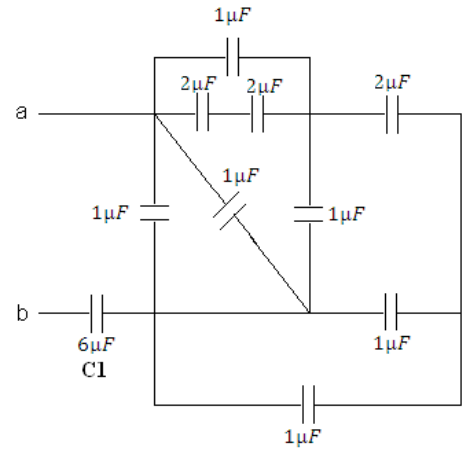


Hoja de Trabajo #6.
Capacitancia

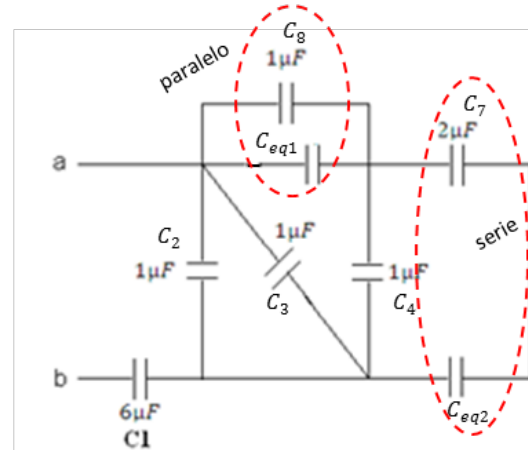
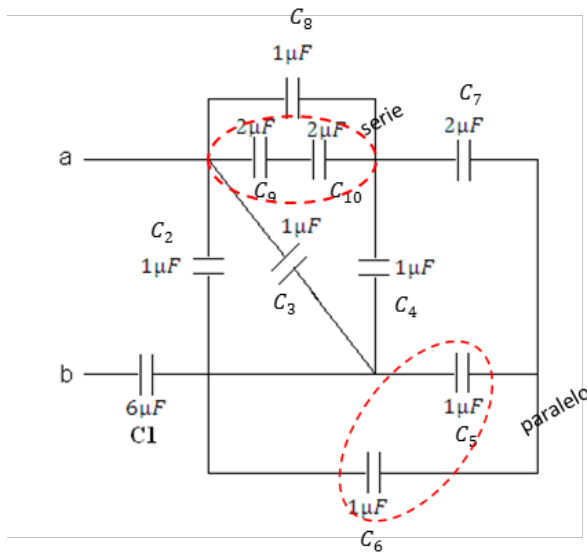
1. a) Encontrar la capacitancia equivalente del siguiente circuito entre las terminales a y b. b) Si entre los puntos a y b se aplica una diferencia de potencial de 10V, determine la diferencia de potencial en los bornes del capacitor uno (C_1). R:/a) $2\mu F$; b) $V = 3.33V$



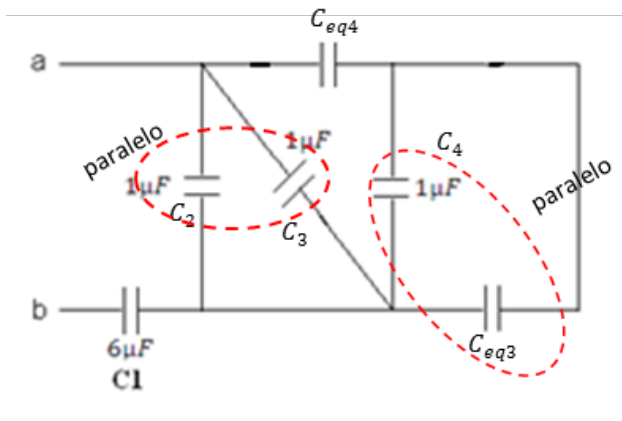
Solución. Empezaremos numerando los capacitores como se muestra en la figura. Observemos para hacer las primeras simplificaciones en el circuito que los capacitores 9 y 10 se encuentran en serie por lo que se pueden reducir por un capacitor equivalente al que denominaremos C_{eq1} :

$$C_{eq1} = \left(\frac{1}{2 \times 10^{-6}} + \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 1 \times 10^{-6} F$$

