3.4 分布

3.4.1 分布

¶ 分布

设 M 是 m 维光滑流形，则对于 M 上的任意光滑向量场 X 以及任意 $p \in M$，均存在唯一的从 p 点出发的极大积分曲线 γ_p, 并且

- 若 $X_p = 0$, 那么 γ_p 是常曲线 $\gamma_p(t) \equiv p$，从而其像是 0-维点；
- 若 $X_p \neq 0$, 那么 γ_p 是经过 p 的 1 维浸入子流形，从而其像局部上是 1 维曲线。

本节的目的是发展“向量场 $\leftrightsquigarrow$ 积分曲线”对应关系的高维版本. 为此，首先需要给出向量场的“高维”对应：

定义 3.4.1. （光滑分布）

令 M 为光滑流形.

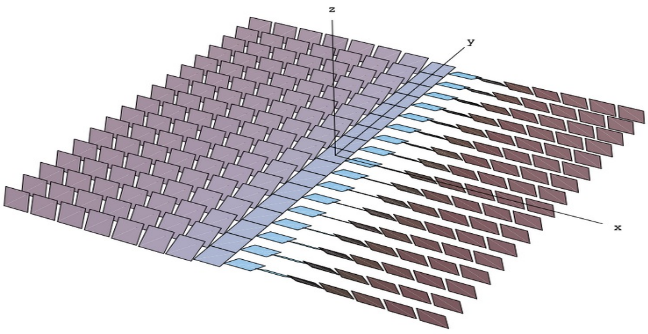
(1) 若对任意点 $p \in M$，均指定 T_pM 的一个 k 维线性子空间 $\mathcal{V}_p$，则称 $\mathcal{V}$ 为 M 上的秩为 k 的 **分布**.[a]

(2) 若 $\mathcal{V}$ 是 M 上的秩为 k 的分布，且对于每一点 $p \in M$, 存在 p 的邻域 U 和 U 上的 k 个光滑向量场 $X_1, \cdots, X_k$ 使得对于每点 $q \in U$, $\{X_1(q), \cdots, X_k(q)\}$ 构成 $\mathcal{V}_q$ 的一组基，则称 $\mathcal{V}$ 为**光滑分布**.

若 X 是 M 上的一个向量场，$\mathcal{V}$ 是 M 上的一个分布，且对于任意 $p \in M$，有 $X_p \in \mathcal{V}_p$，则称向量场 X **属于** 分布 $\mathcal{V}$，并记作 $X \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$.

[a] 注意在分析中以及在概率论中，“分布”一词各有其不同的含义。

在下文中, 如无例外说明，所考虑的分布都是光滑的.



接着给出积分曲线的“高维对应”：

定义 3.4.2. （积分流形）

设 $\mathcal{V}$ 是 M 上的秩为 k 的分布.

(1) 若 $\iota : N \hookrightarrow M$ 是 k 维浸入子流形，且对于任意 $p \in N$, $d\iota_N : T_pN \to T_pM$ 的像集是 $\mathcal{V}_p$，则称 N 是 $\mathcal{V}$ 的**积分流形**.

(2) 若对于任意 $p \in M$，都存在 $\mathcal{V}$ 的积分流形过 p 点，则称分布 $\mathcal{V}$ 是**可积的**.

注意若 N_1, N_2 都是 $\mathcal{V}$ 的过点 p 的积分流形，则 $N_1 \cup N_2$ 也是 $\mathcal{V}$ 的过点 p 的积分流形。

下面这个引理给出了可积分布中向量场的积分曲线跟该分布的积分流形的关系：

引理 3.4.3.（积分曲线与积分流形）

设 $\mathcal{V}$ 是可积分布，X 是属于 $\mathcal{V}$ 的光滑向量场。

(1) 对于 $\mathcal{V}$ 的任意积分流形 N，存在 N 上的光滑向量场 $\widetilde{X}$ 使得 $d\iota_p(\widetilde{X}_p) = X_p$ 对于任意 $p \in N$ 成立.

