

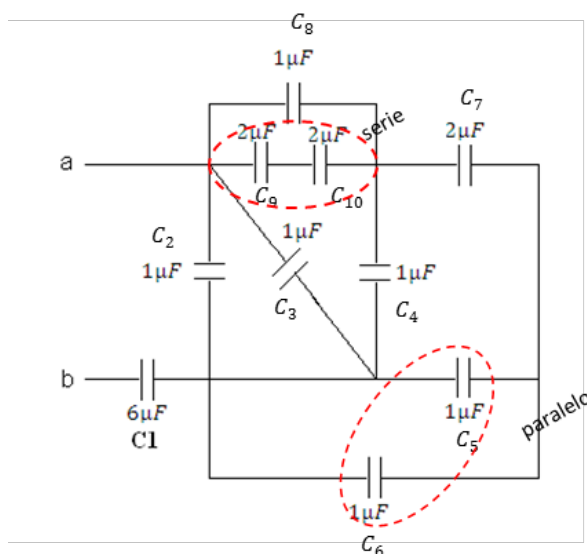
Hoja de Trabajo #5
Capacitancia

1. a) Encontrar la capacitancia equivalente del siguiente circuito entre las terminales a y b. b) Si entre los puntos a y b se aplica una diferencia de potencial de 10V, determine la diferencia de potencial en los bornes del capacitor uno (C_1). R:/a) $2\mu F$; b) $V = 3.33V$

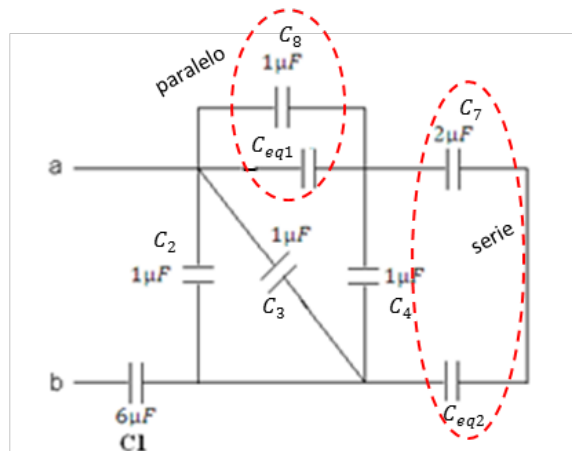
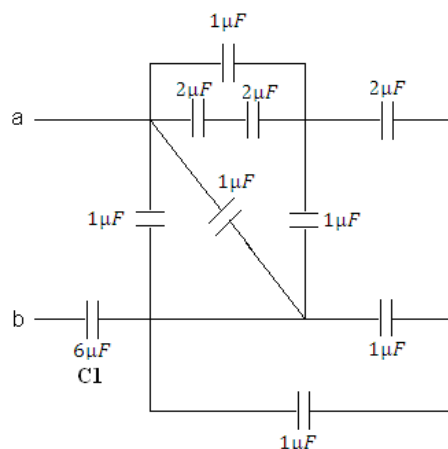
Solución. Empezaremos numerando los capacitores como se muestra en la figura. Observemos para hacer las primeras simplificaciones en el circuito que los capacitores 9 y 10 se encuentran en serie por lo que se pueden reducir por un capacitor equivalente al que denominaremos C_{eq1} :

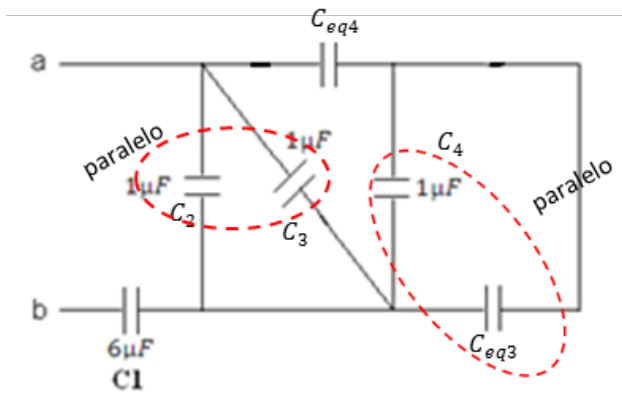
$$C_{eq1} = \left(\frac{1}{2 \times 10^{-6}} + \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 1 \times 10^{-6} F$$

