

1.2 光滑流形

上一节给出了拓扑流形的概念。作为“拓扑范畴”的子范畴，对于拓扑流形人们关注的还是连续映射（以及同胚）。为了能够在流形上运用强大的分析工具，需要对流形和映射提出光滑性的要求。本节给出光滑流形的定义与基本例子，并进而给出光滑流形间光滑映射的定义。它们是“光滑流形范畴”的基本要素，是本书的主要研究对象。

1.2.1 光滑流形：定义

光滑函数和光滑映射：欧氏情形

为了从拓扑流形过渡到光滑流形，先简要回顾一下数学分析中光滑函数和微分同胚的概念。设 U 是 \mathbb{R}^n 中的一个开集，而 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 是 U 上的一个连续函数。

- 若 f 的所有不超过 k 阶的偏导数

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x^1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x^n)^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$$

都是 U 上的连续函数，则称 f 是一个 C^k -函数。

- 若对于任意正整数 k , f 都是 C^k 函数，则称 f 是一个 C^∞ 函数，或者光滑函数。
- 若 f 是光滑函数，并且 f 在 U 中任意一点的 Taylor 级数都在该点的某个小邻域内收敛于函数 f 自身，则称 f 是一个解析函数（或者 C^ω 函数）。

注意并不是所有光滑函数都是解析的，下一节中将会给出一个具体例子。

类似的，设 U 是 \mathbb{R}^n 中的一个开集， V 是 \mathbb{R}^m 中的一个开集，而

$$f = (f_1, \cdots, f_m): U \rightarrow V$$

是从 U 到 V 的一个连续映射。如果映射 f 的任一分量 f_i ($1 \leq i \leq m$) 都是一个 C^∞ 函数（或者 C^k 函数，或 C^ω 函数），则称 f 是 C^∞ 映射（或者 C^k 映射，或 C^ω 映射）。¹

正如连续映射是“拓扑范畴”中的态射那样，光滑映射是“光滑范畴”中的态射，是分析中最基本的研究对象。类似地，可以定义“光滑范畴”中的同胚，即

定义 1.2.1. (微分同胚)

若一个光滑映射 $f: U \rightarrow V$ 既是单射也是满射，并且 $f^{-1}: V \rightarrow U$ 也是一个光滑映射，则称 f 为一个微分同胚。



根据定义，很容易得到

- 恒等映射 $\text{Id}: U \rightarrow U$ 是一个微分同胚。
- 如果 $f: U \rightarrow V$ 是一个微分同胚，那么 $f^{-1}: V \rightarrow U$ 也是微分同胚。
- 如果 $f: U \rightarrow V$ 和 $g: V \rightarrow W$ 均为微分同胚，那么 $g \circ f: U \rightarrow W$ 也是微分同胚。

于是，微分同胚是欧氏开集之间的一个等价关系，微分同胚的开集具有完全相同的分析性质。

¹本书主要考虑 C^∞ 函数和 C^∞ 映射。后文中大多数定义和定理都能拓展到 C^k 的情况。不过， C^ω 映射的理论会有较大的差异。

相容坐标卡

下面考虑定义在流形上的函数的光滑性。按照数学分析中的经验，光滑性是一个局部性质，即函数在一点是否光滑仅与函数在该点附近的取值有关。设 M 是一个拓扑流形。因为 M 上任意一点的附近都有坐标卡 (φ, U, V) ，该坐标卡将 M 中的开集 U 与 \mathbb{R}^n 中的开集 V 等同起来，所以可以自然地将 U 上的函数 f 等同于 V 上的函数 $f \circ \varphi^{-1}$ ，然后由 $f \circ \varphi^{-1}$ 的光滑性去定义 f 自身的光滑性。这个想法虽然在大方向上是没错的，但有一个很大的问题： M 上每一点附近都存在着许多不同的坐标卡，有可能会出现“在某给定点处， f 关于一个坐标卡是光滑的，而关于另一个坐标卡是不光滑的”这种现象。这显然是不合理的，因为函数 f 在一点处的光滑性应该是函数本身的性质，与特定坐标卡选取无关。