(2) 对于任意 $p \in N$，设 γ_p 为 X 的经过点 p 的积分曲线，则 ε 充分小时 $\gamma_p((-\varepsilon, \varepsilon))$ 位于 $\mathcal{V}$ 的经过点 p 的积分流形上. ♢

证明 假设 $\iota : N \hookrightarrow M$ 是 $\mathcal{V}$ 的积分流形且 $p \in N$. 根据积分流形的定义，对于任意 $p \in N = \iota(N)$，存在 $\widetilde{X}_p \in T_pN$ 使得 $X_p = d\iota_p(\widetilde{X}_p)$. 取 N 的坐标邻域 (φ, U, V) 使得 $\iota(U)$ 是 M 的嵌入子流形，且取 M 上相容坐标卡使得 U 由 $x^{k+1} = \cdots = x^m = 0$ 给出。则向量场 $\widetilde{X}$ 在相应的 N 上的坐标向量场 $\partial_1, \cdots, \partial_k$ 下的系数跟 X 在 M 的坐标向量场 $\partial_1, \cdots, \partial_m$ 下的系数一致（其中 X 在 $\partial_{k+1}, \cdots, \partial_m$ 下的系数为 0）。于是由 X 的光滑性可知 $\widetilde{X}$ 是 N 上的光滑向量场，即 (1) 成立。特别地，$\widetilde{X}$ 在 N 中有唯一的过 p 点的极大积分曲线，而由定义该曲线也是 X 在 M 中过 p 点的积分曲线，从而由积分曲线的唯一性可知 (2) 成立。 □

¶ 分布可积性的例子

例 3.4.4. 向量场 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ 张成 $\mathbb{R}^m$ 中的秩为 k 的分布 $\mathcal{V}$. 它是可积的，其积分流形是由以下方程组定义的“超平面”

$$x^i = c^i \quad (k+1 \le i \le m).$$

【根据局部 Frobenius 定理（见定理3.4.19），任意可积分布局部都能表示成这种形式.】

例 3.4.5. M 上的任意非 0 向量场 X 可以生成一个秩为 1 的分布 $\mathcal{V}$，其中 $\mathcal{V}_p = \mathbb{R} \cdot X_p$. 注意对于任意 $f \in C^\infty(M)$，fX 是属于 $\mathcal{V}$ 的向量场，且对于任意恒非零的光滑函数 f，fX 也生成同一个分布 $\mathcal{V}$. 该分布总是可积的: X 的积分曲线的像集就是 $\mathcal{V}$ 的积分流形.

例 3.4.6. 积分流形可以不是 M 的嵌入子流形. 例如，考虑 $M = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}^2_y$. 固定任意无理数 a, 非 0 向量场

$$X^a = (x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}) + a(y^2 \frac{\partial}{\partial y^1} - y^1 \frac{\partial}{\partial y^2})$$

的积分流形是 M 上的“稠密曲线”. (它们都是浸入子流形.)

显然，对于 M 上任意一个秩为 1 的分布 $\mathcal{V}$，存在 M 上的非 0 向量场 X 使得 X 生成的分布就是 $\mathcal{V}$. 于是任意秩为 1 的分布一定是可积的。不过，秩大于 1 的分布有可能不是可积的：

例 3.4.7. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上由以下两个向量场张成的光滑分布 $\mathcal{V}$，

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

下证它没有经过原点的积分流形. 事实上，假设 $\mathcal{V}$ 是可积的，且记 $\mathcal{V}$ 的包含原点的积分流形为 N，则根据引理3.4.3，N 必然也包含向量场 X_1 的经过原点的积分曲线, 从而

$$N \supset \{(t,0,0) \mid |t| < \varepsilon.$$

类似地，对于任意 t，N 必然包含向量场 X_2 的经过 $(t,0,0)$ 的积分曲线，从而

$$N \supset \{(t,s,0) \mid |t|,|s| < \varepsilon.\}$$

换句话说, N 包含了 x^1-x^2 平面中原点的一个开邻域. 这说明当 t,s 充分小时，对于 $p=(t,s,0)$，向量 $\frac{\partial}{\partial x^1}$ (作为 N 的切向量) 也在 $\mathcal{V}_p$ 中，但这在 $s \neq 0$ 时并不成立，矛盾。

