

6.6 Thom 类及其应用

6.6.1 向量丛

向量丛是一类特殊的流形，代表的是“连续（光滑）依赖于参数的一族向量空间”，于是它具有“特定方向的线性性”。另一方面，向量丛又是非常常见的流形，比如每个流形的切丛就是一个自然而重要的向量丛。流形上很多重要的几何对象都可以表示为流形上特定向量丛的截面，例如光滑流形 M 上的向量场就是 M 的切丛的截面。

¶ 向量丛：定义

一般而言，光滑流形都是高度“非线性的”。不过确实存在许多光滑流形，它们具有一定的“部分线性结构”。例如，对于任意的 n 维光滑流形 M ，它的切丛

$$TM = \{(p, X_p) | p \in M, X_p \in T_p M\}$$

“关于切向变量是线性的”。在习题 1 中已经证明了 TM 是一个 $2n$ 维光滑流形，且典范投射 $\pi: TM \rightarrow M$ 是一个光滑淹没。

类似于 TM 这样的流形还有很多，例如余切丛 T^*M ，以及子流形 $S \subset M$ 的法丛 $N(S, M)$ 等等。下面给出一般定义：

定义 6.6.1. (光滑向量丛)

- (1) 设 E, M 都是拓扑空间， $\pi: E \rightarrow M$ 是连续的满射，且对任意点 $p \in M$ ， $E_p := \pi^{-1}(p)$ 都是 r 维线性空间。若下述相容性条件成立：

对任意 $p \in M$ ，存在 p 的开邻域 U 与同胚映射

$$\Phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

使得对任意 $q \in U$ ， $\Phi|_{E_q}$ 是从 E_q 到 $\{q\} \times \mathbb{R}^r$ 的一个线性同构，

则称三元组 (π, E, M) 是一个向量丛， E 为该向量丛的全空间， M 为该向量丛的底空间， π 为丛投影映射， r 为该向量丛的秩，每个 $E_q = \pi^{-1}(q)$ 为该向量丛在 q 点处的纤维，并称 Φ 为该丛的局部平凡化映射。在不引起混淆的情况下，简称 E 是 M 上的向量丛，或者 E 是向量丛。

- (2) 若 (π, E, M) 是一个向量丛，其中 E 和 M 都是光滑流形，丛投影映射 $\pi: E \rightarrow M$ 是光滑映射，且上述定义中的局部平凡化映射 Φ 都可取为微分同胚，则称 (π, E, M) 是一个光滑向量丛。在不引起混淆的情况下，简称 E 是 M 上的光滑向量丛，或者 E 是光滑向量丛。



例 6.6.2. (典范线丛) 考虑以实射影空间

$$\mathbb{RP}^n = \{l \mid l \text{ 是 } \mathbb{R}^{n+1} \text{ 中经过 } 0 \text{ 的直线}\}$$

为底空间的向量丛

$$\gamma_n^1 = \{(l, x) \mid l \in \mathbb{RP}^n, x \in l \subset \mathbb{R}^{n+1}\}$$

可以验证, 它是 \mathbb{RP}^n 上的一个线丛. 一般把该线丛称作 \mathbb{RP}^n 的**典范线丛**.

特别当 $n = 1$ 时, 有 $\mathbb{RP}^1 \simeq S^1$, 此时典范线丛 γ_1^1 不是别的, 恰好就是在拓扑学中见过的“无穷 Möbius 带”, 它是 S^1 上的线丛.

注 6.6.3.

- (1) 注意跟流形的定义类似, 底空间每点附近的局部平凡化都不是唯一的.
- (2) 类似地可定义复向量丛, C^α 向量丛, 甚至(秩为无穷的)Banach 向量丛等概念.
- (3) 秩为 1 的向量丛通常被称为**线丛**.

丛同态

为简单起见, 下面仅考虑光滑向量丛. 可以用很自然的方式定义光滑向量丛之间的丛同态, 从而构建“光滑向量丛范畴”:

定义 6.6.4. (丛同态与丛同构)

- (1) 设 (π_1, E_1, M_1) 和 (π_2, E_2, M_2) 都是光滑向量丛. 若光滑映射 $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ 和 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 满足

$$\pi_2 \circ \varphi = f \circ \pi_1,$$

并且对任意 $p \in M$, 映射 $\varphi: \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(f(p))$ 是线性映射, 则称 φ 是从向量丛 E_1 到向量丛 E_2 的**丛同态**.