Asimismo, los capacitores 5 y 6 se encuentran en paralelo por lo que se pueden reemplazar por un capacitor de capacitancia:



$$C_{eq2} = C_5 + C_6 = 2\mu F$$



Observe también, que luego de redibujar el circuito el C_{eq2} está en serie con el capacitor 7:

$$C_{eq3} = \left(\frac{1}{2 \times 10^{-6}} + \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 1 \times 10^{-6} F$$

Asimismo, el capacitor C_{eq1} está en paralelo con el capacitor 8:

$$C_{eq4} = C_{eq1} + C_8 = 2\mu F$$

Continuando con las reducciones se tiene que C_{eq3} y C_4

están en paralelo.

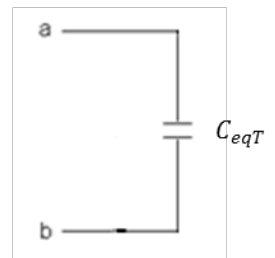
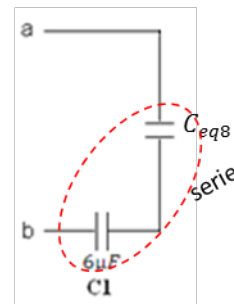
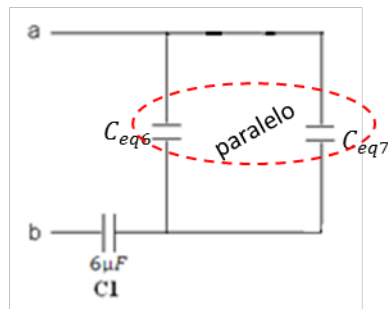
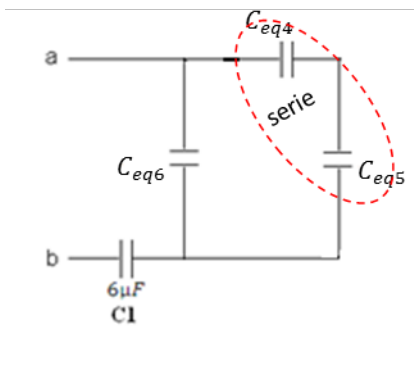
$$C_{eq5} = C_{eq3} + C_4 = 2\mu F$$

También el capacitor 3 y el capacitor 2 están en paralelo por lo que los podemos remplazar por un capacitor C_{eq6}

$$C_{eq6} = C_2 + C_3 = 2\mu F$$

De la reducción de C_{eq4} y C_{eq5} en serie:

$$C_{eq7} = \left(\frac{1}{C_{eq4}} + \frac{1}{C_{eq5}} \right)^{-1} = 1\mu F$$



Ahora C_{eq6} y C_{eq7} quedan en paralelo y al sustituirlos:

$$C_{eq8} = C_{eq6} + C_{eq7} = 3\mu F$$

Y finalmente C_{eq8} en serie con **C1** por lo que la capacitancia equivalente de la combinación es:

$$C_{eqT} = \left(\frac{1}{C_{eq8}} + \frac{1}{C_1} \right)^{-1} = 2\mu F$$

b) Si entre los puntos a y b se aplica una diferencia de potencial de 10V, determine la diferencia de potencial en los bornes del capacitor uno (C_1).

Si entre los bornes del capacitor equivalente se aplican 10 voltios la carga del capacitor equivalente es:

$$Q_{eqT} = V_{ab}(C_{eqT}) = 20\mu C$$

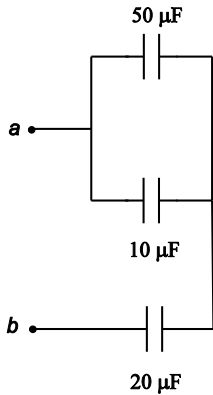
Como el capacitor equivalente total está reemplazando a una combinación en serie tiene la misma carga que los capacitores que reemplaza:

$$Q_{eqT} = Q_{eq8} = Q_1 = 20\mu C$$

Por lo que el voltaje en los bornes del capacitor uno es:

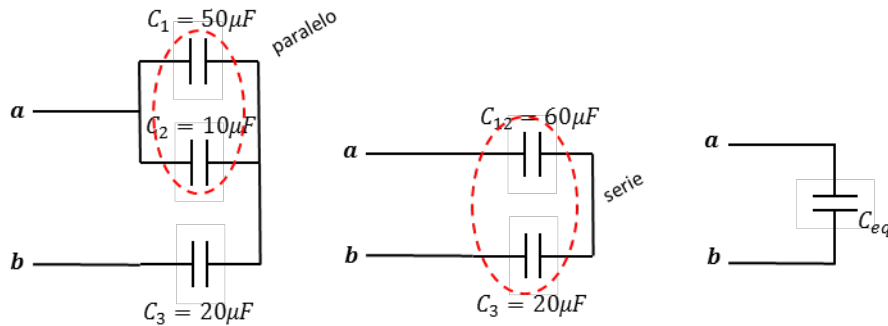
$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{20\mu C}{6\mu F} = 3.33V$$

2. ¿Cuál es la energía total almacenada en el grupo de capacitores mostrados en la figura si la diferencia de potencial V_{ab} es 50 V?



a. 48mJ	b. 27 mJ	c. 37 mJ	d. 19 mJ	e. 10mJ
---------	----------	----------	----------	---------

Solución. Para encontrar la energía almacenada en el conjunto de capacitores encontraremos la capacitancia equivalente de esta combinación y posteriormente la energía almacenada por el capacitor equivalente, que es la energía del conjunto de capacitores.



Empezaremos numerando los capacitores como se muestra en la figura. Observemos que C_1 y C_2 están en paralelo por lo que pueden ser sustituidos por un capacitor con capacitancia:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 60\mu F$$

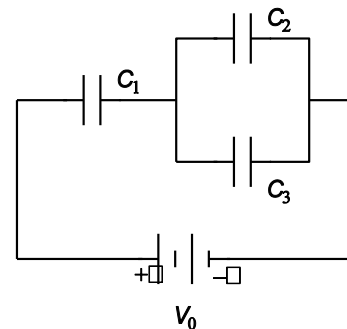
Después de realizar la reducción anterior, se tiene que C_{12} está en serie con el capacitor C_3 por lo cual la capacitancia equivalente de la combinación es:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{60 \times 10^{-6}} + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 15\mu F$$

Y la energía del conjunto de capacitores:

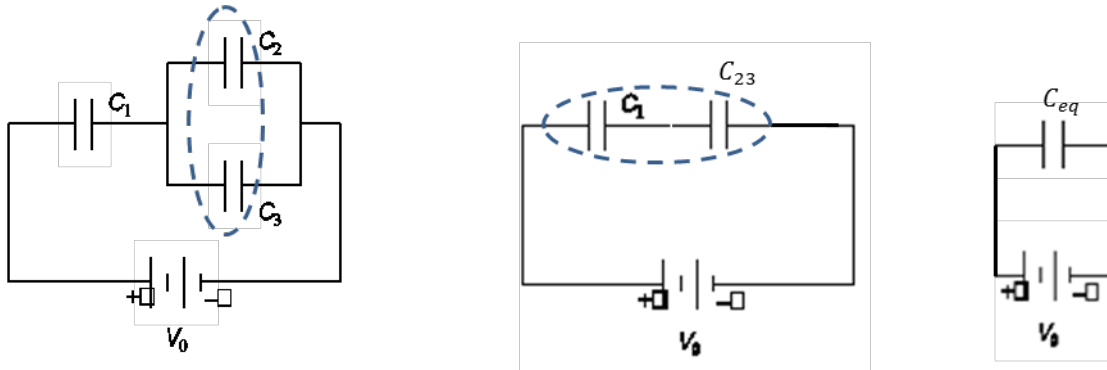
$$U_{sistema} = \frac{1}{2} C_{eq} \Delta V^2 = \frac{1}{2} (15 \times 10^{-6}) 50^2 = 19mJ$$

