2.6 管状邻域定理

根据定义，流形上每个点都有一个局部欧氏的“好邻域”，而这个事实在研究流形时起到了根本性的作用。本节的目的是证明在光滑子流形附近，有一个整体的“好邻域”。为此，需要先把熟知的反函数定理推广到子流形附近。

2.6.1 子流形附近的广义反函数定理

假设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射. 根据反函数定理，如果 df_p 是一个线性同构，那么 f 在 p 附近是局部微分同胚，即 f 将 p 的一个邻域微分同胚地映射到 $f(p)$ 的一个邻域. 在应用中，可能需要将 M 中某个子流形 X 的邻域微分同胚地映射到 N 中 $f(X)$ 的邻域中. 下面证明在一定条件下这是可以做到的。

¶ 广义反函数定理：紧致情形

首先对于 X 是 M 的紧致子流形情形证明广义反函数定理。相对于非紧情形，此时定理的陈述与证明都较为简单：

定理 2.6.1. （广义反函数定理：紧子流形情形）

设 $f: M \to N$ 是光滑映射，X 是 M 的光滑紧致子流形，且 f 在 X 上是单射. 若 $df_x: T_xM \to T_{f(x)}N$ 在任意 $x \in X$ 处都是线性同构，则存在 X 在 M 中的邻域 U 以及 $f(X)$ 在 N 中的邻域 V 使得 $f: U \to V$ 是微分同胚. ♡

证明 由反函数定理，f 在 X 中每一点附近是局部微分同胚. 根据命题2.2.3，只需证明 f 在 X 的某个邻域中是单射. 为此，将 M 嵌入到 $\mathbb{R}^K$，并考虑 X 在 M 中的“ε-邻域”：

$$X^\varepsilon = \{x \in M \mid d(x, X) < \varepsilon\},$$

其中 $d(\cdot,\cdot)$ 是欧氏空间中的点与集合之间的距离，即 $d(x,X) = \inf\{d(x,y) \mid y \in X\}$. 注意 X^ε 是 $\mathbb{R}^K$ 中的有界开集. 此外，因为 X 是闭集，所以 $X = \bigcap_{k>0} X^{1/k}$.

下面用反证法来完成证明. 设 f 在每个 $X^{1/k}$ 上都不是单射，即存在 $a_k \neq b_k \in X^{1/k}$ 使得 $f(a_k) = f(b_k)$. 因为所有的 a_k 都位于 $\mathbb{R}^K$ 中的某个有界闭集中，存在子列 $a_{k_i} \to a_\infty \in X$ 以及子列 $b_{k_{i_j}} \to b_\infty \in X$. 因为 $f(a_\infty) = f(b_\infty)$，所以由 f 在 X 上是单射可知 $a_\infty = b_\infty$. 于是根据构造，在 a_∞ 的任意小邻域中，f 都不是单射. 但是由 df_{a_∞} 是线性同构可知 f 在 a_∞ 的某个邻域里是局部微分同胚，从而导致矛盾. □

审视证明过程，不难发现上述证明并没有用到 X 的子流形结构：对 X 的唯一要求是它是 M 中的一个紧子集. 因此事实上已经证明如下条件更弱的结果:

定理 2.6.2. （广义反函数定理，紧子集版本）

设光滑映射 $f: M \to N$ 在 M 的紧子集 X 上是单射. 若 $df_x: T_xM \to T_{f(x)}N$ 在任意 $x \in X$ 处都是线性同构，则存在 X 在 M 中的邻域 U 以及 $f(X)$ 在 N 中的邻域 V 使得 $f: U \to V$ 是微分同胚. ♡

¶ 广义反函数定理：非紧情形

当 X 非紧的时，仅假设“X 是光滑子流形并且 $f|_X$ 是单射”是不够的.

例 2.6.3. 覆叠映射

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad (t, s) \mapsto (e^{it}, e^{is})$$

在每点 $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ 附近都是局部微分同胚. 取 X 为 $\mathbb{R}^2$ 中斜率是无理数的直线

$$X = \{(t, \sqrt{2}t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

则 $f|_X$ 是单射，但不存在 X 的邻域 U 和 $f(X)$ 的邻域 V，使得 $f : U \to V$ 是微分同胚.