- (2) 若丛同态 $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ 可逆且其逆映射也是丛同态, 则称 φ 是一个**丛同构**, 并称 E_1, E_2 为**同构的向量丛**.



例 6.6.5. 设 $\Delta \subset M \times M$ 是对角线子流形. 则切丛

$$T\Delta = \{(x, x, \xi, \xi) \mid \xi \in T_x M\}$$

与法丛

$$N(\Delta, M \times M) = \{(x, x, \eta, -\eta) \mid \eta \in T_x M\}$$

是同构的.

显然,

- 两个丛同态的复合依然是丛同态, 且丛同态是“光滑向量丛范畴”里的“态射”.
- 同构关系是向量丛之间的一个等价关系. 同构的向量丛将被视为是同一个向量丛.

截面

研究向量丛的几何时, 一个非常重要的概念是

定义 6.6.6. (截面)

设 (π, E, M) 是一个(光滑)向量丛. 若(光滑)映射 $s: M \rightarrow E$ 满足

$$\pi \circ s = Id_M,$$

则称 s 是向量丛 (π, E, M) 的一个(光滑)**截面**



记向量丛 E 的全体截面的集合为 $\Gamma(E)$, 记其全体光滑截面的集合为 $\Gamma^\infty(E)$. 事实上, M 的许多有趣的几何对象(例如向量场、张量场、微分形式、体积形式、黎曼度量、辛形式等)都是 M 上某个(向量)丛的光滑截面.

注 6.6.7. 显然若 s_1, s_2 都是 E 的光滑截面, 则 $as_1 + bs_2$ 也是. 故 $\Gamma^\infty(E)$ 是一个(无穷维)线性空间. 事实上, $\Gamma^\infty(E)$ 还有更进一步的代数结构: 若 s 是 E 的一个光滑截面, 而 f 是 M 上的光滑函数, 则 fs 是 E 的一个光滑截面. 所以 $\Gamma^\infty(E)$ 是一个 $C^\infty(M)$ 模.

由定义可知任意向量丛都有一个平凡的光滑截面, 即**零截面**

$$s_0 : M \rightarrow E, \quad p \mapsto (p, 0)$$

另一方面, 向量丛有可能没有处处非零的截面.

例 6.6.8. 设 $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow \gamma_n^1$ 是 $\mathbb{R}P^n$ 上的典范线丛 γ_n^1 的任意截面, 考虑复合映射

$$\phi : S^n \xrightarrow{pr} \mathbb{R}P^n \xrightarrow{s} \gamma_n^1$$

其中 pr 是投射 $pr(\pm x) = l_x$ 【此处 l_x 是 x 所在的直线】. 由定义可知, ϕ 形如

$$x \mapsto (l_x, f(x)x)$$

其中 f 是 S^n 上满足 $f(-x) = -f(x)$ 的光滑函数. 由介值性质, f 一定在某点 x_0 处为零, 从而 s 也在 x_0 处为零. 换言之, 不存在处处非零的光滑截面 $s : \mathbb{R}P^n \rightarrow \gamma_n^1$.

6.6.2 Thom 类

¶ 向量丛的 de Rham 上同调

下面考虑向量丛的 de Rham 上同调与底流形的 de Rham 上同调之间的关系:

命题 6.6.9. (向量丛的 de Rham 上同调)

对于 M 上的任意向量丛 E , 有

$$H_{dR}^k(E) = H_{dR}^k(M), \quad \forall k.$$

证明 令 $s_0 : M \rightarrow E$ 为零截面, 则 $\pi \circ s_0 = \text{Id}_M$, 而且 $s_0 \circ \pi \sim \text{Id}_E$, 其同伦为

$$F : E \times \mathbb{R} \rightarrow E, \quad (x, v, t) \mapsto (x, tv).$$

于是 E 同伦等价于 M , 从而由同伦不变性可得欲证的结论. □

利用 Poincaré 对偶, 可以得到(注意它是推论 6.5.6 的推广)

定理 6.6.10. (Thom 同构)