3. Determine la carga almacenada en C_1 cuando $C_1 = 20\mu F$; $C_2 = 10\mu F$; $C_3 = 30\mu F$; $V_0 = 18V$



a) 0.37mC	b) 0.24mC	c) 0.32mC	d) 0.40mC	e) 0.50mC
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Solución: Calcularemos la capacitancia equivalente del circuito y a partir de ésta analizaremos y encontraremos la carga del capacitor C_1



Observemos que C_2 y C_3 están en paralelo por lo que su capacitancia equivalente es:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 10\mu F + 30\mu F = 40\mu F$$

Asimismo, C_{23} está en serie con C_1 por lo que el capacitor equivalente de la combinación es:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20 \times 10^{-6}} + \frac{1}{40 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = \frac{40}{3} \mu F$$

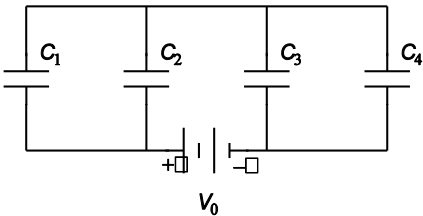
La carga de este capacitor equivalente es:

$$Q_{eq} = C_{eq} V_0 = \frac{40}{3} \times 10^{-6} (18) = 240 \mu C$$

Este capacitor sustituye a una combinación en serie, por lo que su carga es la misma que los capacitores que reemplaza:

$$Q_{eq} = Q_1 = Q_{23} = 240 \mu C$$

4. ¿Cuál es la energía almacenada en C_3 si $C_1 = 50 \mu F$; $C_2 = 30 \mu F$; $C_3 = 36 \mu F$; $C_4 = 12 \mu F$ y $V_0 = 30 V$?



- | | | | | |
|----------|---------|---------|----------|---------|
| a) 6.3mJ | b) 25mJ | c) 57mJ | d) 1.6mJ | e) 14mJ |
|----------|---------|---------|----------|---------|

Observemos que C_1 y C_2 están en paralelo:

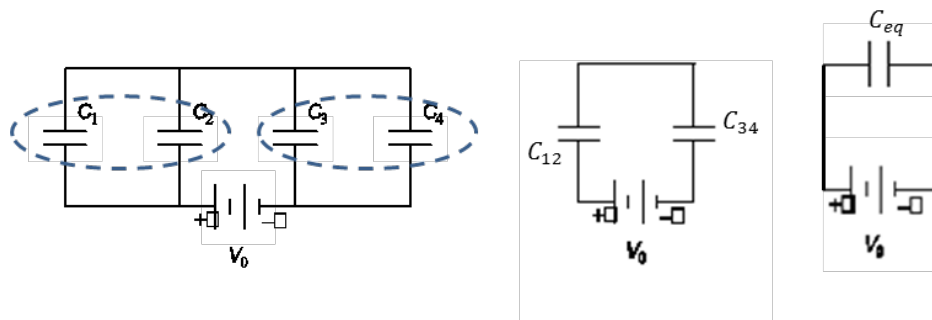
$$C_{12} = C_1 + C_2 = 80\mu F$$

Asimismo C_3 y C_4 están en paralelo:

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 48\mu F$$

Por ultimo C_{34} y C_{12} están en serie:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{34}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{80 \times 10^{-6}} + \frac{1}{48 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 30\mu F$$



La carga del capacitor equivalente es:

$$Q_{eq} = C_{eq} V_0 = 30 \times 10^{-6} (30) = 900 \mu C$$

Dado que el capacitor equivalente está sustituyendo a una combinación en serie:

$$Q_{eq} = Q_{12} = Q_{34}$$

Con la carga de C_{34} podremos calcular el voltaje de este capacitor:

$$V_{34} = \frac{Q_{34}}{C_{34}} = \frac{900 \mu C}{48 \mu F} = 18.75 V$$

Debido a que C_{34} reemplaza a una combinación en paralelo, su voltaje es el mismo que el C_3 y C_4 :

$$V_{34} = V_3 = V_4 = 18.75 V$$

Entonces la energía almacenada en C_3 es:

$$U_3 = \frac{1}{2} C_3 V_3^2 = \frac{1}{2} (36 \times 10^{-6}) (18.75)^2 = 6.33 mJ$$