上述例子的问题在于 $f(X)$ 并不是 N 的光滑子流形，于是 f 并不是从 X 到 $f(X)$ 的微分同胚。对于 X 是紧子流形的情形，由定理2.4.19可知定理2.6.1的条件保证了“$f(X)$ 是 N 的光滑子流形，且 f 本身是从 X 到 $f(X)$ 的微分同胚.”下面证明对于一般的子流形，只要 f 满足这两个条件，则广义反函数定理成立：

定理 2.6.4.（广义反函数定理：任意光滑子流形） 设 $f : M \to N$ 是光滑映射，X 是 M 的光滑子流形，$f(X)$ 是 N 的光滑子流形，且 $f : X \to f(X)$ 是微分同胚. 若对于任意 $x \in X$，$df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ 是线性同构，则存在 X 的邻域 U 以及 $f(X)$ 的邻域 V 使得 $f : U \to V$ 是微分同胚. ♡

证明 只需证明 X 非紧的情形，思路是把非紧流形表示成可数个“紧带状集合”的并，然后利用定理2.6.2。为此，在光滑流形 $f(X)$ 上任取一个正的光滑穷竭函数 g，可得分解 $f(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$，其中每个 $K_k = g^{-1}([k, k+1])$ 是紧集. 因为 $f|_X : X \to f(X)$ 是微分同胚，对应的有分解 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$，其中每个 $J_k := f|_X^{-1}(K_k) \subset X$ 也是紧集. 由定理2.6.2，存在 $J_{k-1} \cup J_k \cup J_{k+1}$ 在 M 中的一个开邻域 $\widetilde{U}_k$，使得 f 在 $\widetilde{U}_k$ 上是微分同胚. 因为 $f(X)$ 是 N 中的光滑子流形，通过将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^K$ 并使用诱导的距离，不难证明

$$d_k := \operatorname{dist}(K_k, \bigcup_{j>k+1} K_j) > 0.$$

(需要使用 K_k 的紧性和 $f(X)$ 是光滑子流形. 请读者验证细节.)

取一个递减的正数序列 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > 0$，且使得对于每个 k 都有 $\varepsilon_k < d_k/2$. 特别地，第二个条件保证了若 $|l-k| > 1$, 则 $K_l^{\varepsilon_l} \cap K_k^{\varepsilon_k} = \emptyset$. 令

$$U_k = \widetilde{U}_{k-1} \cap \widetilde{U}_k \cap \widetilde{U}_{k+1} \cap f^{-1}(K_k^{\varepsilon_k}).$$

则 U_k 是 J_k 的开邻域, $V_k = f(U_k)$ 是 K_k 的开邻域, 且 f 将 U_k 微分同胚地映射到 V_k. 此外, U_k 的定义蕴含了 $U_{k-1} \cup U_k \cup U_{k+1} \subset \widetilde{U}_k$.

定义

$$U = \bigcup_{k \geq 1} U_k, \qquad V = \bigcup_{k \geq 1} V_k.$$

那么 U 是 X 在 M 中的开邻域, V 是 $f(X)$ 在 N 中的开邻域, 并且 $f : U \to V$ 处处是局部微分同胚. 于是只需要证明 f 在 U 上是单射即可. 假设 $x, y \in U$ 且 $f(x) = f(y)$. 那么存在 k 使得 $f(x) = f(y) \in V_k \subset K_k^{\varepsilon_k}$. 于是 $x, y \in U_{k-1} \cup U_k \cup U_{k+1} \subset \widetilde{U}_k$. 但 f 是 $\widetilde{U}_k$ 上的微分同胚, 故 $x = y$. □

2.6.2 管状邻域定理

¶ 欧氏空间子流形的法丛

设 X 是 M 的光滑子流形，管状邻域定理断言 X 总是存在一个“状如管子”的邻域. 为了理解这个概念，考察一些最简单的例子。图2.4展示了平面中一条曲线附近的 ε-邻域。类似地，如果考察“球面作为欧氏空间的子流形”，或者“赤道作为球面的子流形”，都会发现在子流形附近应该会有一个“乘积型管子邻域”，即微分同胚于乘积 $X \times B^{m-r}$ 的邻域，其中 B^{m-r} 是 $m-r$ 维开球。然而，这个现象并不总成立：

例 2.6.5. 考虑 Möbius 带的中心圆，如图2.5所示。显然中心圆的任意邻域都不同胚于乘积空间 $S^1 \times (-1,1)$：从中心圆的连通邻域中挖掉中心圆，所得的集合依然连通；但从乘积空间 $S^1 \times (-1,1)$ 中挖掉 $S^1 \times \{0\}$，所得的集合就不连通了。