设 E 是 M 上的秩为 r 的向量丛. 若 E 和 M 都是定向的, 而且紧支 de Rham 上同调群都是有限维的, 则

$$H_c^{k+r}(E) \simeq H_c^k(M), \quad \forall k.$$

证明 两次应用 Poincaré 对偶即可:

$$H_c^{k+r}(E) \simeq H_{dR}^{(m+r)-(k+r)}(E) \simeq H_{dR}^{m-k}(M) \simeq H_c^k(M).$$

□

¶ Thom 类

下设 M 是 m 紧定向流形, E 是 M 上的秩为 r 的定向向量丛. 根据 Thom 同构,

$$H_c^r(E) \simeq H_c^0(M) = H_{dR}^0(M).$$

特别地, 在该同构下, $[1] \in H_{dR}^0(M)$ 对应了唯一的一个同调类 $\tau(E) \in H_c^r(E)$.

定义 6.6.11. (Thom 类)

称 $\tau(E) \in H_c^r(E)$ 为定向向量丛 (π, E, M) 的 **Thom 类**.



注 6.6.12. Thom 类跟子流形的 Poincaré 对偶之间关系密切:

(1) 设 M 是 m 紧定向流形, E 是 M 上的秩为 r 的定向向量丛. 通过零截面

$$s_0 : M \rightarrow E, x \mapsto (x, 0)$$

把 M 嵌入 E , 可以视 M 为 E 的闭子流形. 类似于子流形的 Poincaré 对偶, 映射

$$\int : H_{dR}^m(E) \rightarrow \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_M s_0^* \omega$$

给出了 $(H_{dR}^m(E))^* \simeq H_c^r(E)$ 中的一个元素, 那个元素就是 $\tau(E)$.

(2) 反之, 对于紧致定向流形 M 的余维数 r 的定向闭子流形 S , 则由管状邻域定理, S 的法丛 $N(S, M)$ 微分同胚于 S 在 M 中的某个管状邻域 U . 记 $\varphi : U \rightarrow N(S, M)$ 为该微分同胚, 而 $j : U \subset M$ 为嵌入映射, 则零扩张给出的元素

$$j_* \varphi^* \tau(N(S, M)) \in H_c^r(M) = H_{dR}^r(M)$$

就是 S 在 M 中的 Poincaré 对偶 $\text{Pd}_M(S)$. 注意 U 可以取为 S 附近任意充分小的邻域, 于是 Poincaré 对偶 $\text{Pd}_M(S)$ 的代表元也可以取为支在 S 附近任意充分小的邻域内的微分形式.

注 6.6.13. 设 E 是定向流形 M 上秩为 r 的定向向量丛. 可以定义纤维积分

$$\pi_* : \Omega_c^{k+r}(E) \rightarrow \Omega_c^k(M)$$

如下: 设 $\omega \in \Omega_c^{k+r}(E)$ 在定向局部坐标系 $\{x^1, \dots, x^m, s^1, \dots, s^r\}$ (其中 x^1, \dots, x^m 为底流形坐标, s^1, \dots, s^r 为纤维坐标) 具有表达式

$$\omega = f(x, s)(\pi^* \theta) \wedge ds^1 \cdots \wedge ds^r + \text{少于 } r \text{ 个纤维分量的项},$$

其中 θ 为 M 上的 k 形式, 而 f 是关于 s^1, \dots, s^r 的紧支函数, 则令

$$(\pi_* \omega)_p := \theta_p \int_{E_p} f(x, s) ds^1 \cdots ds^r,$$

可以验证 π_* 是良定的, 且跟外微分可交换, 从而诱导了紧支上同调群之间的映射

$$\pi_* : H_c^{k+r}(E) \rightarrow H_c^k(M).$$

(它不是别的, 就是 Thom 同构映射). 于是, Thom 类 $\tau(E)$ 就由下述性质刻画:

若 $\eta \in \Omega_c^r(E)$, 则 $[\eta] = \tau(E)$ 当且仅当对于任意 $p \in M$, $\int_{E_p} \eta = 1$.

特别地, 这说明可以选取 Thom 类的代表元使之支在零截面的任意小邻域中.

