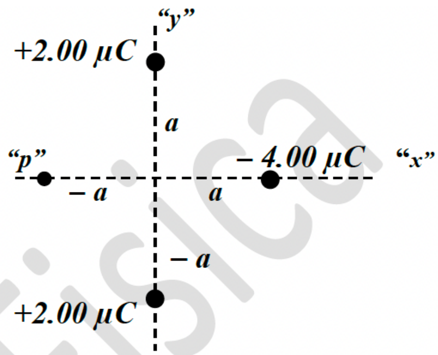
Hoja de Trabajo No.1 - SOLUCIÓN
Fuerza y Campo Eléctrico

Problema 1. (Este problema tiene solamente los incisos a y d)

Tres partículas cargadas están colocadas sobre el eje de coordenadas ***"x-y"*** como la figura, con ***a*** = 20.0 cm

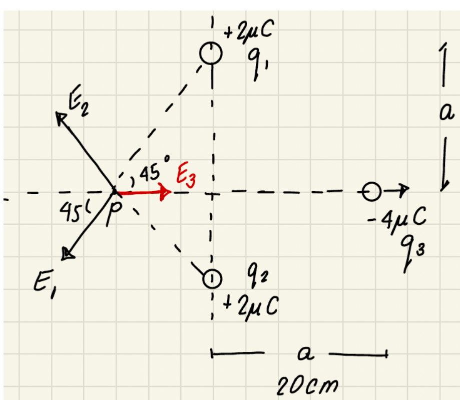
a) Calcular la magnitud del campo eléctrico resultante (en kN/C) en el punto ***"p"***

Respuesta: 93.3 tolerancia = ± 0.5



Solución. El campo eléctrico en P, es la suma vectorial del campo eléctrico debido a q_1, q_2 y q_3:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$



De la simetría del problema se puede observar que las componentes en "y" de $\vec{E}_1$ y de $\vec{E}_2$ se cancelan y que $\vec{E}_{1x}$ es igual a $\vec{E}_{2x}$, por lo que:

$$\vec{E}_p = 2\vec{E}_{1x} + \vec{E}_3$$

En donde:

$$\vec{E}_3 = \frac{k|q_3|}{r_3^2}(\hat{\imath}) = \frac{9\times10^9(4\times10^{-6})}{(0.4)^2}(\hat{\imath}) = 225000(\hat{\imath})$$

Y considerando que $r_1 = \sqrt{2}a$ y $\theta = \tan^{-1} a/a = 45°$, la componente en "x" de $\vec{E}_1$ es:

$$\vec{E}_{1x} = \frac{k|q_1|}{r_1^2}\cos\theta\,(-\hat{\imath}) = \frac{9\times10^9(2\times10^{-6})}{2a^2}\cos 45\,(-\hat{\imath})$$

$$2\vec{E}_{1x} = 2\,\frac{9\times10^9(2\times10^{-6})}{2a^2}\cos 45\,(-\hat{\imath}) = 318{,}198.05(-\hat{\imath})$$

Por lo que el campo eléctrico en el punto P es:

$$\vec{E}_p = -93{,}198.05N(\hat{\imath})$$

$$\left|E_p\right| = 93.2\ kN/C$$

d) Calcular la fuerza en magnitud (en N) sobre una carga $\boldsymbol{Q}$ = – 15.0 μC que sería colocada en el punto ***"p"***

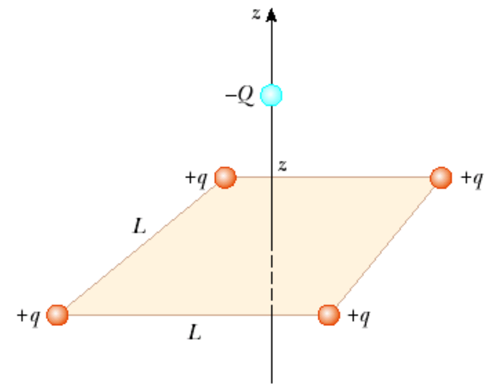
Respuesta: 1.40 tolerancia = ± 0.05

Solución. La fuerza sobre la carga Q, debido a que esta es negativa es en dirección contraria al campo y está dada por:

