5.2 流形上的张量与微分形式

上一节学过线性空间上的张量(尤其是反对称张量即线性形式)的理论,给出了它们的几个基本运算:张量之间的张量积,以及线性形式的楔积、内乘和拉回.由于流形上每一点都天然地有一个线性空间:切空间,所以可以像向量场一样,把这些线性对象搬到流形上,定义流形上的向量场与微分形式。此时,不仅已有的这些(线性)张量与形式的运算可以逐点地照搬到流形上,而且还可以用微分结构定义一个全新的运算:外微分运算.外微分是流形上微分形式最重要的运算,它可被视为是光滑函数微分的推广.

5.2.1 光滑流形上的张量场与微分形式

¶ 余切空间

设 M 是一个光滑流形. 对每个 $p \in M$ 都自然关联了一个向量空间 T_pM . 在取定 p 附近的任意局部坐标卡 (φ, U, V) 后, 可以写下 T_pM 的一组基的显式表达:

$$\partial_i|_p: C^{\infty}(U) \to \mathbb{R}, \quad \partial_i|_p(f) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)), \qquad (1 \le i \le n).$$

注意不仅 $\partial_i|_p$ 构成了切空间 T_pM 的一组基, 而且 ∂_i 都是 U 上的光滑向量场, 并且对任意的 $q \in U$, $\partial_i|_q$ 形成切空间 T_qM 的一组基.

下面研究 T_pM 的对偶空间 T_p^*M . 在习题中已经见过空间 T_p^*M . 它被称为 M 在 p 点处的**余切空间**,其中的元素被称为 p 处的 **余切向量**. 利用局部坐标系,不难写下 T_p^*M 的一组显式基,(事实上对任意的 $q \in U$ 它们也是 T_q^*M 的基,并且光滑地依赖于 q). 事实上,在任意给定的局部坐标卡 (φ, U, V) 中,首先注意到对每个 $1 \le i \le n$,

$$x^i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$$

是 U 上的光滑函数. 这个函数的微分, 简单地记为 dx^i , 是一个线性映射

$$dx^{i}|_{q}: T_{q}M = T_{q}U \to T_{x^{i}\circ\varphi(q)}\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

换句话说, 每个 $dx^i|_q$ 是 T_q^*M 中的元素. 更进一步, 由定义可知,

$$dx^{i}|_{q}(\partial_{j}|_{q}) = \partial_{j}|_{q}(x^{i} \circ \varphi) = \delta_{j}^{i}.$$

从而

命题 5.2.1. (余切空间的基)

在任意局部坐标卡中 (φ,U,V) , $\{dx^i|_q:1\leq i\leq n\}$ 是 T_q^*M 的一组基,且这组基 跟 T_qM 的基 $\{\partial_i|_q:1\leq i\leq n\}$ 互为对偶基.

事实上, 对任意的 $f \in C^{\infty}(U)$, 用相同的方法能得到一个线性映射 $df_q: T_qM \to \mathbb{R}$. 换句话说, 得到一个余切向量 $df_q \in T_q^*M$.

由定义,
$$df_p(\partial_i|_p) = \partial_i|_p(f)$$
. 从而

$$df_p = (\partial_1|_p f) dx^1|_p + \dots + (\partial_n|_p f) dx^n|_p.$$

¶ 光滑流形上的张量场与微分形式

类似于流形上的向量场,可以定义

定义 5.2.2. (流形上的张量场)

若对流形 M 上每一点都指定了一个 (l,k)-张量 $T_p \in \otimes^{l,k} T_p M$,则称 T 为 M 上的一个 (l,k)-**张量场**. 若该指定还满足如下的光滑性条件,

对于 M 上的任意坐标卡 (φ, U, V) , 若记

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k} T_{i_1, \dots, i_k}^{i_1, \dots, i_k} \partial_{i_1}|_p \otimes \dots \otimes \partial_{i_k}|_p \otimes dx^{j_1}|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_k}|_p,$$

则系数函数 $T_{i_1\cdots i_k}^{i_1\cdots i_l}$ 都是 U 上的光滑函数,

则称 X 为 M 上的一个光滑张量场.

