

6.3 紧支集de Rham上同调群

接下来的几节, 我们将运用上一章所发展的积分工具来研究 de Rham 上同调理论, 尤其是最高阶 de Rham 上同调群, 并给出一系列应用. 注意在流形上的积分理论中, 被积分的对象本质上是紧支的最高阶微分形式. 因此本节首先发展由紧支微分形式生成的紧支 de Rham 上同调理论.

6.3.1 紧支集de Rham上同调

¶ 紧支集de Rham上同调

设 M 是 m 维光滑流形. 回忆一下, 微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 的支集定义为

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}.$$

和通常一样, 如果 $\text{supp}(\omega)$ 是 M 中的紧集, 则称 ω 是紧支的, 并记

$$\Omega_c^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega \text{ 是紧支集的}\}$$

为 M 上全体紧支光滑 k 次微分形式的集合. 显然

- (1) 如果 ω_1, ω_2 是紧支集的 k 次微分形式, 则 $c_1\omega_1 + c_2\omega_2$ 也是紧支集的;
- (2) 如果 ω 是紧支集的, 则 $d\omega$ 也是紧支集的.

所以对任意 k , $\Omega_c^k(M)$ 是一个线性空间(显然它是 $\Omega^k(M)$ 的线性子空间, 并且也是 $C^\infty(M)$ 模), 且在外微分作用下这些向量空间构成紧支 de Rham 上链复形

$$0 \rightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^2(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^3(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_c^m(M) \rightarrow 0.$$

于是类似于通常的 de Rham 理论, 可以记

$$Z_c^k(M) = \{\omega \in \Omega_c^k(M) \mid d\omega = 0\}$$

(其元素称为紧支闭 k 形式) 以及

$$B_c^k(M) = \{\omega \in \Omega_c^k(M) \mid \text{存在 } \eta \in \Omega_c^{k-1}(M) \text{ 使得 } \omega = d\eta\}$$

(其元素称为紧支恰当 k 形式), 并定义相应的上同调群:

定义 6.3.1. (紧支集de Rham上同调)

设 M 是光滑流形, 则称商空间

$$H_c^k(M) = \frac{Z_c^k(M)}{B_c^k(M)}$$

为 M 的 k 阶紧支集de Rham上同调群.



注 6.3.2.

- (1) 类似于通常的 de Rham 上同调群, 只需考虑 $0 \leq k \leq m$.
- (2) 显然如果 M 是紧流形, 则对任意 k 有 $\Omega_c^k(M) = \Omega^k(M)$, 从而

$$H_c^k(M) = H_{dR}^k(M), \quad \forall k.$$

- (3) 根据定义, $Z_c^k(M) = Z^k(M) \cap \Omega_c^k(M)$, 所以“紧支闭”等价于“紧支且闭”. 然

而, 一般来说“紧支且恰当”微分形式未必是“紧支恰当”的, 即只能得到

$$B_c^k(M) \subsetneq B^k(M) \cap \Omega_c^k(M).$$

例如, 令 g 为定义在 \mathbb{R} 上且满足“当 $x \leq 0$ 时 $g(x) = 0$, 当 $x \geq 1$ 时 $g(x) = 1$ ”的光滑函数, 并记 $f = g'$, 则 $f(x)dx = dg \in B^1(\mathbb{R}) \cap \Omega_c^1(\mathbb{R})$, 但由 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \neq 0$ 知 $f(x)dx \notin B_c^1(\mathbb{R})$.

(4) 对于 $k = 0$, 根据定义

$$H_c^0(M) = Z_c^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid df = 0 \text{ 且 } \text{supp}(f) \text{ 是紧集}\}.$$

显然 $df = 0$ 当且仅当 f 是局部常值的, 即 f 在每个连通分支上都是常值的. 另一方面, 局部常值的紧支集函数在任意非紧连通分支上必定恒为零, 所以

$$H_c^0(M) \simeq \bigoplus_{\text{紧连通分支}} \mathbb{R}.$$

特别地, 若 M 具有 K_c 个紧连通分支, 其中 $K_c < \infty$, 则 $H_c^0(M) \simeq \mathbb{R}^{K_c}$.²

(5) 和通常的情况一样, 可以对于同一个光滑流形各阶紧支 de Rham 上同调群之间定义上积运算

$$\cup: H_c^k(M) \times H_c^l(M) \rightarrow H_c^{k+l}(M), \quad (\omega, \eta) \mapsto [\omega \wedge \eta]$$

使得 $H_c^*(M) = \bigoplus_{k=0}^m H_c^k(M)$ 是分次环.

