

### 3.3 向量场生成的动力系统

#### 3.3.1 向量场生成的微分同胚

##### ¶ 流与局部流

设  $X$  是光滑流形  $M$  上的光滑向量场。上一节提到, 从任意点  $p \in M$  出发有唯一的极大积分曲线

$$\gamma_p : J_p \rightarrow M.$$

所有这些积分曲线合在一起, 可得光滑映射

$$\Phi : \mathcal{M} = \{(t, p) \mid p \in M, t \in J_p\} \rightarrow M, \quad \Phi(t, p) = \gamma_p(t).$$

此外, 对于任意固定的  $t \in \mathbb{R}$ , 有光滑映射

$$\phi_t : M_t = \{p \in M \mid t \in J_p\} \rightarrow M, \quad \phi_t(p) = \Phi(t, p).$$

特别地, 若  $t, -t \in \cap_p J_p$ , 则  $\phi_t : M \rightarrow M$  是一个微分同胚, 且这样的微分同胚满足

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}.$$

此外, 如果  $X$  是完备向量场, 则  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$ , 此时对于任意  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_t$  都是  $M$  到自身的微分同胚。

##### 定义 3.3.1. (流与局部流)

设  $X$  是光滑流形  $M$  上的光滑向量场。

(1) 称映射  $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow M$  为  $X$  生成的局部流。

(2) 若  $X$  完备, 则称映射  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  为  $X$  生成的流。



**例 3.3.2.**  $\mathbb{R}^n$  中的向量场  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$  生成的流是平移

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (t + x^1, x^2, \dots, x^n).$$

更一般地,  $\mathbb{R}^n$  中的常向量场  $X = \sum c^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  生成的流是

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (c^1 t + x^1, \dots, c^n t + x^n).$$

**例 3.3.3.** 如果将  $\mathbb{R}^2$  等同于  $\mathbb{C}$ , 那么由向量场

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

生成的流是逆时针旋转

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (t, z) \mapsto e^{it} z.$$

注意到这个向量场与以原点为圆心的圆周相切. 该向量场一般记为  $\frac{d}{d\theta}$  或者  $\frac{\partial}{\partial \theta}$ .

##### ¶ 单参数微分同胚群

设  $X$  是  $M$  上的完备向量场, 则根据命题 3.2.14, 映射族  $\phi_t : M \rightarrow M$  构成了一个微分同胚群的一个单参数子群, 即它们都是微分同胚, 且满足

- $\phi_0 = \text{Id}_M$ ,
- $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \forall t, s$ ,
- $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ .

换言之, 映射

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto \phi_t$$

是从实数加法群  $\mathbb{R}$  到  $M$  的微分同胚群  $\text{Diff}(M)$  的一个群同态.

#### 定义 3.3.4. (单参数微分同胚群)

若光滑映射  $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  所诱导的映射  $t \mapsto \phi_t = \Phi(t, \cdot)$  是一个从  $\mathbb{R}$  到  $\text{Diff}(M)$  的群同态, 则称映射族  $\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$  为  $M$  的一个单参数微分同胚子群. 

因此流形上的任意完备向量场  $X$  都生成了一个单参数微分同胚子群. 反之, 若光滑映射  $\Phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  所诱导的映射族  $\phi_t := \Phi(t, \cdot)$  是一个单参数微分同胚子群, 则可以通过下面式子定义  $M$  上的向量场  $X$ ,

$$X_p := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(p) = \dot{\gamma}_p(0).$$

那么不难验证

- $\Phi$  的光滑性蕴含着向量场  $X$  的光滑性,
- 向量场  $X$  是完备的, 因为  $\gamma_p(t) := \Phi(t, p)$  是  $X$  的积分曲线,
- 映射  $\Phi$  是  $X$  生成的流.

向量场  $X$  被称为单参数微分同胚子群  $\{\phi_t\}$  或者流  $\Phi$  的无穷小生成元.