Asimismo, los capacitores 5 y 6 se encuentran en paralelo por lo que se pueden remplazar por un capacitor de capacitancia:



$$C_{eq2} = C_5 + C_6 = 2\mu F$$





Observe también, que luego de redibujar el circuito el C_{eq2} está en serie con el capacitor 7:

$$C_{eq3} = \left(\frac{1}{2 \times 10^{-6}} + \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 1 \times 10^{-6} F$$

Asimismo, el capacitor C_{eq1} está en paralelo con el capacitor 8:

$$C_{eq4} = C_{eq1} + C_8 = 2\mu F$$

Continuando con las reducciones se tiene que C_{eq3} y C_4

están en paralelo.

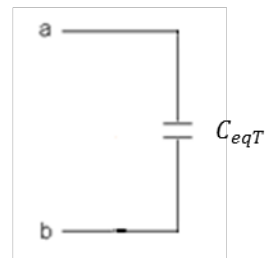
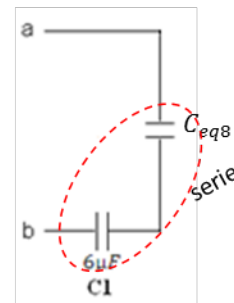
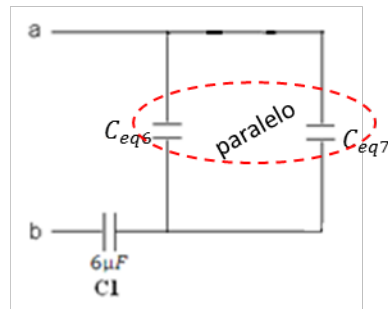
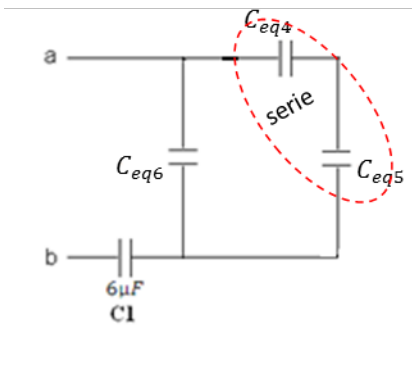
$$C_{eq5} = C_{eq3} + C_4 = 2\mu F$$

También el capacitor 3 y el capacitor 2 están en paralelo por lo que los podemos remplazar por un capacitor C_{eq6}

$$C_{eq6} = C_2 + C_3 = 2\mu F$$

De la reducción de C_{eq4} y C_{eq5} en serie:

$$C_{eq7} = \left(\frac{1}{C_{eq4}} + \frac{1}{C_{eq5}} \right)^{-1} = 1\mu F$$



Ahora C_{eq6} y C_{eq7} quedan en paralelo y al sustituirlos:

$$C_{eq8} = C_{eq6} + C_{eq7} = 3\mu F$$

Y finalmente C_{eq8} en serie con **C1** por lo que la capacitancia equivalente de la combinación es:

$$C_{eqT} = \left(\frac{1}{C_{eq8}} + \frac{1}{C_1} \right)^{-1} = 2\mu F$$

b) Si entre los puntos a y b se aplica una diferencia de potencial de 10V, determine la diferencia de potencial en los bornes del capacitor uno (C_1).

Si entre los bornes del capacitor equivalente se aplican 10 voltios la carga del capacitor equivalente es:

$$Q_{eqT} = V_{ab}(C_{eqT}) = 20\mu C$$

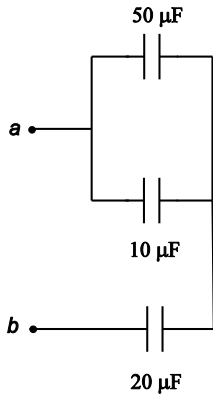
Como el capacitor equivalente total está remplazando a una combinación en serie tiene la misma carga que los capacitores que remplaza:

$$Q_{eqT} = Q_{eq8} = Q_1 = 20\mu C$$

Por lo que el voltaje en los bornes del capacitor uno es:

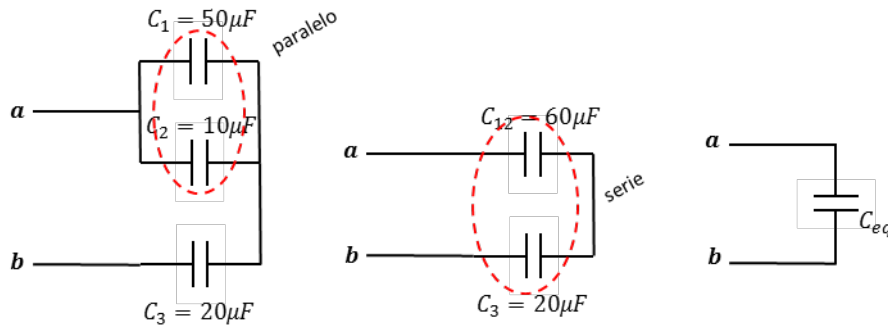
$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{20\mu C}{6\mu F} = 3.33V$$

2. ¿Cuál es la energía total almacenada en el grupo de capacitores mostrados en la figura si la diferencia de potencial V_{ab} es 50 V?



a. 48mJ	b. 27 mJ	c. 37 mJ	d. 19 mJ	e. 10mJ
---------	----------	----------	----------	---------

Solución. Para encontrar la energía almacenada en el conjunto de capacitores encontraremos la capacitancia equivalente de esta combinación y posteriormente la energía almacenada por el capacitor equivalente, que es la energía del conjunto de capacitores.



Empezaremos numerando los capacitores como se muestra en la figura. Observemos que C_1 y C_2 están en paralelo por lo que pueden ser sustituidos por un capacitor con capacitancia:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 60\mu F$$

Después de realizar la reducción anterior, se tiene que C_{12} está en serie con el capacitor C_3 por lo cual la capacitancia equivalente de la combinación es:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{60 \times 10^{-6}} + \frac{1}{20 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 15\mu F$$

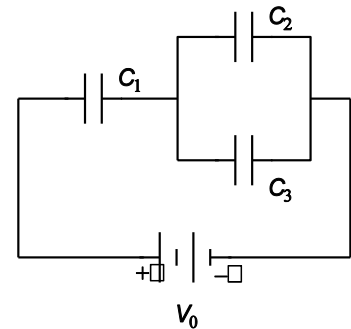
Y la energía del conjunto de capacitores:

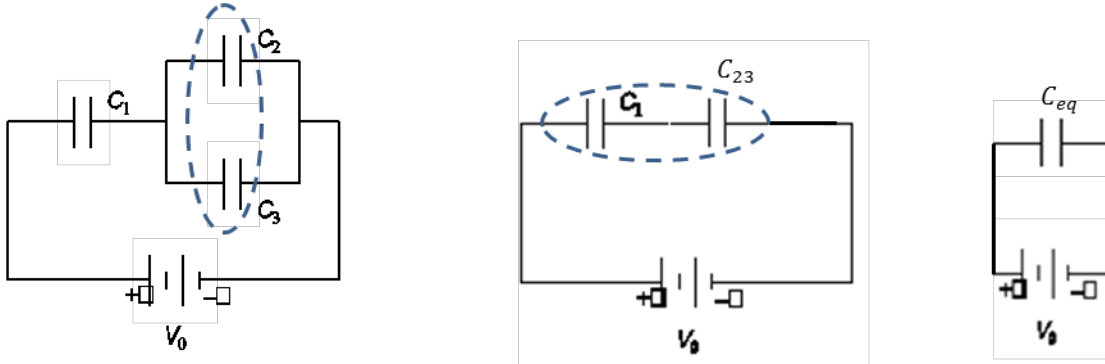
$$U_{sistema} = \frac{1}{2} C_{eq} \Delta V^2 = \frac{1}{2} (15 \times 10^{-6}) 50^2 = 19mJ$$

3. Determine la carga almacenada en C_1 cuando $C_1 = 20\mu F$; $C_2 = 10\mu F$; $C_3 = 30\mu F$; $V_0 = 18V$

a) 0.37mC	b) 0.24mC	c) 0.32mC	d) 0.40mC	e) 0.50mC
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Solución: Calcularemos la capacitancia equivalente del circuito y a partir de ésta analizaremos y encontraremos la carga del capacitor C_1





