HOJA DE TRABAJO 4
POTENCIAL DE DISTRIBUCIONES DE CARGA

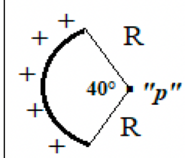
Problema 1.

a) Una varilla se dobla en forma de un segmento circular, la cual tiene una carga uniforme de densidad 4.0 nC/m, es colocada a lo largo del segmento circular mostrado, de radio ***R***. Cuál es el potencial eléctrico (en V) en el punto ***"p"*** (considere el potencial cero en el infinito) :

Respuesta: 25.13 tolerancia ± 0.03

b) Si en la varilla existiera en el punto ***"p"*** una relación de campo eléctrico de $E = 3\,x^2\ (i)$ (N/C) donde x esta metros, Si V=0 en X=0, calcular la diferencia de potencial $Va - Vb$ (en V) que existiría entre los puntos Xa = 2 m y Xb = 3 m

Respuesta: 19.00 tolerancia ± 0.01



Solución. Dividiremos la varilla en segmentos de arco de longitud dS, cada uno de los cuales tiene un diferencial de carga dq. La densidad lineal de carga de la varilla es $\lambda = 4nC/m$; por lo tanto dq=λdS=λR$d\theta$. Asimismo, la distancia r de cada uno de estos segmentos de arco al punto "p" es: $r = R$

Los diferenciales de potencial producidos por cada segmento de anillo están dados por:

$$dV = \frac{kdq}{r} = \frac{k\lambda dS}{R}$$

Integrando los diferenciales de potencial y tomando en cuenta que 40 grados corresponden a 2**π/**9, utilizando simetría:

$$V = \int dV = \int \frac{k\lambda dS}{R} = \frac{k\lambda}{R}\int R d\theta = 2k\lambda \int_0^{\pi/9} d\theta = 2(36)\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{9}\right) = 8\boldsymbol{\pi} = \mathbf{25.13V}$$

b) Si el campo eléctrico está dado por $\vec{E} = 3x^2\hat{\imath}$, entonces la diferencia de potencial entre los puntos Xa=2m y Xb=3m es:

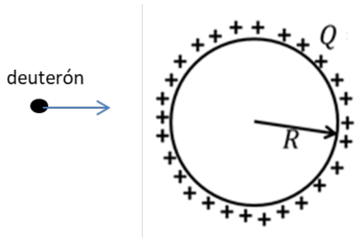
$$V_a - V_b = \int \vec{E}\cdot dl = \int_{x_a}^{x_b} E_x dx + \int_{y_a}^{y_b} E_y dy + \int_{z_a}^{z_b} E_z dz$$

Donde las ultimas integrales son cero ya que el campo no tiene componentes en "y" ni en "z":

$$V_a - V_b = \int \vec{E}\cdot dl = \int_2^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_2^3 = \boldsymbol{19V}$$

Problema 2. Un cascarón esférico conductor de radio $R = 10\ cm$ posee una carga $Q = +20\mu C$. El valor del potencial eléctrico en el centro del cascarón, en MV está dado por:

a)0.8	b)0.0	c)1.8	d)0.5	e)NEC



Solución: Por tratarse de una esfera conductora, el potencial electrico en el centro del cascarón es el mismo al que tiene en su superficie. Recuerde que el campo eléctrico en el interior del cascarón conductor es cero, por lo que todo el interior del conductor se encuentra al mismo potencial.

$$V = \frac{kq}{R} = \frac{9 \times 10^{9}(20 \times 10^{-6})}{0.1} = 180 \times 10^{4} V$$

Un deuterón ($m = 3.34 \times 10^{-27} kg \ y \ q = +1.6 \times 10^{-19} C$) posee una energía cinética de 45 KeV cuando se encuentra a una distancia $r = 0.5m$ del centro del cascarón y se dirige hacia el cascarón. La distancia mínima a la que se aproxima a la superficie del cascarón, en cm, está dada por:

a)44	b)50	c)24	d)34	e)NEC

Este problema lo resolveremos utilizando el principio de conservación de la energía mecánica. Se colocará un punto A, en el cual el deuterón tiene una energía cinética de $45KeV$ $(1eV = 1.6 \times 10^{-19}J)$ y el punto B, el punto de máximo acercamiento donde la energía cinética del deuterón es cero:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

