6.5 Poincaré对偶及其应用

对偶性是数学中一个极其优美的现象，在几乎每个数学分支中都会出现，并产生极大的影响. 在各种对偶现象中，Poincaré 对偶是代数拓扑中的一个核心定理，以各种面貌出现在各种同调与上同调理论中。本节研究的是披着“分析学外衣”的 Poincaré 对偶，即 de Rham 上同调群与紧支 de Rham 上同调群之间的对偶，以及与之相关的上同调群与子流形间的对偶.

6.5.1 Poincaré对偶

¶ Poincaré 对偶定理

首先不妨仔细观察一下之前算出的一些流形的 de Rham 上同调群与紧支 de Rham 上同调群，

- 对于 $M=\mathbb{R}^m$，有

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^m)\simeq\begin{cases}\mathbb{R}, & k=0,\\ 0, & k\neq 0,\end{cases}\qquad \text{和}\qquad H^k_c(\mathbb{R}^m)\simeq\begin{cases}\mathbb{R}, & k=m,\\ 0, & k\neq m.\end{cases}$$

- 对于 $M=S^m$，有 $H^k_c(S^m)=H^k_{dR}(S^m)\simeq\begin{cases}\mathbb{R}, & k=0,m,\\ 0, & k\neq 0,m.\end{cases}$
- 对于任意 m 维连通定向流形，有

$$H^0_{dR}(M)\simeq\mathbb{R},\qquad H^m_{dR}(M)\simeq\begin{cases}\mathbb{R}, & M\text{ 是紧的}\\ 0, & M\text{ 是非紧的}\end{cases}$$

以及

$$H^m_c(M)\simeq\mathbb{R},\qquad H^0_c(M)\simeq\begin{cases}\mathbb{R}, & M\text{ 是紧的}\\ 0, & M\text{ 是非紧的.}\end{cases}$$

注意即使 M 不连通也可算出类似结果：若 M 有 $K<\infty$ 个连通分支，其中 K_c 个是紧连通分支，则对于前者，只要把 $\mathbb{R}$ 改为 $\mathbb{R}^K$, 对于后者，只要把 $\mathbb{R}$ 改为 $\mathbb{R}^{K_c}$.

- 对于任意 m 维连通不可定向流形 M，有

$$H^0_{dR}(M)\simeq\mathbb{R},\quad\text{而}\quad H^0_c(M)\simeq\begin{cases}\mathbb{R}, & M\text{ 是紧的}\\ 0, & M\text{ 是非紧的}\end{cases}$$

以及

$$H^m_{dR}(M)=H^m_c(M)=0.$$

注意若 M 不连通，则相应的公式依赖于 M 的各连通分支的紧性与可定向性.

从这些例子中, 除了最后一个不可定向流形外，不难观察到明显的对偶性：m 维可定向流形 M 的 k 阶 de Rham 上同调群“应该”与它的 $m-k$ 维紧支 de Rham 上同调群是一样的. 这不是一种巧合(但也并不总是一种事实，见注6.5.3)：事实上 H. Poincaré 最早在 1893 年就(在 Betti 数的层面)观察到这种现象，因而被命名为 Poincaré 对偶.

下面解释这种对偶性. 设 M 是 m 维定向流形. 结合上积映射

$$\cup : H_{dR}^k(M) \times H_c^{m-k}(M) \to H_c^m(M), \quad ([\omega], [\eta]) \mapsto [\omega \wedge \eta]$$

和积分映射

$$\int_M : H_c^m(M) \to \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega,$$

可以构造一个双线性的配对映射

$$P_M^k : H_{dR}^k(M) \times H_c^{m-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad P_M^k([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

根据线性代数，映射 P_M^k 诱导了一个 **Poincaré对偶映射**

$$\mathcal{P}_M^k : H_{dR}^k(M) \to \left(H_c^{n-k}(M)\right)^*, \quad \mathcal{P}_M^k([\omega]) = \left\{\eta \mapsto \int_M \omega \wedge \eta\right\}.$$

例 6.5.1. 设 M 是 m 维连通定向流形，则 $\mathcal{P}_M^0$ 将元素 $[1] \in H_{dR}^0(M)$ 映为 $H_c^m(M)$ 上的线性映射

$$\int_M : H_c^m(M) \to \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \int_M \eta.$$

于是 $\mathcal{P}_M^0([1]) = \int_M \in (H_c^m(M))^*$.

本节的主要定理是

定理 6.5.2. (Poincaré 对偶)

对任意 m 维定向流形 M 和任意 k，Poincaré 对偶映射

$$\mathcal{P}_M^k : H_{dR}^k(M) \to \left(H_c^{m-k}(M)\right)^*$$

是一个线性同构. ♡

注 6.5.3.

(1) 注意对于不可定向流形，Poincaré 对偶现象不一定成立.

(2) 如果 $\dim H_c^{m-k}(M) < \infty$，则 $\left(H_c^{m-k}(M)\right)^*$ 同构于 $H_c^{m-k}(M)$. 此时有

$$H_{dR}^k(M) \simeq H_c^{m-k}(M).$$

(3) Poincaré 对偶映射的方向：一般而言

$$\left(H_{dR}^k(M)\right)^* \not\simeq H_c^{n-k}(M).$$

例如，考虑 1 维流形 $M = \cup_{i\in\mathbb{N}}(i, i+1)$ (可数个不相交的开区间的并集). 则

$$H_{dR}^0(M) \simeq \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

而

$$H_c^1(M) \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ 且除有限多个之外都为零 }\}.$$

在代数中，这是一个众所周知（但不平凡）的事实：

$$\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^* = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \quad \text{而} \quad \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^* \neq \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}.$$

¶ Poincaré对偶：证明概要

虽然 Poincaré 对偶对于任意定向流形都成立，本节将仅仅对“存在有限好覆盖的定向流形”给出 Poincaré 对偶性的证明概要.

首先，根据本章第2节与第3节所述，对于光滑流形 M，设 U,V 是 M 中的开集且满足 $M=U\cup V$, 则可以写出两个正合列，即 de Rham 上同调群正合列

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{k-1}} H^k_{dR}(M) \xrightarrow{\alpha_k} H^k_{dR}(U)\oplus H^k_{dR}(V) \xrightarrow{\beta_k} H^k_{dR}(U\cap V) \xrightarrow{\delta_k} H^{k+1}_{dR}(M) \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \cdots$$

和紧支 de Rham 上同调群正合列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^c_{k-1}} H^k_c(U\cap V) \xrightarrow{\beta^c_k} H^k_c(U)\oplus H^k_c(V) \xrightarrow{\alpha^c_k} H^k_c(M) \xrightarrow{\delta^c_k} H^{k+1}_c(U\cap V) \xrightarrow{\beta^c_{k+1}} \cdots.$$

对于第二个正合列取其对偶，可得新的正合列

$$\cdots\to H^{m-k}_c(M)^* \xrightarrow{(\alpha^c_{m-k})^*} H^{m-k}_c(U)^*\oplus H^{n-k}_c(V)^* \xrightarrow{(\beta^c_{m-k})^*} H^{m-k}_c(U\cap V)^* \xrightarrow{(\delta^c_{m-k-1})^*} H^{m-k-1}_c(M)^*\to\cdots.$$

假设 M 是定向流形，则第一个和第三个正合列的对应项恰好可以由 Poincaré 对偶映射 $\mathcal{P}^*_M$ 联系起来，从而给出如下图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^k_{dR}(M) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathcal{P}^k_M"'] & H^k_{dR}(U)\oplus H^k_{dR}(V) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathcal{P}^k_U\oplus\mathcal{P}^k_V"'] & H^k_{dR}(U\cap V) \arrow[r, "(-1)^{k+1}\delta"] \arrow[d, "\mathcal{P}^k_{U\cap V}"'] & H^{k+1}_{dR}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{P}^{k+1}_M"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{m-k}_c(M)^* \arrow[r, "\alpha^*"'] & H^{m-k}_c(U)^*\oplus H^{m-k}_c(V)^* \arrow[r, "\beta^*"'] & H^{m-k}_c(U\cap V)^* \arrow[r, "\delta^*"'] & H^{m-k-1}_c(M)^* \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

下面证明

引理 6.5.4

上述图表是交换图表. ♢

证明 仅验证最后一个框的交换性，即

$$\mathcal{P}^{k+1}_M\circ(-1)^{k+1}\delta_k=(\delta^c_k)^*\circ\mathcal{P}^k_{U\cap V}.$$

为此，取定从属于 U,V 的单位分解 ρ_U,ρ_V. 设 $[\omega]\in H^k_{dR}(U\cap V)$, 则由定义，$\delta_k([\omega])=[d\rho_V\wedge\omega]$. 于是，映射 $\mathcal{P}^{k+1}_M\circ(-1)^{k+1}\delta_k$ 将 $[\omega]$ 映为映射

$$[\eta]\in H^{m-k-1}_c(M)\mapsto\int_M(-1)^{k+1}d\rho_V\wedge\omega\wedge\eta.$$

另一方面，$\mathcal{P}^k_{U\cap V}$ 将 $[\omega]\in H^k_{dR}(U\cap V)$ 映为映射

$$\eta\in H^{m-k}_c\mapsto\int_{U\cap V}\omega\wedge\eta.$$

那么，$(\delta^c_{m-k-1})^*$ 将它映为什么映射呢？回忆一下，若 $L:V\to W$ 是线性映射，则 $L^*:W^*\to V^*$ 将 $f\in W^*$ 映成 $L^*(f)(v)=f(Lv)$. 于是作为 $H^{m-k-1}_c(U\cap V)$ 上的线性泛函，$(\delta^c_k)^*\circ\mathcal{P}^k_{U\cap V}$ 把 $[\eta]\in\in H^{n-k-1}_c(M)$ 映为

$$\int_{U\cap V}\omega\wedge\delta^c_{m-k-1}([\eta]).$$

由于 $\delta^c_{m-k-1}([\eta])=[d\rho_U\wedge\eta]$，上式等于

$$\int_{U\cap V}\omega\wedge d\rho_U\wedge\eta=(-1)^{k+1}\int_M d\rho_V\wedge\omega\wedge\eta,$$

这就是欲证的结论. □

证明 [存在有限好覆盖的定向流形 M 的Poincaré对偶的证明概要]

用归纳法. 若 M 具有"由一个开集组成的好覆盖", 则 $M \simeq \mathbb{R}^n$, 于是由 de Rham 上同调以及紧支 de Rham 上同调的 Poincaré 引理可知当 $k \neq 0$ 时 $\mathcal{P}_M^k$ (作为0 维线性空间之间的线性映射)自动是线性同构, 而当 $k=0$ 时结合例6.5.1 可知 Poincaré 对偶映射 $\mathcal{P}_M^0$ 把 $[1] \in H_{dR}^0(M)$ 映为非零元 $\int_M \in (H_c^m(M))^* \simeq \mathbb{R}$, 从而是满射. 于是 $\mathcal{P}_M^0$ (作为1 维线性空间之间的线性映射)是线性同构, 即定理成立.

现在假设定理对于"具有不超过 $k-1$ 个开集组成的好覆盖的流形"都成立. 设 M 有好覆盖 $\{U_1, \cdots, U_k\}$. 令

$$U = U_1 \cup \cdots \cup U_{k-1} \quad \text{和} \quad V = U_k.$$

则 U, V 和 $U \cap V$ 都有不超过 $k-1$ 个开集的好覆盖. 根据归纳假设, $\mathcal{P}_U^k, \mathcal{P}_V^k$ 和 $\mathcal{P}_{U\cap V}^k$ 都是同构. 由前述引理以及五引理(即引理6.2.13) 可知 $\mathcal{P}_M^k$ 是一个同构. □

6.5.2 Poincaré对偶的应用

¶ 应用 1: 紧支 de Rham 上同调群的Künneth公式

利用 Poincaré 对偶, 对于定向流形, 不难把紧支 de Rham 上同调群的结论归约到相应的 de Rham 上同调群. 例如, 用 de Rham 上同调群的 Künneth 公式可得

推论 6.5.5. (紧支 de Rham 上同调群的Künneth公式)

如果 M, N 都是存在有限好覆盖的定向流形, 则

$$H_c^k(M \times N) \simeq \bigoplus_{i=0}^{k} H_c^i(M) \otimes H_c^{k-i}(N).$$

♡

证明 设 $\dim M = m, \dim N = n$. 由 Poincaré 对偶和 de Rham 上同调群的 Künneth公式,

$$H_c^k(M \times N) \simeq H_{dR}^{m+n-k}(M \times N) \simeq \bigoplus_{i=0}^{m+n-k} H_{dR}^i(M) \otimes H_{dR}^{m+n-k-i}(N).$$

指标 i 满足 $i \le m$ 且 $m+n-k-i \le n$, 即 $m-k \le i \le m$. 因此

$$H_c^k(M \times N) \simeq \bigoplus_{i=m-k}^{m} H_{dR}^i(M) \otimes H_{dR}^{m+n-k-i}(N) \simeq \bigoplus_{i=0}^{k} H_{dR}^{m-i}(M) \otimes H_{dR}^{n-k+i}(N).$$

再由 Poincaré 对偶即得欲证. □

特别地,

推论 6.5.6

对于任意定向流形 M, 如果其紧支集上同调群都是有限维的, 则

$$H_c^{k+l}(M \times \mathbb{R}^l) \simeq H_c^k(M).$$

♡

这两个结论对于更一般流形也成立.

¶ 应用 2：Betti数和Euler示性数

下面给出 Poincaré 对偶在 Betti 数和 Euler 示性数方面的一些应用. 回忆一下 m 维光滑流形 M 的 Betti数和Euler示性数分别是

$$b_k = \dim H^k_{dR}(M) \quad \text{和} \quad \chi(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k b_k.$$

下面证明

命题 6.5.7. (Betti数的性质)

设 M 是m 维紧定向流形，则

(1) 对于任意 k, $b_k = b_{m-k}$.

(2) 如果 $m = 4n+2$，则 b_{2n+1} 是偶数.

证明 (1) 由以下事实可得：

$$H^k_{dR}(M) \simeq H^{m-k}_c(M) = H^{m-k}_{dR}(M).$$

(2) 考虑双线性配对函数

$$\mathcal{P}^{2n+1}_M : H^{2n+1}_{dR}(M) \times H^{2n+1}_{dR}(M) \to \mathbb{R}.$$

对于任意 $[\omega], [\eta] \in H^{2n+1}_{dR}(M)$, 由定义，

$$\mathcal{P}^{2n+1}_M([\omega],[\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta = \int_M (-1)^{(2n+1)(2n+1)} \eta \wedge \omega = -\mathcal{P}^{2n+1}_M([\eta],[\omega]).$$

固定一组基后，双线性函数 $\mathcal{P}^{2n+1}_M$ 对应的矩阵 P 是反对称的 $b_{2n+1} \times b_{2n+1}$ 矩阵，故

$$\det(P) = \det(P^T) = (-1)^{b_{2n+1}} \det(P).$$

另一方面，由于 $\mathcal{P}^{2n+1}_M$ 是非退化的，所以 $\det(P) \neq 0$, 于是 b_{2n+1} 一定是偶数. □

由此可得

定理 6.5.8. (紧定向流形的Euler 示性数)

设 M 是紧定向流形.

(1) 如果 $\dim M = 2n+1$，则 $\chi(M) = 0$.

(2) 如果 $\dim M = 4n+2$，则 $\chi(M)$ 是偶数.

证明 (1) 设 $\dim M = 2n+1$，则由 $b_k = b_{2n+1-k}$ 可得

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^k b_{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} ((-1)^k + (-1)^{2n+1-k}) b_k = 0.$$

(2) 设 $\dim M = 4n+2$，则类似地计算可得

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{4n+2} (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^{2n} ((-1)^k + (-1)^{4n+2-k}) b_k + b_{2n+1}.$$

因为 $(-1)^k + (-1)^{4n+2-k} = \pm 2$，而且 b_{2n+1} 是偶数，所以 $\chi(M)$ 是偶数. □

注意不可定向流形，定理不必不成立，例如 $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$ 不是偶数.

注 6.5.9. 对于 $m = 4n$ 维紧致定向流形 M，由

$$\int_M \omega \wedge \eta = \int_M \eta \wedge \omega, \qquad \forall \omega, \eta \in \Omega^{2n}(M)$$

可知 $\mathcal{P}_M^{2n} : H_{dR}^{2n}(M) \times H_{dR}^{2n}(M) \to \mathbb{R}$ 是对称映射. 记该映射的符号(即对应对称阵的正特征值个数与负特征值个数之差)为 $\mathrm{sgn}(M)$. 这个不变量在研究 $4n$ 维流形尤其是 4 维流形时起到了重要作用. 例如，通过利用某种形式的 Poincaré 对偶以及线性代数论证，可以证明

定理 6.5.10. (边界的拓扑限制)

若 M 是 $4n$ 维紧致定向流形, 且存在 $4n+1$ 维紧致定向带边流形 N 使得 $M = \partial N$，则 $\mathrm{sgn}(M) = 0$. ♡

例如考虑 $4n$ 维定向流形 $\mathbb{CP}^{2n}$: 由 $H_{dR}^{2n}(\mathbb{CP}^{2n}) = \mathbb{R}$ 可知 $\mathrm{sgn}(\mathbb{CP}^{2n}) \neq 0$，从而它不是任意 $4n+1$ 维紧致定向带边流形的边界.

¶ 子流形的Poincaré对偶

设 M 是 m 维定向流形且其 de Rham 上同调群都是有限维的，$\iota : S \hookrightarrow M$ 是余维数为 r 的定向闭子流形. 则映射

$$\int_S : H_c^{m-r}(M) \to \mathbb{R}, \quad [\eta] \mapsto \int_S \iota^* \eta$$

确定了 $(H_c^{m-r}(M))^*$ 中的一个元素 $\int_S$. 因此由 Poincaré对偶，可得 $H_{dR}^r(M)$ 中的元素 $\mathrm{Pd}_M(S) = (\mathcal{P}_M^r)^{-1}(\int_S)$，它由下述性质刻画：

若 $\omega \in Z^r(M)$ 是 $\mathrm{Pd}_M(S) \in H_{dR}^r(M)$ 的代表元，则

$$\int_S \iota^* \eta = (-1)^{r(m-r)} \int_M \eta \wedge \omega, \qquad \forall [\eta] \in H_c^{m-r}(M).$$

定义 6.5.11. (子流形的 Poincaré对偶)

设 M 是 m 维定向流形而 S 是其余维数为 r 的定向闭子流形，则称上述定义的 $\mathrm{Pd}_M(S) \in H_{dR}^r(M)$ 为 S 在 M 中的 **Poincaré对偶**. ♣

例 6.5.12. 设 M 是 m 维闭定向流形，则 M 是 M 的自身的定向闭子流形. 根据定义，$H_{dR}^0(M)$ 中与（子）流形M 对应的元素是 $[1]$ ，即 $\mathrm{Pd}_M(M) = [1]$.

例 6.5.13. 设 M 是 m 维定向闭流形, $f : M \to M$ 为光滑映射. 令

$$\iota : \Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \hookrightarrow M \times M$$

为 f 的图像子流形. 下面计算它在 $M \times M$ 中的Poincaré 对偶.

为此，首先令 $\{[\omega_i^j] \mid 1 \le i \le b_j\}$ 为 $H_{dR}^j(M)$ 的基，其中 $b_j = \dim H_{dR}^j(M)$，再令 $\{[\nu_i^{m-j}] \mid 1 \le i \le b_{m-j} = b_j\}$ 为上述基在 $H_{dR}^{m-j}(M)$ 中(关于Poincaré对偶)的对偶基，即

$$\int_M \omega_i^j \wedge \nu_k^{m-j} = \delta_{ik}, \qquad \forall 1 \le i, k \le b_j.$$

记 $\pi_1 : M \times M \to M$ 和 $\pi_2 : M \times M \to M$ 分别为 $M \times M$ 到两个分量上的典范投影映射. 根据 Künneth 定理,

$$\{[\pi_1^* \omega_i^j \wedge \pi_2^* \nu_k^{m-j}] \mid 0 \le j \le m, 1 \le i, k \le b_j\}$$

构成了 $H^m_{dR}(M\times M)$ 的基. 进一步计算可得

$$\int_{M\times M}(\pi_1^*\omega_i^j\wedge\pi_2^*\nu_k^{m-j})\wedge(\pi_1^*\nu_s^{m-u}\wedge\pi_2^*\omega_t^u)=(-1)^{m(m-j)}\int_{M\times M}\pi_1^*(\omega_i^j\wedge\nu_s^{m-u})\wedge\pi_2^*(\omega_t^u\wedge\nu_k^{m-j})$$

$$=(-1)^{m(m-j)}\delta_{ju}\int_M(\omega_i^j\wedge\nu_s^{m-j})\int_M(\omega_t^j\wedge\nu_k^{m-j})$$

$$=(-1)^{m(m-j)}\delta_{ju}\delta_{is}\delta_{tk}.$$

为了计算 $\mathrm{Pd}_{M\times M}(\Gamma_f)\in H^m_{dR}(M\times M)$，设

$$\mathrm{Pd}_{M\times M}(\Gamma_f)=\sum_{i,j,k}c_j^{i,k}[\pi_1^*\omega_i^j\wedge\pi_2^*\nu_k^{m-j}].$$

记 $\omega=\sum_{i,j,k}c_j^{i,k}\pi_1^*\omega_i^j\wedge\pi_2^*\nu_k^{m-j}$，则 $[\omega]=\mathrm{Pd}_{M\times M}(\Gamma_f)$，从而对任意固定的 u,s,t, 有

$$\int_{M\times M}(\pi_1^*\nu_s^{m-u}\wedge\pi_2^*\omega_t^u)\wedge\omega=(-1)^{r(m-r)}\int_{\Gamma_f}\iota^*(\pi_1^*\nu_s^{m-u}\wedge\pi_2^*\omega_t^u).$$

上式左边为

$$\mathrm{LHS}=(-1)^m\sum_{i,j,k}c_j^{i,k}\int_{M\times M}(\pi_1^*\omega_i^j\wedge\pi_2^*\nu_k^{m-j})\wedge(\pi_1^*\nu_s^{m-u}\wedge\pi_2^*\omega_t^u)=(-1)^{mu}c_u^{s,t}.$$

对于右边，考虑保定向微分同胚

$$\varphi:M\to\Gamma_f,\quad \varphi(x)=(x,f(x)),$$

则 $\pi_1\circ\iota\circ\varphi=\mathrm{Id}$, 而 $\pi_2\circ\iota\circ\varphi=f$. 设线性映射$f^*:H^j_{dR}(M)\to H^j_{dR}(M)$ 为

$$f^*([\omega_i^j])=\sum_k A_j^{ki}[\omega_k^j].$$

则

$$(-1)^{r(m-r)}\cdot\mathrm{RHS}=\int_M\varphi^*\iota^*(\pi_1^*\nu_s^{m-u}\wedge\pi_2^*\omega_t^u)=\int_M\nu_s^{m-u}\wedge f^*\omega_t^u=(-1)^{u(m-u)}A_u^{st}.$$

所以 $c_u^{s,t}=(-1)^{r(m-r)}(-1)^uA_u^{st}$，因此

$$\mathrm{Pd}_{M\times M}(\Gamma_f)=(-1)^{r(m-r)}\sum_{i,j,k}(-1)^jA_j^{ik}[\pi_1^*\omega_i^j\wedge\pi_2^*\nu_k^{m-j}].$$

由此可得

命题 6.5.14. (Poincaré 对偶在对角线的积分)

设 M 是紧致定向流形，$f:M\to M$ 是光滑映射, $\iota_0:\Delta\to M\times M$ 是 $M\times M$ 中的对角线流形, $\omega\in H^m_{dR}(M\times M)$ 是 $\mathrm{Pd}_{M\times M}(\Gamma_f)$ 的代表元. 则

$$(-1)^m\int_\Delta\iota_0^*\omega=\sum_j(-1)^j\mathrm{tr}(f^*|_{H^j_{dR}(M)}).$$

证明 考虑保定向微分同胚 $\varphi_0:M\to\Delta,\varphi_0(x)=(x,x)$. 则

$$(-1)^m\int_\Delta\iota_0^*\omega=(-1)^m\int_M\varphi_0^*\iota_0^*\omega=\sum_j(-1)^j\sum_{i,k}A_j^{ik}\int_M\omega_i^j\wedge\nu_k^{m-j}$$

$$=\sum_j(-1)^j\sum_iA_j^{ii}$$

$$=\sum_j(-1)^j\mathrm{tr}(f^*|_{H^j_{dR}(M)}).$$

□