Observemos que C_2 y C_3 están en paralelo por lo que su capacitancia equivalente es:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 10\mu F + 30\mu F = 40\mu F$$

Asimismo, C_{23} está en serie con C_1 por lo que el capacitor equivalente de la combinación es:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{20 \times 10^{-6}} + \frac{1}{40 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = \frac{40}{3} \mu F$$

La carga de este capacitor equivalente es:

$$Q_{eq} = C_{eq} V_0 = \frac{40}{3} \times 10^{-6} (18) = 240 \mu C$$

Este capacitor sustituye a una combinación en serie, por lo que su carga es la misma que los capacitores que reemplaza:

$$Q_{eq} = Q_1 = Q_{23} = 240 \mu C$$

4. ¿Cuál es la energía almacenada en C_3 si $C_1 = 50 \mu F$; $C_2 = 30 \mu F$; $C_3 = 36 \mu F$; $C_4 = 12 \mu F$ y $V_0 = 30 V$?

a) 6.3mJ	b) 25mJ	c) 57mJ	d) 1.6mJ	e) 14mJ
----------	---------	---------	----------	---------

Solución: Reduciremos el circuito a un solo capacitor equivalente y posteriormente analizaremos la energía almacenada en C_3 . Observemos que C_1 y C_2 están en paralelo:

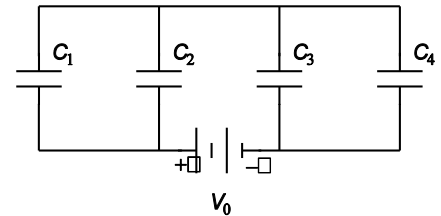
$$C_{12} = C_1 + C_2 = 80 \mu F$$

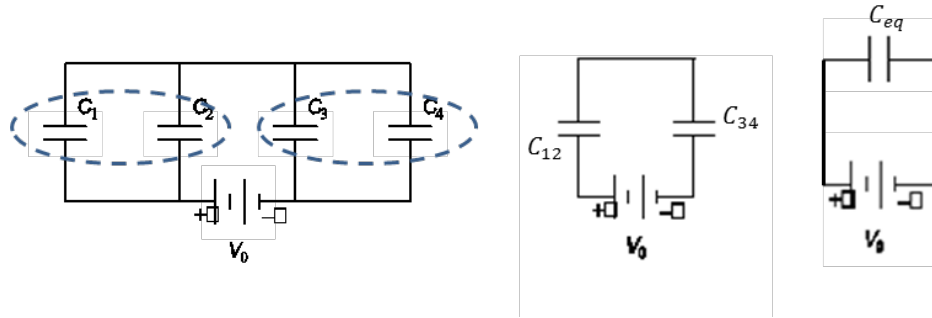
Asimismo C_3 y C_4 están en paralelo:

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 48 \mu F$$

Por ultimo C_{34} y C_{12} están en **serie**:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{34}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{80 \times 10^{-6}} + \frac{1}{48 \times 10^{-6}} \right)^{-1} = 30 \mu F$$





La carga del capacitor equivalente es:

$$Q_{eq} = C_{eq} V_0 = 30 \times 10^{-6} (30) = 900 \mu C$$

Dado que el capacitor equivalente está sustituyendo a una combinación en serie:

$$Q_{eq} = Q_{12} = Q_{34}$$

Con la carga de C_{34} podremos calcular el voltaje de este capacitor:

$$V_{34} = \frac{Q_{34}}{C_{34}} = \frac{900 \mu C}{48 \mu F} = 18.75 V$$

Debido a que C_{34} reemplaza a una combinación en paralelo, su voltaje es el mismo que el C_3 y C_4 :

$$V_{34} = V_3 = V_4 = 18.75 V$$

Entonces la energía almacenada en C_3 es:

$$U_3 = \frac{1}{2} C_3 V_3^2 = \frac{1}{2} (36 \times 10^{-6}) (18.75)^2 = 6.33 mJ$$

5. Un capacitor de placas paralelas de $120 \mu F$ tiene placas de $120 cm^2$ y mica como dieléctrico $K=6.2$. El voltaje máximo que puede aplicarse al capacitor es 90V. Calcule: a) la resistencia dieléctrica de la mica. La carga inducida. R: $E_{max} = 1.64 \times 10^{10} V/m$ $Q_{ind} = 9.058 \times 10^{-3} C$