¶ Lefschetz 不动点定理

设 $f: M \rightarrow M$ 是光滑映射. 记 $\text{Fix}(f)$ 为 f 的所有不动点的集合, 即 $p \in \text{Fix}(f)$ 当且仅当 $f(p) = p$. 回忆一下, 在第二章习题中引入过 Lefschetz 映射的概念:

若对于 f 的每个不动点 p , 1 不是 $df_p: T_p M \rightarrow T_p M$ 的特征值, 则称 f 是一个 Lefschetz 映射. 对于 Lefschetz 映射 f , 它在不动点 p 处的局部 Lefschetz 数 $L_p(f)$ 是定义为行列式 $\det(df_p - \text{Id})$ 的符号, 即如果 $\det(df_p - \text{Id}) > 0$ 则 $L_p(f) := 1$, 而如果 $\det(df_p - \text{Id}) < 0$ 则 $L_p(f) := -1$.

根据该习题, 若 f 是一个 Lefschetz 映射, 则 Γ_f 与 Δ 横截相交. 特别地, 交点个数有限. 当然, 这些交点恰好就是 f 的不动点.

定理 6.6.14. (Lefschetz 不动点定理)

设 $f: M \rightarrow M$ 是 Lefschetz 映射. 则

$$\sum_{p \in \text{Fix}(f)} L_p(f) = \sum_j (-1)^j \text{tr}(f^*|_{H_{dR}^j(M)}).$$



证明 【证明概要】 设 $[\omega_f] = \text{Pd}_{M \times M}(\Gamma_f)$. 根据命题 6.5.14, 只需证明

$$\int_{\Delta} \iota_0^* \omega_f = (-1)^m \sum_{p \in \text{Fix}(f)} L_p(f).$$

由注 6.6.12 和注 6.6.13, 上式左边的积分可“局部化”到不动点附近, 即存在 $p \in \text{Fix}(f)$ 的充分小、两两不交且同胚于欧氏球体的邻域 B_p , 以及 Γ_f 的管状邻域 \widetilde{U} , 使得

- 记 $U_p = \{(x, x) \mid x \in B_p\}$, 则 $U \cap \Delta = \cup_{p \in \text{Fix}(f)} U_p$,
- 每个 $\Gamma_f^p = \{(x, f(x)) \mid x \in B_p\}$ 是 Γ_f 法丛的平凡化邻域.

在点 (p, p) 附近, 将管状邻域映射 $\widetilde{U} \rightarrow N(\Gamma_f, M \times M)$ 与该法丛的局部平凡化映射的复合记为 $\varphi_p: \widetilde{U}_p = B_p \times B_p \rightarrow \Gamma_f^p \times \mathbb{R}^m$, 并取 τ 是 Thom 类 $\tau(N(\Gamma_f, M \times M))$ 的支在零截面附近的代表元, 则

$$\int_{\Delta} \iota_0^* \omega_f = \sum_{p \in \text{Fix}(f)} \int_{U_p} \iota_p^* \varphi_p^* \tau.$$

其中 $\iota_p = \iota_0|_{U_p}: U_p \rightarrow \widetilde{U}_p$. 考虑映射

$$\psi_p: \Gamma_f^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow N_{(p,p)}(\Gamma_f, M \times M) = \{p\} \times \mathbb{R}^m, \quad (q, \xi) \mapsto (p, \xi)$$

则 $g_p = \psi_p \circ \varphi_p \circ \iota_p: U_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^m$ 是从 U_p 到“纤维 $N_{(p,p)}(\Gamma_f, M \times M)$ 中某包含 $N_{(p,p)}(\Gamma_f, M \times M) \cap \text{supp} \tau$ 开集”的微分同胚, 且 g_p 与 $\varphi_p \circ \iota_p$ 同伦等价. 于是,

$$\int_{U_p} \iota_p^* \varphi_p^* \tau = \int_{U_p} g_p^* \tau = \text{sgn}(g_p) \int_{N_{(p,p)}(\Gamma_f, M \times M)} \tau = \text{sgn}(g_p),$$

其中 $\text{sgn}(g_p) = \pm 1$, 取决于 g_p 是否保定向.