注意当 (l,k) = (1,0) 时,光滑张量场就是熟悉的光滑向量场. 全体光滑 (l,k)-张量被记为 $\Gamma^{\infty}(\otimes^{l,k}TM)$. 当 $\dim M \geq 1$ 时这依然是一个无穷维向量空间. 另外,(l,0)-张量也被称为l 阶反变张量,而 (0,k)-张量也被称为k 阶协变张量.

类似地,可以在光滑流形 M 上定义光滑 k-形式:

定义 5.2.3. (流形上的微分形式)

若对流形 M 上每一点都指定了一个 k-形式 $\omega_p \in \Lambda^k T_p^* M$,则称 ω 为 M 上的一个 k-**形式**. 若该指定还满足如下的光滑性条件,

对于 M 上的任意坐标卡 (φ, U, V) , 若记

$$\omega = \sum_{I} \omega_{I} dx^{I} = \sum_{I} \omega_{i_{1}, \dots, i_{k}} dx^{i_{1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k}},$$

其中求和是对递增的 k-元组 $I = \{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$ 求和,则系数函数 ω_{i_1,\dots,i_k} 都是 U 上的光滑函数,

则称 X 为 M 上的一个光滑 k-形式.

由定义, 张量场 T 在每一个点处对每一个分量是逐点线性的,但不同点处的线性因子不必相同. 换而言之,

 $T \in M$ 上的一个张量场当且仅当它对每一个分量是"函数线性的".

也就是说,张量场不仅仅是一个多重线性映射,而是一个多重"函数线性"映射,即对于M上的任意 1-形式 $\omega^1, \dots, \omega^l$,向量场 X_1, \dots, X_k 以及函数 $f_1, \dots, f_l, g^1, \dots, g^l$,均有

$$T(f_1\omega^1, \cdots, f_l\omega^l, g^1X_1, \cdots, g^kX_k) = f_1\cdots f_lg^1\cdots g^kT(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k).$$

对于光滑张量场,则只需对上述 1-形式、向量场、函数加上光滑性要求即可.

例 5.2.4. M 上的一个对称正定光滑 (0,2)-张量场 g 被称为 M 上的 **Riemann 度量**. 局部来看每个 Riemannian 度量有形式

$$g = \sum g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j,$$

其中 $(g_{ij}(x))$ 是一个光滑地依赖于 x 的正定对称矩阵.

¶ 光滑流形上微分形式的运算

微分形式是本书后半部分的主题. 全体光滑 k-形式的集合将被记为 $\Omega^k(M)$ (代替冗长 地表达式 $\Gamma^\infty(\Lambda^kT^*M)$). 注意 M 上任意的光滑函数可以被视作一个光滑 0-形式, 故

$$\Omega^0(M) = C^{\infty}(M).$$

由于当 $k > n = \dim M$ 时 T_pM 上不存在 k-形式, 所以

$$\Omega^k(M) = 0, \quad \forall k > n.$$

注意如果 $\omega \in \Omega^k(M)$, 并且 $X_1, \dots, X_k \in \Gamma^{\infty}(TM)$, 那么 $\omega(X_1, \dots, X_k) \in C^{\infty}(M)$.

当然前面对线性 k-形式的逐点运算仍然对流形上的微分形式有意义,从而流形上的微分形式有如下运算:

- 楔积 $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \to \Omega^{k+l}(M)$.
 - 例如, 在局部坐标系中, 有

$$(dx^{1} + 2dx^{2}) \wedge (dx^{1} \wedge dx^{2} - dx^{2} \wedge dx^{3} + 3dx^{1} \wedge dx^{3}) = -7dx^{1} \wedge dx^{2} \wedge dx^{3}.$$

- 对任意的 $X \in \Gamma^{\infty}(TM)$, 内乘 $\iota_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$.
 - 例如, 在局部坐标系中, 有

$$\iota_X(dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k})=\sum_r(-1)^{r-1}dx^{i_r}(X)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{i_r}}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}.$$

- 对任意的光滑映射 $\varphi: N \to M$, **拉回** $\varphi^*: \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$. 其定义方式是"通过 线性映射 $d\varphi_p: T_pN \to T_{\varphi(p)}M$ 逐点定义".
 - 所以如果 $\omega \in \Omega^k(M)$, 那么

$$(\varphi^*\omega)_p(X_1,\cdots,X_k)=\omega_{\varphi(p)}(d\varphi_p(X_1),\cdots,d\varphi_p(X_k)).$$

如果 k=0, 那么 φ^* 正好就是函数上的拉回 $\varphi^*: C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(N)$.