5. Un capacitor de placas paralelas de $120 \mu F$ tiene placas de $120 cm^2$ y mica como dieléctrico $K=6.2$. El voltaje máximo que puede aplicarse al capacitor es 90V. Calcule: a) la resistencia dieléctrica de la mica. La carga inducida. R: $E_{max} = 1.64 \times 10^{10} V/m$ $Q_{ind} = 9.058 \times 10^{-3} C$

Solución. La capacitancia de un capacitor con dieléctrico es:

$$C = \frac{K \epsilon_0 A}{d}$$

Si de la ecuación anterior se despeja la distancia entre las placas se tiene:

$$d = \frac{K \epsilon_0 A}{C} = \frac{6.2 (8.85 \times 10^{-12}) (120 \times 10^{-4})}{120 \times 10^{-6}} = 5.487 \times 10^{-9} m$$

Entonces si la relación entre el voltaje y el campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas es:

$$\Delta V = E d$$

Entonces:

$$E = \frac{90}{5.487 \times 10^{-9}} = 1.64 \times 10^{10} V/m$$

Para calcular la carga inducida en el material dieléctrico, primero se calculará la carga en las placas del capacitor:

$$Q = CV = 120 \times 10^{-6}(90) = 0.0108C$$

Y la carga inducida:

$$Q_{ind} = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 0.0108 \left(1 - \frac{1}{6.2}\right) = 9.058 \times 10^{-3}C$$

6. Dos placas paralelas se cargan con la misma cantidad de carga pero opuesta en signo, $Q = 8.9 \times 10^{-7}C$; área de $0.01 \text{ metros cuadrados}$, el campo eléctrico en el material dieléctrico es $1.4 \times 10^6 \text{ V/m}$. Calcule el valor de K y la carga inducida en el dieléctrico. R: $K=7.18$ $Q_{ind} = 7.66 \times 10^{-7}C$

Solución. El campo eléctrico en un capacitor que posee un dieléctrico está dado por:

$$E = \frac{E_o}{K} = \frac{\sigma}{K\epsilon_o}$$

En la ecuación anterior E_o representa el valor del campo del capacitor si éste no tuviera dieléctrico, el cual está dado por la relación entre la densidad de carga de la placa del capacitor y la constante ϵ_o .

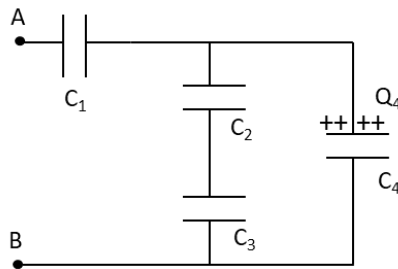
Despejando entonces la constante K de la ecuación anterior:

$$K = \frac{\sigma}{E\epsilon_o} = \frac{Q}{EA\epsilon_o} = \frac{8.9 \times 10^{-7}}{(1.4 \times 10^6)(0.01)(8.85 \times 10^{-12})} = 7.18$$

Y la carga inducida en el dieléctrico:

$$Q_{ind} = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 8.9 \times 10^{-7}C \left(1 - \frac{1}{7.18}\right) = 7.66 \times 10^{-7}C$$

7. Para el sistema de capacitores que se muestra en la figura adjunta, se sabe que el cuarto capacitor C_4 posee una carga $Q_4 = 50\mu C$; $C_1 = 5\mu F$, $C_2 = C_3 = C_4 = 10\mu F$.



La carga eléctrica que posee C_1 , en μC , está dada por:

a) 75	b) 90	c) 50	d) 30	e) NEC
-------	-------	-------	-------	--------

Solución.

A partir de la carga que posee el capacitor C_4 , calcularemos la diferencia de potencial entre sus terminales:

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{50\mu C}{10\mu F} = 5V$$

Se simplificará el circuito de la siguiente forma, se reducirá a un solo capacitor la combinación en serie de C2 y C3

$$C_{23} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = 5\mu F$$

Por estar en paralelo este capacitor con C4, se puede reducir a un solo capacitor

$$C_{234} = C_{23} + C_4 = 15\mu F$$

Este capacitor equivalente tiene el mismo voltaje que el capacitor C4 y que el capacitor C₂₃ por haber sustituido a una combinación en paralelo. $V_{234} = 5V$ y la carga de este capacitor es:

$$Q_{234} = V_{234}C_{234} = 75\mu C$$

Observe que al reducir los capacitores el capacitor C₂₃₄ queda en serie con el capacitor C1, por lo que deben tener la misma carga:

$$Q_1 = Q_{234} = 75\mu C$$

La diferencia de potencial entre los puntos A y B del sistema, en V, está dada por:

a) 20	b) 24	c) 15	d) 4	e) NEC
-------	-------	-------	------	--------

Solución.