事实上，上述“不合理现象”并不少见，而是出现于所有拓扑流形。例如，

例 1.2.2. 考虑 $M = \mathbb{R}$ ，并取 $U = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}$ 以及 $\varphi(x) = x^3$ ，则 (φ, U, V) 是一个坐标卡。但是在这个坐标卡下，甚至连多项式函数 $f(x) = x^n$ （其中自然数 n 不是 3 的倍数）都不光滑，因为 $f \circ \varphi^{-1}(x) = x^{n/3}$ 在 $x = 0$ 处不是光滑函数！当然，如果我们取的坐标映射 φ 是 $\varphi(x) = x$ 或者 $\varphi(x) = e^x$ （此时 $V = (0, +\infty)$ ），则多项式函数 $f(x) = x^n$ 在这样的坐标卡中依然是光滑的。

解决这个问题关键在于从思想上认识到“光滑性”并不是流形的拓扑结构自带的性质，而是额外附加在拓扑流形上的一个新的数学结构。实际解决办法也不复杂：因为同一点附近的坐标卡太多，其中很多坐标卡对于定义函数的光滑性而言会给出不一致的结论，所以为了定义函数的光滑性，要做的是去掉大部分坐标卡，仅保留那些能给出一致结果的坐标卡。具体而言，如果 φ 和 ψ 都是同一点附近的坐标映射，我们希望映射 $f \circ \varphi^{-1}$ 和 $f \circ \psi^{-1}$ 同时是光滑或非光滑的。这相当于要求 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 是光滑的。（注：即使 $f \circ \varphi^{-1}$ 和 $f \circ \psi^{-1}$ 都是光滑的，我们仍然希望映射 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 是光滑的，因为在这个条件下， $f \circ \varphi^{-1}$ 和 $f \circ \psi^{-1}$ 的微分才能通过链式法则联系起来。）

在这种需求之下，我们定义

定义 1.2.3. (相容性与转移映射)

设 M 是 n 维光滑流形， $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ 和 $(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)$ 是 M 上的两个坐标卡。如果 $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ ，或者当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时，二者之间的**转移映射**

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是微分同胚，则称这两个坐标卡是**相容的**。



关于这个定义，需要指出的是：

- 因为 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 和 $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 在 \mathbb{R}^n 都是开集，所以定义中涉及的 $\varphi_{\alpha\beta}$ 的光滑性是熟悉的欧氏空间开集间映射的光滑性。
- 相容性是相互的：若 $\varphi_{\alpha\beta}$ 是微分同胚，则 $\varphi_{\beta\alpha} = (\varphi_{\alpha\beta})^{-1}$ 也是微分同胚。

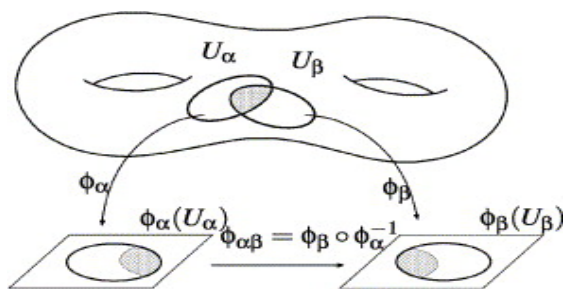


图 1.2: 转移映射

光滑流形的定义

所谓的光滑结构，就是一组两两相容且覆盖整个流形的坐标卡：

定义 1.2.4. (图册及其等价性)

- (1) 流形 M 上的一个**光滑图册** \mathcal{A} 指的是一族满足 $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M$ 的坐标卡 $(\varphi_{\alpha}, U_{\alpha}, V_{\alpha})$ ，使得 \mathcal{A} 中所有坐标卡都是彼此相容的。
- (2) 若 M 上的两个光滑图册 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 的并集依然是 M 上的光滑图册，则称这两个图册是**等价的图册**。



例 1.2.5. 在 \mathbb{R} 上定义三个图册， $\mathcal{A}_i = (\varphi_i, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ($1 \leq i \leq 3$)，其中

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 2x, \quad \varphi_3(x) = x^3.$$

则 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ 是等价的，但是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3$ 是不等价的，因为

$$\varphi_{31}(x) = \varphi_1 \circ \varphi_3^{-1}(x) = x^{1/3}$$

不是 \mathbb{R} 上的光滑函数。

显然，光滑图册之间的等价性是 M 上所有光滑图册集合上的一个等价关系。

定义 1.2.6. (光滑结构与光滑流形)

拓扑流形 M 上光滑图册的等价类称为 M 上的一个**光滑结构**。赋予了光滑结构的 n 维拓扑流形被称为 n 维**光滑流形**。



因此一个光滑流形是一对 $(M, [\mathcal{A}])$ 。下文中，在不会引起混淆的情况下，我们总是省略 $[\mathcal{A}]$ 而直接说“光滑流形 M ”。注意根据这个定义，例1.2.2中所给出的坐标卡 $\varphi(x) = x^3$ 也给出了 \mathbb{R} 上的一个光滑结构，只是它跟我们熟悉的 \mathbb{R} 上标准的光滑结构不同。

注 1.2.7.