注意到在点 (p, p) 处 $N_{(p,p)}(\Gamma_f, M \times M)$ 的定向满足“ $T_{(p,p)}\Gamma_f + N_{(p,p)}(\Gamma_f, M \times M) = T_{(p,p)}(M \times M)$ 是保定向直和”, 于是 $\text{sgn}(g_p)$ 的值取决于直和 $T_{(p,p)}\Gamma_f + T_{(p,p)}U_p = T_{(p,p)}(M \times M)$ 是否保定向. 为此, 令 v_1, \dots, v_m 为 $T_p M$ 的一组定向基, 则

$$\{(v_1, df_p(v_1)), \dots, (v_m, df_p(v_m))\} \quad \text{和} \quad \{(v_1, v_1), \dots, (v_m, v_m)\}$$

分别为 $T_{(p,p)}\Gamma_f$ 和 $T_{(p,p)}U_p$ 的定向基, 而 $\text{sgn}(g_p)$ 的值取决于

$$\{(v_1, df_p(v_1)), \dots, (v_m, df_p(v_m)), (v_1, v_1), \dots, (v_m, v_m), \}$$

是否是 $T_{(p,p)}M \times M$ 的定向基. 由于上述基的定向性等价于

$$\{(0, (df_p - \text{Id})(v_1)), \dots, (v_m, (df_p - \text{Id})(v_m)), (v_1, v_1), \dots, (v_m, v_m), \}$$

的定向性, 所以 $\text{sgn}(g_p)$ 等于 $(-1)^m \text{sgn} \det(df_p - \text{Id}) = (-1)^m L_p(f)$. 证毕. \square

¶ Poincaré-Hopf定理

设 M 是紧定向光滑流形, X 是 M 上的光滑向量场. 则对于足够小的 t , X 生成的流 $\varphi^t: M \rightarrow M$ 的不动点恰好是 X 的零点. 设 x 是 X 的一个零点, 则从线性映射 $d\varphi_x^t: T_x M \rightarrow T_x M$ 可得线性映射

$$A_x := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\varphi_x^t).$$

定义 6.6.15. (向量场在非退化零点的指标)

设 X 是光滑流形 M 上的光滑向量场.

- (1) 如果 x 是 X 的零点, 且 $\det A_x \neq 0$, 则称 x 是 X 的一个非退化零点.
- (2) 如果 x 是 X 的非退化零点, 则称

$$\text{Ind}(X, x) = \text{sgn}(\det A_x)$$

为 X 在 x 处的指标.



注 6.6.16. 设 x_0 是 M 上光滑向量场 X 的一个非退化零点. 选取 x_0 附近的一个局部坐标卡 (φ, U, V) 使得 x_0 是 X 在 U 中唯一的零点. 则 X 在 $V \subset \mathbb{R}^n$ 上定义了一个向量场 \tilde{X} , 而且 \tilde{X} 仅有一个非退化零点 0 . 特别地, 对于足够小的 r , \tilde{X} 在球面 $S(r) = \{x \in V \mid |x| = r\}$ 上没有零点. 考虑映射

$$F_r: S(r) \rightarrow S^{m-1}, \quad F_r(x) = \tilde{X}(x)/|\tilde{X}(x)|.$$

则可以证明

$$\deg F_r = \text{Ind}(X, x_0).$$

换句话说, 向量场在非退化零点处的指标等于它在该零点附近某个诱导映射的映射度.

下面假设 $t > 0$ 充分小. 注意到由定义有

$$\det(d\varphi_x^t - I) = \det(tA_x + O(t^2)) = t^m \det A_x + O(t^{m+1}).$$

因此 $L_x(\varphi^t) = \text{Ind}(X, x)$. 所以

$$\sum_j \text{Ind}(X, x_j) = \sum_{x \in \text{Fix}(\varphi^t)} L_x(\varphi^t) = \sum_j (-1)^j \text{tr}((\varphi^t)^*|_{H_{dR}^j(M)}).$$

但 φ^t 同伦于恒等映射, 因此 $(\varphi^t)^* = \text{Id}$, 从而

$$\sum_j \text{Ind}(X, x_j) = \sum_j (-1)^j \dim H_{dR}^j(M) = \chi(M).$$

这就证明了下列著名定理

定理 6.6.17. (Poincaré-Hopf 定理)

设 M 是紧致定向光滑流形, X 是 M 上仅有非退化零点的光滑向量场. 记这些零点为 x_1, \dots, x_k , 则

$$\sum_{j=1}^k \text{Ind}(X, x_j) = \chi(M).$$



注意该定理的左边是分析量而右边是拓扑量. 特别地, 由 $\chi(S^{2n}) = 2$ 可知偶数维球面上光滑向量场一定有零点, 从而再次证明了毛球定理.

