

2.4 光滑子流形

本节考虑光滑流形范畴里对象的“子对象”——光滑子流形——的定义与性质。特别地，将要考虑何时光滑映射的像或原像是相应流形里的光滑子流形。

2.4.1 光滑子流形

光滑子流形：定义与例子

令 M 为 n 维光滑流形. 什么样的对象能被称作 M 的一个“光滑子流形”？回顾一下别的范畴（例如向量空间范畴、群范畴、拓扑空间范畴等）里“子对象”的定义方式，不难发现光滑流形 M 的光滑子流形 S 应该满足以下三个条件：

- S 是 M 的子集；
- S 自身是一个 $k \leq n$ 维光滑流形；
- S 的拓扑/光滑结构和 M 的拓扑/光滑结构应该相容.

最后一个条件，即相容性，可以具体地描述为： S 上的光滑结构应该是 M 上的光滑结构在 S 上的“限制”. 于是，如下的定义是自然的：

定义 2.4.1. (光滑子流形)

设 M 是 n 维光滑流形, $S \subset M$. 若对于任意 $p \in S$, 存在 M 上 p 附近的(与 M 本身光滑结构相容的)坐标卡 (φ, U, V) , 使得

$$\varphi(U \cap S) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \{x \in \varphi(U) \mid x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}.$$

则称 S 是 M 的 k 维**光滑子流形**, 并称 $\text{codim}(S) = n - k$ 为 S 的**余维数**.



粗略地讲，光滑子流形是局部上(即在一个局部坐标系中)由方程

$$\varphi_{k+1} = \cdots = \varphi_n = 0$$

所定义的子集. 注意 $\varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_n$ 都是 U 上的光滑函数, 因为 φ 是微分同胚.

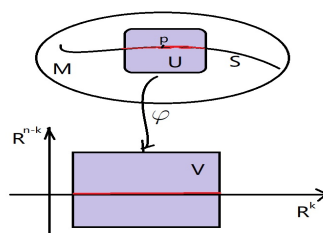


图 2.1: 光滑子流形

下面给出光滑子流形的一些例子。

例 2.4.2. 令 M, N 为光滑流形, $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 那么 f 的图像

$$\Gamma_f = \{(p, q) \mid q = f(p)\} \subset M \times N$$

是 $M \times N$ 的光滑子流形. 为了说明这一点, 选取 M 在 p 附近的坐标卡 (φ, U, V) 和 N 在 $q = f(p)$ 附近的坐标卡 (ψ, X, Y) . 那么(参见习题 1) $(\varphi \times \psi, U \times X, V \times Y)$ 是 $M \times N$ 在 (p, q) 附近的坐标卡. 但是这个坐标卡对于证明 Γ_f 是光滑子流形而言并不方便. 为了得到一个适用的坐标卡, 将 $q = f(p)$ 写作 $\psi^{-1}(y) = f(\varphi^{-1}(x))$, 即 $y = \psi(f(\varphi^{-1}(x)))$.

考虑光滑映射

$$\Psi: V \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \quad (a, b) \mapsto (a, b - \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(a)).$$

易见 Ψ 是单射并且处处是局部微分同胚, 因此是一个从 $V \times Y$ 到它的像集 $\Psi(V \times Y)$ 的整体微分同胚. 注意到 $\Psi(V \times Y)$ 是欧氏空间中的开集, 故 $(\Psi \circ (\varphi \times \psi), U \times X, \Psi(V \times Y))$ 也是 $M \times N$ 在 (p, q) 附近的一个局部坐标卡. 此外, 对于这个局部坐标卡,

$$(p, q) \in \Gamma_f \cap (U \times X) \implies \psi(q) = \psi(f(\varphi^{-1}(\varphi(p)))) \implies \Psi(\varphi(p), \psi(q)) = (\varphi(p), 0),$$

因此 Γ_f 是 $M \times N$ 的光滑子流形.