- (1) 并非每个拓扑流形都可以被赋予光滑结构。这方面的第一个例子是 1960 年由 M. Kervaire 所构造的一个十维紧拓扑流形。后来根据 S. Donaldson 以及 M. Freedman 等人关于四维流形的深刻结果，大家发现有很多单连通四维流形上没有光滑结构。
- (2) 类似地可以定义 n -维 C^k 流形的概念。虽然拓扑流形跟光滑流形有本质区别，但是对于 $k \geq 1$ ， C^k 跟光滑流形则并没有本质区别：Whitney 证明了任意 $C^k (k \geq 1)$ 流形上均存在唯一（在微分同胚意义下，见本节后面的定义1.2.27）的相容光滑结构，证明可参见 [2]（第 51 页定理 2.9）。

1.2.2 光滑流形的例子

不难证明 (留作习题)

- 任意光滑流形的开子集依然是光滑流形,
- 两个光滑流形的乘积依然是光滑流形.

下面给出一些具体的光滑流形.

¶ 单坐标卡流形

由定义立刻可以得到

命题 1.2.8. (单个坐标卡与光滑结构)

若拓扑流形 M 可以被单独一个坐标卡覆盖, 那么这个坐标卡自动地给出了 M 上的一个光滑结构.

特别地,

- \mathbb{R}^n 和 \mathbb{R}^n 中的任意开集都是光滑流形.
- 一般线性群 $GL(n, \mathbb{R})$ 是一个光滑流形.

下面则是一类非常常见的例子:

例 1.2.9. (映射的图像). 对于任意欧氏开集 $U \subset \mathbb{R}^m$ 和 U 上的任意连续映射 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 定义 f 的图像为

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \mid x \in U, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{m+n}.$$

赋予 $\Gamma(f)$ 由 \mathbb{R}^{m+n} 的欧氏拓扑所诱导的子空间拓扑, 则 $\Gamma(f)$ 是 Hausdorff 和第二可数的. 它还是局部欧氏的, 因为它有一个整体的坐标卡 $(\varphi, \Gamma(f), U)$, 其中

$$\varphi: \Gamma(f) \rightarrow U, \quad \varphi(x, y) = x$$

是投影到分量的映射. [φ 是一个同胚, 因为 φ 显然连续、可逆, 并且其逆映射

$$\varphi^{-1}: U \rightarrow \Gamma(f), \quad \varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$$

是连续的.] 因此 $\Gamma(f)$ 是一个 m 维拓扑流形. 因为它可以被单独一个坐标卡覆盖, 所以它事实上是光滑流形.

注 1.2.10. 这个例子告诉我们

任意连续函数 $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的图像 $\Gamma(f)$ 上存在一个内蕴的光滑结构, 使之成为一个光滑流形.

然而, 一般而言, 如果 f 仅仅连续而不光滑, 那么 $\Gamma(f)$ 上的这个光滑结构有可能跟 \mathbb{R}^{n+1} 上我们熟悉的光滑结构不一致, 从而它不是 \mathbb{R}^{n+1} 的光滑子流形 (定义见后文).

球面上的光滑结构

例 1.2.11. (球面). 对于任意的 $n \geq 0$, 考虑 \mathbb{R}^{n+1} 中的单位球面

$$S^n = \{(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \mid (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 + (x^{n+1})^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

在子空间拓扑下它是 Hausdorff 和第二可数的. 为了证明它是局部欧氏的, 可以考虑用两个开子集去覆盖 S^n :

$$U_+ = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}, \quad U_- = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$$

然后通过**球极投影**定义两个坐标卡 $(\varphi_+, U_+, \mathbb{R}^n)$ 和 $(\varphi_-, U_-, \mathbb{R}^n)$,

$$\varphi_{\pm}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = \frac{1}{1 \pm x^{n+1}}(x^1, \dots, x^n).$$

容易验证 φ_{\pm} 是连续和可逆的, 并且其逆映射

$$\varphi_{\pm}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \frac{1}{1 + (y^1)^2 + \dots + (y^n)^2} (2y^1, \dots, 2y^n, \pm(1 - (y^1)^2 - \dots - (y^n)^2))$$

也是连续的.

