Práctica 4 - Parte 1

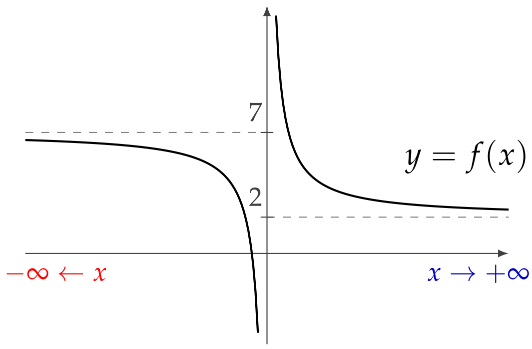
Límite de funciones

En lo que sigue, veremos cómo la noción de límite introducida para sucesiones se extiende al caso de funciones reales. Esto nos permitirá estudiar el comportamiento de una función f "en el infinito" (es decir, los valores $f(x)$ para x "grandes" en valor absoluto) y en los "bordes" de su dominio de definición, de manera de obtener información útil para la construcción del gráfico de f.

1. Límites en el infinito - Asíntotas horizontales

Comenzaremos estudiando el comportamiento de una función de variable real x para valores "grandes" de x, ya sean positivos o negativos.

Consideremos la función f cuyo gráfico es el siguiente:



Cuando x toma valores positivos muy grandes, $f(x)$ toma valores cercanos a 2; más precisamente, los valores de $f(x)$ se acercan tanto como se desee a 2 si se consideran valores de x positivos suficientemente grandes. Se dice, entonces, que f *tiende a* 2 *cuando* x *tiende a más infinito* o que *el límite cuando* x *tiende a más infinito de* $f(x)$ *es* 2, y se nota:

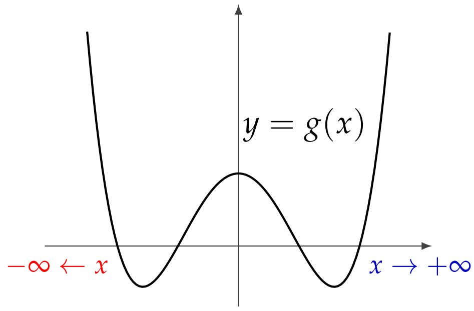
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

Además, se dice que la recta de ecuación $y = 2$ es una *asíntota horizontal* para f.
Por otra parte, cuando x toma valores negativos suficientemente grandes en valor absoluto, f toma valores tan cercanos a 7 como se quiera; es decir, *el límite cuando* x *tiende a menos infinito de* $f(x)$ *es* 7. Esto se nota:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 7.$$

En este caso, se dice también que la recta de ecuación $y = 7$ es una *asíntota horizontal* para f.

Para la función g cuyo gráfico es

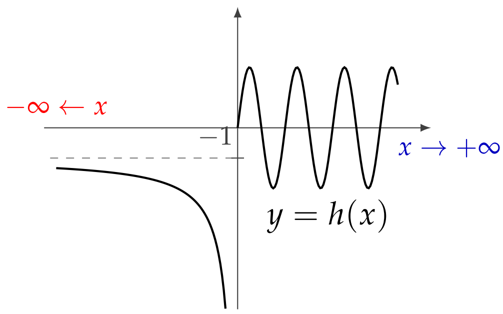


tenemos que, cuando x tiende a más infinito y a menos infinito, $g(x)$ toma valores arbitrariamente grandes, es decir:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\,.$$

En este caso, no hay asíntotas horizontales.

Finalmente, consideremos la función h cuyo gráfico es el siguiente:



Aunque tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -1\,,$$

cuando analizamos el límite cuando x tiende a más infinito, no ocurre ninguna de las situaciones que hemos visto: los valores de $h(x)$ no se acercan a ningún número particular ni se van a más o menos infinito; por lo tanto, no existe $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. Para esta función, la recta de ecuación $y = -1$ es asíntota horizontal.

En la entrada "Límites en el infinito" se pueden encontrar las definiciones matemáticas precisas de estas nociones. Sin embargo, para poder entender mejor el concepto de límite, recomendamos, en primer lugar, concentrarse en los ejemplos que presentamos a continuación.

1.1. Límite en infinito de funciones dadas por fórmulas

Presentamos ahora algunos ejemplos de cálculo de asíntotas horizontales para funciones dadas por su fórmula $f(x)$ y la información que esto nos provee en relación al gráfico de f.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

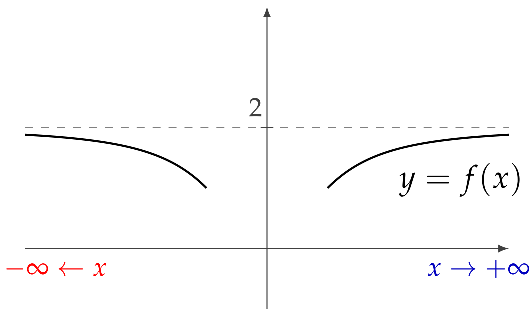
Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$. Para calcular su límite en $+\infty$, podemos proceder en forma análoga a lo visto para sucesiones:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\Big(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}\Big)} = 2.$$

Por otro lado, observamos que, como la variable aparece al cuadrado en la expresión de f, cuando x tiende a $-\infty$ el comportamiento de la función es igual al que tiene cuando x tiende a $+\infty$, de modo que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$

Observamos que $\dfrac{2x^2}{x^2+1} < 2$ para todo x, con lo que el aspecto del gráfico de f en $+\infty$ y en $-\infty$ es aproximadamente:



Ejemplo 2. Sea $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

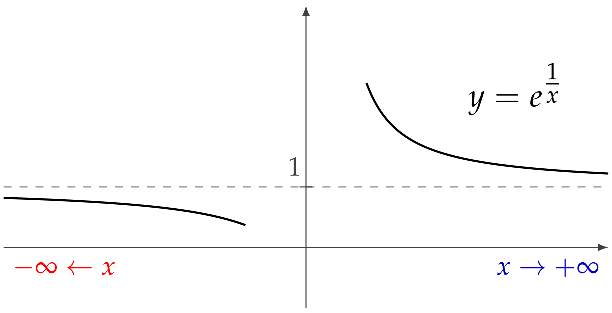
El dominio de la función g es el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$. Para calcular los límites de esta función en $+\infty$ y en $-\infty$, observamos, en primer lugar, el comportamiento del exponente $\dfrac{1}{x}$. Vemos que, cuando x tiende a $-\infty$ o a $+\infty$, el exponente $\frac{1}{x}$ toma valores arbitrariamente chicos, es decir, tiende a 0. Entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}} = e^0 = 1$$

y, de la misma manera,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$$

Así, la recta de ecuación $y = 1$ es una asíntota horizontal para g tanto en $-\infty$ como en $+\infty$. Con el objeto de hacer un gráfico aproximado de la situación, queremos determinar si el gráfico de f se halla por arriba, por debajo o interseca a la asíntota horizontal. Para esto, analizamos más en detalle los valores que toma la función. Para $x > 0$, tenemos que $\frac{1}{x} > 0$ y, en consecuencia, $e^{\frac{1}{x}} > e^0 = 1$, mientras que para $x < 0$, tenemos que $\frac{1}{x} < 0$, con lo cual $e^{\frac{1}{x}} < e^0 = 1$. Así, el gráfico de f estará por arriba de la recta $y = 1$ cuando $x \to +\infty$ y por debajo de la recta $y = 1$ cuando $x \to -\infty$:



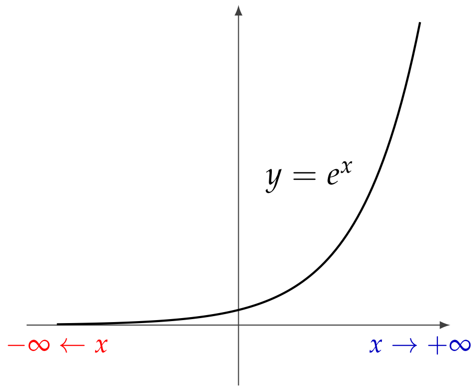
En los ejemplos siguientes veremos que, cuando una recta $y = y_0$ es asíntota horizontal de una función f, no siempre lo es en $+\infty$ y en $-\infty$ (ver, también, los gráficos al comienzo).

Ejemplo 3. Consideremos la función $f(x) = e^x$.

Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$ y sabemos que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Por lo tanto, la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f, pero el gráfico de f "se acerca" a esta recta solamente cuando x tiende a $-\infty$:



Ejemplo 4. Sea $g(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$.

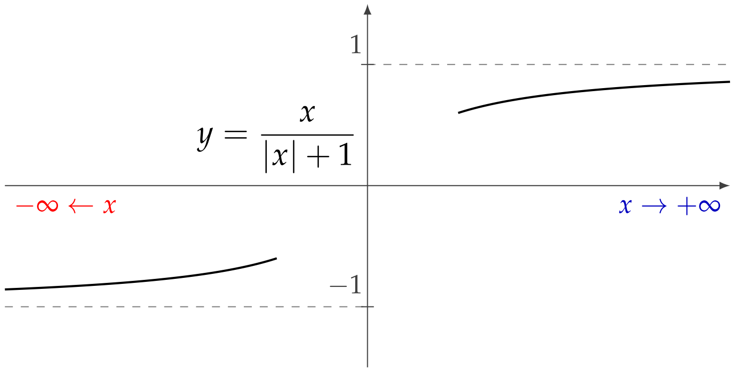
Nuevamente se trata de una función definida en todo $\mathbb{R}$.
Para calcular el límite cuando x tiende a $-\infty$, nos interesan los valores de x grandes en valor absoluto, pero negativos. Para estos valores, tenemos que $x < 0$ y, por lo tanto, $|x| = -x$. Entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(-1+\frac{1}{x}\right)} = -1$$

y la recta de ecuación $y = -1$ es asíntota horizontal para g en $-\infty$.
Por otro lado, cuando estudiamos el límite cuando x tiende a $+\infty$, nos interesan los valores de x grandes. Estos valores cumplen que $x > 0$ y, en consecuencia, $|x| = x$. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

y la recta de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal para g en $+\infty$.
De este modo, vemos que g tiene un comportamiento distinto en $-\infty$ que en $+\infty$; más aún, tiene dos asíntotas horizontales distintas.
Con la información obtenida y, observando que $\dfrac{x}{-x+1} > -1$ para $x < 0$ (lo que nos dice que el gráfico de g está por encima de la recta $y = -1$ para $x \to -\infty$) y que $\dfrac{x}{x+1} < 1$ para $x > 0$ (con lo que el gráfico de g está por debajo de la recta $y = 1$ para $x \to +\infty$), concluimos que el aspecto del gráfico de g en $-\infty$ y en $+\infty$ es aproximadamente:



1.2. Propiedades y más ejemplos

Las propiedades y técnicas vistas para el cálculo de límites de sucesiones se extienden al caso de límites de funciones; en particular, el álgebra de límites y las propiedades del "sándwich" son válidas también en el contexto de funciones reales.