注 2.4.3. 根据例 1.2.9, 对于任意连续函数 $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 在图像 Γ_f 上存在一个光滑结构使之成为一个 n 维光滑流形. 然而一般而言, 若 f 不光滑, Γ_f 不是 \mathbb{R}^{n+1} 的一个光滑子流形. (读者不妨思考一下: 对于连续映射 f 重复例 2.4.2 中的证明, 哪一步会出现问题?) 不过, 确实存在不光滑的函数 f , 其图像 Γ_f 仍然是一个光滑子流形. 例如考虑函数 $f(x) = x^{1/3}$, 则 f 不光滑. 但是 $y = f(x)$ 的图像和光滑函数 $x = y^3$ 的图像是相同的, 从而是 \mathbb{R}^2 的光滑子流形!

例 2.4.4. 球面 S^n 是 \mathbb{R}^{n+1} 的光滑子流形, 因为在任意 $p \in S^n$ 附近, 在选取适当的自变量和因变量后, “球面小片” 跟某个光滑函数的图像一致.

光滑子流形上的诱导光滑结构

在上述光滑子流形的定义中, 并未特别讲清楚作为光滑流形, S 上的拓扑与光滑结构是什么. 拓扑结构很简单, 只要取 S 作为 M 的子集时的子空间拓扑即可. 换言之, S 上的拓扑结构是使得包含映射 $\iota: S \rightarrow \iota(S) \subset M$ 是一个同胚. 至于光滑结构, 需要构造 S 上的自然的坐标卡. 为此, 设 $n \geq k$ 并记

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^k, & (x^1, \dots, x^n) &\mapsto (x^1, \dots, x^k) \\ j: \mathbb{R}^k &\hookrightarrow \mathbb{R}^n, & (x^1, \dots, x^k) &\mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

此时有

命题 2.4.5. (光滑子流形的光滑结构)

设 S 是 M 的光滑子流形, 赋予从 M 继承的子空间拓扑.

(1) 对于 M 上满足定义 2.4.1 的一个坐标卡 (φ, U, V) , 令

$$X = U \cap S, \quad Y = \pi \circ \varphi(X), \quad \psi = \pi \circ \varphi|_X.$$

则 (ψ, X, Y) 是 S 上的坐标卡.

(2) 所有这样形式的坐标卡是彼此相容的, 从而给出了 S 的一个光滑结构.

(3) 对于上述光滑结构, 包含映射 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入.

证明 由定义, ψ 是连续可逆的, 并且逆映射 $\psi^{-1} = \varphi^{-1} \circ j$ 也连续. 因此 (ψ, X, Y) 是 S 上的一个坐标卡. 这种形式的坐标卡是彼此相容的, 因为转移映射

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} = \pi \circ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ j = \pi \circ \varphi_{\alpha, \beta} \circ j,$$

都是光滑的. 最后, 相对于由这些坐标卡所定义的光滑结构, 由

$$\varphi \circ \iota \circ \psi^{-1} = j$$

可知包含映射 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入。□

光滑子流形的切空间

令 $S \subset M$ 为光滑子流形, $p \in S$, $\iota: S \hookrightarrow M$ 为包含映射, 则 $d\iota_p: T_p S \rightarrow T_p M$ 是单射. 于是在每一点 $p \in S$, 可以将任意 $T_p S$ 中的向量 X_p 与 $T_p M$ 中的向量 $\widetilde{X}_p = d\iota_p(X_p)$ 等同起来: 对于任意 $f \in C^\infty(M)$,

$$\widetilde{X}_p(f) = (d\iota_p(X_p))f = X_p(f \circ \iota) = X_p(f|_S).$$

通过这种方式, 可以视 $T_p S$ 为 $T_p M$ 的线性子空间 $d\iota_p(T_p S)$. 一个自然的问题是: $T_p M$ 中哪些向量能被视作 $T_p S$ 中的向量?

定理 2.4.6. (光滑子流形切空间的刻画)

设 $S \subset M$ 是光滑子流形, $p \in S$. 那么

$$T_p S = \{X_p \in T_p M \mid \text{对于任意满足 } f|_S = 0 \text{ 的函数 } f \in C^\infty(M), \text{ 总有 } X_p(f) = 0\}.$$



证明 如果 $X_p \in T_p S$, 那么对于满足 $f|_S = 0$ 的 $f \in C^\infty(M)$, 有 $\widetilde{X}_p(f) = X_p(f|_S) = 0$.

反之, 取 M 的一个坐标卡 (φ, U, V) , 使得在 p 附近, S 由 $x^{k+1} = \dots = x^n = 0$ 给出. 那么 $T_p M$ 由 $\partial_1, \dots, \partial_n$ 张成, 而 $T_p S$ 是由 $\partial_1, \dots, \partial_k$ 张成的子空间. 换句话说, $T_p M$ 中的向量 $X_p = \sum X^i \partial_i$ 落在 $T_p S$ 中当且仅当对于 $i > k$ 有 $X^i = 0$.

现设 $X_p \in T_p M$ 满足“对于所有在 S 上取值为 0 的 f , 都有 $X_p(f) = 0$ ”, 下证 $X_p \in T_p S$. 取“紧支在 U 中并且在 p 的一个邻域内取值恒为 1”的光滑鼓包函数 h . 对于任意 $j > k$, 考虑函数 $f_j(x) = h(x)x^j(\varphi(x))$ (通过零扩张将它延拓到 $M \setminus U$ 上). 则 $f_j|_S = 0$. 于是对于任意 $j > k$

$$0 = X_p(f_j) = \sum X^i \frac{\partial(h(\varphi^{-1}(x))x^j)}{\partial x^i}(\varphi(p)) = X^j,$$

由此可得 $X_p \in T_p S$. □

2.4.2 作为原像和像集的光滑子流形

在向量空间范畴或者群范畴等范畴里, 不难发现“对象之间的态射”的像与原像都自然是相应对象的子对象. 然而, 对于光滑流形之间的光滑映射 $f: M \rightarrow N$, 很容易找到例子说明 $f(M)$ 不必是 N 的光滑子流形, 以及 $f^{-1}(q)$ 不必是 M 的光滑子流形.

作为水平集的光滑子流形

先考虑光滑映射的水平集。

例 2.4.7. 考虑映射

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$$

显然, 当 $t \neq 0$ 是 $f^{-1}(t)$ 都是 \mathbb{R}^2 的光滑子流形, 但 $f^{-1}(0)$ 是两条相交的直线, 连流形都不是。仔细探究一下, 不难发现原因: 由于 $df_{(x,y)} = (2x, 2y)$, 故

- 若 $t \neq 0$, 那么对于任意 $p \in f^{-1}(t)$, $df_p \neq (0,0)$, 从而由隐函数定理, $f^{-1}(t)$ 在 p 附近是光滑子流形;
- 在 $p = (0,0) \in f^{-1}(0)$ 处 $df_p = (0,0)$, 故无法使用隐函数定理。

用上一节的语言来说, 就是正则点处可以使用隐函数定理, 故正则值 (即 $t \neq 0$) 的原像具有好的结构, 而临界点则无法使用隐函数定理, 故临界值的原像可能具有比较差的结构。

这个例子揭示了一个一般规律, 即光滑映射正则值的原像一定是光滑子流形:

定理 2.4.8. (正则水平集定理)

设 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射, 而 $q \in N$ 是 f 的正则值. 则 $f^{-1}(q)$ 是 M 的维数为 $\dim M - \dim N$ 的光滑子流形. 此外, 对于任意 $p \in f^{-1}(q)$,

$$T_p f^{-1}(q) = \ker(df_p: T_p M \rightarrow T_q N).$$



特别地, 结合 Sard 定理可知

推论 2.4.9. (很多光滑子流形)

对于任意光滑映射 $f: M \rightarrow N$, 只要 $f(M)$ 在 N 中不是零测集, 那么对几乎所有 $q \in f(M)$, 其原像 $f^{-1}(q)$ 都是 M 的光滑子流形.



事实上, 还可以进一步发展例 2.4.7:

例 2.4.10. 考虑映射

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 0).$$

显然依然有: $g^{-1}((0,0))$ 不是 \mathbb{R}^2 的光滑子流形, 但对任意 $t \neq 0$, $g^{-1}((t,0))$ 是 \mathbb{R}^2 的光滑子流形. 但此时 g 的像集是 \mathbb{R}^2 中的零测集, g 不再有正则点, 且 g 的正则值都不是像点, 于是无法应用正则水平集定理. 那么对于这个例子, $(t,0)$ 与 $(0,0)$ 的差别在哪儿呢? 不难发现: 在任意 $p \in g^{-1}((t,0))$ (其中 $t \neq 0$) 附近, g 都是常秩映射, 而在 $(0,0) \in g^{-1}((0,0))$ 附近则不然!

下面证明“常秩光滑映射的原像是光滑子流形”这个非常一般的定理, 注意上述正则水平集定理只是它的特例:

定理 2.4.11. (常秩水平集定理)

设 M, N 是光滑流形, $f: M \rightarrow N$ 是光滑映射, $q \in N$. 如果 f 在 $f^{-1}(q)$ 的某个邻域内是秩恒为 r 的常秩映射, 那么水平集 $f^{-1}(q)$ 是 M 的余维数为 r 的光滑子流形, 且对于任意 $p \in f^{-1}(q)$,

$$T_p f^{-1}(q) = \ker(df_p: T_p M \rightarrow T_q N).$$



证明 令 $p \in S := f^{-1}(q)$. 根据常秩定理 (即定理 2.2.14), 存在以 p 为中心的坐标卡 (φ, U, V) 和以 q 为中心的坐标卡 (ψ, X, Y) , 使得 $f(U) \subset X$, 并且

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

于是

$$\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, x^{r+1}, \dots, x^m),$$

即 φ 将 $U \cap f^{-1}(q)$ 映射到 $V \cap \{(0, \dots, 0, x^{r+1}, \dots, x^m)\}$. 因此 $f^{-1}(q)$ 是 M 的余维数为 r 的子流形.

下面计算 $T_p S$. 记包含映射为 $\iota: S \rightarrow M$, 则对于任意 $p \in S$, $f \circ \iota(p) = q$. 换句话说, $f \circ \iota$ 是 S 上的常值映射. 因此 $df_p \circ d\iota_p = 0$, 即, ι 在 $d\iota_p: T_p S \hookrightarrow T_p M$ 的像集上有 $df_p = 0$. 这说明

$$T_p S \subset \ker(df_p).$$

另一方面, 由 $\dim T_p S = \dim S = m - r$ 以及

$$\dim \ker(df_p) = \dim \ker((d\psi)_{f(p)} \circ df_p \circ (d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}) = m - r,$$

比较维数后可知 $T_p S$ 就是线性映射 df_p 的核空间. □

正则水平集定理和常秩水平集定理是非常有用的工具. 例如根据习题中相关结论,

- 因为 1 是 $f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$ 的正则值, 所以 S^n 是 \mathbb{R}^{n+1} 的光滑子流形.
- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}), \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ 都是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 的光滑子流形.

¶ 作为像集的光滑子流形：浸入是不够的

下面考虑光滑映射的像集. 根据命题 2.4.5, M 的任意光滑子流形 S 都是光滑浸入 $\iota: S \hookrightarrow M$ 的像集. 一个自然的问题是:

是否任意光滑浸入的像都是光滑子流形?

首先, 根据典范浸入定理可知

若 $f: M \rightarrow N$ 是浸入, 那么对于任意 $p \in M$, 存在 p 的一个坐标邻域 U 使得 $f(U)$ 是 N 的光滑子流形.

然而, 一般情况下, 整个像集 $f(M)$ 不必是 N 的光滑子流形:

例 2.4.12. 图 2.2 展示了两个从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R}^2 的浸入映射, 它们的像都不是光滑子流形.

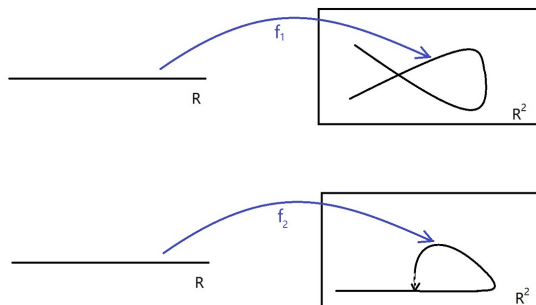


图 2.2: 从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R}^2 的浸入

稍微分析一下不难发现, 第一个图所示的浸入不是单射, 以至于出现了“交叉点”; 第二个图所示的浸入虽然是单射, 然而像集的 (子空间) 拓扑不同于原像 \mathbb{R} 上的拓扑.

例 2.4.13. 图 2.3 是一个更复杂却也更有意思的例子：考虑映射

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1, \quad f(t) = (e^{it}, e^{i\sqrt{2}t}).$$

那么 f 是一个浸入(为什么?), 但它的像集 $f(\mathbb{R})$ 是 \mathbb{T}^2 上的“稠密曲线”⁶

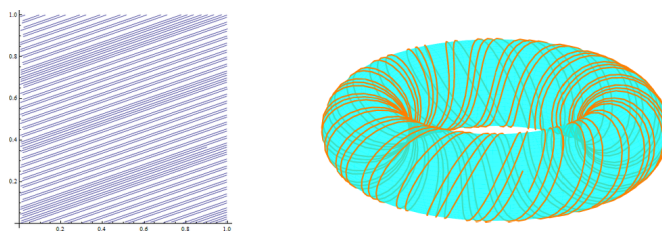


图 2.3: 环面中的稠密曲线

注 2.4.14. 一般而言, 在考虑映射 $f: M \rightarrow N$ 的像集 $f(M)$ 时, 在 $f(M)$ 上有两种最自然的拓扑结构, 即

- 从 N (作为子空间) 继承而来的子空间拓扑,
- 从 M 继承而来的余诱导拓扑 (即 $f(M)$ 中一个子集是开集当且仅当它是 M 中开集的像)。

对于以上三个像集不是子流形的浸入映射, 第一个映射是“最坏的”, 因为像集在这两个自然拓扑下不是流形: 在交叉点附近它不是局部欧氏空间. 另一方面, 对于第二个和第三个映射, 不难看出

- 如果赋予像集以“继承自 \mathbb{R}^2 或 \mathbb{T}^2 的子空间拓扑”, 那么像集不是流形;
- 如果赋予像集以“从 \mathbb{R} 上‘借’来的拓扑/光滑结构”, 那么像集自身是光滑流形! 一般地, 给定任意单射浸入, 如果赋予其像集以“从源流形‘借’来的拓扑/光滑结构”, 那么像集是一个光滑流形. 因此

定义 2.4.15. (浸入子流形)

若 $f: M \rightarrow N$ 是单射浸入, 则称 $f(M)$ 为由浸入 f 给出的**浸入子流形**.



注意不能离开浸入映射而单独谈浸入子流形。为了区分浸入子流形和定义 2.4.1 中的光滑子流形, 往往称定义 2.4.1 中的光滑子流形为 **嵌入子流形** 或 **正则子流形**.

¶ 作为像集的光滑子流形: 嵌入

嵌入子流形和浸入子流形的区别是什么? 如前所述, 使浸入子流形成为流形的拓扑来自源流形, 而不是继承自靶流形的“子空间拓扑”, 而如果 S 是 M 的嵌入子流形, 则流形 S 的拓扑是 M 的子空间拓扑, 特别地, 包含映射 $\iota: S \hookrightarrow M$ 不仅仅是单射浸入, 而且是从 S 到其像集 $\iota(S)$ (赋予子空间拓扑) 的同胚.

定义 2.4.16. (嵌入映射)

令 M, N 为光滑流形, 并且 $f: M \rightarrow N$ 是浸入. 如果 f 是从 N 到它的像集 $f(N) \subset M$ (赋予子空间拓扑) 的同胚, 则称 f 为一个**嵌入映射**.



⁶这是数论中以下事实的推论: $\{\{n\sqrt{2}\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 在 $[0, 1]$ 中稠密.

注 2.4.17. 如果 S 是 M 的光滑子流形, 那么 S 上存在唯一的拓扑/光滑结构使得包含映射 $\iota: S \hookrightarrow M$ 是光滑浸入, 并且是从 S 到像集 $\iota(S)$ 的同胚. (参见 [5], 定理 5.31.)

于是每个光滑子流形都是某个嵌入的像。反过来,

定理 2.4.18. (光滑子流形 = 嵌入的像)

令 $f: M \rightarrow N$ 为嵌入映射, 则像集 $f(M)$ 是 N 的光滑子流形.



证明 设 $p \in M$, $q = f(p)$. 因为 f 是一个浸入, 由典范浸入定理, 存在 p 附近的坐标卡 (φ_1, U_1, V_1) 和 q 附近坐标卡 (ψ_1, X_1, Y_1) 使得在 V_1 上, $\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ 是典范嵌入 $j: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. 于是在 U_1 上

$$\psi_1 \circ f = j \circ \varphi_1.$$

因为 f 是到它的像集的同胚, $f(U_1)$ 在子空间 $f(M) \subset M$ 中是相对开, 即存在一个开集 $X \subset N$ 使得 $f(U_1) = f(M) \cap X$. 将 X_1 替换为 $X_1 \cap X$, 并将 Y_1 替换为 $\psi_1(X_1 \cap X)$. 则对于新坐标卡 (ψ_1, X_1, Y_1) ,

$$\psi_1(X_1 \cap f(M)) = Y_1 \cap \psi_1(f(U_1)) = Y_1 \cap j(\varphi_1(U_1)) = Y_1 \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

[读者可以对例子 “ \mathbb{T}^2 中的稠密曲线” 重复以上论证, 找找哪里有问题.]

□

简而言之, 浸入和嵌入的主要区别在于

- 对于浸入 $f: M \rightarrow N$, 任意 $p \in M$ 有一个 M 中的邻域, 其像集在 N 中是好的.
- 对于嵌入 $f: M \rightarrow N$, 任意 $q \in f(M)$ 有一个 N 中的邻域, 使得像集 $f(M)$ 在该邻域中的部分是好的.

¶ 单射浸入成为嵌入的判据

一般而言, 给定一个单射浸入, 验证它是否是到像集的同胚不见得容易。然而,

定理 2.4.19

若 $f: M \rightarrow N$ 是一个单浸入, 且 M 是紧流形, 则 f 是一个嵌入.



证明 赋予 $f(M) \subset N$ 子空间拓扑. 因为 f 是连续单射, 映射 $f: M \rightarrow f(M)$ 是可逆的连续映射. 故只需要证明 $f^{-1}: f(M) \rightarrow M$ 是连续映射. 为此, 设 A 是 M 中的闭集, 则由 M 紧可知 A 是紧集, 从而由 f 的连续性值 $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ 是 $f(M)$ 中的紧集. 又因为 $f(M)$ 是 Hausdorff 空间, 故 $f(A)$ 是 $f(N)$ 中的闭集. 换言之, 对于 M 中任意闭集, 均有 $(f^{-1})^{-1}(A)$ 是闭集. 故 f^{-1} 是连续映射. □

对于非紧流形, 有没有简单的判据说明单浸入是嵌入? 答案是肯定的: 只要假设 f 是“逆紧”映射即可. 更一般地, 可以证明 (留作习题)

定理 2.4.20

若 $f: M \rightarrow N$ 是一个单浸入, 且 f 是逆紧映射, 则 f 是一个嵌入.



注意若 M 是紧的, 则任意连续映射 $f: M \rightarrow N$ 都是逆紧映射. 在很多时候, 逆紧映射是空间紧性的一个优良替代品.