

Inducción Electromagnética

¿En que medida varía con el tiempo la velocidad de una barra conductora que se mueve en un riel por la fuerza magnética?

Física IB NM

1. Introducción

De los temas abarcados en el curso de Física Nivel Medio, electricidad y magnetismo, desde mi punto de vista, es el más interesante. Esto se debe, al mundo sci-fi que asocio con sus subtemas. Por ejemplo, me parece irreal el hecho de que existan campos magnéticos y eléctricos que no podamos ver ni sentir, pero que los presenciemos e interactuamos con ellos todos los días. Aún más, me fascina que se puedan crear campos eléctricos a partir de campos magnéticos. De esta manera, el subtema al que mayor interés tengo de electromagnetismo es la **inducción electromagnética**. Aunque no lo abarquemos en la física de nivel medio, es un tema que me llamo la atención aprender, por su aspecto sci-fi y sus aplicaciones en nuestra vida. Por este motivo, la presente investigación girará entorno a este fenómeno.

La presente investigación sera basada en una de las aplicaciones más futuristas de la inducción electromagnética, el **cañon de riel**. Este es un aparato que dispara proyectiles a altas velocidades y funciona a base de los principios electromagnéticos. Donde el proyectil es disparado por efecto de la fuerza magnética ejercida sobre la corriente inducida que pasa por el proyectil. El experimento a llevar a cabo busca replicar un cañon de riel y a partir de ello estudiar como la velocidad del proyectil varia con el tiempo. Por lo tanto la pregunta de investigación que se busca responder es: **¿En que medida varía con el tiempo la velocidad de una barra conductora que se mueve en un riel por la fuerza magnética?**

Inicialmente, se busco realizar el experimento con materiales de laboratorio, pero, este medio fue descartado por la complejidad en las mediciones y en el encontrar los materiales. Por lo tanto, se opto por primero, analizar el sistema teórico para llegar a una ecuación que relacionara ambas variables y después con un simulador extraer data de la velocidad a distintos instantes. Con el fin de determinar la relación entre las variables, se analizara dicha data haciendo uso del programa de Excel.

2. Fundamento Teórico

2.1. Flujo Magnético

El flujo magnético (ϕ_B) es la medida de cuantas líneas del campo magnético pasan por una superficie. Para cualquier superficie se escribe como:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot \partial \vec{A} \quad (1)$$

Donde $\partial \vec{A}$ es un vector normal a la superficie. Sin embargo, dado el caso que la intensidad del campo magnético sea constante a través de toda la superficie, se escribe el flujo magnético de tal manera:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \theta \quad (2)$$

Se desarrollo la multiplicación entre los vectores según la definición de producto vectorial [1]: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$. Donde θ es el ángulo que forman las líneas del campo y la normal de la superficie.

2.2. Inducción electromagnética

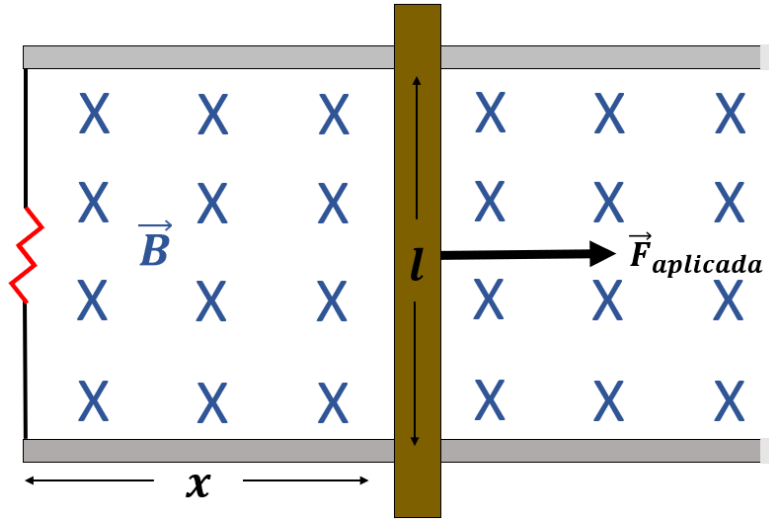
En 1831, Michael Faraday realizo 3 experimentos haciendo uso de una espira conductora y un imán. Lo que concluyo a base de estos experimentos es que al variar el campo magnético del imán con respecto a la espira se induce una corriente [2]. Este fenómeno, es conocido como inducción electromagnética y es descrita matemáticamente por la **ley de Faraday**:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} \quad (3)$$

Dicha ley describe el proceso en donde un campo eléctrico es inducido en un cuerpo conductor por la variación del flujo magnético en el tiempo. De esta manera, el campo eléctrico genera una f.e.m. que puede generar a la vez una corriente. El signo negativo de la ecuación se debe a la **ley de Lenz**, la cual establece que la corriente inducida ira en la dirección que genere un campo magnético que se oponga al original.

