

## 4.2 Lie 同态与指数映射

作为一类非常特殊的光滑流形, Lie 群的独特之处在于它有一个整体的线性化即 Lie 代数: 从源头上看, 如果视 Lie 群为连续变换群, 那么 Lie 代数的元素就是所有单参数变换子群所对应的线性化即“无穷小变换”。于是, 一个自然的问题是: 如何从“无穷小变换”通过某种“去线性化”回归到 Lie 群中的单参数变换子群? 这就是本节构建并研究的从 Lie 代数到 Lie 群的指数映射, 它能够帮助从 Lie 代数的线性信息出发再现 Lie 群的非线性信息, 因而在 Lie 理论中起到了非常根本的作用。

### 4.2.1 Lie 同态

#### ¶ Lie 群/Lie 代数同态

跟流形、群等范畴类似, Lie 群和 Lie 代数都各自构成一个重要的范畴, 自然需要研究这些范畴中“保持相应对象本性”的态射。对于 Lie 群范畴而言, 就是 Lie 群同态:

##### 定义 4.2.1. (Lie 群同态)

令  $G, H$  为 Lie 群.

- (1) 若映射  $\phi: G \rightarrow H$  是光滑的, 而且是群同态, 即

$$\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G,$$

则称它是一个 **Lie 群同态**

- (2) 若 Lie 群同态  $\phi: G \rightarrow H$  可逆, 且  $\phi^{-1}: H \rightarrow G$  也是 Lie 群同态, 则称  $\phi$  是 **Lie 群同构**, 并称  $G$  和  $H$  是同构的 Lie 群.



由定义可知, 同构的 Lie 群作为微分流形是微分同胚的, 作为群是群同构的.

**例 4.2.2.** 对任意的 Lie 群  $G$  与任意的元素  $a \in G$ , 容易验证共轭映射

$$c(g) = L_g \circ R_{g^{-1}}: G \rightarrow G, \quad x \mapsto gxg^{-1}$$

是 Lie 群同态, 且  $(c(g))^{-1} = c(g^{-1})$ , 于是所有  $c(g)$  都是 Lie 群同构.

**注 4.2.3.** 在习题 1 中已经看到, 对于任意连通拓扑群  $G$ , 以及单位元  $e \in G$  的任意邻域  $U$ , 都有  $G = \cup_{n=1}^{\infty} U^n$ . 于是如果  $G$  是连通 Lie 群, 则任意 Lie 群同态  $\phi: G \rightarrow H$  被它在  $e$  的任意邻域  $U$  上的限制  $\phi|_U$  所决定.

类似地, Lie 代数范畴的态势就是 Lie 代数同态:

##### 定义 4.2.4. (Lie 代数同态)

令  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  为 Lie 代数.

- (1) 若  $L: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  是线性映射, 且

$$L([X_1, X_2]) = [L(X_1), L(X_2)], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g},$$

则称它是一个 **Lie 代数同态**.

- (2) 若 Lie 代数同态  $L: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  可逆, 则称  $L$  是一个 **Lie 代数同构**, 并称  $\mathfrak{g}$  和  $\mathfrak{h}$  是同构的 Lie 代数.



注意若 Lie 代数同态  $L: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  是可逆的, 那么其逆映射  $L^{-1}: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$  也自动是 Lie 代数同态. 这里我们再一次见证了这样一个现象: “线性对象更容易处理”.

**例 4.2.5.** 对任意  $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ , 易验证伴随映射

$$\mathrm{Ad}_X: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \quad A \mapsto XAX^{-1}$$

是 Lie 代数同态, 且  $\mathrm{Ad}_X = \mathrm{Ad}_{X^{-1}}$ , 于是所有  $\mathrm{Ad}_X$  都是 Lie 代数同构.