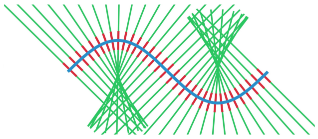

图 2.4: ε 邻域

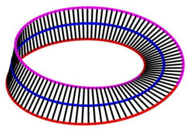

图 2.5: Möbius 带的中心圆

可见子流形邻域的形状受子流形本身在外围流形中的“摆放”方式影响。事实上，上图也说明了子流形的“管状邻域”的大致形状：在子流形上每一点“向外”扩张成邻域时，需要向“跟切向垂直的方向”（即法向）扩张。粗略来说，把这些“跟切向垂直的方向”放在一起，就是所谓的法丛。

首先考虑一个简单的情形，即 X 是嵌入到 $\mathbb{R}^K$ 的 r 维子流形，此时可以用外围空间 $\mathbb{R}^K$ 的几何结构来给出“垂直方向”。令 $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{R}^K$ 为包含映射. 对于任意 $x \in X$, 视 T_xX 为 $\mathbb{R}^K = T_x\mathbb{R}^K$ 的 r 维线性子空间：

$$T_xX \simeq d\iota_x(T_xX) \subset T_x\mathbb{R}^K \simeq \mathbb{R}^K.$$

令 $N_x(X, \mathbb{R}^K)$ 为 T_xX 在 $\mathbb{R}^K$ 中的正交补, 即

$$N_x(X, \mathbb{R}^K) := \{v \in T_x\mathbb{R}^K \simeq \mathbb{R}^K \mid v \perp T_xX\},$$

它是 $(K-r)$-维向量空间. 类似于切丛的情形，可以把这些“法空间”集合在一起：

$$N(X, \mathbb{R}^K) = \{(x, v) \mid x \in X, v \in N_x(X, \mathbb{R}^K)\} \subset T\mathbb{R}^K.$$

利用 $\mathbb{R}^K$ 的跟 X 相容的局部坐标系，可以证明（留作习题）：

命题 2.6.6.（法空间构成向量丛）

$N(X, \mathbb{R}^K)$ 是 $T\mathbb{R}^K$ 的 K-维光滑子流形，且在典范投影 π 是淹没映射。

定义 2.6.7.（欧氏空间子流形的法丛）

$N(X, \mathbb{R}^K)$ 被称为 X 在 $\mathbb{R}^K$ 中的**法丛**。

¶ 欧氏子流形的管状邻域定理与 ε-邻域定理

下面引入欧氏子流形管状邻域的概念并证明管状邻域定理：

定义 2.6.8.（欧氏子流形的管状邻域）

设 X 是 $\mathbb{R}^K$ 的光滑子流形。若存在 X 在 $N(X,M)$ 中的邻域 U，X 在 M 中的邻域 V 以及微分同胚 $f: U \to V$ 使得 $f|_X$ 是恒等映射，则称 V（或者三元组 (f,V,U)）为 X 的一个管状邻域。♣

定理 2.6.9.（欧氏子流形的管状邻域定理）

$\mathbb{R}^K$ 的任意光滑子流形设 X 都有管状邻域。♡

证明 定义映射

$$h: N(X,\mathbb{R}^K) \to \mathbb{R}^K, \quad (x,v) \mapsto x+v.$$

对于任意 $(x,0) \in N(X,\mathbb{R}^K)$, $dh_{(x,0)}$ 将 $T_{(x,0)}(X \times \{0\}) \subset T_{(x,0)}N(X,\mathbb{R}^K)$ 双射地映为 $T_xX \subset T_x\mathbb{R}^K$, 且将切空间 $T_{(x,0)}(\{x\} \times N_x(X,\mathbb{R}^K))$ 双射地映为 $N_x(X,\mathbb{R}^K) \subset T_x\mathbb{R}^K$. 故 $dh_{(x,0)}$ 是非奇异的. 另一方面，由定义, h 将 $X \times \{0\} \subset N(X,\mathbb{R}^K)$ 微分同胚地映为 $X \subset \mathbb{R}^K$. 故由广义反函数定理, h 将 $X \times \{0\}$ 在 $N(X,\mathbb{R}^K)$ 中的某个邻域 U 微分同胚地映为 X 在 $\mathbb{R}^K$ 的邻域 V. □

利用欧氏空间的度量结构，可以给出具体的欧氏管状子流形：

定理 2.6.10.（ε-邻域定理）

对 $\mathbb{R}^K$ 的任意光滑子流形 X，存在正值连续函数 $\varepsilon: X \to \mathbb{R}^+$, 使得 X 的 ε-邻域

$$X^\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^K \mid \text{存在} x \in X \text{使得} |y-x| < \varepsilon(x)\}$$