注意 \land 是分次代数 $\Omega^*(M)=\oplus_{k=0}^m\Omega^k(M)$ 上的"乘法",而内乘则是该分次代数上的一个 -1 阶反导子. 这些运算都是 $C^\infty(M)$ 线性的 (其中 \land 是 $C^\infty(M)$ 双线性的). 下面列出这些运算的一些基本性质.

命题 5.2.5. (流形上微分形式的楔积、内乘与拉回)

假设 $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M), X \in \Gamma^\infty(TM)$ 与 $\varphi \in C^\infty(N,M)$ 与 $\psi \in C^\infty(M,\widetilde{M}).$ 那么

- (1) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.
- (2) $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta$.
- (3) $\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_X \eta$.
- (4) $\iota_X \circ \iota_X = 0$.
- (5) $(\psi \circ \varphi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

因为这些性质全部都能从定义与相应的线性微分形式的结果中得到, 所以证明从略.

5.2.2 外微分

¶ 外微分: 一个局部定义

下面定义微分形式的外微分. 不同于上面定义的楔积、内乘与拉回运算, 外微分不再是一个逐点运算, 而是一个局部运算(也就是它依赖于"附近的值")

先从熟悉的 $f \in \Omega^0(M) = C^{\infty}(M)$ 开始,此时 $df \in \Omega^1(M)$,从而有线性映射

$$d: \Omega^0(M) \to \Omega^1(M), \qquad f \mapsto df.$$

局部来看,在每个坐标卡上

$$df = \sum_{i} (\partial_i f) dx^i.$$

下面假定 ω 是 M 上的一个 k-形式, 从而在局部坐标系中有

$$\omega = \sum_{I} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

为了将 $d\omega$ 定义为一个 (k+1)-形式, 很自然地方式是令

$$d\omega = \sum_{I} d\omega_{i_{1},\dots,i_{k}} \wedge dx^{i_{1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k}}$$

$$= \sum_{I,i} \partial_{i}(\omega_{i_{1},\dots,i_{k}}) dx^{i} \wedge dx^{i_{1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k}}.$$
(5.2.1)

例如, 当 $M = \mathbb{R}^3$ 时,

- 对于 $f \in \Omega^0(M)$, 有 $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$.
- 对于 $\alpha = f dx + g dy + h dz$,有 $d\alpha = (h_y g_z) dy \wedge dz + (f_z h_x) dz \wedge dx + (g_x f_y) dx \wedge dy$.
- 对于 $\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$, 有 $d\omega = (f_x + g_y + h_z) dx \wedge dy \wedge dz$.

而这三个对应关系

$$f \leadsto (f_x, f_y, f_z),$$

 $(f, g, h) \leadsto (h_y - g_z, f_z - h_x, g_x - f_y),$
 $(f, g, h) \leadsto f_x + g_y + h_z$

恰好就是向量分析中的梯度、旋度和散度中所出现的分量!于是,这样定义的"外微分" 运算就统一了向量分析中的梯度、旋度和散度.

¶ 外微分: 一个与坐标无关的定义

不过,在继续探索 $d\omega$ 的性质之前,还需要解决一个问题:为什么 (5.2.1) 在流形上是良定的?换句话说,由 (5.2.1) 所定义的 (k+1)-形式 $d\omega$ 是否依赖于坐标卡的选取?

通常有两种方式证明一个用局部坐标方式定义在在流形上的概念的良定性. 一种方法是验证"即便选取另一个坐标卡,所定义的量依然不变",另一种方法是给出一个等价但却与坐标无关的定义 (通常被称为不变定义). 在这里我们将采取第二种方法,因为 $d\omega$ 的与坐标无关的表达式也是非常重要的.

