

语法分析

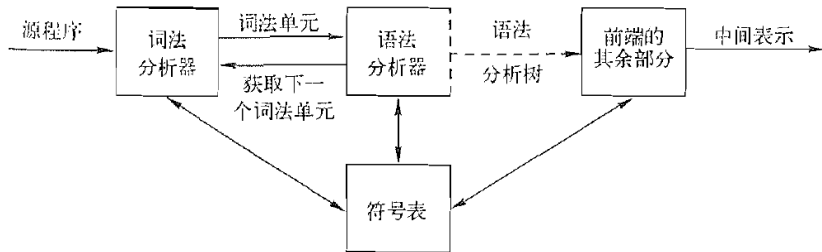
魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2020 年 11 月 26 日



输入: 词法单元流 & 语言的语法规则



输出: 语法分析树 (Parse Tree)

语法分析举例

$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$
$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \{ \langle \text{StmtList} \rangle \}$
$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \text{if} (\langle \text{Expr} \rangle) \langle \text{Stmt} \rangle$
$\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{Stmt} \rangle$
$\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$
$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle$
$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Num} \rangle$
$\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$
$\langle \text{Id} \rangle \rightarrow x$
$\langle \text{Id} \rangle \rightarrow y$
$\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 0$
$\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 1$
$\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 9$
$\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow >$
$\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow +$

		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Id} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > \langle \text{Expr} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > \langle \text{Num} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > 9$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($x > 9$	{ $\langle \text{StmtList} \rangle$ }
if ($x > 9$	{ $\langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$ }
if ($x > 9$	{ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if ($x > 9$	{ $\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = \langle \text{Num} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = \langle \text{Id} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y + \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y + \langle \text{Num} \rangle ;$ }
if ($x > 9$	{ $x = 0 ; y = y + 1 ;$ }

语法分析阶段的主题之一: 上下文无关文法

$\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \{ \langle \text{StmtList} \rangle \}$
 $\langle \text{Stmt} \rangle \rightarrow \text{if} (\langle \text{Expr} \rangle) \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{StmtList} \rangle \rightarrow \langle \text{StmtList} \rangle \langle \text{Stmt} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Id} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Num} \rangle$
 $\langle \text{Expr} \rangle \rightarrow \langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow x$
 $\langle \text{Id} \rangle \rightarrow y$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 0$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 1$
 $\langle \text{Num} \rangle \rightarrow 9$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow >$
 $\langle \text{Optr} \rangle \rightarrow +$

语法分析阶段的主题之二: 构建语法分析树

$\langle \text{Stmt} \rangle$			
if ($\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Id} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > $\langle \text{Expr} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > $\langle \text{Num} \rangle$)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > 9)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x > 9	{	$\langle \text{StmtList} \rangle$ }
if (x > 9	{	$\langle \text{StmtList} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	$\langle \text{Stmt} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	$\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = $\langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = $\langle \text{Num} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = 0 $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; $\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Id} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y $\langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y + $\langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y + $\langle \text{Num} \rangle ;$ }
if (x > 9	{	x = 0 ; y = y + 1 ; }

语法分析阶段的主题之三: 错误恢复



报错、恢复、继续分析



<Context-Free Grammar>

上下文无关文法

Definition (Context-Free Grammar (CFG); 上下文无关文法)

上下文无关文法 G 是一个四元组 $G = (T, N, P, S)$:

- ▶ T 是**终结符号** (Terminal) 集合, 对应于词法分析器产生的词法单元;
- ▶ N 是**非终结符号** (Non-terminal) 集合;
- ▶ P 是**产生式** (Production) 集合;

$$A \in N \longrightarrow \alpha \in (T \cup N)^*$$

头部/左部 (Head) A : **单个**非终结符

体部/右部 (Body) α : 终结符与非终结符构成的串, 也可以是空串 ϵ

- ▶ S 为**开始** (Start) 符号。要求 $S \in N$ 且唯一。

$$G = (\{a, b\}, \{S\}, P, S)$$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$G = (\{(,)\}, \{S\}, P, S)$$

$$S \rightarrow SS$$

$$S \rightarrow (S)$$

$$S \rightarrow ()$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$stmt \rightarrow$ if $expr$ then $stmt$
| if $expr$ then $stmt$ else $stmt$
| other

条件语句文法

悬空 (Dangling)-else 文法

$S \rightarrow \text{if } E \text{ then } S \text{ else } S$

$S \rightarrow \text{begin } S L$

$S \rightarrow \text{print } E$

$L \rightarrow \text{end}$

$L \rightarrow ; S L$

$E \rightarrow \text{num} = \text{num}$

约定: 如果没有明确指定, 第一个产生式的头部就是开始符号

关于终结符号的约定

1) 下述符号是终结符号:

- ① 在字母表里排在前面的小写字母, 比如 a 、 b 、 c 。
- ② 运算符号, 比如 $+$ 、 $*$ 等。
- ③ 标点符号, 比如括号、逗号等。
- ④ 数字 0 、 1 、 \dots 、 9 。
- ⑤ **黑体字符串**, 比如 **id** 或 **if**。每个这样的字符串表示一个终结符号。

关于非终结符号的约定

2) 下述符号是非终结符号:

- ① 在字母表中排在前面的大写字母, 比如 A 、 B 、 C 。
- ② 字母 S 。它出现时通常表示开始符号。
- ③ 小写、斜体的名字, 比如 $expr$ 或 $stmt$ 。



Syntax

Semantics

语义：上下文无关文法 G 定义了一个**语言** $L(G)$

语言是**串**的集合

串从何来？

推导 (Derivation)

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \text{id}$$

推导即是將某个产生式的左边**替换**成它的右边

每一步推导需要选择**替换哪个非终结符号**, 以及**使用哪个产生式**

推导 (Derivation)