¶ Frobenius 条件和对合分布

因为不是所有分布都可积，因此很自然要问：何时分布是可积的？一个必要条件是容易发现的. 直观上，如果 M 两个向量场都与 M 的子流形 N 相切，那么它们的 Lie 括号也应该和 N 相切. 于是不难得出

定理 3.4.8. （可积分布中向量场的 Lie 括号）
如果分布 $\mathcal{V}$ 是可积的, 则对于任意 $X,Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$, 均有 $[X,Y] \in \Gamma^\infty(\mathcal{V})$. ♡

证明 根据引理3.4.3，存在 $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \Gamma^\infty(TN)$ 使得对于任意 $p \in N = \iota(N)$，

$$X_p = d\iota_p(\widetilde{X}_p) \quad 且 \ Y_p = d\iota_p(\widetilde{Y}_p).$$

于是从习题可知对于任意 $p \in N$,

$$[X,Y]_p^M = d\iota_p([\widetilde{X},\widetilde{Y}]_p^N) \in \mathcal{V}_p.$$

因此 $[X,Y]$ 也属于 $\mathcal{V}$. □

用代数的语言来说，就是对于可积分布 $\mathcal{V}$ 而言，$\Gamma^\infty(\mathcal{V})$ 是 $\Gamma^\infty(TM)$ 的 Lie 子代数。

定义 3.4.9. （对合分布）
如果分布 $\mathcal{V}$ 满足

$$\boxed{\textbf{Frobenius 条件}: \text{若 } X,Y \in \Gamma^\infty(TM) \text{ 属于 } \mathcal{V}, \text{则 } [X,Y] \text{ 也属于 } \mathcal{V}},$$

那么称 $\mathcal{V}$ 是对合的。 ♣

例 3.4.10. 任意秩为 1 的分布总是是对合的：若 $\mathcal{V}$ 在开集 U 上是由向量场 X 生成的分布，则

$$[fX,gX] = (fX(g) - gX(f))X$$

在 U 中依然在由 X 生成的分布 $\mathcal{V}$ 里.

虽然根据定义，要证明 $\mathcal{V}$ 是对合的，需要对于所有的 $X,Y \in \mathcal{V}$ 验证 Frobenius 条件，但下面的引理说明，只要在任意点附近对 $\mathcal{V}$ 中的一组局部光滑基中的向量场验证 Frobenius 条件即可。其证明留作习题：

引理 3.4.11.（对合性与基）

设 $\mathcal{V}$ 为 M 上秩为 k 的分布. 若对于每点 $p\in M$, 均存在 p 的邻域 U 和 k 个在 U 上逐点线性无关的光滑向量场 $X_1,\cdots,X_k\in\Gamma^\infty(\mathcal{V})$，使得对于所有 $1\le i,j\le k$，$[X_i,X_j]$ 属于 $\mathcal{V}$，则 $\mathcal{V}$ 是对合的. ♢

例 3.4.12. $\mathbb{R}^n$ 中由 $\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_k}$ 张成的分布是对合的，因为

$$[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}]=0,\qquad \forall 1\le i,j\le k.$$

例 3.4.13. $\mathbb{R}^n(n\ge 3)$ 中由

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x^1}+x^2\frac{\partial}{\partial x^3},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x^2}$$

张成的分布 $\mathcal{V}$ 不是对合的，因为

$$[X_1,X_2]=-\frac{\partial}{\partial x^3}$$

不在 $\mathcal{V}$ 中.

