

# Primeiro Trabalho de Equações Diferenciais Ordinárias

Carlos H. Fernandes<sup>1</sup>, Leonel R. Brizola<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca  
(CEFET/RJ – Campus Petrópolis)

carlos.candido@aluno.cefet-rj.br<sup>1</sup>

leonel.brizola@aluno.cefet-rj.br<sup>2</sup>

**Abstract.** This paper details the resolution of three applied problems in Ordinary Differential Equations (ODEs). The first exercise addresses a mass balance problem, modeling the concentration  $C(t)$  of a solute in a mixing tank with constant volume. This involves finding the analytical solution to the first-order linear ODE, implementing a numerical simulation using Euler's Method, and comparing these results with a practical experiment. The second exercise studies the dynamics of objects in free fall, comparing air resistance models. The linear resistance ( $kv$ ) is solved analytically, and its concept of terminal velocity is compared with a practical experiment (using objects with different mass-to-area ratios). Additionally, the quadratic resistance model ( $kv^2$ ) is also solved and analyzed. The third exercise provides a comparative analysis between a simplified biophysical neuron model (Leaky Integrate-and-Fire) and an abstract artificial neuron. The temporal dynamics of the membrane potential  $V(t)$  are explored both analytically and numerically (Euler), contrasting them with the static, non-linear mapping (ReLU/Sigmoid) of the abstract computational model. All numerical simulations were developed in Python and made available on Google Colab.

**Resumo.** Este trabalho detalha a resolução de três problemas aplicados em Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). O primeiro exercício aborda um problema de balanço de massa, modelando a concentração  $C(t)$  de um soluto em um tanque de mistura com volume constante. Para isso, foi encontrada a solução analítica da EDO linear de primeira ordem e, implementada uma simulação numérica pelo Método de Euler, comparando esses resultados com um experimento prático. O segundo exercício estuda a dinâmica de objetos em queda livre, comparando modelos de resistência do ar. A resistência linear ( $kv$ ) é resolvida analiticamente, e seu conceito de velocidade terminal é comparado com um experimento prático (utilizando objetos de diferentes relações massa/área). Adicionalmente, o modelo de resistência quadrática ( $kv^2$ ) é também resolvido e analisado. O terceiro exercício promove uma análise comparativa entre um modelo de neurônio biofísico simplificado (Leaky Integrate-and-Fire) e um neurônio artificial. A dinâmica temporal do potencial de membrana  $V(t)$  é explorada tanto analiticamente quanto numericamente (Euler), contrastando-a com o mapeamento estático e não linear (ReLU/Sigmoid) do modelo computacional abstrato. Todas as simulações numéricas foram desenvolvidas em Python e disponibilizadas no Google Colab.

## Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Exercício 1 – Mistura em Tanque</b>                                    | <b>3</b>  |
| 1.1 Atividade 1: Solução Analítica . . . . .                                | 3         |
| 1.2 Atividade 2: Experimento Prático . . . . .                              | 4         |
| 1.3 Atividade 3: Simulação Numérica (Método de Euler) . . . . .             | 5         |
| 1.4 Atividade 4: Campo de Direções . . . . .                                | 6         |
| 1.5 Atividade 5: Comparação Gráfica e Discussão . . . . .                   | 7         |
| <b>2 Exercício 2 – Queda com Resistência do Ar</b>                          | <b>8</b>  |
| 2.1 Atividade 1: Solução Analítica . . . . .                                | 8         |
| 2.2 Atividade 2: Experimento Prático . . . . .                              | 9         |
| 2.3 Atividade 3: Simulação Numérica (Método de Euler) . . . . .             | 10        |
| 2.4 Atividade 4: Campo de Direções . . . . .                                | 10        |
| 2.5 Atividade 5: Comparação e Interpretação (Velocidade Terminal) . . . . . | 11        |
| 2.6 Atividade 6: Estudo do Caso $kv^2$ . . . . .                            | 12        |
| <b>3 Exercício 3 – Do Neurônio Biológico ao Neurônio Artificial</b>         | <b>13</b> |
| 3.1 Parte 1: Neurônio Biológico (Modelo Simplificado) . . . . .             | 13        |
| 3.2 Solução Analítica da EDO . . . . .                                      | 13        |
| 3.2.1 Atividade 1: Solução com Método de Euler . . . . .                    | 15        |
| 3.2.2 Atividade 2: Interpretação do Gráfico . . . . .                       | 15        |
| 3.3 Parte 2: Neurônio Artificial . . . . .                                  | 16        |
| 3.3.1 Atividade 1: Implementação (ReLU e Síntese) . . . . .                 | 16        |
| 3.3.2 Atividade 2: Variação de Entradas e Pesos . . . . .                   | 16        |
| 3.4 Parte 3: Discussão . . . . .  | 17        |
| 3.4.1 Semelhanças e Diferenças entre os Modelos . . . . .                   | 17        |
| 3.4.2 Memória e Dinâmica Temporal no Neurônio Artificial . . . . .          | 17        |
| 3.4.3 Substituição de ReLU por Síntese . . . . .                            | 18        |
| 3.4.4 Papel da Não Linearidade nos Dois Casos . . . . .                     | 18        |
| <b>4 referencias</b>  | <b>18</b> |

## 1. Exercício 1 – Mistura em Tanque

### 1.1. Atividade 1: Solução Analítica

A variação da concentração de soluto no tanque é descrita pela Equação Diferencial Ordinária (EDO) linear de primeira ordem fornecida abaixo:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{r_{in}}{V}(C_{in} - C)$$

Assumindo que o volume  $V$  é constante, a vazão de entrada ( $r_{in}$ ) deve ser igual à vazão de saída ( $r_{out}$ ). Então, definiremos essa vazão constante como ( $r = r_{in} = r_{out}$ ).

Logo, a equação torna-se:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{r}{V}C = \frac{r}{V}C_{in}$$

Podemos resolvê-la utilizando um fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = e^{\left(\int \frac{r}{V} dt\right)} = e^{\frac{rt}{V}}$$

Multiplicando a EDO pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{V}} \frac{dC}{dt} + e^{\frac{rt}{V}} \frac{r}{V}C = e^{\frac{rt}{V}} \frac{r}{V}C_{in}$$

O lado esquerdo da equação é a derivada do produto:

$$\frac{d}{dt} \left( e^{\frac{rt}{V}} C(t) \right) = \frac{rC_{in}}{V} e^{\frac{rt}{V}}$$

Integramos ambos os lados em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{rt}{V}} C(t) \right) dt &= \int \frac{rC_{in}}{V} e^{\frac{rt}{V}} dt \\ e^{\frac{rt}{V}} C(t) &= \frac{rC_{in}}{V} \left( \frac{V}{r} e^{\frac{rt}{V}} \right) + K \\ e^{\frac{rt}{V}} C(t) &= C_{in} e^{\frac{rt}{V}} + K \end{aligned}$$

Isolando  $C(t)$ , obtemos a solução geral:

$$C(t) = C_{in} + K e^{-\frac{rt}{V}}$$

Para encontrar a constante  $K$ , aplicamos a condição inicial  $C(t = 0) = C(0)$ :

$$C(0) = C_{in} + K e^0 \implies K = C(0) - C_{in}$$

Substituindo  $K$  na solução geral, encontramos a solução analítica particular:

$$C(t) = C_{in} + (C(0) - C_{in}) e^{-\frac{rt}{V}}$$

Ou, de forma equivalente:

$$C(t) = C_{in} \left( 1 - e^{-\frac{rt}{V}} \right) + C(0) e^{-\frac{rt}{V}}$$

## 1.2. Atividade 2: Experimento Prático

Para a montagem experimental, foram utilizados materiais simples para simular o sistema de tanque.

### Materiais Utilizados

- Duas garrafas plásticas (PET), uma para o tanque ( $V$ ) e outra para a solução de entrada ( $C_{in}$ ).
- Água pura para ( $C(0) = 0$ ).
- Corante alimentício vermelho (para criar a solução  $C_{in}$ ).
- Dois cotonetes, utilizados como gotejadores para regular a vazão de entrada e saída.
- Um recipiente e um cronômetro para aferir a vazão.

### Procedimento e Medições

1. A garrafa-tanque (volume  $V$ ) foi preenchida com água pura, caracterizando a condição inicial ( $C(0) = 0$ ).
2. A garrafa de entrada foi preenchida com água e uma quantidade de corante vermelho, simulando a concentração ( $C_{in}$ ).
3. Um pequeno furo foi feito na garrafa-tanque para a saída ( $r_{out}$ ), utilizando um cotonete como gotejador.
4. Um cotonete foi posicionado também, na saída da garrafa de entrada, gotejando para dentro da garrafa-tanque, simulando ( $r_{in}$ ). As vazões foram ajustadas para serem aproximadamente iguais, garantindo ( $V \approx \text{constante}$ ).
5. A vazão de saída foi medida em um período de aproximadamente 130 segundos: o sistema apresentou uma vazão de aproximadamente 150 mL a cada 130 s.

A taxa de vazão  $r$  convertida para as unidades do problema (L/min) é:

$$r = \frac{150 \text{ mL}}{130 \text{ s}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}} \approx 0.0692 \text{ L min}^{-1}$$

### Observação

Ao iniciar o gotejamento, observou-se que a mistura no tanque, inicialmente pura, foi gradualmente se tornando mais concentrada (adquirindo a cor vermelha). A intensidade da cor aumentou rapidamente no início e, com o passar do tempo, a mudança tornou-se mais lenta, tendendo visualmente à cor da solução de entrada ( $C_{in}$ ).

O registro do experimento pode ser encontrado no Drive: [https://drive.google.com/drive/folders/1Q8mh\\_zzCYAdeUego81w-9JrN3Hkj1phO?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1Q8mh_zzCYAdeUego81w-9JrN3Hkj1phO?usp=sharing)

### 1.3. Atividade 3: Simulação Numérica (Método de Euler)

O Método de Euler é uma técnica numérica para encontrar soluções aproximadas de EDOs da forma  $\frac{dC}{dt} = f(t, C)$ , dada uma condição inicial ( $C(t_0) = C_0$ ). A solução é iterativamente construída usando um passo  $h$ :

$$C_{i+1} = C_i + h \cdot f(t_i, C_i)$$

Para o nosso problema,  $f(t, C) = \frac{r}{V}(C_{in} - C)$ . A equação de iteração torna-se:

$$C_{i+1} = C_i + h \cdot \frac{r}{V}(C_{in} - C_i)$$

Utilizamos os parâmetros sugeridos no trabalho:

$$V = 1 \text{ L}$$

$$r = 0.05 \text{ L min}^{-1}$$

$$C_{in} = 2 \text{ g L}^{-1}$$

$$C(0) = 0$$

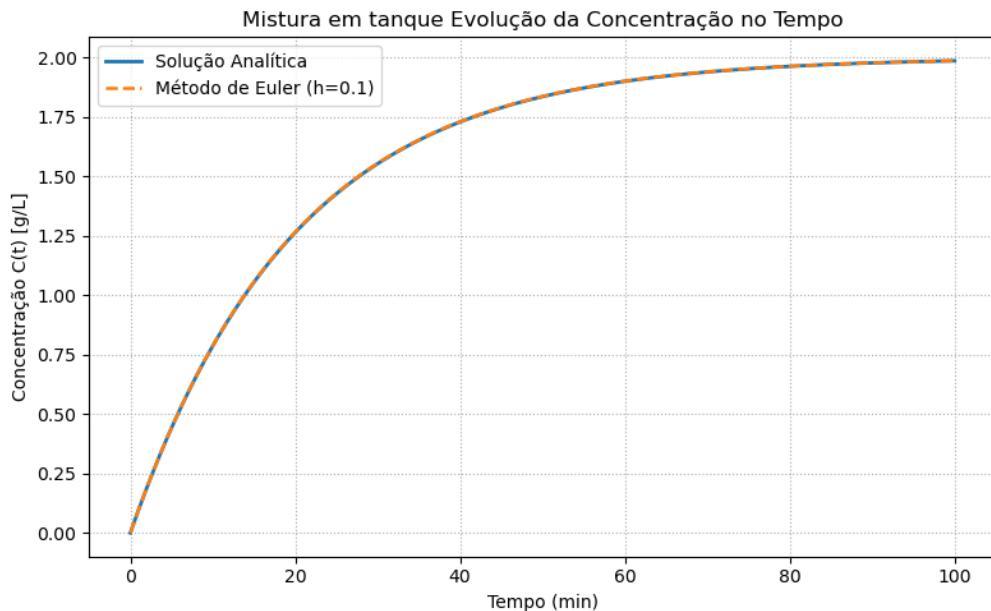
$$h = 0.1$$

Simulando o sistema até  $t = (100 \text{ min})$ .

O código-fonte em Python está disponível no link do Google Colab:  
[https://colab.research.google.com/drive/1pcTf7MKBcWJtw67Ae\\_FXNSBMLh\\_yW-E5?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1pcTf7MKBcWJtw67Ae_FXNSBMLh_yW-E5?usp=sharing)

#### 1.4. Atividade 4: Campo de Direções

A EDO  $\frac{dC}{dt} = \frac{r}{V}(C_{in} - C)$  é autônoma, pois a derivada  $\frac{dC}{dt}$  depende apenas do valor de  $C$ , e não de  $t$ . Isso significa que as inclinações das retas tangentes são constantes para um mesmo valor de  $C$ .



**Figura 1. Campo de direções para a EDO do tanque de mistura, com ( $C_{in} = 2 \text{ g/L}$ ).**

#### Interpretação do Campo

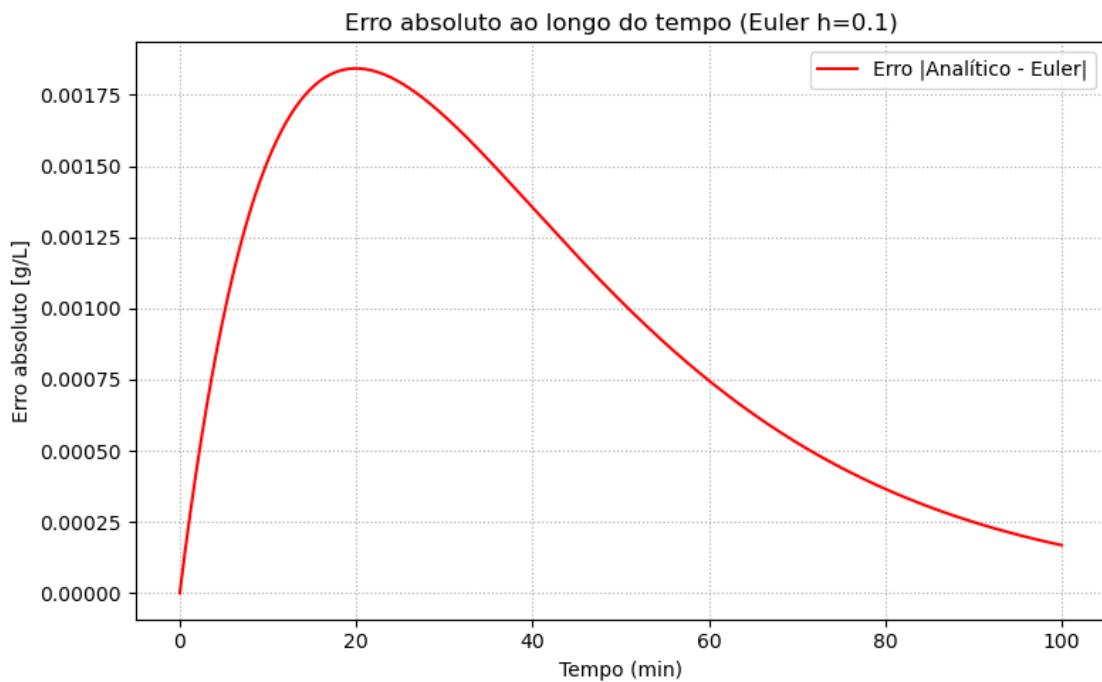
O campo de direções (Figura 1) ilustra o comportamento de todas as soluções possíveis:

- **Equilíbrio:** A linha ( $C = C_{in} = 2$ ) é uma solução de equilíbrio (uma isoclina de inclinação zero), pois se ( $C = 2$ ,  $\frac{dC}{dt} = 0$ ).
- **Abaixo do Equilíbrio ( $C < 2$ ):** O termo ( $C_{in} - C$ ) é positivo, logo  $\frac{dC}{dt} > 0$ . As inclinações são positivas, indicando que a concentração  $C(t)$  está aumentando.
- **Acima do Equilíbrio ( $C > 2$ ):** O termo ( $C_{in} - C$ ) é negativo, logo  $\frac{dC}{dt} < 0$ . As inclinações são negativas, indicando que a concentração  $C(t)$  está diminuindo.

O campo mostra que, independentemente da concentração inicial ( $C(0)$ ), todas as soluções convergem para ( $C(t) = C_{in} = 2 \text{ g/L}$ ). Este é, portanto, um estado de equilíbrio estável.

## 1.5. Atividade 5: Comparação Gráfica e Discussão

A Figura 2 compara a solução analítica exata, a simulação numérica pelo Método de Euler (com  $h = 0.1$ ) e a observação qualitativa do experimento.



**Figura 2. Comparação entre as soluções analítica (exata), numérica (Euler  $h = 0.1$ ) e a tendência observada experimentalmente para  $C(0) = 0$ .**

Observa-se uma excelente concordância entre a solução analítica e a simulação numérica. O Método de Euler, mesmo com um passo ( $h = 0.1$ ), aproxima-se muito bem da curva exponencial exata. A observação experimental (qualitativa) também segue a mesma tendência de saturação.

## Discussão

- **O que acontece quando ( $C_{in} > C(0)$ )?**

Neste caso, o termo  $(C(0) - C_{in})$  é negativo. A solução  $(C(t) = C_{in} + (C(0) - C_{in})e^{-\frac{rt}{V}})$  mostra que  $C(t)$  é a soma de  $C_{in}$  com um termo negativo que decai exponencialmente para zero. Portanto,  $C(t)$  cresce partindo de  $C(0)$  e se aproxima de  $C_{in}$  por baixo. Fisicamente, o fluido que entra é mais concentrado que o fluido no tanque, elevando a concentração interna até que ela se iguale à concentração de entrada.

- **E quando ( $C_{in} < C(0)$ )?**

Neste caso, o termo  $(C(0) - C_{in})$  é positivo. A solução  $C(t)$  é a soma de  $C_{in}$  com um termo positivo que decai para zero. Portanto,  $C(t)$  decresce partindo de  $C(0)$  e se aproxima de  $C_{in}$  por cima. Fisicamente, o fluido que entra é menos

concentrado (ex: água pura) do que o fluido no tanque. Ocorre um processo de "lavagem" ou diluição, onde a concentração interna diminui até atingir o equilíbrio em  $C_{in}$ .

- **Existe um valor limite (equilíbrio) para  $C(t)$ ?**

Sim, o valor limite é o estado de equilíbrio ( $C_{eq} = C_{in}$ ). Analisando o limite da solução analítica quando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ C_{in} + (C(0) - C_{in})e^{-\frac{rt}{V}} \right]$$

Como  $r > 0$  e  $V > 0$ , o termo  $e^{-\frac{rt}{V}} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = C_{in} + (C(0) - C_{in}) \cdot 0 = C_{in}$$

Fisicamente, o sistema atinge um estado estacionário onde a taxa de soluto que entra no tanque ( $r \cdot C_{in}$ ) se iguala exatamente à taxa de soluto que sai ( $r \cdot C(t) \rightarrow r \cdot C_{in}$ ).

## 2. Exercício 2 – Queda com Resistência do Ar

### 2.1. Atividade 1: Solução Analítica

A dinâmica do objeto é descrita pela segunda lei de Newton,  $\sum F = ma$ . As forças atuantes são a gravidade ( $F_g = mg$ , para baixo) e a resistência do ar ( $F_{res} = kv$ , para cima). Assumindo o sentido positivo para baixo, temos:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Esta é a EDO que modela o problema. Trata-se também de uma EDO linear de primeira ordem, que pode também ser resolvida como uma EDO separável. Vamos reescrevê-la:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

Podemos resolvê-la utilizando um fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = e^{\left(\int \frac{k}{m} dt\right)} = e^{\frac{kt}{m}}$$

Multiplicando a EDO pelo fator integrante:

$$e^{\frac{kt}{m}} \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} e^{\frac{kt}{m}} v = g e^{\frac{kt}{m}}$$

O lado esquerdo é a derivada do produto:

$$\frac{d}{dt} \left( e^{\frac{kt}{m}} v(t) \right) = g e^{\frac{kt}{m}}$$

Integrando ambos os lados em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{kt}{m}} v(t) \right) dt &= \int g e^{\frac{kt}{m}} dt \\ e^{\frac{kt}{m}} v(t) &= g \left( \frac{m}{k} e^{\frac{kt}{m}} \right) + C_1 \\ e^{\frac{kt}{m}} v(t) &= \frac{mg}{k} e^{\frac{kt}{m}} + C_1\end{aligned}$$

Isolando  $v(t)$ , obtemos a solução geral:

$$v(t) = \frac{mg}{k} + C_1 e^{-\frac{kt}{m}}$$

Assumindo que o objeto é solto a partir do repouso, temos a condição inicial  $v(0) = 0$ :

$$v(0) = 0 = \frac{mg}{k} + C_1 e^0 \implies C_1 = -\frac{mg}{k}$$

Substituindo  $C_1$  na solução geral, encontramos a solução analítica particular:

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{kt}{m}}$$

Ou, de forma equivalente:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right)$$

## 2.2. Atividade 2: Experimento Prático

O experimento prático foi realizado para comparar qualitativamente os efeitos da resistência do ar em objetos com diferentes relações entre massa e área de superfície.

### Materiais Utilizados

- Objeto 1 (Simulando a "bola"):** Uma cebola, com massa aferida de  $m_1 = 172 \text{ g} = 0.172 \text{ kg}$ . Este objeto possui massa considerável e área de superfície relativamente pequena, resultando em um coeficiente de arrasto  $k$  pequeno em relação à sua massa (pequeno  $k/m$ ).
- Objeto 2 (Folha A4 de papel):** Uma folha de papel padrão A4 ( $m_2 \approx 5 \text{ g}$ ). Este objeto possui massa muito pequena e grande área de superfície, resultando em um coeficiente de arrasto  $k$  grande em relação à sua massa (grande  $k/m$ ).
- Trena (para medir a altura da queda) e câmera (para registro).

### Observação

Ambos os objetos foram soltos da mesma altura  $H$ .

- Cebola ( $m_1$ ):** Caiu rapidamente, com um tempo de queda muito curto. Sua trajetória pareceu ser minimamente afetada pela resistência do ar, aproximando-se de um movimento de queda livre (aceleração  $a \approx g$ ).

- **Folha A4 ( $m_2$ ):** Caiu lentamente, "planando" no ar. A folha rapidamente atingiu uma velocidade de queda lenta e quase constante, demonstrando que a força de resistência do ar se igualou rapidamente ao seu peso.

A diferença drástica nos tempos de queda evidencia que o termo de resistência  $k$  (que depende da forma e área) e a relação  $k/m$  são cruciais para a dinâmica do movimento.

### 2.3. Atividade 3: Simulação Numérica (Método de Euler)

Para a simulação numérica, aplicamos o Método de Euler à EDO  $\frac{dv}{dt} = f(t, v)$ , onde  $f(t, v) = g - \frac{k}{m}v$ . A equação de iteração é:

$$v_{i+1} = v_i + h \cdot f(t_i, v_i)$$

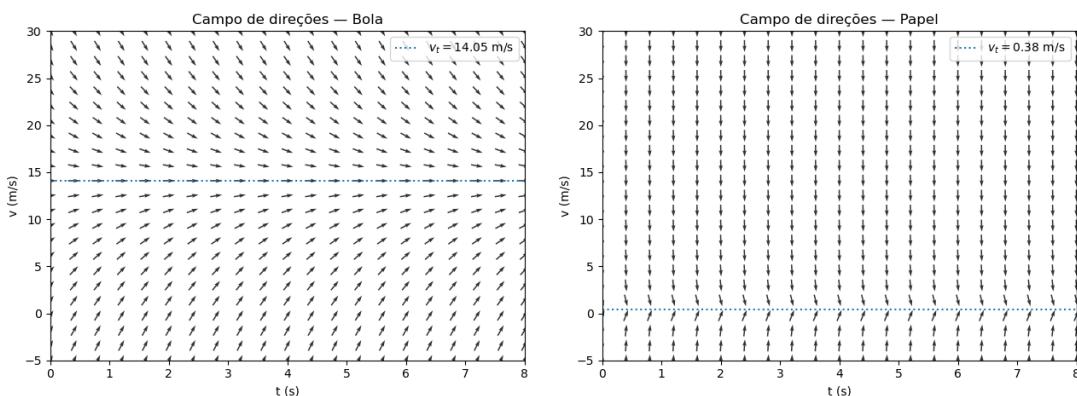
$$v_{i+1} = v_i + h \left( g - \frac{k}{m}v_i \right)$$

A simulação foi implementada em Python, permitindo a variação dos parâmetros  $m$ ,  $k$  e  $h$  para analisar os diferentes cenários observados no experimento.

O código-fonte em Python está disponível no link do Google Colab:  
[https://colab.research.google.com/drive/1pcTf7MKBcWJtw67Ae\\_FXNSBMLh\\_yW-E5?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1pcTf7MKBcWJtw67Ae_FXNSBMLh_yW-E5?usp=sharing)

### 2.4. Atividade 4: Campo de Direções

O campo de direções para a EDO ( $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$ ) é plotado na Figura 3. Sendo uma EDO autônoma, as inclinações dependem apenas de  $v$ .



**Figura 3. Campo de direções para a EDO da queda com resistência do ar.**

### Interpretação do Campo

A solução de equilíbrio (isóclina de inclinação zero) ocorre quando  $\frac{dv}{dt} = 0$ :

$$g - \frac{k}{m}v_{eq} = 0 \implies v_{eq} = \frac{mg}{k}$$

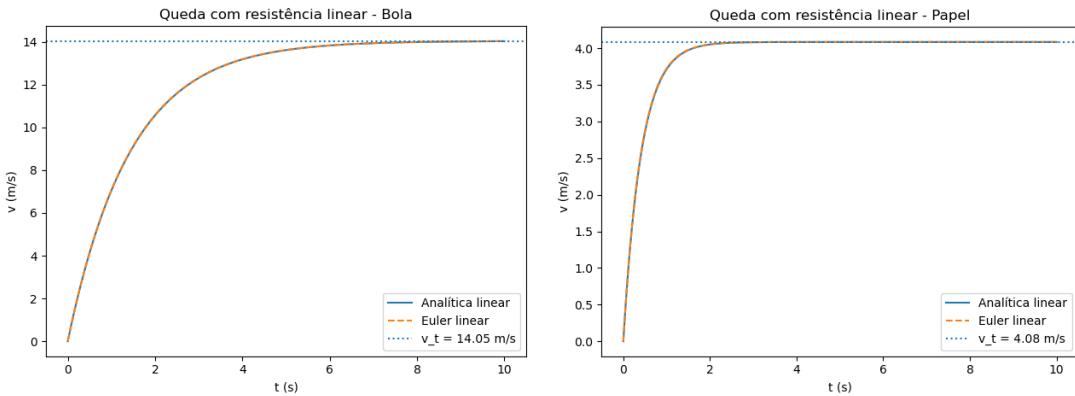
Este valor é a **velocidade terminal** ( $v_T$ ).

- **Se ( $v < v_T$ ):** O termo  $(g - \frac{k}{m}v)$  é positivo, logo  $\frac{dv}{dt} > 0$ . As inclinações são positivas e a velocidade aumenta, tendendo a  $v_T$ .
- **Se ( $v > v_T$ ):** O termo  $(g - \frac{k}{m}v)$  é negativo, logo  $\frac{dv}{dt} < 0$ . As inclinações são negativas e a velocidade diminui, tendendo a  $v_T$  (ex: se o objeto fosse lançado para baixo com alta velocidade inicial).

O campo mostra que  $v_T = \frac{mg}{k}$  é um equilíbrio estável; todas as soluções, independentemente de  $v(0)$ , convergem para este valor.

## 2.5. Atividade 5: Comparação e Interpretação (Velocidade Terminal)

A Figura 5 apresenta os gráficos das soluções analítica e numérica, ilustrando o comportamento da velocidade  $v(t)$  ao longo do tempo.



**Figura 4. Comparação entre as soluções analítica (exata) e numérica (Euler) para  $v(t)$ .**

## Interpretação

Sim, existe uma velocidade terminal, como previsto pela solução analítica e pelo campo de direções.

**Definição Analítica:** A velocidade terminal ( $v_T$ ) é o limite da solução  $v(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ :

$$v_T = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{mg}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \right]$$

Como  $e^{-\frac{kt}{m}} \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , temos:

$$v_T = \frac{mg}{k} (1 - 0) = \frac{mg}{k}$$

**Significado Físico:** A velocidade terminal é a velocidade constante atingida por um objeto em queda quando a força de resistência do ar ( $F_{res} = kv$ ) se torna exatamente igual em magnitude à força gravitacional ( $F_g = mg$ ). Neste ponto, a força resultante sobre o objeto é zero:

$$\sum F = mg - kv_T = 0 \implies kv_T = mg$$

De acordo com a segunda lei de Newton, se a força resultante é zero, a aceleração  $a = \frac{dv}{dt}$  é zero. Se a aceleração é zero, a velocidade para de aumentar e permanece constante no valor  $v_T$ .

O experimento com a folha A4 (alto  $k/m$ ) atingiu  $v_T$  rapidamente, enquanto a cebola (baixo  $k/m$ ) tem uma  $v_T$  muito alta, que não foi atingida na curta distância da queda.

## 2.6. Atividade 6: Estudo do Caso $kv^2$

O modelo  $F_{res} = kv$  é geralmente válido para baixas velocidades (fluxo laminar). Para velocidades mais altas (fluxo turbulento), um modelo mais preciso é  $F_{res} = kv^2$ . A EDO torna-se:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

Esta EDO não é linear, mas ainda é separável:

$$m \frac{dv}{dt} = k \left( \frac{mg}{k} - v^2 \right)$$

$$\frac{dv}{\frac{mg}{k} - v^2} = \frac{k}{m} dt$$

Definimos a velocidade terminal  $v_T = \sqrt{\frac{mg}{k}}$  (note a diferença em relação ao modelo linear). A EDO fica:

$$\int \frac{dv}{v_T^2 - v^2} = \int \frac{k}{m} dt$$

A integral da esquerda é uma integral trigonométrica hiperbólica padrão:  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \left( \frac{x}{a} \right)$ .

$$\frac{1}{v_T} \tanh^{-1} \left( \frac{v}{v_T} \right) = \frac{k}{m} t + C_1$$

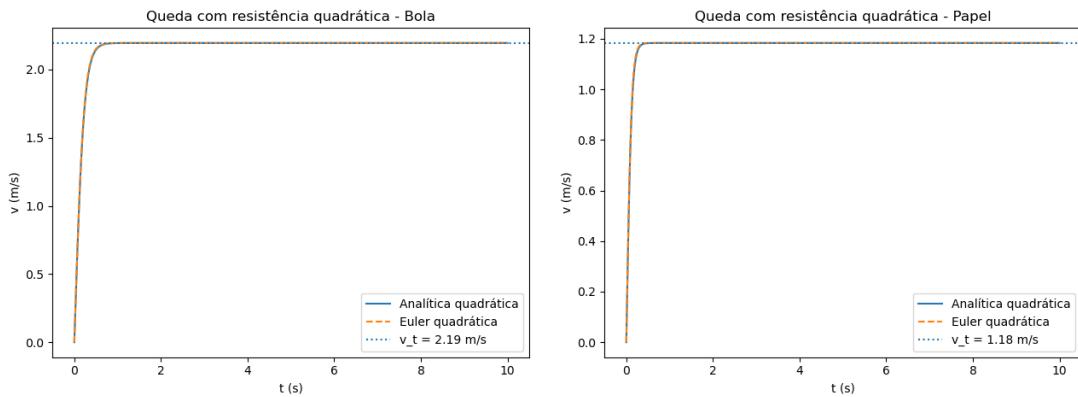
Aplicando  $v(0) = 0$ , temos  $C_1 = 0$ . Isolando  $v(t)$ :

$$\tanh^{-1} \left( \frac{v}{v_T} \right) = \frac{kv_T}{m} t$$

$$\frac{v(t)}{v_T} = \tanh \left( \frac{kv_T}{m} t \right)$$

Como  $v_T = \sqrt{mg/k}$ , temos que  $\frac{kv_T}{m} = \frac{k}{m} \sqrt{\frac{mg}{k}} = \frac{g}{v_T}$ . A solução é:

$$v(t) = v_T \tanh \left( \frac{g}{v_T} t \right), \quad \text{onde } v_T = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$



**Figura 5. Gráfico do comportamento das resistências quando são quadráticas.**

Neste modelo, a velocidade também converge para uma velocidade terminal  $v_T$ , mas a forma da convergência e o valor de  $v_T$  são diferentes do modelo linear  $kv$ .

### 3. Exercício 3 – Do Neurônio Biológico ao Neurônio Artificial

#### 3.1. Parte 1: Neurônio Biológico (Modelo Simplificado)

#### 3.2. Solução Analítica da EDO

O modelo simplificado do neurônio, considerando uma corrente de injeção constante  $I_{\text{inj}}$ , é descrito pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$C \frac{dV}{dt} = -g_L (V - E_L) + I_{\text{inj}}.$$

#### Forma padrão da equação

Expandindo o termo e isolando  $\frac{dV}{dT}$ , temos:

$$C \frac{dV}{dT} + g_L V = g_L E_L + I_{\text{inj}}.$$

Dividindo a equação por  $C$ :

$$\frac{dV}{dT} + \frac{g_L}{C} V = \frac{g_L E_L + I_{\text{inj}}}{C}$$

Definimos:

$$a = \frac{g_L}{C}, \quad b = \frac{g_L E_L + I_{\text{inj}}}{C},$$

De modo que a equação fica na forma linear e podemos resolvê-la utilizando um fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = e^{\int a dt} = e^{at}.$$

Multiplicando a EDO pelo fator integrante:

$$e^{at}V'(t) + ae^{at}V(t) = be^{at}$$

O lado esquerdo da equação é a derivada do produto:

$$\frac{d}{dt}[e^{at}V(t)] dt = be^{at} dt$$

Integramos ambos os lados em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt}[e^{at}V(t)] dt &= \int be^{at} dt \\ \Rightarrow e^{at}V(t) &= \frac{b}{a}e^{at} + C_1, \\ \Rightarrow V(t) &= \frac{b}{a} + C_1 e^{-at}. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de  $a$  e  $b$ :

$$\frac{b}{a} = \frac{(g_L E_L + I_{\text{inj}})/C}{g_L/C} = E_L + \frac{I_{\text{inj}}}{g_L}.$$

Definimos:

$$\tau = \frac{C}{g_L}, \quad V_\infty = E_L + \frac{I_{\text{inj}}}{g_L}.$$

Logo, a solução geral é:

$$V(t) = V_\infty + K e^{-t/\tau}$$

Aplicando a condição inicial  $V(0) = V_0$ :

$$K = V_0 - V_\infty,$$

$$V(t) = V_\infty + (V_0 - V_\infty)e^{-t/\tau}.$$

Com os valores:

$$C = 1, \quad g_L = 0,3, \quad E_L = -65, \quad I_{\text{inj}} = 10, \quad V_0 = -70,$$

Temos:

$$\tau = \frac{1}{0,3} \approx 3,33, \quad V_\infty = -65 + \frac{10}{0,3} \approx -31,67.$$

Portanto:

$$V(t) = -31,67 - 38,33e^{-0,3t}.$$

### 3.2.1. Atividade 1: Solução com Método de Euler

A EDO  $\frac{dV}{dt} = f(t, V)$  foi resolvida numericamente usando o Método de Euler,  $V_{i+1} = V_i + h \cdot f(t_i, V_i)$ . A função  $f(t, V)$  é:

$$f(t, V) = \frac{1}{C} (-g_L(V - E_L) + I_{inj})$$

Foram utilizados os parâmetros fornecidos:

$$C = 1$$

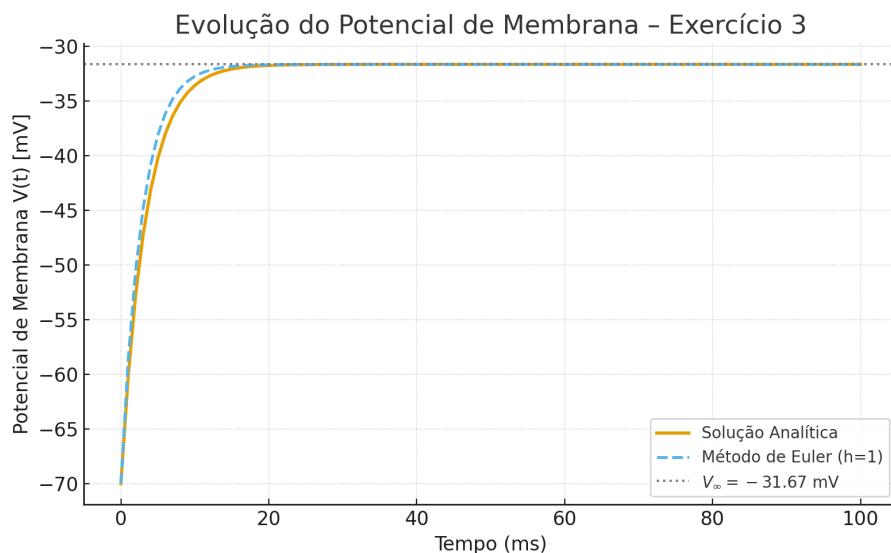
$$g_L = 0.3$$

$$E_L = -65, V(0) = -70$$

$$I_{inj}(t) = 10, h = 1$$

Para  $t \in [0, 100]$ .

O gráfico resultante da simulação numérica, que representa a evolução temporal de  $V(t)$ , é apresentado na Figura 6.



**Figura 6. Evolução temporal do potencial de membrana  $V(t)$  — solução através do método de Euler.**

### 3.2.2. Atividade 2: Interpretação do Gráfico

O gráfico de  $V(t)$  obtido na Parte 1 (Figura 6) representa a evolução temporal do potencial de membrana de um neurônio submetido a uma corrente injetada constante, evidenciando um processo de relaxamento exponencial que conduz o potencial do valor inicial  $V_0$  até o potencial de equilíbrio  $V_\infty$ .

**Tabela 1. Efeitos da corrente injetada  $I_{\text{inj}}$  sobre o potencial de membrana.**

| Situação                         | Corrente                    | Efeito inicial   | Estado final                  |
|----------------------------------|-----------------------------|------------------|-------------------------------|
| $I_{\text{inj}} = 0$             | Nenhuma corrente            | Retorna a $E_L$  | Repouso                       |
| $I_{\text{inj}} > 0$ (constante) | Entrada de cargas positivas | Despolarização   | $V_\infty > E_L$ (equilíbrio) |
| $I_{\text{inj}} < 0$             | Saída de cargas positivas   | Hiperpolarização | $V_\infty < E_L$ (equilíbrio) |

- Quando ( $I_{\text{inj}} = 0$ ): O potencial tende a  $E_L$ , que é o potencial de repouso (tipicamente em torno de  $-65$  mV).
- Quando ( $I_{\text{inj}} > 0$ ): Há uma despolarização da membrana, e  $V(t)$  cresce até um novo valor de equilíbrio mais positivo.
- Quando ( $I_{\text{inj}} < 0$ ): Há uma hiperpolarização, e o potencial se torna mais negativo.

No modelo atual, a curva  $V(t)$  é contínua e nunca ultrapassa um limiar: o neurônio apenas se aproxima de  $V_\infty$ . Isso significa que o sistema funciona como um circuito RC passivo. No caso estudado aqui (com  $I_{\text{inj}} = 10$  e sem limiar),  $V(t)$  tende para um valor sub-limiar (aprox.  $-31,67$  mV), e portanto o neurônio não dispara. O gráfico apenas mostra a evolução passiva da membrana em direção ao equilíbrio.

### 3.3. Parte 2: Neurônio Artificial

#### 3.3.1. Atividade 1: Implementação (ReLU e Sigmoid)

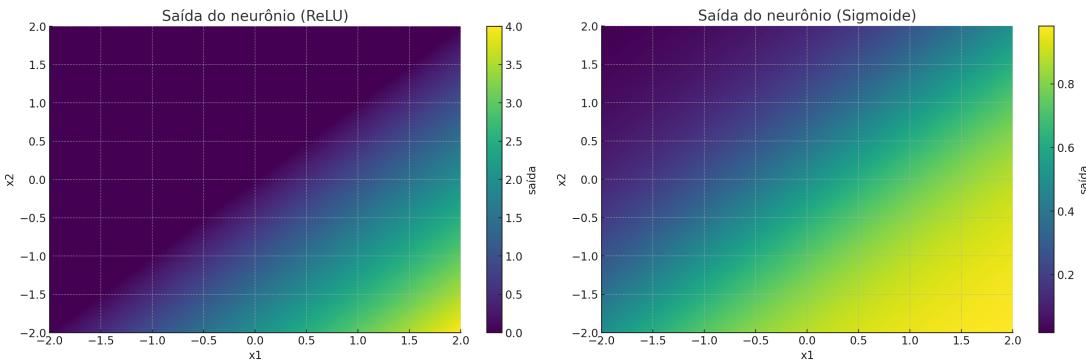
Conforme solicitado e seguindo o código de exemplo, foi implementado um neurônio artificial simples com duas entradas ( $x_1, x_2$ ), dois pesos ( $w_1, w_2$ ) e um bias ( $b$ ). A saída  $y$  é dada por  $y = \sigma(z)$ , onde  $z = w_1x_1 + w_2x_2 + b$ .

- **Função ReLU:** Utilizando a função  $\sigma(z) = \max(0, z)$ , a saída é zero se a soma ponderada  $z$  for negativa, ou é o próprio valor de  $z$  se for positiva. Isso introduz uma não linearidade "retificada".
- **Função Sigmoid:** Utilizando  $\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ , a saída é "esmagada" para o intervalo  $(0, 1)$ . Isso é útil para interpretar a saída como uma probabilidade.

O código-fonte em Python está disponível no link do Google Colab:  
[https://colab.research.google.com/drive/1pcTf7MKBcWJtw67Ae\\_FXNSBMLh\\_yW-E5?usp=sharing](https://colab.research.google.com/drive/1pcTf7MKBcWJtw67Ae_FXNSBMLh_yW-E5?usp=sharing)

#### 3.3.2. Atividade 2: Variação de Entradas e Pesos

Ao variar os pesos  $w_1, w_2$ , altera-se a orientação do "plano de decisão" que o neurônio aprende. Ao variar o bias  $b$ , esse plano é transladado. A Figura 7 ilustra a superfície de saída do neurônio para um *grid* de entradas  $x_1, x_2 \in [-2, 2]$ .



**Figura 7. Superfície de saída do neurônio artificial para as funções de ativação ReLU (esquerda) e Sigmoide (direita).**

Não há possibilidade de comparação direta com o comportamento do neurônio biológico (Figura 6). O modelo biológico descreve uma **dinâmica temporal**  $V(t)$ , mostrando como o potencial evolui ao longo do tempo. O modelo artificial é um **mapeamento estático**: para uma entrada  $(x_1, x_2)$ , ele produz instantaneamente uma saída  $y$ , sem qualquer noção de tempo ou "memória" de estados anteriores.

### 3.4. Parte 3: Discussão

#### 3.4.1. Semelhanças e Diferenças entre os Modelos

- **Semelhanças:** Ambos os modelos realizam uma "soma ponderada". No biológico,  $V(t)$  é influenciado pela corrente injetada ( $I_{inj}$ ) e pela corrente de fuga ( $-g_L(V - E_L)$ ). No artificial, a saída  $y$  depende da soma ponderada das entradas ( $\sum w_i x_i + b$ ). Ambos aplicam uma não linearidade (embora a do modelo biológico (o "disparo") tenha sido simplificada neste exercício).
- **Diferenças:** A principal diferença é a **dinâmica temporal**. O neurônio biológico é descrito por uma EDO, possuindo "memória" e um estado interno ( $V(t)$ ) que evolui com o tempo. O neurônio artificial (deste exemplo) é uma função estática (sem memória), modelando apenas a relação de entrada-saída.

#### 3.4.2. Memória e Dinâmica Temporal no Neurônio Artificial

Não, no modelo de neurônio artificial apresentado (tipo *feedforward*), não há memória ou dinâmica temporal. A saída  $y$  em um instante  $t$  depende apenas das entradas  $x_1, x_2$  no mesmo instante  $t$ . Ele não retém informação sobre entradas passadas. (Observação: Existem modelos de redes neurais, como as Redes Neurais Recorrentes (RNNs), que são projetados especificamente para introduzir dinâmica temporal e memória, mas o neurônio artificial básico não o faz).

### 3.4.3. Substituição de ReLU por Sigmoid

Ao substituir ReLU por Sigmoid, a principal mudança é o *range* da saída.

- **ReLU** ( $\max(0, z)$ ): A saída é ilimitada para  $z > 0$ .
- **Sigmoid** ( $1/(1 + e^{-z})$ ): A saída é limitada (saturada) entre 0 e 1.

Isso significa que, enquanto a ReLU permite que a ativação cresça linearmente com a entrada (para entradas positivas), a Sigmoid "comprime" a saída, tornando-se insensível a grandes variações na entrada  $z$  quando  $z$  é muito positivo ou muito negativo (saturação).

### 3.4.4. Papel da Não Linearidade nos Dois Casos

A não linearidade é fundamental em ambos os casos, mas com papéis distintos.

- **Neurônio Biológico:** A não linearidade principal (não totalmente modelada na EDO da Parte 1, que é passiva) é o **disparo** (potencial de ação). O neurônio integra sinais de forma linear (como um circuito RC) até atingir um limiar, onde então dispara de forma abrupta e não linear.
- **Neurônio Artificial:** A não linearidade (ReLU ou Sigmoid) é o que permite que uma rede de neurônios aproxime funções complexas. Se as funções de ativação fossem lineares, uma rede neural de múltiplas camadas seria matematicamente equivalente a uma única camada linear, perdendo seu poder de representação.

## 4. referencias

Cody Zundel and Jim Hutchins. *The Equivalent Circuit Model of the Neuronal Membrane.* Disponível em: <https://uen.pressbooks.pub/advneuro/chapter/the-equivalent-circuit-model-of-the-neuronal-membrane>.