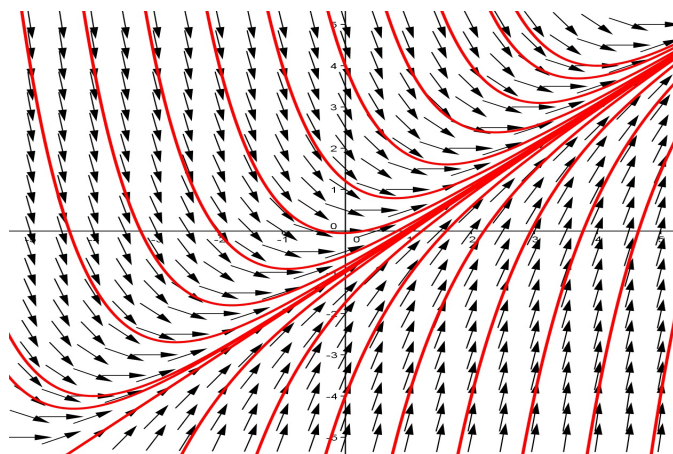


## 3.2 光滑向量场的积分曲线

### 3.2.1 积分曲线

#### 积分曲线

在微积分和常微分方程中学过, 在欧氏区域上给定一个光滑向量场, 就可以过每点得到一条积分曲线。根据定义, 积分曲线是一条参数化曲线, 表达了由向量场所给出的常微分方程的解。从几何上看, 该参数曲线每点处的切向量恰好是给定的向量场在这一点处的向量。下面是一个绘制了许多积分曲线的向量场的例子:



积分曲线的概念可以轻易地被推广到光滑流形:

#### 定义 3.2.1. (积分曲线)

令  $X \in \Gamma^\infty(TM)$  为  $M$  上的光滑向量场. 若光滑曲线  $\gamma: I \rightarrow M$  满足

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in I,$$

则称  $\gamma$  为  $X$  的积分曲线.



若  $0 \in I$  且  $\gamma(0) = p$ , 则称  $\gamma$  是  $X$  的从点  $p$  出发的积分曲线。

下面给出几个简单积分曲线的例子:

**例 3.2.2.** 考虑  $\mathbb{R}^n$  上的坐标向量场  $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ . 那么  $X$  的积分曲线是平行于  $x^1$ -轴的直线. 特别地, 对于任意  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ , 曲线

$$\gamma(t) = (c_1 + t, c_2, \dots, c_n)$$

是  $X$  的积分曲线。更一般地, 向量场  $\tilde{X} = a_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x^n}$  的积分曲线为

$$\tilde{\gamma}(t) = (c_1 + a_1 t, c_2 + a_2 t, \dots, c_n + a_n t)$$

**注 3.2.3.** 虽然曲线

$$\bar{\gamma}(t) = (c_1 + 2t, c_2, \dots, c_n)$$

和  $\gamma$  有完全相同的图像 (即都是经过点  $(c_1, \dots, c_n)$  的“水平线”), 但它并不是  $X$  的积分曲线, 因为  $\dot{\bar{\gamma}}(t) = 2 \frac{\partial}{\partial x^1} \neq X_{\gamma(t)}$ .

**例 3.2.4.** 考虑  $\mathbb{R}^2$  上的向量场  $X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ . 记其积分曲线为  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , 则

$$x'(t) \frac{\partial}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial}{\partial y} = \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} = x(t) \frac{\partial}{\partial y} - y(t) \frac{\partial}{\partial x},$$

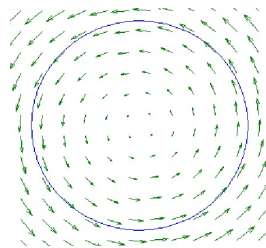
即

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t).$$

该方程组的满足初值条件  $\gamma(0) = (a, b)$  解是

$$x(t) = a \cos t - b \sin t, \quad y(t) = a \sin t + b \cos t.$$

它们是以原点为圆心的圆周, 通过角度给出参数化 (逆时针方向).



**例 3.2.5.** 若  $X_q = 0$ , 则  $M$  上的“常曲线”

$$\gamma_q : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \gamma_q(t) \equiv q.$$

是  $X$  的经过  $q$  的积分曲线, 因为它满足  $\dot{\gamma}_q(t) = 0 = X_q = X_{\gamma_q(t)}$ .

