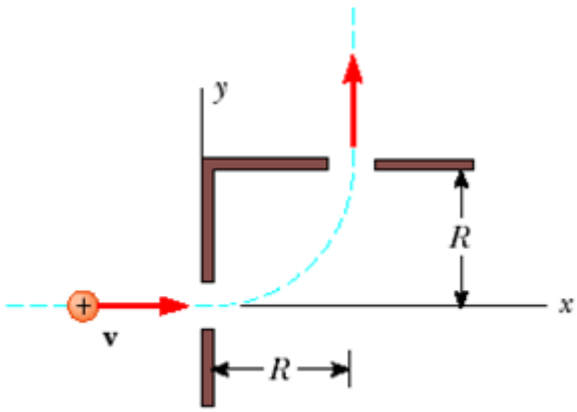
Hoja de Trabajo No.2
Movimiento de partículas en un campo uniforme y Dipolo Eléctrico



Problema 1. Una partícula con carga q y masa m y una velocidad inicial $v\hat{\imath}$ se proyecta en el interior de una cámara, en cuya región existe un campo eléctrico uniforme. La partícula al salir a tenido un desplazamiento con respecto a su punto de ingreso de $R\hat{\imath} + R\hat{\jmath}$.

Si: $q = 1.6 \times 10^{-19} C;\ m = 1.67 \times 10^{-27} Kg;$

$E = 6.96\,\hat{\jmath}\,\frac{N}{C}; v = 10 \times 10^{3} m/s$ Calcule el valor de R que hace posible esta deflexión. R:\\$0.3m$

Solución: la aceleración que experimenta la partícula una vez ingresa a la región de la cámara es: $\sum F_y = ma_y$ en donde la aceleración apunta en la misma dirección del campo por tratarse de una carga positiva:

$$qE = ma$$

$$a = \frac{qE}{m}(+\hat{\jmath})$$

En "x" el movimiento de la partícula es con velocidad constante, la cual es $v = 10 \times 10^{3} m/s$, de tal forma que el tiempo que le toma a la partícula salir de las placas es:

$$v_x = \frac{\Delta x}{t};\quad t = R/v_x$$

En "y" se tiene un movimiento con aceleración constante, para el cual, si tomamos como nivel de referencia el punto donde la partícula es proyectada a la cámara sobre el eje "x" se tiene:

$$y_0 = 0;\ \ y_f = R;\ \ a = \frac{qE}{m};\quad t = \frac{R}{v_x};\ v_{o_y} = 0$$

Entonces a partir de las ecuaciones de cinemática:

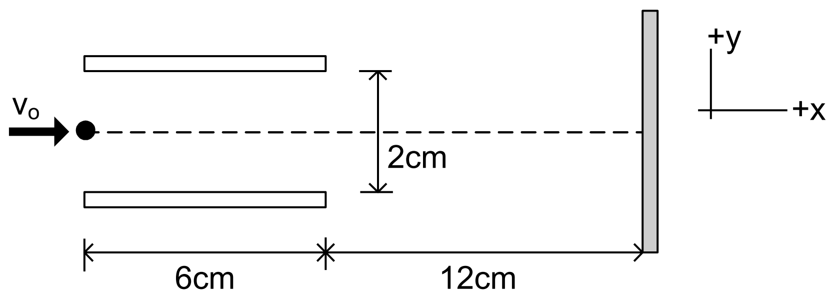
$$y_f = y_o + v_{o_y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Sustituyendo valores y despejando para R:

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)\left(\frac{R}{v_x}\right)^2$$

$$R = \frac{2mv_x^2}{qE} = \frac{2(1.67 \times 10^{-27})(10 \times 10^3)^2}{1.6 \times 10^{-19}(6.96)} = \mathbf{0.3m}$$

Problema 2. Se proyecta un electrón con una rapidez inicial de $6.50 \times 10^6 m/s$ a lo largo del eje que pasa por el punto medio entre dos placas de un tubo de rayos catódicos como el que se muestra en la figura. El campo eléctrico uniforme entre las placas tiene una magnitud de $1.1 \times 10^3 N/C$ y es ascendente. Ignore los efectos de la gravedad. Considere el sistema de referencia según se indica. Coniderar que al salir de las placas el campo eléctrico $E = 0$.