Ejercicio 1. Para cada una de las siguientes funciones, calcular los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y dar las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

- $f(x) = -3x^5 + x^2 - 1$

  Solución

  Empecemos calculando el límite cuando x tiende a $-\infty$:

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{-3\overbrace{x^5}^{\to-\infty}}_{\to+\infty} + \underbrace{x^2}_{\to+\infty} -1) = +\infty.$$

  Al intentar calcular el límite cuando x tiende a $+\infty$, nos encontramos con una indeterminación, ya que

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{-3\overbrace{x^5}^{\to+\infty}}_{\to-\infty} + \underbrace{x^2}_{\to+\infty} -1).$$

  Para salvarla, sacamos como factor común la máxima potencia de x que aparece (la idea es que, para valores grandes de x, el término que determina el comportamiento de f es el de la mayor potencia de x):

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-3x^5 + x^2 - 1) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^5}_{\to+\infty} \underbrace{\left(-3 + \overbrace{\frac{1}{x^3}}^{\to 0} - \overbrace{\frac{1}{x^5}}^{\to 0}\right)}_{\to -3} = -\infty.$$

Como los dos límites son infinitos, $\boxed{\text{no hay asíntotas horizontales para } f}$. □

- $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2} - x$

Solución

El límite de esta función cuando $x \to -\infty$ se puede calcular fácilmente:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\sqrt{x^2 - x + 2}}_{\to +\infty} \underbrace{- x}_{\to +\infty} = +\infty.$$

Procediendo en forma análoga para calcular el límite cuando $x \to +\infty$, vemos que estamos en presencia de una indeterminación del tipo "$(+\infty) - (+\infty)$". Como la función es una diferencia que involucra una raíz cuadrada, intentamos salvar la indeterminación multiplicando y dividiendo por la expresión *conjugada* $\sqrt{x^2 - x + 2} + x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \Big(\underbrace{\sqrt{x^2 - x + 2}}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to +\infty} \Big) = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 2} - x)(\sqrt{x^2 - x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{-x + 2}^{\to -\infty}}{\underbrace{\sqrt{x^2 - x + 2} + x}_{\to +\infty}} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + 1\right)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La recta de ecuación } y = -\frac{1}{2} \text{ es asíntota horizontal.}}$ □

- $f(x) = \dfrac{3^{x+1} + 4}{3 - 2 \cdot 3^x}$

Solución

Para comenzar, recordemos que $\lim_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} 3^x = 0$, ya que es una exponencial de base mayor que 1.

En primer lugar, calculemos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Como $\lim_{x\to+\infty} 3^{x+1}+4=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} 3-2\cdot 3^x=-\infty$, se trata de una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Para salvarla, sacaremos factor común en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}+4}{3-2\cdot 3^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{x+1}\left(1+\frac{4}{3^{x+1}}\right)}{3^x\left(\frac{3}{3^x}-2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot\cancel{3^x}\Big(1+\overbrace{\frac{4}{3^{x+1}}}^{\to 0}\Big)}{\cancel{3^x}\Big(\underbrace{\frac{3}{3^x}}_{\to 0}-2\Big)}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

En consecuencia, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y=-\frac{3}{2} \text{ es asíntota horizontal para } f \text{ en } +\infty}$.

Calculemos, ahora, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Como $\lim_{x\to-\infty} \underbrace{3^{x+1}}_{\to 0}+4=4$ y $\lim_{x\to-\infty} 3-2\cdot\underbrace{3^x}_{\to 0}=3$, el límite que queremos calcular es el cociente de estos dos límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{x+1}+4}{3-2\cdot 3^x}=\frac{4}{3}$$

Entonces, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y=\frac{4}{3} \text{ es asíntota horizontal en } -\infty}$. □

- $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Solución

Como no existen $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sen}(x)$ ni $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{sen}(x)$ (la función oscila entre -1 y 1; por lo tanto, los valores que toma para x "grandes" en valor absoluto no se acercan a ningún valor en particular), no podemos aplicar el álgebra de límites.

Miremos a la función f como un producto:

$$f(x)=\frac{1}{x}.\operatorname{sen}(x)$$

La función $\frac{1}{x}$ cumple que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

y la función $\text{sen}(x)$ es acotada:

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1.$$

Entonces, tanto en $-\infty$ como en $+\infty$, estamos en presencia de una situación del tipo ”0 por acotado”. En consecuencia:

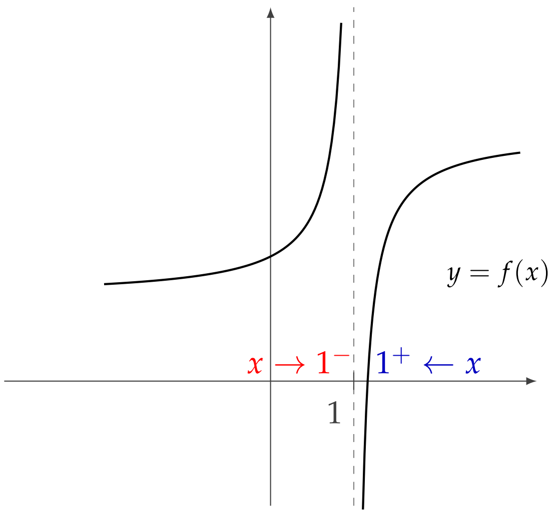
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\text{sen}(x)}_{\text{acot.}} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\text{sen}(x)}_{\text{acot.}} = 0.$$

La recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f. □

Con lo visto hasta aquí, se puede resolver los ejercicios 1 y 2 de la Práctica 4.

2. Límite en un punto - Asíntotas verticales

Consideremos la función f cuyo gráfico es el siguiente:



Observamos que, cuando x se acerca a 1 por la izquierda (es decir, considerando sólo valores x tales que $x < 1$), la función toma valores positivos arbitrariamente grandes. En este caso, decimos que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 por izquierda es $+\infty$* y escribimos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

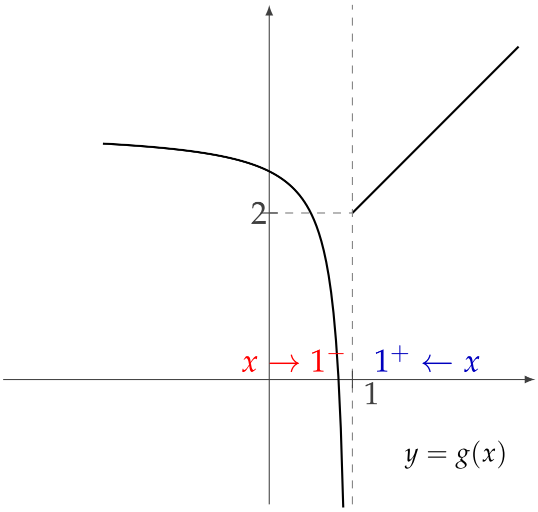
(el signo $-$ en 1^- indica que la variable se acerca a 1 por *izquierda*).

Asimismo, a medida que x se acerca a 1 por la derecha (es decir, considerando sólo valores x tales que $x > 1$), la función toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. En este caso, decimos que el *límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 por derecha es $-\infty$* y escribimos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

(el signo $+$ en 1^+ indica que la variable se acerca a 1 por *derecha*).

Consideremos ahora la función g cuyo gráfico es el siguiente:



De manera similar al ejemplo anterior, observamos en el gráfico que, cuando x se acerca a 1 por la izquierda, la función g toma valores negativos que se hacen tan grandes en valor absoluto como uno quiera con tal que x esté suficientemente cerca de 1. Entonces:

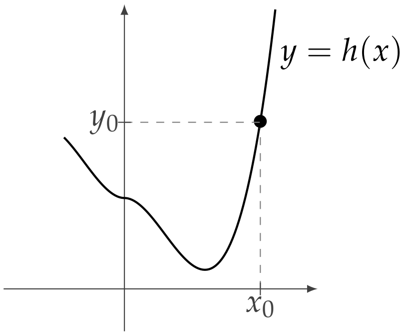
$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty.$$

En cambio, cuando x se acerca a 1 por la derecha, vemos que los valores de $g(x)$ se hacen tan cercanos al número 2 como se quiera. Decimos entonces que el *límite de $g(x)$ cuando x tiende a 1 por la derecha es* 2 y escribimos:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 2.$$

Si el límite de una función, cuando x tiende a un valor x_0 por izquierda, da infinito ($+\infty$ o $-\infty$), o bien el límite cuando x tiende a x_0 por derecha da infinito, o si se dan ambas situaciones simultáneamente, se dice que la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical*.
Por ejemplo, las funciones f y g de los gráficos de arriba tienen como asíntota vertical a la recta de ecuación $x = 1$ (si bien $\lim\limits_{x\to 1+} g(x) = 2$ no es infinito, alcanza con que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$ para afirmar que $x = 1$ es asíntota vertical para g).

Los límites por derecha y por izquierda no necesariamente deben dar distinto, o infinito. Por ejemplo, en la función h del siguiente gráfico



vemos que dado un valor x_0, si x está suficientemente cerca de x_0 (ya sea a la derecha o a la izquierda), los valores de $h(x)$ están arbitrariamente cerca del número $y_0 = h(x_0)$. Decimos, entonces, que el *límite de $h(x)$ cuando x tiende a x_0 es y_0* y escribimos:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = y_0$$

(la notación $x \to x_0$ significa que x se acerca a x_0 tanto por la derecha como por la izquierda).

En la entrada "Límite puntual" se puede encontrar la definición precisa de esta noción. Nuevamente, recomendamos, en primer lugar, centrarse en los ejemplos que mostramos en las próximas secciones.