2.3. F.e.m. inducida por movimiento

Otra manera de inducir una f.e.m. sin mover el campo magnético, es a través del movimiento del cuerpo conductor. En el caso del sistema de la figura 1, basado en un ejemplo del libro de *Serway* [3], una barra conductora encierra un circuito sometido a un campo magnético constante. La barra se moverá hacia la izquierda por una fuerza aplicada.

Figura 1: Barra conductora se mueve encerrando un circuito. *Elaboración propia.*

Para el caso presentado se escribe el flujo magnético de tal manera:

$$\phi_B = Blx$$

Donde lx define el área encerrada por el circuito en cualquier instante, por lo que l es la longitud de la barra que encierra el circuito y x su posición. Dado que se cumple la ley de Faraday, la f.e.m. inducida en la barra se denota:

$$\varepsilon = -\frac{\delta Blx}{\partial t}$$

Considerando que la intensidad del campo y la longitud de la barra son constantes y que solo la posición cambia con el tiempo:

$$\varepsilon = -Bl \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)$$

Reconociendo la definición de la velocidad $v = \frac{\partial x}{\partial t}$. Obtenemos una expresión para la fem inducida por movimiento:

$$\varepsilon = -Blv \quad (4)$$

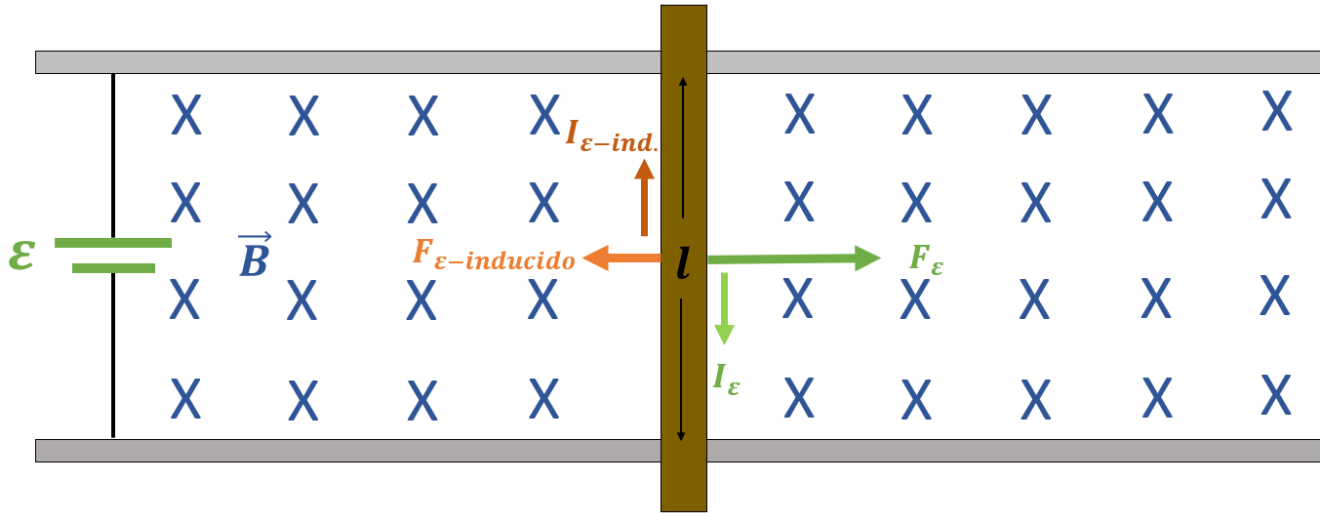
Asimismo, si la barra esta hecha de material ohmica, según la ley de Ohm se inducirá una corriente:

$$I = -\frac{Blv}{R}$$

2.4. Expresión para la velocidad de una barra conductora en un cañón de riel ideal

En un cañón de riel el campo magnético es generado por la corriente que fluye por los rieles, por lo que se requiere una f.e.m. externa. Asimismo, se asumirá que dicho campo magnético es dirigida hacia afuera y constante en cualquier punto. Además, como solo nos interesa el comportamiento de la velocidad con el tiempo, se asumirá que las rieles tiene una longitud infinita para que este no afecte en nuestros cálculos y también se ignorara la fuerza por fricción. Así, la figura 2 muestra un cañón de riel ideal¹, donde la barra conductora (proyectil) esta hecho de material ohmico y inicialmente esta en reposo, pero va experimentar una fuerza magnética, haciendo que se mueva:

Figura 2: Diagrama de cuerpo libre para una barra conductora en un cañón de riel ideal. Elaboración propia.