事实上, 还可以在通常 de Rham 上同调群和紧支 de Rham 上同调群之间定义上积

$$\cup: H_c^k(M) \times H_{dR}^l(M) \rightarrow H_c^{k+l}(M)$$

和

$$\cup: H_{dR}^k(M) \times H_c^l(M) \rightarrow H_c^{k+l}(M).$$

不难证明它们都是良定的. 它们在本章第 5 节将发挥巨大作用.

¶ H_c^k 的函子性

跟 de Rham 上同调类似, 很自然的考虑紧支 de Rham 上同调 H_c^k 的函子性. 此时立刻可以发现紧支 de Rham 上同调跟普通 de Rham 上同调的差别: 设 $\varphi: M \rightarrow N$ 是光滑映射. 则根据定义,

$$\text{supp}(\varphi^*\omega) \subset \varphi^{-1}(\text{supp}(\omega)).$$

所以即使 $\omega \in \Omega_c^k(N)$, 也有可能 $\varphi^*\omega \notin \Omega_c^k(M)$. 换言之, 光滑映射不一定将 N 的紧支同调类拉回为 M 上的紧支上同调类! 于是, 紧支 de Rham 上同调 H_c^k 不再是从光滑流形范畴到线性空间范畴的函子!

函子性的缺失, 造成的后果是显而易见的: 在 de Rham 上同调中运用函子性 (即拉回映射) 所证明的诸如同伦不变性、Mayer-Vietoris 序列等重要工具, 对于紧支 de Rham

²注意无穷个线性空间的直和 \oplus 与直积 \otimes 的差别: 直和表示“最多有限项非零”, 而直积则没有该限制, 故此处用直和, 而注 6.1.2 中用直积.

上同调都不再成立. 不过, 事情还没有那么糟糕: 如果对于光滑映射加上一个“小小的”限制, 即假设 $\varphi: M \rightarrow N$ 是逆紧的, 则紧支微分形式 $\omega \in \Omega_c^k(N)$ 的拉回 $\varphi^*\omega$ 仍然具有紧支集. 不难验证此时映射

$$\varphi^*: H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$$

仍然是良定的线性映射, 且对应关系 $\varphi \rightsquigarrow \varphi^*$ 满足(反变)函子性, 即

(a) $\text{Id}^* = \text{Id}$.

(b) 若 $\varphi: M \rightarrow N$ 和 $\psi: N \rightarrow N$ 都是逆紧光滑映射, 则 $\psi \circ \varphi$ 也是逆紧光滑映射, 且 $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

换言之, H_c^k 是从“逆紧光滑范畴”(其中对象为光滑流形, 而态射为光滑流形之间的逆紧光滑映射)到“线性空间范畴”的一个反变函子. 由于微分同胚都是逆紧映射, 所以从函子性立刻可得: 微分同胚的光滑流形具有相同的紧支上同调群.

稍微改造一下定理 6.1.19 的证明过程(主要是证明中用到的光滑映射性质改为相应的逆紧光滑映射性质), 就可以证明逆紧光滑映射所诱导紧支 de Rham 同调群之间的映射具有逆紧同伦不变性: (留作练习)

定理 6.3.3. (紧支 de Rham 上同调: 逆紧映射的逆紧同伦不变性)

如果逆紧光滑映射 $\varphi_0, \varphi_1: M \rightarrow N$ 是逆紧同伦的^a, 则它们具有相同的诱导映射

$$\varphi_1^* = \varphi_0^*: H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M).$$

^a即存在逆紧映射 $\Phi: M \times [0, 1] \rightarrow N$ 是连接 φ_0 和 φ_1 的同伦.



