5.3 流形上的积分

本节旨在建立流形上的积分理论。当然，在谈论流形上的积分之前，需要先明确一件事情：被积分的对象是什么？答案是：最高次微分形式。从表象上看，之所以积最高次微分形式，是因为它们“在坐标变换下满足正确的变换规则”，使得其积分的定义具有合理性。但更加深层次的原因在于对“积分”本身的理解。似乎在微积分中，我们所学习的一直是“函数的积分”，但这其实是一个误解：在$\mathbb{R}^m$的一个区域里积分一个函数时，事实上是通过$\mathbb{R}^m$的整体坐标，给出了$\mathbb{R}^m$中“微小矩形区域的体积”(即体积微元)，然后“对函数与体积微元的乘积求和(并求极限)”. 注意体积微元$dx^1 \cdots dx^m$并不是指一个特定的微小矩形区域，而是给出了求微小矩形区域体积的规则(即给定一个由向量$a_1\vec{e}_1, \cdots, a_m\vec{e}_m$张成的矩形，在体积微元$dx^1 \cdots dx^m$规则下其体积为$a_1 \cdots a_m$)，是定义积分时不可忽略的一部分(在实分析中，它被解释成Lebesgue测度，从而有了进一步拓广的天空). 对于流形而言，一般不再有整体坐标，从而没有天然给定的“微小矩形”. 然而，我们可以通过逼近的想法，用流形上“一点处切空间中的由一组向量生成的平行多面体”逼近流形中“该点附近的微小曲边平行多面体”，所以为了在流形上积分，只需要给出计算“切空间中由一组向量生成的平行多面体”的体积计算规则即可。流形上每一点的切空间都不一样，有什么规则在各点处计算由一组向量生成的平行多面体体积呢？答案是：用最高次微分形式(命题5.1.15说明m次微分形式作用在m个向量上所得的结果是行列式，而从线性代数可知行列式就是由列向量张成的平行多面体的有向体积). 当然，这里还有一个小的问题：行列式给出的只是有向体积，因此还需要对流形加上定向才能给出合理的积分定义(见下文)。

5.3.1 最高次形式与定向

¶ 流形上的最高形式

设M是一个m维光滑流形，则当$k > m$时$\Omega^k(M) = 0$. 于是M上次数最高的非零光滑微分形式为m-形式，它们自然被称为**最高次形式**. 现在设$p \in M$，且(φ, U, V)是p附近的一个坐标卡. 那么$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$是$U$上的一个最高次形式. 注意到对任意的$q \in U$都有$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m)_q \neq 0$, 因为在点 q处,

$$(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m)_q(\partial_1, \cdots, \partial_m) = \det(dx^i(\partial_j))_{1 \le i,j \le m} = 1.$$

此外, 由于$\dim \Lambda^m T_pM = 1$, 所以对U上的任意最高次形式 ω以及任意的$q \in U$, 都存在实数λ_q使得

$$\omega_q = \lambda_q (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m)_q.$$

而由ω的光滑性, 系数λ作为 U上的函数也是光滑的. 故在相差一个光滑函数作为乘积因子的意义下, 上述由局部坐标定义的最高次形式是该坐标卡中“本质上唯一的”最高次形式. (不过, 该结论在整个流形M一般而言是不成立的: 给定两个最高次形式 $\omega, \eta \in \Omega^m(M)$, 有可能出现$\omega_p = 0, \omega_q \neq 0$且$\eta_p \neq 0, \eta_q = 0$的情况, 从而也就不存在函数$f \in C^\infty(M)$使得$\omega = f\eta$或 $\eta = f\omega$.)

特别地,如果在U上将局部坐标从$(x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)$变换为$(x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)$, 那么所得的两个

坐标最高次形式

$$dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m \quad 与 \quad dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m,$$

应当相差一个U上的光滑函数. 下面找出这个坐标变换下的乘积因子：

引理 5.3.1. (坐标变换因子)

设$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$是微分同胚，且记$y = \varphi(x)$, 那么

$$\varphi^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) = \det(d\varphi_x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

♢

证明 记$\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$, 则 $\varphi^* y^i = y^i \circ \varphi = \varphi^i$. 于是

$$\varphi^*(dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) = d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^m.$$

由于

$$d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^m(\partial_1^x, \cdots, \partial_m^x) = \det(d\varphi_x),$$

故

$$d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^m = \det(d\varphi_x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

□

设 $(\varphi_\alpha, U, V_\alpha,)$ 与$(\varphi_\beta, U, V_\beta)$为$U$上两个坐标系, 坐标变换映射是 $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$,它将 $\varphi_\alpha(x)$映为$y = \varphi_\beta(x)$. 于是

$$(\varphi_{\alpha\beta})^*(\varphi_\beta^{-1})^* dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m = \det(d\varphi_{\alpha\beta})(\varphi_\alpha^{-1})^* dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m.$$