Como se aprecia en la figura 2, la barra conductora va experimentar 2 fuerzas magnéticas en sentido opuesto. Una por el campo de la corriente generada por la f.e.m. externa y el otro por la f.e.m. inducida por movimiento de la barra, esta sera opuesta ya que la corriente fluye en sentido opuesto, según la ley de Lenz. De tal manera que se cumple la segunda ley de Newton:

$$ma = F_{\varepsilon} - F_{\varepsilon-inducida}$$

$$ma = \frac{\varepsilon l B}{R} - \left(\frac{Blv}{R} \right) l B$$

$$ma = (\varepsilon - Blv) \frac{lB}{R}$$

¹el sistema fue adaptado de un ejemplo del libro de *Serway* [3], para que se asimile a un cañón de riel

Pasando la m a dividir y expresando la aceleración en términos de la velocidad:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (\varepsilon - Blv) \frac{lB}{Rm} \quad (5)$$

Para resolver dicha ecuación denotamos que $\varepsilon - Blv = u$ y lo derivamos con respecto al tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon - Blv)}{\partial t}$$

Tomando en cuenta que la f.e.m., la intensidad del campo y la longitud de la barra son constantes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Bl \frac{\partial v}{\partial t}$$

Volviendo a la ecuación 5. Desplazamos las u :

$$-\left(\frac{1}{Bl}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{Bd}{Rm} u$$

$$\frac{\partial u}{u} = -\frac{l^2 B^2}{Rm} u$$

Integramos desde u_0 hasta u y desde 0 hasta t

$$\int_{u_0}^u \frac{\partial u}{u} = - \int_0^t \frac{B^2 l^2}{Rm} \delta t$$

$$\ln u - \ln u_0 = -\frac{B^2 l^2}{Rm} \int_0^t \partial t$$

Reemplazando los valores de u y u_0 , considerando que en un inicio la barra estaba en reposo:

$$\ln \frac{u}{u_0} = -\frac{B^2 l^2 t}{Rm}$$

$$\frac{\varepsilon - Blv}{\varepsilon} = e^{-\frac{B^2 l^2 t}{Rm}}$$

$$\varepsilon - Blv = \varepsilon e^{-\frac{B^2 l^2 t}{Rm}}$$

$$\varepsilon - \varepsilon e^{-\frac{B^2 l^2 t}{Rm}} = Blv$$

Así, se obtuvo una expresión para la velocidad de la barra:

$$v = \frac{\varepsilon}{Bl} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2 t}{Rm}}\right) \quad (6)$$

Además, dado que tenemos dos fuerzas actuando en direcciones opuestas que determinan el movimiento de la barra por un periodo de tiempo infinito, se cumplirá el caso que la barra alcance una velocidad terminal, es decir una velocidad constante cuando el cuerpo deja de acelerar. Para calcularla, se aplicara la primera ley de Newton:

$$F_{\varepsilon} - F_{\varepsilon-inducida} = 0$$

$$\frac{\varepsilon l B}{R} = \frac{Blv}{R}(Bl)$$

$$\varepsilon = vBl$$

De esta manera, se llego a una segunda expresión, esta vez para la velocidad terminal de la barra:

$$v_{terminal} = \frac{\varepsilon}{Bl} \quad (7)$$

3. Variables

Tabla 1: Definiendo las variables y como se midieron o controlaron

Variables		Cómo se midió/controló
Independiente	Tiempo (s)	Se registraron distintos tiempos según salían en el simulador.
Dependiente	Velocidad (ms^{-1})	Dependiendo del tiempo registrado, el simulador definía la magnitud de la velocidad para ese instante.
Controladas	<ol style="list-style-type: none"> 1. F.e.m. del circuito (V) 2. Magnitud del campo magnético (T) 3. Longitud de la barra conductora que encierra el circuito (m) 4. Resistencia eléctrica de la barra (Ω) 5. Masa de la barra (kg) 	El simulador mantuvo un valor constante para cada variable, para que estas no afecten la relación entre la variables independiente y dependiente.

