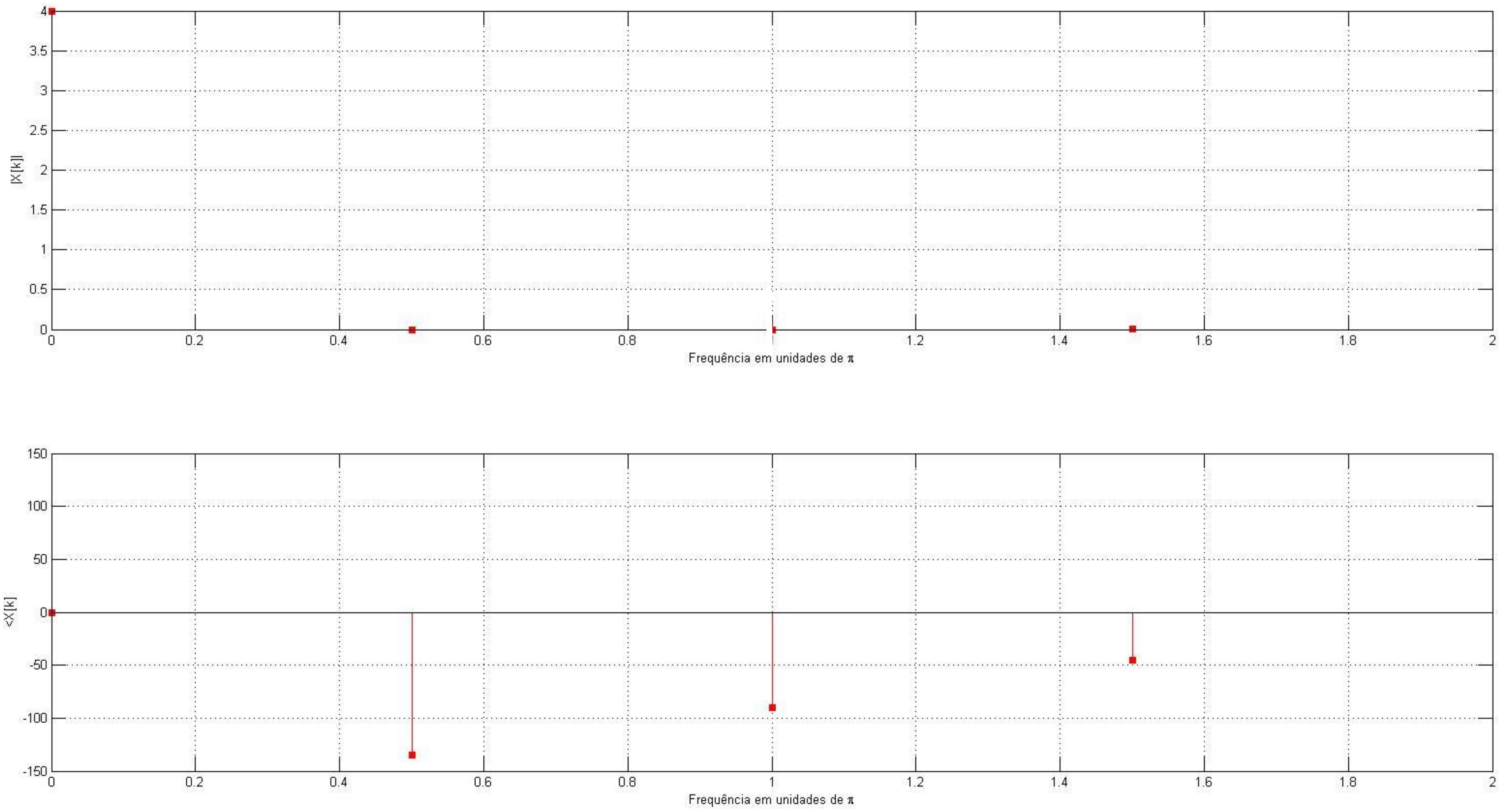
```
N = 4;
M = 500;
x = ones(1,N);
n = 0:3;

[Xdtft,k] = dtft(x,n,M);
Xdft = dft(x,N);

close all;
subplot(211);
hp = plot(k/500,abs(Xdtft),'--');
set(hp,'Color','black');
hold on;
hs = stem([0:N-1]/N*2,abs(Xdft),'s','filled');
set(hs, 'Color', 'red');
set(hs, 'Markersize', 5);
ylabel('|X[k]|');
xlabel('Frequência em unidades de \pi')
grid;

subplot(212);
hp = plot(k/500,angle(Xdtft)*180/pi,'--');
set(hp,'Color','black');
hold on;
hs = stem([0:N-1]/N*2,angle(Xdft)*180/pi,'s','filled');
set(hs, 'Color', 'red');
set(hs, 'Markersize', 5);
ylabel('<X[k]');
xlabel('Frequência em unidades de \pi')
grid;
```



