6.2 Mayer-Vietoris 序列

Mayer-Vietoris 序列是一种“利用特定子空间的同调群/上同调群计算全空间的同调/上同调群”代数工具. 它跟用于计算基本群的 Seifert-van Kampen 定理非常类似. 而且，因为上同调群 (是阿贝尔群) 比基本群更简单，Mayer-Vietoris 序列比 van Kampen 定理的假设更弱，例如不需要道路连通性，从而更便于使用.

6.2.1 Mayer-Vietoris 序列

¶ 正合列

设 $(\mathcal{A}, d)$ 是上链复形，即一个序列

$$\cdots \longrightarrow A^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} A^k \xrightarrow{d_k} A^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} A^{k+2} \longrightarrow \cdots$$

其中 A^k 是线性空间, $d_k : A^k \to A^{k+1}$ 是线性映射，且满足

$$d_k \circ d_{k-1} = 0, \qquad \forall k.$$

显然 $\mathrm{Im}(d_k) \subset \mathrm{Ker}(d_{k+1})$. 于是类似于 de Rham 上同调群，可以对任意上链复形 $(\mathcal{A}, d)$ 定义其上同调群

$$H^k(\mathcal{A}, d) := \ker(d_k)/\mathrm{Im}(d_{k-1}).$$

如果对所有 k 均有 $H^k(\mathcal{A}, d) = 0$，即

$$\mathrm{Im}(d_{k-1}) = \ker(d_k), \qquad \forall k.$$

则称复形 $(\mathcal{A}, d)$ 为**正合列**.

根据定义，如果一个正合列以 0 开始,

$$0 \longrightarrow A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \xrightarrow{d_2} A^3 \xrightarrow{d_3} \cdots,$$

则 $d_1 : A^1 \to A^2$ 是单射, 而如果一个正合列以 0 结束,

$$\cdots \xrightarrow{d_{k-2}} A^{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} A^k \xrightarrow{d_k} A^{k+1} \longrightarrow 0,$$

则 $d_k : A^k \to A^{k+1}$ 是满射. 特别地, 如果一个正合列形如

$$0 \longrightarrow A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \xrightarrow{d_2} A^3 \longrightarrow 0,$$

则称之为**短正合列**，此时 d_1 是单射, d_2 是满射, 而且

$$A^2 \simeq \ker(d_2) \oplus \mathrm{Im}(d_2) \simeq \mathrm{Im}(d_1) \oplus \mathrm{Im}(d_2) \simeq A^1 \oplus A^3.$$

关于正合列的另一个有用的事实是：如果一个有限序列

$$0 \to A^1 \to A^2 \to \cdots \to A^k \to 0$$

是正合列, 则 (证明留作练习)

$$\sum_i (-1)^i \dim A^i = 0.$$

¶ 复形的短正合列

设 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 是三个上链复形，且对任意 k,

$$0 \to A^k \to B^k \to C^k \to 0$$

是短正合列，则称 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 构成**复形短正合列**，并记作 $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$. 同调代数中有一个一般原理：给定这样一个复形短正合列，则可以构造上同调群的长正合列

$$\cdots \to H^{k-1}(\mathcal{C}) \to H^k(\mathcal{A}) \to H^k(\mathcal{B}) \to H^k(\mathcal{C}) \to H^{k+1}(\mathcal{A}) \to \cdots.$$

下面对于流形，给出“de Rham 上链复形短正合列”以及它生成的“de Rham 上同调群长正合列”的具体构造。

设 M 是光滑流形, U,V 是 M 中的开集且满足 $M=U\cup V$. 因为 M,U,V 和 $U\cap V$ 都是光滑流形, 所以可以得到四个 de Rham 上链复形

$$\begin{aligned}
&\Omega^*(M): &&0 \to \Omega^0(M) \to \Omega^1(M) \to \Omega^2(M) \to \Omega^3(M) \to \cdots\\
&\Omega^*(U): &&0 \to \Omega^0(U) \to \Omega^1(U) \to \Omega^2(U) \to \Omega^3(U) \to \cdots\\
&\Omega^*(V): &&0 \to \Omega^0(V) \to \Omega^1(V) \to \Omega^2(V) \to \Omega^3(V) \to \cdots
\end{aligned}$$

和

$$\Omega^*(U\cap V): \quad 0 \to \Omega^0(U\cap V) \to \Omega^1(U\cap V) \to \Omega^2(U\cap V) \to \Omega^3(U\cap V) \to \cdots$$

事实上，这几个上链复形共同构成一个复形短正合列

$$0 \to \Omega^*(M) \to \Omega^*(U)\oplus\Omega^*(V) \to \Omega^*(U\cap V) \to 0.$$

为了看到这一点，考虑包含映射

$$\iota_1 : U \hookrightarrow M, \quad \iota_2 : V \hookrightarrow M$$

和包含映射

$$\jmath_1 : U\cap V \hookrightarrow U, \quad \jmath_2 : U\cap V \hookrightarrow V.$$

这些包含映射诱导了 k 次微分形式空间之间的线性映射（从而也诱导了相应的 de Rham 上同调群之间的线性映射）

$$\alpha_k : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V), \quad \omega \mapsto (\iota_1^*\omega, \iota_2^*\omega)$$

和

$$\beta_k : \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V) \to \Omega^k(U\cap V), \quad (\omega_1,\omega_2) \mapsto \jmath_1^*\omega_1 - \jmath_2^*\omega_2.$$

由定义不难验证（证明留作练习）

命题 6.2.1. (de Rham 上链复形的短正合列)

设 U,V 是 M 中的开集且满足 $M=U\cup V$，则对任意 k, 序列

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{\alpha_k} \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V) \xrightarrow{\beta_k} \Omega^k(U\cap V) \longrightarrow 0$$

是一个短正合列.

¶ 从复形的短正合列到长正合列

下面详细解释如何由该复形的短正合列构造相应的 de Rham 上同调群长正合列. 首先，上面定义的映射 α_k 和 β_k 诱导了映射

$$\alpha_k : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V), \quad [\omega] \mapsto ([\iota_1^*\omega], [\iota_2^*\omega])$$

和

$$\beta_k : H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V) \to H^k_{dR}(U \cap V), \quad ([\omega_1], [\omega_2]) \mapsto [\jmath_1^*\omega_1 - \jmath_2^*\omega_2].$$

为了得到所需的长正合列, 还要定义一个线性映射（称为**连接同态**）

$$\delta_k : H^k_{dR}(U \cap V) \to H^{k+1}_{dR}(M).$$

如何定义 δ_k 呢? 要从 k 形式得到 $k+1$ 形式，当然要用外微分. 下面是其具体构造: 取定 M 上一个关于覆盖 $\{U, V\}$ 的单位分解 $\{\rho_U, \rho_V\}$. 对任意 $\omega \in Z^k(U \cap V)$, 令

$$\eta = \begin{cases} d(\rho_V\omega), & 在U上, \\ -d(\rho_U\omega), & 在V上 \end{cases}$$

并定义

$$\delta_k([\omega]) := [\eta].$$

引理 6.2.2. (连接同态的良定性)

上述连接同态 δ_k 是从 $H^k_{dR}(U \cap V)$ 到 $H^{k+1}_{dR}(M)$ 的良定的线性映射. ♢

证明 设 $\omega \in Z^k(U \cap V)$. 需要逐步验证以下多个事实:

- $\rho_V\omega \in \Omega^k(U)$: 由 $\rho_V \in C^\infty(M)$ 及 $\mathrm{supp}(\rho_V) \cap U \subset U \cap V$ 可得. 同理 $\rho_U\omega \in \Omega^k(V)$.
- $\eta \in \Omega^{k+1}(M)$: 因为 $\rho_U + \rho_V = 1$，且在 $U \cap V$ 上有 $d\omega = 0$, 所以在 $U \cap V$ 上有
$$d(\rho_V\omega) = -d(\rho_U\omega),$$
故 η 是 M 上的良定义的光滑 $(k+1)$ 次微分形式.
- $\eta \in Z^{k+1}(M)$: 由定义，在 U 和 V 上都有 $d\eta = 0$. 所以 $\eta \in Z^{k+1}(M)$.
- $[\eta]$ 与 ρ_U 和 ρ_V 的选取无关: 设 $\tilde\rho_U$ 和 $\tilde\rho_V$ 是从属于覆盖 $\{U, V\}$ 的另一族单位分解，并设 $\tilde\eta$ 是用 $(\tilde\rho_U, \tilde\rho_V)$ 所构造出的 $(k+1)$ 次微分形式. 令
$$\xi = (\tilde\rho_V - \rho_V)\omega.$$
因为 $\tilde\rho_V - \rho_V = \rho_U - \tilde\rho_U$ 的支集落在 $U \cap V$ 中，所以则 ξ 是 M 上的光滑 k 次微分形式, 而且根据构造，在 U 和 V 上 (从而在 M 上) 都有 $\tilde\eta - \eta = d\xi$.
- $[\eta]$ 与 $[\omega]$ 中代表元的选取无关: 设 $\tilde\omega = \omega + d\zeta$ 并记所得的 $(k+1)$ 次形式为 $\tilde\eta$. 则
$$\tilde\eta - \eta = \begin{cases} d(\rho_V d\zeta) & = d\rho_V \wedge d\zeta & = d(-d\rho_V \wedge \zeta), & 在U上 \\ -d(\rho_U d\zeta) & = -d\rho_U \wedge d\zeta & = d(d\rho_U \wedge \zeta), & 在V上. \end{cases}$$
由于 $-d\rho_V = d\rho_U$ 且支在 $U \cap V$ 中，故若令 $\xi = -d\rho_V \wedge \zeta$，则 ξ 是 M 上的光滑 k 形式，且 $d\xi = \tilde\eta - \eta$. 所以 $[\tilde\eta] = [\eta]$.
- δ_k 是线性映射: 这是显然的. □

注 6.2.3. 【映射 δ_k 的定义解密】如何从 $U\cap V$ 上的 k 形式 ω 出发，得到 M 上的 $k+1$ 形式？当然要用外微分，但不能直接用 $d\omega$，因为 ω 在 $\partial(U\cap V)$ 附近可能不连续，从而根本不是 M 上的光滑形式 (即使 ω 支在 $U\cap V$ 内部，使得 ω 可以零扩张为 M 上的光滑 k 形式，也不能用 $d\omega$，因为后者的上同调类总是 0)．事实上，上述看似从天而降的 δ_k，其构造来自所谓的“图表追踪法”．出发点当然是图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^k(M) \arrow[r, "\alpha_k"'] \arrow[d, "d"'] & \Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V) \arrow[r, "\beta_k"'] \arrow[d, "d"'] & \Omega^k(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "\alpha_{k+1}"'] & \Omega^{k+1}(U)\oplus\Omega^{k+1}(V) \arrow[r, "\beta_{k+1}"'] & \Omega^{k+1}(U\cap V) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