为了寻找 $d\omega$ 的不变公式, 先从比较小的 k 开始试验.

• 当 k=0, 也就是 $\omega=f\in C^\infty(M)$ 时, 可以将 df 当作一个 $C^\infty(M)$ -线性映射 $df:\Gamma^\infty(TM)\to C^\infty(M)$

使得

$$df(X) = Xf.$$

• 当 k=1, 也就是 $\omega \in \Omega^1(M)$ 时, 想要将 $d\omega$ 写成一个 $C^\infty(M)$ -双线性映射

$$d\omega: \Gamma^{\infty}(TM) \times \Gamma^{\infty}(TM) \to C^{\infty}(M).$$

为此, 先考虑局部表达式 $\omega = \sum_i \omega_i dx^i$, $X = \sum_k X^k \partial_k$ 与 $Y = \sum_l Y^l \partial_l$. 那么

$$d\omega(X,Y) = \sum_{i,j,k,l} (\partial_j \omega_i) dx^j \wedge dx^i (X^k \partial_k, Y^l \partial_l)$$

$$= \sum_{i,j} ((\partial_j \omega_i) X^j Y^i - (\partial_j \omega_i) X^i Y^j)$$

$$= \sum_{i,j} (X^j \partial_j (\omega_i Y^i) - \omega_i X^j \partial_j (Y^i) - Y^j \partial_j (\omega_i X^i) + \omega_i Y^j \partial_j (X^i))$$

$$= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

故

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

• 当 k=2, 也就是 $\omega \in \Omega^2(M)$ 时, 通过繁琐的计算可以得到: 作为一个 $C^\infty(M)$ -三 重线性映射 $d\omega: \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(TM) \to C^\infty(M)$, 函数 $d\omega(X,Y,Z)$ 可以表示为

$$X(\omega(Y,Z)) - Y(\omega(X,Z)) + Z(\omega(X,Y)) - \omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X).$$

观察一下, 自然地可以给出 $d\omega$ 的 不变公式: 作为 $C^{\infty}(M)$ -多重线性映射

$$d\omega: \Gamma^{\infty}(TM) \times \cdots \times \Gamma^{\infty}(TM) \to C^{\infty}(M),$$

 $d\omega$ 应当由下面的公式给出:

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) := \sum_{i} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{k+1})) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1}).$$
(5.2.2)

¶ 外微分: 两种定义的合理性

下面证明

定理 5.2.6. $(d\omega$ 定义的一致性)

由 (5.2.2) 所定义的 $d\omega$ 是 M 上的 k+1 形式, 且局部由 (5.2.1) 给出.

证明概要 记公式(5.2.2)后边的 (k+1)-形式为 $\widetilde{d\omega}$. 需要证明

(1) $\widetilde{d\omega}$ 是反对称的, 也就是对任意的 r < s, 一个简单但繁琐的计算给出

$$\widetilde{d\omega}(X_1,\cdots,X_r,\cdots,X_s,\cdots,X_{k+1}) = -\widetilde{d\omega}(X_1,\cdots,X_s,\cdots,X_r,\cdots,X_{k+1}).$$

(2) $\widetilde{d\omega}$ 在每一点处都是多重线性的, 也就是 $\widetilde{d\omega}$ 是 $C^{\infty}(M)$ -线性的. 注意到 $\widetilde{d\omega}$ 显然是 \mathbb{R} -线性的. 从而根据 (1), 只需对任意的 $f \in C^{\infty}(M)$, 证明

$$\widetilde{d\omega}(fX_1, X_2, \cdots, X_{k+1}) = f\widetilde{d\omega}(X_1, \cdots, X_{k+1}).$$