**注 3.3.5.** 更一般地, 还可以考虑随着时间  $t$  变化的向量场  $X_t$ . 此时不仅假设该向量场对于任意  $t$  而言都是  $M$  上的光滑向量场, 而且假设它光滑依赖于参数  $t$ , 即在局部坐标系中,  $X_t$  可以被表示为

$$X_t = \sum X^i(t, x) \partial_i,$$

其中系数函数  $X^i(t, x)$  是  $t$  和  $x$  的光滑函数. 同样可以考虑  $X_t$  的积分曲线, 即满足

$$\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t))$$

的曲线. 事实上, 可以用“升维技巧”将这种依赖于时间的向量场转化为前面所熟悉的向量场: 流形  $M$  上依赖于时间参数的向量场  $X_t$  给出了乘积流形  $\mathbb{R} \times M$  上的一个“常规”向量场  $\tilde{X} = (\partial_t, X_t(p))$ . 通过这种方式, 可以将“ $M$  上依赖于时间的向量场和它生成的流”视作“ $\mathbb{R} \times M$  上常规向量场或流”在  $M$  的投影. 特别地, 对于任意固定的  $s$ , 从初值条件  $\gamma(s) = p$  出发, 有唯一的积分曲线  $\gamma_{s,p}(t)$  (它表示的是时刻  $s$  时从  $p$  点出发, 再过时间  $t$  后达到的位置). 为了简单起见, 假设  $M$  是紧流形. 那么  $X_t$  的这些积分曲线给出了一个光滑映射

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad (t, s, p) \mapsto \gamma_{s,p}(t),$$

可以验证映射  $p \mapsto \phi_t^s(p) = \Phi(t, s, p)$  是可逆的, 且其逆映射为  $\phi_{-t}^{s+t}$ . 于是  $\phi_t^s$  也都是光滑依赖于  $t$  (以及  $s$ ) 的微分同胚. 不过对于固定的  $s$ ,  $\phi_t^s$  关于  $t$  变量不再满足群性质, 而是满足略微更复杂的关系式  $\phi_{t_2}^{s+t_1} \phi_{t_1}^s = \phi_{t_1+t_2}^s$ . 特别地, 取  $s = 0$ , 则所得的单参数微分

同胚族  $\phi_t := \phi_t^0$  不再是微分同胚群的子群, 不过它依然满足  $\phi_0 = \text{Id}$  以及

$$\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_t(\phi_t(p)), \quad \forall t.$$

映射族  $\{\phi_t\}$  有时候也被称作由依赖于时间的向量场  $X_t$  所生成的依赖于时间的流.

反之, 任给  $X$  上的一族满足  $\rho_0 = \text{Id}$  的微分同胚  $\rho_t: M \rightarrow M$ , 若它光滑依赖于  $t$ , 即由所有  $\rho_t$  合在一起所得的映射

$$P: (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow M, \quad P(t, p) := \rho_t(p),$$

是光滑映射, 则可以在  $M$  上定义一个依赖于时间  $t$  的向量场  $X_t$  如下:

$$X_t(p) := \dot{\gamma}_{t,p}(0) = (d\gamma_{t,p})_0\left(\frac{d}{ds}\right) \in T_p M,$$

其中  $\gamma_{t,p}(s) := \rho_{t+s}(\rho_t^{-1}(p))$ . 可以证明,  $\{\rho_t\}$  正是它生成的依赖于时间的流.

### ¶ 在 Morse 理论中的应用

特定的向量场生成的流是研究几何时非常有用的工具. 常见的有黎曼几何中由函数的梯度向量场生成的梯度流、辛几何中由 Hamilton 向量场生成的 Hamilton 流等等. 下面给出一个例子: 运用梯度向量场证明 Morse 理论<sup>2</sup>中的一个基本定理.

设  $M$  为光滑流形,  $f$  是  $M$  上的光滑实值函数. 对于任意  $a \in \mathbb{R}$ , 考虑次水平集

$$M^a = f^{-1}((-\infty, a)).$$

下面这个定理表明  $M$  的拓扑是由它在  $f$  的临界点附近的性态决定的:

#### 定理 3.3.6. (正则区间形变定理)

对于  $a < b$ , 假设  $f^{-1}([a, b])$  是紧集, 并且每个  $c \in [a, b]$  是  $f$  的正则值, 则存在微分同胚  $\varphi: M \rightarrow M$  使得  $\varphi(M^a) = M^b$ .