2.1. Límite puntual de funciones dadas por fórmulas

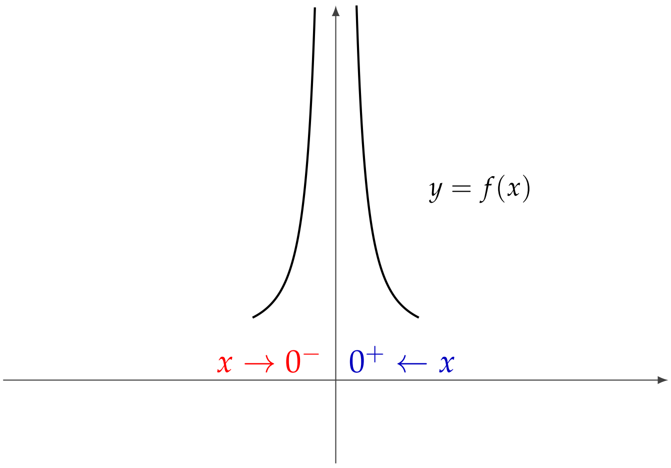
A continuación, veremos algunos ejemplos de cálculo de límites y asíntotas verticales para funciones dadas por su fórmula $f(x)$ y la información que esto nos provee en relación con el gráfico de f.

Ejemplo 1. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

El dominio de f es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Para valores "cercanos" a 0, tanto si nos acercamos por la derecha como por la izquierda, la función toma valores arbitrariamente grandes, es decir:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

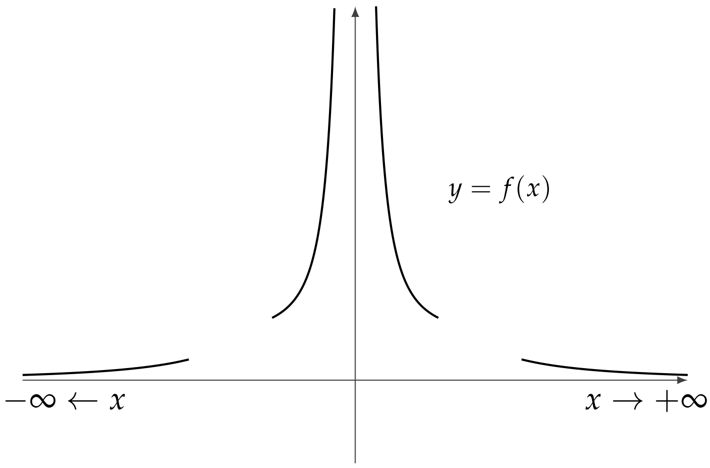
Luego, la recta de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical para f y el gráfico de f cerca de 0 es aproximadamente:



Además, podemos estudiar los límites en $+\infty$ y en $-\infty$, lo que nos da más información sobre el gráfico de f:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

De este modo, deducimos que la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f, lo que se refleja en su gráfico como muestra la siguiente figura:



Ejemplo 2. Sea g la función definida por $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

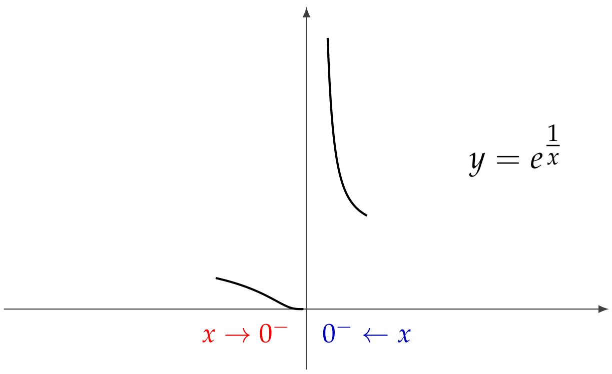
El dominio de g es $\mathbb{R} - \{0\}$. Analicemos su comportamiento para valores cercanos a 0. Cuando $x \to 0^-$, el exponente $\dfrac{1}{x}$ tiende a $-\infty$, pues toma valores negativos y arbitrariamente grandes en valor absoluto. Recordando el comportamiento de la función exponencial en $-\infty$, deducimos que

$$\lim_{x\to0^-} g(x) = \lim_{x\to0^-} e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to-\infty}} = 0.$$

De manera similar, cuando $x \to 0^+$, el exponente $\dfrac{1}{x}$ tiende a $+\infty$ y, entonces, el comportamiento de la función exponencial en $+\infty$ implica que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to +\infty}} = +\infty.$$

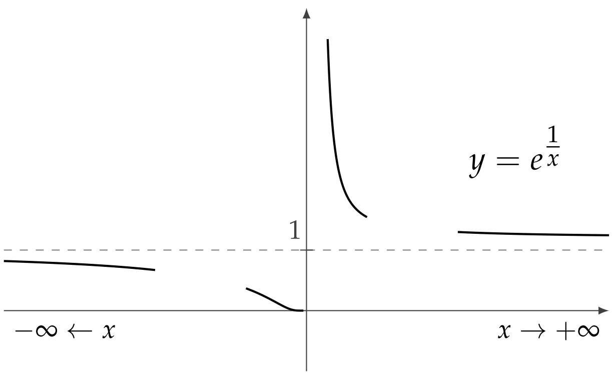
Así, la recta de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical para g (pero el gráfico de g se aproxima a esta recta solamente cuando x se acerca a 0 por la derecha). El gráfico de g cerca de 0 es aproximadamente:



Teniendo en cuenta la información que ya habíamos obtenido sobre el comportamiento de g en el infinito:

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

y cómo se refleja en el gráfico de g, concluimos que el aspecto del gráfico de g es el siguiente:



2.2. Propiedades y más ejemplos

Al igual que en el caso de límites en el infinito, las propiedades básicas que nos permiten calcular límites, tales como el álgebra de límites, ”0 por acotado” y la propiedad del ”sándwich´´, se extienden también a límites en un punto.

Ejercicio 2. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio y dar las ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales.

- $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

Solución

Dado que f es un cociente de polinomios, el dominio de f está formado por todos los números reales que no anulan a su denominador. Como las soluciones de $x^2 - 1 = 0$ son $x = 1$ y $x = -1$, resulta que $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$.

Los valores de x que son candidatos a dar asíntotas verticales son los "bordes" del dominio de f, es decir, los x que no pertenecen al dominio pero a los que nos podemos acercar por puntos del dominio; en este caso, $x = 1$ y $x = -1$. Estudiemos, entonces, los límites cuando la variable tiende a estos valores:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{2x^2 - 3x + 1}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}}$$

Estamos en presencia de una indeterminación del tipo "$\dfrac{0}{0}$". Para intentar salvarla, como $x = 1$ es raíz del numerador y del denominador de la función, podemos factorizar a cada uno de ellos (en cada caso, uno de los factores será $x - 1$) y simplificar:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}\overbrace{(2x-1)}^{\to 1}}{\cancel{(x-1)}\underbrace{(x+1)}_{\to 2}} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, $x = 1$ *no* es una asíntota vertical para f. Por otra parte,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{\overbrace{2x^2 - 3x + 1}^{\to 6}}{\underbrace{x^2 - 1}_{\to 0}} = \infty.$$

Esto nos dice que $\boxed{\text{la recta de ecuación } x = -1 \text{ es una asíntota vertical para } f}$.

Podemos obtener más información sobre el comportamiento de f cerca de -1 analizando los límites laterales y determinando el signo de los valores que la función toma a la izquierda y a la derecha de -1:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{2x^2-3x+1}^{\to 6}}{\underbrace{(x-1)}_{\to -2}\underbrace{(x+1)}_{\to 0^-}} = +\infty.$$

Aquí, $\to 0^-$ indica que los valores tienden a 0 por izquierda, es decir, siendo negativos (cuando $x \to -1^-$, se consideran valores $x < -1$, con lo cual $x+1 < 0$); luego, por la regla de los signos, los valores que toma la función cuando $x \to -1^-$ son positivos. Análogamente, se obtiene que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{2x^2-3x+1}^{\to 6}}{\underbrace{(x-1)}_{\to -2}\underbrace{(x+1)}_{\to 0^+}} = -\infty$$

(donde $\to 0^+$ significa que los valores tienden a 0 por la derecha, es decir, que son positivos).

Determinemos ahora, si existen, las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1-\frac{1}{x^2})} = 2$$

y, de la misma manera, vemos que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2.$$

En consecuencia, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal para } f.}$ □

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x}$

Solución

El dominio de f está formado por aquellos valores de x para los cuales no se hace cero el denominador y, además, el argumento de la raíz cuadrada es mayor o igual que 0:

$$x^2 - x \neq 0 \quad \text{y} \quad x+8 \geq 0$$

$$\iff x(x-1) \neq 0 \quad \text{y} \quad x \geq -8$$

$$\iff \quad x \neq 0, \quad x \neq 1 \quad \text{y} \quad x \geq -8$$

por lo que tenemos que $\boxed{\mathrm{Dom}(f) = [-8,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)}$.

Los candidatos a asíntotas verticales son $x = 0$ y $x = 1$. Estudiemos los límites correspondientes.

En primer lugar, analizamos el comportamiento de f para $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt{x+8}-3}^{\to\sqrt{8}-3\,(<0)}}{\underbrace{x^2-x}_{\to 0}} = \infty.$$

Concluimos que $\boxed{\text{la recta de ecuación } x = 0 \text{ es asíntota vertical para } f}$.

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indet. } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x^2-x)(\sqrt{x+8}+3)} = \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x+8)-9}{(x^2-x)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x^2-x)(\sqrt{x+8}+3)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{indet. } \frac{0}{0}}}{=} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\underbrace{x}_{\to 1}\underbrace{(\sqrt{x+8}+3)}_{\to 6}} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

por lo que vemos que $x = 1$ *no* es asíntota vertical para f.

Para determinar las asíntotas horizontales de f, debemos estudiar el límite cuando x tiende $+\infty$ (observamos que, por cómo es el dominio de f, no tiene sentido el límite en $-\infty$, ya que x no puede tomar valores menores que -8):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x} \underset{\text{indet. } \frac{\infty}{\infty}}{\underset{\downarrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{8}{x}\right)}-3}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}.\sqrt{1+\frac{8}{x}}-3}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}.\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{x^{\cancel{2}\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \overbrace{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}^{\to 0} . \frac{\overbrace{\left(\sqrt{1+\frac{8}{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}^{\to 1-0=1}}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 1}} = 0.$$

En consecuencia, $\boxed{\text{la recta de ecuación } y = 0 \text{ es asíntota horizontal para } f \text{ en } +\infty}$. $\square$

- $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución

En este caso, como la función seno está definida para todo número real, el único valor de $x \in \mathbb{R}$ que no está en el dominio de f es el que anula al denominador de la fracción $\frac{1}{x}$ a la que se le aplica; entonces, tenemos que $\boxed{\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$.