这可以由直接计算来验证:

$$\widetilde{d\omega}(fX_{1}, X_{2}, \dots, X_{k+1}) = fX_{1}(\omega(X_{2}, \dots, X_{k+1}))$$

$$+ \sum_{i>1} (-1)^{i-1} X_{i}(\omega(fX_{1}, \dots, \widehat{X_{i}}, \dots, X_{k+1}))$$

$$+ \sum_{i>1} (-1)^{i+1} \omega([fX_{1}, X_{i}], X_{2}, \dots, \widehat{X_{i}}, \dots, X_{k+1})$$

$$+ \sum_{1 < i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_{i}, X_{j}], fX_{1}, \dots, \widehat{X_{i}}, \dots, \widehat{X_{j}}, \dots, X_{k+1})$$

$$= f\widetilde{d\omega}(X_{1}, \dots, X_{k+1})$$

$$+ \sum_{i>1} (-1)^{i-1} (X_{i}f) \omega(X_{1}, \dots, \widehat{X_{i}}, \dots, X_{k+1})$$

$$- \sum_{i>1} (-1)^{i+1} (X_{i}f) \omega(X_{1}, \dots, \widehat{X_{i}}, \dots, X_{k+1})$$

$$= f\widetilde{d\omega}(X_{1}, \dots, X_{k+1}).$$

(3) 最后验证 $\widetilde{d\omega}$ 有我们期待的局部表达式 (5.2.1). 显然映射

$$d: \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

是线性的. 从而不失一般性, 可以假设在局部坐标卡 U 中

$$\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k.$$

注意到 $[\partial_i, \partial_j] = 0$. 从而对任意的递增指标 $j_1 < \cdots < j_{k+1}$,

$$\widetilde{d\omega}(\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_{k+1}}) = \sum_{i} (-1)^{i-1} \partial_{j_i}(\omega(\partial_{j_1},\cdots,\widehat{\partial}_{j_i},\cdots,\partial_{j_{k+1}}))$$

的右边项几乎都消失了,只有一项还存在,即 $j_1=1,\cdots,j_k=k$ 且 i=k+1 时 (从而 $j_i\geq k+1)$ 的那项. 也就是说,在所有可能的表达式中,唯一可能的非零项 $\widehat{d\omega}(\partial_{j_1},\cdots,\partial_{j_{k+1}})$ 为

$$\widetilde{d\omega}(\partial_1, \cdots, \partial_k, \partial_r) = (-1)^k \partial_r(f).$$

故

$$\widetilde{d\omega} = \sum_{r>k} (-1)^k \partial_r(f) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \wedge dx^r = \sum_{r>k} \partial_r(f) dx^r \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k,$$

这就正好是 (5.2.1) 式所给出的局部表达式.

于是,可以定义

定义 5.2.7. (外微分)

对任意的 $\omega\in\Omega^k(M)$, 称由 (5.2.2) 式 (即局部由 (5.2.1) 式) 所定义的 k+1 形式 $d\omega$ 为 ω 的**外微分**.

¶外微分的性质

外微分有以下良好性质,将在后文中常常用到:

命题 5.2.8. (外微分的性质)

假设 $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M), X \in \Gamma^\infty(TU), \varphi \in C^\infty(N, M).$ 那么

- (1) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
- (2) $d \circ d = 0$.
- (3) $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$.

证明 (1): 由于 d 是线性的,不妨设 $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ 与 $\eta = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$, 其中指标集 $I \cap J = \emptyset$. 直接计算可得

$$\begin{split} d(\omega \wedge \eta) = & d(fgdx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ = & \sum_i \partial_i (fg) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ = & \sum_i (\partial_i f) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \sum_i (\partial_i g) dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ = & d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{split}$$

(2): 首先对 k = 0 验证它:

$$d(df)(X,Y) = X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X,Y]) = X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X,Y]f = 0.$$
 当 $k > 0$ 时,由线性性,可以假设 $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$. 由于 $ddf = 0$ 与 $ddx^i = 0$,所以
$$d(d\omega) = d(df \wedge dx^1 \cdots \wedge dx^k)$$

$$= d(df) \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k + \sum_i (-1)^i df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge d(dx^i) \wedge \cdots \wedge dx^k = 0.$$

(3): 依然首先对 k=0 的情形进行验证:

$$(\varphi^* df)_p(X_p) = df_{\varphi(p)}(d\varphi_p(X_p)) = d(\varphi^* f)_p(X_p).$$