于是在集合 $\varphi_-(U_+ \cap U_-) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上,

$$\begin{aligned} \varphi_{-+}(y^1, \dots, y^n) &= \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}(y^1, \dots, y^n) \\ &= \varphi_+ \left(\frac{1}{1 + |y|^2} (2y^1, \dots, 2y^n, -1 + |y|^2) \right) \\ &= \frac{1}{|y|^2} (y^1, \dots, y^n), \end{aligned}$$

是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 到自身的微分同胚. 因此这两个坐标卡是相容的.

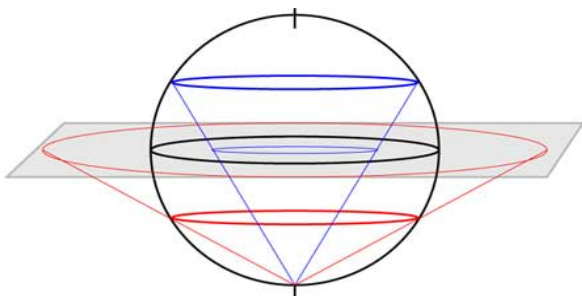


图 1.3: 球极投影

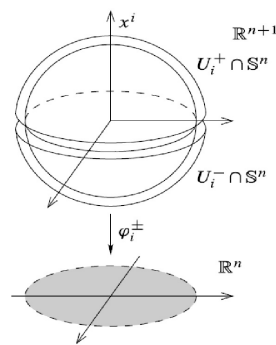


图 1.4: 用半球覆盖球面

注 1.2.12. 也可以用 $2n+2$ 个半球面 (以及用对应的坐标投影给出的坐标卡) 去覆盖 S^n . 具体来说, 对于任意 $1 \leq i \leq n+1$, 令

$$U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\}$$

为在第 i 个方向上的“上半球面”, 并定义映射 $\varphi_i^+ : U_i^+ \rightarrow B^n(1)$ 为投影映射

$$\varphi_i^+(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, x^{n+1}),$$

其中 $B^n(1)$ 是 \mathbb{R}^n 中的单位开球体. 可以验证每个 $(\varphi_i^+, U_i^+, B^n(1))$ 都是坐标卡. 类似地, 可以在每个“下半球面”定义坐标卡 $(\varphi_i^-, U_i^-, B^n(1))$. [\[验证: 上述通过半球面定义的 \$S^n\$ 上的坐标卡是两两相容的.\]](#)

¶ 实射影空间上的光滑结构

例 1.2.13. (实射影空间).

\mathbb{R}^{n+1} 中全体经过原点的直线的集合 \mathbb{RP}^n 被称为 n 维**实射影空间**. 为了赋予 \mathbb{RP}^n 拓扑结构, 我们将其视为如下的商空间:

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} / \sim,$$

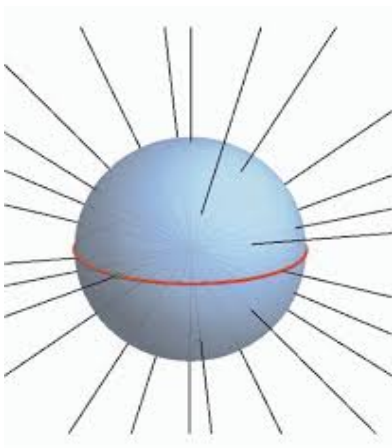
其中等价关系 \sim 为:

$$(x^1, \dots, x^{n+1}) \sim (tx^1, \dots, tx^{n+1}), \quad \forall t \neq 0.$$

也可以通过粘合对径点, 将 \mathbb{RP}^n 视为 S^n 的商空间

$$\mathbb{RP}^n = S^n / \{x \sim \pm x\}.$$

由以上这些描述可以证明 \mathbb{RP}^n 是 Hausdorff 和第二可数的, 而且它还是紧致的.