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$

$$E \Longrightarrow -E \Longrightarrow -(E) \Longrightarrow -(E + E) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + E) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

$E \Longrightarrow -E$: 经过一步推导得出

$E \stackrel{+}{\Longrightarrow} -(\mathbf{id} + E)$: 经过一步或多步推导得出

$E \stackrel{*}{\Longrightarrow} -(\mathbf{id} + E)$: 经过零步或多步推导得出

$$E \Longrightarrow -E \Longrightarrow -(E) \Longrightarrow -(E + E) \Longrightarrow -(E + \mathbf{id}) \Longrightarrow -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

Definition (Sentential Form; 句型)

如果 $S \xRightarrow{*} \alpha$, 且 $\alpha \in (T \cup N)^*$, 则称 α 是文法 G 的一个**句型**。

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \text{id}$$

$$E \Longrightarrow -E \Longrightarrow -(E) \Longrightarrow -(E+E) \Longrightarrow -(\text{id} + E) \Longrightarrow -(\text{id} + \text{id})$$

Definition (Sentence; 句子)

如果 $S \xRightarrow{*} w$, 且 $w \in T^*$, 则称 w 是文法 G 的一个**句子**。

Definition (文法 G 生成的语言 $L(G)$)

文法 G 的**语言** $L(G)$ 是它能推导出的**所有句子**构成的集合。

$$w \in L(G) \iff S \xRightarrow{*} w$$

关于文法 G 的**两个基本问题**:

- ▶ **Membership 问题**: 给定字符串 $x \in T^*$, $x \in L(G)$?
- ▶ $L(G)$ 究竟是什么?

给定字符串 $x \in T^*$, $x \in L(G)$?

(即, 检查 x 是否符合文法 G)

这就是**语法分析器**的任务:

为输入的词法单元流寻找推导、**构建语法分析树**, 或者报错

根节点是文法 G 的起始符号

$\langle \text{Stmt} \rangle$		
if ($\langle \text{Expr} \rangle$)		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Expr} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if ($\langle \text{Id} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (\underline{x} $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$)		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ $\langle \text{Expr} \rangle$)		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ $\langle \text{Num} \rangle$)		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9)		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9) {	$\langle \text{StmtList} \rangle$	}
if (x $>$ 9) {	$\langle \text{StmtList} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9) {	$\langle \text{Stmt} \rangle$	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9) { $\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle$;		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9) { $x = \langle \text{Expr} \rangle$;		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9) { $x = \langle \text{Num} \rangle$;		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9) { $x = 0$;		$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $\langle \text{Id} \rangle =$	$\langle \text{Expr} \rangle$;
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $y =$	$\langle \text{Expr} \rangle$;
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $y = \langle \text{Expr} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$;		
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $y = \langle \text{Id} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$;		
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $y = y$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$;		
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $y = y$ $+$ $\langle \text{Expr} \rangle$;		
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $y = y$ $+$ $\langle \text{Num} \rangle$;		
if (x $>$ 9) { $x = 0$; $y = y$ $+$ 1 ; }		

叶子节点是输入的词法单元流

常用的语法分析器以**自顶向下**或**自底向上**的方式构建中间部分

$L(G)$ 是什么?

这是**程序设计语言设计者**需要考虑的问题

$$S \rightarrow SS$$

$$S \rightarrow (S)$$

$$S \rightarrow ()$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$L(G) = \{\text{良匹配括号串}\}$$

字母表 $\Sigma = \{a, b\}$ 上的所有回文串 (Palindrome) 构成的语言

$$S \rightarrow aSa$$

$$S \rightarrow bSb$$

$$S \rightarrow a$$

$$S \rightarrow b$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon$$

$$\{b^n a^m b^{2n} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

$$S \rightarrow bSbb \mid A$$

$$A \rightarrow aA \mid \epsilon$$

$\{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ 中 } a, b \text{ 个数相同}\}$

$$V \rightarrow aVbV \mid bVaV \mid \epsilon$$

$\{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ 中 } a, b \text{ 个数不同}\}$

$$S \rightarrow T \mid U$$
$$T \rightarrow VaT \mid VaV$$
$$U \rightarrow VbU \mid VbV$$
$$V \rightarrow aVbV \mid bVaV \mid \epsilon$$


练习 (非作业): 证明之

$S \rightarrow \text{if } E \text{ then } S \text{ else } S$

$S \rightarrow \text{begin } S L$

$S \rightarrow \text{print } E$

$L \rightarrow \text{end}$

$L \rightarrow ; S L$

$E \rightarrow \text{num} = \text{num}$

顺序语句、条件语句、打印语句



L-System

(注: 这不是上下文无关文法, 但精神上高度一致, 并且更有趣)

variables : A B

constants : + -

start : A

rules : $(A \rightarrow B-A-B)$, $(B \rightarrow A+B+A)$

angle : 60°

A, B : 向右移动并画线

+: 左转

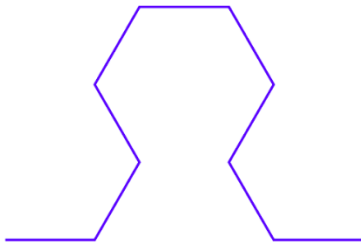
-: 右转

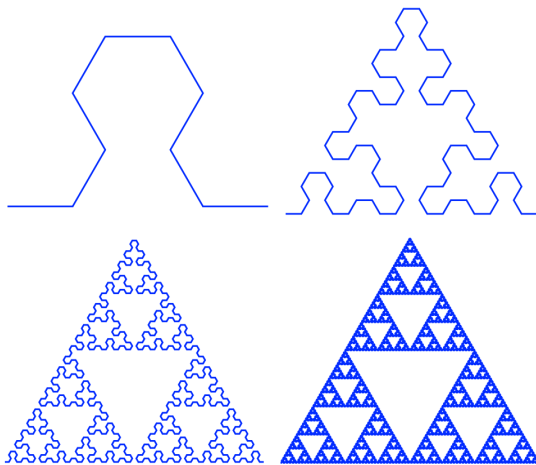
每一步都**并行地**应用**所有**规则

A

$B - A - B$

$A + B + A - B - A - B - A + B + A$





Sierpinski arrowhead curve ($n = 2, 4, 6, 8$)