### 局部坐标卡中的常微分方程: 存在性, 唯一性和光滑性

为了研究积分曲线更为深入的性质, 需要将有关流形上切向量的方程  $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$  转化为有关欧氏区域上函数的常微分方程组. 为了做到这一点, 首先注意到以下关于向量场的非常简洁的局部公式, 其证明留作练习:

#### 引理 3.2.6

令  $X$  为  $M$  上的光滑向量场. 那么在局部坐标卡  $(\varphi, U, V)$  上有  $X = \sum X(x^i) \partial_i$ , 其中  $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  是由  $\varphi$  定义的第  $i$  个坐标函数. ◇

令  $\gamma : I \rightarrow M$  为  $X$  的积分曲线. 为了研究在给定点  $\gamma(t)$  处的方程  $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$ , 不失一般性, 可以假设  $\gamma(t) \in U$ , 其中  $(\varphi, U, V)$  是坐标卡. 通过使用局部坐标卡映射  $\varphi$ , 可以将点  $\gamma(t) \in U$  转化成

$$\varphi(\gamma(t)) = (x^1(\gamma(t)), \dots, x^n(\gamma(t))) \in \mathbb{R}^n.$$

如果记  $y^i = x^i \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ , 那么能把定义积分曲线的方程转化为关于单变量函数  $y^i$  的方程. 具体而言, 根据之前的引理, 有

$$\dot{\gamma}(t) = (d\gamma)_t \left( \frac{d}{dt} \right) = \sum_i (d\gamma)_t \left( \frac{d}{dt} \right) (x^i) \partial_i = \sum_i (x^i \circ \gamma)'(t) \partial_i = \sum_i \dot{y}^i(t) \partial_i.$$

因此积分曲线方程  $\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}$  变为

$$\sum_i \dot{y}^i(t) \partial_i = \sum_i X^i(\gamma(t)) \partial_i = \sum_i X^i \circ \varphi^{-1}(y^1(t), \dots, y^n(t)) \partial_i, \quad \forall t \in I.$$

于是, 积分曲线方程被转化为以下关于单变量函数  $y^i$  的常微分方程组:

$$\dot{y}^i(t) = X^i \circ \varphi^{-1}(y^1, \dots, y^n), \quad \forall t \in I, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

这是关于 (单变量) 函数  $y^i = x^i \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  的一阶常微分方程组. 反过来, 这个常微分方程组的任意解都定义了向量场  $X$  在开集  $U$  上的积分曲线.

回顾常微分方程组的基本定理 (参见 [5], 附录 D):

**定理 3.2.7. (一阶常微分方程组的基本定理)**

假设  $V \subset \mathbb{R}^n$  是开集, 且  $F = (F^1, \dots, F^n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  光滑. 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dot{y}^i(t) = F^i(y^1(t), \dots, y^n(t)), & i = 1, \dots, n \\ y^i(t_0) = c^i, & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.2.1)$$

那么

- (1) (存在性) 对于任意  $t_0 \in \mathbb{R}$  和  $c_0 \in V$ , 存在开区间  $I_0 \ni t_0$  和开集  $V_0 \ni c_0$  使得对于任意  $c = (c^1, \dots, c^n) \in V_0$ , 常微分方程组 (3.2.1) 在  $t \in I_0$  上有光滑解  $y_c(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t)) \in V$ .
- (2) (唯一性) 如果  $y_1$  是常微分方程组 (3.2.1) 在  $t \in I_0$  上的解,  $y_2$  是常微分方程组 (3.2.1) 在  $t \in J_0$  上的解, 那么在  $t \in I_0 \cap J_0$  上有  $y_1 = y_2$ .
- (3) (光滑性) (1) 中的解函数  $Y(c, t) := y_c(t)$  在  $(c, t) \in V_0 \times I_0$  上光滑.