通常人们将包含 (x^1, \dots, x^{n+1}) 的 \mathbb{RP}^n 中的等价类记为 $[x^1 : \dots : x^{n+1}]$. 下面在 \mathbb{RP}^n 上构造局部坐标卡. 考虑以下开集

$$U_i = \{[x^1 : \dots : x^{n+1}] \mid x^i \neq 0\}, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

对于任意的 i , 定义 $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$\varphi_i([x^1 : \dots : x^{n+1}]) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

不难验证每个 φ_i 都是良定的, 连续的, 并且其逆映射

$$\varphi_i^{-1}(y^1, \dots, y^n) = [y^1 : \dots : y^{i-1} : 1 : y^i : \dots : y^n].$$

是连续的. 因此每个 $(\varphi_i, U_i, \mathbb{R}^n)$ 都是坐标卡, 进而 \mathbb{RP}^n 是一个拓扑流形.

最后说明 \mathbb{RP}^n 是光滑流形. 不失一般性, 下面验证 $\varphi_{1,n+1}$ 是一个从

$$\varphi_1(U_1 \cap U_{n+1}) = \{(y^1, \dots, y^n) \mid y^n \neq 0\} =: V_n$$

到

$$\varphi_{n+1}(U_1 \cap U_{n+1}) = \{(y^1, \dots, y^n) \mid y^1 \neq 0\} =: V_1.$$

的微分同胚. 事实上, 根据定义

$$\begin{aligned}\varphi_{1,n+1}(y^1, \dots, y^n) &= \varphi_{n+1} \circ \varphi_1^{-1}(y^1, \dots, y^n) \\ &= \varphi_{n+1}([1 : y^1 : \dots : y^n]) \\ &= \left(\frac{1}{y^n}, \frac{y^1}{y^n}, \dots, \frac{y^{n-1}}{y^n} \right).\end{aligned}$$

它显然是从 V_n 到 V_1 的微分同胚. 类似地可以证明其他转移映射 φ_{ij} 都是微分同胚.

注 1.2.14. 类似地, \mathbb{C}^{n+1} 中所有经过原点的“复直线”的集合

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$$

被称为 n 维复射影空间. 重复上面的论证可以验证它是一个光滑流形 (事实上因为上面所给出的转移映射此时事实上是全纯映射, 所以 \mathbb{CP}^n 还是复流形). 更一般的, 对于任意有限维向量空间 V , 它的全体 k 维子空间构成的集合

$$Gr(k, V) = \{W \subset V \mid W \text{ 是 } V \text{ 的 } k \text{ 维子空间}\}$$

被称为 Grassmann 流形. 可以证明, 它们都是光滑流形 (具体细节请参考 [5] 第 22-24 页). 这些流形在现代几何、拓扑、代数与数学物理中均扮演着重要角色.

还可以考虑不必经过原点的直线:

例 1.2.15. (\mathbb{R}^2 中的全部直线). \mathbb{R}^2 中全部直线的集合 (赋予如下所给出的结构) 是一个光滑流形. 为了说明这一点, 只需要注意到 \mathbb{R}^2 中的任意直线可以被表示为如下的形式:

$$ax + by + c = 0,$$

其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 (a, b) 不全是 0. 因为两个这样的三元组 (a, b, c) 和 (a', b', c') 定义了相同的直线当且仅当

$$[a : b : c] = [a' : b' : c'],$$

即它们对应于 \mathbb{RP}^2 中相同的点, 所以 \mathbb{R}^2 中的每条直线都唯一对应于 \mathbb{RP}^2 中除了 $[0 : 0 : 1]$ 之外的一个元素, 且反之亦然. 由此可得一个良定的双射^[其的像集是一个 Möbius 带!]

$$\phi : \{\mathbb{R}^2 \text{ 中的直线}\} \rightarrow \mathbb{RP}^2 \setminus \{[0 : 0 : 1]\},$$

$$ax + by + c = 0 \mapsto [a : b : c].$$

于是, 只要将 \mathbb{RP}^2 的所有结构搬到“ \mathbb{R}^2 中的所有直线构成的集合”上, 就可以给出后者一个光滑流形的结构. [这个方法实际上是视 \mathbb{RP}^2 为 \mathbb{R}^2 加上“无穷远直线”, 从而可以把 \mathbb{R}^2 中的直线延拓成 \mathbb{RP}^2 中的直线, 再利用 \mathbb{RP}^2 中的“点-直线对偶”把直线转化成 \mathbb{RP}^2 中的点, 从而可以利用 \mathbb{RP}^2 的光滑流形结构. 读者也可以尝试直接由局部的参数化构造其流形结构.]