¶ Frobenius 定理

根据定理3.4.8，任意可积分布都是对合的. 本节的主要定理是证明反过来也成立，即任意对合分布都是可积的:

定理 3.4.14.（整体 Frobenius 定理）

设 $\mathcal{V}$ 为秩为 k 对合分布. 那么对于任意 $p\in M$, 都存在过 p 的 $\mathcal{V}$ 的唯一的极大连通积分流形(特别地, $\mathcal{V}$ 是可积的). ♡

在证明之前给出几个例子。

例 3.4.15. 令 $f:M\to N$ 为淹没. 对于任意 $p\in M$, 令 $\mathcal{V}_p=\ker(df_p)$. 那么

- $\mathcal{V}$ 是分布，这是由于对于所有的 $p\in M$，$\dim\mathcal{V}_p=\dim M-\dim N$ 是常数.
- $\mathcal{V}$ 是对合的: 如果 X,Y 是属于 $\mathcal{V}$ 的向量场, 那么对于所有的 $p\in M$，$df_p(X_p)=df_p(Y_p)=0$. 于是对于任意 $g\in C^\infty(N)$, $X(g\circ f)(p)=df_p(X_p)(g)=0$ 对于所有 p 成立, 即 $X(g\circ f)=0$. 类似地 $Y(g\circ f)=0$. 于是
$$df_p([X,Y]_p)(g)=[X,Y]_p(g\circ f)=X_p(Y(g\circ f))-Y_p(X(g\circ f))=0.$$
- $\mathcal{V}$ 是可积的: 经过 $p\in M$ 的积分流形是子流形 $f^{-1}(f(p))$ 的连通分支.

例 3.4.16. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中由 $M=\mathbb{R}^3-\{x^1=x^2=0\}$ 上的向量场

$$X_1=x^1\frac{\partial}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial}{\partial x^1},\qquad X_2=\frac{\partial}{\partial x^3}$$

张成的分布 $\mathcal{V}$. 因为 $[X_1,X_2]=0$, $\mathcal{V}$ 是对合的. 它的积分流形是什么? 首先计算 X_1 和 X_2 的积分曲线. X_1 的经过点 (a^1,a^2,a^3) 的积分曲线是 x^3-平面上以原点为圆心的圆周, 而 X_2 的积分曲线是平行于 x^3-轴的直线. 由于对于任意 t,s，点 $\varphi_t^{X_1}(\varphi_s^{X_2}(a^1,a^2,a^3))$ 都在该分布的经过 (a^1,a^2,a^3) 的积分流形中，所有这些积分流形恰好是所有以 x^3-轴为中心的圆柱面.

3.4.2 Frobenius 定理的证明

¶ 向量场在局部上的拉直

首先证明以下有用的引理:

引理 3.4.17.（拉直一个向量场） 设 X 为 M 上的光滑向量场，且 $X_p \neq 0$. 那么存在 p 附近的局部坐标卡 (φ, U, V) 使得在 U 上有 $X = \partial_1$. ♢

证明 选择 p 附近的局部坐标卡 $(\widetilde{U}, y^1, \cdots, y^n)$ 使得 $X_p = \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p$. 在 $\widetilde{U}$ 上有 $X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial y^i}$, 其中 ξ_i 是 $\widetilde{U}$ 上的光滑函数. 必要时缩小 $\widetilde{U}$，可以假设在 $\widetilde{U}$ 上有 $\xi_1 \neq 0$. 考虑以下常微分方程组

$$\frac{dy^i}{dy^1} = \frac{\xi_i(y^1; y^2, \cdots, y^n)}{\xi_1(y^1; y^2, \cdots, y^n)}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

根据常微分方程组的基本理论，局部上对于任意初始值 $(z^2, \cdots, z^n)$, 其中 $|z| < \varepsilon$, 以上方程组都有满足初值条件

$$y^i(0; z^2, \cdots, z^n) = z^i, \quad 2 \leq i \leq n$$

的唯一解

$$y^i = y^i(y^1; z^2, \cdots, z^n), \quad |y^1| < \varepsilon,$$

且其中 y^i 光滑地依赖于 y^1 和 z^j. 考虑坐标变换

$$\begin{aligned} y^1 &= z^1, \\ y^i &= y^i(z^1; z^2, \cdots, z^n), \quad 2 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

由于 Jacobi 矩阵

$$\left.\frac{\partial(y^1, \cdots, y^n)}{\partial(z^1, \cdots, z^n)}\right|_{z^1=0} = 1,$$