4. Hipótesis

La **ecuación 6** nos permite inferir que la relación entre el tiempo y la velocidad, sera exponencial o logarítmica. Por lo que con el simulador se busca comprobar esta hipótesis al extraer data para después modelizar la relación entre ambas variables con Excel.

5. Metodología Experimental

Por lo mismo que trabajar con un campo magnético de magnitud constante y equitativa infinitamente, generar velocidades con magnitudes significantes a base de instrumentos del laboratorio o conseguir dos rieles de longitud infinita, es prácticamente imposible. Se optó por programar un simulador que calculara la velocidad de la barra conductora en un cañon de riel ideal en distintos instantes de tiempo.

Por lo tanto, el simulador modeló un escenario muy similar a la de la sección 2.4, en base a la **ecuación 6** y las siguientes condiciones:

Tabla 2: Condiciones del simulador

Condiciones del simulador		
Variable	Valor y unidad	Incertidumbre
F.e.m del circuito	5 V	± 0.01 V
Magnitud del campo magnético	5 T	± 0.01 T
Longitud de la barra	30 cm	± 0.001 ms ⁻¹
Resistencia eléctrica de la barra	10 Ω	± 0.1 Ω
Masa de la barra	2 kg	± 0.01 kg

Se realizara 5 ensayos con el simulador, cada uno arrojando 11 datos para el tiempo y la velocidad de la barra. Por lo tanto, se promediara dicha data para generar un gráfico de 11 puntos en Excel. Ahí, el mismo programa indicara diferentes modelos que mejor se ajustan a los datos. Se analizara dichas regresiones con el fin de determinar la relación entre las variables.

6. Registro y Análisis de Datos

Tabla 3: Datos brutos obtenidos para 5 ensayos de la simulación de velocidad de la barra conductora en un cañon de riel ideal a medida que varía el tiempo desde que se aleja de su posición inicial

Número de ensayo	Tiempo transcurrido (s) ±0.01 s	Velocidad de la barra (ms ⁻¹) ±0.001 ms ⁻¹
Ensayo 1	0.50	0.181
	2.97	0.947
	5.42	1.522
	7.99	1.976
	10.53	2.314
	13.10	2.569
	15.54	2.753
	18.02	2.894
	20.56	3.004
	22.95	3.081
	25.01	3.133
Ensayo 2	0.43	0.157
	3.05	0.968
	5.46	1.530
	8.12	1.997
	10.48	2.308
	13.00	2.562
	15.57	2.755
	18.02	2.895
	20.50	3.001
	23.04	3.084
	25.02	3.134
Ensayo 3	0.47	0.172
	3.02	0.961
	5.59	1.556
	8.06	1.987
	10.52	2.312
	13.01	2.562
	15.49	2.750
	17.96	2.891
	20.44	2.999
	22.98	3.082
	25.05	3.134

Ensayo 4	0.45	0.166
	3.00	0.956
	5.53	1.544
	7.89	1.962
	10.48	2.308
	13.02	2.563
	15.41	2.744
	17.96	2.891
	20.42	2.998
	23.05	3.084
	25.04	3.134
Ensayo 5	0.57	0.207
	2.96	0.944
	5.50	1.538
	7.98	1.975
	10.51	2.312
	13.00	2.561
	15.55	2.754
	18.01	2.894
	20.56	3.003
	23.02	3.083
	25.01	3.133

Tabla 4: Data promediada con su respectiva incertidumbre

Tiempo (s)	Velocidad de la barra (ms^{-1})
0.48 ± 0.05	0.177 ± 0.019
3.00 ± 0.04	0.955 ± 0.010
5.50 ± 0.07	1.538 ± 0.013
8.01 ± 0.09	1.980 ± 0.013
10.50 ± 0.02	2.311 ± 0.003
13.02 ± 0.04	2.563 ± 0.003
15.51 ± 0.06	2.751 ± 0.004
17.99 ± 0.03	2.893 ± 0.002
20.50 ± 0.07	3.001 ± 0.003
23.01 ± 0.04	3.083 ± 0.001
25.03 ± 0.02	3.134 ± 0.001

Procesando dicha data, se obtuvo un promedio de los 11 instantes de tiempo con sus respectivas velocidades promediados, como se muestra en la **tabla 4**. Las incertidumbres fueron definidas por

la desviación estándar de cada conjunto de datos. De tal manera, que si la incertidumbre aleatoria (desviación estándar) es mayor que la incertidumbre instrumental, se tomó en cuenta para la incertidumbre del promedio de datos. Con ayuda del programa Excel, se situaron los 11 puntos en una gráfica y el mismo programa nos muestra las mejores regresiones que se ajustan a ello.