### ¶ Lie 群同态诱导的 Lie 代数同态

假设  $\phi: G \rightarrow H$  是一个 Lie 群同态, 那么它在  $e$  处的微分就给出了一个线性映射  $d\phi_e: T_e G \rightarrow T_e H$ . 于是在等同

$$T_e G \simeq \mathfrak{g} \quad \text{与} \quad T_e H \simeq \mathfrak{h}$$

之下, 可诱导出一个从  $\mathfrak{g}$  到  $\mathfrak{h}$  的映射,

$$d\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}.$$

可以更具体地把该映射写出来:  $G$  上的任意左不变向量场  $X \in \mathfrak{g}$  对应于  $T_e G$  中的向量  $X_e$ , 于是  $X$  在该诱导映射下的像  $d\phi(X)$  是  $H$  上由  $d\phi_e(X_e)$  生成的左不变向量场, 从而

$$(d\phi(X))_h = dL_h(d\phi_e(X_e)).$$

**例 4.2.6.** 从  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  上的共轭映射  $c(X): \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  出发. 在恒等矩阵  $I_n$  处取微分, 可得


$$(dc(X))_{I_n}(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c(X)(I + tA) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(I + tA)X^{-1} = XAX^{-1}.$$

也就是说, 此时诱导映射是 Lie 代数同态

$$dc(X) = \mathrm{Ad}_X: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

下面证明诱导映射  $d\phi$  总是一个 Lie 代数同态. 为此, 需要下述引理:

#### 引理 4.2.7. ( $X$ 与 $d\phi(X)$ 的相关性)

设  $\phi: G \rightarrow H$  为 Lie 群同态, 则向量场  $X \in \mathfrak{g}$  与向量场  $d\phi(X) \in \mathfrak{h}$  是  $\phi$  相关的. 

**证明** 任取  $X \in \mathfrak{g}$ . 记  $h = \phi(g)$ . 由于  $\phi$  是一个群同态,

$$\phi \circ L_g = L_h \circ \phi.$$


于是

$$d\phi_g(X_g) = d\phi_g \circ (dL_g)_e(X_e) = dL_h \circ d\phi_e(X_e) = (d\phi(X))_h.$$

这就证明了引理. □

作为推论, 可以证明

#### 定理 4.2.8. (从 Lie 群同态到 Lie 代数同态)

如果  $\phi: G \rightarrow H$  是 Lie 群同态, 那么诱导映射  $d\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  是 Lie 代数同态. 

**证明** 令  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . 由上述引理,

- $X$  与  $d\phi(X)$  是  $\phi$  相关的,  $Y$  与  $d\phi(Y)$  是  $\phi$  相关的, 从而  $[X, Y]$  与  $[d\phi(X), d\phi(Y)]$  是  $\phi$ -相关的.
- $[X, Y]$  与  $d\phi([X, Y])$  是  $\phi$  相关的.

于是立即可以得出

$$[d\phi(X), d\phi(Y)]_e = d\phi_e([X, Y]_e) = (d\phi([X, Y]))_e.$$

由于  $d\phi([X, Y])$  和  $[d\phi(X), d\phi(Y)]$  都是左不变向量场,  $d\phi([X, Y]) = [d\phi(X), d\phi(Y)]$ .  $\square$

注意若  $\phi: G \rightarrow H$  是 Lie 群同构, 则诱导映射  $d\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  是 Lie 代数同构.

**例 4.2.9.** 考虑行列式映射

$$\det: \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*.$$

它是从一般线性群到非零实数乘法群的 Lie 群同态, 因为

$$\det(XY) = \det X \det Y, \quad \forall X, Y \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

则由  $\det(X + tA) = (\det X) \det(I + tX^{-1}A) = (\det X)(1 + t\mathrm{tr}(X^{-1}A) + O(t^2))$  可知 (第二章习题)

$$(d\det)_X(A) = (\det X)\mathrm{tr}(X^{-1}A), \quad \forall X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

通过取  $X = I_n$ , 可见  $\det$  诱导的 Lie 代数同态 (注意  $\mathbb{R}^*$  的 Lie 代数是平凡 Lie 代数  $\mathbb{R}$ ) 是

$$d\det = \mathrm{tr}: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \mathrm{tr}(A).$$

特别的, 由  $\mathbb{R}$  上 Lie 代数平凡, 可得下述熟知事实的一个“概念性”证明

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}).$$

**例 4.2.10.** 因为 Lie 群  $G$  中的每个元素  $g \in G$  都给出了一个 Lie 群同构

$$c(g): G \rightarrow G, \quad x \mapsto gxg^{-1},$$

所以它们的诱导映射

$$\mathrm{Ad}_g = dc(g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

都是 Lie 代数同构. 特别地, 对于任意  $g \in G$ , 都有  $\mathrm{Ad}_g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ . 把所有这些可逆线性映射放到一起, 就得到了一个映射

$$\mathrm{Ad}: G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto \mathrm{Ad}_g.$$

事实上, 映射  $\mathrm{Ad}$  还是一个群同态: 由定义知  $c(g_1g_2) = c(g_1) \circ c(g_2)$ , 从而根据链式法则,  $(dc(g_1g_2))_e = (dc(g_1))_e \circ (dc(g_2))_e$ , 即

$$\mathrm{Ad}(g_1g_2) = \mathrm{Ad}(g_1) \circ \mathrm{Ad}(g_2).$$

此外,  $\mathrm{Ad}$  显然关于  $g$  连续, 进而根据下一节将要证明的推论 4.3.20,  $\mathrm{Ad}$  是光滑映射, 从而是一个 Lie 群同态. Lie 群同态  $\mathrm{Ad}$  把任意 Lie 群  $G$  实现为线性空间  $\mathfrak{g}$  上的矩阵 Lie 群 (当然这个对应关系未必是单射或满射), 被称为 Lie 群  $G$  的伴随表示.

因为  $\mathrm{Ad}$  是 Lie 群同态, 再一次取它在相应 Lie 代数上的诱导映射, 就得到另一个 Lie 代数同态

$$\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}).$$

该映射把 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  中的每个元素自然地对应于线性空间  $\mathfrak{g}$  上的一个线性映射, 从而把 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  实现为线性空间  $\mathfrak{g}$  上的矩阵 Lie 代数 (当然它未必是单射或满射), 被称为 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的伴随表示. Lie 群和 Lie 代数的伴随表示在研究 Lie 群和 Lie 代数时起着非常重要的作用。

**注 4.2.11.** 抽象地来看, Lie 理论的基本研究内容是两个范畴

(1) Lie 群范畴  $\mathcal{LIEGROUP}$

- 对象为 Lie 群,
- 态射为 Lie 群同态,

(2) Lie 代数范畴  $\mathcal{LIEALGEBRA}$

- 对象为 Lie 代数,
- 态射为 Lie 代数同态

以及这两个范畴之间的函子  $\mathcal{LIE}$ , 该函子将

- 每个 Lie 群  $G$  对应于一个 Lie 代数  $\mathfrak{g}$ ,
- 每个 Lie 群同态  $\phi: G \rightarrow H$  对应于一个 Lie 代数同态  $d\phi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ .<sup>4</sup>

当然, 这个对应并不是一对一的: 很容易可以找出不同的 Lie 群, 例如  $\mathbb{R}$  和  $S^1$ , 它们具有完全相同的 Lie 代数. 不过, 可以证明: 如果仅仅考虑  $\mathcal{LIEGROUP}$  中由所有单连通 Lie 群所组成的子范畴, 以及  $\mathcal{LIEALGEBRA}$  中由所有有限维 Lie 代数所组成的子范畴, 那么函子  $\mathcal{LIE}$  就是“可逆的”. 事实上, 根据 Lie 第三定理, 任意有限维 Lie 代数都是某个单连通 Lie 群的 Lie 代数; 反之, 如果  $G$  是单连通 Lie 群, 那么任意的 Lie 代数同态  $L: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  可以被提升为一个 Lie 群同态  $\phi: G \rightarrow H$ , 使得  $L = d\phi$ .

## 4.2.2 指数映射

### ¶ Lie 群的单参数子群

令  $G$  为任意 Lie 群,  $\mathfrak{g}$  为它的 Lie 代数. 由定义可知, 任何  $X \in \mathfrak{g}$  都是一个左不变向量场. 一般而言  $G$  未必是紧的, 从而  $X$  也未必是紧支的. 尽管如此, 得益于左平移映射, 依然可以“一致地控制”左不变向量场在不同点的向量. 由此可以证明(留作练习)

**引理 4.2.12.** (左不变向量场是完备的)

任何 Lie 群  $G$  上的左不变向量场  $X \in \mathfrak{g}$  都是完备的.



令  $\phi_t^X: G \rightarrow G$  为由左不变向量场  $X \in \mathfrak{g}$  生成的流. 完备性保证了  $\phi_t^X$  对所有的  $t$  是良定的微分同胚. 不出意料的是, 它跟 Lie 群的乘法关系密切:

**命题 4.2.13.** (Lie 群上的流 = 右乘法)

设  $G$  是 Lie 群, 则对于任意  $g \in G, X \in \mathfrak{g}$  以及  $t \in \mathbb{R}$ , 有  $\phi_t^X(g) = g\phi_t^X(e)$ .



证明是标准的, 留作练习。

<sup>4</sup>根据范畴的定义, 需要验证  $d(\text{Id}_G) = \text{Id}_{\mathfrak{g}}$  与  $d(\phi_1 \circ \phi_2) = d\phi_1 \circ d\phi_2$ , 这些都可以容易地从定义推出.

于是 Lie 群  $G$  上左不变向量场  $X$  所生成流在  $G$  上的作用就是右乘

$$\phi_t^X = R_{\phi_t^X(e)}.$$

特别地, 由流的群性质可知对于任意  $g \in G$ ,

$$g\phi_{s+t}^X(e) = \phi_{t+s}^X(g) = \phi_t^X \phi_s^X(g) = \phi_t^X(g\phi_s^X(e)) = g\phi_s^X(e)\phi_t^X(e).$$

于是

**推论 4.2.14. (单参数子群)**

设  $G$  是 Lie 群, 则对于任意  $X \in \mathfrak{g}$ , 有

$$\phi_{s+t}^X(e) = \phi_s^X(e)\phi_t^X(e).$$



换言之, 对于任意  $X \in \mathfrak{g}$ , 映射

$$\rho^X : \mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \phi_t^X(e)$$

是一个群同态. 此外, 不难证明映射  $\rho^X$  是光滑映射 (事实上, 映射  $(t, X) \mapsto \phi_t^X(e)$  是从  $\mathbb{R} \times \mathfrak{g}$  到  $G$  的光滑映射, 见定理 4.2.19 的证明), 所以  $\rho^X$  是一个从  $\mathbb{R}$  到  $G$  的 Lie 群同态, 被称为 Lie 群  $G$  的 **单参数子群**.

于是, 任意  $X \in \mathfrak{g}$  都给出了  $G$  中的一个单参数子群. 反之, 若  $\rho$  是 Lie 群  $G$  中的一个单参数子群, 令

$$X_g := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_{\rho(t)}g,$$

则不难验证  $X$  是  $G$  上的一个左不变向量场. 此外,  $X \in \mathfrak{g}$  与  $\rho^X$  之间的对应关系是一个一一对应. 向量场  $X$  被称为单参数子群  $\rho$  的 **无穷小生成元**. 于是, 我们得到了 Lie 群  $G$  的 Lie 代数的第三幅面目:  $G$  中的所有单参数子群的无穷小生成元. 事实上这正是 Lie 最初发展 Lie 理论时所采用的视角.

应用单参数子群, 可以揭开例 4.2.10 中最后出现的 Lie 代数同态  $\text{ad}$  的真面目:

**命题 4.2.15. (Lie 代数伴随表示 = Lie 括号)**

设  $G$  是 Lie 群, 则对于任意  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , 有  $\text{ad}(X)(Y) := [X, Y]$ .



一般的, 对于抽象 Lie 代数  $\mathfrak{g}$ , 人们也把

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \quad \text{ad}(X)(Y) := [X, Y]$$

叫做  $\mathfrak{g}$  的伴随表示. 用  $\mathfrak{g}$  的 Jacobi 恒等式, 不难验证它是 Lie 代数同态.

## 指数映射

左不变向量场的完备性保证了  $\phi_t^X$  对所有的  $t$  是良定的微分同胚. 特别地, 它在  $t = 1$  处有定义.

**定义 4.2.16. (指数映射)**

称下述映射为 Lie 群  $G$  的指数映射<sup>a</sup>

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \phi_1^X(e).$$

<sup>a</sup>在 Riemann 几何中也有一个指数映射的概念. 事实上, 如果  $G$  是一个赋有双不变度量的紧 Lie 群, 那么它在 Riemann 几何意义下的指数映射就和这里 Lie 理论意义下的指数映射是相同的.



根据引理 3.2.9, 不难看出  $\phi_{ts}^X = \phi_s^{tX}$ . 从而

$$\exp(tX) = \phi_1^{tX}(e) = \phi_t^X(e).$$

此外, 推论 4.2.14 用指数映射的语言, 可写成

$$\exp(tX) \cdot \exp(sX) = \exp((t+s)X).$$

【注意一般而言  $\exp(tX)\exp(tY) \neq \exp(t(X+Y))$ .】

**例 4.2.17.** 对于  $G = \mathbb{R}^*$ , 可以将  $T_1G$  等同于  $\mathbb{R}$ . 即将  $x \in \mathbb{R}$  等同于向量  $x \frac{d}{dt} \in T_1G$ , 对应的左不变向量场在  $a \in G$  处的值时就是

$$X_a = ax \frac{d}{dt}.$$

通过解相应的常微分方程, 可以得到  $X$  的从  $e = 1$  出发的积分曲线为  $\gamma_e^X(t) = e^{tx}$ . 于是,  $G$  上的指数映射就是熟悉的指数函数:

$$\exp(x) = \phi_1^X(e) = \gamma_e^X(1) = e^x.$$

**例 4.2.18.** 类似地可以证明(留作习题)

(1) 对于  $G = (S^1, \cdot)$  而言,

$$\exp : i\mathbb{R} = T_e S^1 \rightarrow S^1, \quad \exp(ix) = e^{ix},$$

(2) 对于  $G = (\mathbb{R}^n, +)$  而言,

$$\exp : \mathbb{R}^n = T_0 \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \exp(x) = x,$$

(3) 对于  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  而言,

$$\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \exp(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots.$$

## 指数映射的微分

指数映射最有用的性质之一是

**命题 4.2.19. (指数映射在单位元处的微分)**

指数映射  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  是光滑映射, 且它在单位元处的微分 (在典范同构  $T_0\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$  以及  $T_eG \simeq \mathfrak{g}$  下) 为恒等映射

$$(d\exp)_0 = \text{Id}_{\mathfrak{g}} : T_0\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \simeq T_eG.$$



**证明** 考虑光滑流形  $G \times \mathfrak{g}$  上的向量场  $\widetilde{X}$ , 它在点  $(g, X)$  处的切向量是

$$\widetilde{X}_{(g,X)} = (X_g, 0).$$

不难证明它是完备的, 并且它的流是

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g}, \quad (t, g, X) \mapsto (g \cdot \exp(tX), X).$$

因此  $\tilde{\Phi}$  是光滑的. 这说明  $\exp$  是光滑映射, 因为它可表示成以下光滑映射的复合

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \times G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\tilde{\Phi}} G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\pi_1} G, \\ X &\longmapsto (1, e, X) \longmapsto (\exp(X), X) \mapsto \exp(X). \end{aligned}$$

【同理可知映射  $(t, X) \mapsto \exp(tX)$  是从  $\mathbb{R} \times \mathfrak{g}$  到  $G$  的光滑映射.】

对于任意  $X \in T_0\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$ , 由于  $\exp(tX) = \phi_t^X(e) = \gamma_e^X(t)$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) = X_e.$$

另一方面,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp \circ tX = (d\exp)_0 \frac{d(Xt)}{dt} = (d\exp)_0 X.$$

因此  $(d\exp)_0$  在上述典范同构下等于恒等映射. □

特别地,  $(d\exp)_0$  是双射, 从而

**推论 4.2.20.** ( $\exp$  是局部微分同胚)

指数映射  $\exp$  在 0 附近是一个局部微分同胚.

**注 4.2.21.** 由例 4.2.18 可知, 一般来说  $\exp$  不是一个全局微分同胚. 一个自然的问题是:

指数映射  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  是满射吗?

显然为了使  $\exp$  是满射, 一个必要的条件就是  $G$  应当是连通的. 事实上对于任意紧连通 Lie 群  $G$ , 指数映射总是满射. 然而, 对于非紧连通 Lie 群而言, 指数映射未必是满射.

## ¶ Baker-Campbell-Hausdorff 公式

作为指数映射微分的一个应用, 下面证明

**命题 4.2.22.** (Lie 群乘法 v.s. Lie 代数加法)

任给  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , 存在光滑映射  $Z : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{g}$  使得对任意的  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , 有

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp(t(X + Y) + t^2 Z(t)).$$

**证明** 由于  $\exp$  是  $0 \in \mathfrak{g}$  附近的一个微分同胚, 存在  $\varepsilon > 0$  使得映射

$$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{g}, \quad t \mapsto \varphi(t) = \exp^{-1}(\exp(tX) \exp(tY))$$

是光滑的. 注意到映射  $\varphi$  可被写成复合映射

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\gamma_e^X \times \gamma_e^Y} G \times G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\exp^{-1}} \mathfrak{g}.$$

根据推论 4.1.11,  $d\mu_{e,e}(X, Y) = X + Y$ . 于是

$$\varphi'(0) = (d\exp)_0^{-1}(\dot{\gamma}_e^X(0) + \dot{\gamma}_e^Y(0)) = X + Y.$$

由于  $\varphi(0) = 0$ , 由  $\varphi(t) = \varphi(0) + t \int_0^1 \varphi'(ts) ds$  可得

$$\varphi(t) = t(X + Y) + t^2 Z(t)$$

其中  $Z(t) = \int_0^1 \int_0^1 s\varphi''(tus)duds$  是光滑函数.  $\square$

**注 4.2.23.** 神秘函数  $Z$  的具体表达式被称为 Baker-Campbell-Hausdorff 公式:

$$Z(t) = \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{t}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) + \frac{t^2}{24}[X, [Y, [X, Y]]] + \dots$$

这个公式可被视为是“Lie 代数的线性结构以及 Lie 括号结构”跟“Lie 群的乘法结构”之间的桥梁。

### ¶ exp 的自然性

最后把指数映射与 Lie 群/Lie 代数同态联系起来.

#### 命题 4.2.24. (exp 的自然性)

给定任意 Lie 群同态  $\varphi: G \rightarrow H$ , 图表

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \exp_G & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H \end{array}$$

是交换的, 即  $\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ (d\varphi)$ . 

**证明** 对于任意  $X \in \mathfrak{g}$ ,

$$\varphi \circ \exp_G: \mathbb{R} \rightarrow H, \quad t \mapsto \varphi \circ \exp_G(tX)$$


是  $H$  的单参数子群, 并且

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi \circ \exp_G(tX) = d\varphi_e(X).$$

故  $\varphi \circ \exp_G(tX) = \exp_H \circ (d\varphi)_e(X)$ .  $\square$

特别地, “Lie 群同态在单位元附近的性态”跟“它生成的 Lie 代数同态”互相决定。由于连通 Lie 群由它在单位元处的任意小邻域生成, 立刻得到

#### 推论 4.2.25. (从 Lie 代数同态到 Lie 群同态)

如果  $G$  是连通的, 那么任何 Lie 群同态  $\varphi: G \rightarrow H$  是由它诱导的 Lie 代数同态  $d\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  决定的. 

将 exp 的自然性分别应用于 Lie 群同态  $c(g): G \rightarrow G$  和  $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ , 立得

#### 命题 4.2.26. (指数映射与伴随表示)

设  $G$  是 Lie 群, 则对于任意  $g \in G, X \in \mathfrak{g}$  以及  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(1) g(\exp tX)g^{-1} = \exp(t\text{Ad}_g X),$$

$$(2) \text{Ad}(\exp(tX)) = \exp(t\text{ad}(X)),$$

其中最后一个 exp 为矩阵指数函数  $\exp(A) = \sum_k \frac{1}{k!} A^k$ , 而其余三个 exp 为 Lie 群  $G$  的指数映射. 