另一方面, 可以证明连续映射 Whitney 逼近定理的如下变体:

定理 6.3.4. (逆紧连续映射 Whitney 逼近定理)

光滑流形之间的逆紧连续映射一定逆紧同伦于某个逆紧光滑映射。



由于任何同胚都是逆紧映射, 所以结合以上事实可知紧支 de Rham 上同调群仍然是拓扑不变量:

推论 6.3.5. (紧支 de Rham 上同调的拓扑不变性)

如果 M 同胚于 N , 则对任意 k , 均有 $H_c^k(M) \simeq H_c^k(N)$.



不过, 跟 de Rham 上同调情形不同的是, 对于紧支 de Rham 上同调而言, 空间同伦不变性不再成立, 因为同伦的两个空间之间互为“同伦逆”的映射未必是逆紧映射. 事实上, 这不是因为工具不够强大, 而是因为敌人太狡猾: 由于不同维数的欧氏空间是同伦等价的, 所以根据下面 \mathbb{R}^m 的计算结果可知, 紧支 de Rham 上同调群根本就不是空间同伦不变量.

6.3.2 紧支集de Rham上同调的计算

¶ 例: $H_c^k(\mathbb{R}^m)$

下面计算欧氏空间 \mathbb{R}^m 的紧支集上同调 $H_c^k(\mathbb{R}^m)$, 其中 $m \geq 1$ 且 $0 \leq k \leq m$.

(1) 首先计算 $H_c^0(\mathbb{R}^m)$. 由 $B_c^0(\mathbb{R}^m) = 0$ 可知

$$H_c^0(\mathbb{R}^m) = Z_c^0(\mathbb{R}^m) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \mid df = 0 \text{ 且 } \text{supp}(f) \text{ 是紧集}\}.$$

由于 \mathbb{R}^m 上不存在非零的紧支常值函数, 所以 $H_c^0(\mathbb{R}^m) = 0$.

(2) 接着计算 $H_c^1(\mathbb{R}^m)$, 其中 $m > 1$. 为此, 需要借助如下工具:

基本想法: 将 \mathbb{R}^m 微分同胚地映为 $S^m - \{N\}$ (例如通过球极投影的逆, 参见例1.2.11), 其中 $N = (0, \dots, 0, 1)$ 是 S^m 的“北极点”, 然后将 \mathbb{R}^m 的紧支微分形式通过零扩张对应为 S^m 上支在点 N 之外的微分形式, 从而可以使用 S^m 的 de Rham 上同调群的信息.

严格表述: 令 $\varphi: S^m - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为微分同胚, $\iota: S^m - \{N\} \hookrightarrow S^m$ 为包含映射. 令 $\iota_*: \Omega_c^k(S^m - \{N\}) \rightarrow \Omega^k(S^m)$ 为标准的零扩张映射. 对于任意 $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^m)$, 令 $\tilde{\omega} = \iota_*\varphi^*\omega$. 于是 \mathbb{R}^m 上的每个紧支微分形式都唯一对应了一个 S^m 上支在点 N 之外的微分形式, 且反之亦然.

注意零扩张映射 ι_* 跟拉回映射一样, 也跟外微分可交换: $d\iota_* = \iota_*d$. 于是若 ω, η 是 \mathbb{R}^m 上的紧支微分形式且 $d\eta = \omega$ (此处 d 是 \mathbb{R}^m 上的外微分), 则它们对应的 S^m 上的微分形式 $\tilde{\omega}, \tilde{\eta}$ 也满足同样的关系:

$$\tilde{\omega} = \iota_*\varphi^*\omega = \iota_*\varphi^*d\eta = d\iota_*\varphi^*\eta = d\tilde{\eta}$$

(最后两个 d 是 S^m 上的外微分). 特别地, ω 是 \mathbb{R}^m 的闭形式当且仅当 $\tilde{\omega}$ 是 $S^m - \{N\}$ 的闭形式.