variables : $X Y$

constants : $F + -$

start : FX

rules : $(X \rightarrow X+YF+), (Y \rightarrow -FX-Y)$

angle : 90°

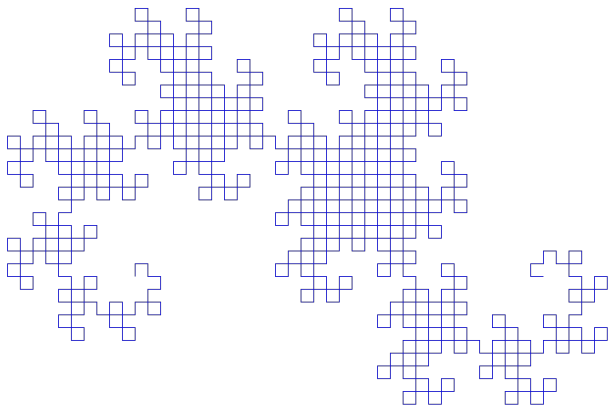
F : 向上移动并画线

$+$: 右转

$-$: 左转

X : 仅用于展开, 在作画时被忽略

每一步都**并行地**应用**所有**规则



Dragon Curve ($n = 10$)

最左 (leftmost) 推导与最右 (rightmost) 推导

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$

$$E \xRightarrow{\text{lm}} -E \xRightarrow{\text{lm}} -(E) \xRightarrow{\text{lm}} -(E + E) \xRightarrow{\text{lm}} -(\mathbf{id} + E) \xRightarrow{\text{lm}} -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

$E \xRightarrow{\text{lm}} -E$: 经过一步最左推导得出

$E \xRightarrow[\text{lm}]{+} -(\mathbf{id} + E)$: 经过一步或多步最左推导得出

$E \xRightarrow[\text{lm}]{*} -(\mathbf{id} + E)$: 经过零步或多步最左推导得出

$$E \xRightarrow{\text{rm}} -E \xRightarrow{\text{rm}} -(E) \xRightarrow{\text{rm}} -(E + E) \xRightarrow{\text{rm}} -(E + \mathbf{id}) \xRightarrow{\text{rm}} -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

Definition (Left-sentential Form; 最左句型)

如果 $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} \alpha$, 且 $\alpha \in (T \cup N)^*$, 则称 α 是文法 G 的一个**最左句型**。

$$E \xRightarrow{\text{lm}} -E \xRightarrow{\text{lm}} -(E) \xRightarrow{\text{lm}} -(E + E) \xRightarrow{\text{lm}} -(\text{id} + E) \xRightarrow{\text{lm}} -(\text{id} + \text{id})$$

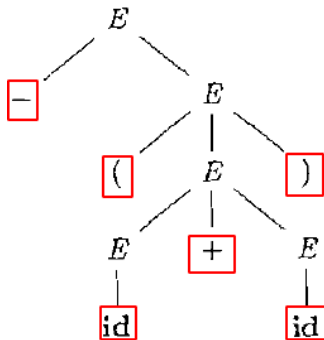
Definition (Right-sentential Form; 最右句型)

如果 $S \xRightarrow[\text{rm}]{*} \alpha$, 且 $\alpha \in (T \cup N)^*$, 则称 α 是文法 G 的一个**最右句型**。

$$E \xRightarrow{\text{rm}} -E \xRightarrow{\text{rm}} -(E) \xRightarrow{\text{rm}} -(E + E) \xRightarrow{\text{rm}} -(E + \text{id}) \xRightarrow{\text{rm}} -(\text{id} + \text{id})$$

语法分析树

语法分析树是静态的, 它不关心动态的推导顺序

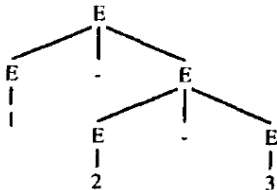
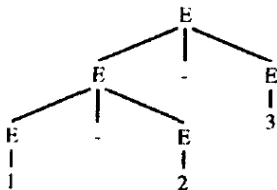


一棵语法分析树对应多个推导

但是, 一棵语法分析树与**最左 (最右) 推导**一一对应

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid (E) \mid \text{id} \mid \text{num}$$

1 - 2 - 3 的语法树?

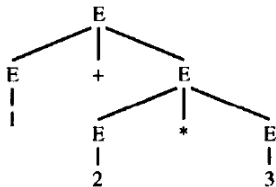
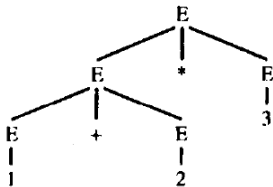


Definition (二义性(Ambiguous) 文法)

如果 $L(G)$ 中的某个句子有一个以上语法树/最左推导/最右推导, 则文法 G 是二义性的。

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid (E) \mid \text{id} \mid \text{num}$$

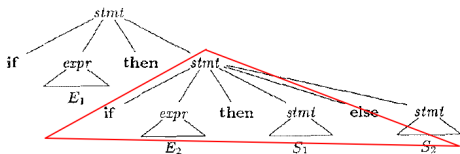
1 + 2 * 3 的语法树?