Solución. La capacitancia de un capacitor con dieléctrico es:

$$C = \frac{K \epsilon_0 A}{d}$$

Si de la ecuación anterior se despeja la distancia entre las placas se tiene:

$$d = \frac{K \epsilon_0 A}{C} = \frac{6.2 (8.85 \times 10^{-12}) (120 \times 10^{-4})}{120 \times 10^{-6}} = 5.487 \times 10^{-9} m$$

Entonces si la relación entre el voltaje y el campo eléctrico en un capacitor de placas paralelas es:

$$\Delta V = E d$$

Entonces:

$$E = \frac{90}{5.487 \times 10^{-9}} = 1.64 \times 10^{10} V/m$$

Para calcular la carga inducida en el material dieléctrico, primero se calculará la carga en las placas del capacitor:

$$Q = CV = 120 \times 10^{-6}(90) = 0.0108C$$

Y la carga inducida:

$$Q_{ind} = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 0.0108 \left(1 - \frac{1}{6.2}\right) = 9.058 \times 10^{-3}C$$

6. Dos placas paralelas de área $0.01m^2$ se cargan con la misma cantidad de carga pero opuesta en signo, $Q = 8.9 \times 10^{-7}C$; el campo eléctrico en el material dieléctrico es 1.4×10^6 V/m. Calcule el valor de K y la carga inducida en el dieléctrico. R: $K=7.18$ $Q_{ind} = 7.66 \times 10^{-7}C$

Solución. El campo eléctrico en un capacitor que posee un dieléctrico está dado por:

$$E = \frac{E_o}{K} = \frac{\sigma}{K\epsilon_o}$$

En la ecuación anterior E_o representa el valor del campo del capacitor si éste no tuviera dieléctrico, el cual está dado por la relación entre la densidad de carga de la placa del capacitor y la constante ϵ_o .

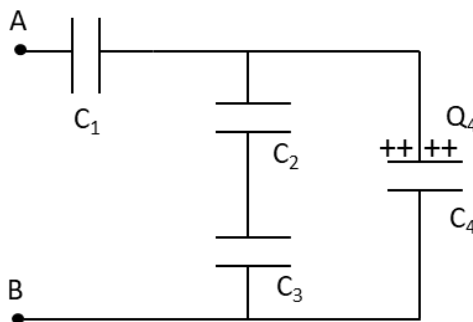
Despejando entonces la constante K de la ecuación anterior:

$$K = \frac{\sigma}{E\epsilon_o} = \frac{Q}{EA\epsilon_o} = \frac{8.9 \times 10^{-7}}{(1.4 \times 10^6)(0.01)(8.85 \times 10^{-12})} = 7.18$$

Y la carga inducida en el dieléctrico:

$$Q_{ind} = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 8.9 \times 10^{-7}C \left(1 - \frac{1}{7.18}\right) = 7.66 \times 10^{-7}C$$

7. Para el sistema de capacitores que se muestra en la figura adjunta, se sabe que el cuarto capacitor C_4 posee una carga $Q_4 = 50\mu C$; $C_1 = 5\mu F$, $C_2 = C_3 = C_4 = 10\mu F$.



La carga eléctrica que posee C_1 , en μC , está dada por:

a) 75	b) 90	c) 50	d) 30	e) NEC
-------	-------	-------	-------	--------

Solución.

A partir de la carga que posee el capacitor C4, calcularemos la diferencia de potencial entre sus terminales:

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{50\mu C}{10\mu F} = 5V$$

Se simplificará el circuito de la siguiente forma, se reducirá a un solo capacitor la combinación en serie de C2 y C3

$$C_{23} = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1} = 5\mu F$$

Por estar en paralelo este capacitor con C4, se puede reducir a un solo capacitor

$$C_{234} = C_{23} + C_4 = 15\mu F$$

Este capacitor equivalente tiene el mismo voltaje que el capacitor C4 y que el capacitor C23 por haber sustituido a una combinación en paralelo. $V_{234} = 5V$ y la carga de este capacitor es:

$$Q_{234} = V_{234}C_{234} = 75\mu C$$

Observe que al reducir los capacitores el capacitor C_{234} queda en serie con el capacitor C1, por lo que deben tener la misma carga:

$$Q_1 = Q_{234} = 75\mu C$$

La diferencia de potencial entre los puntos A y B del sistema, en V, está dada por:

a) 20	b) 24	c) 15	d) 4	e) NEC
-------	-------	-------	------	--------

Solución.