任取 $\omega \in Z_c^1(\mathbb{R}^m)$, 并取 N 的某个连通开邻域 U 使得 ω 对应的 $\tilde{\omega} \in Z^1(S^m)$ 的支集落在 $S^m - U$ 中. 因为 $H_{dR}^1(S^m) = 0$, 所以闭的1次微分形式 $\tilde{\omega}$ 是恰当的, 即存在 $\tilde{f} \in C^\infty(S^m)$ 使得 $\tilde{\omega} = d\tilde{f}$. 由于在 U 中有 $d\tilde{f} = \tilde{\omega} = 0$, 所以 \tilde{f} 在 U 上等于某个常值 c . 令 $\tilde{f}_1 = \tilde{f} - c$, 则 \tilde{f}_1 在 U 中恒为0, 且 $d\tilde{f}_1 = \tilde{\omega}$. 最后令

$$f_1 = (\varphi^{-1})^*(\iota_*)^{-1}\tilde{f}_1,$$

则 $f_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, 且 $df_1 = \omega$. 故 $\omega \in B_c^1(\mathbb{R}^m)$, 即当 $m > 1$ 时 $H_c^1(\mathbb{R}^m) = 0$.

(3) 将该方法稍微变通一下, 可以计算 $H_c^k(\mathbb{R}^m)$, 其中 $1 < k < m$. 为此, 任取 $\omega \in Z_c^k(\mathbb{R}^m)$ 并考虑其对应的 $\tilde{\omega} \in Z^k(S^m)$, 后者的支集落在某个形如 $S^m - U$ 的集合中. 因为 $H_{dR}^k(S^m) = 0$, 所以存在 $\tilde{\eta} \in \Omega^{k-1}(S^m)$ 使得 $\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$.

核心观察:

通过缩小 N 的邻域 U , 可以假设 U 是可缩的, 从而 $H_{dR}^{k-1}(U) = \{0\}$. 因为在 U 中 $d\tilde{\eta} = \tilde{\omega} = 0$, 所以 $\tilde{\eta}$ 在 U 中是恰当的, 即存在 $\tilde{\mu} \in \Omega^{k-2}(U)$ 使得 $\tilde{\eta} = d\tilde{\mu}$.

取 S^m 上的一个鼓包函数 ρ , 使得

$$\text{supp}(\rho) \subset U, \quad \text{且在 } N \text{ 点附近有 } \rho \equiv 1.$$

最后令 $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta} - d(\rho\tilde{\mu}) \in \Omega^{k-1}(S^m)$, 则 $\tilde{\eta}_1$ 在 N 附近恒为 0, 且 $d\tilde{\eta}_1 = d\tilde{\eta} = \tilde{\omega}$. 于是若令 $\eta_1 = (\varphi^{-1})^*(\iota_*)^{-1}\tilde{\eta}_1$, 则 $\eta_1 \in \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^m)$, 且 $d\eta_1 = \omega$. 故 $\omega \in B_c^k(\mathbb{R}^m)$. 这说明当 $1 < k < m$ 时同样有 $H_c^k(\mathbb{R}^m) = 0$.

- (4) 然后计算 $H_c^1(\mathbb{R})$, 其方法类似于之前计算 S^1 的de Rham上同调群的方法, 即用最高阶形式的积分. 为此, 考虑积分映射

$$\int_{\mathbb{R}} : Z_c^1(\mathbb{R}) = \Omega_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} \omega.$$

显然这个映射是线性满射. 而且由微积分基本定理, 该映射在 $B_c^1(\mathbb{R})$ 上为零, 因此诱导了线性满射

$$\int_{\mathbb{R}} : H_c^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

进一步, 如果 $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 0$, 其中 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 则函数 $g(t) := \int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ 是 \mathbb{R} 上的紧支光滑函数, 而且 $dg = f(t)dt$. 换言之, $f(t)dt \in B_c^1(\mathbb{R})$, 即在 $H_c^1(\mathbb{R})$ 中 $[f(t)dt] = 0$. 所以 $\int_{\mathbb{R}}$ 是 $H_c^1(\mathbb{R})$ 和 \mathbb{R} 之间的同构, 即 $H_c^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

- (5) 最后, 综合上述两种方法, 对于 $m \geq 2$ 计算 $H_c^m(\mathbb{R}^m)$. 跟 $m = 1$ 情形类似, 可得良定的线性满射

$$\int_{\mathbb{R}^m} : H_c^m(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}.$$

下证它是同构, 即证:

目标: 若 $\omega \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^m) = Z_c^m(\mathbb{R}^m)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^m} \omega = 0$, 则 $\omega \in B_c^m(\mathbb{R}^m)$.