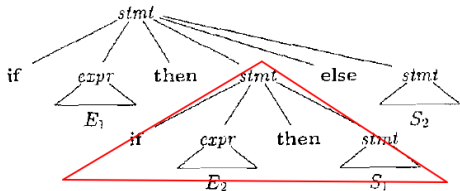
$stmt \rightarrow$ if $expr$ then $stmt$
 | if $expr$ then $stmt$ else $stmt$
 | other

“悬空-else” 文法

if E_1 then if E_2 then S_1 else S_2



if E_1 then (if E_2 then S_1 else S_2)

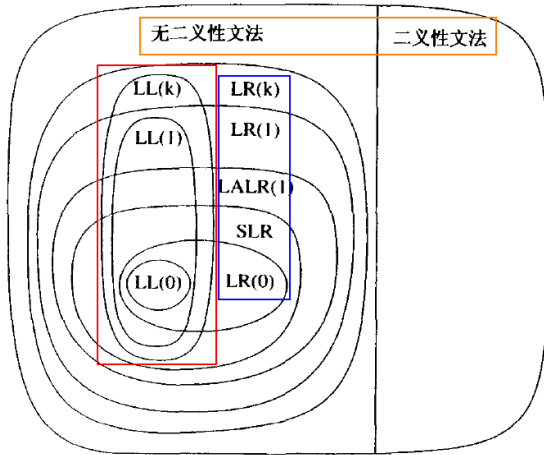


if E_1 then (if E_2 then S_1) else S_2

二义性文法

不同的语法分析树产生不同的语义





所有语法分析器都要求文法是**无二义性**的

二义性文法

Q : 如何**识别**二义性文法?



Q : 如何**消除**文法的二义性?

LEARN BY EXAMPLES

这是**不可判定**的问题

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid (E) \mid \text{id} \mid \text{num}$$

四则运算均是**左结合**的

优先级: 括号最先, 先乘除后加减

二义性表达式文法以**相同的方式**处理所有的算术运算符

要消除二义性, 需要**区别对待**不同的运算符

将运算的“先后”顺序信息编码到语法树的“层次”结构中

$$E \rightarrow E + E \mid \text{id}$$

$$E \rightarrow E + T$$

$$T \rightarrow \text{id}$$

左结合文法

$$E \rightarrow T + E$$

$$T \rightarrow \text{id}$$

右结合文法

使用左 (右) 递归实现左 (右) 结合

$$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \mathbf{id}$$

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid \mathbf{id}$$

括号最先, 先乘后加文法

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid (E) \mid \mathbf{id} \mid \mathbf{num}$$

$$E \rightarrow E + T \mid E - T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid T / F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid \mathbf{id} \mid \mathbf{num}$$

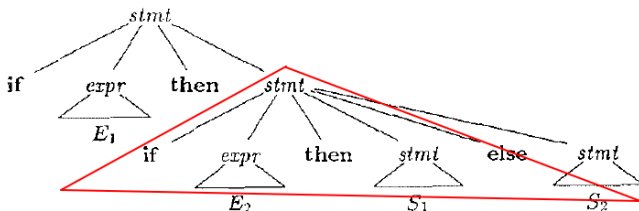
无二义性的表达式文法

E : 表达式(*expression*); T : 项(*term*) F : 因子(*factor*)

将运算的“先后”顺序信息编码到语法树的“层次”结构中

$stmt \rightarrow$ if $expr$ then $stmt$
 $\quad \mid$ if $expr$ then $stmt$ else $stmt$
 $\quad \mid$ other

if E_1 then if E_2 then S_1 else S_2



“每个else与最近的尚未匹配的then匹配”

$$\begin{aligned}
 stmt &\rightarrow \text{if } expr \text{ then } stmt \\
 &\quad | \text{ if } expr \text{ then } stmt \text{ else } stmt \\
 &\quad | \text{ other}
 \end{aligned}$$

$stmt$	\rightarrow	$matched_stmt$
	$ $	$open_stmt$
$matched_stmt$	\rightarrow	$\text{if } expr \text{ then } matched_stmt \text{ else } matched_stmt$
	$ $	other
$open_stmt$	\rightarrow	$\text{if } expr \text{ then } stmt$
	$ $	$\text{if } expr \text{ then } matched_stmt \text{ else } open_stmt$

基本思想: **then** 与 **else** 之间的语句必须是“已匹配的”

我也看不懂啊

~~“我不想去上课啊妈妈”~~

“清醒一点！你是老师啊！”



我们要证明**两**件事情

$$L(G) = L(G')$$

G' 是无二义性的

$$\begin{aligned}
 stmt &\rightarrow \text{if } expr \text{ then } stmt \\
 &\quad | \text{ if } expr \text{ then } stmt \text{ else } stmt \\
 &\quad | \text{ other}
 \end{aligned}$$

$stmt$	\rightarrow	$matched_stmt$
	$ $	$open_stmt$
$matched_stmt$	\rightarrow	$\text{if } expr \text{ then } matched_stmt \text{ else } matched_stmt$
	$ $	other
$open_stmt$	\rightarrow	$\text{if } expr \text{ then } stmt$
	$ $	$\text{if } expr \text{ then } matched_stmt \text{ else } open_stmt$

$$L(G') \subseteq L(G)$$

$$L(G) \subseteq L(G')$$

对推导步数作数学归纳

G' 是**无二义性**的

$stmt$	\rightarrow	$matched_stmt$
	$ $	$open_stmt$
$matched_stmt$	\rightarrow	$if\ expr\ then\ matched_stmt\ else\ matched_stmt$
	$ $	$other$
$open_stmt$	\rightarrow	$if\ expr\ then\ stmt$
	$ $	$if\ expr\ then\ matched_stmt\ else\ open_stmt$