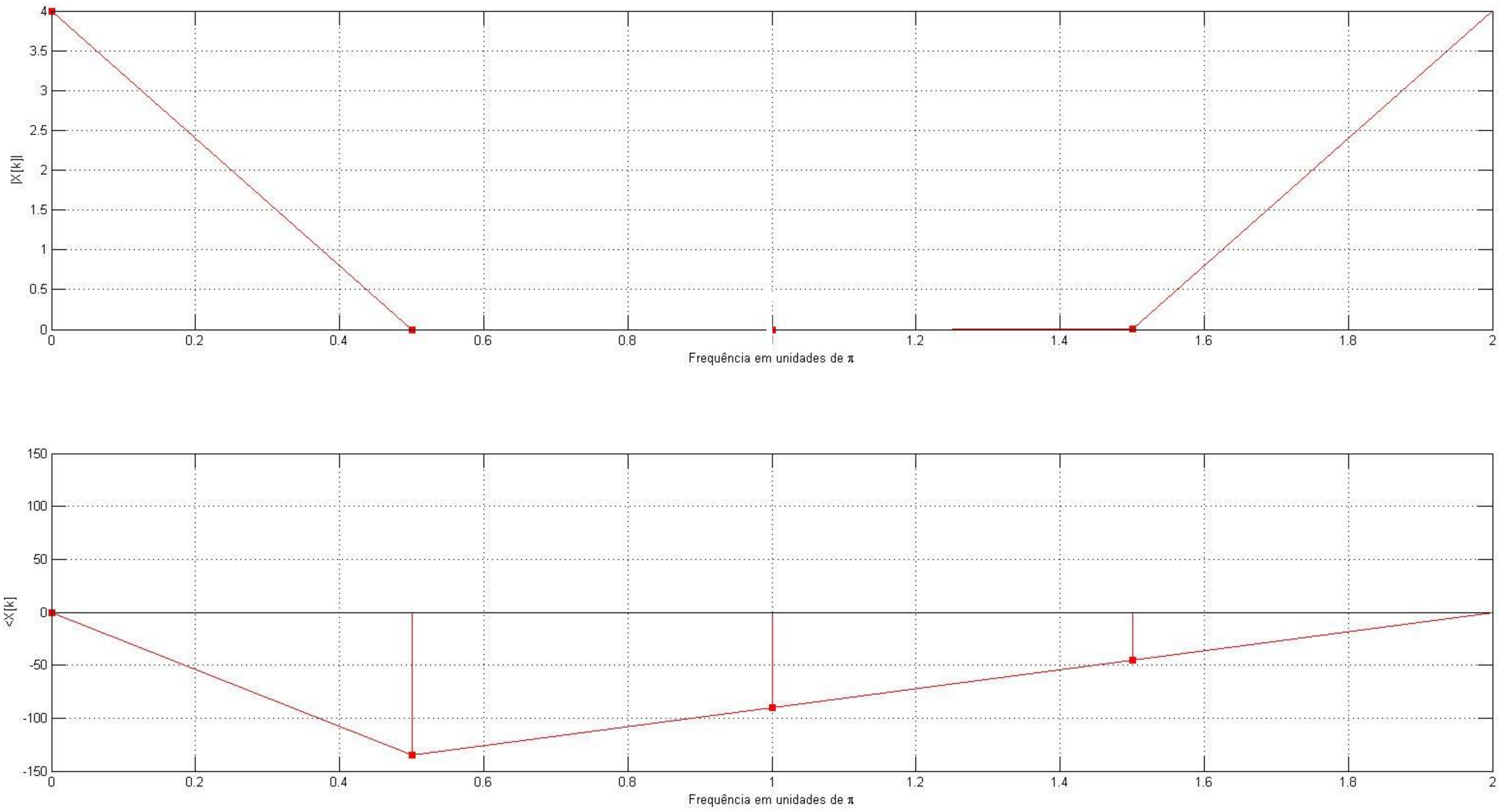
Como a DFT utilizou apenas quatro pontos, isto dificulta observar a resposta em frequência de X[k]