和(2),(3)一样, 依然把 \mathbb{R}^m 视为 $S^m - \{N\}$, 并把 \mathbb{R}^m 中的紧支 m 形式 ω 对应成为 S^m 中支在 N 点之外的 m 形式 $\tilde{\omega}$. 则

$$\int_{S^m} \tilde{\omega} = \int_{S^m} \iota_* \varphi^* \omega = \int_{S^m - \{N\}} \varphi^* \omega = \int_{\mathbb{R}^m} \omega = 0.$$

核心观察:

在 S^m 上依然有良定的线性满射

$$\int_{S^m} : H_{dR}^m(S^m) \rightarrow \mathbb{R}.$$

由于 $H_{dR}^m(S^m) \simeq \mathbb{R}$, 所以它事实上是同构. 于是由 $\int_{S^m} \tilde{\omega} = 0$ 可知

$[\tilde{\omega}] = 0$, 即存在 $\tilde{\eta} \in \Omega^{m-1}(S^m)$ 使得 $\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$.

接着重复之前的论证: 取 N 在 S^m 中的一个可缩开邻域 U , 使得 $\tilde{\omega}$ 在 U 上为零. 然后将 $\tilde{\eta}$ 调整为 $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta} - d(\rho\tilde{\mu})$, 其中 ρ 是鼓包函数, 而 $\tilde{\mu} \in \Omega^{m-2}(U)$ 满足 “在 U 上有 $d\tilde{\mu} = \tilde{\eta}$ ”, 并令 $\eta_1 = (\varphi^{-1})^*(\iota_*)^{-1}\tilde{\eta}_1$. 则 $\eta_1 \in \Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ 且 $d\eta_1 = \omega$, 从而 $\omega \in B_c^m(\mathbb{R}^m)$.

总结上述计算结果, 可得

定理 6.3.6. (紧支 de Rham 上同调群的 Poincaré 引理)

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$



注意在计算 $H_c^k(\mathbb{R}^m)$ 的过程中, 使用了两种技术, 即零扩张与积分. 它们分别可以发展到更一般情形, 前者给出紧支 de Rham 上同调群情形 Mayer-Vietoris 序列的一个变体, 而后者则是计算最高阶紧支 de Rham 上同调群的工具.

紧支 de Rham 上同调群版本的 Mayer-Vietoris 序列

在构造 Mayer-Vietoris 序列时, 用的是 M 的开子集 $U, V, U \cap V$, 此时不能用包含映射(对于开子集而言, 它一般不是逆紧的)的拉回(对于开子集而言就是限制映射), 因为紧支微分形式限制在开子集上未必依然紧支. 不过上述 $H_c^k(\mathbb{R}^m)$ 的计算过程给我们指了另一条路: 设 U 是 M 的开子集, $\iota: U \hookrightarrow M$ 是包含映射, 则可以通过“零扩张”将 U 上 k 次光滑紧支微分形式扩张为 M 上的 k 次光滑紧支微分形式, 从而可以定义“推出”映射

$$\iota_*: \Omega_c^k(U) \rightarrow \Omega_c^k(M).$$

不难发现 $d\iota_* = \iota_*d$, 所以 ι_* 诱导了线性映射

$$\iota_*: H_c^k(U) \rightarrow H_c^k(M).$$

下设 U, V 是 M 的开覆盖. 利用推出可以很容易定义

$$\beta_k^c: H_c^k(U \cap V) \rightarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V), \quad \beta_k^c([\omega]) = ((j_1)_*[\omega] - (j_2)_*[\omega])$$

以及

$$\alpha_k: H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \rightarrow H_c^k(M), \quad \alpha_k([\omega_1], [\omega_2]) = (\iota_1)_*[\omega_1] + (\iota_2)_*[\omega_2].$$

由此可以构建连接同态 $\delta_k: H_c^k(M) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cap V)$ 如下:

取单位分解 $\{\rho_U, \rho_V\}$. 对任意 $\omega \in Z_c^k(M)$, 有 $\rho_U \omega \in Z_c^k(U)$, $\rho_V \omega \in Z_c^k(V)$.