每个句子对应的**语法分析树**是唯一的

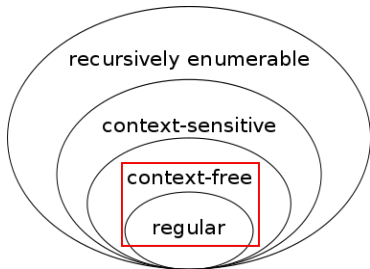
只需证明: 每个非终结符的“**展开**”方式是唯一的

$$L(matched_stmt) \cap L(open_stmt) = \emptyset$$

$$L(matched_stmt_1) \cap L(matched_stmt_2) = \emptyset$$

$$L(open_stmt_1) \cap L(open_stmt_2) = \emptyset$$

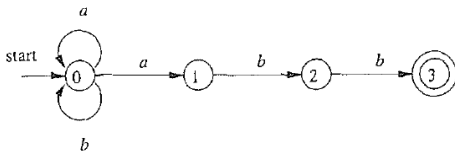
为什么不使用优雅、强大的**正则表达式**描述程序设计语言的语法？



正则表达式的表达能力**严格弱于**上下文无关文法

每个正则表达式 r 对应的语言 $L(r)$ 都可以使用上下文无关文法来描述

$$r = (a|b)^*abb$$



$$\begin{aligned} A_0 &\rightarrow aA_0 \mid bA_0 \mid aA_1 \\ A_1 &\rightarrow bA_2 \\ A_2 &\rightarrow bA_3 \\ A_3 &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

此外, 若 $\delta(A_i, \epsilon) = A_j$, 则添加 $A_i \rightarrow A_j$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

该语言**无法**使用正则表达式来描述

Theorem

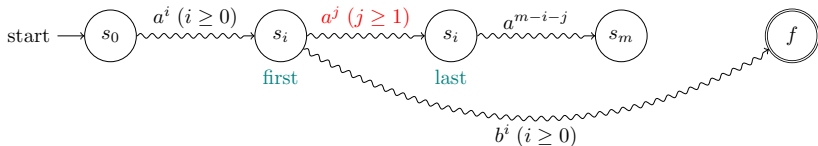
$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 无法使用正则表达式描述。

反证法

假设存在正则表达式 $r: L(r) = L$

则存在有限状态自动机 $D(r): L(D(r)) = L$; 设其状态数为 k

考虑输入 $a^m (m > k)$



$D(r)$ 也能接受 $a^{i+j}b^i$; 矛盾!

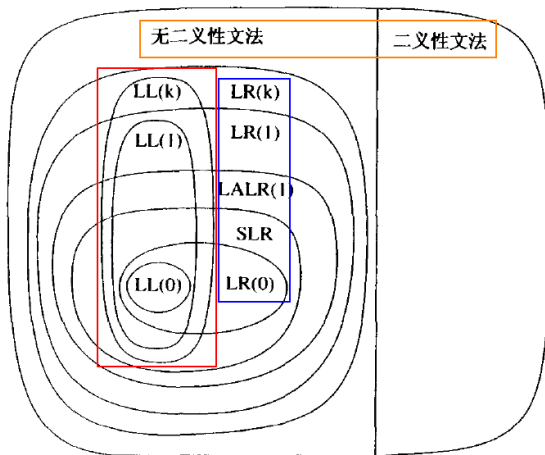
$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Pumping Lemma for Regular Languages

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Pumping Lemma for Context-free Languages

只考虑**无二义性**的文法
这意味着, 每个句子对应唯一的一棵语法分析树



今日份主题: **LL(1) 语法分析器**

自顶向下的、
递归下降的、
预测分析的、
适用于 $LL(1)$ 文法的、
 $LL(1)$ 语法分析器

自顶向下构建语法分析树

根节点是文法的起始符号 S

每个**中间节点**表示**对某个非终结符应用某个产生式进行推导**
(Q : 选择哪个非终结符, 以及选择哪个产生式)

叶节点是词法单元流 $w\$$

仅包含终结符号与特殊的**文件结束符** $\$$

递归下降的实现框架

```
void A() {先不考虑这里是如何选择产生式的
1) 选择一个 A 产生式,  $A \rightarrow X_1 X_2 \cdots X_k$ ;
2) for ( i = 1 to k ) {
3)   if (  $X_i$  是一个非终结符号 )
4)     递归下降调用其它非终结符对应的递归函数
       调用过程  $X_i()$ ;
5)   匹配当前词法单元 else if (  $X_i$  等于当前的输入符号  $a$  )
6)     读入下一个输入符号;
7)   else /* 发生了一个错误 */;
   }
}
```

为每个非终结符写一个递归函数

内部按需调用其它非终结符对应的递归函数

$$S \rightarrow F$$

$$S \rightarrow (S + F)$$

$$F \rightarrow a$$

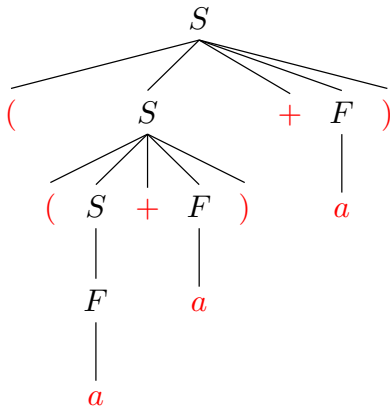
$$w = ((a + a) + a)$$

演示递归下降过程

$$S \rightarrow F$$

$$S \rightarrow (S + F)$$

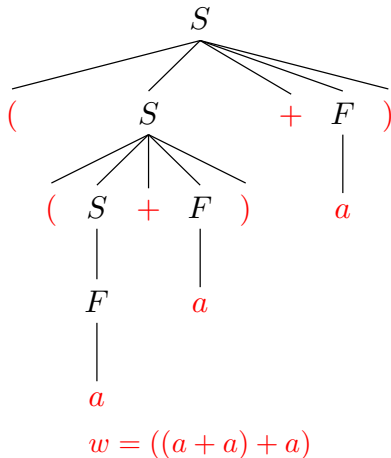
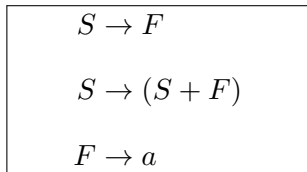
$$F \rightarrow a$$



$$w = ((a + a) + a)$$

每次都选择语法分析树**最左边**的非终结符进行展开

同样是展开非终结符 S ,
为什么前两次选择了 $S \rightarrow (S + F)$, 而第三次选择了 $S \rightarrow F$?



