HOJA DE TRABAJO No.3

Flujo Eléctrico y Ley de Gauss

1. Si ϕ_1 es el flujo eléctrico en una superficie cuadrada plana con un vector de área $\vec{A} = 3m^2\hat{\imath} + 7m^2\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme de $\vec{E} = (4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})N/C$ y ϕ_2 es el flujo eléctrico en una superficie oval plana con un vector de área $\vec{A} = 3m^2\hat{\imath} - 7m^2\hat{\jmath}$ en un campo eléctrico uniforme de $\vec{E} = (4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})N/C$ ¿cuáles son los valores correctos de los flujos eléctricos ϕ_1 y ϕ_2 en unidades SI?

a) $\phi_1 = +2$ $\phi_2 = -26$	b) $\phi_1 = -2$ $\phi_2 = +26$	c) $\phi_1 = -26$ $\phi_2 = +2$	d) $\phi_1 = \phi_2 = +26$	e) $\phi_1 = \phi_2 = -2$

Solución: El flujo Eléctrico a través de una superficie lo podemos calcular como:

$$\phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = E_x A_x + E_y A_y + E_z A_z$$

El flujo eléctrico a través de la superficie 1 es:

$$\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{A}_1 = (4)(3) + (-2)(7) = -2\frac{N}{C}m^2$$

El flujo eléctrico a través de la superficie 2 es:

$$\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{A}_2 = (4)(3) + (-2)(-7) = 26\frac{N}{C}m^2$$

2. Una superficie esférica de 2cm de radio, tiene una densidad uniforme de (4 nC/m^2). ¿cuál es el flujo eléctrico (en $\frac{N}{C}m^2$) a través de una superficie esférica concéntrica con un radio de 4cm?

a) 2.8	b) 1.7	c) 2.3	d) 4	e) 9.1

Solución: el flujo eléctrico a través de la superficie esférica concéntrica es el cociente entre la carga encerrada por esta y la constante de permitividad del espacio libre:

$$\phi_E = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

La carga encerrada es la que contiene la esfera de 2cm de radio y densidad superficial $\sigma = 4nC/m^2$, de tal forma que:

$$q_{encerrada} = \sigma Area_{esfera\ de\ radio\ 2cm} = 4 \times 10^{-9}(4\pi 0.02^2) = 2.011 \times 10^{-11}C$$

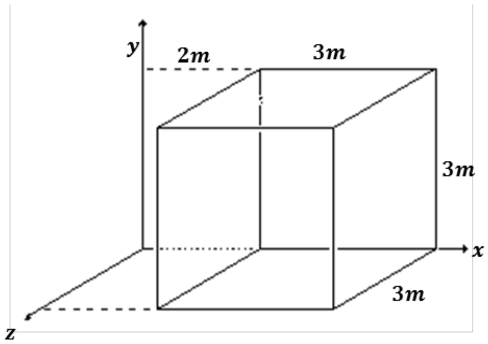
Entonces el flujo eléctrico a través de la esfera de 4cm de radio es:

$$\phi_E = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{2.011 \times 10^{-11}}{8.85 \times 10^{-12}} = 2.27\frac{N}{C}m^2$$

3. El flujo eléctrico en cierta región en el espacio está dado por $\vec{E} = (8\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath})N/C$, donde y está expresada en metros. ¿Cuál es la magnitud del flujo eléctrico (en $\frac{N}{C}m^2$) a través de la cara superior del cubo que se muestra en la figura?

a) 90	b) 6	c) 54	d) 12	e) 126

Solución: Se trata de una superficie plana, el flujo eléctrico a través de la cara superior del cubo está dado por:



$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$

El vector de área de la cara superior del cubo apunta en dirección $+\hat{\jmath}$. (Recuerde que los vectores de área en superficies cerradas siempre son salientes a la superficie y perpendiculares a ésta). Por lo que:

$$\vec{A} = 9m^2\hat{\jmath}$$

Y el campo eléctrico en la cara superior del cubo es de:

$$\vec{E} = 8\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} = 8\hat{\imath} + 2(3)\hat{\jmath} = 8\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$$

Observe que $y = 3m$ en la cara superior del cubo.