局部可以进行从 $(y^1, \cdots, y^n)$ 到 $(z^1, \cdots, z^n)$ 坐标变换，即存在 p 的邻域 $U \subset \widetilde{U}$, 它的局部坐标为 $(z^1, \cdots, z^n)$，且在新坐标卡下，

$$X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial y^i} = \xi_1 \sum \frac{\partial y_i}{\partial z^1} \frac{\partial}{\partial y^i} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z^1}.$$

最后，令 $x^1(z^1, \cdots, z^n) = \int_0^{z_1} \frac{dt}{\xi_1(t, z^2, \cdots, z^n)}$ 并且对于 $j \geq 2$ 令 $x_j = z_j$, 那么 $\{x^1, \cdots, x^n\}$ 是 U 上的局部坐标函数，且在 U 上有 $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. □

注 3.4.18. 更一般地，如果 $\{X_1, \cdots, X_k\}$ 是处处线性无关的向量场，且 $[X_i, X_j] = 0$ 对于任意 $1 \leq i, j \leq k$ 都成立，那么存在局部坐标卡使得 $X_i = \partial_i$（$1 \leq i \leq k$）. 证明留作练习. 注意到条件 $[X_i, X_j] = 0$ 是必要的，因为在任意局部坐标卡中有 $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

¶ 局部 Frobenius 定理: “拉直”对合分布

在证明整体 Frobenius 定理之前，首先证明以下的局部版本: 任意可积对合分布在局部上是“平坦的”，从而是可积的.

定理 3.4.19.（局部 Frobenius 定理）

令 $\mathcal{V}$ 为对合的 k-维分布. 那么对于任意 $p \in M$, 存在以 p 为中心的局部坐标系 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ 使得对于任意 $q \in U$, $\mathcal{V}_q = \mathrm{span}\{\partial_1(q), \cdots, \partial_k(q)\}$. ♡

证明 由引理 3.4.17, 定理对 $k=1$ 成立. 下面假设定理对所有 $k-1$ 维对合分布成立. 令 $\mathcal{V}$ 为 k 维分布，它在 p 附近由光滑向量场 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 张成. 假设 $\mathcal{V}$ 是对合的，即

$$[X_i, X_j] \equiv 0 \mod (X_1, \cdots, X_k), \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

根据引理 3.4.17, 存在 p 附近的局部坐标卡 $(U; y^1, \cdots, y^m)$ 使得 $X_k = \partial_{y^k}$. 对于 $1 \leq i \leq k-1$ 令

$$X_i' = X_i - X_i(y^k)X_k,$$

那么对于 $1 \leq i \leq k-1$ 有 $X_i'(y^k) = 0$, 并且 $X_k(y^k) = 1$. 注意到向量场 $X_1', \cdots, X_{k-1}', X_k$ 仍然张成了 $\mathcal{V}$. 进一步，如果记

$$[X_i', X_j'] = a_{ij}X_k \mod (X_1', \cdots, X_{k-1}'), \quad 1 \leq i, j \leq k-1,$$

将两边都作用到函数 y^k 上, 可以发现对于所有的 $1 \leq i, j \leq k-1$，都有 $a_{ij} = 0$. 于是根据引理 3.4.11, $k-1$ 维分布

$$\mathcal{V}' = \mathrm{span}\{X_1', \cdots, X_{k-1}'\}$$

是对合的. 从而由归纳假设, 存在 p 附近的局部坐标卡 $(U, z^1, \cdots, z^m)$ 使得 $\mathcal{V}'$ 由 $\{\partial_{z^1}, \cdots, \partial_{z^{k-1}}\}$ 张成. 由于每个 $\partial_{z^i}(1 \leq i \leq j)$ 都是 X_j' $(1 \leq j \leq k-1)$ 的线性组合, 依然有 $\partial_{z^i}(y^k) = 0$.

