5.4 Stokes公式

在多元微积分中学过三个重要的积分公式，分别是平面区域D上的格林公式
$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy,$$
三维空间区域Ω上的高斯公式
$$\iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \oiint_{\partial\Omega} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$
和三维空间的曲面S上的Stokes公式
$$\iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz,$$
其中出现的各个曲线、曲面积分都赋予合适的定向．如果分别记$\alpha = Pdx + Qdy$，$\beta = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$以及$\gamma = Pdx + Qdy + Rdz$，则上述公式均可被写成完全一样的有关微分形式的积分，
$$\iint_D d\alpha = \int_{\partial D} \alpha, \quad \iiint_\Omega d\beta = \iint_{\partial\Omega} \beta, \quad \iint_S d\gamma = \int_{\partial S} \gamma.$$
本节的目的是把它们推广到光滑流形上.

5.4.1 带边光滑流形

¶ 带边拓扑流形

首先需要引入一些有关带边流形的知识. 记
$$\mathbb{R}^m_+ = \{(x^1, \cdots, x^m) \mid x^m \geq 0\}.$$
下面的定义是自然的：

定义 5.4.1. (带边流形)

如果拓扑空间M是Hausdorff的,第二可数的，并且对任意的$p \in M$，存在p的邻域U同胚于$\mathbb{R}^m$ 或$\mathbb{R}^m_+$，则称M是一个m维 **带边拓扑流形**. ♣

令M为一个带边拓扑流形, 定义M的**边界**为
$$\partial M = \{p \in M \mid p \text{ 在 } M \text{ 中没有同胚于 } \mathbb{R}^m \text{ 的邻域 } \},$$
并称
$$\mathrm{int}(M) = M \setminus \partial M$$
为M的**内部**.

下述引理给出了带边流形边界的另一个刻画，其证明留作习题：

引理 5.4.2. （流形边界的刻画）

点$p \in \partial M$当且仅当存在 p附近的坐标卡$(\varphi, U, \mathbb{R}^m_+)$使得
$$\varphi(p) \in \partial\mathbb{R}^m_+ = \{(x^1, \cdots, x^m) \mid x^m = 0\}.$$
♢

¶ 带边光滑流形

跟第一章一样，带边拓扑流形上的光滑结构指的是“一个图册，使得其中坐标卡之间的转移映射都是光滑映射”．注意对于$\mathbb{R}^m_+ \subset \mathbb{R}^m$中的一个子集$A$，“定义在$A$上的映射$f$是光滑映射”是指“$f$可被扩张成$\mathbb{R}^m$中$A$的某个开邻域上的光滑函数”．

例 5.4.3. 闭球

$$B^m(1) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \le 1\}$$

是一个带边光滑流形，它的边界是$\partial B^m(1) = S^{m-1}$.

例 5.4.4. 设M为任意光滑流形,并且$f \in C^\infty(M)$. 若a是f的正则值，则**次水平集**的闭包

$$\overline{M^a} = f^{-1}((-\infty, a])$$

是一个带边光滑流形,并且$\partial\overline{M^a} = f^{-1}(a)$.

本书前半部分有关光滑流形的大部分结果都可以推广到带边光滑流形上，例如

- 对于m维带边光滑流形M以及任意$p \in M$，同样可以定义切空间T_pM．注意无论p是M的内部点还是边界点，T_pM都是m维线性空间：在局部坐标系(内部或边界)中，T_pM都是以$\partial_1, \cdots, \partial_m$为基生成的向量空间.
- 带边光滑流形之间依然可以定义光滑映射f，以及定义其微分df_p.
- m维带边光滑流形都可以嵌入到$2m$维欧氏空间.
- Sard定理、管状邻域定理、Thom横截性定理都有某种“带边变体”成立.
- 光滑向量场、张量场、微分形式等概念均可推广到光滑带边流形(不过在边界点处向量场的流未必存在，需要额外处理).
- 同样可以定义带边光滑流形上的定向$\mathcal{A}$为“使得对任意两个坐标卡$U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{A}$，均有$\det(d\varphi_{\alpha\beta}) > 0$的图册”，并且可以证明“带边光滑流形是可定向的当且仅当它上面有一个处处非零的最高次微分形式”．

注 5.4.5. 因为两个欧氏空间的乘积依然是欧氏空间，所以若M与N都是常义下的(非带边)光滑流形，那么在乘积坐标卡下，$M \times N$依然是光滑流形．但是，$\mathbb{R}^k_+$与$\mathbb{R}^l_+$的乘积不再是$\mathbb{R}^{k+l}_+$，所以对于光滑带边流形，光滑带边坐标卡的乘积不再是光滑带边坐标卡：此时 $M \times N$是带角的光滑流形(考虑例子$[0,1] \times [0,1]$就能明白其含义).