**证明** 将  $M$  嵌入欧氏空间 (或者任意赋予  $M$  一个黎曼度量  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ), 从而在每个切空间  $T_p M$  上都给出一个内积. 按照以下方式定义  $M$  上的向量场  $\nabla f$  (称为  $f$  关于该度量的梯度向量场),

$$\langle \nabla f, X_p \rangle = df_p(X_p) = X_p(f), \quad \forall X_p \in T_p M.$$

因为  $f$  的临界点集合是闭集, 可以找到一个不含临界点的开集  $U$  使得  $f^{-1}([a, b]) \subset U$ .

因为  $f^{-1}([a, b])$  是紧集, 可取紧支光滑鼓包函数  $h$ , 使得

$$\text{supp}(h) \subset U, \quad \text{并且} \quad \text{在 } f^{-1}([a, b]) \text{ 上有 } h = 1.$$

因为在  $U$  中有  $df \neq 0$ , 所以在  $U$  中有  $\nabla f \neq 0$ , 从而

$$X := \frac{h}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle} \nabla f$$

是流形  $M$  上良好定义的紧支光滑向量场. 令  $\varphi_t$  为  $X$  生成的流. 那么  $f$  的拉回函数  $\varphi_t^* f$  关于  $t$  的导数为 (拉回的定义见命题 1.2.22 之后)

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* f(p) = \frac{d}{dt}f(\varphi_t(p)) = df_{\varphi_t(p)}(X_{\varphi_t(p)}) = h(\varphi_t(p)).$$

<sup>2</sup>Morse 理论是微分拓扑的一个子分支, 可以通过流形上的可微函数研究流形的拓扑, 例如给出流形上的 CW 结构和环柄分解, 并得到同调群的信息等.

于是只要  $\varphi_t(p) \in f^{-1}([a, b])$ , 就有

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) = 1.$$

换言之, 当  $f(\varphi_t(p)) \in [a, b]$  时有  $f(\varphi_t(p)) = t + c$ . 由此可知微分同胚  $\varphi_{b-a}$  恰好把  $M^a$  映为  $M^b$ .  $\square$

作为推论, 可以证明下述非常有用的(留作习题)

#### 定理 3.3.7. (Reeb 定理)

令  $M$  为  $n$  维紧流形. 假设存在光滑实值函数  $f \in C^\infty(M)$  使得  $f$  恰好有两个临界点, 且它们都是非退化的, 那么  $M$  同胚于  $S^n$ .



#### 注 3.3.8.

- (1) 然而  $M$  未必微分同胚于  $S^n$ .
- (2) 定理中临界点的“非退化”条件可以去掉。

### 3.3.2 Lie 导数

#### ¶ 函数沿着向量场的 Lie 导数

若  $X$  是完备向量场, 则它生成一族微分同胚  $\phi_t: M \rightarrow M$ . 从动力系统<sup>3</sup>的角度, 可以视  $\phi_t$  为系统  $M$  在时间  $t$  时刻的演化行为。于是对于任意光滑函数  $f \in C^\infty(M)$  (可以视为是对系统的一个“观测”, 例如对于一个单质点体系, 当  $M$  是它的所有可能状态所组成的相空间时,  $f$  可以是该质点的位置或者动量或者别的观测量), 一个自然的问题计算“函数  $f$  沿着该流的导数”(即观察量在系统演化下的变化率), 即所谓的 Lie 导数  $\mathcal{L}_X f$ .