|X[k]|
Frequência em unidades de π
<X[k]
Frequência em unidades de π

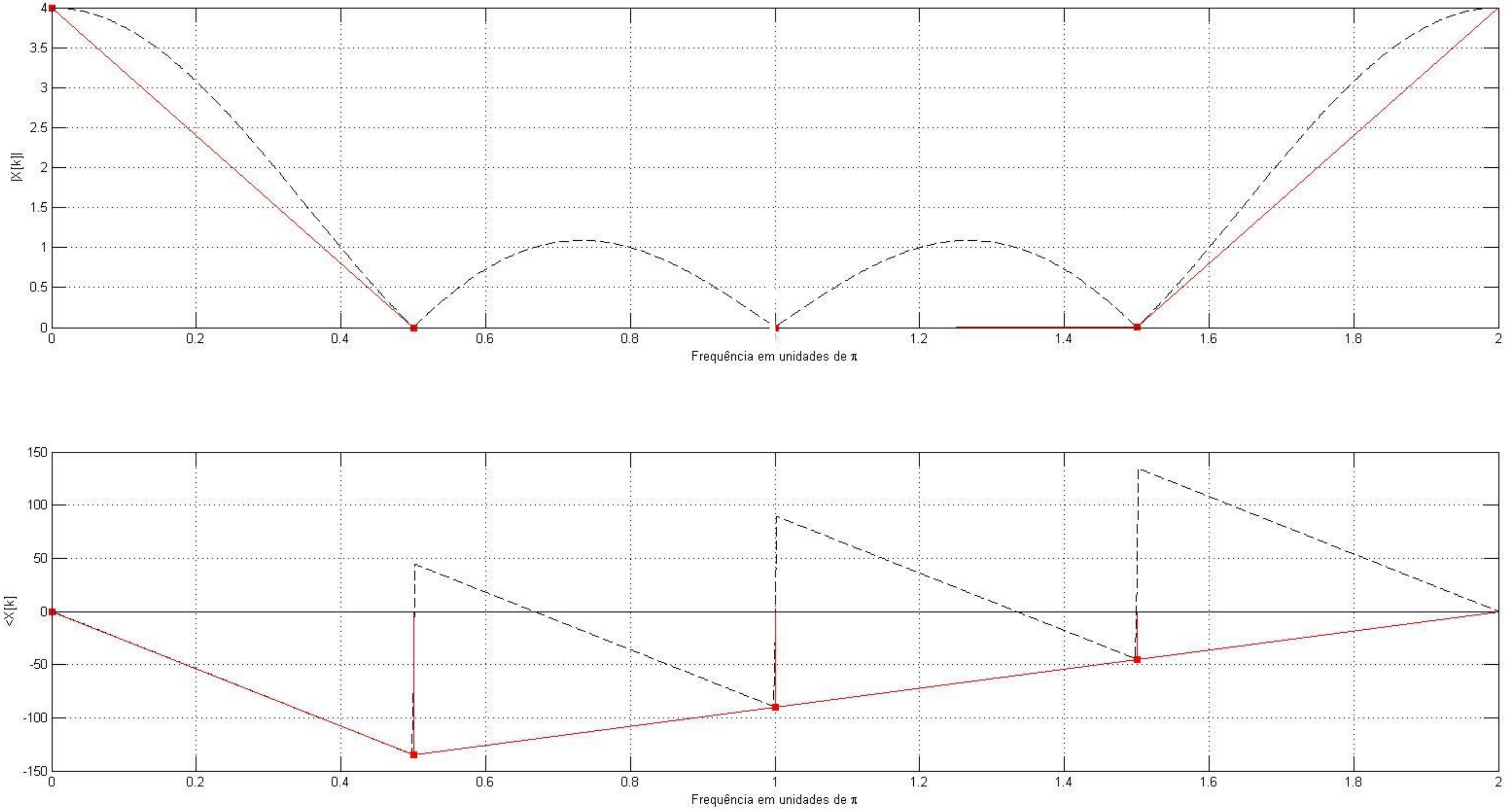


|X[k]|
Frequência em unidades de π
<X[k]
Frequência em unidades de π



Ligando os pontos

Comparando a DFT com a DTFT...