$$\vec{F} = Q\vec{E}_p = (15 \times 10^{-6})(93{,}198.05) = +1.40(i)$$

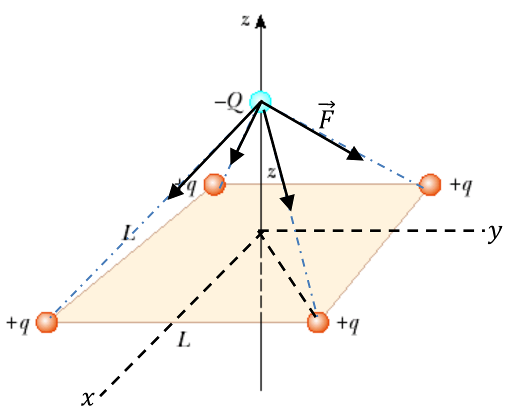
Problema 2.

Para el sistema de cargas que se muestra en la figura, calcule la fuerza eléctrica (magnitud y dirección) que experimenta la carga $-Q$:



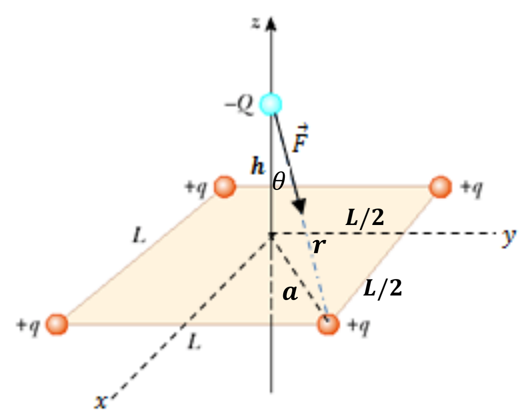
$$\vec{F}_R = 4\frac{kqQh}{\left(h^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}}\,(-\hat{k})$$

Solución la fuerza electrostática que experimenta la carga de $-Q$ es la suma vectorial de las fuerzas que ejercen sobre ésta cada una de las cargas +q. Dibujaremos las fuerzas y analizaremos la simetría del problema: observe que los cuatro vectores de fuerza tiene la misma magnitud, ya que las cargas son de igual magnitud y se encuentran a la misma distancias de la carga –Q. Por lo que al sumar las componentes en "y" de los cuatro vectores de fuerza se cancelan entre sí; asimismo al sumar las componentes en "x" la resultante de esta componente también es cero.



Entonces el problema se reduce a encontrar la componente en "-z" de una de las fuerzas y multiplicarla por cuatro para obtener la fuerza resultante sobre la carga –Q.
Denominaremos h la coordenada en "z" desde el origen donde se encuentra la carga –Q. Pudiendo entonces decir que:

$$r^2 = h^2 + a^2$$



en donde $a^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$ al sustituir:

$$r^2 = h^2 + \frac{L^2}{2}$$

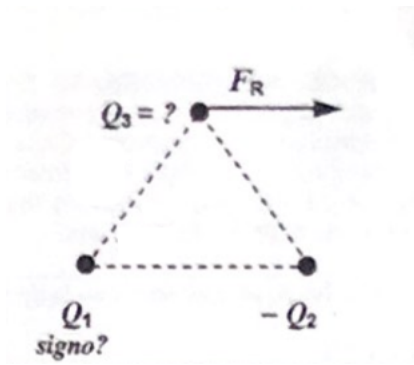
La fuerza resultante sobre –Q es:

$$\vec{F}_R = 4F_z = 4\frac{kqQ}{r^2}\cos\theta\ (-\hat{k})$$

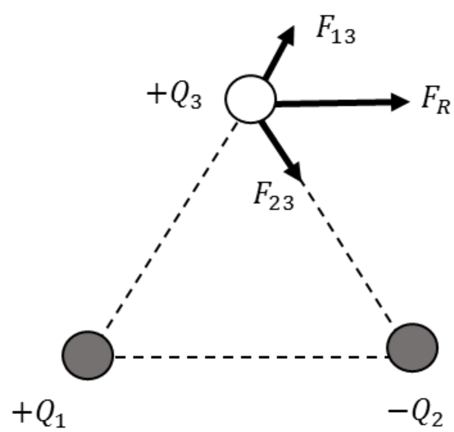
En donde $\cos\theta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{L^2}{2}}}$; al sustituir se tiene:

$$\vec{F}_R = 4\frac{kqQh}{\left(h^2+\frac{L^2}{2}\right)^{3/2}}\left(-\hat{k}\right)$$