1.2.3 光滑函数与光滑映射

有了光滑结构（即坐标卡的相容性），就可以定义分析中的光滑对象了：

光滑流形上的光滑函数

首先给出流形上光滑函数的定义：

定义 1.2.16. (光滑函数)

令 $(M, [\mathcal{A}])$ 为一个光滑流形，而 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 M 上的一个函数。

(1) 若存在一个包含点 p （即 $p \in U_\alpha$ ）的坐标卡 $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha) \in \mathcal{A}$ ，使得函数

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1}: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$$

在点 $\varphi_\alpha(p)$ 处光滑，则称函数 f 在点 $p \in M$ 处光滑。

(2) 若 f 在所有的 $p \in M$ 处都光滑，则称 f 是 M 上的一个光滑函数。



假设 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 在 $\varphi_\alpha(p)$ 处光滑，而 $(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)$ 是 \mathcal{A} 中另一个包含点 p 的坐标卡，则由坐标卡的相容性，函数

$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$$

在 $\varphi_\beta(p)$ 处必然是光滑的。因此，函数的光滑性与给定的图册中坐标卡的选取无关。当然，如果改变流形上 M 上的光滑结构，则有函数的光滑性可能会改变。

注 1.2.17. 根据定义和链式法则，如果 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $p \in M$ 处光滑，并且 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $f(p)$ 处光滑，那么 $h \circ f$ 在 p 处光滑。

例 1.2.18. 考虑 S^n 上的函数。

(1) S^n 上的每个坐标函数 $f_i(x^1, \dots, x^{n+1}) = x^i$ 都是光滑函数，因为

$$f_i \circ \varphi_\pm^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \begin{cases} \frac{2y^i}{1+|y|^2}, & 1 \leq i \leq n \\ \pm \frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}, & i = n+1 \end{cases}$$

是 \mathbb{R}^n 上的光滑函数。

(2) “纬度函数”是 S^2 上的光滑函数，因为它能表示为“高度函数” x^3 和一个光滑函数的复合。

(3) 然而，“经度”甚至不是整个 S^2 上良好定义的实值函数。

对于任何光滑流形 M ，记 M 上全体光滑函数的集合为 $C^\infty(M)$ 。当需要强调所考虑的是实值函数或者复值函数时，将分别记为 $C^\infty(M, \mathbb{R})$ 或者 $C^\infty(M, \mathbb{C})$ 。根据（实或复）数域上的代数结构，易见 $C^\infty(M)$ 是一个（交换的）代数，即

- 它是一个线性空间：如果 f, g 是光滑的，那么 $af + bg$ 是光滑的；
- 它带有乘法运算（如果 f, g 是光滑的，那么 fg 是光滑的），且该乘法是双线性的，满足交换律、结合律和分配律。

流形间的光滑映射

接下来考虑两个光滑流形之间的光滑映射. 跟光滑函数的定义方式类似, 为了定义光滑流形之间映射的光滑性, 要把所考虑的映射限制到合适的坐标卡上:

定义 1.2.19. (光滑映射)

设 M, N 为光滑流形, 而 $f: M \rightarrow N$ 是一个连续映射. 如果对于 M 的任意坐标卡 $^a(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$ 和 N 的任意坐标卡 $(\psi_\beta, X_\beta, Y_\beta)$, 映射

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(X_\beta)) \rightarrow \psi_\beta(X_\beta)$$

(作为欧氏空间开集间的映射) 是光滑的, 则称 f 为光滑映射.

^a本书在提到“光滑流形 M 的任意坐标卡”时, 均默认是任意“在给定的图册 \mathcal{A} 里”的坐标卡.