记

$$[\partial_{z^i}, X_k] = b_i X_k \mod (\partial_{z^1}, \cdots, \partial_{z^{k-1}}).$$

将两边都作用到函数 y^k 上, 可知 $b_i = 0$ 对于所有的 $1 \leq i \leq k-1$ 成立. 因此存在 C_j^i 使得

$$[\partial_{z^i}, X_k] = \sum_{j=1}^{k-1} C_j^i \partial_{z^j}.$$

假设 $X_k = \sum_{j=1}^m \xi_j \partial_{z^j}$. 将这个结果代入上式，得

$$\partial_{z^i}\xi_j = 0, \quad 1 \leq i \leq k-1, k \leq j \leq m.$$

换句话说, 当 $j \geq k$ 时有 $\xi_j = \xi_j(z^k, \cdots, z^n)$. 令

$$X_k' = X_k - \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j \partial_{z^j} = \sum_{j=k}^{m} \xi_j \partial_{z^j}.$$

那么 $\{\partial_{z^1}, \cdots, \partial_{z^{k-1}}, X_k'\}$ 仍然张成了 $\mathcal{V}$. 最后对 $z^k, \cdots, z^k$ 变量用引理 3.4.17, 可知存在从 $(z^1, \cdots, z^k, \cdots, z^n)$ 到 $(x^1, \cdots, x^k, \cdots, x^n)$ 的局部坐标变换（其中对于 $1 \leq i \leq k-1$, $x^i = z^i$)，使得 $X_k' = \partial_{x^k}$. 由此完成了证明. □

¶ 整体 Frobenius 定理的证明概要

证明 [证明概要:] 对于任意 $p \in M$, 令

$$N_p = \{q \in M \mid \text{存在}\mathcal{V} \text{ 分段光滑的积分曲线 连接 } p \text{ 到 } q\}^4.$$

下面简要说明 N_p 是包含 p 的 $\mathcal{V}$ 的极大连通积分流形. 重点在于说明 N_p 是一个浸入子流形。注意这一方面表明即将要构造的 N_p 上的拓扑/光滑结构并不一定是它作为子集继承自 M 的结构，但另一方面也说明了二者也不是完全无关：构造的要点是从“N_p 自身的局部”出发，而不是从“$N_{p(\text{作为 } M \text{ 的子集})}$ 在 M 中的局部”出发。

N_p 的拓扑和流形结构定义如下：对于任意 $q \in N_p$, 存在以 q 为中心的坐标卡 (ϕ, U, V) (其中 $\phi(w) = (x^1(w), \cdots, x^n(w))$) 使得在 U 中有 $\mathcal{V} = \mathrm{span}\{\partial_1, \cdots, \partial_k\}$. 对于所有充分小的 ε, 令

$$W_\varepsilon = \{w \in U \mid (x^1)^2(w) + \cdots + (x^k)^2(w) < \varepsilon, x^{k+1}(w) = \cdots = x^n(w) = 0\}.$$

那么任意点 $w \in W_\varepsilon$ 都能经由 $\mathcal{V}$ 中的积分曲线.

$$\gamma(t) = \phi^{-1}(tx_1(w), \cdots, tx_k(w), 0, \cdots, 0)$$

连接到 q. 因此 $W_\varepsilon \subset N_p$. 令

$$\varphi : W_\varepsilon \to B^k(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^k, \quad w \mapsto (x_1(w), \cdots, x_k(w)).$$

定义 N_p 上的拓扑为使得所有上述 φ 都是同胚的最弱拓扑，则可以验证 N_p 是拓扑流形。定义 N_p 上的图册为坐标卡集合 $(\varphi, W, B^k(\varepsilon))$. 可以验证 N_p 在给定图册下是光滑流形，且包含映射是浸入. 最后，由定义不难看出 N_p 是连通的，且是极大的。（更多的细节可参考 [8]，第 48-49 页.） □

[4]若存在 $\mathcal{V}$ 中向量场的积分曲线 $\gamma_i : (a_i, b_i) \to M$（$1 \le i \le k$）使得 $\gamma_1(a_1) = p, \gamma_{i+1}(a_{i+1}) = \gamma_i(b_i)$（$1 \le i \le k-1$）且 $\gamma_k(b_k) = q$，则称 p 与 q 能被 $\mathcal{V}$ 的 分段光滑的积分曲线连接.