El flujo eléctrico es entonces:

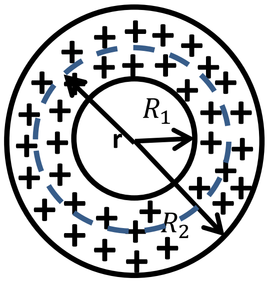
$$\phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E_xA_x + E_yA_y + E_zA_z$$

$$\phi_E = (8)(0) + (6)(9) = 54\ \frac{N}{C}m^2$$

4. Un cascarón esférico aislante tiene una densidad volumétrica de carga de $\rho = 5nC/m^3$ distribuida uniformemente. El cascarón tiene radios $R_1 = 6cm$ y $R_2 = 10cm$. Utilice la Ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en $r = 8cm$ y $r = 15cm$ **($8.71\ \frac{N}{C}\hat{r}$, $6.56\frac{N}{C}\hat{r}$)**

Solución la distribución de carga tiene una simetría esférica por lo que para calcular el campo en $r = 8cm$ dibujaremos una superficie gausiana esférica de radio 8cm, localizada en el interior del cascarón esférico como se muestra en la figura.

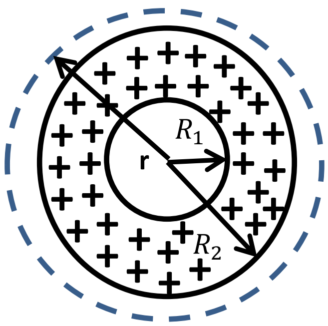
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi {R_1}^3\right)}{8.85 \times 10^{-12}}$$

$$\vec{E} = \frac{5 \times 10^{-9}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi {R_1}^3\right)}{4\pi(0.08)^2 8.85 \times 10^{-12}} = \mathbf{8.71\ \frac{N}{C}}\hat{\boldsymbol{r}}$$

b) Ahora dibujaremos una superficie gausiana de radio 15cm ($r = 15cm$) la cual será concéntrica con el cascarón, como se muestra en la figura. Observemos que la carga encerrada por la superficie gausiana, corresponde a toda la carga del cascarón.



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

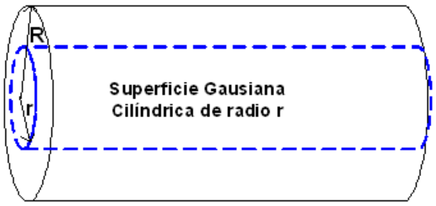
$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi {R_2}^3 - \frac{4}{3}\pi {R_1}^3\right)}{8.85 \times 10^{-12}}$$

$$\vec{E} = \frac{5 \times 10^{-9}\left(\frac{4}{3}\pi (0.1)^3 - \frac{4}{3}\pi (0.06)^3\right)}{4\pi(0.15)^2 8.85 \times 10^{-12}} = 6.56\,\boldsymbol{\frac{N}{C}}\hat{\boldsymbol{r}}$$

5. Un cilindro aislante de 12cm de radio tiene una densidad uniforme de 5nC/m^3. Determine utilizando la Ley de Gauss, la magnitud del campo eléctrico (en N/C) a 5 cm del eje del cilindro.

a) 25	b) 20	c) 14	d) 31	e) 34

Solución: Se trata de una distribución volumétrica de carga con densidad $\rho = 5nC/m^3$ y radio $R = 12cm$; debido a que se trata de un cilindro, utilizaremos una superficie gausiana cilíndrica concéntrica con el cilindro aislante, como se muestra en la figura, de longitud h.



El radio de la superficie gausiana lo determinamos en el punto donde requerimos calcular la magnitud del campo eléctrico, es decir, $r = 5cm$. Aplicando Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

La parte izquierda de la ecuación se refiere al flujo a través de la superficie gausiana por lo que:

$$E(2\pi rh) = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Siendo la carga encerrada $q_{encerrada} = \rho\pi r^2 h$; observe solamente encerramos la carga del cilindro gausiano. Al sustituir en la expresión anterior y despejar para el campo eléctrico:

$$E(2\pi rh) = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

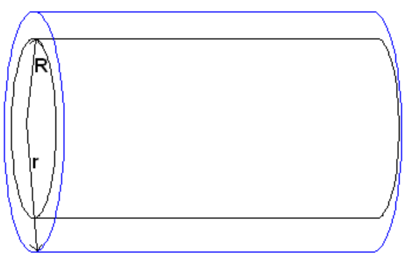
$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} = \frac{(5\times10^{-9})(0.05)}{2(8.85\times10^{-12})} = 14.1\frac{N}{C}\hat{r}$$

La magnitud del campo eléctrico en el interior del cilindro aislante a 5cm de su centro es de 14.1 N/C y la dirección es radialmente hacia afuera de la superficie gausiana.