当然，如果M是一个无边光滑流形而N是一个带边光滑流形，那么在乘积结构下，$M \times N$依然是一个带边光滑流形，其边界是$M \times (\partial N)$．一个常用的例子是$M \times [0,1]$.

¶ 带边光滑流形的边界

对于m维带边光滑流形M，显然$\mathrm{int}(M)$是m维无边光滑流形。事实上，∂M也是无边光滑流形：

引理 5.4.6. (带边光滑流形的边界是无边光滑流形)

假设M是一个具有非空边界的m维带边光滑流形，那么∂M是一个嵌入M中的$(m-1)$维无边光滑流形.

◇

证明概要 设$(U,x^1,\cdots,x^m)$是$p\in\partial M$附近的同胚于$\mathbb{R}^m_+$的坐标卡. 那么

$$U\cap\partial M=\{(x^1,\cdots,x^m)\mid x^m=0\}.$$

从而$(U\cap\partial M,x^1,\cdots,x^{m-1})$是$\partial M$上的一个坐标卡. 可以验证这些坐标卡的相容性. □

对于$p\in\partial M$，要注意区分T_pM和$T_p\partial M$：后者上前者的余维数为1的线性子空间.

下面证明可定向带边光滑流形的边界自动是可定向流形：

定理 5.4.7. (可定向带边光滑流形的边界可定向)

如果M是m维的可定向带边光滑流形,那么其边界 ∂M是M的 $(m-1)$维可定向子流形. ♡

证明 设$(U_\alpha,x^1_\alpha,\cdots,x^m_\alpha)$与$(U_\beta,x^1_\beta,\cdots,x^m_\beta)$为$M$在$p\in\partial M$附近的两个定向相容的坐标卡，使得$M\cap U_\alpha$由$x^m_\alpha\geq 0$给出，而$M\cap U_\beta$由$x^m_\beta\geq 0$给出. 下面证明$\partial M$的坐标卡$(U_\alpha\cap\partial M,x^1_\alpha,\cdots,x^{m-1}_\alpha)$ 与$(U_\beta\cap\partial M,x^1_\beta,\cdots,x^{m-1}_\beta)$是定向相容的. 事实上, 如果记$U_\alpha$与$U_\beta$之间的转移映射 $\varphi_{\alpha\beta}$为$(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$，那么在$\partial M\cap U_\alpha\cap U_\beta$上，有$x^m_\alpha=x^m_\beta=0$，于是在$U_\alpha\cap U_\beta\cap\partial M$上有

$$\varphi^m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)=0,$$

而在$U_\alpha\cap U_\beta\cap\operatorname{int}(M)$上(即当$x^m>0$时)有

$$\varphi^m(x^1,\cdots,x^{m-1},x^m)>0.$$

故

$$\frac{\partial\varphi^m}{\partial x^i}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)=0,\quad i=1,\cdots,m-1$$

并且

$$\frac{\partial\varphi^m}{\partial x^m}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\geq 0.$$

因为$(U_\alpha,x^1_\alpha,\cdots,x^m_\alpha)$与$(U_\beta,x^1_\beta,\cdots,x^m_\beta)$是定向相容的, 在$U_\alpha\cap U_\beta$中处处成立

$$\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)>0.$$

特别地,

$$\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\right)=\det\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\right)_{1\leq i,j\leq m-1} & * \\ 0 & \frac{\partial\varphi^m}{\partial x^m}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\end{pmatrix}>0.$$

由此可得

$$\det\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\right)_{1\leq i,j\leq m-1}>0.$$

所以∂M的坐标卡$(U_\alpha\cap\partial M,x^1_\alpha,\cdots,x^{m-1}_\alpha)$与$(U_\beta\cap\partial M,x^1_\beta,\cdots,x^{m-1}_\beta)$是定向相容的. □

注 5.4.8. 一个不可定向带边流形的边界可能是可定向的 (例如Mobiüs带)，也可能是不可定向的(例如$[0,1]\times M$,其中M是不可定向无边流形).