A Transformada de Fourier Discreta (DFT) apresenta um número restrito de pontos analisados na frequência (4 no exemplo anterior), prejudicando a caracterização do mesmo nas frequências.

Como resolver, ou até mesmo atenuar, este problema?

ZERO PADDING

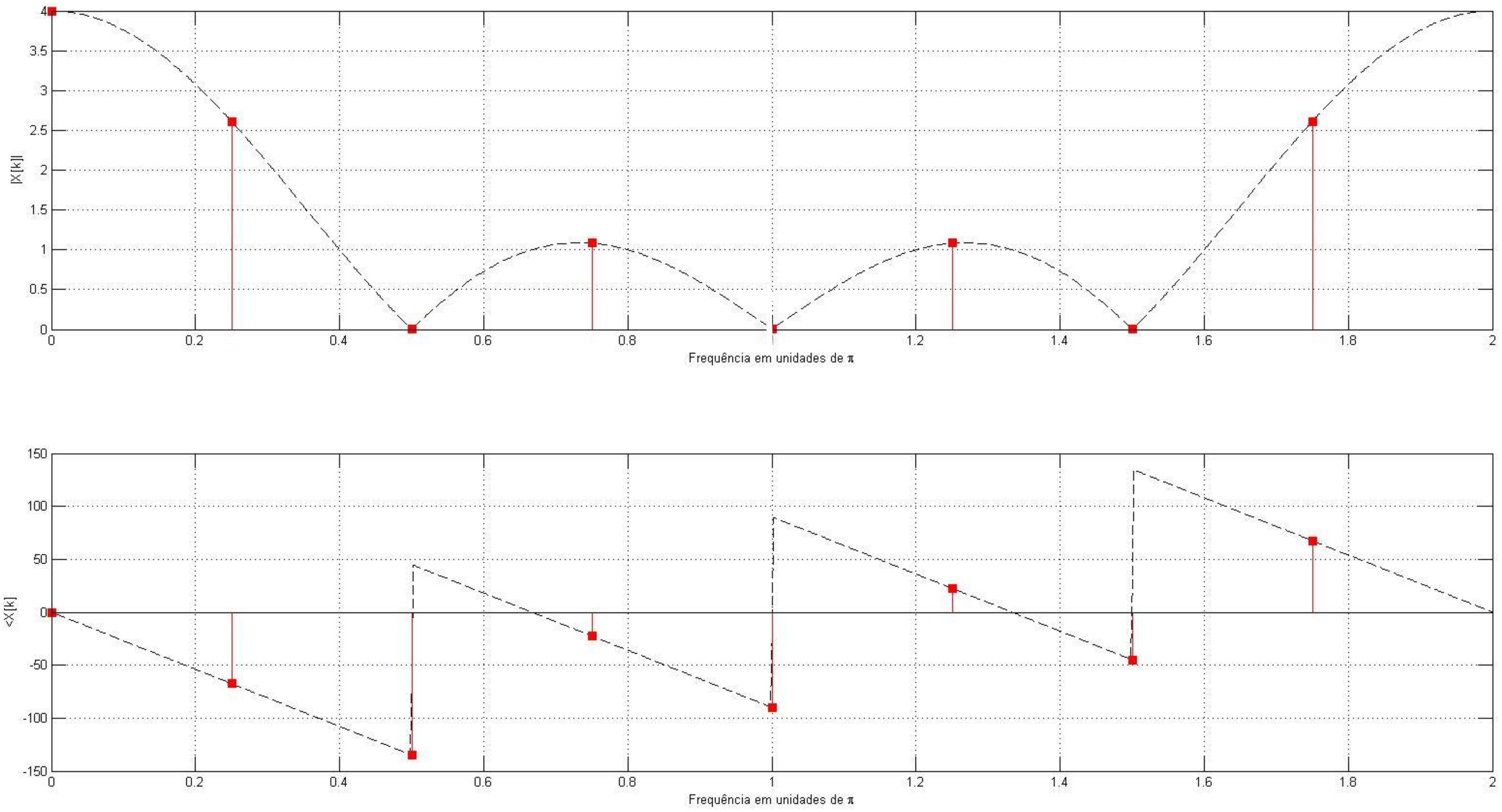
ZERO PADDING

Zero Padding consiste em concatenar zeros ao final do sinal para aumentar o número de pontos da transformada