Analicemos el comportamiento de f cerca de 0. Para esto calculamos el límite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \overbrace{x}^{\to 0} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotada}} = 0.$$

Esto nos dice que $\boxed{\text{la recta de ecuación } x = 0 \text{ es asíntota vertical para } f}$.

Al intentar determinar si el gráfico de f tiene asíntotas horizontales, nos encontramos con una indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \overbrace{x}^{\to\infty} \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}.$$

Veremos cómo salvar esta indeterminación más adelante... $\square$

2.3. Dos ejemplos importantes

En lo que sigue, nos interesa estudiar el comportamiento de las funciones

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

en los "bordes" de sus dominios, analizando la existencia de asíntotas horizontales y verticales.

- $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

  El dominio de esta función es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, ya que la función exponencial está definida en todo $\mathbb{R}$ y la división por x puede efectuarse si y sólo si $x \neq 0$.

  Para analizar el comportamiento de f cerca de 0, calculamos los límites laterales cuando $x \to 0^+$ y $x \to 0^-$:

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^-}} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

  Concluimos que la recta de ecuación $x = 0$ es asíntota vertical para f.

  Veamos, ahora, lo que ocurre cuando $x \to -\infty$, es decir, para valores de x negativos y grandes en valor absoluto:

  $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^x}_{\to 0} = 0$$

  De esta manera, vemos que la recta de ecuación $y = 0$ es asíntota horizontal para f en $-\infty$.

  Nos queda por ver qué ocurre para valores positivos grandes de x, es decir, cuando $x \to +\infty$. En este caso, estamos en presencia de una indeterminación:

  $$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}}$$

  Recordemos que, al estudiar sucesiones en la Práctica 3, vimos que

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty.$$

Esto nos lleva a pensar que el límite que queremos calcular también debería ser $+\infty$. Apliquemos el resultado sobre la sucesión para ver que, en efecto, esto es así. La observación importante es que, para cada número $x \in \mathbb{R}_{>0}$, hay algún número natural n tal que

$$n \leq x < n+1.$$

Entonces

$$e^n \leq e^x \quad \text{y} \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x}$$

con lo cual,

$$\frac{e^n}{n+1} < \frac{e^x}{x}.$$

Ahora, cuando $x \to +\infty$, los valores de n correspondientes también tienden a infinito y, como

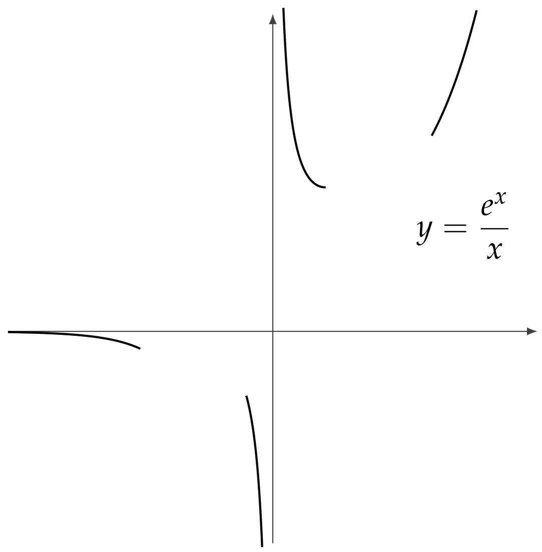
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{e^n}{n}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} = +\infty,$$

de la desigualdad anterior deducimos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

(y no hay asíntota horizontal en $+\infty$). El hecho de que el cociente $\frac{e^x}{x}$ tienda a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, puede interpretarse como que *la función exponencial "crece más rápido" que la función lineal*.

Con la información obtenida a partir de los límites que calculamos, podemos hacer un gráfico aproximado de f cerca de 0 y para valores grandes de x:



- $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

  El dominio de g es $\text{Dom}(g) = (0, +\infty)$, ya que el dominio del logaritmo es este intervalo y la división por x puede efectuarse para todo $x \neq 0$.

  Para analizar el comportamiento de g "cerca de 0" calculamos el límite de la función cuando x tiende a 0 por derecha, pues g no está definida para $x < 0$. Recordando el comportamiento de la función logaritmo cerca de cero, tenemos que

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = -\infty.$$

  De esta manera, vemos que la recta de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical para g.

  Por otro lado, estudiemos el límite de la función cuando $x \to +\infty$. Nos encontramos con una indeterminación:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to +\infty}}{\underbrace{x}_{\to +\infty}}.$$

  Para poder calcular este límite, haremos un *cambio de variables* de manera de reducirlo a un límite conocido o más fácil de calcular. En este caso, tomamos $y = \ln(x)$. Observemos que cuando $x \to +\infty$, resulta que $y \to +\infty$. Entonces, en términos de la nueva variable y, el límite que queremos calcular es

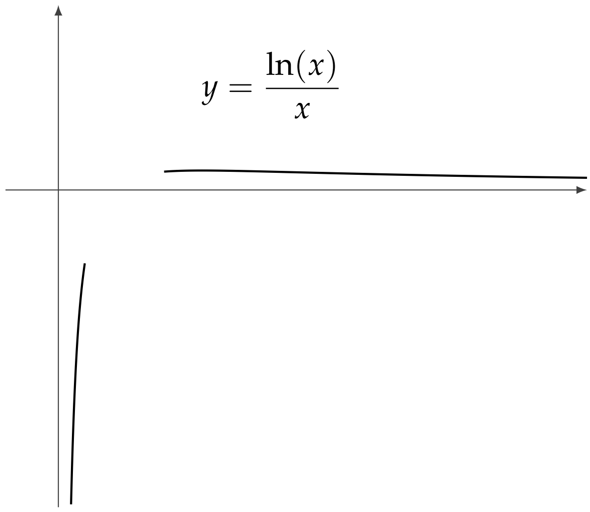
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y}.$$

  Aunque seguimos teniendo una indeterminación del tipo "$\dfrac{\infty}{\infty}$", al reescribir la fracción que aparece, obtenemos la función f del ejemplo anterior, cuyo límite ya conocemos:

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^y}{y}}_{\to +\infty}} = 0.$$

  Podemos interpretar este resultado como que *la función logaritmo crece "más lentamente" que la función lineal*.

  Finalmente, si observamos también que la función $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ toma valores positivos para valores grandes de x, podemos hacer un gráfico que refleja el comportamiento de g en los "bordes" de su dominio:



Con lo visto hasta aquí, se puede resolver hasta el ejercicio 7 de la Práctica 4.

3. Límites especiales

Estudiaremos ahora dos límites especiales que utilizaremos como base para el cálculo de otros límites.
En primer lugar, consideraremos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Dado que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$, se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Mediante un razonamiento geométrico que se puede ver en la entrada "Cálculo de un límite especial", se deduce que vale:

Propiedad.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Más aún, si hacemos un cambio de variables para reducirlo al caso anterior, resulta que:

Si f es una función tal que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1$.

A continuación, aplicaremos este resultado para el cálculo de otros límites que involucran indeterminaciones con funciones trigonométricas.

Ejercicio 3. Calcular los siguientes límites.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)}$

  Solución
  Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en la que el numerador y el denominador involucran la función *seno*. Para calcular el límite, reescribiremos la función en términos de funciones del tipo $\frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)}$ con $f(x)\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(4x)}=\lim_{x\to 0}\ \operatorname{sen}(3x)\,\frac{1}{\operatorname{sen}(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4}\,\overbrace{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}^{\to 1}\,\frac{1}{\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}_{\to 1}}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

$\square$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(3x)-x^2}$

  Solución
  Nuevamente se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Dividimos numerador y denominador por x y aplicamos la propiedad distributiva con respecto a la suma para reescribir la función en términos de otras cuyos límites podemos calcular y, de este modo, salvamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(3x)-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+\operatorname{sen}(x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)-x^2}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\overbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}^{\to 1}}{3\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}_{\to 1}-x}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$\square$

- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

  Solución

Como $\frac{1}{x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$, tenemos una indeterminación del tipo $\infty \cdot 0$. Reescribiendo la función resulta:

$$\lim_{x\to+\infty} x.\ \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \boxed{1}$$

Podemos, ahora, completar el análisis de asíntotas para la función $f(x) = x\ \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ que habíamos comenzado en el Ejercicio 2: por el cálculo anterior, la recta de ecuación $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$ para f. De igual manera, se ve que la misma recta es, también, asíntota horizontal en $-\infty$. $\square$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$

Solución

Nuevamente nos encontramos frente a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, dado que $\lim\limits_{x\to 0}\cos(x) = 1$. En este caso, a diferencia de los anteriores, la función involucrada es *coseno*, en lugar de *seno*. Recordando la identidad $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, válida para todo x, obtenemos una nueva expresión para el cálculo del límite multiplicando numerador y denominador por $\cos(x) + 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x(\cos(x)+1)} \underset{\cos^2(x)=1-\text{sen}^2(x)}{\overset{\downarrow}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}^2(x)}{x(\cos(x)+1)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\text{sen}(x)}{x}}_{\to 1} \frac{-\overbrace{\text{sen}(x)}^{\to 0}}{\underbrace{\cos(x)}_{\to 1}+1} = \boxed{0}$$

$\square$

En base al ejercicio anterior, se puede resolver el ejercicio 8 de la Práctica 4.

El segundo de los límites especiales que nos interesa calcular es el siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Como $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$, estamos ante una indeterminación del tipo 1^∞.
Recordemos que, al estudiar sucesiones en la Práctica 3, vimos que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

es decir, conocemos el valor del límite cuando la variable x toma valores en los números naturales en lugar de números reales. Sin embargo, de manera similar a lo hecho para calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$, se puede deducir que también vale:

Propiedad.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

y que lo mismo ocurre para $x \to -\infty$, es decir:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

A partir de este resultado, es posible calcular otros límites en el caso de indeterminaciones del tipo 1^∞; por ejemplo, calculemos

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

(observemos que, en efecto, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞). Al hacer el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$, nos queda:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Ejercicio 4. Calcular los siguientes límites.

- $\lim_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}}$

Solución

Calculando los límites de las funciones que aparecen en la base y en el exponente, obtenemos que $\lim_{x\to-\infty} 1+\dfrac{3}{x+1} = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x+1} = -\infty$, con lo cual se trata de una indeterminación del tipo 1^∞.

