2.5 Whitney 嵌入定理

本书 §1.1 中提到，历史上有两种流形的定义：由 Poincaré 给出的外蕴/具体的定义(即欧氏空间中满足特定约束条件的点集)，和由 Weyl 给出内蕴/抽象的定义(即由局部坐标卡粘合而成的对象). 在 20 世纪 30 年代，Whitney 证明了这两种定义实际上是相同的. 事实上，Whitney 的结果比上述结论更强：不仅可以将任何光滑流形嵌入到某个欧氏空间，而且该欧氏空间的维数只要是流形本身维数的两倍左右就够了：

定理 2.5.1.（Whitney 嵌入/浸入定理）

(1) 任意 m 维光滑流形 M 能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中.

(2) 任意 m 维光滑流形 M 能被浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中. ♡

注意“浸入到”并不表示“其像集是一个浸入子流形”, 因为浸入可以不是单射.

注 2.5.2. 通过使用完全不同的技术，Whitney 在 1944 年证明了更强的

定理 2.5.3.（强 Whitney 嵌入/浸入定理）

任意 $m(\geq 2)$ 维光滑流形能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m}$，且能被浸入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中. ♡

另一方面，可以证明，$\mathbb{R}^m$ 中的任意 $(m-1)$ 维紧致光滑子流形（也称为闭超曲）一定是可定向的. 特别地，不可定向闭曲面例如 $\mathbb{RP}^2$, Klein 瓶等都不能被嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中，故强 Whitney 嵌入定理中的维数是最佳的。在二十世纪下半叶，人们进一步得到了很多有关嵌入和浸入的结果，例如

- 任意光滑紧致可定向 m 维流形能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中.
- 对于 $m \neq 2^k$, 任意光滑 m 维流形能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$. 一般地，任意光滑 m 维流形能被浸入到 $\mathbb{R}^{2m-a(m)}$ 中, 其中 $a(m)$ 是 m 的二进制展开中出现的 1 的个数.

强 Whitney 嵌入定理的证明超出了本书的范围，该方法被称作“Whitney 技巧”，后被 Smale 进一步发展为 h-配边理论并用于证明维数 ≥ 5 情形的 Poincaré 猜想。

本节的目的是证明定理 2.5.1. 我们将先证明简单情形即 M 是紧流形的情形，然后证明 M 是非紧流形的情形[7]. 在这两种情况下，定理的证明都可以被分解为以下三步:

<u>步骤 1</u>：将 M 单射地浸入到维数 K 充分大的欧氏空间 $\mathbb{R}^K$ 中.

- 背后的想法：流形的每个“小片”微分同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的“小片”，从而能被嵌入到欧氏空间中; 两个“相邻的小片”在嵌入时可能会发生重叠，但是只要被嵌入的欧氏空间维数足够高，那么就可以设法避免这种重叠发生.

<u>步骤 2</u>：若 $K > 2m+1$, 则将 $\mathbb{R}^K$ 投影到某个特定的子空间 $\mathbb{R}^{K-1}$ 中.

- 背后的想法：如果所浸入的外围空间的维数非常高，那么沿着某些方向“看过去”时，你将能看到整个流形[即流形没有“自己把自己挡住”]. 沿着这个方向作投影，就可以把流形浸入到维数低一维的外围空间.

<u>步骤 3</u>：应用定理2.4.19或定理2.4.20，当流形紧致或映射逆紧时，单射浸入必然是嵌入.

[7]因为紧流形和非紧流形常常具有很大的区别，人们给了它们特殊的名字: **闭流形**= 紧致无边流形，**开流形**= 非紧无边流形.

2.5.1 Whitney 嵌入定理：紧致情形的证明

¶ 从紧流形单射浸入到 $\mathbb{R}^N$

为了证明紧流形的 Whitney 嵌入定理，我们先证明

定理 2.5.4.（紧流形到欧氏空间的单射浸入）

任意紧光滑流形 M 可以被单射浸入到足够高维数的 K 维欧氏空间 $\mathbb{R}^K$ 中.