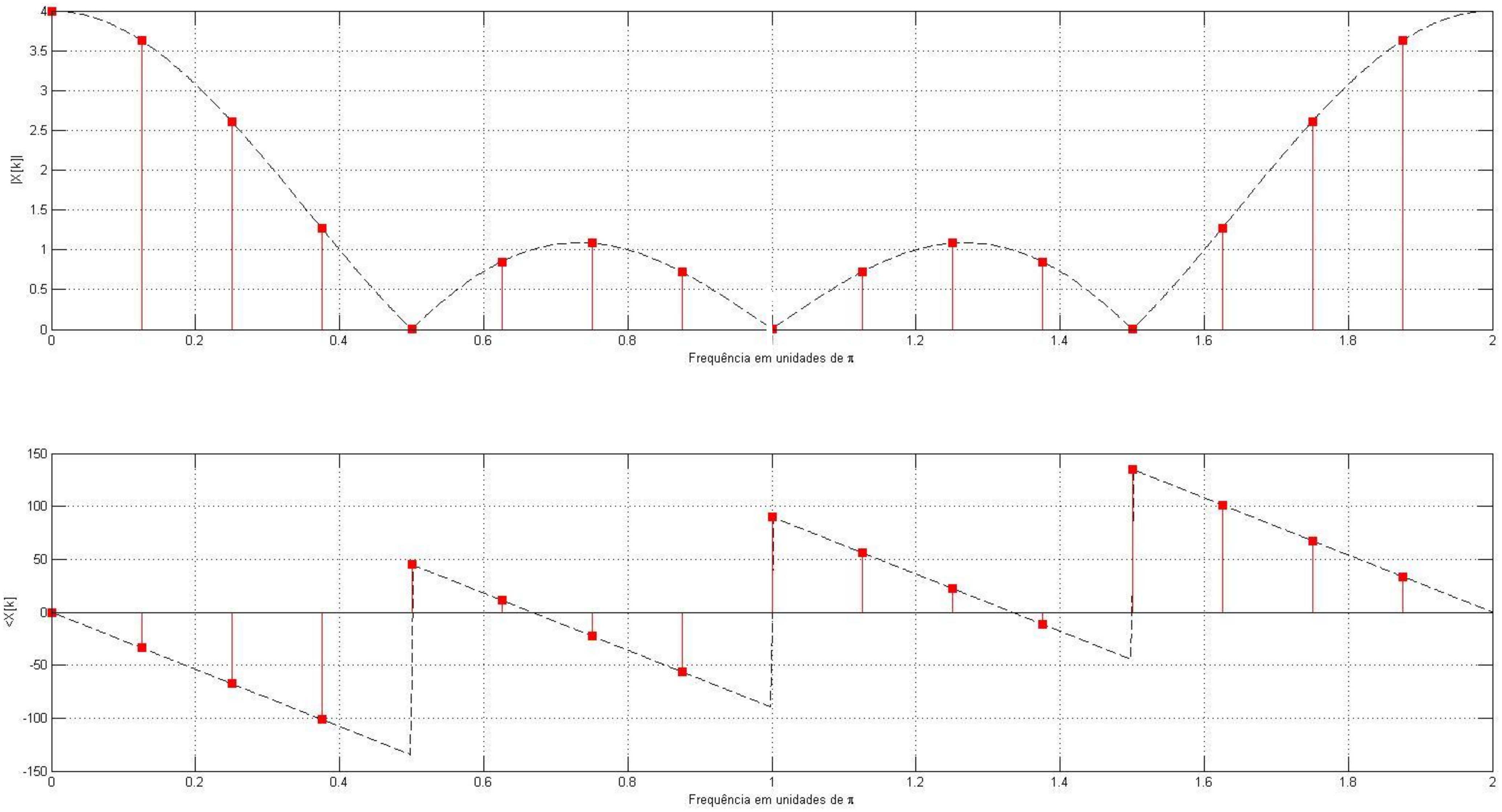
EXERCÍCIO 2

Faça a DTFT e a DFT do sinal abaixo (Exercício 1 concatenado com 4 zeros) e compare os resultados:

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,0,0,0,0\}$$

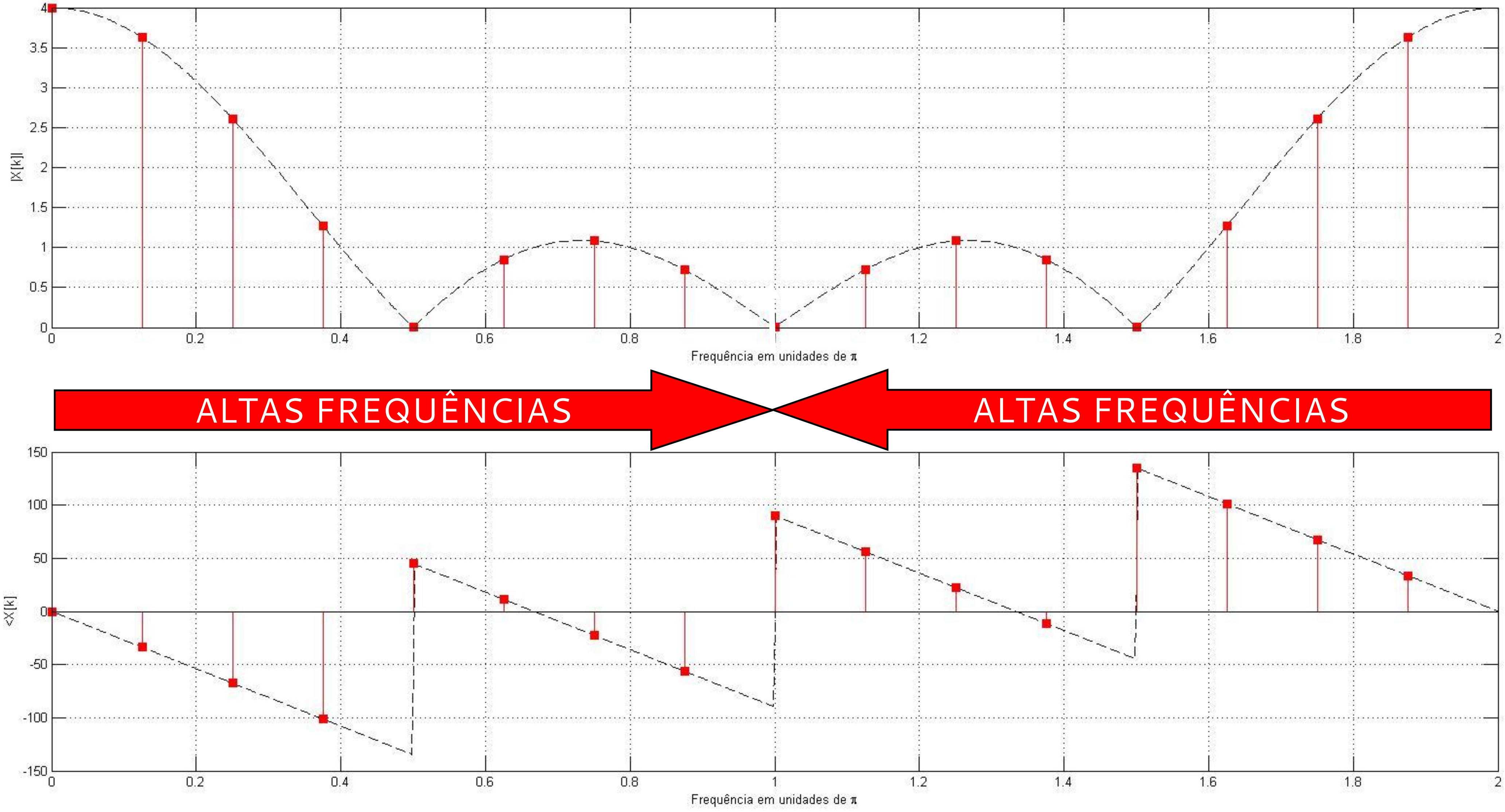


|X[k]|
Frequência em unidades de π
<X[k]
Frequência em unidades de π



Concatenando 12 zeros...