Si el circuito se sigue simplificando se debe reducir el capacitor C₂₃₄ en serie con el capacitor C1, por lo que el capacitor equivalente de la combinación de capacitores es:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} \right)^{-1} = \frac{15}{4}\mu F$$

Este capacitor por reemplazar a la combinación en serie de C1 y C₂₃₄, tiene la misma carga que estos:

$$Q_{eq} = 75\mu C$$

Y su voltaje es la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

$$V_{eq} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{75\mu C}{\frac{15}{4}\mu F} = 20V$$

La energía almacenada en el capacitor C₃, en μJ , está dada por:

a) 6	b) 10	c) 31	d) 45	e) NEC
------	-------	-------	-------	--------

Solución.

Para calcular la energía del capacitor C3, encontraremos la carga del capacitor C₂₃ ya que por sustituir a una combinación en serie C2 y C3 tiene la misma carga:

$$Q_{23} = C_{23}V_{23} = 5\mu F * (5V) = 25\mu C$$

Entonces la energía de C3:

$$U_3 = \frac{Q_3^2}{2C_3} = \frac{(25 \times 10^{-6})^2}{2(10 \times 10^{-6})} = 3.125 \times 10^{-5} J$$

Se sabe que el cuarto capacitor está relleno con un dieléctrico con constante dieléctrica (permitividad relativa) $\kappa = 5$. La carga inducida en el dieléctrico, en μC , está dada por:

a) 24	b) 20	c) 48	d) 40	e) NEC
-------	-------	-------	-------	--------

Solución.

$$Q_{ind} = Q \left(1 - \frac{1}{K} \right) = 50 \times 10^{-6} C \left(1 - \frac{1}{5} \right) = 4 \times 10^{-5} C$$

Problema 8.

En el circuito que se muestra $\varepsilon = 10.0 \text{ V}$, $C_1 = 5.00 \mu\text{F}$, $C_2 = 2.00 \mu\text{F}$, $C_3 = 3.00 \mu\text{F}$, $C_4 = 4.00 \mu\text{F}$, $C_5 = 1.00 \mu\text{F}$

a) Calcular la capacitancia equivalente del circuito (en μF)

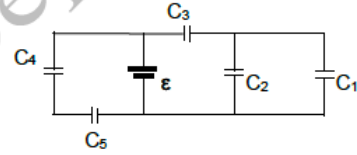
Respuesta: 2.90 tolerancia = ± 0.05

b) La carga en el capacitor C_5 es de: (en μC)

Respuesta: 8.00 tolerancia = ± 0.05

c) ¿Qué cantidad de energía almacena (en μJ) el capacitor C_1 ?

Respuesta: 22.5 tolerancia = ± 0.5



Solución. Observemos que C_1 y C_2 están en paralelo $C_{12} = 7\mu\text{F}$; C_4 y C_5 están en serie $C_{45} = 0.8 \mu\text{F}$.

Posteriormente C_3 en serie con C_{12} , por lo que $C_{123} = 2.1 \mu\text{F}$

Y finalmente C_{123} en paralelo con C_{45} por lo que la capacitancia equivalente es

$$C_{eq} = 2.1 \mu\text{F} + 0.8 \mu\text{F} = 2.9 \mu\text{F}$$

Para calcular la **carga de C_5** , observe que el voltaje aplicado al capacitor C_{45} es el de la fuente de voltaje, por lo que:

$$Q_{45} = C_{45} * V_{45} = (0.8\mu\text{F}) * 10 = 8\mu\text{C}$$

Para calcular la energía de C_1 , observe que el voltaje de la fuente es el que tiene aplicado el capacitor C_{123} , por lo que:

$$Q_{123} = C_{123} * V_{123} = (2.1\mu\text{F}) * 10 = 21\mu\text{C}$$

Debido a que C_{123} reemplaza a la combinación en serie C_3 y C_{12}

$$Q_{123} = Q_{12} = Q_3$$

Por lo que el voltaje en el capacitor C_{12} es:

$$V_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = \frac{21\mu\text{C}}{7\mu\text{F}} = 3\text{V}$$

Sin embargo $V_{12} = V_1 = V_2 = 1.4286 \text{ voltios}$

Entonces la energía de C_1 :

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = 22.5 \mu\text{J}$$

Problema 9.