证明 因为 M 是紧致的，存在有限个坐标卡 $\{(\varphi_i, U_i, V_i) \mid 1 \le i \le k\}$ 覆盖 M. 令 $\{\rho_i \mid 1 \le i \le k\}$ 为从属于 $\{U_i \mid 1 \le i \le k\}$ 的一个单位分解. 定义

$$\Phi : M \to \mathbb{R}^{k(m+1)}, \quad p \mapsto (\rho_1(p)\varphi_1(p), \cdots, \rho_k(p)\varphi_k(p), \rho_1(p), \cdots, \rho_k(p)).$$

则

- $\boxed{\Phi \text{ 是一个单射.}}$ 设 $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$. 取下标 i 使得 $\rho_i(p_1) = \rho_i(p_2) \neq 0$. 那么 $p_1, p_2 \in \mathrm{supp}(\rho_i) \subset U_i$. 于是有 $\varphi_i(p_1) = \varphi_i(p_2)$. 但是 φ_i 是双射，故 $p_1 = p_2$.
- $\boxed{\Phi \text{ 是一个浸入.}}$ 对于任意 $X_p \in T_pM$, 由 Leibnitz 法则,

$$\begin{aligned} d\Phi_p(X_p) = (&X_p(\rho_1)\varphi_1(p) + \rho_1(p)(d\varphi_1)_p(X_p), \cdots, \\ &X_p(\rho_k)\varphi_k(p) + \rho_k(p)(d\varphi_k)_p(X_p), X_p(\rho_1), \cdots, X_p(\rho_k)). \end{aligned}$$

若 $d\Phi_p(X_p) = 0$, 那么对于所有的 i，都有 $X_p(\rho_i) = 0$, 从而

$$\rho_i(p)(d\varphi_i)_p(X_p) = 0, \quad \forall i.$$

取下标 i 使得 $\rho_i(p) \neq 0$，则 $(d\varphi_i)_p(X_p) = 0$. 由 φ_i 是微分同胚可知 $X_p = 0$. 因此 $d\Phi_p$ 是单射.

□

注 2.5.5. 事实上，上述证明给出了一个更强的结果:

定理 2.5.6.（有限坐标覆盖 $\Longrightarrow$ 单射浸入到欧氏空间）

若光滑流形 M 能被有限个坐标卡覆盖，则 M 可被单射浸入到某欧氏空间.

¶ 降维投影

接下来应用 Sard 定理证明(注意：此处不假设紧性)

定理 2.5.7.（单射浸入的降维）

如果 m 维光滑流形 M 可被单射浸入到欧氏空间 $\mathbb{R}^K$ 中，且 $K > 2m+1$, 那么 M 可被单射浸入到 $\mathbb{R}^{K-1}$ 中.

证明 设 $\Phi : M \to \mathbb{R}^K$ 是一个单射浸入，且 $K > 2m+1$. 为了构造从 M 到 $\mathbb{R}^{K-1}$ 的单射浸入，考虑从 $\mathbb{R}^K$ 到它的所有 $K-1$ 维线性子空间的正交投影, 并将 Φ 与每一个这样的投影映射复合. 下证：对于“几乎所有的”投影，该复合映射都是一个单射浸入.

注意 $\mathbb{R}^K$ 中任意 $K-1$ 维线性子空间都被它的法方向唯一决定，法方向是过原点的一维直线，而 $\mathbb{R}^K$ 中所有过原点的直线构成了实射影空间 $\mathbb{RP}^{K-1}$, 它是一个 $K-1$ 维光

滑流形. 对于任意过原点的直线 $[v] \in \mathbb{RP}^{K-1}$, 令

$$P_{[v]} = \{u \in \mathbb{R}^K \mid u \cdot v = 0\} \simeq \mathbb{R}^{K-1}$$

为直线 $[v]$ 在 $\mathbb{R}^K$ 中的正交补空间. 记 $\pi_{[v]} : \mathbb{R}^K \to P_{[v]}$ 为 $\mathbb{R}^K$ 到这个超平面的正交投影，并令 $\Phi_{[v]} = \pi_{[v]} \circ \Phi$.

断言： 集合 $\{[v] \mid \Phi_{[v]}\text{不是单射浸入}\}$ 是 $\mathbb{RP}^{K-1}$ 中的零测集.