Gráfico 1: Los mejores ajustes según Excel, para la velocidad de la barra en un cañon de riel ideal a medida que varía con el tiempo

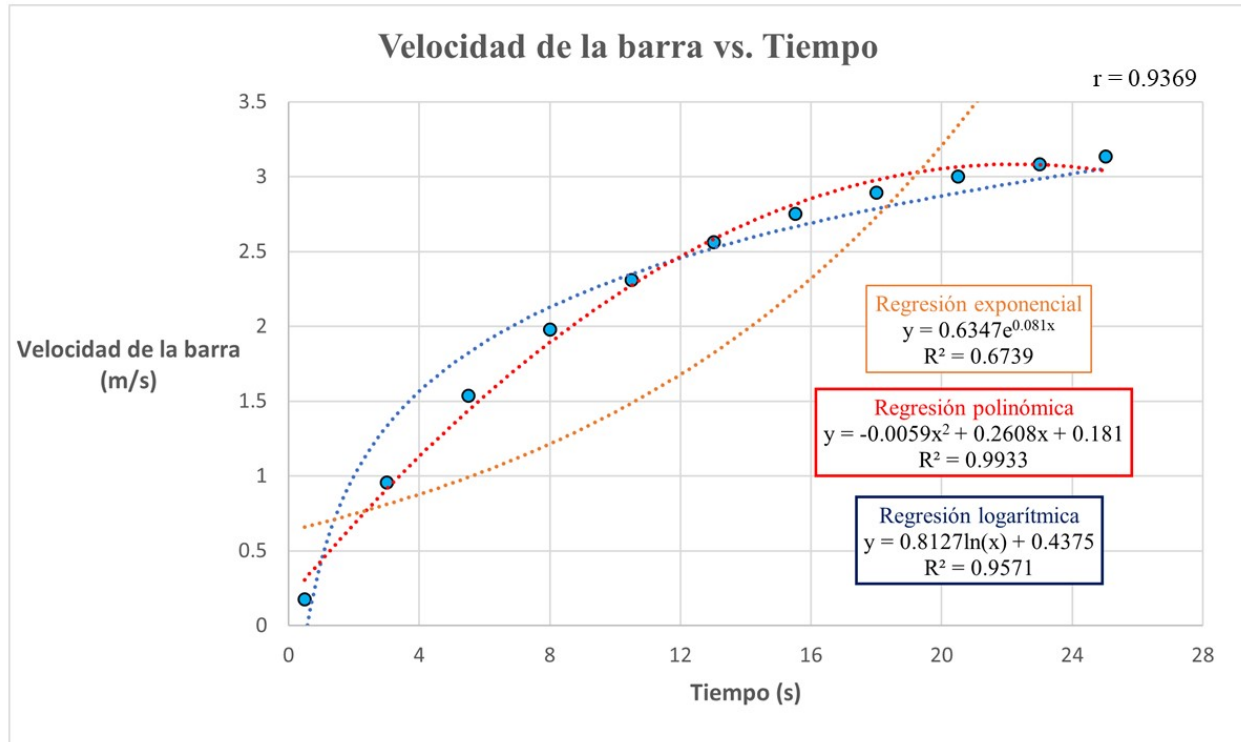


Figura 3: Interpretación del valor absoluto del coeficiente de correlación de Pearson (r) [4].

$r = 1$	correlación perfecta.
$0.8 < r < 1$	correlación muy alta
$0.6 < r < 0.8$	correlación alta
$0.4 < r < 0.6$	correlación moderada
$0.2 < r < 0.4$	correlación baja
$0 < r < 0.2$	correlación muy baja
$r = 0$	correlación nula

La interpretación del valor absoluto de la coeficiente de correlación de Pearson se aprecia en la figura 3, esta indica que conforme el valor de r más se acerque a 1, mejor sera la correlación entre las variables. Asimismo, se cumple que si $0 < r < 1$, la relación entre las variables es positiva, sin embargo, dado que $-1 < r < 0$, la relación entre las variables es negativa [4]. Por lo tanto, el r de

nuestras variables es de 0.09369 lo que indica, según la figura 3, que la correlación entre el tiempo y la velocidad de la barra es muy alta y positiva.