由于 $(\varphi_{\alpha\beta})^*(\varphi_\beta^{-1})^* = (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_{\alpha\beta})^* = \varphi_\alpha^{-1}$, 故

$$dx_\beta^1 \wedge \cdots dx_\beta^m = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m.$$

¶ 对可定向性的需求

设M为m维光滑流形, $\omega \in \Omega^m(M)$为M上的光滑m-形式. 下面讨论如何定义积分$\int_M \omega$. 为简单起见，先假设ω支在坐标卡(φ, U, V)中,其中点的坐标记为$\{x^1, \cdots, x^m\}$. 记

$$\omega = f(\varphi(x)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

其中f是V上的一个光滑函数. 利用 V上的欧氏坐标微分形式$f(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, 很自然的方式是定义

$$\int_U \omega := \int_V f(x) dx^1 \cdots dx^m. \tag{5.3.1}$$

当然，跟通常一样，需要验证等式右边的值是与坐标卡选取无关的. 为此，设$(\varphi_\alpha, U, V_\alpha)$与$(\varphi_\beta, U, V_\beta)$为$U$上的两个坐标系, 而转移映射

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : V_\alpha \to V_\beta$$

将$x_\alpha = \varphi_\alpha(x)$ 映为$x_\beta = \varphi_\beta(x)$. 那么

$$\omega = f_\beta(x_\beta) dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m = f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha)) \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m$$

故为了使得(5.3.1)是良定的，需要

$$\int_{V_\beta} f_\beta(x_\beta)dx_\beta^1\cdots dx_\beta^m = \int_{V_\alpha} f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha))\det(d\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha))dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m.$$

然而，上式并不总成立: 对于多元函数的积分

$$\int f(x)dx^1\cdots dx^m,$$

如果$\varphi: V_1\to V_2$是一个微分同胚, 那么如下的变量替换公式:

$$\int_{V_2} f(y)\ dy^1\cdots dy^m = \int_{V_1} f(\varphi(x))|\det(d\varphi)(x)|\ dx^1\cdots dx^m. \tag{5.3.2}$$

从而只能得到

$$\int_{V_\beta} f_\beta(x_\beta)dx_\beta^1\cdots dx_\beta^m = \int_{V_\alpha} f_\beta(\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha))\,|\det(d\varphi_{\alpha\beta}(x_\alpha))|\,dx_\alpha^1\cdots dx_\alpha^m.$$

换句话说, 为了使得定义(5.3.1)与坐标卡选取无关, 需要假定

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta})>0$$

对所有坐标卡成立. 这个必要条件就是在习题一中出现过的定向性条件:

定义 5.3.2. (流形的定向)

设M是一个m维的光滑流形.

(1) 设$(\varphi_\alpha,U_\alpha,V_\alpha)$与 $(\varphi_\beta,U_\beta,V_\beta)$是$M$上的两个坐标卡. 若如果转移映射$\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$满足

$$\det(d\varphi_{\alpha\beta})_p>0$$

对所有的$p\in\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$成立，则称这两个坐标卡是**定向相容的**.

(2) 若M上的图册 $\mathcal{A}=\{(\varphi_\alpha,U_\alpha,V_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\}$中，任意两个坐标卡之间都是定向相容的，则称该图册是M上的一个 **定向**.

(3) 若M上存在一个定向，则称M是**可定向流形**；若M上已指定一个定向，则称M是**定向流形**.

♣

注 5.3.3. 设U是一个坐标卡, 其坐标函数为$\{x^1,\cdots,x^m\}$. 为了区别起见，将用记号$-U$来表示在同一个集合U上具有“翻转”坐标函数$\{-x^1,x^2,\cdots,x^m\}$的坐标卡. 那么$-U$与U不是定向兼容的. 设$\widetilde{U}$为另一个坐标卡，使得 $\widetilde{U}\cap U\neq\emptyset$是 连通的. 那么, 要么

- $\widetilde{U}$与U是定向兼容的,

要么

- $\widetilde{U}$与$-U$是定向兼容的.

作为推论, 立刻得到

推论 5.3.4. (可定向则恰有两个定向)

如果M是连通可定向流形, 那么M恰有两个不同的定向.

♡

例 5.3.5. 并非所有流形均可定向。例如，对于实射影空间$\mathbb{RP}^n$, 当n是奇数时它是可定向的，当n是偶数时它是不可定向的.