¿A qué distancia por debajo del eje ha descendido el electrón cuando sale del extremo derecho de las placas? **R.\\ 0.00822m**

Solución. Para resolver este problema observamos que debido a que es una partícula negativa y el campo eléctrico es ascendente, la dirección de la fuerza eléctrica sobre la partícula es vertical y hacia abajo. Por lo tanto la aceleración que experimentará el electrón entre las placas es:

$$a_y = -\frac{eE}{m_e} = -\frac{(1.6 \times 10^{-19})(1.1 \times 10^3)}{9.1 \times 10^{-31}} = -1.934 \times 10^{14} m/s^2$$

Debido a que conocemos el desplazamiento en "x" de la partícula desde que se proyecta hasta que sale de las placas podemos calcular, el tiempo que le toma salir de las placas.

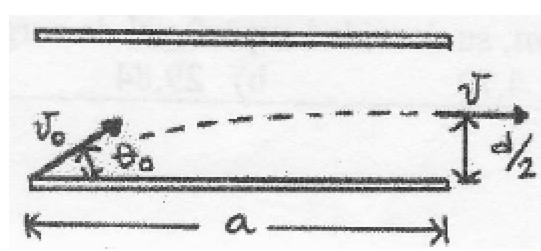
$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{0.06}{6.5 \times 10^6} = 9.23\ ns$$

Ahora ya que se conoce el tiempo y la aceleración en "y" y tomando en cuenta que la velocidad inicial en "y" es cero, calcularemos el desplazamiento vertical de la partícula al momento de salir de las placas:

$$y_f = y_o + v_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\Delta y = \frac{1}{2}(-1.934 \times 10^{14})(9.23 \times 10^{-9})^2 = -8.24 mm$$

Problema 3. Un protón es lanzado en un campo eléctrico uniforme entre dos placas con una rapidez $v_o = 5 \times 10^6\ m/s$ y un ángulo $\theta_o = 30°$; se observa que sale exactamente a la mitad de separación de las placas y la dirección de su velocidad al salir es completamente horizontal. Si se sabe que el ancho de las placas es de $a = 5cm$. Calcule:



a) El tiempo que tarda el protón desde que se lanza hasta que sale de las placas.

Solución. El protón experimentará una aceleración debida al campo en dirección vertical hacia abajo $(-\hat{j})$, sin embargo debido a que es proyectado con rapidez inicial v_o a un ángulo θ_o, describirá una trayectoria parabólica mientras se encuentre en la región del campo. En el eje horizontal "x" no experimenta fuerza eléctrica, por lo que la velocidad en "x" permanece constate.

Analicemos el movimiento del protón desde que es lanzado hasta el punto donde sale de las placas. Entonces:

$$v_x = \frac{\Delta x}{t}$$

$$t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{x_f - x_o}{v_o \cos\theta_o} = \frac{0.05}{5\times 10^6 \cos 30°} = \mathbf{1.1547\times 10^{-8} s}$$

b) La aceleración del protón.

Solución. Analizaremos el movimiento en "y" del protón para encontrar la aceleración debida al campo eléctrico, desde su punto de lanzamiento hasta el punto cuando sale de las placas. Observe que para este caso debido a que la partícula sale con una velocidad en dirección horizontal, la componente en "y" de la velocidad es cero. Por lo que:

$v_{oy} = v_o \sin\theta_o$

$v_{fy} = 0$

$t = 11.547 ns$

$$v_{fy} = v_{oy} + a_y t$$

Por lo que la aceleración es:

$$a_y = \frac{0 - 5\times 10^6 \sin 30°}{1.1547\times 10^{-8}} = \mathbf{-2.165\times 10^{14} m/s^2}$$

c) La magnitud del campo eléctrico entre las placas.

$$\sum F_y = m a_y$$

$$qE = m a_y$$

$$|E| = \left|\frac{m a_y}{q}\right| = \left|\frac{1.67\times 10^{-27}(2.165\times 10^{14})}{1.6\times 10^{-19}}\right| = \mathbf{2.26\times 10^6 N/C}$$