Un capacitor C_1 de placas planas paralelas y aire en las placas, se coloca en serie con un capacitor C_2 , que tiene un área de 0.100 m^2 , una distancia de separación de placas de 1.00 mm y contiene un dieléctrico de constante 5.40. Si se desea una capacitancia equivalente de los capacitores de 2.75 nF .

a) ¿Qué tamaño de capacitor C_1 (en nF) deberá colocarse para mantener la relación de la capacitancia equivalente?

Respuesta: 6.50 tolerancia = ± 0.05

b) Si el voltaje en el capacitor C_1 es 8750 V , y la distancia de separación de placas 2.50 mm , cuál sería su densidad de energía (en J/m^3)

Respuesta: 54.2 tolerancia = ± 0.5

Solución. Se desea que $C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = 2.75 \text{ nF}$

$$C_2 = \frac{K\epsilon_0 A}{d} = \frac{5.4(8.85 \times 10^{-12})(0.1)}{0.001} = 4.78 \text{ nF}$$

Por lo que $C_1 = 6.48 \text{ nF}$

Para calcular la densidad de energía del capacitor C_1 , recordar que $V=Ed$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} (8.85 \times 10^{-12}) \left(\frac{8750}{0.0025} \right)^2 = 54.2 \text{ J/m}^3$$

Problema 10.

Problema 3.

a) El capacitor C_1 que se muestra la figura, tiene un área de 0.40 m^2 y una distancia de separación de placas de $1.00 \times 10^{-6} \text{ m}$. Se introduce un dieléctrico de constante 1.50 y se encuentra justo a la mitad del capacitor. En la otra mitad tiene aire, y cuya constante dieléctrica se asume es 1.00. ¿Cuál es la nueva capacitancia de C_1 ? (en μF)

Respuesta: 4.43 (08 puntos)

Ahora el capacitor C_2 se coloca en el circuito que se muestra. Los capacitores inicialmente están descargados, y se tienen los siguientes valores $C_2 = 5.00 \mu\text{F}$, el capacitor C_2 tiene una constante dieléctrica de 2.50, una distancia de separación de placas de $2 \times 10^{-7} \text{ m}$ y área de placas de 0.02 m^2 . Usar para el capacitor $C_1 = 6.50 \mu\text{F}$

b) Calcular la capacitancia equivalente del circuito (en μF)

Respuesta: 8 (07 puntos)

c) Se aplica un voltaje de 24V entre los puntos "a" y "b". ¿Cuánta energía (en mJ) almacena el sistema de capacitores?

Respuesta: 2.31 (05 puntos)

Solución. a)

$$A = 0.4 \text{ m}^2$$

$$d = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$K = 1.5$$

$$C_a = \frac{\epsilon_0 A/2}{d} = 1.77 \mu\text{F}$$

$$C_b = \frac{K_1 \epsilon_0 A/2}{d} = 2.655 \mu\text{F}$$

$$C_1 = C_a + C_b = 4.43 \mu\text{F}$$

b)

$$C_3 = 5 \mu\text{F}$$

$$C_1 = 6.5 \mu\text{F}$$

$$C_2 = \frac{(2.5)\epsilon_0(0.02)}{2 \times 10^{-7}}$$

$$C_2 = 2.2125 \mu\text{F}$$

$$C_{23} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = 1.534 \mu\text{F}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_{23} = 8.0 \mu\text{F}$$

c)

$$U_{eq} = \frac{1}{2} C_{eq} V^2$$

$$= \frac{1}{2} (8 \times 10^{-6}) (24)^2$$

$$= 2.31 \text{ mJ}$$