满足：

(1) 对任意 $y \in X^\varepsilon$，在 X 中存在唯一一个“距离 y 最近的点” $\pi_\varepsilon(y)$;

(2) 映射 $\pi_\epsilon : X^\varepsilon \to X, y \mapsto \pi_\varepsilon(y)$ 是淹没. ♡

证明 令 h,U,V 如上述定理证明。对于每点 $x \in X$, 定义

$$\varepsilon(x) = \sup\{r \le 1 \mid B_r(x) \subset V\}.$$

可验证 ε 在 X 上是连续的正函数. 由定义, $X^\varepsilon \subset V$ 是开子流形. 考虑映射

$$\pi_\varepsilon : X^\varepsilon \to X, \qquad y \mapsto \pi_\varepsilon(y) = \pi \circ h^{-1}(y).$$

因为 π 是淹没而 h^{-1} 在 V 上是微分同胚，所以 π_ε 是淹没映射. 故只需证 $\pi_\varepsilon(y)$ 是 X 中唯一的离 y 最近的点. 事实上，令 $z \in X$ 为在 X 中一个距离 y 最近的点. 那么以 y 为中心，半径为 $|y-z|$ 的球面在 z 处与 X 相切. 于是，向量 $y-z$ 在 z 处垂直于 T_zX, 即 $y-z \in N_z(X,\mathbb{R}^K)$. 因此

$$y = z + (y-z) = h(z, y-z),$$

即 $\pi_\varepsilon(y) = z$. 于是 z 是唯一的，且 $\pi_\varepsilon(y)$ 是 X 中唯一距离 y 最近的点. □

注意，如果 X 是紧致的，那么函数 ε 可被取为常数.

¶ 一般的管状邻域定理

上述构造需要用到 $\mathbb{R}^K$ 的几何结构。对于一般光滑流形 M 而言，其切空间 T_xM 中并没有“垂直”这个概念。此时有两种方式定义 X 在 M 中的法丛：

- 第一种方式是添加一个可以定义“垂直”的结构，即在每个切空间 T_xM 中都指定一个内积结构（这就是所谓的**黎曼度量**），于是能跟嵌入欧氏空间情形一样，定义 X 在 M 中的法丛。不过这种方式定义的法丛依赖于 M 上的黎曼度量结构的选取。
- 第二种方式则不依赖于额外结构：设 X 是 M 的光滑子流形，则对于任意 $p \in X$，切空间 T_xX 可被视为是 T_xM 的子空间。于是在 x 处有商空间

  $$N_x(X, M) = T_xM/T_xX.$$

  把这些空间集合起来，就得到 X 在 M 中的法丛

  $$N(X, M) = \{(x, v)|x \in X, v \in N_x(X, M)\}.$$

  通过使用 M 上跟 X 相容的局部坐标卡，不难在 $N(X, M)$ 上给出一个拓扑和光滑结构，使之成为 m 维光滑流形，且典范投影映射 π 是淹没。注意此时 $N_x(X, M)$ 不是 T_xM 的子空间，从而跟切丛 TX 不同的是，法丛不是 TM 的子集。

这两种方式定义的法丛作为流形是微分同胚的（作为向量丛也是同构的）：因为任何流形都能嵌入欧氏空间，将 M 嵌入到 $\mathbb{R}^K$ 后，可得向量空间的嵌入

$$T_xX \subset T_xM \subset T_x\mathbb{R}^K,$$

此时商空间 T_xM/T_xX 同构于 T_xM 中由“垂直”于 T_xX 的向量组成的子空间，从而

$$N(X, M) \simeq \{(x, v) \mid x \in X, v \in T_xM \text{ 且} v \perp T_xX\}.$$

通过这个等同关系，可以得到向量空间的分解

$$T_{(x,0)}N(X, M) \simeq T_xX \oplus T_x^{\perp}X,$$

其中 $T_x^{\perp}X$ 是 T_xX 在 T_xM 的正交补. 注意，这种方法所给出的“法丛”是切丛的子丛，且这种构造方法对“切丛赋有度量结构”（即“黎曼流形”）均有效.