因为它们面对的**当前词法单元**不同

使用预测分析表确定产生式

$S \rightarrow F$
$S \rightarrow (S + F)$
$F \rightarrow a$

		()	a	+	\$
S		2		1		
F				3		

指明了每个**非终结符**在面对不同的**词法单元或文件结束符**时，
该选择哪个**产生式** (按编号进行索引) 或者**报错**

Definition ($LL(1)$ 文法)

如果文法 G 的**预测分析表**是**无冲突**的, 则 G 是 $LL(1)$ 文法。

无冲突: 每个单元格里只有一个生成式 (编号)

$S \rightarrow F$
$S \rightarrow (S + F)$
$F \rightarrow a$

	()	a	+	\$
S	2		1		
F			3		

对于当前选择的**非终结符**,
仅根据输入中**当前的词法单元**即可确定需要使用哪条**产生式**

递归下降的、预测分析实现方法

$$S \rightarrow F$$
$$S \rightarrow (S + F)$$
$$F \rightarrow a$$

	()	a	+	\$
S	2		1		
F			3		

```
1: procedure MATCH(t)
2:   if token = t then
3:     token ← NEXT-TOKEN()
4:   else
```

```
1: procedure S()
2:   if token = '(' then
3:     MATCH('(')
4:     S()
5:     MATCH('+')
6:     F()
7:     MATCH(')')
8:   else if token = 'a' then
9:     F()
10:  else
11:    ERROR(token, {'(', 'a'})
```

```
1: procedure F()
2:   if token = 'a' then
```

如何计算给定文法 G 的预测分析表?

$\text{FIRST}(\alpha)$ 是可从 α 推导得到的句型的**首终结符号**的集合

Definition ($\text{FIRST}(\alpha)$ 集合)

对于任意的 (产生式的右部) $\alpha \in (N \cup T)^*$:

$$\text{FIRST}(\alpha) = \{t \in T \cup \{\epsilon\} \mid \alpha \xRightarrow{*} t\beta \vee \alpha \xRightarrow{*} \epsilon\}.$$

考虑非终结符 A 的所有产生式 $A \rightarrow \alpha_1, A \rightarrow \alpha_2, \dots, A \rightarrow \alpha_m$,

如果它们对应的 $\text{FIRST}(\alpha_i)$ 集合互不相交,

则只需查看当前输入词法单元, 即可确定选择哪个产生式 (或报错)

如何计算给定文法 G 的预测分析表?

$\text{FOLLOW}(A)$ 是可能在某些句型中**紧跟在 A 右边的终结符**的集合

Definition ($\text{FOLLOW}(A)$ 集合)

对于任意的 (产生式的左部) 非终结符 $A \in N$:

$$\text{FOLLOW}(A) = \{t \in T \cup \{\$\} \mid \exists s. S \xRightarrow{*} s \triangleq \beta A t \gamma\}.$$

考虑产生式 $A \rightarrow \alpha$,

如果从 α 可能推导出空串 ($\alpha \xRightarrow{*} \epsilon$),

则只有当当前词法单元 $t \in \text{FOLLOW}(A)$, 才可以选择该产生式

先计算每个符号 X 的 $\text{FIRST}(X)$ 集合

```
1: procedure FIRST( $X$ )
2:   if  $X \in T$  then                                ▷ 规则 1:  $X$  是终结符
3:     FIRST( $X$ ) =  $X$ 
4:   for  $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  do                    ▷ 规则 2:  $X$  是非终结符
5:     FIRST( $X$ )  $\leftarrow$  FIRST( $X$ )  $\cup$  FIRST( $Y_1$ )
6:     for  $i \leftarrow 2$  to  $k$  do
7:       if  $\epsilon \in L(Y_1 \dots Y_{i-1})$  then
8:         FIRST( $X$ )  $\leftarrow$  FIRST( $X$ )  $\cup$  FIRST( $Y_i$ )
9:       if  $\epsilon \in L(Y_1 \dots Y_k)$  then                ▷ 规则 3:  $X$  可推导出空串
10:      FIRST( $X$ )  $\leftarrow$  FIRST( $X$ )  $\cup$   $\{\epsilon\}$ 
```

不断应用上面的规则, 直到每个 $\text{FIRST}(X)$ 都不再变化 (闭包!!!)