¶ 向量丛的 Euler 类

设 M 是连通的定向紧光滑流形, E 是 M 上秩为 r 的定向向量丛. 设 $s: M \rightarrow E$ 是 E 的任意整体截面, 即它是光滑映射, 且满足

$$\pi \circ s = \text{Id}_M.$$

则用 s 可以将 Thom 类通过为 M 的上同调类

$$s^*(\tau(E)) \in H_{dR}^r(M).$$

命题 6.6.18. (Euler 类的良定性)

de Rham 上同调类 $s^*(\tau(E))$ 与 s 的选取无关.



证明 设 $s_0: M \rightarrow E$ 为零截面. 则 s_0 与 s , 其同伦为

$$F: M \times \mathbb{R} \rightarrow E, \quad (m, t) \mapsto (m, ts(m)).$$

所以 $s^*(\tau(E)) = s_0^*(\tau(E))$. □

定义 6.6.19. (Euler 类)

设 M 是紧致连通定向光滑流形, E 是 M 上秩为 r 的定向向量丛. 则称

$$e(E) := s^*(\tau(E)) \in H_{dR}^r(M)$$

为 E 的 **Euler 类**.

向量丛的 Euler 类是向量丛存在非零截面的障碍:

定理 6.6.20. (非零截面与 Euler 类)

若紧致连通定向流形 M 上的定向向量丛 E 有一个处处非零的截面, 则 $e(E) = 0$.

证明 设 $s: M \rightarrow E$ 是一个处处非零的截面. 取定 E 的 Thom 类的代表元 $T \in Z_c^r(E)$, 则存在 $c \in \mathbb{R}$ 使得截面 $s_1 = cs$ 跟 $\text{supp}(T)$ 不相交. 于是

$$e(E) = s_1^*([T]) = [s_1^*T] = 0.$$

□

¶ Euler 类与 Chern-Gauss-Bonnet 定理

为什么这个特殊的上同调类被称为 Euler 类呢？下面证明紧致定向流形 M 切丛 Euler 类的积分就是 M 的 Euler 示性数，从而解释了该名称的来源：

定理 6.6.21. (切丛的 Euler 类与 Euler 示性数)

设 M 是紧致定向光滑流形. 则

$$\int_M e(TM) = \chi(M).$$



证明 因为 Δ 微分同胚于 M ，而 Δ 的切丛 $T\Delta$ 与法丛 $N\Delta = N(\Delta, M \times M)$ 同构，故

$$\int_M e(TM) = \int_\Delta e(T\Delta) = \int_\Delta e(N\Delta).$$

设 $[\omega] = PD_{N\Delta}(\Delta)$ 及 $[\tau] = \tau(N\Delta)$. 根据定义和 Poincaré 对偶，

$$\int_\Delta e(N\Delta) = \int_\Delta s_0^* \tau(N\Delta) = \int_{N\Delta} \omega \wedge \tau.$$

由管状邻域定理，存在(保定向)微分同胚 $\varphi: U \rightarrow N\Delta$ ，从而

$$\int_{N\Delta} \omega \wedge \tau = \int_U \varphi^*(\omega \wedge \tau) = \int_{M \times M} j_* \varphi^*(\omega \wedge \tau) = (-1)^m \int_{M \times M} j_* \varphi^* \tau \wedge j_*(\rho \varphi^* \omega),$$

其中 ρ 是支在 U 中且在 $\text{supp}(\varphi^* \tau)$ 上恒为 1 的鼓包函数， $j: U \rightarrow M \times M$ 是包含映射.

下面说明 $[j_*(\rho \varphi^* \omega)] = PD_{M \times M}(\Delta)$.