通过把 M 嵌入欧氏空间，并利用 ε 邻域定理，可以证明

定理 2.6.11.（管状邻域定理）

光滑流形 M 的任意光滑子流形设 X 都有管状邻域。 ♡

证明 将 M 嵌入到 $\mathbb{R}^K$. 取 ε-邻域定理 (对于嵌入 $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^K$) 中所得的 $\pi_\varepsilon : M^\varepsilon \to M$. 依然考虑映射

$$h : N(X, M) \to \mathbb{R}^K, \quad h(x, v) \to x + v.$$

则 $W := h^{-1}(M^\varepsilon)$ 是 X 在 $N(X, M)$ 中的开邻域. 于是复合映射

$$h_\varepsilon = \pi_\varepsilon \circ h : W \longrightarrow M$$

是光滑的，且在 $X \subset N(X, M)$ 上为恒等映射. 此外根据以上 $T_{(x,0)}N(X, M)$ 的分解，$(dh_\varepsilon)_{(x,0)}$ 将 $T_{(x,0)}N(X, M)$ 双射地映射到 T_xM. 从而由定理2.6.4 即得欲证. □

¶ 映射的 Whitney 逼近定理

应用 ε 邻域定理可以证明光滑流形之间的连续映射可被连续形变到光滑映射：

定理 2.6.12.（连续映射的 Whitney 逼近定理）

设 M,N 是光滑流形，$g\in C^0(M,N)$ 是连续映射。则存在同伦于 g 的光滑映射 $f\in C^\infty(M,N)$. 此外，若 g 在闭子集 $A\subset M$ 上光滑，则可以使得 $f|_A=g|_A$.

证明 将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^K$. 由 ε-邻域定理，存在一个连续函数 $\varepsilon: N\to\mathbb{R}_{>0}$ 使得每个 $y\in N^\varepsilon$ 有唯一的最近点 $\pi_\varepsilon(y)\in N$. 视 g 为从 M 到 $\mathbb{R}^K$ 的连续函数，将定理1.3.12应用到恒正连续函数 $\overline{\varepsilon}=\varepsilon\circ g$, 可得 $\overline{\varepsilon}$-接近于 g 的光滑映射 $\tilde f: M\to\mathbb{R}^K$，即

$$|\tilde f(x)-g(x)|<\overline{\varepsilon}(x),\quad \forall x\in M.$$

因此 $\tilde f(x)\in B(g(x),\varepsilon(g(x)))\subset N^\varepsilon$. 于是

$$(1-t)g(x)+t\tilde f(x)\in B(g(x),\varepsilon(g(x)))\subset N^\varepsilon,\quad \forall\, 0\le t\le 1.$$

定义 $F: M\times[0,1]\to N$ 为

$$F(x,t)=\pi_\varepsilon((1-t)g(x)+t\tilde f(x)),$$

则 F 是从连续映射 g 到光滑映射

$$f=F(\cdot,1)=\pi_\varepsilon\circ\tilde f: M\to N$$

的同伦. 最后，注意到如果 g 在闭子集 A 上光滑，那么可以选取光滑函数 $\tilde f$ 使得在 A 上满足 $\tilde f=g$. 于是在 A 上有 $f=g=F(\cdot,t)$. □

作为推论，立刻得到

推论 2.6.13.（球面的低阶同伦群）

如果 $k<n$ 那么同伦群 $\pi_k(S^n)\simeq\{0\}$.

证明 任意连续映射 $f: S^k\to S^n$ 同伦到光滑映射 $\tilde f: S^k\to S^n$. 因为 $k<n$, 由 Sard 定理，$\tilde f(S^k)$ 是 S^n 中的零测集. 特别地，$\tilde f$ 不是满射，因此是零伦的(为什么?). □

当然，如果 f_0 和 f_1 是光滑同伦，那么它们是同伦的. 反之，我们有

定理 2.6.14.（同伦 ≡ 光滑同伦）

假设 $f_0,f_1\in C^\infty(M,N)$ 是同伦的，那么它们是光滑同伦的.

证明 令 $F: M\times[0,1]\to N$ 为连接 f_0 和 f_1 的同伦. 定义

$$\widetilde F(x,t)=F(x,0)\text{ 如果} t\le 0,\qquad \text{并且}\quad \widetilde F(x,t)=F(x,1)\text{ 如果} t\ge 1.$$

则 $\widetilde F$ 是一个从 $M\times\mathbb{R}$ 到 N 的连续映射，并且在闭子集 $M\times\{0\}$ 和 $M\times\{1\}$ 上是光滑的. 因此根据定理2.6.12, 存在光滑映射 $\overline F: M\times\mathbb{R}\to N$ (它同伦于 $\widetilde F$, 但此处不需要)，使得在 $M\times\{0\}$ 和 $M\times\{1\}$ 上有 $\overline F=\widetilde F$, 即

$$\overline F(\cdot,0)=f_0\ \text{且}\,\overline F(\cdot,1)=f_1.$$

于是 $\overline F$ 就是所需要的连接 f_0 和 f_1 的光滑同伦. □