从 $\Omega^k(U\cap V)$ 中的元素 ω 出发，如何得到 $\Omega^{k+1}(M)$ 中的元素？从图表上看，很自然的备选对象 (形式上) 是 $(\alpha_{k+1})^{-1}\circ d\circ(\beta_k)^{-1}(\omega)$．那么，什么是 $(\beta_k)^{-1}(\omega)$? (注意答案不唯一.) 需要找到 $\omega_1\in\Omega^k(U)$ 以及 $\omega_2\in\Omega^k(V)$ 使得在 $U\cap V$ 中有 $\omega=j_1^*\omega_1-j_2^*\omega_2$．把一个拆成两个，自然想到用从属于 U 和 V 的单位分解 ρ_U,ρ_V．但是，$\rho_U\omega$ 依然不是 U 上的光滑形式，因为它在 $\partial(U\cap V)\cap U$ 附近可能不连续．好在天无绝人之路：因为直观上看，$\partial(U\cap V)\cap U$ 是 ∂V 的一部分，所以 $\rho_U\omega$ 是 V 上的光滑 k 形式！于是可取 $(\beta_k)^{-1}(\omega)$ 为 $(\rho_V\omega,-\rho_U\omega)$，从而 $d(\beta_k)^{-1}(\omega)$ 为 $(d(\rho_V\omega),-d(\rho_U\omega))$．最后，为了求出所需的 $(\alpha_{k+1})^{-1}\circ d\circ(\beta_k)^{-1}(\omega)$，还需要 $(d(\rho_V\omega),-d(\rho_U\omega))$ 落在 α_{k+1} 的像集里，这就需要 $d(\rho_V\omega)$ 与 $-d(\rho_U\omega)$ 在 $U\cap V$ 上相同，从而需要 $d\omega=0$，即 ω 是闭形式！

¶ Mayer-Vietoris 定理

下面给出计算 de Rham 上同调群的主要工具之一：Mayer-Vietoris 序列[1]．

定理 6.2.4. (Mayer-Vietoris 序列)

设 U,V 是 M 中的开集且满足 $M=U\cup V$，则有长正合列

$$\cdots\xrightarrow{\delta_{k-1}}H^k_{dR}(M)\xrightarrow{\alpha_k}H^k_{dR}(U)\oplus H^k_{dR}(V)\xrightarrow{\beta_k}H^k_{dR}(U\cap V)\xrightarrow{\delta_k}H^{k+1}_{dR}(M)\xrightarrow{\alpha_{k+1}}\cdots$$

证明 需要证明

(1) $\mathrm{Im}(\alpha_k)=\ker(\beta_k)$,

(2) $\mathrm{Im}(\beta_k)=\ker(\delta_k)$,

(3) $\mathrm{Im}(\delta_k)=\ker(\alpha_{k+1})$.

这一共有 6 个包含关系．下面将证明其中一个，其余留作练习．

$\boxed{\text{证明 } \mathrm{Im}(\beta_k)\subset\ker(\delta_k)}$：设 $[\omega]\in\mathrm{Im}(\beta_k)$，则存在 $\omega_1\in Z^k(U)$, $\omega_2\in Z^k(V)$ 使得

$$\omega=\beta_k(\omega_1,\omega_2)=j_1^*\omega_1-j_2^*\omega_2\in\Omega^k(U\cap V).$$

[1]该定理首先是由 W. Mayer 在 1929 年给出了一个特殊情形，后来 L. Vietoris 在 1930 年给出了一般情形，最后由 S. Eilenberg 和 N. Steenrod 在 1952 年引入正合列的语言并表述成现代形式. Mayer 和 Vietoris 都是奥地利数学家，Mayer 从 1930 年左右起成为爱因斯坦的数学助手，被昵称为“爱因斯坦计算器”. Vietoris 则是著名的超级人瑞，他在 2002 年去世，时年 110 岁零 309 天；而且他的数学生命也长青不衰：在 1994 年他 103 岁那年还发表了有关三角和的 (独立作者) 论文！

于是 $\delta_k([\omega]) = [\eta]$, 其中

$$\eta = \begin{cases} d(\rho_V\omega) = \quad d(\rho_V\omega - \omega_1), & 在U上, \\ -d(\rho_U\omega) = -d(\rho_U\omega + \omega_2), & 在V上. \end{cases}$$

注意到在 $U \cap V$ 上,

$$\rho_V\omega - \jmath_1^*\omega_1 = -\rho_U\omega - \jmath_2^*\omega_2.$$

所以如果令

$$\xi = \begin{cases} \rho_V\omega - \omega_1, & 在U上, \\ -\rho_U\omega - \omega_2, & 在V上. \end{cases}$$

则 ξ 是 M 上的光滑 k 次微分形式, 且 $\eta = d\xi$, 因此 $[\eta] = 0$. □

注 6.2.5. 与 van Kampen 定理的情况类似，一般而言知道所有 $H^k_{dR}(U)$, $H^k_{dR}(V)$ 和 $H^k_{dR}(U \cap V)$ 还不足以确定 $H^k_{dR}(M)$. 为了确定 $H^k_{dR}(M)$，还需要知道连接同态.

6.2.2 Mayer-Vietoris 序列的应用

¶ 应用 1: 球面的 de Rham 上同调群

定理 6.2.6. (球面的 de Rham 上同调群)

对于 $n \geq 1$, $H^k_{dR}(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n, \\ 0, & 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$.

证明 上一节已经证明了 $n = 1$ 的情形. 下面证明

(1) 对于 $n \geq 2$, $H^1_{dR}(S^n) = 0$.

(2) 对于 $n \geq 2, k \geq 2$, $H^k_{dR}(S^n) \simeq H^{k-1}_{dR}(S^{n-1})$.

显然这两个结论可以推出欲证的定理.

对于 $n \geq 2$, 令

$$U = S^n - \{(0, \cdots, 0, -1)\} \quad 和 \quad V = S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}.$$

则

- $M = U \cup V$,
- U 和 V 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$,
- $U \cap V$ 同伦等价于 S^{n-1}.

为了证明 (1), 观察 Mayer-Vietoris 序列的开头部分

$$0 \to H^0_{dR}(S^n) \to H^0_{dR}(U) \oplus H^0_{dR}(V) \to H^0_{dR}(U \cap V) \to H^1(S^n) \to H^1_{dR}(U) \oplus H^1_{dR}(V),$$

将 $U, V, U \cap V$ 的相应 de Rham 上同调群带入，得

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha_0} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\beta_0} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta_0} H^1_{dR}(S^n) \to 0.$$

因为 α_0 是单射,

$$\dim\ker(\beta_0) = \dim\mathrm{Im}(\alpha_0) = 1.$$

所以

$$\dim \mathrm{Im}(\beta_0) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker(\beta_0) = 1,$$

即 β_0 是满射. 于是 $\ker(\delta_0) = \mathbb{R}$, 即 $\delta_0 \equiv 0$. 但由正合性, δ_0 是满射. 因此 $H^1_{dR}(S^n) = 0$.

为了证明 (2), 考察 Mayer-Vietoris 序列的下面这一部分

$$H^{k-1}_{dR}(U) \oplus H^{k-1}_{dR}(V) \xrightarrow{\beta_{k-1}} H^{k-1}_{dR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta_{k-1}} H^k_{dR}(S^n) \xrightarrow{\alpha_k} H^k_{dR}(U) \oplus H^k_{dR}(V),$$

由 $U \cap V \sim S^{n-1}$ 以及同伦不变性，得

$$0 \xrightarrow{\beta_{k-1}} H^{k-1}_{dR}(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta_{k-1}} H^k_{dR}(S^n) \xrightarrow{\alpha_k} 0.$$

由正合性, 映射 δ_{k-1} 既是单射也是满射, 因此是线性同构. 这就证明了 (2). □

作为推论, 可得欧氏空间维数拓扑不变性的简单证明:

推论 6.2.7. (欧氏空间维数的拓扑不变性)

如果 $m \neq n$, 则 $\mathbb{R}^n$ 不同胚于 $\mathbb{R}^m$. ♡

证明 如果 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是同胚, 则 $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ 是同胚. 所以

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = H^k_{dR}(\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}, \qquad \forall k.$$

但 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 同伦等价于 S^{n-1}, 而 $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ 同伦等价于 S^{m-1}. 所以

$$H^k_{dR}(S^{m-1}) = H^k_{dR}(S^{n-1}), \qquad \forall k.$$

这与 $m \neq n$ 的假设矛盾. □

¶ 应用 2: 对于许多光滑流形有 $\dim H^k_{dR}(M) < \infty$

先引入一个概念:

定义 6.2.8. (好覆盖)

设 M 是光滑流形, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 M 的开覆盖. 如果对于指标集的任意有限子集 $I = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\} \subset \Lambda$, 交集

$$U_I := U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$$

要么是空集，要么微分同胚于 $\mathbb{R}^n$，则称 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是**好覆盖**. ♣

例 6.2.9. 定理6.2.6证明中的 U 和 V 并不是 S^n 的好覆盖，而 $2n+2$ 个半球

$$S^n_{i,+} = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \mid x^i > 0\} \quad 及 \quad S^n_{i,-} = \{(x^1, \cdots, x^{n+1}) \mid x^i < 0\}$$

构成 S^n 的一个好覆盖.