记 $\iota_0: \Delta \rightarrow M \times M$ 和 $\tilde{\iota}_0: \Delta \rightarrow N\Delta$ 是典范嵌入. 对于任意 $\eta \in Z_c^m(M \times M)$,

$$\int_{M \times M} j_*(\rho \varphi^* \omega) \wedge \eta = \int_U \rho \varphi^* \omega \wedge \eta = \int_{N\Delta} \omega \wedge (\varphi^{-1})^*(\rho \eta)$$

由于 $[\omega] = PD_{N\Delta}(\Delta)$ ，而 $\iota_0 = \varphi^{-1} \circ \tilde{\iota}_0$ 所以上式等于

$$\int_\Delta \tilde{\iota}_0^*(\varphi^{-1})^*(\rho \eta) = \int_\Delta \iota_0^*(\rho \eta) = \int_\Delta \iota_0^*(\eta).$$

这就证明了 $[j_*(\rho \varphi^* \omega)] = PD_{M \times M}(\Delta)$.

于是结合 $j_* \varphi^* \tau(N\Delta) = PD_{M \times M}(\Delta)$ 以及命题 6.5.14 (取 f 为恒等映射)可得

$$(-1)^m \int_{M \times M} j_* \varphi^* \tau \wedge j_*(\rho \varphi^* \omega) = (-1)^m \int_\Delta \iota_0^* j_* (\rho \varphi^* \omega) = \chi(M),$$

这样就得到了欲证的公式. □

如果赋予流形进一步的几何结构，则往往可以利用该结构具体地构造出上同调类的代表元. 例如，对于偶数 $m = 2n$ 维闭定向光滑流形 M ，若赋予其 Riemann 度量，则切丛的 Euler 类 $e(TM)$ 有一个显式代表元

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \text{Pf}(\Omega),$$

其中 Ω 是该度量下对应于 Levi-Civita 联络的曲率 2 形式，而

$$\text{Pf}(\Omega) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S(2n)} \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}.$$

于是结合上述定理，就得到了

定理 6.6.22. (Chern-Gauss-Bonnet 定理)

设 M 是 m 维紧致定向 Riemann 流形, 其中 $m = 2n$ 是偶数, Ω 是其 Levi-Civita 联络的曲率 2 形式, 则

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \text{Pf}(\Omega) = \chi(M).$$



注 6.6.23. 根据经典的 Gauss-Bonnet 定理, 对于任意紧致定向曲面(二维流形) S , 在赋予 Riemann 度量后其 Gauss 曲率的积分仅依赖于该曲面的拓扑, 即

$$\int_S K dA = 2\pi\chi(S).$$

Hopf (1925), Allendoerfer(1940), Fenchel(1940) 等人将该定理推广到高维, 对于可被嵌入欧氏空间的紧 Riemann 流形证明了类似的定理, 之后 Allendoerfer 和 Weil 在 1943 年对于一般的抽象紧 Riemann 流形情形给出了证明, 但他们的证明还是需要把 Riemann 流形分片嵌入欧氏空间并利用外围欧氏空间的几何(最终 1956 年 Nash 证明“任意 Riemann 流形可被等距嵌入高维欧氏空间”). 1943 年 8 月陈省身先生加入普林斯顿高等研究院, Weil 向他提出该定理是否有内蕴的(即不依赖于外围空间, 因为公式两边分别是 Riemann 流形内蕴的几何量与拓扑量)证明. 仅仅两个月后陈省身先生就给出了人们期待的内蕴证明, 完成论文“A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds”并于次年发表. 陈省身先生的内蕴证明被公认为是划时代的杰作, 把微分几何学带入了一个崭新的时代, 其证明即使对于 2 维情形也是全新的. 因为这个证明意义重大, 所以大家把该定理命名为 Chern 定理或者 Chern-Gauss-Bonnet 定理.

因为最后一节的题目是 Thom 类, 所以引述一则关于 Thom (法国数学家, 1958 年因为拓扑学方面的工作获得菲尔兹奖)的故事结束本学期的课程(引自于教授“Heroes in My Heart”):

在一次采访当中, 作为数学家的 Thom 同两位古人类学家讨论问题。谈到远古的人们为什么要保存火种时, 一个人类学家说, 因为保存火种可以取暖御寒; 另外一个人类学家说, 因为保存火种可以烧出鲜美的肉食。而 Thom 说, 因为夜幕来临之际, 火光摇曳妩媚灿烂多姿, 是最美最美的。

美丽是我们的数学家英雄们永恒的追求!

Dedicated to René Thom (1923-2002)
for his 100th Birth Anniversary