由此可得

**定理 3.2.8. (积分曲线局部存在性, 唯一性和光滑性)**

假设  $X$  是  $M$  上的光滑向量场. 那么对于任意  $p \in M$ , 存在  $p$  的邻域  $U_p$ , 正数  $\varepsilon_p > 0$  和光滑映射

$$\Gamma : (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times U_p \rightarrow M$$

使得对于任意  $q \in U$ , 曲线

$$\gamma_q : (-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \rightarrow M, \quad \gamma_q(t) := \Gamma(t, q)$$

是  $X$  的满足  $\gamma(0) = q$  的积分曲线. 此外, 这个积分曲线在以下意义上是唯一的:

如果  $\sigma : I \rightarrow M$  是  $X$  的另一条满足  $\sigma(0) = q$  的积分曲线, 那么

$$\sigma(t) = \gamma_q(t), \quad \forall t \in I \cap (-\varepsilon_p, \varepsilon_p).$$

**重新参数化**

注意积分曲线都是指“参数曲线”. 参数化是定义中的一部分. “相同几何图像”的不同参数化代表了不同的曲线. 一般地, 积分曲线的重参数化不再是积分曲线. 然而, 正如注3.2.3所见的一样, 线性重参数化生成了积分曲线:

**引理 3.2.9. (线性重参数化)**

如果  $\gamma : I \rightarrow M$  是向量场  $X$  的积分曲线, 那么

- (1) 令  $I_a = \{t \mid t+a \in I\}$ , 则

$$\gamma_a : I_a \rightarrow M, \quad \gamma_a(t) := \gamma(t+a)$$

是  $X$  的积分曲线.

- (2) 令  $I^a = \{t \mid at \in I\}$  ( $a \neq 0$ ), 则

$$\gamma^a : I^a \rightarrow M, \quad \gamma^a(t) := \gamma(at)$$

是  $X^a = aX$  的积分曲线.



该引理的证明比较容易, 因而省略.

作为唯一性和平移重参数化的推论, 对于任意  $p \in M$ , 从  $p$  出发的积分曲线有一个最大存在区间  $J_p$ , 从而有极大积分曲线

$$\gamma_p : J_p \rightarrow M.$$

例如, 前面几个例子中积分曲线的最大定义区间均为  $\mathbb{R}$ , 而下面的例3.2.13则给出了一个最大存在区间不是  $\mathbb{R}$  的积分曲线.

再次利用唯一性和平移重参数化, 可得

**命题 3.2.10. (局部流的加性)**

对于  $M$  上光滑向量场  $X$ , 若  $t, s, t+s \in J_p$ , 则  $\gamma_{\gamma_p(s)}(t) = \gamma_p(t+s)$ .



**证明** 固定  $s$ , 则两条曲线

$$\gamma_1(t) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t) \quad \text{和} \quad \gamma_2(t) = \gamma_p(t+s)$$

都是从同一点  $\gamma_p(s)$  出发的  $X$  的积分曲线, 由积分曲线的唯一性可知它们相同.  $\square$

## 流映射

把所有的积分曲线放在一起考虑, 可以得到映射

$$\Phi : \mathcal{M} = \{(t, p) \mid p \in M, t \in J_p\} \longrightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \Phi(t, p) := \gamma_p(t),$$

其中  $\gamma_p(t)$  是从  $p$  出发的极大积分曲线. 于是, 命题3.2.10可被写成

$$\Phi(t, \Phi(s, p)) = \Phi(t+s, p).$$

根据定理3.2.8, 对于任意  $p \in M$ , 存在  $p$  的邻域  $U_p$  和区间  $I_p = (-\varepsilon_p, \varepsilon_p)$  使得  $I_p \times U_p \subset \mathcal{M}$ , 且  $\Phi$  在  $I_p \times U_p$  上是光滑映射. 下面证明  $\Phi$  在整个  $\mathcal{M}$  上是光滑映射 (特别地, 由证明可见  $\mathcal{M}$  是开集). 需要做的是对于任意  $p$  以及 “不太小” 的  $t_0$ , 证明  $\Phi$  在  $(t_0, p) \in \mathcal{M}$  附近的光滑性. 证明的基本想法是利用加法性质即  $\gamma_p(t_0+t) = \gamma_{\gamma_p(t_0)}(t)$ , 将点  $(p, t_0)$  附近的光滑性转化为  $(\gamma_p(t_0), 0)$  附近的光滑性. 为此, 需要将  $p = \gamma_p(0)$  到  $\gamma_p(t_0)$  的这一段积分曲线分为很多段 “短” 积分曲线, 短到使得光滑性可以对一致的  $t$  区间成立, 从而利用平移重参数化把光滑性传递到所需要的点.

**定理 3.2.11. (流映射的光滑性)**

对于任意完备向量场  $X$ , 流  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  是光滑的.