Observação:



4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
|X[k]|
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.2
1.4
1.6
1.8
2
Frequência em unidades de π
ALTAS FREQUÊNCIAS
ALTAS FREQUÊNCIAS
150
100
50
0
-50
-100
-150
<X[k]
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
Frequência em unidades de π

EXERCÍCIO DE AULA

1. Plote a magnitude e fase da DTFT $X(e^{j\omega})$ do sinal descrito abaixo utilizando a DFT como ferramenta de computação numérica (ligar pontos da DFT). Realize zero padding utilizando um número adequado de amostras. Compare o resultado da DFT com a DTFT utilizando M = 500.

$$x[n] = \begin{cases} 2e^{-0.9|n|}, -5 \leq n \leq 5 \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

HOMEWORK

1. *Resolva os problemas P5.8 e P5.10 do Ingle&Proakis*
2. *Implemente um script em Matlab que apresente um comportamento semelhante ao apresentado no vídeo:*
   - *Dado um sinal x[n], o transforme para X[k], realizando diferentes cortes nas frequências. Plote o sinal reconstruído (Dica: comece eliminando altas frequências)*

PROJETO FINAL

Lembre-se de pensar em um projeto final para a disciplina.

EXEMPLOS DE PROJETOS

- **Áudio**
  - Reconhecimento de voz
  - Sintetizador de áudio
  - Detector de acordes
- **Imagem**
  - Reconhecimento de padrões de imagem
- **Elétrica/Controle**
  - Supressor de ruído
  - Pêndulo invertido (Processador DSP)

Segue alguns artigos que podem servir de inspiração...

DECOMPOSIÇÃO TEMPO-FREQUÊNCIA ADAPTATIVA DE SINAIS ACÚSTICOS COM VARIAÇÕES EMOCIONAIS
http://sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST03/1570280944.pdf

SELEÇÃO DE ATRIBUTOS E CLASSIFICAÇÃO FONÉTICA DE SINAIS DE FALA DE BANDA LIMITADA
http://sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST03/1570277135.pdf

ESTUDO COMPARATIVO DE REALCE DE IMAGENS SUBAQUÁTICAS
http://sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST06/1570280978.pdf

FILTRAGEM ADAPTATIVA EM SUBBANDAS PARA SEPARAÇÃO SUPERVISIONADA DE FONTES
http://sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST09/1570278752.pdf

MÉTODO DE SELEÇÃO AUTOMÁTICA DE SPIKES BASEADO EM ALGORITMOS DE AGRUPAMENTO
http://sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST09/1570279248.pdf

A CORRELATION-BASED NO-REFERENCE PACKET-LOSS METRIC
http://sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST11/1570280850.pdf

ALGORITMO IPNLMS COM PARÂMETRO DE PROPORCIONALIDADE ÓTIMO
http://www.sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST15/1570275423.pdf

AVALIAÇÃO DE ALGORITMOS DE LOCALIZAÇÃO INDOOR BASEADOS EM MAPA DE ASSINATURA DE WLANS
http://www.sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST13/1570274889.pdf

AN ALGORITHM BASED ON BAYES INFERENCE AND K-NEAREST NEIGHBOR FOR 3D WLAN INDOOR POSITIONING
http://www.sbrt.org.br/sbrt2016/anais/ST13/1570275280.pdf

ENTREGA DA PROPOSTA DE PROJETO DIA 03 DE OUTUBRO

FORMATO DA PROPOSTA SERÁ SUBMETIDO NO AVA AINDA ESTA SEMANA

"That's all Folks!"