6. Un cilindro aislante de 12cm de radio tiene una densidad uniforme de 5nC/m^3. Determine utilizando la Ley de Gauss, la magnitud del campo eléctrico (en N/C) a 15 cm del eje del cilindro.

a) 20	b) 27	c) 16	d) 12	e) 54

Solución: Se trata de una distribución volumétrica de carga con densidad $\rho = 5nC/m^3$ y radio $R = 12cm$; debido a que se trata de un cilindro, utilizaremos una superficie gausiana cilíndrica concéntrica con el cilindro aislante, como se muestra en la figura, de longitud h.



El radio de la superficie gausiana lo determinamos en el punto donde requerimos calcular la magnitud del campo eléctrico, es decir, $r = 15cm$. Aplicando Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

La parte izquierda de la ecuación se refiere al flujo a través de la superficie gausiana por lo que:

$$E(2\pi rh) = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Siendo la carga encerrada $q_{encerrada} = \rho\pi R^2 h$; observe que encerramos toda la carga del cilindro aislante. Al sustituir en la expresión anterior y despejar para el campo eléctrico:

$$E(2\pi rh) = \frac{\rho\pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

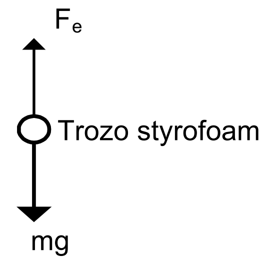
$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{(5\times10^{-9})(0.12)^2}{2(8.85\times10^{-12})(0.15)} = 27.1\frac{N}{C}\hat{r}$$

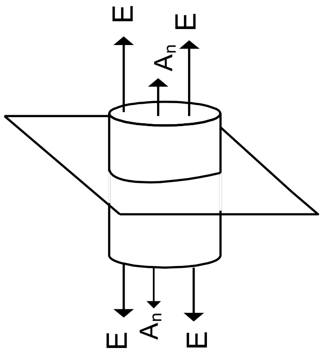
La magnitud del campo eléctrico en el interior del cilindro aislante a 15cm de su centro es de 27.1 N/C y la dirección es radialmente hacia afuera de la superficie gausiana.

7. Un trozo de styrofoam de 10g tiene una carga neta de -0.700mC y flota por encima de una gran lámina horizontal de plástico que tiene una densidad de carga uniforme en su superficie. ¿Cuál es la carga por unidad de superficie (en nC/m^2) presente en la lámina de plástico?

a) +1.24	b) -2.48	c) +2.48	d)-1.24	e) NEC

Solución: Analicemos el trozo de styrofoam cuando el sistema está en equilibrio**.** En "x" no actúa ninguna fuerza, mientras que en "y", tenemos la fuerza eléctrica que experimenta el trozo de styrofoam debida al campo eléctrico producido por la lámina de plástico y la fuerza del peso. Para que el trozo de styrofoam flote por encima de la lámina la fuerza eléctrica debe ser hacia arriba, es decir el trozo experimentará una fuerza de repulsión, por lo cual deducimos que la densidad de carga que tiene la lámina es negativa. Encontremos ahora su magnitud:





$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$F_{electrica} = mg$$
$$qE = mg$$

El campo eléctrico producido por la lámina cargada lo calcularemos utilizando la Ley de Gauss. Dibujemos una superficie gausiana cilíndrica como la que se muestra en la figura:

El flujo eléctrico a través de la superficie gausiana es diferente de cero únicamente en las caras circulares superior e inferior del cilindro. En la parte curva el flujo eléctrico es cero debido a que los vectores de campo eléctrico y de área de la superficie son perpendiculares.

$$\oint E \cdot dA = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o}$$

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_o} \rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Sustituyendo el resultado anterior, en la expresión de la sumatoria de fuerzas en "y" para el sistema en equilibrio, se tiene:

$$q\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\right) = mg$$

Despejando σ de la expresión anterior y sustituyendo valores, encontramos que la magnitud de la densidad de carga de la lámina es:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_o mg}{q} = \frac{2(8.85\times10^{-12})(10\times10^{-3})(9.8)}{0.7\times10^{-3}} = 2.48\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$$

La densidad de carga anterior es una densidad de carga **negativa**, ya que la fuerza eléctrica que experimenta el trozo de styrofoam es de repulsión.