于是对几乎所有的 $[v] \in \mathbb{RP}^{K-1}$, 映射 $\Phi_{[v]}$ 是从 M 到某个 $\mathbb{R}^{K-1}$ 的单射浸入.

下面证明断言. 首先考虑使得 $\Phi_{[v]}$ 不是单射的 $[v]$. 此时可以找到 $p_1 \neq p_2$，使得 $\Phi_{[v]}(p_1) = \Phi_{[v]}(p_2)$, 即 $0 \neq \Phi(p_1) - \Phi(p_2)$ 位于直线 $[v]$ 中. 换句话说,

$$[v] = [\Phi(p_1) - \Phi(p_2)].$$

因此 $[v]$ 必然位于光滑映射

$$\alpha : (M \times M) \setminus \Delta_M \to \mathbb{RP}^{K-1}, \quad (p_1, p_2) \mapsto [\Phi(p_1) - \Phi(p_2)]$$

的像集中，其中 $\Delta_M = \{(p,p) \mid p \in M\}$ 是 $M \times M$ 中的“对角线”. 由于 $(M \times M) \setminus \Delta_M$ 是维数为 $2m < K-1$ 的光滑流形, 根据 Sard 定理的最简单情形，α 的像集在 $\mathbb{RP}^{K-1}$ 中是零测集. 因此使得 $\Phi_{[v]}$ 不是单射的 $[v]$ 构成的集合是零测集.

最后考虑使得 $\Phi_{[v]}$ 不是浸入的 $[v]$，此时存在 $p \in M$ 和 $0 \neq X_p \in T_pM$ 使得

$$0 = (d\Phi_{[v]})_p(X_p) = (d\pi_{[v]})_{\Phi(p)}(d\Phi)_p(X_p).$$

因为 $\pi_{[v]}$ 是线性的, 所以 $d\pi_{[v]} = \pi_{[v]}$. 于是非零向量 $(d\Phi)_p(X_p)$ 在 $[v]$ 中, 从而

$$[v] = [(d\Phi)_p(X_p)].$$

换句话说, $[v]$ 位于光滑映射

$$\beta : TM \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^{K-1}, \quad (p, X_p) \mapsto [(d\Phi)_p(X_p)]$$

的像集中，其中 $TM \setminus \{0\} = \{(p, X_p) \mid X_p \neq 0\}$ 是切丛 TM 的开子流形. 因为 TM 的维数 $2m < K-1$, 由 Sard 定理, β 的像集是零测集. 故使得 $\Phi_{[v]}$ 不是浸入的 $[v]$ 也是零测集. 于是断言成立，从而定理得证. □

注意到以下事实：

$$(d\Phi_{[v]})_p(X_p) = 0 \Longleftrightarrow (d\Phi_{[v]})_p(\frac{X_p}{|X_p|}) = 0,$$

所以若不要求浸入是单射，可以修改上述证明的最后一步，再降一维：

定理 2.5.8. （从嵌入到浸入）

如果 m 维光滑流形 M 能被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$, 那么它能被浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$. ♡

证明概要 设 $\Phi : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ 是嵌入。重复定理2.5.7证明中的最后一步, 并做以下修正，即可证明本定理：选取 $X_p \in T_pM$ 使得 $|X_p| = 1$(因为流形已嵌入欧氏空间，切向量 $X_p \in T_pM$ 的长度是指欧氏空间中的长度)，于是以上证明中的映射 β 能被替换为映射

$$\tilde{\beta} : SM \to \mathbb{RP}^{2m}, \quad (p, X_p) \mapsto [(d\Phi)_p(X_p)],$$

其中 $SM = \{(p, X_p) \mid |X_p| = 1\}$ 一个 $2m-1$ 维光滑流形，被称作 M 的**单位球丛**. □

¶ 紧流形情形下 Whitney 定理的证明

证明 设 M 是 m 维紧致光滑流形。根据定理2.5.4，定理2.5.7和定理2.4.19，M 可被嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中。再根据定理2.5.8，M 可被浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中。 □