事实上, Lie 导数可以对于任意光滑向量场  $X$  定义。回忆一下对于任意  $p \in M$ , 存在  $p$  的邻域  $U_p$  以及  $t_p > 0$  使得对于  $|t| < t_p$  以及任意  $q \in U_p$ ,  $\Phi(t, q) = \phi_t(q) = \gamma_q(t)$  对于  $(t, q) \in (-t_p, t_p) \times U_p$  有定义且光滑。于是虽然一般而言  $\phi_t$  未必是  $M$  上整体定义的映射, 但对于任意  $p$ , 它在  $p$  的邻域  $U_p$  中对于任意  $t \in (-t_p, t_p)$  都是光滑的, 且  $\phi_0(p) = p$ . 于是类似于微积分, 可以用如下公式定义该变化率:

#### 定义 3.3.9. (函数关于向量场的 Lie 导数)

设  $X$  是  $M$  上的光滑向量场,  $\Phi$  为其生成的局部流, 则称

$$\mathcal{L}_X(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f \quad \left( = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* f - f}{t} \right).$$

为  $f \in C^\infty(M)$  关于  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  的 Lie 导数。



事实上, 函数关于向量场  $X$  的 Lie 导数就是我们熟悉的“ $X$  作为导子在  $C^\infty(M)$  上的作用”, 即

<sup>3</sup>在数学上, 一个动力系统指的是一个三元组  $(T, X, \Phi)$ , 其中  $X$  是一个用于表征系统所有可能状态的集合,  $T$  是一个用于表示时间或演化参数的么半群, 而  $\Phi: T \times X \rightarrow X$  是一个描述系统演化行为的函数, 满足  $\Phi(0, x) = x$  以及  $\Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_2 + t_1, x)$ . 于是, 给定光滑流形上的完备向量场  $X$ , 就得到一个动力系统  $(\mathbb{R}, M, \Phi)$ .

**命题 3.3.10. (函数 Lie 导数的计算)**

对于任意光滑向量场  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  以及光滑函数  $f \in C^\infty(M)$ , 有

$$\mathcal{L}_X f = X(f).$$

**证明** 设  $\gamma_p(t)$  为  $X$  的满足  $\gamma_p(0) = p$  的积分曲线, 则当  $t$  充分小时,

$$\phi_t^* f(p) = f(\phi_t(p)) = f(\gamma_p(t)).$$

故

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma_p(t)) = d(f \circ \gamma_p) \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) = df_p \circ (d\gamma_p)_0 \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) = df_p(X_p) = Xf(p).$$

□

**一个向量场沿着另一个向量场的 Lie 导数**

函数的 Lie 导数  $\mathcal{L}_X f$  衡量了“ $f$  沿着  $X$  方向的变化率”. 还可以更进一步, 对于任意光滑向量场  $Y \in \Gamma^\infty(TM)$ , 研究“ $Y$  沿着  $X$  方向的变化率”. 为此, 可以通过外蕴的方式, 将  $M$  嵌入到某个欧氏空间中, 然后考察  $Y$  的“坐标分量”的变化率. 以下采取一种内蕴的方式. 朴素的想法是计算极限 “ $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi_t(p)} - Y_p}{t}$ ”, 其中  $\phi_t$  是  $X$  生成的流. 不幸的是  $Y_{\phi_t(p)}$  不是在  $p$  处的切向量, 从而表达式 “ $Y_{\phi_t(p)} - Y_p$ ” 根本上是无意义的. 为了修正这个问题, 需要将  $\phi_t(p)$  处的切向量  $Y_{\phi_t(p)}$  用映射  $\phi_{-t}$  “推出为”  $p$  处的切向量

$$(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} \in T_p M,$$

然后再用差商的极限去定义 “ $Y \in \Gamma^\infty(TM)$  沿着  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  的变化率”:

**定义 3.3.11. (向量场关于向量场的 Lie 导数)**

定义向量场  $Y \in \Gamma^\infty(TM)$  沿着向量场  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  的 Lie 导数为

$$\mathcal{L}_X(Y) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} - Y_p}{t}.$$



这个定义看起来非常复杂. 但事实上  $\mathcal{L}_X Y$  依然是熟悉的运算:

**定理 3.3.12. (向量场 Lie 导数的计算)**

设  $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ , 则

$$\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y].$$



**证明** 对于  $p$  附近定义的任意光滑函数  $f$ , 有

$$(d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} f = Y_{\phi_t(p)}(f \circ \phi_{-t}) = Y(f \circ \phi_{-t})(\phi_t(p)) = \phi_t^* Y(f \circ \phi_{-t}) = \phi_t^* Y \phi_{-t}^*(f).$$

由此可知

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (d\phi_{-t})_{\phi_t(p)} Y_{\phi_t(p)} f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* Y \phi_{-t}^* f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^* Y f + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y \phi_{-t}^* f = XYf - YXf.$$

这正是欲证的. □

### 注记：向量场的推出

当向量场  $X$  是完备向量场时，它生成的每个  $\phi_t : M \rightarrow M$  都是微分同胚。此时可以用“向量场的推出运算”，简化  $\mathcal{L}_X Y$  的定义。

“光滑向量场的推出”是“光滑函数的拉回”的类比。一般而言，给定光滑向量场  $X \in \Gamma^\infty(TM)$ ，无法将  $X$  “推出”得到  $N$  上的向量场：对于每个  $p \in M$ ，虽然  $d\varphi_p(X_p) \in T_{\varphi(p)}N$ ，但“ $Y_{\varphi(p)} := d\varphi_p(X_p)$ ”并不能给出  $N$  上的一个光滑向量场，因为

- 可能存在  $q \in N$  不在  $\varphi$  的像集中。
- 可能存在  $p_1, p_2 \in M$  使得  $\varphi(p_1) = \varphi(p_2)$  但是  $d\varphi_{p_1}(X_{p_1}) \neq d\varphi_{p_2}(X_{p_2})$ 。

然而，如果  $\varphi : M \rightarrow N$  是微分同胚，那么以上两个问题都不存在了，从而  $Y_{\varphi(p)} := d\varphi_p(X_p)$  定义了  $N$  上的光滑向量场。

#### 定义 3.3.13. (向量场的推出)

如果  $\varphi : M \rightarrow N$  是微分同胚，并且  $X \in \Gamma^\infty(TM)$ ，那么由

$$(\varphi_* X)_{\varphi(p)} = d\varphi_p(X_p), \quad \forall p \in M.$$

所定义的  $\varphi_* X$  是  $N$  上的光滑向量场，被称为  $X$  关于  $\varphi$  的推出。



现假设  $X$  是  $M$  上的完备向量场，并记  $\phi_t$  为它生成的流，则  $\mathcal{L}_X Y$  的定义可简化为

$$\mathcal{L}_X(Y) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi_{-t})_* Y.$$

### 作为导子的 Lie 导数

定义 2.1.4 给出了“代数  $A$  上取值于双模  $B$  的导子”的概念。因为  $\mathcal{L}_X f = Xf$ ，由命题 3.1.8 可知“作用在函数上的 Lie 导数” $\mathcal{L}_X$  是代数  $C^\infty(M)$  上取值于自身的导子。下面说明“作用在向量场上的 Lie 导数” $\mathcal{L}_X$  也是导子：它是 Lie 代数  $\Gamma^\infty(TM)$  上取值于自身的导子。

注意 Lie 代数  $\Gamma^\infty(TM)$  上的代数运算是 Lie 括号，因此 Leibniz 法则有如下形式：

#### 命题 3.3.14. (作为 $\Gamma^\infty(TM)$ 上导子的 $\mathcal{L}_X$ )

对于任意向量场  $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(TM)$ ，

$$\mathcal{L}_X([Y, Z]) = [\mathcal{L}_X(Y), Z] + [Y, \mathcal{L}_X(Z)].$$



**证明** 展开后，欲证的式子就是 Jacobi 恒等式

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

□

换言之，我们得到了向量场 Lie 括号的 Jacobi 恒等式的一个解释：它就是向量场 Lie 导数运算的 Leibniz 法则。

在本书后半部分，还将继续定义“微分形式沿着向量场的 Lie 导数”。跟此处有所不同的是，全体微分形式所组成的空间是一个分次代数，因而它上面的导子所满足的 Leibniz 法则也将略有不同。