¶ 边界上的诱导定向

现在设M是一个定向带边光滑流形, 并且取μ为该定向相容的一个体积形式，从而该定向可被表示为$[\mu]$. 在边界∂M上定义一个定向如下:

> 设在给定边界点附近的一个坐标卡U_α中, M由$x_\alpha^m \geq 0$给出，且在U_α中，
> $$\mu = f dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^m,$$
> 其中$f > 0$. 那么局部地可以在$U_\alpha \cap \partial M$上取定微分形式
> $$\eta_\alpha = (-1)^m dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^{m-1}.$$
> 通过选取∂M的从属于这些坐标卡的单位分解, 可以将这些∂M上局部定义的$(m-1)$形式η_α粘合成∂M上的一个全局$(m-1)$形式η. 类似于定理5.3.11的证明，可以验证η是处处非零的，因此是∂M上的一个体积形式，从而定义了∂M上的一个定向.

定向$[\eta]$被称为∂M上由M上的定向$[\mu]$所诱导的**诱导定向**.

注意在边界附近的定向坐标卡中, M由$x_\alpha^m \geq 0$给出. 故在边界处$-x^m$对应了M上“指向外侧的方向”, 而上面定义的边界诱导定向满足
$$d(-x^m) \wedge \eta = d(-x^m) \wedge (-1)^m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1} = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$
读者可以验证这里的诱导定向跟多元微积分中Green公式、Gauss公式和Stokes公式里边界积分定向的选取是一致的。特别地，如果要在∂M上用诱导定向定向积分一个微分形式$\omega \in \Omega_c^{m-1}(\partial M)$, 局部地需要在$\partial M$的坐标卡$(\varphi, U, V)$中写出$\omega$的坐标表达
$$\omega = f(x^1, \cdots, x^{m-1}) \cdot (-1)^m dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{m-1}$$
然后计算
$$\int_U \omega := \int_V f(x^1, \cdots, x^{m-1}) dx^1 \cdots dx^{m-1}.$$

5.4.2 流形上的Stokes公式及其应用

¶ Stokes公式

现在可以陈述并证明本章的主要定理:

定理 5.4.9. (Stokes公式) 设M是一个m维带边光滑定向流形，其边界 ∂M赋有如上所述的诱导定向. 则对任意紧支光滑形式$\omega \in \Omega^{m-1}(M)$, 有
$$\int_{\partial M} \iota_{\partial M}^* \omega = \int_M d\omega,$$
其中$\iota_{\partial M} : \partial M \hookrightarrow M$是包含映射. ♡

注 5.4.10.

(1) Stokes公式对无边流形成立, 此时$\partial M = \emptyset$，从而等式左边是零.

(2) Stokes公式对带角流形也成立，细节可参见[5] 第415-421页.

证明 分下面三种情况分别论证:

(a) ω支在微分同胚于$\mathbb{R}^m$的坐标卡U中.

(b) ω支在微分同胚于$\mathbb{R}^m_+$的坐标卡U中.

(c) 一般情形.

情形(a): 因为在∂M上$\omega=0$, 所以等式左边$\int_{\partial M}\iota^*_{\partial M}\omega=0$.

为了计算$\int_M d\omega$, 记

$$\omega=\sum_i(-1)^{i-1}f_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^m,$$

其中f_i都是紧支光滑函数. 那么

$$d\omega=\sum_i\frac{\partial f_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m.$$

从而由积分的定义以及f_i的紧支性,

$$\begin{aligned}\int_M d\omega&=\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{i=1}^m\frac{\partial f_i}{\partial x^i}dx^1\cdots dx^m\\&=\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^{m-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_i}{\partial x^i}dx^i\right)dx^1\cdots\widehat{dx^i}\cdots dx^m\\&=0.\end{aligned}$$

情形(b): 依然记$\omega=\sum_i(-1)^{i-1}f_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^m$. 用来计算$\int_M d\omega$的公式跟情形(a)是相同的, 只是算出来的结果会有一项有差别，那就是最后一项(即$i=m$那项)：该项算出来的结果不是 0, 而是

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}}\left(\int_0^{\infty}\frac{\partial f_m}{\partial x^m}dx^m\right)dx^1\cdots dx^{m-1}=-\int_{\mathbb{R}^{m-1}}f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)dx^1\cdots dx^{m-1}.$$

另一方面, 由于在∂M上$x^m=0$, 所以$\iota^*_{\partial M}dx^m=0$，故

$$\begin{aligned}\iota^*_{\partial M}\omega&=(-1)^{m-1}f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\ dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1}\\&=-f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)\cdot(-1)^m\ dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{m-1}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\partial M}\iota^*_{\partial M}\omega&=\int_{\mathbb{R}^{m-1}}(-f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0))dx^1\cdots dx^{m-1}\\&=-\int_{\mathbb{R}^{m-1}}f_m(x^1,\cdots,x^{m-1},0)dx^1\cdots dx^{m-1},\end{aligned}$$

从而欲证的结论成立.