应用黎曼几何 (更准确地说，使用所谓的测地凸邻域), 可以证明对于任意光滑流形 M 的任意开覆盖，都存在一个好覆盖作为其加细. 特别地, 如果 M 是紧流形，则 M 有一个“由有限多个集合构成的好覆盖”. 这样的覆盖称为**有限好覆盖**.

显然，好覆盖的任意子覆盖仍然是好覆盖.

定理 6.2.10. (de Rham 上同调群的有限性)

如果 M 上存在有限好覆盖，那么 $H_{dR}^k(M)$ 作为线性空间是有限维的.

证明 对 M 的有限好覆盖中的集合个数进行归纳. 如果 M 有一个仅包含一个开集的好覆盖，则这个开集就是 M 自身，从而 M 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$，此时定理结论自动成立.

下面假设定理对于“存在包含 $l-1$ 个开集的好覆盖”的任意流形均成立. 设 $\{U_1,\cdots,U_l\}$ 是流形 M 的一个好覆盖. 记

$$U=U_1\cup\cdots\cup U_{l-1}\qquad 及\qquad V=U_l.$$

则 $U\cap V$ 有一个有限好覆盖 $\{U_1\cap U_l,\cdots,U_{l-1}\cap U_l\}$. 由归纳假设, U, V 和 $U\cap V$ 的所有 de Rham 上同调群都是有限维的. 考虑 Mayer-Vertoris 序列

$$\cdots\longrightarrow H_{dR}^{k-1}(U\cap V)\xrightarrow{\delta_{k-1}}H_{dR}^k(M)\xrightarrow{\alpha_k}H_{dR}^k(U)\oplus H_{dR}^k(V)\longrightarrow\cdots.$$

由

$$\dim\mathrm{Im}(\alpha_k)\leq\dim H_{dR}^k(U)\oplus H_{dR}^k(V)<\infty$$

和

$$\dim\ker(\alpha_k)=\dim\mathrm{Im}(\delta_{k-1})\leq\dim H_{dR}^{k-1}(U\cap V)<\infty$$

可知 $\dim H_{dR}^k(M)<\infty$，从而完成了证明. □

作为推论，立即可以得到

推论 6.2.11. (紧流形具有有限维 de Rham 上同调群)

若 M 是紧流形或同伦等价于一个紧流形，则对于所有 k 有 $\dim H_{dR}^k(M)<\infty$.

¶ 应用 3：Kunneth 公式

最后给出计算乘积流形 de Rham 上同调群 Kunneth 公式及其证明概要：

定理 6.2.12. (Kunneth 公式)

设流形 M 和 N 存在有限好覆盖. 则对于任意 $0\leq k\leq\dim M+\dim N$, 有

$$H_{dR}^k(M\times N)\simeq\bigoplus_{i=0}^{k}H_{dR}^i(M)\otimes H_{dR}^{k-i}(N).$$

证明概要 设 $\pi_M:M\times N\to M$ 和 $\pi_N:M\times N$ 是标准投影映射. 可以验证映射

$$\Psi:\Omega^*(M)\otimes\Omega^*(N)\to\Omega^*(M\times N),\quad \omega_1\otimes\omega_2\mapsto\pi_M^*\omega_1\wedge\pi_N^*\omega_2.$$

诱导了 “全 de Rham 上同调群” 之间的映射

$$\Psi:H_{dR}^*(M)\otimes H_{dR}^*(N)\to H_{dR}^*(M\times N),\quad [\omega_1]\otimes[\omega_2]\mapsto[\pi_M^*\omega_1\wedge\pi_N^*\omega_2].$$

下面证明 Ψ 事实上是线性同构. 为此对 M 的好覆盖所包含的集合个数 l 进行归纳. 若 $l=1$, 即 M 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$, 则由 $\mathbb{R}^n\times N$ 同伦等价于 N 可知 Kunneth 公式成立.

现假设 Kunneth 公式当 “流形存在由不超过 $l-1$ 个开集组成的好覆盖” 时成立. 设

$M = U_1 \cup \cdots \cup U_l$ 是一个好覆盖，并令 $U = U_1 \cup \cdots U_{n-1}$ 和 $V = U_n$. 为简单起见，记

$$\widetilde{H}^k(M,N) := \bigoplus_{i=0}^{k} H^i_{dR}(M) \otimes H^{k-i}_{dR}(N).$$

考虑图表

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{H}^k(M,N) \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\Psi"'] & \widetilde{H}^k(U,N)\oplus\widetilde{H}^k(V,N) \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d, "\Psi"'] & \widetilde{H}^k(U\cap V,N) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "\Psi"'] & \widetilde{H}^{k+1}(M,N) \arrow[d, "\Psi"'] \\
H^k_{dR}(M\times N) \arrow[r, "\alpha"'] & H^k_{dR}(U\times N)\oplus H^k_{dR}(V\times N) \arrow[r, "\beta"'] & H^k_{dR}((U\cap V)\times N) \arrow[r, "\delta"'] & H^{k+1}_{dR}(M\times N)
\end{tikzcd}$$

其中水平的映射 α, β, δ 是由上面定义的 $\alpha_k, \beta_k, \delta_k$ 以明显的方式诱导得到的. 对于这个图表，可以证明

- 应用 Mayer-Vietoris 序列，可以证明图中水平的两行是正合列.
- 此外，可以证明该图是交换的，即有 $\Psi\circ\alpha = \alpha\circ\Psi$, $\Psi\circ\beta = \beta\circ\Psi$ 且 $\Psi\circ\delta = \delta\circ\Psi$.
  [前两个等式很容易证明，而最后一个等式的证明要复杂得多.]
- 由归纳假设，第二个和第三个 Ψ 是线性同构.

最后，由同调代数中著名的“五引理”即可得到要证的结论. □

引理 6.2.13. (五引理)

假设有以下交换图

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\alpha_1"'] \arrow[d, "\gamma_1"'] & V_2 \arrow[r, "\alpha_2"'] \arrow[d, "\gamma_2"'] & V_3 \arrow[r, "\alpha_3"'] \arrow[d, "\gamma_3"'] & V_4 \arrow[r, "\alpha_4"'] \arrow[d, "\gamma_4"'] & V_5 \arrow[d, "\gamma_5"'] \\
W_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & W_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & W_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & W_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & W_5
\end{tikzcd}$$

其中 V_i 和 W_i 都是线性空间, 每个映射都是线性映射. 若水平的两行是正合列, 垂直的映射 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ 是线性同构, 则映射 γ_3 也是线性同构. ♢

证明 这是“图表追踪”的一个标准练习. □

作为 Kunneth 公式的一个简单推论，可以计算

$$H^k_{dR}(S^n\times S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0 \text{ 或} 2n, \\ \mathbb{R}^2, & k=n, \\ 0, & \text{其他}k. \end{cases}$$

类似地，可以对于 $m\neq n$ 计算 $H^k_{dR}(S^m\times S^n)$.

此外，还可以归纳地计算出 n 维环面 $\mathbb{T}^n$ 的 de Rham 上同调群 (留作习题).

命题 6.2.14. (高维环面的 de Rham 上同调群)

对于 n 维环面 $\mathbb{T}^n = S^1\times\cdots\times S^1$,

$$H^k_{dR}(\mathbb{T}^n) \simeq \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}.$$

♠