5.3.2 光滑流形上的积分

¶ 光滑流形上最高阶形式的积分

下面假设M是一个光滑可定向m维流形，并在M上固定一个定向$\mathcal{A}$. 设ω为任意M上的光滑m-形式M. 为了定义$\int_M \omega$, 先设ω是支在一个与$\mathcal{A}$定向兼容的坐标卡(φ, U, V)中. 在这种情况下，存在一个支在U中的函数f使得

$$\omega = f(\varphi(x)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

从而可以定义

$$\int_U \omega := \int_V f(x) dx^1 \cdots dx^m, \tag{5.3.3}$$

其中上式右边是在$V \subset \mathbb{R}^m$上的Lebesgue积分. 为简单起见，总假设f是绝对可积的. 事实上, 在接下来将要遇到的函数f基本上都是紧支的.

为了定义更一般的m-形式$\omega \in \Omega^m(M)$的积分, 取M的一个局部有限的坐标开覆盖$\{U_\alpha\}$，且在每个坐标卡都取与定向$\mathcal{A}$相容的坐标系. 令$\{\rho_\alpha\}$为一个从属于$\{U_\alpha\}$的单位分解. 因为ρ_α支在U_α中, 所以$\rho_\alpha\omega$ 也是支在U_α中. 于是可以定义

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega. \tag{5.3.4}$$

若上式右边对任意的局部有限坐标覆盖以及从属于该覆盖的任意单位分解，都是绝对可积的，则称最高阶微分形式ω是**可积的**.

当然，首先需要验证上面的定义(5.3.4)跟“与定向兼容坐标卡的选取”无关, 同时也跟“从属于该坐标卡的单位分解的选取”无关.

定理 5.3.6. (积分的良定性) 假设ω是紧支的, 那么表达式(5.3.4)的值与$\{U_\alpha\}$的选取以及$\{\rho_\alpha\}$的选取都无关. ♡

证明 首先证明(5.3.3)不依赖于U中坐标系的选取，证明过程本质上就是本节前面所做的计算：设ω 是支在U中的光滑m形式, 而$\{x_\alpha^i\}$与 $\{x_\beta^i\}$为U上的两个与给定定向相容的坐标系. 记

$$\omega = f_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m = f_\beta dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m,$$

则由$dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m$ 可知$f_\alpha = \det(d\varphi_{\alpha\beta}) f_\beta$. 由于$\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$, 利用$\mathbb{R}^n$上积分的变量替换公式就能得到

$$\int_{V_\alpha} f_\alpha dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m = \int_{V_\beta} f_\beta dx_\beta^1 \cdots dx_\beta^m.$$

下面证明(5.3.4)是良定的. 为此，假设$\{U_\alpha\}$与$\{U_\beta\}$是M的两个“由与定向相容的坐标卡组成的局部有限覆盖”，而$\{\rho_\alpha\}$与$\{\rho_\beta\}$分别是从属于 $\{U_\alpha\}$和$\{U_\beta\}$的单位分解. 那么$\{U_\alpha \cap U_\beta\}$是$M$上的另一个局部有限覆盖, 并且$\{\rho_\alpha\rho_\beta\}$是一个从属于这个新覆盖的单位分解. 对每个固定的$\alpha$, 均有

$$\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{U_\alpha} (\sum_\beta \rho_\beta) \rho_\alpha \omega = \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \rho_\beta \rho_\alpha \omega.$$

于是

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha \cap U_\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \omega.$$

同理$\sum_\beta \int_{U_\beta} \rho_\beta \omega$也等于该式，从而二者相等. □

注 5.3.7. 如果M不是可定向的流形, 则不能像上面那样定义微分形式的积分. 不过, 依然能通过引入**密度**的概念去建立积分理论，参见[5]，第 427-432页.

¶ 变量替换公式

接下来把$\mathbb{R}^m$上积分的变量替换公式推广到流形上.

定义 5.3.8. (微分同胚: 保定向与反转定向)

设M, N为定向光滑m维流形, 其定向分别为$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$，而$\varphi : M \to N$是微分同胚.

(1) 若对每个$(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$, M上的坐标卡$(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$与$\mathcal{A}$是定向相容的，则称微分同胚$\varphi$是**保定向微分同胚**.

(2) 若对每个$(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$, M上的坐标卡$(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$与$\mathcal{A}$是定向不相容的，则称微分同胚$\varphi$是**反转定向微分同胚**. ♣

假设M, N都是连通流形. 容易看出微分同胚$\varphi : M \to N$保定向当且仅当存在一个坐标卡 $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$, 使得$M$上的坐标卡$(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$与$\mathcal{A}$定向相容； φ反转定向当且仅当存在一个坐标卡 $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta) \in \mathcal{B}$, 使得$M$上的坐标卡$(\psi_\beta \circ \varphi, \varphi^{-1}(X_\beta), Y_\beta)$与$\mathcal{A}$定向不相容. 因此连通流形之间的微分同胚要么是保定向，要么是反转定向。对于不连通流形，情况可以略微复杂一点：φ必然把连通分支映为连通分支，而在每个连通分支上φ要么保定向，要么反转定向.