Problema 3 Se tienen dos cargas sobre la base de un triángulo equilátero de $3m$. La carga Q_1 es de 8nC y no se conoce su signo. La carga $Q_2 = -8nC$. En el vértice superior se coloca una tercera carga Q_3 se desconoce su signo y su tamaño. Si la fuerza resultante sobre Q_3 es $F_R = 0.75\ N\ (\hat{\imath})$.



a) Determine los signos de Q_3 y Q_1.
Para que la componente en "y" de la fuerza resultante sobre la carga Q3 se cancele, la carga Q1 debe ser positiva al igual que la carga Q3, como se muestra en la figura.



b) Calcular el tamaño de Q_3

$$\sum F_x = 0.75$$

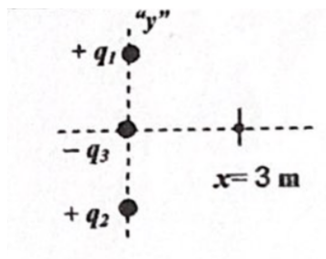
$$\frac{kQ_1Q_3\cos 60}{{r_{13}}^2} + \frac{kQ_2Q_3\cos 60}{{r_{23}}^2} = 0.75$$

$$Q_3 = \frac{0.75}{4+4} = 0.09375\ C$$

Problema 4 Tres partículas cargadas están colocadas en el plano cartesiano como se muestra en la figura, con $q_1 = q_2 = +8\mu C$ situadas en $y = -4m$ y $y = 4m$ respectivamente. La carga $q_3 = -5\mu C$ se encuentra en el origen de coordenadas.

Solución:

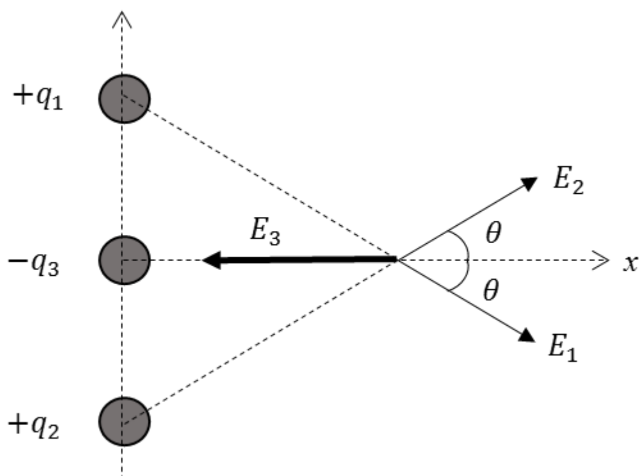
a) Calcule el campo eléctrico en $x = 3m$. ($-1544\frac{N}{C}\ \hat{\imath}$)



El campo eléctrico es la suma vectorial, del campo debido a cada una de las cargas:

$$E_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

A continuación dibujaremos los vectores de campo eléctrico correspondiente.



Donde podemos observar que por la simetría del problema al sumar las componentes en "y" de los campos producidos por q1 y q2, estas se cancelan y la resultante de la suma de estos dos campos en el punto es la sumatoria de las componentes en "x" de estos vectores:

$$E_{1x} + E_{2x} = \frac{2k|q_1|cos\theta}{{r_1}^2}\ \hat{\imath}$$

$$E_{1y} + E_{2y} = 0$$

En donde ${r_1}^2 = 4^2 + 3^2 = 25$ y $\theta = \tan^{-1} 4/3 = 53.13°$, por lo que:

$$E_{1x} + E_{2x} = \frac{2(9 \times 10^9)(8 \times 10^{-6})cos\theta}{5^2}\ \hat{\imath} = 3456.01\frac{N}{C}\ \hat{\imath}$$

Ahora calculamos el campo debido a q3:

$$\vec{E}_3 = \frac{k|q_3|}{3^2}(-\hat{\imath}) = 5000\ N/C\ (-\hat{\imath})$$

Entonces:

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = -1544\frac{N}{C}(\hat{\imath})$$

b) Si ahora se coloca una carga de $Q = -10\mu C$ y $20mg$, que aceleración en magnitud y direccion experimenta esta carga. ($772\frac{m}{s^2}\ \hat{\imath}$)

$$\vec{F} = Q\vec{E}_R = 1.544 \times 10^{-2}N(\hat{\imath})$$

Y aplicando la segunda ley de Newton:

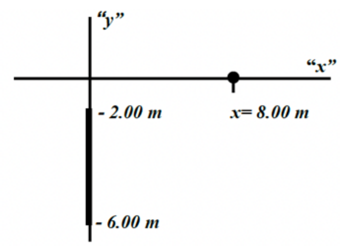
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = 772\ m/s^2(\hat{\imath})$$

Problema 5.