**证明** 设  $(t_0, p) \in \mathcal{M}$ , 则  $t_0 \in J_p$ , 于是存在充分小的正数  $\varepsilon > 0$  使得  $[-\varepsilon, t_0 + \varepsilon] \in J_p$ . 考虑  $K = \gamma_p([- \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$ . 对于任意  $q \in M$ , 存在邻域  $U_q \ni q$  和区间  $I_q = (-\varepsilon_q, \varepsilon_q)$  使得

$$\Phi|_{I_q \times U_q} : I_q \times U_q \rightarrow M$$

是光滑的. 由  $K$  的紧性, 在  $K$  中存在点  $p_1, \dots, p_m$  使得开集  $U_{p_1}, \dots, U_{p_m}$  覆盖  $K$ . 记

$$U := U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_m} \quad \text{以及} \quad I = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) := I_{p_1} \cap \dots \cap I_{p_m}.$$

则  $U$  是  $K$  的开邻域,  $I$  是包含 0 的开区间, 而映射

$$\Phi|_{I \times U} : I \times U \rightarrow M$$

是光滑的. 特别地, 对于任意  $s_0 \in I$ , 映射  $\phi_{s_0} = \Phi(s_0, \cdot) : U \rightarrow M$  是光滑的.

现在取  $N$  充分大使得  $s_0 := t_0/N \in I$ . 令  $U_1 = U$ , 然后迭代地定义

$$U_{k+1} := \phi_{s_0}^{-1}(U_k) \cap U, \quad k = 1, \dots, N.$$

那么对于任意  $k = 1, \dots, N+1$ ,  $U_k$  是开集, 并且  $\phi_{s_0} : U_k \rightarrow U_{k-1}$  是光滑的. 最后, 考虑开集  $\Phi|_{I \times U}^{-1}(U_{N+1})$ . 因为

$$\Phi(s_0, \Phi(s_0, \dots, \Phi(s_0, \Phi(0, p)) \dots)) = \Phi(t_0, p) = \gamma_p(t_0) \in K \subset U,$$

所以  $(0, p) \in \Phi|_{I \times U}^{-1}(U_{N+1})$ . 因此存在  $(0, p)$  的邻域  $I_0 \times U_0 \subset \Phi|_{I \times U}^{-1}(U_{N+1})$ , 即  $\Phi|_{I_0 \times U_0} : I_0 \times U_0 \rightarrow U_{N+1}$  是光滑的. 由于以下光滑映射的复合

$$\begin{aligned} (t_0 + I_0) \times U_0 &\longrightarrow I_0 \times U_0 \xrightarrow{\Phi} U_{N+1} \xrightarrow{\phi_{s_0}} U_N \xrightarrow{\phi_{s_0}} \dots \xrightarrow{\phi_{s_0}} U_1 \\ (t, p) &\mapsto (t - t_0, p) \mapsto \Phi(t - t_0, p) \mapsto \dots \mapsto \Phi(t, p) \end{aligned}$$

恰好就是  $\Phi$ , 故  $\Phi$  在  $(t_0 + I_0) \times U_0$  上光滑 (特别地,  $(t_0 + I_0) \times U_0 \subset \mathcal{M}$ , 从而  $\mathcal{M}$  是开集), 从而完成了证明.  $\square$

### 3.2.2 完备向量场

#### 完备/不完备向量场

##### 定义 3.2.12. (完备向量场)

设  $X$  是  $M$  上的光滑向量场. 若对于任意  $p \in M$ , 满足  $\gamma(0) = p$  的积分曲线  $\gamma$  的最大定义区间均为  $\mathbb{R}$ , 则称  $X$  是完备向量场.



下面的例子表明不是所有光滑向量场都是完备的.

**例 3.2.13.** 考虑  $\mathbb{R}$  上的向量场  $X = t^2 \frac{d}{dt}$ . 令  $\gamma(t) = (x(t))$  为它的积分曲线. 那么

$$x'(t) \frac{d}{dt} = X_{\gamma(t)} = x(t)^2 \frac{d}{dt} \implies x'(t) = x(t)^2.$$

在初值条件  $x(0) = c$  下, 该常微分方程的解为

$$x_c(t) = \begin{cases} \frac{1}{-t+1/c}, & \text{若 } c \neq 0, \\ 0, & \text{若 } c = 0. \end{cases}$$

于是,  $\gamma_c(t)$  的最大存在区间为

$$J_c = \begin{cases} (-\infty, 1/c), & \text{若 } c > 0, \\ \mathbb{R}, & \text{若 } c = 0, \\ (1/c, +\infty), & \text{若 } c < 0. \end{cases}$$

因此从任意  $c \neq 0$  出发的积分曲线的最大存在区间都不是  $\mathbb{R}$ , 从而  $X$  不完备.