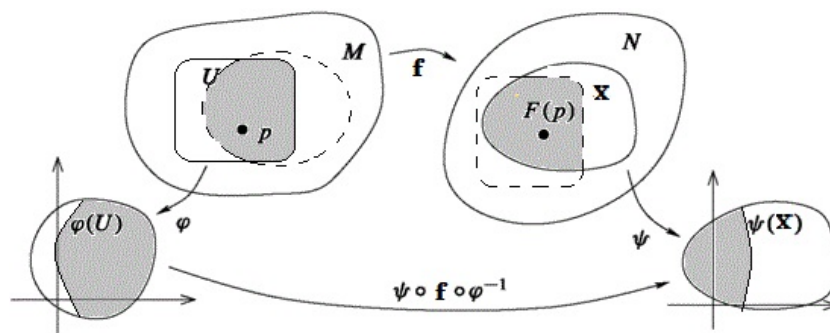


图 1.5: 光滑映射

类似地可以定义 C^k 流形之间的 C^k 映射, 或者 C^ω 流形之间的 C^ω 映射。

注 1.2.20. 在定义中要求映射 f 是连续的, 这是为了保证映射 $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是定义在 $\varphi_\alpha(p)$ 的邻域里的. 一般而言, 即使每个 $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 都光滑映射, 也并不蕴含 f 的连续性, 反例见习题. 另外一种等价的定义方式是假设“每个点 p 有一个 \mathcal{A} 中的坐标邻域 U , 使得 $f(U)$ 包含在 N 的某个坐标卡中”. 参见 [2].

容易验证以下命题

命题 1.2.21. (“光滑性”不依赖于等价的光滑结构的选取)

如果 $f: (M, \mathcal{A}) \rightarrow (N, \mathcal{B})$ 是光滑的, \mathcal{A}_1 是 M 上与 \mathcal{A} 相容的图册, 而 \mathcal{B}_1 是 N 上与 \mathcal{B} 相容的图册, 那么 $f: (M, \mathcal{A}_1) \rightarrow (N, \mathcal{B}_1)$ 是光滑的.

记从 M 到 N 的全体光滑映射所组成的集合为 $C^\infty(M, N)$. 可以证明

命题 1.2.22. (光滑映射的复合)

如果 $f \in C^\infty(M, N)$, 且 $g \in C^\infty(N, P)$, 那么 $g \circ f \in C^\infty(M, P)$.

作为推论, 任意光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 都诱导了相应的光滑函数空间的拉回映射

$$f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M), \quad g \mapsto g \circ f.$$

拉回映射将会在本书后文中扮演重要角色.

光滑映射的例子

例 1.2.23. 如果赋予 \mathbb{R} 以标准的光滑结构(即总是默认的光滑结构 $\{(\varphi_1(x) = x, \mathbb{R}, \mathbb{R})\}$), 则映射 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个(在定义 1.2.19 意义下的)光滑映射当且仅当它是一个(在定义 1.2.16 下的)光滑函数. 更一般地, 映射

$$f = (f_1, \dots, f_k): M \rightarrow \mathbb{R}^k$$

是一个光滑映射当且仅当它的每个分量 f_i 是 M 上的光滑函数.

例 1.2.24. 一般线性群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是 \mathbb{R}^{n^2} 中的开集, 从而是一个光滑流形. 用这个只有一个坐标卡的标准图册, 容易验证(这些事实表明 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 是一个 Lie 群, 见后文.)

(1) 行列式函数

$$\det: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det A$$

是一个光滑函数,

(2) 矩阵乘法映射

$$m: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto AB$$

是一个光滑映射,

(3) 矩阵取逆映射

$$i: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto A^{-1}$$

是一个光滑映射.

例 1.2.25. 嵌入映射 $\iota: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 是光滑的, 因为

$$\iota \circ \varphi_{\pm}^{-1}(y^1, \dots, y^n) = \frac{1}{1 + |y|^2} (2y^1, \dots, 2y^n, \pm(1 - |y|^2))$$

是从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^{n+1} 的光滑映射. 注意到由定义, \mathbb{R}^{n+1} 中任意函数 g 在映射 ι 下的拉回函数 ι^*g 就是 g 在 S^n 上的限制:

$$\iota^*g = g|_{S^n}.$$

因此 \mathbb{R}^{n+1} 中任意光滑函数限制到 S^n 上之后是 S^n 上的光滑函数.

例 1.2.26. 投影映射 $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ 是光滑的, 因为对于每个 i ,

$$\varphi_i \circ \pi(x^1, \dots, x^{n+1}) = \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right)$$

在 $\pi^{-1}(U_i) = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) : x^i \neq 0\}$ 上都是光滑的.