Al igual que para el cálculo de límites de sucesiones que dan lugar a indeterminaciones del tipo 1^∞, para aplicar la propiedad vista anteriormente, reescribiremos la función como una potencia de otra de la forma

$$\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \qquad \text{con } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Comenzamos reescribiendo la base de la potencia y, a continuación, el exponente:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{\overbrace{\frac{x+1}{3}}^{\to-\infty}}}_{\to e}\Bigg)^{\frac{3}{x+1}\frac{x^2}{2x+1}}$$

Calculamos, ahora, el límite de la función que aparece en el exponente:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3}{(1+\frac{1}{x})(2+\frac{1}{x})} = \frac{3}{2}.$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{2x+1}} = \lim_{x\to-\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{3}}\right)^{\frac{x+1}{3}}}_{\to e}\Bigg)^{\overbrace{\frac{3x^2}{(x+1)(2x+1)}}_{\to\frac{3}{2}}} = \boxed{e^{\frac{3}{2}}}$$

$\square$

- $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}$

Solución

Observamos que se trata de una indeterminación del tipo 1^∞, ya que

$$\lim_{x\to3}\frac{2x+1}{3x-2}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to3}\frac{x}{x-3}=\infty.$$

Entonces, para calcular el límite, reescribiremos la función de manera similar a lo hecho en el ejemplo anterior:

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}=\lim_{x\to3}\left(1+\frac{2x+1}{3x-2}-1\right)^{\frac{x}{x-3}}=\lim_{x\to3}\left(1+\frac{3-x}{3x-2}\right)^{\frac{x}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to3}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-2}{3-x}}\right)^{\frac{x}{x-3}}=\lim_{x\to3}\left(\left(1+\frac{1}{\underbrace{\frac{3x-2}{3-x}}_{\to\infty}}\right)^{\frac{3x-2}{3-x}}\right)^{\frac{3-x}{3x-2}\frac{x}{x-3}}$$

$$=\lim_{x\to3}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{3x-2}{3-x}}\right)^{\frac{3x-2}{3-x}}}_{\to e}\Bigg)^{\overbrace{\frac{-x}{3x-2}}^{\to-\frac{3}{7}}}=\boxed{e^{-\frac{3}{7}}}$$

□

- $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

Solución

En este caso, se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Sin embargo, al reescribir la función, nos encontraremos nuevamente en el caso 1^∞ conocido:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+x)\underset{\substack{\downarrow\\ a\ln(b)=\ln(b^a)}}{=}\lim_{x\to0}\ln\Big(\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e}\Big)=\ln(e)=\boxed{1}$$

□

- $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$

Solución

Tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

Haremos el cambio de variables $y=e^x-1$ (o sea, $x=\ln(1+y)$) para transformar el límite en otro que ya sabemos calcular. En este caso, si $x\to0$, entonces $y\to0$. El límite queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(1+y)}{y}}_{\to 1}}=\boxed{1}$$

$\square$

Con lo visto hasta aquí, se puede resolver hasta el ejercicio 10 de la Práctica 4.

ANEXO

A. Definiciones de límite

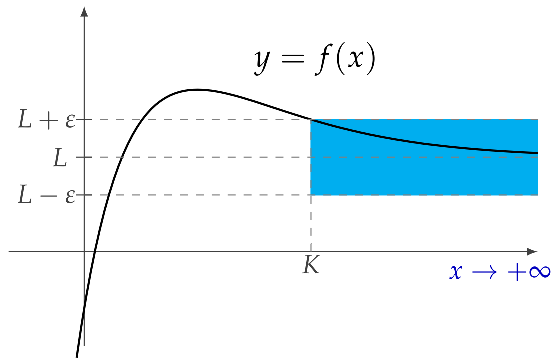
Introducimos, a continuación, las definiciones precisas relacionadas con límites de funciones, tanto en el caso de límites en el infinito como en el de límites puntuales.

A.1. Límites en el infinito

Se dice que el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $f(x)$ es un número L, y se escribe:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

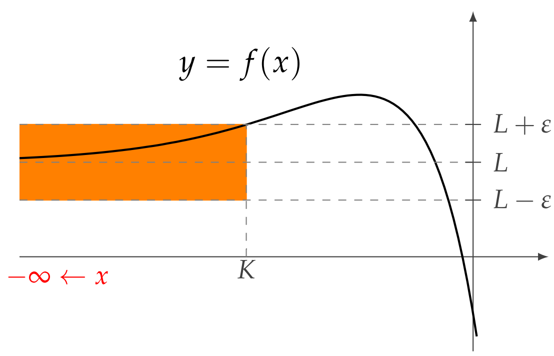


Para $x > K$, el gráfico de f está dentro de la franja celeste.

Se dice que el límite cuando x tiende a $-\infty$ de $f(x)$ es un número L, y se escribe:

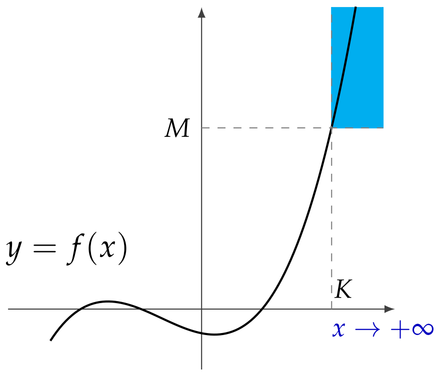
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Para $x < K$, el gráfico de f está dentro de la franja naranja.

En cualquiera de los dos casos anteriores, decimos que la recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* para f.

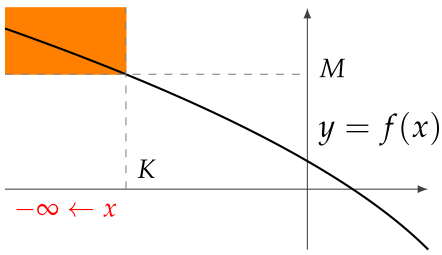


Para $x > K$, el gráfico de f está dentro del sector celeste.

Se dice que el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $f(x)$ es $+\infty$, y se escribe:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) > M$.



Para $x < K$, el gráfico de f está dentro del sector naranja.

Se dice que el límite cuando x tiende a $-\infty$ de $f(x)$ es $+\infty$, y se escribe:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$, entonces $f(x) > M$.

De manera análoga, se dice que:

- el límite cuando x tiende a $+\infty$ de $f(x)$ es $-\infty$, y se escribe:

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

  si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x > K$, entonces $f(x) < M$.

- el límite cuando x tiende a $-\infty$ de $f(x)$ es $-\infty$, y se escribe:

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

  si para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que si $x < K$, entonces $f(x) < M$.

Volver al texto principal

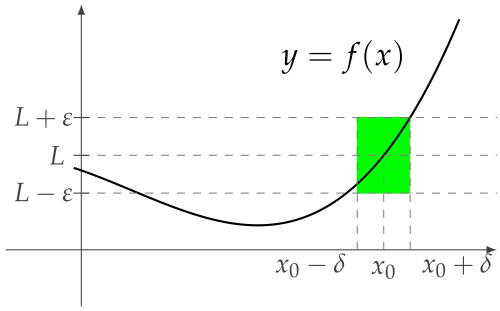
A.2. Límite puntual

Presentamos, a continuación, la definición precisa de límite puntual en el caso en que este límite es un número real.

Se dice que el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es un número L, y se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Para $0 < |x - x_0| < \delta$, el gráfico de f está dentro del sector verde.

En palabras, la definición nos dice que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ cuando, dada una distancia $\varepsilon > 0$ *cualquiera*, si x está suficientemente cerca de x_0, entonces el valor de $f(x)$ está a distancia menor que ε de L.

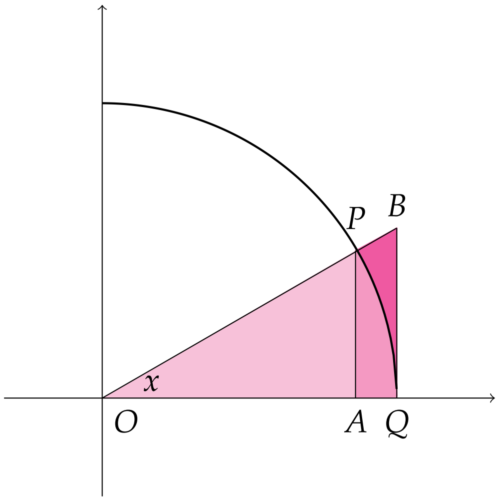
Volver al texto principal

B. Cálculo de un límite especial

Nos concentraremos, a continuación, en el cálculo del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Para deducir el valor de este límite, utilizaremos una visualización geométrica. Consideremos un ángulo de x radianes (con $0 < x < \frac{\pi}{2}$) con vértice en el origen de coordenadas O, un lado sobre el eje de las abscisas y el otro, en el primer cuadrante. Los lados de este ángulo intersecan a la circunferencia de radio 1 en dos puntos, P y Q, determinando un sector circular POQ. Construimos dos triángulos rectángulos, OAP y OQB, como se muestra en la figura:



Gráficamente, podemos observar la siguiente relación entre las áreas del sector circular y los dos triángulos rectángulos:

$$\text{área}(\triangle OAP) < \text{área}(POQ) < \text{área}(\triangle OQB)$$

Calculemos estas áreas en función de x:

- En el triángulo OAP, tenemos que la medida de su base OA es $\cos(x)$, mientras que su altura AP mide $\operatorname{sen}(x)$; luego,

$$\text{área}(\triangle OAP) = \frac{1}{2}\cos(x)\operatorname{sen}(x).$$

- En el triángulo OQB, la base OQ mide 1 (es el radio de la circunferencia). Para calcular la medida h de la altura QB, recordemos que el cociente entre las medidas de los dos catetos del triángulo, BQ y OQ, es $\operatorname{tg}(x)$; o sea que $\frac{h}{1} = \operatorname{tg}(x)$. Entonces, $h = \operatorname{tg}(x)$, y el área del triángulo resulta ser

$$\text{área}(\triangle OQB) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

- Finalmente, el área del sector circular es proporcional al ángulo que lo determina y, teniendo en cuenta que el área del círculo (correspondiente a un ángulo de 2π radianes) es π, resulta que

$$\text{área}(POQ) = \frac{1}{2}x.$$

Reemplazando los valores calculados en la desigualdad entre áreas, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\cos(x)\operatorname{sen}(x) < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Dividiendo cada miembro de la desigualdad anterior por $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) > 0$, deducimos que

$$\cos(x) < \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

y, al considerar los inversos, llegamos a que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ vale:

$$\frac{1}{\cos(x)} < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \cos(x).$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$, también vale $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos(x)} = 1$ y, entonces, aplicando la propiedad del "sándwich", deducimos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