情形(c): 对于一般情形，用有限多个坐标卡覆盖紧集 $\mathrm{supp}(\omega)$，并取从属于该覆盖的单位分解$\{\rho_i\}$. 那么可以对每个$\rho_i\omega$应用情形(a)或者情形(b)，从而得到

$$\int_{\partial M}\iota^*_{\partial M}\omega=\sum_i\int_{\partial M}\iota^*_{\partial M}(\rho_i\omega)=\sum_i\int_M d(\rho_i\omega)=\sum_i\int_M d\rho_i\wedge\omega+\int_M d\omega.$$

另一方面，

$$\sum_i\int_M d\rho_i\wedge\omega=\int_M d(\sum\rho_i)\wedge\omega=0.$$

故欲证的结论成立. □

¶ 应用:体积的变分.

设M是一个(无边)光滑流形, $\Omega \subset M$为一个预紧区域(即闭包 $\overline{\Omega}$是紧的). 设μ是M上的一个体积形式. 那么自然可以定义Ω相对于 μ的体积为

$$\mathrm{Vol}_\mu(\Omega) = \int_\Omega \mu.$$

现在假设边界$\partial\Omega$是M的光滑子流形，从而$\overline{\Omega}$是一个紧致带边光滑流形. 设X是 M上的一个完备向量场，则由$\overline{\Omega}$的紧性可知存在$t_0 > 0$使得当$|t| < t_0$时，X生成的局部流ϕ_t在Ω上是有定义的，且若记

$$\Omega_t = \phi_t(\Omega)$$

为区域 Ω在X生成的流ϕ_t作用下的像，则$\phi_t : \Omega \to \Omega_t$是微分同胚. 注意这些$\phi_t$都是保定向微分同胚：一方面，由$\phi_t$是微分同胚可知$\det(d\phi_t) \neq 0$对所有$t$成立；另一方面，显然$\det(d\phi_t)$ 是t的连续函数，而且$\det(d\phi_0) \equiv 1$，所以$\det(d\phi_t) > 0$.

下述命题给出了在流ϕ_t下区域Ω体积的变化规律：

命题 5.4.11. (体积关于流的变分)

设X是 M上的一个光滑向量场，$\Omega \subset M$为一个具有光滑边界的预紧区域，则

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(\Omega_t) = \int_{\partial\Omega} \iota_X \mu.$$

♠

证明 根据定义和流形上积分的变量替换公式(即定理5.3.9)，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(\Omega_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Omega_t} \mu = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\Omega} \phi_t^*\mu = \int_\Omega \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t^*\mu = \int_\Omega \mathcal{L}_X \mu.$$

另一方面，因为$d\mu = 0$，应用Cartan神奇公式(见命题5.2.11)可得

$$\mathcal{L}_X \mu = d\iota_X\mu + \iota_X d\mu = d\iota_X\mu.$$

于是由Stokes公式，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(\Omega_t) = \int_\Omega d\iota_X\mu = \int_{\partial\Omega} \iota_X\mu.$$

□

下面是它的一个特殊情形：令$M = \mathbb{R}^m$. 设f为一个光滑函数，并且0是f的正则值. 设Ω为次水平集

$$\Omega = \{p : f(p) \leq 0\}.$$

取向量场X为f的梯度向量场∇f(参见定理3.3.6的证明). 注意由0是f的正则值可知X在$\partial\Omega$上处处非零，从而$\iota_X\mu$是$\partial\Omega$上的一个体积形式, 被称为体积形式μ在边界$\partial\Omega$(它是f的水平集)上的诱导体积形式. 不难验证$\iota_X\mu$满足

$$df \wedge \iota_X\mu = |\nabla f|^2 \mu.$$

在此设定之下, 命题5.4.11中的体积变分公式可以被解读为

> 光滑函数次水平集体积的变化率为水平集(在诱导体积形式下的低一维)体积.

该结论对于一般的Riemann流形同样成立.