Con respecto al coeficiente de de determinación (R^2), esta indica como se ajustan los datos a la regresión en una escala del 0 al 1, 1 siendo que se ajustan perfectamente [5]. Por lo tanto, de las 3 regresiones, que según Excel mejor se ajustan a la data, la regresión polinómica de segundo grado presenta el R^2 mayor (0.9933), indicando que esta es la que mejor ajuste tiene. Después de esta sigue la regresión logarítmica (0.9571), la cual por una diferencia centesimal no se ajusta tan bien como la polinómica. Finalmente, la regresión exponencial es la que menos ajuste tiene de las 3 (0.6739). De esta manera, el programa de Excel nos indica que la relación entre el tiempo y la velocidad de la barra es cuadrática. Sin embargo, según la **ecuación 7**, la barra debe de alcanzar una velocidad terminal, en consecuencia, se debe descartar la regresión polinómica de segundo grado ya que el comportamiento de esta no aplicaría para valores extrapolados de la velocidad. De esta manera, se afirma que la relación entre el tiempo y la velocidad de la barra es logarítmica.

7. Conclusiones

Según el análisis de las regresiones de Excel para la data provista por el simulador de un cañon de riel ideal, la correlación entre el tiempo y la velocidad de la barra es muy alta y positiva, indicando una relación de **proporcionalidad directa** entre las dos variables. Asimismo, se pudo descartar la regresión polinómica para la relación entre las variables ya que esta no cumpliría el comportamiento deducido en la sección 2.4. Por lo que, también se concluyo que la relación entre el tiempo y la velocidad de la barra es **logarítmica** ya que este tiene el ajuste mas adecuado, validando nuestra hipótesis. Así, la función que mejor describe dicha relación, según Excel, es la siguiente:

$$v = 0.8127 \ln(t) + 0.4375$$

En forma de **discusión** del porque la regresión exponencial no se ajusto a la data como era de esperarse. Aunque la **ecuación 6**, usada para programar el simulador, claramente denota un comportamiento exponencial entre las variables, por lo que también se pudo atribuir un comportamiento logarítmico. Al parecer, este tipo de comportamiento exponencial excede las capacidades de Excel ya que, como se observa en la gráfica 1, los datos se comparten como una exponencial invertida y Excel solo pudo generar una regresión exponencial normal. De esta manera, se presenta una **limitación** en la metodología experimental por parte del programa, Excel.

Con respecto a las **incertidumbres**, estas fueron mínimas debido a la precisión que viene con trabajar con un simulador, por lo que las barras de error fueron insignificantes comparado a la escala

del gráfico 1. Sin embargo, con respecto a la **exactitud del trabajo**, una fuente de error sistemático se presenta en las suposiciones realizadas para el desarrollo teórico que llevo a la ecuación 6, la cual fue la guía para la programación del simulador. Factores, como ignorar fricción con los rieles y el aire, asumiendo el campo magnético es infinitamente constante, el no tomar en cuenta posibles deformaciones de los cuerpos y el asumir que los rieles tienen longitud infinita, hacen que el trabajo no sea exacto para un modelo realista. No obstante, se logro responder la pregunta de investigación al hallar la relación entre el tiempo y la velocidad de la barra en base a estas condiciones, es decir para el cañon de riel ideal que se propuso analizar.

A modo de **reflexión**, por más que el sistema haya sido ideal, este trabajo de investigación me enseñó mucho sobre la física detrás de un cañon de riel y a la vez sobre las distintas maneras que se puede usar el principio de inducción electromagnética. Con respecto a una posible **extensión** del trabajo, seria interesante analizar el sistema pero utilizando la ley de Biot Savart, así, establecer la relación entre el tiempo y la velocidad cuando el campo magnético de las corrientes ya no es constante.

Referencias

- [1] J. Stewart, D. Clegg y S. Watson, *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning, 2020.
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Pearson Education, 2014, ISBN: 9780321972101.
- [3] R. A. Serway y J. W. Jewett Jr., *Physics for scientists and engineers with modern physics*, 9th edition. Boston: Cengage Learning, 2014.
- [4] S. J. “La correlación de Pearson.” (2015), dirección: <https://statssos.online/2015/03/10/porque-linda-relacion-tienen-la-correlacion-de-pearson/>.
- [5] J. López. “Coeficiente de determinación (R cuadrado).” (2017), dirección: <https://economipedia.com/definiciones/r-cuadrado-coeficiente-determinacion.html#:~:text=Es%20importante%20saber%20que%20el,por%20tanto%2C%20menos%20fiable%20ser%C3%A1..>