再计算每个符号串 α 的 $\text{FIRST}(\alpha)$ 集合

$$\alpha = X\beta$$

$$\text{FIRST}(\alpha) = \begin{cases} \text{FIRST}(X) & \epsilon \notin L(X) \\ \text{FIRST}(X) \cup \text{FIRST}(\beta) & \epsilon \in L(X) \end{cases}$$

$$(1) X \rightarrow Y$$

$$(2) X \rightarrow a$$

$$(3) Y \rightarrow \epsilon$$

$$(4) Y \rightarrow c$$

$$(5) Z \rightarrow d$$

$$(6) Z \rightarrow XYZ$$

$$\text{FIRST}(X) = \{a, c, \epsilon\}$$

$$\text{FIRST}(Y) = \{c, \epsilon\}$$

$$\text{FIRST}(Z) = \{a, c, d\}$$

$$\text{FIRST}(XYZ) = \text{FIRST}(X) = \{a, c\}$$

为每个非终结符 X 计算 $\text{FOLLOW}(X)$ 集合

```
1: procedure FOLLOW( $X$ )
2:   for  $X$  是开始符号 do ▷ 规则 1:  $X$  是开始符号
3:     FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  { $\$$ }

4:   for  $A \rightarrow \alpha X \beta$  do ▷ 规则 2:  $X$  是某产生式右部中间的一个符号
5:     FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  ( $\text{FIRST}(\beta) \setminus \{\epsilon\}$ )
6:     if  $\epsilon \in \text{FIRST}(\beta)$  then
7:       FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  FOLLOW( $A$ )

8:   for  $A \rightarrow \alpha X$  do ▷ 规则 3:  $X$  是某产生式右部的最后一个符号
9:     FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  FOLLOW( $A$ )
```

不断应用上面的规则, 直到每个 $\text{FOLLOW}(X)$ 都不再变化 (闭包!!!)

$$(1) X \rightarrow Y$$

$$(2) X \rightarrow a$$

$$(3) Y \rightarrow \epsilon$$

$$(4) Y \rightarrow c$$

$$(5) Z \rightarrow d$$

$$(6) Z \rightarrow XYZ$$

$$\text{FOLLOW}(X) = \{c, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Y) = \{a, c, d, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Z) = \emptyset$$

如何根据FIRST 与 FOLLOW 集合计算给定文法 G 的预测分析表?

按照以下规则, 在表格 $[A, t]$ 中填入生成式 $A \rightarrow \alpha$ (编号):

$$t \in \text{FIRST}(\alpha) \quad (1)$$

$$\alpha \xRightarrow{*} \epsilon \wedge t \in \text{FOLLOW}(A) \quad (2)$$

Definition ($LL(1)$ 文法)

如果文法 G 的**预测分析表**是**无冲突**的, 则 G 是 $LL(1)$ 文法。

$$(1) X \rightarrow Y$$

$$(2) X \rightarrow a$$

$$(3) Y \rightarrow \epsilon$$

$$(4) Y \rightarrow c$$

$$(5) Z \rightarrow d$$

$$(6) Z \rightarrow XYZ$$

$$\text{FIRST}(X) = \{a, c, \epsilon\}$$

$$\text{FIRST}(Y) = \{c, \epsilon\}$$

$$\text{FIRST}(Z) = \{a, c, d\}$$

$$\text{FIRST}(XYZ) = \text{FIRST}(X) = \{a, c\}$$

$$\text{FOLLOW}(X) = \{c, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Y) = \{a, c, d, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Z) = \emptyset$$

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	\$
<i>X</i>	1, 2	1	1	1
<i>Y</i>	3	3, 4	3	3
<i>Z</i>	5, 6	5, 6	5	

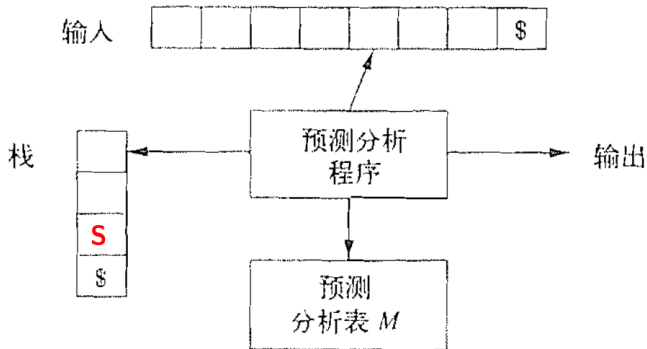
$LL(1)$ 语法分析器

L : 从左向右 (left-to-right) 扫描输入

L : 构建最左 (leftmost) 推导

1: 只需向前看一个输入符号便可确定使用哪条产生式

非递归的预测分析算法



非递归的预测分析算法

设置 ip 使它指向 w 的第一个符号, 其中 ip 是输入指针;

令 X = 栈顶符号;

while ($X \neq \$$) { /* 栈非空 */

 if (X 等于 ip 所指向的符号 a) 执行栈的弹出操作, 将 ip 向前移动一个位置;

 else if (X 是一个终结符号) $error()$;

 else if ($M[X, a]$ 是一个报错条目) $error()$;

 else if ($M[X, a] = X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$) {

 输出产生式 $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$;

 弹出栈顶符号;

 将 Y_k, Y_{k-1}, \dots, Y_1 压入栈中, 其中 Y_1 位于栈顶。

 }

 令 X = 栈顶符号;

}

不是 $LL(1)$ 文法怎么办?

改造它

消除左递归

提取左公因子

E 在不消耗任何词法单元的情况下, 直接递归调用 E , 造成死循环

$$E \rightarrow E + T \mid E - T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid T / F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid \mathbf{id} \mid \mathbf{num}$$

$$\text{FIRST}(E + T) \cap \text{FIRST}(T) \neq \emptyset$$

不是 $LL(1)$ 文法

消除左递归

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

$$E \rightarrow TE'$$

$$E' \rightarrow + TE' \mid \epsilon$$

将左递归转为右递归

(注: 右递归对应右结合; 需要在后续阶段进行额外处理)

$$A \rightarrow A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \dots A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \beta_n$$