Expresando la energía en términos del potencial eléctrico y conociendo que en punto de máximo acercamiento la rapidez es cero:

$$qV_A + K_A = qV_B$$

$$q\frac{kQ}{R_A} + 45 \times 10^3(1.6 \times 10^{-19}) = q\frac{kQ}{R_B}$$

Sustituyendo valores y despejando para R_B :

$$\frac{1.6 \times 10^{-19}(9 \times 10^9)(20 \times 10^{-6})}{0.5} + 45 \times 10^3(1.6 \times 10^{-19}) = \frac{1.6 \times 10^{-19}(9 \times 10^9)(20 \times 10^{-6})}{R_B}$$

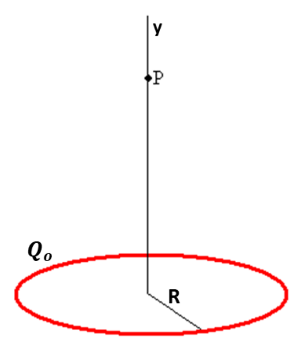
$$6.48 \times 10^{-14} = \frac{2.88 \times 10^{-14}}{R_B}$$

$$R_B = 0.44m$$

Por lo que la distancia medida desde la superficie será

$$d = R_B - 0.10 = 0.34m$$

Problema 3. Un aro circular delgado posee una carga uniformemente distribuida $Q_o = 5\mu C$ y su radio es $R = 10cm.$ El aro se encuentra en el plano xz con su eje sobre el eje "y". Un punto P se encuentra sobre el eje del aro en $y = 10cm.$ El potencial electrostático en el punto P, en kV, está dado por:



a)45.8	b)31.8	c)450	d)318.2	e)NEC

Solución: Dividiremos el anillo en segmentos de arco de longitud dS, cada uno de los cuales tiene un diferencial de carga dq. La densidad lineal de carga del anillo es $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$; por lo tanto dq=λdS. Asimismo, la distancia r de cada uno de estos segmentos de arco al punto localizado a una distancia $y = 0.1m$ del centro del anillo es: $r = ((R)^2 + (y)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R^2 + y^2}$.

Los diferenciales de potencial producidos por cada segmento de anillo están dados por:

$$dV = \frac{kdq}{r} = \frac{k\lambda dS}{\sqrt{R^2 + y^2}}$$

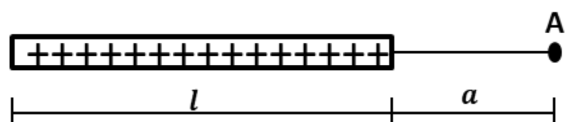
Integrando los diferenciales de potencial:

$$V=\int dV=\int \frac{k\lambda dS}{\sqrt{R^2+y^2}}=\frac{k\lambda}{\sqrt{R^2+y^2}}\int dS=\frac{k\lambda 2\pi R}{\sqrt{R^2+y^2}}$$

Sustituyendo el valor de λ:

$$V=\frac{kQ}{\sqrt{R^2+y^2}}=\frac{9\times10^9(5\times10^{-6})}{\sqrt{0.1^2+0.1^2}}=31.82\times10^4 V$$

Problema 4. Una línea de carga de longitud $l=0.50m$ posee una densidad lineal de carga $\lambda=5\mu C/m$. El punto A está localizado a una distancia $a=0.2m$ del extremo derecho y colineales con la línea de carga como se observa en la figura. Calcule el potencial eléctrico en A en kV/m.



22.54	36.49	56.37	11.25	NEC

Solución. Colocaremos la referencia x=0 en el extremo izquierdo de la varilla. Dividiremos la varilla en pequeños segmentos de longitud dx; cada uno de estos segmentos tiene una cantidad de carga $dq=\lambda dx$ y contribuye con un diferencial de potencial:

$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{k\lambda dx}{l+a-x}$$

Entonces el potencial a una distancia a a la derecha de la varilla es:

$$V=\int_0^l \frac{k\lambda dx}{l+a-x}=k\lambda\left(-\ln(l+a-x)\,\Big|_0^l\right)=k\lambda\ln\left[\frac{a+l}{a}\right]$$