Una carga de 24.0 nC está distribuida uniformemente sobre el eje "y", desde la posición $y = -2.00\ m$ hasta $y = -6.00\ m$.

a) Calcular el potencial eléctrico (en V) producido por la carga distribuida en el origen de coordenadas, considerando un potencial cero en el infinito.
Respuesta: 59.3 tolerancia = ± 0.6

b) Determinar la magnitud de la componente en "y" del campo eléctrico resultante (en N/C) en el punto $x = +8.00\ m$
Respuesta: 1.15 tolerancia = ± 0.06

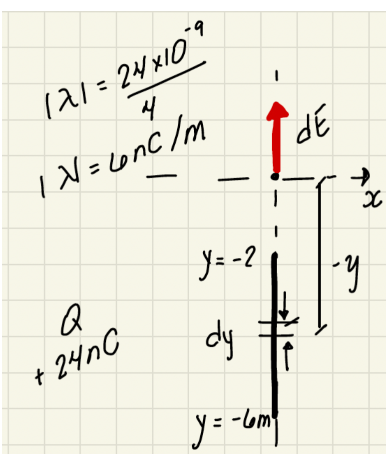


Solución a)

Dividimos la varilla en pequeños diferenciales de longitud dy, cada uno con una carga dq

$$dq = |\lambda|dy$$

La varilla tiene una densidad lineal de carga igual a:



$$\lambda = \frac{24 \times 10^{-9}}{4} = 6nC/m$$

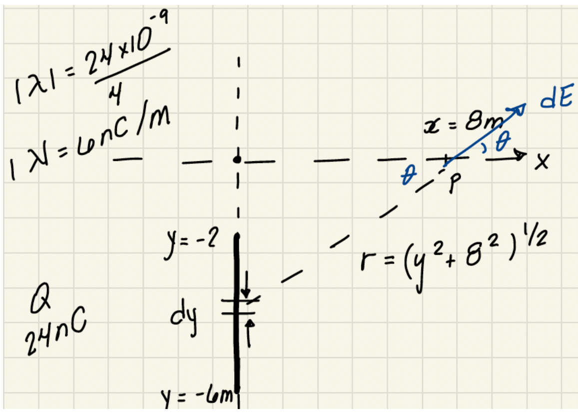
Cada uno de los diferenciales produce en el origen un diferencial de campo dE.

$$dE = \frac{kdq}{r^2}$$

El campo eléctrico en el origen solamente tiene componentes en "+y", observe que la distancia desde la varilla al origen es: $r = -y$

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k|\lambda|dy}{y^2}(\hat{\jmath})$$

$$\vec{E} = \int_{-6}^{-2}\frac{54}{y^2}dy = 54\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{-6}^{-2} = 54\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \mathbf{18}\frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{C}}(+\hat{\boldsymbol{\jmath}})$$



Solución b).

Dividimos la varilla en pequeños diferenciales de longitud dy, cada uno con una carga dq

$$dq = |\lambda| dy$$

La varilla tiene una densidad lineal de carga igual a:

$$\lambda = \frac{24 \times 10^{-9}}{4} = 6nC/m$$

Cada uno de los diferenciales produce en el punto P un diferencial de campo dE.

$$dE = \frac{kdq}{r^2}$$

Debido a que solamente nos interessa calcular la componente en "y" del campo, multiplicaremos el diferencial dE por el $sen\, \theta$. Del triángulo que se forma $sen\, \theta = \frac{-y}{r}$. Observemos que la distancia al punto P donde nos piden calcular la componente "y" del campo está dada por:

$$r = \sqrt{y^2 + 64}$$

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} = \frac{k|\lambda|dy}{(y^2+8^2)} \qquad dE_y = dE\, sen\,\theta = \frac{k|\lambda|(-y)\,dy}{(y^2+8^2)^{3/2}}$$