下面证明

定理 5.3.9. (流形上积分的变量替换公式)

假设M, N都是 m维定向光滑流形，而 $\varphi : M \to N$是一个微分同胚.

(1) 如果φ是保定向微分同胚, 那么$\int_M f^*\omega = \int_N \omega$.

(2) 如果φ是反转定向微分同胚, 那么$\int_M f^*\omega = -\int_N \omega$. ♡

证明 只需在局部坐标卡中证明, 此时欲证的结论可化归为$\mathbb{R}^m$中积分变量代换公式. □

注 5.3.10. 如果ω是M上的紧支光滑k形式, 其中$k < m$,那么不能在M上积分ω. 不过, 对任意k维定向子流形$X \subset M$,可以定义 $\int_X \omega$为$\int_X \iota^*\omega$, 其中$\iota : X \hookrightarrow M$是包含映射. 通过这种方式，可以得到$M$上的$k$-形式与$M$中的$k$维可定向子流形之间的一个“配对”.

¶ 体积形式与体积测度

接下来给出流形可定向性的一个简单刻画：

定理 5.3.11. (可定向性与体积形式)

m维光滑流形M是可定向的当且仅当M上存在处处非零的光滑m形式 μ. ♡

证明 首先设μ是M上的一个处处非零的光滑m形式. 那么在每个连通的局部坐标卡U上, 存在处处非零的光滑函数f, 使得 $\mu = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$. 于是

$$\mu(\partial_1, \cdots, \partial_m) = f \neq 0.$$

注意总可以在每个这样的坐标卡里选取坐标，使得$f > 0$: 如果$f < 0$，则用$-x^1$替换x^1，从而使得$f > 0$. 现在假设$(U_\alpha, x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^m)$与 $(U_\beta, x_\beta^1, \cdots, x_\beta^m)$为这样的两个坐标卡, 则在交集$U_\alpha \cap U_\beta$上有

$$f dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m = \mu = g dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^m = g \det(d\varphi_{\alpha\beta}) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m,$$

其中$f, g > 0$. 于是 $\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$. 故这样构造的图册是$M$的一个定向.

其次, 假设$\mathcal{A}$是M的一个定向. 对$\mathcal{A}$中每个局部坐标卡 U_α, 令

$$\mu_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m.$$

选取一个从属于开覆盖$\{U_\alpha\}$的单位分解$\{\rho_\alpha\}$. 下面断言

$$\mu := \sum_\alpha \rho_\alpha \mu_\alpha$$

是M上的一个无处消失的光滑m形式. 事实上, 对每个$p \in M$, 根据局部有限性，总存在p的一个邻域U, 使得 $\sum_\alpha \rho_\alpha \mu_\alpha$是一个有限和$\sum_{i=1}^k \rho_i \mu_i$. 于是在$p$附近,

$$\mu(\partial_1^1, \cdots, \partial_m^1) = \sum_{i=1}^k (\det d\varphi_{1i}) \rho_i > 0.$$

所以在p的附近$\mu \neq 0$, 即μ是一个处处非零的光滑m形式. □

定义 5.3.12. (体积形式)

称m维光滑流形M上的处处非零的光滑m形式为M上的**体积形式**. ♣

如果 M是连通可定向流形, 而 μ是M上的一个体积形式 , 那么M上的两个定向就分别跟 μ和 $-\mu$ “正相关” . 后面将用$[\mu]$和 $[-\mu]$表示M上的这两个定向.

注 5.3.13. 设μ为M上的一个体积形式, 并且选取M上的定向为$[\mu]$. 那么可以在 “M的紧支连续函数空间 $C_c(M)$” 上定义一个线性泛函

$$I : C_c(M) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_M f\mu.$$

(注意在定义积分时，函数f不需要是光滑函数) 由于M上的定向被选取为$[\mu]$, 不难看出来泛函I是正的, 即对于$f \geq 0$，总有$I(f) \geq 0$. 由于任何流形都同时是局部紧的和σ紧的, 根据Riesz表示定理，存在一个唯一的Radon测度 [2] m_μ，使得

$$I(f) = \int_M f dm_\mu.$$

利用这个测度dm_μ, 可以定义诸如$L^p(M, \mu)$之类的函数空间.

注 5.3.14. 特别地, 在任意Lie群上, 可以定义诸如 “左不变微分形式” 这样的概念. 由于任意Lie群G是可定向的, 在G上一定存在 “左不变体积形式” . 对应于Lie群上的左不变体积形式的测度被称为 Lie群上的Haar测度，在Lie理论以及分析、数论、遍历理论等数学分支中都起到了极其重要的作用.

[2]即局部有限的, 且在所有Borel集上有定义的正则测度.