微分同胚

跟欧氏空间开集情形类似, 可以定义光滑流形之间的微分同胚. 它们给出了“光滑范畴”中对象的“等价”:

定义 1.2.27. (微分同胚)

令 M, N 为光滑流形. 若映射 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑双射, 且其逆映射 f^{-1} 也是光滑的, 则称 f 是一个 **微分同胚**.



如果存在一个微分同胚 $f: M \rightarrow N$, 则称 M 和 N 是微分同胚的, 简记为 $M \simeq N$. 以下性质可以从欧氏空间情形与之对应的性质中得到:

- 恒等映射 $\text{Id}: M \rightarrow M$ 是一个微分同胚.
- 如果 $f: M \rightarrow N$ 和 $g: N \rightarrow P$ 都是微分同胚, 那么 $g \circ f$ 也是微分同胚.
- 如果 $f: M \rightarrow N$ 是一个微分同胚, 那么 f^{-1} 也是微分同胚.

因此“微分同胚”是全体光滑流形集合上的一个等价关系. 彼此微分同胚的光滑流形将被视为同一个光滑流形.

注 1.2.28. 特别地, 对于任意光滑流形 M ,

$$\text{Diff}(M) = \{f: M \rightarrow M \mid f \text{ 是一个微分同胚}\}$$

是一个群, 被称作 M 的**微分同胚群**. 这是一个巨大的 (无穷维) 群.

例 1.2.29. 如果 M 是一个光滑流形, 那么任意坐标卡 (φ, U, V) 给出从 $U \subset M$ (此处视 U 为一个光滑流形) 到 $V \subset \mathbb{R}^n$ 的微分同胚. 更一般地, 可以验证:

M 的两个图册 $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)\}_\alpha$ 和 $\mathcal{B} = \{(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)\}_\beta$ 是等价的当且仅当恒等映射 $\text{Id}: (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{B})$ 是一个微分同胚.

例 1.2.30. 在例 1.2.5 中已经看到, 在 $M = \mathbb{R}$ 上, 两个图册 $\mathcal{A} = \{(\varphi_1(x) = x, \mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ 和 $\mathcal{B} = \{(\varphi_2(x) = x^3, \mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ 定义了不等价的光滑图册. 然而映射

$$f: (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}), \quad f(x) = x^{1/3}$$

是一个微分同胚. 因此这两个图册所给出的光滑结构 (在微分同胚意义下) 是等价的.

注 1.2.31. 下面列出一些有关拓扑流形上不同 (不微分同胚) 光滑结构的深刻结果:

- (1920 年代-1950 年代, T. Rado, E. Moise) 任意维数小于 4 的拓扑流形上存在 (在微分同胚意义下) 唯一的光滑结构.
- 球面 S^n 上光滑结构的分类一直是微分拓扑的重要问题:
 - 1956 年 J. Milnor 首次发现了 S^7 上存在跟标准光滑结构不微分同胚的“怪异光滑结构”, 被称为“七维怪球”.
 - 1963 年 J. Milnor 和 M. Kervaire 证明了拓扑 7 维球面上存在恰好 28 种不同的光滑结构. 下表给出了部分球面上不同光滑结构数量如下: (引自维基百科)

Dimension	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Smooth types	1	1	1	≥ 1	1	1	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16	523264	24

- 人们发现, 奇数维球面中, 仅有 S^1, S^3, S^5 和 S^{61} 具有唯一的光滑结构, 其中最后一种情形即 61 维球面上光滑结构的唯一性是 2017 年由中国年轻数学家王国桢、徐宙利通过计算球面的稳定同伦群而得到的. 偶数维球面的情形, 目前仅知道在维数小于 140 时, 仅有 S^2, S^6, S^{12}, S^{56} (以及可能的 S^4) 有唯一的光滑结构.
- **光滑 Poincaré 猜想:** 目前人们还不知道 S^4 上的光滑结构是不是唯一的.
- (S. Donaldson 和 M. Freedman) 对于任意 $n \neq 4$, \mathbb{R}^n 在相差一个微分同胚意义下有唯一的光滑结构; 但是在 \mathbb{R}^4 上存在不可数多种两两不微分同胚的光滑结构.