Resolviendo la integral:

$$E_y = -k|\lambda| \int_{-6}^{-2} \frac{y\,dy}{(y^2+8^2)^{3/2}} \qquad u = y^2+8^2 \quad du = 2y\,dy \qquad \int \frac{+du}{2u^{3/2}} = -\frac{1}{u^{-1/2}}$$

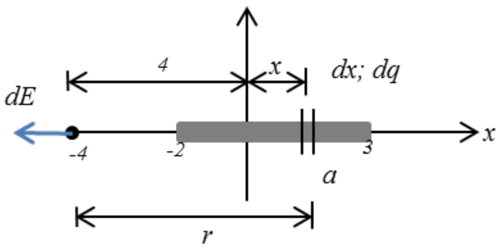
$$E_y = -k|\lambda|\left[\frac{-1}{(y^2+64)^{1/2}}\Big|_{-6}^{-2}\right] = k|\lambda|\left[\frac{1}{(4+64)^{1/2}} - \frac{1}{10}\right] = 1.15\,\frac{N}{C}$$

La dirección de la componente en "y" es en $+\hat{j}$.

Problema 6.

Una distribución de carga uniforme de +4.0 nC/m se coloca sobre el eje "x" desde $x = -2.0\ m$ a $x = +3.0\ m$. ¿Cuál es la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto $x = -4.0\ m$ en el eje "x"? R: **-13 N/C $\hat{\imath}$**

<u>Solución:</u>
Se trata de una distribución lineal de carga, procederemos a dividir la varilla en pequeños segmentos de longitud dx; c/u de estos segmentos produce en el punto $x = -4m$ un diferencial de campo eléctrico dE cómo se muestra en la figura, el cual apunta en dirección negativa de "x".



$$dE = \frac{kdq}{r^2}$$

Donde $dq = \lambda dx$; λ es la densidad lineal de la varilla
$\lambda = +4nC/m$ y $r = 4 + x$

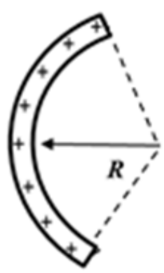
$$dE = \frac{k\lambda dx}{(4+x)^2}$$

Por lo tanto la integral que me permite calcular el campo eléctrico resultante en $x = -4\ m$ es:

$$E = \int_{-2}^{3} \frac{36dx}{(4+x)^2}$$

$$\vec{E} = -36\left(\frac{1}{4+x}\right)\Bigg|_{-2}^{3} = 12.9\frac{N}{C}(-\hat{\imath})$$

<u>Problema 7</u>.
Un objeto no conductor cargado que tiene forma de cuarto de círculo, y posee una carga total de $+10mC$, siendo su radio $R = 0.15\ m$, como aparece en la figura adjunta. Calcule:



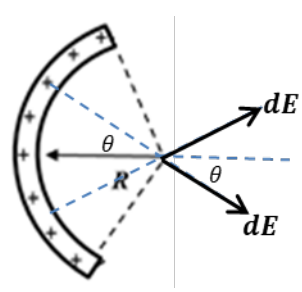
La magnitud del campo eléctrico debido al objeto en el punto O, en $10^9\ N/C$, está dado por:

a) 1.56	b) 7.80	c) 3.60	d) 6.12	e) NEC

Si dicho objeto experimenta una fuerza atractiva de 0.1 N debido a una carga Q en O. El valor de dicha carga, en $10^{-12}C$, está dado por:

<u>Solución</u>. Dividiremos el segmento de arco en pequeños diferenciales de longitud dS.

Cada pequeño segmento de arco produce en el punto O un diferencial de campo eléctrico dado por:



$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda ds}{R^2} = \frac{k\lambda Rd\theta}{R^2} = \frac{k\lambda d\theta}{R}$$

Observe que por la simetría las componentes en "y" se cancelan y el campo resultante solamente tiene componentes en "+x"

$$\vec{E}_o = E_x = 2\int_0^{\pi/4} dE_x\,(\hat{\imath})$$

Para los límites se ha tomado la mitad del cuarto de círculo tomando ventaja de la situación de simetría y el resultado se ha multiplicado por dos. Entonces:

$$\vec{E}_o = E_x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} dE\,cos\theta(\hat{\imath}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{k\lambda cos\theta d\theta}{R}(\hat{\imath}) = \frac{2k\lambda}{R}\sin\theta$$