8. El campo eléctrico justo afuera de una esfera conductora hueca de 20 cm de radio, tiene una magnitud de 500 N/C y está dirigido radialmente hacia afuera. Una carga desconocida Q se introduce en el centro de la esfera hueca y se observa que el campo eléctrico sigue dirigido radialmente hacia afuera pero su magnitud ha disminuido a 100 N/C. ¿Cuál es la magnitud de la carga Q (en nC)?

a) 1.5	b) 1.8	c) 1.3	d) 1.1	e) 2.7

<u>Solución</u>: Se trata de una esfera conductora hueca de radio $R = 20cm$, que al inicio no tiene carga eléctrica en el espacio hueco de su interior, por lo que la carga que tiene está distribuida uniformemente en su superficie externa. Justo afuera de la superficie conductora el campo eléctrico está dado por:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Por lo que la densidad de carga superficial de la esfera hueca conductora es:

$$\sigma = E\varepsilon_0 = (500)(8.85 \times 10^{-12}) = 4.425nC/m^2$$

Y la carga que tiene en su superficie es positiva (porque el campo es radial hacia afuera):

$$q = \sigma Area = \sigma(4\pi R^2) = 4.425 \times 10^{-9}(4\pi(0.2^2)) = +2.22nC$$

Si ahora se introduce una carga Q en el centro de la esfera hueca; el campo eléctrico cambia porque ahora la carga encerrada total justo afuera de la esfera hueca es diferente; si se dibuja una superficie gausiana esférica justo afuera de la superficie de la esfera hueca con $r = R$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

El campo ahora es 100 N/C y la $q_{encerrada} = q + Q$. Sustituiremos valores y despejamos para encontrar Q la carga desconocida.

$$E(4\pi R^2) = \frac{q + Q}{\varepsilon_0}$$

$$Q = E(4\pi R^2)\varepsilon_0 - q = 100(4\pi)(0.2^2)(8.85 \times 10^{-12}) - 2.22 \times 10^{-9} = -1.78nC$$

La magnitud de la carga Q es 1.78 nC

9. Una carga puntual de 6 nC se coloca en el centro de un cascarón esférico conductor (radio interior 1cm; radio exterior 2 cm) el cual tiene una carga neta negativa de – 4 nC. Determine la densidad de carga resultante (en $\mu C/m^2$) en la superficie interna del cascarón conductor una vez se alcanza el equilibrio.

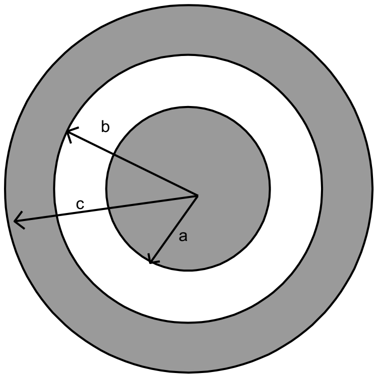
10. a) +4.8	b) -4.8	c) -9.5	d) +9.5	e) -8

<u>Solución</u>: Se trata de un cascarón conductor con carga neta negativa de $-4\ nC$. Debido a la carga que se coloca en su centro su carga se distribuye en sus superficies interna y externa de la siguiente forma:

Superficie Interna	$-6nC$
Superficie Externa	$+2nC$
Carga neta cascarón	$-4nC$

Por lo que la densidad de carga superficial en la superficie interna es:

$$\sigma_{interior} = \frac{-6 \times 10^{-9}}{4\pi(0.01)^2} = -4.77\mu C/m^2$$



11. La figura muestra una carga q=+4μC dispuesta uniformemente en una esfera **no conductora** de radio a=5cm y situada en el centro de una esfera hueca **conductora** de radio interior b=8cm y radio exterior c=10cm. La esfera hueca exterior contiene una carga de q= -6 μC. Utilizando la ley de Gauss, encuentre la magnitud del campo eléctrico E(r)=? en las siguientes ubicaciones