其中, β_i 都不以 A 开头

$$A \rightarrow \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \dots \mid \beta_n A'$$

$$A' \rightarrow \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \dots \mid \alpha_m A' \mid \epsilon$$

$$E \rightarrow E + T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid \mathbf{id}$$

$$E \rightarrow TE'$$

$$E' \rightarrow + TE' \mid \epsilon$$

$$T \rightarrow FT'$$

$$T' \rightarrow * FT' \mid \epsilon$$

$$F \rightarrow (E) \mid \mathbf{id} \mid \mathbf{num}$$

非直接左递归

$$S \rightarrow Aa \mid b$$

$$A \rightarrow Ac \mid Sb \mid \epsilon$$

$$S \Rightarrow Aa \Rightarrow Sda$$

- 1) 按照某个顺序将非终结符号排序为 A_1, A_2, \dots, A_n .
- 2) for (从 1 到 n 的每个 i) {
- 3) for (从 1 到 $i-1$ 的每个 j) {
- 4) 将每个形如 $A_i \rightarrow A_j \gamma$ 的产生式替换为产生式组 $A_i \rightarrow \delta_1 \gamma \mid \delta_2 \gamma \mid \dots \mid \delta_k \gamma$,
 其中 $A_j \rightarrow \delta_1 \mid \delta_2 \mid \dots \mid \delta_k$ 是所有的 A_j 产生式
- 5) }
- 6) 消除 A_i 产生式之间的立即左递归
- 7) }

图 4-11 消除文法中的左递归的算法

$$A_k \rightarrow A_l \alpha \Rightarrow l > k$$

$$S \rightarrow Aa \mid b$$

$$A \rightarrow Ac \mid Sb \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow Ac \mid Aad \mid bd \mid \epsilon$$

$$S \rightarrow Aa \mid b$$

$$A \rightarrow bdA' \mid A'$$

$$A' \rightarrow cA' \mid adA' \mid \epsilon$$

$$A_k \rightarrow A_l \alpha \implies l > k$$

	非终结符号	输入符号					
		id	+	*	()	\$
$E \rightarrow TE'$	E	$E \rightarrow TE'$			$E \rightarrow TE'$		
$E' \rightarrow +TE' \mid \epsilon$	E'		$E' \rightarrow +TE'$			$E' \rightarrow \epsilon$	$E' \rightarrow \epsilon$
$T \rightarrow FT'$	T	$T \rightarrow FT'$			$T \rightarrow FT'$		
	T'		$T' \rightarrow \epsilon$	$T' \rightarrow *FT'$		$T' \rightarrow \epsilon$	$T' \rightarrow \epsilon$
$T' \rightarrow *FT' \mid \epsilon$	F	$F \rightarrow \text{id}$			$F \rightarrow (E)$		
$F \rightarrow (E) \mid \text{id} \mid \text{num}$							

$$\text{FIRST}(F) = \{ (, \text{id} \}$$

$$\text{FIRST}(T) = \{ (, \text{id} \}$$

$$\text{FIRST}(E) = \{ (, \text{id} \}$$

$$\text{FIRST}(E') = \{ +, \epsilon \}$$

$$\text{FIRST}(T') = \{ *, \epsilon \}$$

$$\text{FOLLOW}(E) = \text{FOLLOW}(E') = \{), \$ \}$$

$$\text{FOLLOW}(T) = \text{FOLLOW}(T') = \{ +,), \$ \}$$

$$\text{FOLLOW}(F) = \{ +, *,), \$ \}$$

已匹配	栈	输入	动作
句型	$E\$$	$id + id * id\$$	
	$TE'\$$	$id + id * id\$$	输出 $E \rightarrow TE'$
	$FT'E'\$$	$id + id * id\$$	输出 $T \rightarrow FT'$
	$id T'E'\$$	$id + id * id\$$	输出 $F \rightarrow id$
id	$T'E'\$$	$+ id * id\$$	匹配 id
id	$E'\$$	$+ id * id\$$	输出 $T' \rightarrow \epsilon$
id	$+ TE'\$$	$+ id * id\$$	输出 $E' \rightarrow + TE'$
$id +$	$TE'\$$	$id * id\$$	匹配 $+$
$id +$	$FT'E'\$$	$id * id\$$	输出 $T \rightarrow FT'$
$id +$	$id T'E'\$$	$id * id\$$	输出 $F \rightarrow id$
$id + id$	$T'E'\$$	$* id\$$	匹配 id
$id + id$	$* FT'E'\$$	$* id\$$	输出 $T' \rightarrow * FT'$
$id + id *$	$FT'E'\$$	$id\$$	匹配 $*$
$id + id *$	$id T'E'\$$	$id\$$	输出 $F \rightarrow id$
$id + id * id$	$T'E'\$$	$\$$	匹配 id
$id + id * id$	$E'\$$	$\$$	输出 $T' \rightarrow \epsilon$
$id + id * id$	$\$$	$\$$	输出 $E' \rightarrow \epsilon$

图 4-21 对输入 $id + id * id$ 进行预测分析时执行的步骤

$$S \rightarrow i E t S \mid i E t S e S \mid a$$

$$E \rightarrow b$$

提取左公因子

$$S \rightarrow i E t S S' \mid a$$

$$S' \rightarrow e S \mid \epsilon$$

$$E \rightarrow b$$

$$S \rightarrow iEtS \mid iEtSeS \mid a$$

$$E \rightarrow b$$

非终结符号	输入符号					
	a	b	e	i	t	$\$$
S	$S \rightarrow a$			$S \rightarrow iEtSS'$		
S'			$S' \rightarrow \epsilon$ $S' \rightarrow eS$			$S' \rightarrow \epsilon$
E		$E \rightarrow b$				

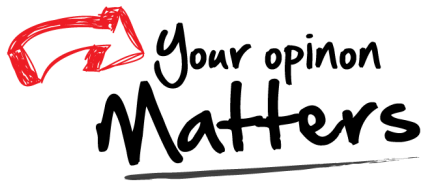
解决二义性: 选择 $S' \rightarrow eS$, 将 **else** 与前面最近的 **then** 关联起来

语法分析阶段的主题之三: 错误恢复



报错、恢复、继续分析

Thank
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn