第 5 章 流形上的微积分

本章研究流形上的微分形式及其积分理论. 在多元积分中学过的涉及曲线、曲面积分的几个基本定理 (Green 公式, Gauss 公式, Stokes 公式), 将被统一推广到任意维数的流形. 不过, 因为维数的升高, 仅仅使用向量运算 (梯度、散度、旋度) 已经不够了. 为此, 需要先引入多重线性代数的几个基本概念: 张量、形式及其运算.

5.1 张量与微分形式

5.1.1 作为多重线性映射的张量

¶ 多重线性映射

先给出多重线性映射的概念, 它是熟悉的线性映射以及双线性映射的推广:

定义 5.1.1. (多重线性映射)

设 $V_1,\cdots,V_k,W$ 为有限维线性空间. 若映射 $T:V_1\times\cdots\times V_k\to W$ 对每一分量都满足线性性, 即对每一个 i 与任意固定的向量 $v_1\in V_1,\cdots,v_{i-1}\in V_{i-1},v_{i+1}\in V_{i+1},\cdots,v_k\in V_k$, 映射

$$T_i:V_i\to V,\quad v_i\mapsto T(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_k)$$

是线性的, 则称 T 是 **多重线性映射**. ♣

注意如果 T_1,T_2 都是从 $V_1\times\cdots\times V_k$ 到 W 的多重线性映射, 那么它们的线性组合也同样是多重线性映射. 故所有从 $V_1\times\cdots\times V_k$ 到 W 的多重线性映射组成一个向量空间.

下面主要考虑 $W=\mathbb{R}$(或其他数域, 而 V_i 都是该数域上的线性空间) 的情形, 此时多重线性映射被称为**多重线性函数**. 若 T 是 $V_1\times\cdots\times V_k$ 上的多重线性函数, 而 S 是 $V_{k+1}\times\cdots\times V_{k+l}$ 上的多重线性函数, 则可以定义它们的**张量积**$T\otimes S$ 为 $V_1\times\cdots\times V_{k+l}$ 上由下式定义的多重线性函数,

$$(T\otimes S)(v_1,\cdots,v_{k+l})=T(v_1,\cdots,v_k)S(v_{k+1},\cdots,v_{k+l}).$$

不难验证, 多重线性函数的张量积运算是一个双线性映射, 并且满足结合律:

$$(T\otimes S)\otimes R=T\otimes(S\otimes R),$$

于是可以定义更多的多重线性函数的张量积.

例 5.1.2. 给定对偶空间的元素 $f^1\in V_1^*,\cdots,f^k\in V_k^*$, 令

$$f^1\otimes\cdots\otimes f^k:V_1\times\cdots\times V_k\to\mathbb{R},\qquad (v_1,\cdots,v_k)\mapsto f^1(v_1)\cdots f^k(v_k).$$

显然 $f^1\otimes\cdots\otimes f^k$ 是一个多重线性映射. 注意由定义, 对每个 $1\le i\le k$ 与 $\lambda\in\mathbb{R}$, 都有

$$f^1\otimes\cdots\otimes f^{i-1}\otimes\lambda f^i\otimes f^{i+1}\otimes\cdots\otimes f^k=\lambda f^1\otimes\cdots\otimes f^{i-1}\otimes f^i\otimes f^{i+1}\otimes\cdots\otimes f^k.$$

不出所料的是, 任意多重线性函数是这种特殊多重线性函数的线性组合:

定理 5.1.3. (多重线性函数空间的基)

设 $\{f_i^1,\cdots,f_i^{n(i)}\}$ 是 V_i^* 的一组基. 那么下面这组多重线性函数

$$\{f_1^{i_1}\otimes f_2^{i_2}\otimes\cdots\otimes f_k^{i_k}\mid 1\le i_j\le n(j)\}$$

构成了 $V_1\times\cdots\times V_k$ 上的多重线性函数空间的一组基. ♡

证明 对于 V_i^* 中的基 $\{f_i^1,\cdots,f_i^{n(i)}\}$, 记 V 中对应的对偶基为 $\{e_1^i,\cdots,e_{n(i)}^i\}$. 对任意多重指标 $I=(i_1,\cdots,i_k)$, 记 $F^I=f_1^{i_1}\otimes f_2^{i_2}\otimes\cdots\otimes f_k^{i_k}$. 注意到

$$F^I(e_{j_1}^1,\cdots,e_{j_k}^k)=\delta_{j_1,\cdots,j_k}^{i_1,\cdots,i_k},$$

所以这些多重线性函数 F^I 都是线性无关的.

进一步, 对 $V_1\times\cdots\times V_k$ 上任意多重线性函数 T, 如果令 $T_I=T(e_{i_1}^1,\cdots,e_{i_k}^k)$, 并考虑多重线性函数

$$S=T-\sum\nolimits_I T_IF^I,$$

那么对任意多重指标 $J=(j_1,\cdots,j_k)$ 均有 $S(e_{j_1}^1,\cdots,e_{j_k}^k)=0$. 由多重线性性可知 $S\equiv 0$. 换句话说, $T=\sum T_IF^I$ 是 F^I 的线性组合. □

¶ 张量

下面考虑所有 $V_1,\cdots,V_k$ 均为某个有限维线性空间 V 或者其对偶空间 V^* 的情形, 并把 $V^*\times\cdots\times V^*\times V\times\cdots\times V$ 上的所有多重线性函数所组成的空间记为

$$\otimes^{l,k}V=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{l}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{k},$$

其元素称为 V 上的 (l,k)-**型张量**. 根据定理5.1.3, 若 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 为 V 的一组基而 $\{f^1,\cdots,f^m\}$ 为 V^* 中的对偶基, 则空间 $\otimes^{l,k}V$ 的一组基为

$$\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_l}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_k}\mid 1\le i_1,\cdots,i_l,j_1,\cdots,j_l\le m\}.$$

于是, $\dim\otimes^{l,k}V=m^{l+k}$. 此外, 可以自然定义张量积运算

$$\otimes:\otimes^{l_1,k_1}V\times\otimes^{l_2,k_2}V\to\otimes^{l_1+l_2,k_1+k_2}V.$$

特别地, 记

$$\otimes^{l,0}V:=\otimes^lV,\qquad \otimes^{0,k}V=\otimes^kV^*.$$

注意根据定义, 有

$$\otimes^{1,0}V=V,\qquad \otimes^{0,1}V=V^*.$$

当 $k=0$ 时, 规定 $\otimes^0V=\mathbb{R}$.

注 5.1.4. 对于 (可能是无穷维的) 抽象向量空间而言, 不能将 V 当成 $(V^*)^*$, 但是依然可以代数地定义张量积如下. 首先定义 $V\otimes W$ 为商空间

$$V\otimes W=F(V\times W)/\sim,$$

其中 $F(V\times W)$ 是 $V\times W$ 上的 (无穷维) **自由向量空间**，而 $\sim$ 是由

$$(c_1v_1+c_2v_2,w)\sim c_1(v_1,w)+c_2(v_2,w)$$

$$(v,c_1w_1+c_2w_2)\sim c_1(v,w_1)+c_2(v,w_2)$$

生成的等价关系.

¶ 缩并

假设 $l,k\geq 1$. 接下来在 (l,k)-张量上定义一个非常有用的操作.

定义 5.1.5. (缩并)

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 V 的一组基，且 $\{f^1,\cdots,f^n\}$ 是其对偶基. 对任意 $1\leq r\leq l, 1\leq s\leq k$ 以及 $T\in\otimes^{l,k}V$，定义 $C^r_s(T)\in\otimes^{l-1,k-1}V$ 为由下式给出的张量，

$$\begin{aligned}&C^r_s(T)(\beta^1,\cdots,\beta^{k-1},v_1,\cdots,v_{l-1})\\ :=&\sum_i T(\beta^1,\cdots,\beta^{r-1},f^i,\beta^r,\cdots,\beta^{k-1},v_1,\cdots,v_{s-1},e_i,v_s,\cdots,v_{l-1})\end{aligned}$$

并称之为张量 T 的 (r,s)**-缩并**. ♣

例 5.1.6. 设 $v,w\in V$ 且 $\alpha,\beta,\gamma\in V^*$. 下面用定义计算 $C^1_2(v\otimes w\otimes\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)$:

$$\begin{aligned}C^1_2(v\otimes w\otimes\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)(\beta^1,v_1,v_2)&=\sum_i v\otimes w\otimes\alpha\otimes\beta\otimes\gamma(f^i,\beta^1,v_1,e_i,v_2)\\&=\sum_i f^i(v)\beta^1(w)\alpha(v_1)\beta(e_i)\gamma(v_2)\\&=\left(\sum_i f^i(v)\beta(e_i)\right)\beta^1(w)\alpha(v_1)\gamma(v_2)\\&=\beta(v)\beta^1(w)\alpha(v_1)\gamma(v_2)\\&=\beta(v)w\otimes\alpha\otimes\gamma(\beta^1,v_1,v_2).\end{aligned}$$

故有 $C^1_2(v\otimes w\otimes\alpha\otimes\beta\otimes\gamma)=\beta(v)w\otimes\alpha\otimes\gamma$.

该例子表明 C^r_s 的定义跟基底 $\{e_i\}$ 的选取无关，从而给出了一个 (r,s)-缩并映射

$$C^r_s:\otimes^{l,k}V\to\otimes^{l-1,k-1}V.$$

不仅如此，$C^r_s(T)$ 是将 T 中的第 r 个向量与第 s 个余向量配对得到的 $(l-1,k-1)$-张量:

引理 5.1.7

设 T 是一个 (l,k)-张量，$1\leq r\leq l, 1\leq s\leq k$.

(1) C^r_s 的定义与 V 中的基 $\{e_i\}$ 的选取无关.

(2) 对于任意的 $v_1,\cdots,v_l\in V$ 与 $\beta^1,\cdots,\beta^k\in V^*$,

$$C^r_s(v_1\otimes\cdots\otimes v_l\otimes\beta^1\otimes\cdots\otimes\beta^k)=\beta^s(v_r)v_1\otimes\cdots\otimes\widehat{v_r}\otimes\cdots\otimes v_l\otimes\beta^1\otimes\cdots\otimes\widehat{\beta^s}\otimes\cdots\otimes\beta^k,$$

其中 $\widehat{\ }$ 意为“删去相应的位置”. ♢

其证明留作练习.

5.1.2 线性 p-形式

¶ 对称与交错张量

下面固定一个线性空间 V, 并考虑一个 V 上的 $(0,k)$-张量空间 $\otimes^k V^* = \otimes^{0,k} V$. 令 S_k 为 k 个元素的对称群. 对于任意 $\sigma \in S_k$ 以及 $(0,k)$ 张量 $T \in \otimes^k V^*$, 令

$$T^\sigma(v_1, \cdots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}).$$

则 T^σ 也是 V 上的 $(0,k)$-张量, 且对所有 k-张量 T 以及所有 $\sigma, \pi \in S_k$, 都有

$$(T^\sigma)^\pi = T^{\pi\circ\sigma}.$$

换而言之,

$$\sigma \in S_k \rightsquigarrow (T \in \otimes^k V^* \mapsto T^\sigma \in \otimes^k V^*)$$

给出了群 S_k 在 $\otimes^k V^*$ 上有一个自然的作用. 该群作用下的"不变元素"以及"交错元素"分别被称为对称张量与交错张量:

定义 5.1.8. (对称张量与交错张量)

设 $T \in \otimes^k V^*$ 是一个 V 上的 $(0,k)$-张量.

(1) 如果对 $(1,2,\cdots,k)$ 的任意置换 $\sigma \in S_k$ 都有 $T^\sigma = T$, 即

$$T(v_1, \cdots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}),$$

则称 T 是**对称张量**.

(2) 如果对 $(1,2,\cdots,k)$ 的任意置换 $\sigma \in S_k$ 都有 $T^\sigma = (-1)^\sigma T$, 即

$$T(v_1, \cdots, v_k) = (-1)^\sigma T(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}),$$

则称 T 是 V 上的**交错张量** (或**线性 k-形式**).

♣

在上述定义中的 $(-1)^\sigma$ 是置换 σ 的符号, 即当 σ 是偶置换[1] 时 $(-1)^\sigma = 1$, 而当 σ 是奇置换时 $(-1)^\sigma = -1$. 不难证明

引理 5.1.9

T 是 V 上的交错张量当且仅当对所有 $v_1, \cdots, v_k \in V$ 与任意 $1 \le i \ne j \le k$,

$$T(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_k) = -T(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots, v_k),$$

♢

例 5.1.10.

- 线性空间 V 上的任意内积是一个正定对称 2-张量.
- 行列式映射

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v_1, \cdots, v_n) \mapsto \det(v_1, \cdots, v_n)$$

  是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个线性 n-形式.

显然 V 上的所有线性 k-形式组成一个向量空间, 记为 $\Lambda^k V^*$. 根据定义, $\Lambda^k V^*$ 是 $\otimes^k V^*$ 的线性子空间. 为简单起见, 记 $\Lambda^1 V^* = \otimes^1 V^* = V^*$, 并约定 $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$.

[1] 若一个置换 $\sigma \in S_k$ 可以被表示成偶数个对换的乘积, 则称它为**偶置换**, 否则称之为**奇置换**.

¶ 反对称化

下面对线性形式定义“乘法”. 由于两个交错张量的张量积不再是交错张量，因此需要对所得的张量进行“反对称化”操作. 对任意 V 上的 k-张量 T，考虑**反对称化映射**

$$\mathrm{Alt}(T) := \frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi T^\pi.$$

引理 5.1.11

映射 Alt 是一个从 $\otimes^k V^*$ 到 $\Lambda^k V^*$ 的投影, 即: 它是一个线性映射，且满足

(1) 对任意 $T\in\otimes^k V^*$, $\mathrm{Alt}(T)\in\Lambda^k V^*$.

(2) 对任意 $T\in\Lambda^k V^*$, $\mathrm{Alt}(T)=T$. ♢

证明 (1) 对任意的 $T\in\otimes^k V^*$ 与任意的 $\sigma\in S_k$,

$$[\mathrm{Alt}(T)]^\sigma=\frac{1}{k!}\sum_{\pi\in S_k}(-1)^\pi(T^\pi)^\sigma=\frac{1}{k!}(-1)^\sigma\sum_{\pi\in S_k}(-1)^{\sigma\circ\pi}T^{\sigma\circ\pi}=(-1)^\sigma\mathrm{Alt}(T).$$

(2) 若 $T\in\Lambda^k V^*$, 则每个求和项 $(-1)^\pi T^\pi$ 等于 T. 故由 $|S_k|=k!$ 可得 $\mathrm{Alt}(T)=T$. □

下一个引理在后面将会用到，证明留作习题

引理 5.1.12

设 T,S,R 分别为线性 k-形式, l-形式与 m-形式. 那么

(1) $\mathrm{Alt}(T\otimes S)=(-1)^{kl}\mathrm{Alt}(S\otimes T)$.

(2) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(T\otimes S)\otimes R)=\mathrm{Alt}(T\otimes S\otimes R)=\mathrm{Alt}(T\otimes\mathrm{Alt}(S\otimes R))$. ♢

¶ 楔积

现在可以定义对线性形式的“乘积运算”:

定义 5.1.13. (楔积)

设 $T\in\Lambda^k V^*$, $S\in\Lambda^l V^*$. 则称 $(k+l)$-形式

$$T\wedge S=\frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(T\otimes S)$$

为 T 和 S 的 **楔积**. ♣

例如，若 $f^1,f^2\in V^*$, 则 $f^1\wedge f^2=f^1\otimes f^2-f^2\otimes f^1$. 楔积运算满足

命题 5.1.14. (楔积的性质)

楔积运算 $\wedge:(\Lambda^k V^*)\times(\Lambda^l V^*)\to\Lambda^{k+l}V^*$ 满足

(1) 双线性性: $(T,S)\mapsto T\wedge S$ 对 T 和对 S 都是线性的.

(2) 反交换性: $T\wedge S=(-1)^{kl}S\wedge T$.

(3) 结合律: $(T\wedge S)\wedge R=T\wedge(S\wedge R)$. ♠

证明 (1) 可以由定义 5.1.13推出. (2) 可以由引理 5.1.12(1) 推出. (3) 可以由定义5.1.13与引理 5.1.12(2) 推出. □

因为结合律成立，所以可以谈论三个或更多的线性形式的楔积. 例如，如果 $T \in \Lambda^k V^*, S \in \Lambda^l V^*$ 且 $R \in \Lambda^m V^*$, 那么可以证明

$$T \wedge S \wedge R = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\mathrm{Alt}(T \otimes S \otimes R).$$

该结论不难推广到多个线性形式楔积的情形，例如，若 $f^1, \cdots, f^k \in V^*$, 则

$$f^1 \wedge \cdots \wedge f^k = k!\mathrm{Alt}(f^1 \otimes \cdots \otimes f^k).$$

作为推论, 可以算出更多线性 1 形式的楔积:

命题 5.1.15. （行列式）

对任意的 $f^1, \cdots, f^k \in V^*$ 与 $v_1, \cdots, v_k \in V$,

$$(f^1 \wedge \cdots \wedge f^k)(v_1, \cdots, v_k) = \det(f^i(v_j)).$$

♠

证明 直接计算即可:

$$\begin{aligned}(f^1 \wedge \cdots \wedge f^k)(v_1, \cdots, v_k) &= k!\ \mathrm{Alt}(f^1 \otimes \cdots \otimes f^k)(v_1, \cdots, v_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma f^1(v_{\sigma(1)}) \cdots f^k(v_{\sigma(k)}) = \det((f^i(v_j))).\end{aligned}$$

□

¶ 线性 k-形式的空间

有了这些准备，下面可以给出空间 $\Lambda^k V^*$ 的一组基:

定理 5.1.16. （$\Lambda^k V^*$ 的基）

设 $\{f^1, \cdots, f^n\}$ 是 V^* 的一组基. 那么 k-形式的集合

$$\{f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \cdots \wedge f^{i_k} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n\}$$

形成了 $\Lambda^k V^*$ 的一组基. 特别的, $\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$.

♡

证明 再次令 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 V 中的对偶基. 对任意满足 $i_1 < \cdots < i_k$ 的多重指标 I, 令

$$\Omega^I = f^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^{i_k}.$$

因为对任意满足 $j_1 < \cdots < j_k$ 的多重指标 $J = (j_1, \cdots, j_k)$,

$$\Omega^I(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \det((f^{i_r}(e_{j_s}))_{1 \le r,s \le k}) = \delta^{i_1, \cdots, i_k}_{j_1, \cdots, j_k}.$$

所以这些 Ω^I 都是线性无关的.

进一步，由于任意的 $T \in \Lambda^k V^*$ 是一个 k-张量，可以记 $T = \sum_I T_I F^I$, 其中 $I = (i_1, \cdots, i_k)$ 跑遍所有的 $1 \le i_1, \cdots, i_k \le n$, 并且 F^I 与定理 5.1.3的证明中的相同. 注意 $\Omega^I = k!\mathrm{Alt}(F^I)$. 这里, 指标 I 不需要是递增的, 但注意到“若 I 中的两个指标是相同的，则 $\Omega^I = 0$” 以及“若 I 不包含相同的指标, 而 I' 是 I 的升序重排，则 $\Omega^I = \pm\Omega^{I'}$”，可知

$$T = \mathrm{Alt}(T) = \sum_{\text{所有的}I} T_I \mathrm{Alt}(F^I) = \frac{1}{k!}\sum_{I\ \text{递增}} \left(\sum_{I'=I\ \text{作为集合}} (\pm T_{I'}) \right) \Omega^I$$

是 Ω^I 的一个线性组合，其中 I 只有递增指标.

□

注 5.1.17. 作为直接推论, 易见

- $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$.
    - 从而 n-维线性空间 V 上的 n-形式是非平凡 n-形式 "det" 的倍数.
- 对 $k > n$, $\Lambda^k(V^*) = 0$.

¶ 内乘与拉回

最后给出线性 k-形式上两个重要的运算.

定义 5.1.18. (内乘)

对于任意向量 $v \in V$ 和线性 k-形式 $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$，称线性 $(k-1)$-形式

$$\iota_v\alpha(v_1, \cdots, v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \cdots, v_{k-1}).$$

为 v 与 α 的**内乘**. ♣

下述命题的证明将被留作练习.

命题 5.1.19. (内乘的性质)

设 α 是 V 上的一个线性 k-形式，β 是 V 上的一个线性 l-形式. 那么

(1) 对任意的 $v \in V$, $\iota_v\iota_v\alpha = 0$.

(2) 对任意的 $v \in V$, $\iota_v(\alpha \wedge \beta) = (\iota_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^k\alpha \wedge \iota_v\beta$. ♠

注意 ι_v 所满足的性质 (2) 类似于导子定义中的 Leibniz 法则，但又不全一样. 事实上，如果记 $\Gamma^*(V^*) = \oplus_{k=0}^m \Gamma^k(V^*)$，其中 $m = \dim V$，则 $\Gamma^*(V^*)$ 在 "乘法"

$$\wedge : \Gamma^k(V^*) \times \Gamma^l(V^*) \to \Gamma^{k+l}(V^*)$$

下形成一个分次代数，而 ι_v 则是该分次代数的一个反导子. 下一节将要学习的外微分也同样上分次代数上的反导子.

定义 5.1.20. (拉回)

设 $L : W \to V$ 是线性映射. 称映射 $L^* : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^k(W^*)$

$$(L^*\alpha)(w_1, \cdots, w_k) := \alpha(L(w_1), \cdots, L(w_k))$$

为 k 形式的**拉回映射**. ♣

下面的命题的证明依然被留作练习.

命题 5.1.21. (拉回的性质)

设 α 是 V 上的一个线性 k-形式. 则对于任意线性映射 $L : W \to V$, 有

(1) $L^*(\alpha \wedge \beta) = L^*\alpha \wedge L^*\beta$.

(2) $\iota_w(L^*\alpha) = L^*(\iota_{L(w)}\alpha)$. ♠