2.5.2 Whitney 嵌入定理：非紧情形

上述证明在流形 M 非紧时不能完全照搬，因为一方面我们不知道非紧流形是否可以用有限多个坐标卡覆盖[虽然答案是“是”，但证明并不简单]，另一方面从非紧流形出发的单射浸入不一定是嵌入，所以还需要把所得的单射浸入改造成逆紧的单射浸入。

¶ 从非紧流形到 $\mathbb{R}^N$ 的单射浸入

先证明定理2.5.4的非紧版本：

定理 2.5.9.（非紧流形到欧氏空间的单射浸入）
任意非紧光滑流形 M 都存在到足够大的维数 K 的欧氏空间 $\mathbb{R}^K$ 的单射浸入. ♡

证明的思路很简单：如果每次嵌入一个流形片的话，无穷多个“杂乱的流形片”不太好浸入到欧氏空间，但如果这些流形片排列很规整，则可能一次性嵌入很多流形片。

证明 根据习题 1, 在 M 上存在光滑穷竭函数 f. 对于每个 $i\in\mathbb{N}$, 定义

$$M_i = f^{-1}\big([i,i+1]\big).$$

用有限多个坐标卡 $U_1,\cdots,U_k$ 去覆盖紧集 M_i, 并且令

$$N_i = (U_1\cup\cdots\cup U_k)\cap f^{-1}\big((i-0.1,i+1.1)\big).$$

那么每个 N_i 是 M 的 (开) 子流形，且 $M_i\subset N_i$. 此外, 如果 $|i-j|\geq 2$, 则 $N_i\cap N_j=\emptyset$. 根据构造，每个 N_i 能被有限多个坐标卡覆盖. 故由定理2.5.6, 存在从 N_i 到某个（高维）欧氏空间 $\mathbb{R}^K$ 的单射浸入. 因为 N_i 是 m 维光滑 (无边) 流形, 定理2.5.7说明存在从 N_i 到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 的单射浸入 φ_i.

取光滑鼓包函数 ρ_i，使得在 M_i 的一个开邻域上 $\rho_i=1$，且 $\mathrm{supp}\rho_i\subset N_i$ (该函数的存在性可由习题 1 中光滑 Urysohn 引理保证). 定义

$$\Phi: M\to\mathbb{R}^{4m+3},\quad p\mapsto\left(\sum_{i\text{是奇数}}\rho_i(p)\varphi_i(p),\ \sum_{i\text{ 是偶数}}\rho_i(p)\varphi_i(p), f(p)\right).$$

注意上式中的两个“无穷”求和，在每个点 $p\in M$ 的充分小邻域中，至多有一项非零. 因此 Φ 是光滑映射. 以下只需要证明 Φ 是单射浸入:

- $\boxed{\Phi\text{ 是单射}}$ 如果 $\Phi(p_1)=\Phi(p_2)$, 那么 $\exists i\in\mathbb{N}$ 使得 $f(p_1)=f(p_2)\in[i,i+1]$. 故 $p_1,p_2\in M_i\subset N_i$ 并且 $\varphi_i(p_1)=\varphi_i(p_2)$. 因为 φ_i 是单射, 所以 $p_1=p_2$.
- $\boxed{\Phi\text{ 是浸入}}$ 设 $p\in M_i$. 不失一般性, 设 i 是奇数. 那么对于 $0\neq X_p\in T_pM$,

$$d\Phi_p(X_p)=((d\varphi_i)_p(X_p),*,*).$$

因为 φ_i 是在 $U_i\ni p$ 上是浸入, 故 $(d\varphi_i)_p(X_p)\neq 0$，从而 $d\Phi_p(X_p)\neq 0$.