En forma similar, puede verse que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

Volver al texto principal

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Límite de funciones, Teóricas de Análisis Matemático (28).*

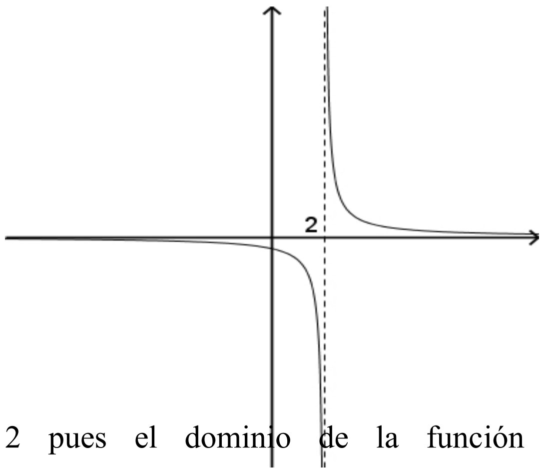
Práctica 4 – Parte 2

Continuidad

1. Idea de continuidad

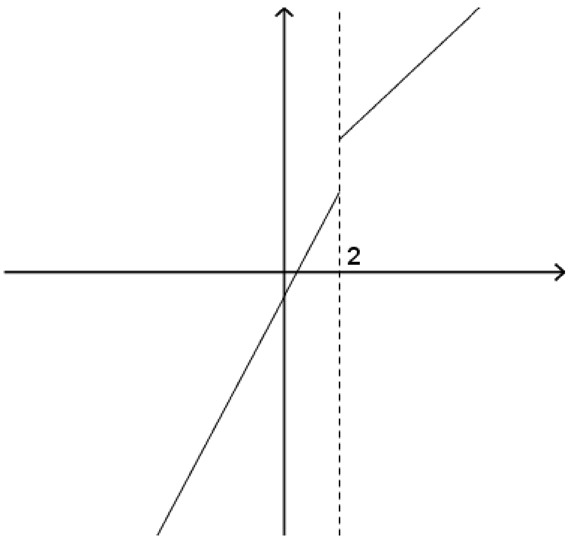
Intuitivamente una función es continua en un punto $x = a$ si está definida en dicho punto y su gráfico puede dibujarse sin tener que levantar el lápiz del papel. Para visualizar este concepto, consideremos las siguientes funciones reales en $x = 2$:

$$f_1(x) = \frac{3}{x-2}$$



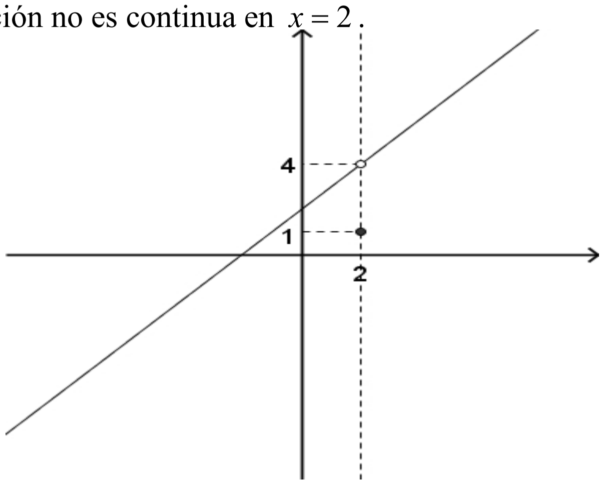
La función $f_1(x) = \dfrac{3}{x-2}$ no está definida en 2 pues el dominio de la función es $Dom f(x) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Por lo visto al estudiar límite de funciones, sabemos que $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x) = \infty$ y observamos que al dibujarla hay que levantar el lápiz del papel, con lo cual intuimos que esta función no es continua en $x = 2$.

$$f_2(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x > 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$



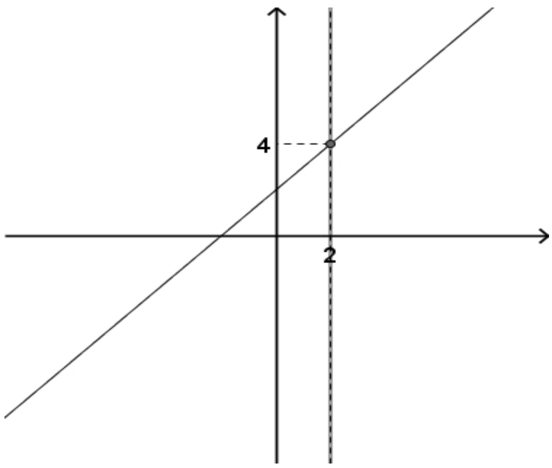
La función $f_2(x)$ está definida en 2 y $f_2(2)=5$, o sea, el punto $(2,5)$ está en el gráfico de $f_2(x)$, pero para dibujarla hay que levantar el lápiz, la función da un salto. Al aproximarse a 2 por la izquierda, la función se acerca a 3, es decir, $\lim_{x\to 2^-} f_2(x) = 3$; sin embargo al acercarnos por la derecha se acerca a 5: $\lim_{x\to 2^+} f_2(x) = 5$. Los límites laterales no coinciden, entonces $\lim_{x\to 2} f_2(x)$ no existe, sospechamos que la función no es continua en $x=2$.

$$f_3(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 1 & \text{si } x=2 \end{cases}$$



La función $f_3(x)$ está definida en 2 y $f_3(2)=1$, es decir, el punto $(2;1)$ está en el gráfico de la función pero al acercarnos al 2 la función se acerca a 4, es decir, $\lim_{x\to 2} f_3(x) = 4$. El valor de la función no coincide con el límite. Acá, también vemos que la función no es continua.

$$f_4(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x\neq 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$$



La función $f_4(x)$ está definida en 2 y $f_4(2)=4$,o sea, el punto $(2;4)$ está en el gráfico de la función, y al aproximarse a 2 la función se acerca a 4, es decir, $\lim_{x\to 2} f_4(x)=4$. Los valores de la función y del límite en $x=2$ coinciden. Se puede dibujar la función sin levantar el lápiz del papel.

Conclusión: la función $f_4(x)$ es continua, las otras no lo son.

Esto nos hace notar que el concepto de *continuidad* está estrechamente ligado al concepto de *límite*. Empecemos definiendo la continuidad de una función en un punto y, después, veremos continuidad en un intervalo y sus consecuencias.

Definición. Una función f es ***continua*** en $x = a$**,** si :

1) Existe $f(a)$, es decir, $a \in Dom(f)$**.**
2) Existe $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$, es decir, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \in \mathbb{R}$.
3) El límite y el valor de la función coinciden, es decir $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Al volver a los ejemplos, podemos afirmar que $x = 2$:

La función $f_1(x)$ es discontinua porque no cumple la condición 1).

La función $f_2(x)$ es discontinua porque no cumple la condición 2).

La función $f_3(x)$ es discontinua porque no cumple la condición 3), esta se conoce como discontinuidad ***evitable.***

La función $f_4(x)$ resulta continua.

2. Funciones continuas

Una función es ***continua*** si lo es en cada punto de su dominio.

Ejemplo. $f(x) = x$ es continua para todo punto de su dominio. $Domf = \mathbb{R}$.

Una función es continua en un intervalo, si lo es en cada punto de dicho intervalo.

Ejemplo. $g(x) = \sqrt{2x-8}$ definida en el intervalo $4 \le x \le 12$ es continua.

La suma de funciones continuas es continua, así como también, el producto y el cociente donde el denominador es no nulo.

Ejemplos. $h(x) = f(x) + g(x) = x + \sqrt{2x-8}$ para $x \geq 4$ porque el dominio de $g(x)$

$k(x) = f(x).g(x) = x.\sqrt{2x-8}$ también resulta continua.

Como la función $f(x) = x$ es continua y una función polinómica es una combinación de productos y sumas de estas, todas las funciones polinómicas son continuas.

Ejemplo. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ es una función polinómica, por lo cual es continua.

Las funciones $\text{sen}(x), \cos(x), e^x$ y $\ln(x)$ son continuas en su dominio.

A las funciones que no son continuas, se las llama ***discontinuas***. Hay discontinuidades como las del ejemplo $f_1(x) = \dfrac{3}{x-2}$ donde no se puede redefinir la función y no se puede evitar pero otras si son evitables.

2.1 Discontinuidades evitables

La función $f(x) = \dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$ no está definida en $x = 5$ (se anula el denominador).

Con esto alcanza (condición 2) de la definición) para decir que f no es continua en ese punto

(es decir, $f(x)$ es *discontinua* en $x = 5$).

Sin embargo:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} = \lim_{x \to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} \frac{\sqrt{x+4}+3}{\sqrt{x+4}+3} = \lim_{x \to 5} (\sqrt{x+4}+3) = 6$$

(La situación es similar a $f_3(x)$, ver su gráfico)

Como existe el límite de la función en $x = 5$ y es igual a 6, "redefinimos" la función f "agregando" de esta manera el valor del límite en $x = 5$ (obtenemos una función continua).

La nueva función $g(x)$ definida así:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si} \quad -4 \leq x \text{ , } x \neq 5 \\ 6 & \text{si} \quad x = 5 \end{cases} \qquad \text{es continua en } x = 5.$$

Ejercicio 1. Decidir si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x=2 \end{cases}$ es continua en $x=2$.

Solución

Para ver si la función es continua, debemos calcular el límite en $x=2$, reemplazando $x^2-4=(x-2)(x+2)$ y simplificando $x-2$, obtenemos $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2} x+2=4$.

Como el límite coincide con el valor de la función en el punto, podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $x=2$.

Ejercicio 2. Decidir si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{3x-3} & \text{si} \quad x>1 \\ \dfrac{x}{6} & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$ es continua en $x=1$.

Solución

Para ver si la función es continua debemos calcular el límite en $x=1$, pero como es una función partida debemos calcular los límites laterales en $x=1$.

Calculemos $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, por la definición de la función, esto es igual a $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Calculemos $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, por la definición de la función, esto es igual a $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{3x-3}$.

Para calcular este límite, multiplicamos y dividimos por el conjugado de $\sqrt{x}-1$ o sea, $\sqrt{x}+1$, el producto da $x-1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{3(x-1)}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ y queda así $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{3(x-1)\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{6}$.

Entonces como los límites laterales coinciden, decimos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{6}$ y coincide con el valor de la función en el punto. Podemos afirmar que $f(x)$ es continua en $x=1$.

Ejercicio 3. Decidir si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\text{sen}(3x)}{x} & \text{si } x>0 \\ x+3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ es continua en $x=0$.

Solución

Para ver si la función es continua, debemos calcular el límite en $x = 0$ y ver si coincide con el valor de la función en dicho punto.

Al ser una función partida, tenemos que calcular los límites laterales y ver que coinciden.

Calculemos $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sen(3x)}{x}$.

Recordemos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(ax)}{ax} = 1$, lo utilizamos para calcular este límite, y al multiplicar numerador y denominador por 3 queda $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sen(3x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3sen(3x)}{3x} = 3$.

Luego, calculemos $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x + 3 = 3$.

Como $f(0) = 3$ y como los límites laterales coinciden con el valor de la función, podemos afirmar que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Ejercicio 4. Hallar a para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x + 7} - 4} & \text{si} \quad x > 9 \\ 3a^2 & \text{si} \quad x \le 9 \end{cases}$

sea continua en $x = 9$.

Solución

Por la condición 3), es necesario que $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = f(9) = 3a^2$.

Evaluamos el límite lateral de la función en $x = 9$, o sea, $\lim\limits_{x \to 9^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 9^+} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x + 7} - 4}$

multiplicando por los conjugados del numerador y del denominador obtenemos

$$\lim_{x \to 9^+} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x + 7} - 4} \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} \right) \left(\frac{\sqrt{x + 7} + 4}{\sqrt{x + 7} + 4} \right)$$

y como $\left(\sqrt{x} - 3\right)\left(\sqrt{x} + 3\right) = x - 9$ y $\left(\sqrt{x + 7} - 4\right)\left(\sqrt{x + 7} + 4\right) = x - 9$

obtenemos $\lim\limits_{x \to 9^+} \dfrac{(x - 9)}{(x - 9)} \left(\dfrac{\sqrt{x + 7} + 4}{\sqrt{x} + 3} \right) = \lim\limits_{x \to 9} \left(\dfrac{\sqrt{x + 7} + 4}{\sqrt{x} + 3} \right) = \dfrac{4}{3}$.

Para que f sea continua, el límite debe coincidir con el valor de la función que es $3a^2$, es decir que $\dfrac{4}{3} = 3a^2$, por lo tanto, $a^2 = \dfrac{4}{9}$,o sea, $|a| = \dfrac{2}{3}$.

La función resulta continua para $\boxed{a=\frac{2}{3}, a=-\frac{2}{3}}$.

Pueden resolver los ejercicios 11 y 12 de la Práctica 4.

2.2 Propiedades de las funciones continuas

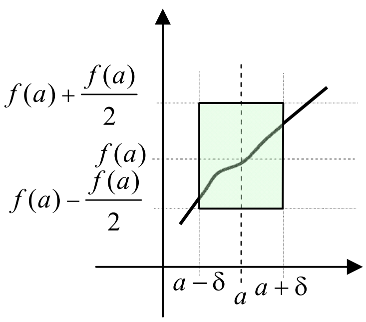
Como consecuencia directa de la definición, las funciones continuas tienen las siguientes propiedades:

Conservación de signo. Si una función f es continua en $x = a$ y $f(a) > 0$, entonces, f permanece positiva "cerca de a" (o negativa si $f(a) < 0$).

Acotación en un entorno. Si una función f es continua en $x = a$, entonces, $f(x)$ está acotada superior e inferiormente "cerca de a" (ver gráfico).

Demostración:

En la definición de límite de una función en un punto, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, si $\varepsilon = \dfrac{f(a)}{2}$, mirar "fijo" el gráfico, se obtienen los dos resultados:

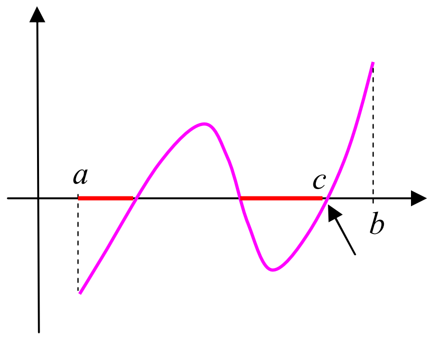


1) $f(x) > 0$ si $a-\delta < x < a+\delta$.

2) $f(x)$ está acotada en $a-\delta < x < a+\delta$.

Pueden realizar el **ejercicio** 14 de la Práctica 4 omitiendo el ejercicio 13.

Teorema de Bolzano. Si $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ es una función continua, tal que $f(a)<0$ y $f(b)>0$ (o al revés) entonces existe $c\in(a;b)$ tal que $f(c)=0$



Demostración :

Consideremos el conjunto

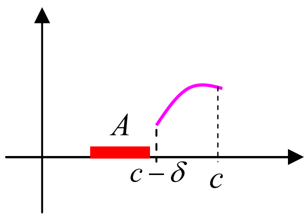
$$A=\{x\in[a,b]:f(x)<0\}$$ (en el gráfico es el pintado de rojo).

Observemos que A está acotado ($A\subset[a;b]$), $A\neq\varnothing$ ($a\in A$)

Entonces, existe el supremo $A=c$, probaremos que $f(c)=0$.

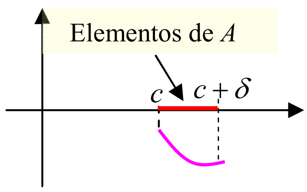
Para ello, descartamos las otras dos posibilidades.

Si fuera $f(c)>0$:



Entonces $a<c\le b$. Por la conservación del signo, $f(x)>0$ en $(c-\delta;c]$ para algún δ suficientemente chico. Luego, el conjunto A está "a la izquierda" de $c-\delta$. En otras palabras, $c-\delta$ es una cota superior (menor que c) del conjunto A. Pero esto contradice que c es la menor de las cotas superiores de A.

Si fuera $f(c)<0$:



Entonces $a\le c<b$. Por la conservación del signo, $f(x)<0$ en $[c;c+\delta)$. Por lo tanto el intervalo $(c;c+\delta)\subset A$. Es decir, hay elementos de A "a la derecha" de c. Pero, esto contradice que c es cota superior de A.

Luego $f(c)=0$.

Ejercicio 5. Dada la ecuación $x^3-4x+1=0$ demostrar que tiene una solución en el intervalo $[0;1]$.

Solució:

La función $f(x)=x^3-4x+1$ es continua.

Además, $f(0)=1>0$ y $f(1)=1-4+1=-2<0$.

El Teorema de Bolzano asegura que existe $c\in(0;1)$ tal que $f(c)=0$.

Es decir, en el intervalo $(0,1)$ tenemos una solución de $x^3-4x+1=0$.

Ejercicio 6. Hallar el conjunto de positividad de la función $f(x)=x^3-x^2-2x$.

Solución

La función $f(x)=x^3-x^2-2x$ es continua.

Al sacar factor x común $f(x)=x\left(x^2-x-2\right)$ y resolver la cuadrática, obtenemos **todos** los ceros de $f(x)=x(x+1)(x-2)$ que son $x=0, x=-1, x=2$.

El teorema de Bolzano nos asegura que: entre 2 ceros de la función ella se mantiene toda positiva o toda negativa con lo que basta estudiar el signo de f en los intervalos

$$(-\infty;-1),(-1;0),(0;2),(2;+\infty)$$

Como $f(-2)=-8<0$ entonces $f<0$ en el intervalo $(-\infty;-1)$.

Como $f(-0,5)=\dfrac{5}{8}>0$ entonces $f>0$ en el intervalo $(-1;0)$.

Como $f(1)=-2<0$ entonces $f<0$ en el intervalo $(0;2)$.

Como $f(3)=12>0$ entonces $f>0$ en el intervalo $(2;+\infty)$.

$f(-2)$	$f(-0,5)$	$f(1)$	$f(3)$
negativo	positivo	negativo	positivo

Luego, el conjunto de positividad de f es $A=\{x\,/\,f(x)>0\}=(-1;0)\ \cup\ (2;+\infty)$.

Ejercicio 7. Demostrar que la ecuación $x^2=\sqrt{x+1}$ tiene una solución en el intervalo $(1;2)$.

Solución

Llamemos $f(x)=x^2-\sqrt{x+1}$ .Es fácil ver que la función f es continua en el intervalo $[1;2]$.

Al evaluar la función en los extremos del intervalo, obtenemos que $f(1)=-1<0$ y que $f(2)=4-\sqrt{3}>0$.

El teorema de Bolzano nos asegura que hay un punto $c \in (1;2)$ donde $f(c)=0$, con lo cual $x^2-\sqrt{x+1}=0$ para algún $x \in (1;2)$,es decir, la ecuación $x^2=\sqrt{x+1}$ tiene una solución en el intervalo $(1,2)$.

Ejercicio 8. Hallar en forma aproximada, con un decimal exacto, una solución de la ecuación: $x^5+5x^2-2=0$.

Solución

Consideremos la función $f(x)=x^5+5x^2-2$, que es continua.

Además $f(0)=-2<0$ y $f(1)=1+5-2=4>0$.

El teorema de Bolzano asegura que existe $c \in (0;1)$ tal que $f(c)=0$. Es decir, en el intervalo $(0;1)$ tenemos una solución de $x^5+5x^2-2=0$. En consecuencia, la parte entera de c es 0 (porque está entre 0 y 1). Para encontrar el primer decimal, estudiamos el signo de $f(0,1); f(0,2)$...etc. hasta $f(0,8)$ y vemos en qué intervalo cambia de signo. Haciendo esto se obtiene

$f(0,1)$	$f(0,2)$	$f(0,3)$	$f(0,4)$	$f(0,5)$	$f(0,6)$	$f(0,7)$	$f(0,8)$
negativo	negativo	negativo	negativo	negativo	**negativo**	**positivo**	positivo

Usamos el teorema de Bolzano en el intervalo $[0,6;0,7]$. En este intervalo, la función f pasa de negativo a positivo, entonces existe un c en ese intervalo tal que $f(c)=0$. Por estar allí, se tiene que $c \simeq 0,6...$

El teorema de Bolzano es un teorema de existencia. Vemos en este ejemplo, que con solo saber que existe, tenemos una "receta" (*algoritmo*) que permite encontrar la solución con la precisión que se quiera.

El teorema de Bolzano se generaliza fácilmente al teorema de valores intermedios.

Teorema de los valores intermedios. Sea $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, si y es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in (a;b)$ tal que $f(c)=y$.

Para ilustrar la potencia de este resultado, planteamos un curioso problema.

Problema. Un automovilista sale de la ciudad A a las 12 hs y llega a la ciudad B a las 16 hs tardando exactamente 4 horas en recorrer los 400 kilómetros que separa una ciudad de la otra. En esas cuatro horas se pudo haber detenido un rato, ir muy despacio o ir muy rápido.
Demostrar que, cualquiera haya sido el caso, existe un intervalo de una hora comprendida entre las 12 hs y las 16 hs donde recorrió exactamente 100 kilómetros.

Solución

Llamemos $f(t)$ a la cantidad de kilómetros que lleva recorridos a la hora *t*. Así $f(12)=0$ y $f(16)=400$. Asumimos que la función f es continua.

Consideremos, ahora, la función continua $g(t)=f(t+1)-f(t)$ definida para $12 \le t \le 15$. La función g mide la cantidad de kilómetros recorridos entre la hora t y la hora $t+1$. Para resolver el problema, bastaría saber que existe un instante $t_0 \in (12,15)$ tal que $g(t_0)=100$. Veamos que el Teorema de los Valores Intermedios puede venir en nuestra ayuda. Se tiene que

$$g(12)=f(13)-f(12)$$

$$g(13)=f(14)-f(13)$$

$$g(14)=f(15)-f(14)$$

$$g(15)=f(16)-f(15)$$

Si se suman estos cuatro números, se obtiene:

$$g(12)+g(13)+g(14)+g(15)=f(16)-f(12)=400$$

En consecuencia los cuatro números no pueden ser todos menores que 100 porque, si así fuera, su suma no llegaría a 400. De la misma manera, no pueden ser todos mayores que 100 porque, en tal caso, su suma sería mayor que 400. Entonces alguno de los cuatro tiene que ser menor o igual que 100 y algún otro tiene que ser mayor o igual que 100. (por ejemplo $g(13) \le 100$ y $g(15) \ge 100$ o cualquier otro).

El teorema de los valores intermedios nos asegura que entre esos dos instantes (entre las 13 hs y las 15 hs) hay un instante t_0 tal que $g(t_0)=100$.

No sabemos cuál es ese instante, pero sí sabemos que existe tal instante.

Se pueden resolver los ejercicios 15 a 19 de la Práctica 4.

Cintia Buxton, Lisi D'Alfonso, Flora Gutierrez, Gabriela Jeronimo, Gustavo Massaccesi, Juan Carlos Pedraza y Juan Sabia (2015), *Continuidad, Teóricas de Análisis Matemático (28)*.

Práctica 4: Límites y Continuidad

PRIMERA PARTE: LÍMITE DE FUNCIONES

Ejercicios introductorios

Ejercicio 1 Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - 10x + 1)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x+1}{2x^4+2x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+5}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+1}-x}{x+5}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\operatorname{sen} x}{x-\cos x}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+6}}{5x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+1})$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-6x-40}-x\right)$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{|x|+1}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-4x}$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Ejercicio 2 Calcule, si es posible, los límites cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x^5 + x^2 - 1$

b) $f(x) = \sqrt{9+x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{1-x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3-5x^2}{x+3}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-2x+3} - x$

g) $f(x) = \dfrac{e^{x+1}+4}{3-2e^x}$

h) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

i) $f(x) = e^{1/x}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$

Ejercicio 3 Calcule, si se puede, los límites en el infinito, además de los límites en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3},\ x = 0^+, x = 0^-$

b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$, $x = -3^+, x = -3^-$

c) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x+3}$, $x = -3^+, x = -3^-$

d) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$, $x = -1^+$

e) $f(x) = e^{1/x}$, $x = 0^+, x = 0^-$

f) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$, $x = 0^+, x = 0^-$

g)$f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}, x = 1, x = -1^+, x = -1^-$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}, x = 1^-, x = -1^+$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 4 Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4-2}{x^3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{4x-12}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \left(\frac{x^2-2x-3}{4x-12}\right)^{\frac{2}{x-3}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{x^2-1}{x-2} - \frac{x^2+x-2}{x^2-2x}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{2x+6}-4}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \left(2 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Ejercicio 5 Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\operatorname{sen} 2x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} 3x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x+6)}{x+2}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(5x)}{x^2}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1-\cos x}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{3x+4\operatorname{sen}(2x)}{x^2+5\operatorname{sen} x}$

Ejercicio 6 Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{5}{x}\right)^{\dfrac{x^2+1}{x+1}}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4}\right)^{\dfrac{2x^2+1}{x-3}}$

c) $\lim_{t \to 0} (1+3t)^{1/t}$

d) $\lim_{x \to 0} (1+\operatorname{sen} x)^{1/x}$

e) $\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{3x+2}{5x-2}\right)^{\dfrac{1}{x-2}}$

f) $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{3x+2}{5x-2}\right)^{\dfrac{1}{x-2}}$

g) $\lim_{x \to 2^-} \left(1+\frac{3}{x+1}\right)^{\dfrac{x^2}{2x+1}}$

h) $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(h+2)-\ln 2}{h}$

i) $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}$

j) $\lim_{h \to 0} \frac{e^h-1}{h}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 7 Sea $f(x)$ una función tal que

$$\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} < f(x) < \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} + \frac{19}{4}$$

Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x f(x) + \operatorname{sen} x}{x}$.

Ejercicio 8 Determine en cada caso el valor de la constante a:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+4x+1}-1}{x} = 5$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+ax-1}-\sqrt{x^3+ax-1}}{x-1} = -2$

Ejercicio 9 Halle los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las siguientes funciones. Además calcule, si existe, el límite en los puntos indicados

a) $f(x) = \dfrac{10e^{2x}}{5e^{2x} + 3x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{4e^{-x^2}}{x^2 - 16}$, $x = 4$, $x = -4$.

Ejercicio 10 Marque la única respuesta correcta:

a) El $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

☐ no existe ☐ es igual a 1 ☐ es igual a 0 ☐ es infinito

b) El $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+ax+1}-1}{x} = 2$ para

☐ ningún valor de a ☐ $a = 4$ ☐ $a = 0$ ☐ todo a

Problemas y Complementos

Ejercicio 11 Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{\operatorname{sen}(3x\pi)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x\pi)}{x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{e^x-1}$

Ejercicio 12 Sea $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^3+1}$. Halle los valores de a y b para los cuales el $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$.

Ejercicio 13 Sea $f(x) = \dfrac{e^x + 3x^2}{e^x + x^2}$. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de f.

SEGUNDA PARTE: CONTINUIDAD

Ejercicios introductorios

Ejercicio 14 Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} & \text{si } x > 7 \\ 0 & \text{si } x \leq 7. \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$$

Ejercicio 15 En cada caso determine el o los valores de la constante a para los cuales las funciones resulten continuas.

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x^2+ax & \text{si } x \geq 2 \\ a-x^2 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-1}{x+1}} & \text{si } x > -1 \\ 3x+a & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 5x+a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicios de entrenamiento

Ejercicio 16 Muestre que las siguientes funciones tienen una discontinuidad evitable en los puntos señalados

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}-3} & \text{si } x \neq 5, x \geq -4 \\ 0 & \text{si } x = 5. \end{cases} \quad \text{, en } x = 5$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x+7}-4} & \text{si } x \neq 9, x \geq -7 \\ 0 & \text{si } x = 9. \end{cases} \text{, en } x = 9$$

Ejercicio 17

a) Demuestre que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$. Encuentre un intervalo de longitud $0,2$ o menor que contenga dicha solución.

b) Demuestre que la ecuación $x^2 = \sqrt{x+1}$ tiene al menos una solución. Encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que la contenga.

Ejercicio 18 Pruebe que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución real. En cada caso encuentre un intervalo de longitud 1 o menor que contenga a una de ellas.

a) $2x - 1 = \cos x$

b) $x^{11} + x^2 + 1 = 0$

c) $\ln x = -3x$

d) $\dfrac{x}{x^4+1} = 0,2$

e) $\dfrac{x^2+1}{x+2} + \dfrac{x^4+1}{x-3} = 0$

Ejercicio 19 Para cada una de las siguientes funciones determine ceros, puntos de discontinuidad. A partir de ellos, halle el conjunto donde la función es positiva.

a) $f(x) = x^2(x+3)(x-2)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

c) $f(x) = x \ln x$

d) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x+5}$

Ejercicios de evaluación

Ejercicio 20 Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(ax)}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$.

Ejercicio 21 Sea $f : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(ax) - 1}{2\,\mathrm{sen}\, x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en $x = 0$ cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 22 Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 + 3 - 3\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 0$

Ejercicio 23 Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x - 6\sqrt{x}}{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ a & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$

Halle $a \in \mathbb{R}$ para que f sea continua en $x = 4$.

Ejercicio 24 Marque la única respuesta correcta

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6 - 2\sqrt{x^2 + 5}}{2 - x} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases}$

La función f es continua en $x = 2$ para

☐ $k = 2$ ☐ $k = \dfrac{4}{3}$ ☐ $k = -\dfrac{4}{3}$ ☐ ningún k

Ejercicio 25 Marque la única respuesta correcta

Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{x} + 2 & \text{si } x > 0 \\ \cos(ax) + 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

La función f es continua en $x = 0$ para

☐ ningún valor de a ☐ $a = 2$ ☐ $a = 1$ ☐ cualquier valor de a

Problemas y Complementos

Ejercicio 26 Sea $f : [-8; +\infty) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{\sqrt{x + 8} - 3} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Hallar $k \in \mathbb{R}$ para que f resulte continua en $x = 1$.

b) ¿Se puede afirmar que $f(x_0) = 2$ para algún $x_0 > 1$? ¿Por qué?

Ejercicio 27 Encuentre una solución aproximada de la ecuación

$$x^5 - 6x + 4 = 0$$

con un error menor a $0,01$.

Ejercicio 28 Sea f una función continua tal que $f(3) = 1$. Probar que existe un intervalo abierto I que contiene a 3 y tal que $0 \leq f(x) \leq 2$ para todo $x \in I$.

Ejercicio 29 Sea f una función continua tal que $f(0) = \dfrac{1}{2}$ y $f(2) = -1$. Sea $g(x) = \dfrac{x^2+1}{f(x)}$. Probar que existe $x_0 \in (0;2)$ donde g tiene una discontinuidad. ¿Es evitable?

Ejercicio 30 Determine los puntos de discontinuidad de las funciones dadas a continuación. Vea si en esos puntos la discontinuidad es evitable.

$a) f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x(x-\pi)}$

$b) f(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos x}$