一般的, 假设 $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$. 那么由 (1), (2) 与命题5.2.5,

$$\varphi^* d\omega = \varphi^* (df \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k)$$

$$= \varphi^* (df) \wedge \varphi^* (dx^1) \wedge \dots \wedge \varphi^* (dx^k)$$

$$= d(\varphi^* f) \wedge d(\varphi^* x^1) \wedge \dots \wedge d(\varphi^* x^k)$$

$$= d(\varphi^* f d(\varphi^* x^1) \wedge \dots \wedge d(\varphi^* x^k))$$

$$= d(\varphi^* \omega).$$

注 5.2.9. 由 (1) 可知外微分 d 是分次代数 $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(M)$ 上的反导子.

140

5.2.3 微分形式与张量场的 Lie 导数

在第三章利用向量场 X 生成的 (局部) 流 ϕ_t 进行"拉回", 对函数定义了 Lie 导数:

$$\mathcal{L}_X(f) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^* f \quad \left(=\lim_{t\to 0} \frac{\phi_t^* f - f}{t}\right).$$

由于微分形式也有拉回, 所以可以用同样的方式定义微分形式关于向量场的 Lie 导数:

定义 5.2.10. (微分形式的 Lie 导数)

微分形式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 相对于向量场 $X \in \Gamma^{\infty}(TM)$ 的 **Lie 导数**定义为

$$\mathcal{L}_X(\omega) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_t^* \omega \quad \left(= \lim_{t \to 0} \frac{\phi_t^* \omega - \omega}{t} \right),$$

其中 ϕ_t 是由向量场 X 生成的 (局部) 流.

注意函数的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X f$ 只不过是此定义的特殊情形, 因为 $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$. 对于定义在微分形式上的 Lie 导数, 有

命题 5.2.11. (Lie 导数的实用公式)

假设 $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ 与 $X, X_1, X_2 \in \Gamma^{\infty}(TM)$. 那么

- (1) $d\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_Xd\omega$.
- (2) $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X \omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X \eta$.
- (3) [Cartan 神奇公式] $\mathcal{L}_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega$.
- (4) $\mathcal{L}_{[X_1,X_2]}\omega = \mathcal{L}_{X_1}\mathcal{L}_{X_2}\omega \mathcal{L}_{X_2}\mathcal{L}_{X_1}\omega$.
- (5) $(\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\dots,X_k) = \mathcal{L}_X(\omega(X_1,\dots,X_k)) \sum_i \omega(X_1,\dots,\mathcal{L}_XX_i,\dots,X_k).$

证明概要 (细节留作练习)

- (1) 可以由 $\varphi^*d = d\varphi^*$ 推出, (2) 可以由 $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta$ 推出.
- (3) 和 (4) 可以对 k 用归纳法证明. 例如,对于 (3),首先不难对 k=0 的情形证明 Cartan 神奇公式(注意由定义, $\iota_X f=0$).对于一般的 k-形式 ω ,由线性性,可以假设局部 $\omega=fdx^1\wedge\cdots\wedge dx^k=dx^1\wedge\omega_1$,其中 $\omega_1=fdx^2\wedge\cdots\wedge dx^k$.那么不难对 ω 归纳地验证 Cartan 神奇公式. (4) 可以用类似的归纳法推出.
- (5) 可以首先对简单的 1-形式 $\omega = dx^1$ 验证,然后应用 (2) 与命题5.2.5. **注 5.2.12.** 在第三章也定义了向量场 Y 关于向量场 X 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X(Y)$. 对于张量场,通过规定

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S) := (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_X S)$$

可以将 Lie 导数推广到张量场上. 可以证明对一个一般的 (l,k)-张量 T, 其 Lie 导数 $\mathcal{L}_X T$ 依然是一个 (l,k)-张量, 其计算公式是

$$(\mathcal{L}_X T)(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k) = X(T(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k))$$

$$-\sum_i T(\omega_1, \cdots, \mathcal{L}_X \omega_i, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, X_k)$$

$$-\sum_j T(\omega_1, \cdots, \omega_l, X_1, \cdots, \mathcal{L}_X X_j, \cdots, X_k).$$