设  $X$  是  $M$  上的完备向量场, 则  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$ , 且  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  是光滑映射. 于是对于任意  $t \in \mathbb{R}$ , 映射

$$\phi_t : M \rightarrow M, \quad \phi_t(p) := \Phi(t, p) = \gamma_p(t)$$

是光滑映射, 且由定义以及命题3.2.10易得

**命题 3.2.14. (流的群性质)**

若  $X$  是流形  $M$  上的完备向量场, 则光滑映射族  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  满足

- (1)  $\phi_0 = \text{Id}_M$ ,
- (2) 对于任意  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ ,
- (3) 对于任意  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_t$  可逆且  $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ .



于是完备向量场生成了流形到自身的一族微分同胚, 下一节将进一步研究它们。

**紧支向量场是完备的**

一个自然的问题是: 什么时候向量场是完备的? 根据积分曲线的局部存在性定理, 在积分曲线的任意一点  $\gamma(t)$  处都可以将  $\gamma$  的定义域“向前延伸一点点”至某个  $t + \varepsilon$  处。那么, 为什么还会存在不完备的向量场呢? 原因在于每一点处“能向前延伸的幅度”可能会越来越小。换言之, 如果有一个一致的常数  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得任意点处的积分曲线都能“向前延伸  $\varepsilon_0$ ”, 那么向量场就完备了。问题是在什么条件下, 从每点处的常数能够给出全局的一致常数? 答案是显然的: 紧性!

下面证明紧流形上任意向量场都是完备的。事实上, 还可以证明一个稍微更一般的结果: 根据例3.2.5, 在向量场的零点处的积分曲线都是完备的, 于是只需要在向量场的非零点处讨论向量场的完备性。类比于函数的情况, 定义向量场的支集为

$$\text{supp}(X) = \overline{\{p \in M \mid X(p) \neq 0\}}.$$

若一个向量场的支集为紧集, 则称它是紧支向量场。

**定理 3.2.15. (紧支向量场完备)**

光滑流形  $M$  上任意具有紧支集的光滑向量场  $X$  是完备的。



**证明** 令  $C = \text{supp}(X)$ . 根据例3.2.5,  $X$  的经过任意  $q \in M \setminus C$  的积分曲线都是常数曲线  $\gamma_q$ , 从而其最大存在区间为  $\mathbb{R}$ . 下面假设  $q \in C$ , 则从  $q$  出发的积分曲线都会一直保持在  $C$  中. 由定理3.2.8, 存在区间  $I_q = (-\varepsilon_q, \varepsilon_q)$ ,  $q$  的邻域  $U_q$  和光滑映射  $\Gamma: I_q \times U_q \rightarrow C$  使得对于所有  $p \in U_q$ ,  $\gamma_p(t) = \Gamma(t, p)$  是  $X$  的从  $p$  出发的积分曲线. 由于  $\cup_q U_q \supset C$ , 且  $C$  是紧集, 故可以在  $C$  中找到有限多个点  $q_1, \dots, q_N$  使得  $\{U_{q_1}, \dots, U_{q_N}\}$  覆盖  $C$ . 令

$$I = \bigcap_k I_{q_k} = (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

则对于任意  $q \in C$ , 存在从  $q$  出发的积分曲线  $\gamma_q: I \rightarrow C$ .

记从  $p \in C$  点出发的积分曲线的最大存在区间为  $J_p$ . 如果  $J_p \neq \mathbb{R}$ , 不失一般性, 可假设  $\sup J_p = c < \infty$ . 对于  $q = \gamma_p(c - \frac{\varepsilon_0}{2})$ , 存在从  $q$  出发的积分曲线  $\gamma_q: (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow M$ . 由唯一性,  $\gamma_q(t) = \gamma_p(t + c - \frac{\varepsilon_0}{2})$ . 于是  $\gamma_p$  的定义区间可以被延伸到  $c + \frac{\varepsilon_0}{2} > c$ , 矛盾.  $\square$

显然, 紧流形上的任意光滑向量场都是紧支向量场, 故

**推论 3.2.16**

紧流形上任意光滑向量场是完备的。