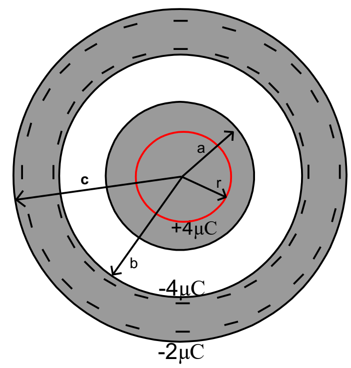
a. Dentro de la esfera E(r = 3cm) = ($8.6 \times 10^6 \frac{N}{C}\hat{r}$)

b. Dentro de la esfera hueca E(r = 9cm) = ($0\ N/C$)

c. Afuera de la esfera hueca E(r = 12 cm) = ($-1.248 \times 10^6\ N/C\ \ \hat{r}$)

d. d. ¿Cuáles cargas aparecen en las superficies internas y externas de la esfera hueca?

Solución. a) Aplicaremos la ley de Gauss para resolver este problema. Debemos observar que la esfera en el interior es una esfera no conductora por lo tanto la carga se encuentra distribuida en todo su volumen y su densidad volumétrica de carga es:



$$\rho = \frac{Q}{(4/3)\pi a^3} = \frac{+4\times 10^{-6} C}{(4/3)\pi(0.05m)^3} = 0.007639 C/m^3$$

Aplicando la Ley de Gauss y escogiendo una superficie gausiana esférica de radio r=3cm.

$$\oint E\cdot dA = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

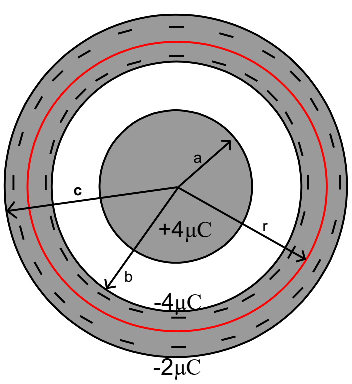
$$EA = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r^3)}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_o} = \frac{(0.007639 C/m^3)(0.03m)}{3(8.85\times 10^{-12})} = 8.6\times 10^6 N/C$$

b) El punto donde queremos calcular el campo se encuentra dentro de la esfera hueca a una distancia mayor que su radio interno. Por lo que aplicando Gauss y escogiendo una superficie gausiana de radio r=9cm:

$$\oint E\cdot dA = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

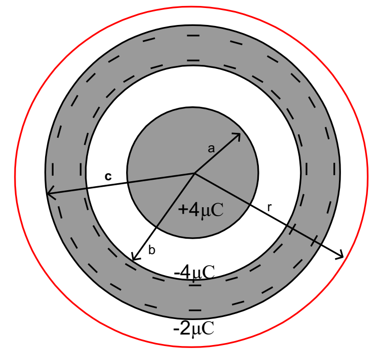


Pero en este caso la carga encerrada es igual a cero, ya que si bien encerramos la carga total de la esfera no conductora (+4μC), también estamos encerrando la que se encuentra en la superficie interna de la esfera hueca (-4μC) y por lo tanto:

$$E = 0$$

c) Ahora el punto donde queremos calcular el campo se encuentra afuera de la esfera hueca a una distancia de 12 cm del centro de ambas esferas. Por lo que aplicando Gauss:

$$\oint E \cdot dA = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$



Escogiendo una superficie gausiana esférica cuyo radio sea r=12 cm, observamos que encerramos la totalidad de la carga de la esfera no conductora (+4μC) y la de la esfera conductora (-6μC), por lo que aplicando la ley de Gauss:

$$EA = \frac{q_{encerrada}}{\varepsilon_o}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{(+4\times10^{-6} - 6\times10^{-6})}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{-2\times10^{-6}}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = \frac{-2\times10^{-6}}{4\pi(0.12m)^2(8.85\times10^{-12})} = -1.248\times10^6\, N/C$$

El signo negativo indica que el campo eléctrico apunta en dirección radial entrando hacia las esferas.

d) Debido a la esfera no conductora con carga que se encuentra en el interior, en la superficie interna de la esfera conductora se inducirá una carga de -4μC, por lo tanto para que la carga neta de la esfera conductora sea -6μC, en su superficie externa deberá haber -2μC de carga:

Esfera conductora	***Carga***
Superficie interna	-4μC
Superficie externa	-2μC
Carga neta en la esfera conductora	-6μC