Siendo $R = 0.15m; \lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{\left(R\frac{\pi}{2}\right)} = 0.04244\ C/m$ por lo que:

$$\vec{E}_o = \frac{2(9\times10^9)(0.04244)}{0.15}\sin\frac{\pi}{4}(\hat{\imath}) = \mathbf{3.6\times10^9\frac{N}{C}(\hat{\imath})}$$

Si dicho objeto experimenta una fuerza atractiva de 0.1 N debido a una carga Q en O. El valor de dicha carga, en $10^{-12}C$, está dado por:

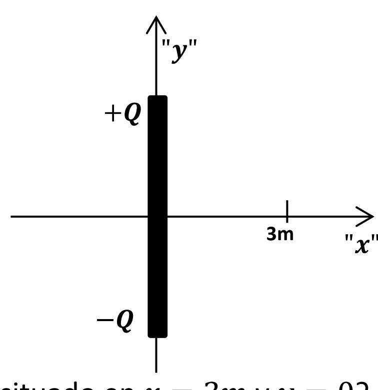
a) 27.77	**b) - 27.77**	c) 17.45	d) -14.75	e) NEC

Solución. La fuerza que experimenta el objeto es igual en magnitud que la fuerza que experimenta la carga Q. Debido a que la fuerza es atractiva la carga Q debe ser negativa y su magnitud:

$$|q| = \frac{|\vec{F}|}{|E|} = \frac{0.1}{3.6\times10^9} = 27.78\times10^{-12}C$$

Problema 8.

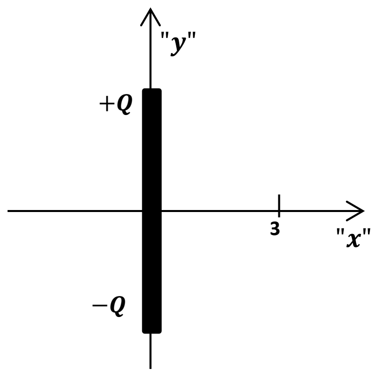
Una varilla tiene carga distribuida uniformemente desde la posición $y = 2.5m$ hasta $y = -2.5m$. La mitad de la varilla tiene carga positiva y la otra mitad tiene carga negativa. $Q = 15nC$. ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la magnitud (en N/C) del campo

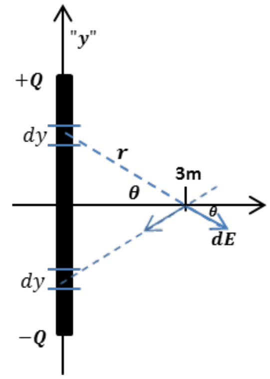


eléctrico resultante, en un punto situado en $x = 3m$ y $y = 0$?

a) $\int_{-2.5}^{2.5}\frac{63dy}{(9+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	**b) $\int_0^{2.5}\frac{108ydy}{(9+y^2)^{\frac{3}{2}}}$**	c) $\int_0^{2.5}\frac{108ydy}{(9+y^2)^{\frac{1}{2}}}$	d) $\int_{-2.5}^{2.5}\frac{162dy}{(9+y^2)^{\frac{1}{2}}}$	e) $\int_0^{2.5}\frac{270dy}{y^2}$

Solución:





Al dividir la varilla en pequeños segmentos de longitud dy, observando la simetría de la línea de carga, se tiene que el campo eléctrico resultante únicamente tiene componentes en dirección negativa del eje "y".

$$dE = \frac{kdq}{r^2} = \frac{k\lambda dy}{(y^2+9)}$$

En donde $\lambda = \frac{Q}{2.5} = \frac{15\times10^{-9}}{2.5} = 6nC/m$. Asimismo solo nos interesa la componente en "y"

$$dE_y = dEsen\theta = \frac{k\lambda dy}{(y^2+9)}\frac{y}{(y^2+9)^{1/2}} = \frac{54ydy}{(y^2+9)^{3/2}}$$

Integraremos de 0 a 2.5 y multiplicaremos el resultado por dos. La expresión que nos permite calcular el campo es:

$E = 2\int_0^{2.5} dE_y$ al sustituir obtenemos → $\boldsymbol{E = \int_0^{2.5} \frac{108ydy}{(y^2+9)^{3/2}}}$