Si el circuito se sigue simplificando se debe reducir el capacitor C_{234} en serie con el capacitor C1, por lo que el capacitor equivalente de la combinación de capacitores es:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} \right)^{-1} = \frac{15}{4}\mu F$$

Este capacitor por reemplazar a la combinación en serie de C1 y C_{234} , tiene la misma carga que estos:

$$Q_{eq} = 75\mu C$$

Y su voltaje es la diferencia de potencial entre los puntos A y B.

$$V_{eq} = \frac{Q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{75\mu C}{\frac{15}{4}\mu F} = 20V$$

La energía almacenada en el capacitor C_3 , en μJ , está dada por:

a) 6	b) 10	c) 31	d) 45	e) NEC
------	-------	-------	-------	--------

Solución.

Para calcular la energía del capacitor C3, encontraremos la carga del capacitor C_{23} ya que por sustituir a una combinación en serie C2 y C3 tiene la misma carga:

$$Q_{23} = C_{23}V_{23} = 5\mu F * (5V) = 25\mu C$$

Entonces la energía de C3:

$$U_3 = \frac{Q_3^2}{2C_3} = \frac{(25 \times 10^{-6})^2}{2(10 \times 10^{-6})} = 3.125 \times 10^{-5} J$$

Se sabe que el cuarto capacitor está relleno con un dieléctrico con constante dieléctrica (permitividad relativa) $\kappa = 5$. La carga inducida en el dieléctrico, en μC , está dada por:

a) 24	b) 20	c) 48	d) 40	e) NEC
-------	-------	-------	-------	--------

Solución.

$$Q_{ind} = Q \left(1 - \frac{1}{K}\right) = 50 \times 10^{-6} C \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 \times 10^{-5} C$$

8. Un capacitor de placas paralelas se encuentra conectado a una fuente de voltaje $V_o = 30V$, dicha fuente en ningún momento se desconecta del capacitor. El espacio entre las placas se encuentra vacío. El valor del área de las placas es $100cm^2$ y la separación entre las placas es $d = 0.5mm$. El valor de la carga que aparece en las placas del capacitor, en nC , está dada por:

a) 10.62	b) 1.77	c) 3.54	d) 5.31	e) NEC
----------	---------	---------	---------	--------

Solución. Primero se encontrará la capacitancia del capacitor:

$$C = \frac{\epsilon_o A}{d} = \frac{8.85 \times 10^{-12} (100 \times 10^{-4})}{0.0005} = 1.77 \times 10^{-10} F$$

Por lo tanto la carga que aparece es:

$$Q = CV = (1.77 \times 10^{-10})(30) = 5.31nC$$

Se introduce un material dieléctrico que llena completamente el capacitor, su constante dieléctrica es $K = 4$, cuánta carga extra, en nC , debe proporcionar la fuente para que el campo eléctrico en el interior se mantenga constante.

a) 15.93	b) 21.24	c) 0.214	d) 10.62	e) NEC
----------	----------	----------	----------	--------

Solución. Antes de insertar el dieléctrico el campo eléctrico es:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{30}{0.0005} = 60kV$$

El campo eléctrico en un capacitor con dieléctrico está dado por:

$$E_f = \frac{\sigma}{K\epsilon_o} = \frac{Q}{K\epsilon_o A}$$

Por lo que si se requiere mantener la intensidad del campo eléctrico ($E = E_f$) la carga que deben tener las placas es:

$$Q = E_f K \epsilon_o A = (60000)(4)(8.85 \times 10^{-12})(100 \times 10^{-4}) = 21.24nC$$

Por lo que la carga extra será: $21.24nC - 5.31nC = 15.93nC$

Si la rigidez dieléctrica del material dieléctrico es $6 \times 10^7 V/m$, el potencial de ruptura del capacitor en kV , está dado por:

a) 0	b) 15	c) 40	d) 30	e) NEC
------	-------	-------	-------	--------

Solucion. $V_{max} = E_{max}d = 6 \times 10^7 (0.0005) = 30kV$