Al sustituir valores:

$$V=9\times10^9*5\times10^{-6}\ln\,(0.7/0.2)=56{,}374.3\ V$$

Si el punto B está localizado a una distancia $2a$ del extremo de la varilla, es decir a una distancia a del punto A y se suelta del punto A un protón, su rapidez al pasar por B en $10^6\,\frac{m}{s}$ es:

10.47	3.74	2.36	1.95	NEC

Solución. Utilizando como referencia el resultado del potencial en el punto A, calcularemos el del punto B:

$$dV=\frac{kdq}{r}=\frac{k\lambda dx}{l+2a-x}$$

Entonces el potencial a una distancia a a la derecha de la varilla es:

$$V_B=\int_0^l \frac{k\lambda dx}{l+2a-x}=k\lambda\left(-\ln(l+2a-x)\,\Big|_0^l\right)=k\lambda\ln\left[\frac{2a+l}{2a}\right]$$

Al sustituir valores:

$$V_B=9\times10^9*5\times10^{-6}\ln\,(0.9/0.4)=\ 36{,}491.9V$$

Aplicando conservación de la energía mecánica entre los puntos A y B:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

Expresando la energía en términos del potencial eléctrico y conociendo que en punto A se suelta el protón, por lo que en este punto la rapidez es cero:

$$qV_A = qV_B + K_B$$

$$q(V_A - V_B) = \frac{1}{2} m_e v_B^2$$

Sustituyendo valores y despejando para la rapidez en B:

$$v_B = \sqrt{\frac{2(1.6 \times 10^{-19})(56{,}374.3 - 36{,}491.9)}{1.67 \times 10^{-27}}} = 1.951873 \times 10^6 \; m/s$$

Problema 5.

Una esfera conductora posee una carga inicial $q_1 = -15\mu C$ y su radio $R_1 = 5mm$; se encuentra aislada y muy lejos de una segunda esfera conductora que posee una carga inicial de $q_2 = +30\mu C$ y que tiene un radio $R_2 = 10mm$; dichas esferas son conectadas por un cable conductor.

¿Cuál es la carga que posee la esfera de radio R_1 después de conectar el alambre, en μC?

a) 10	b) -5	c) 5	d) -10	e) NEC

Solución. Después de conectarse con un cable conductor el potencial de las dos esferas se iguala, por lo cual:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{kq_{1f}}{R_1} = \frac{kq_{2f}}{R_2} \rightarrow \frac{q_{1f}}{R_1} = \frac{q_{2f}}{R_2}$$

Por el principio de conservación de la carga la carga total inicial $Q_o = Q_f$ entonces:

$$-15\mu C + 30\mu C = q_{1f} + q_{2f}$$

$$+15\mu C = q_{1f} + q_{2f}$$

$$q_{2f} = 15\mu C - q_{1f}$$

Sustituyendo la ecuación anterior:

$$\frac{q_{1f}}{R_1} = \frac{15 \times 10^{-6} - q_{1f}}{R_2}$$

$$\frac{R_2 q_{1f}}{R_1} = 15 \times 10^{-6} - q_{1f}$$

$$2q_{1f} = 15 \times 10^{-6} - q_{1f}$$

$$q_{1f} = 5\mu C$$

El potencial electrostático de la esfera de radio R_2, después de conectar el alambre en MV, es

a) -9	b) 9	c) 4.5	d) -4.5	e) NEC

Solución. El potencial electrostático de la esfera 2 después de conectarse es:

$$V_2 = \frac{kq_{2f}}{R_2} = \frac{9 \times 10^9 (10 \times 10^{-6})}{10 \times 10^{-3}} = 9MV$$

Problema 6.

Un punto A se localiza en (4.00,8.00) m y B en (10.0, −6.00) m y están en una región donde el campo eléctrico es uniforme y está dado por $\mathbf{E} = 15.0\ \mathbf{i}$ N/C. ¿Cuál es la diferencia de potencial (en Voltios) $V_A - V_B$=?

Respuesta: 90.0 tolerancia = ± 0.5

Solución. Este problema se trata de encontrar la diferencia de potencial a partir del campo eléctrico por lo que:

$$V_a - V_b = \int \vec{E}\cdot dl = \int_{x_a}^{x_b} E_x dx + \int_{y_a}^{y_b} E_y dy + \int_{z_a}^{z_b} E_z dz$$

Debido a que el campo eléctrico solamente tiene componentes en “x”, las últimas dos integrales se hacen cero y:

$$V_a - V_b = \int \vec{E}\cdot dl = \int_{4}^{10} 15dx = 15x \Big|_{4}^{10} = 90V$$

Problema 7.

2.1) El potencial eléctrico V en el espacio entre las placas de cierto tubo al vacío está dado por $V(x, y) = (3x^2 + 2y^2)$, donde V en voltios y (x, y) está en m. El campo eléctrico en (V/m) en la dirección “x” (E_x=?) en el punto x = 2 m y y = 1 m está dado por

a) 14 (+ i) b) 12 (− i) c) 12 (+ i) d) 14 (− i) e) NEC

Solución. Este problema se trata de encontrar el campo eléctrico a partir del potencial por lo que utilizaremos la función gradiente para encontrar la componente en “x” de campo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(6x)\hat{\imath} = -6x\hat{\imath}$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -(4y)\hat{\jmath} = -4y\hat{\jmath}$$

Entonces en la región el campo está dado por:

$$\vec{E} = -6x\hat{\imath} - 4y\hat{\jmath}$$

Para el punto x=2m y y=1m, la componenten en “x” del campo es:

$$E_x = -6(2)\hat{\imath} = -12i\ N/C$$

Problema 8.

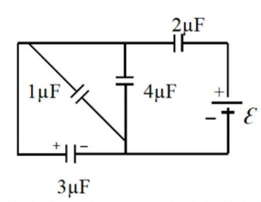
El circuito que se muestra en la figura se conecta a una fem $\mathcal{E}$. Se mide el voltaje en el capacitor de 3μF y es 2V con la polaridad indicada. Calcular:

a) La energía (en μJ) que almacena el capacitor 2μF

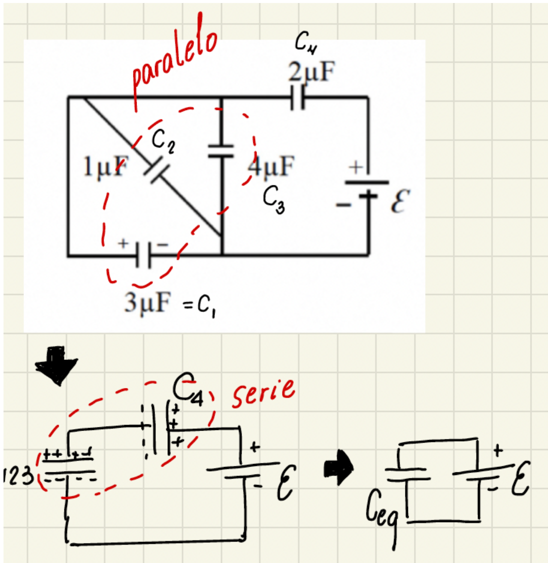
Respuesta : 64.00 tolerancia ± 0.01

b) El valor de fem $\mathcal{E}$ (en V)

Respuesta : 10.00 tolerancia ± 0.01



Solución. Empezaremos por enumerar los capacitores y observar que C1, C2 y C3 se encuentran en paralelo.



Debido a que están en paralelo tienen el mismo voltaje.

El capacitor C_{123} queda en serie con C_4 y de esta forma se puede calcular la capacitancia equivalente.

Debido a que el C_{123} queda en serie con C_4 tienen la misma carga.

C_1, C_2, C_3 están en paralelo

$$C_{123} = C_1 + C_2 + C_3 = 8\mu F$$

$$V_{123} = V_1 = V_2 = V_3 = 2V$$

$$Q_{123} = C_{123} V_{123} = 16\mu C$$

$$Q_{123} = Q_4 = 16\mu C$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{16\mu C}{2\mu F} = 8V$$

$$U_4 = \frac{1}{2} C_4 V_4^2 = \frac{1}{2}(2\times 10^{-6})(8)^2 = \underline{64\mu J}$$

El voltaje de la fuente se puede observar que es el voltaje del capacitor equivalente.

También se puede calcular el voltaje de la fuente sumando los voltajes del capacitor C_{123} y el C_4.

$$\mathcal{E} = V_{123} + V_4$$

$$\mathcal{E} = 2 + 8 = 10V$$

$$\mathcal{E} = V_{eq}$$

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_{123}}\right)^{-1} = \frac{8}{5}\mu F$$

$$V_{eq} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{16\mu C}{8/5\ \mu F} = 10V$$