Problema 4. Una partícula (masa $5.0g$ y $q = 40mC$) se mueve en una región en el espacio donde el campo eléctrico es uniforme y está dado por $E_x = 2.5\ N/C$; $E_y = E_z = 0$. Si la velocidad de la partícula en $t = 0$ está dada por $v_y = 50\ m/s, v_x = v_z = 0$, ¿cuál es la rapidez de la partícula en $t = 2.0\ s$? Ignore las fuerzas gravitacionales.

a) 81m/s	b) 72 m/s	c) 64m/s	d) 89m/s	e) 25 m/s

Solución: Debido a que la partícula tiene carga positiva, experimentará una Fuerza Eléctrica debida al campo en la misma dirección que éste. Por lo que podemos calcular la aceleración de la partícula:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$q\vec{E} = ma_x$$

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = \frac{40 \times 10^{-3}(2.5)}{5 \times 10^{-3}} = 20\frac{m}{s^2}(\hat{\imath})$$

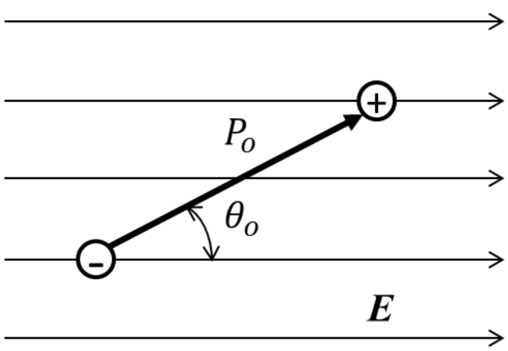
Lo anterior ocasionará que la partícula se acelere en "$+x$"; observe que $v_{ox} = 0$; entonces para $t = 2s$ una v_x de:

$$v_x = v_{ox} + a_x t = (20)(2) = 40\frac{m}{s}(\hat{\imath})$$

La componente de la velocidad en "y" permanece constante de $v_y = 50\ m/s$, por lo que la rapidez para $t = 2s$ es:

$$v = \sqrt{40^2 + 50^2} = 64.03\ m/s$$

Problema 5. Para un dipolo con magnitud $p = 100\mu Cm$ que interactúa con un campo eléctrico externo uniforme de magnitud $E = 2000\frac{N}{C}$, como aparece en la figura adjunta, calcule:



a) El torque que experimenta el dipolo al interactuar con el campo eléctrico externo, considere $\theta_o = 30°$

Solución. El momento de torsión en la posición mostrada es:

$$\tau = pEsen\,\theta = (100 \times 10^{-6})(2000)sen30°$$
$$= \mathbf{0.1\ Nm}$$

En dirección entrante al plano de la página, haciendo rotar al dipolo en sentido horario.

b) La fuerza eléctrica que experimenta el dipolo

Solución. La fuerza eléctrica sobre el dipolo debido al campo externo es cero, ya que cada partícula que conforma el dipolo experimenta una fuerza de la misma magnitud pero en dirección opuesta.

c) La mínima energía potencial del dipolo eléctrico en dicho sistema

Solución. La mínima energía potencial se produce cuando el momento dipolar y el campo son paralelos, es decir el dipolo está alineado con el campo.

$$U = -pEcos\,0° = -(100 \times 10^{-6})(2000) = \mathbf{-0.2\ J}$$

d) ¿Cuánto trabajo hará un agente externo para llevar el dipolo de su condición inicial $\vec{p}_o$ a una condición final completamente anti paralela con el campo.

Solución. El trabajo realizado por un agente extern está dado por:

$$W = \Delta U = U_f - U_o$$

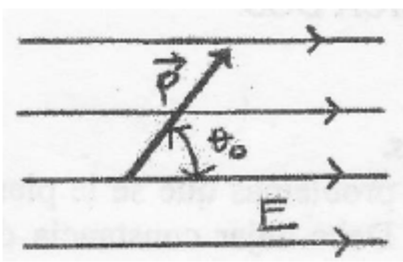
En donde:

$$U_o = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pEcos\theta = -(100 \times 10^{-6})(2000)\cos(30) = -0.173\ J$$

$$U_f = -(100 \times 10^{-6})(2000)\cos(180) = 0.2\ J$$

Entonces el trabajo realizado por el campo es:

$$W = \Delta U = 0.2 - (-0.173) = \mathbf{0.373J}$$



Problema 6. Un dipolo eléctrico de magnitud $p = 6\mu Cm$ forma un ángulo $\theta_o = \pi/3$ con el campo eléctrico externo de magnitud $E = 10^3\ N/C$ producido por unas placas paralelas.

El trabajo que realiza el campo para rotar el dipolo hasta que se alinea en su dirección, $10^{-3}\ Nm$, esta dado por:

a)2.98	b)-3.00	c)-6.00	d)+6.00	e)+3.00

Solución. El trabajo realizado por el campo es:

$$W = -\Delta U = U_o - U_f$$

Cuando está en la posición inicial su energía es:

$$U_o = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\theta = -(6 \times 10^{-6})(1 \times 10^3)\cos\frac{\pi}{3} = -3 \times 10^{-3} J$$

Y la energía al estar alineado con el campo:

$$U_f = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos 0° = -(6 \times 10^{-6})(1 \times 10^3)\cos 0° = -6 \times 10^{-3} J$$

Entonces:

$$W_{campo} = 3 \times 10^{-3} J$$

Si en su posición inicial el dipolo está en reposo y posee una inercial rotacional alrededor de su centro de masas $I_{cm} = 1.1 \times 10^{-11} kg\ m$ su velocidad angular cuando se alinea con el campo, en $10^3 rad/s$:

a)23.35	b)37.55	c)29.88	d)13.25	e)NEC

Solución. Resolveremos este problema utilizando conservación de la energía mecánica

$$U_o + K_o = U_f + K_f$$

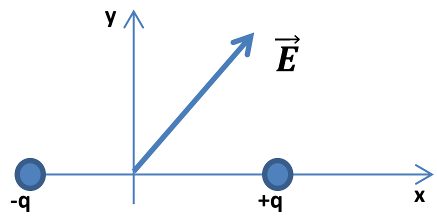
En la expresión anterior la energía cinética inicial es cero porque el dipolo está en reposo, despejando la velocidad:

$$U_o - U_f = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2(U_o - U_f)}{I}} = 23{,}354\ rad/s$$

Problemas 7.

Un dipolo consta de cargas de $+3\mu C$ y $-3\mu C$ colocadas sobre el eje "x" en $x = +75cm$ y $x = -75cm$ respectivamente. El dipolo se encuentra en una región donde el campo eléctrico es $\vec{E} = (4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}) \times 10^6 N/C$. En la posición mostrada cuánta energía potencial tiene el dipolo.



a)-18	b)+18	c)-9	d)+9	e) -14.4

Solución: la energía potencial eléctrica en la posición que se encuentra el dipolo está dada por la siguiente expresión:

$$U = -(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

En donde el vector de momento dipolar es $\vec{p} = qd\ (\hat{\imath})$. Recuerde que el momento dipolar es un vector que apunta de la carga negativa a la positiva, en este caso solamente tiene componentes en dirección positiva de $+\hat{\imath}$. Asimismo, d representa la distancia de separación entre las cargas que conforman el dipolo. La energía potencia es entonces:

$$U = -(p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z) = -((4.5 \times 10^{-6})(4 \times 10^{-6})) = -18J$$

¿Qué cantidad de trabajo realiza un agente externo (en J) para trasladar el dipolo desde la posición mostrada en la figura, hasta la posición paralela al campo?

a)-7.2	b)+7.2	c)-4.5	d)+4.5	e) Cero

Solución: El trabajo realizado por un agente externo:

$$W = \Delta U = U_f - U_o$$

En la que $U_o = -18J$ previamente calculados.

$U_f = -(\vec{p} \cdot \vec{E}) = -|p||E|cos\theta$ para la cual $|p| = 4.5 \times 10^{-6} Cm$ y $|E| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 5 \times 10^6 N/C$, el ángulo $\theta = 0°$ porque en la posición final el momento dipolar es paralelo con el campo.

$$U_f = -22.5J$$

El trabajo realizado por un agente externo es:

$$W = \Delta U = U_f - U_o = -22.5 - (-18) = -4.5J$$