因为 $d(\rho_U \omega) = -d(\rho_V \omega)$, 所以 $d(\rho_U \omega) \in Z_c^{k+1}(U \cap V)$. 定义

$$\delta_k^c([\omega]) := [d(\rho_U \omega)].$$

可以验证 δ_k^c 是良定的.

并得到相应的 Mayer-Vietoris 序列³:

定理 6.3.7. (紧支 de Rham 上同调的 Mayer-Vietoris 序列)

设 U, V 是 M 的开覆盖, 则

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{k-1}^c} H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{\beta_k^c} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{\alpha_k^c} H_c^k(M) \xrightarrow{\delta_k^c} H_c^{k+1}(U \cap V) \xrightarrow{\beta_{k+1}^c} \cdots$$

是正合列.



³注意对于固定的 k , 这个紧支集 de Rham 上同调群的 Mayer-Vietoris 序列与通常 de Rham 上同调群的 Mayer-Vietoris 序列具有“相反的方向”, 因为此处用的是扩张而不是限制.

特别地, 结合定理 6.3.6, 可以很容易用归纳法证明

定理 6.3.8. (有限好覆盖 \rightarrow 有限维)

如果 M 有一个有限好覆盖, 则对所有 k 都有 $\dim H_c^k(M) < \infty$.

以及证明

定理 6.3.9. (紧支 de Rham 上同调群的 Künneth 公式)

如果 M, N 都具有“有限好覆盖”, 则 $H_c^*(M \times N) = H_c^*(M) \otimes H_c^*(N)$.

换言之, 对所有 $0 \leq k \leq \dim M + \dim N$, 有

$$H_c^k(M \times N) \simeq \bigoplus_{i=0}^k H_c^i(M) \otimes H_c^{k-i}(N).$$

积分映射

在计算 $H_c^m(\mathbb{R}^m)$ 时, 主要的工具是积分映射. 下面把该工具发展到一般的定向流形上. 为此, 设 M 是 m 维连通定向流形, $\omega \in \Omega_c^m(M)$ 是具有紧支集的最高阶微分形式, 则 ω 是闭的, 且有积分映射

$$\int_M : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_M \omega.$$

如果进一步设 $\omega \in B_c^m(M)$, 即存在 $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$ 使得 $\omega = d\eta$, 则可以取 M 中带有光滑边界的紧集 K , 使得 $K \supset \text{supp}(\eta)$. 根据 Stokes 公式, 有

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_K d\eta = \int_{\partial K} \eta = 0.$$

所以 \int_M 诱导了线性映射

$$\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

命题 6.3.10. (积分映射是满射)

设 M 是 m 维连通定向光滑流形, 则上述积分映射 $\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 是满射.

证明 取定 M 上的体积形式 ω . 对任意 c , 不难构造支集落在一个坐标卡 U 中的紧支光滑函数 f , 使得 $\int f\omega = c$. □

由此可以给出特定流形上恰当紧支最高阶微分形式的积分刻画:

推论 6.3.11. (积分为零的最高阶形式是恰当的)

设 M 是 m 维连通定向光滑流形, $\omega \in \Omega_c^m(M)$, 且 $H_c^m(M) \simeq \mathbb{R}$. 则 $\omega \in B_c^m(M)$ 当且仅当 $\int_M \omega = 0$.

证明 由 \int_M 是线性满射以及条件“ $H_c^m(M) \simeq \mathbb{R}$ ”可知 \int_M 是线性同构. 所以 $\int_M \omega = 0$ 当且仅当 $[\omega] = 0$, 即 ω 是恰当的. □