这样就完成了证明. □

¶ 从单射浸入到逆紧单射浸入

在很多情况下，把紧流形的性质推广到非紧流形时，只需假设映射的逆紧性即可. 为了应用定理2.4.20，需要先证明

定理 2.5.10. （单射浸入 $\Rightarrow$ 逆紧单射浸入）

若 m 维光滑非紧流形 M 能被单射浸入到 $\mathbb{R}^K$，其中 $K > 2m$，则它能被逆紧单射浸入到 $\mathbb{R}^K$ 中. ♡

证明 设 $\Phi : M \to \mathbb{R}^K$ 是单射浸入。将 Φ 和微分同胚

$$\mathbb{R}^K \to B^K(1) = \{x \in \mathbb{R}^K \mid |x| \le 1\}, \qquad x \mapsto \frac{x}{1+|x|^2}$$

复合，可以假设对于所有 $p \in M$ 都有 $|\Phi(p)| \le 1$ 成立.

取 M 上任意正的光滑穷竭函数 f, 并且定义

$$\widetilde{\Phi} = (\Phi, f) : M \to \mathbb{R}^{K+1}, \quad p \mapsto (\Phi(p), f(p)).$$

则 $\widetilde{\Phi}$ 也是一个单射浸入，且 $K+1 > 2m+1$. 于是可以重复定理2.5.7的证明, 得到另一个单射浸入

$$\Psi = \pi_{[v]} \circ \widetilde{\Phi} : M \to \mathbb{R}^K,$$

其中 $\pi_{[v]}$ 是某个投影 $\pi : \mathbb{R}^{K+1} \to P_{[v]} \simeq \mathbb{R}^K$，且总可以选择 $[v]$ 使得 $[v] \ne [0 : \cdots : 0 : 1]$.

下面证明 Ψ 是逆紧的. 不失一般性，假设 v 是单位向量，并记 $v = (v', v^{K+1})$. 于是条件 $[v] \ne [0 : \cdots : 0 : 1]$ 等价于 $|v^{K+1}| < 1$. 由 $|v| = 1$ 可知 $\pi_{[v]}(x) = x - (x \cdot v)v$. 因此

$$\begin{aligned}\Psi(p) &= (\Phi(p), f(p)) - \Big[(\Phi(p), f(p)) \cdot (v', v^{K+1})\Big]\,(v', v^{K+1}) \\ &= \Big(*, f(p)[1-(v^{K+1})^2] - (\Phi(p) \cdot v')v^{K+1}\Big).\end{aligned}$$

现在证明 Ψ 的逆紧性. 对于任意紧集 $C \subset P_{[v]} \simeq \mathbb{R}^K$, $\exists A > 0$ 使得

$$C \subset \{x \mid |x^{K+1}| < A\}.$$

由 $|\Phi(p)| \le 1, |v^{K+1}| \le 1$ 且 $|v'| \le 1$ 可知

$$\begin{aligned} p \in \Psi^{-1}(C) &\Longrightarrow \Big| f(p)[1-(v^{K+1})^2] - (\Phi(p) \cdot v')v^{K+1} \Big| < A \\ &\Longrightarrow \Big| f(p)[1-(v^{K+1})^2] \Big| \le A + \Big| (\Phi(p) \cdot v')v^{K+1} \Big| \le A + 1.\end{aligned}$$

于是 $\Psi^{-1}(C) \subset f^{-1}([-\frac{A+1}{1-|v^{K+1}|^2}, \frac{A+1}{1-|v^{K+1}|^2}])$. 但是由 Ψ 的连续性可知 $\Psi^{-1}(C)$ 在 M 中是闭集，而由 f 的逆紧性可知 $f^{-1}([-\frac{A+1}{1-|v^{K+1}|^2}, \frac{A+1}{1-|v^{K+1}|^2}])$ 在 M 中是紧集. 因此 $\Psi^{-1}(C)$ 是紧集. 故 Ψ 是逆紧的，从而完成了证明. □

¶ 非紧流形情形 Whitney 定理的证明

证明 设 M 是 m 维光滑非紧流形。根据定理2.5.9，定理2.5.7，定理2.4.20以及定理2.4.20，M 可被嵌入 $\mathbb{R}^{2m+1}$。再根据定理2.5.8, M 可被浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中. □

注 2.5.11. 这里事实上证明了更强的结论：任何 m 维光滑流形可被逆紧地嵌入 $\mathbb{R}^{2m+1}$。

注 2.5.12. 对于带边流形同样有 Whitney 嵌入/浸入定理，参见 [2] 第 1 章定理 4.3.