2.7 横截性

对比一下“光滑范畴”与“线性范畴”，可以发现子流形在很多方面性质不够好，例如光滑映射下子流形的原像未必是子流形，子流形的交集未必是子流形等等。本节引入的横截性概念，用于剔除那些坏情形，因而在研究子流形时非常重要。

2.7.1 横截相交

¶ 子流形的原像

令 $f: M \to N$ 为光滑映射，正则水平集定理（以及常秩水平集定理）给出了 $f^{-1}(q)$ 是子流形的比较便于使用的判据。对于光滑子流形 $X \subset N$，一个自然的问题是

$$\boxed{\text{什么时候 } f^{-1}(X) \text{ 是 } M \text{ 的光滑子流形?}}$$

一方面，由子流形的定义可知，对于任意 $q \in X$，均存在邻域 V 以及由坐标卡映射所诱导的光滑映射 $g: V \to \mathbb{R}^l$（其中 $l = \dim N - \dim X$ 是 X 在 N 中的余维数）使得 $g^{-1}(0) = X \cap V$。注意由 g 的构造可知 dg 是满射，于是 0 是 g 的正则值，且它的核为

$$\ker(dg_q) = T_qX.$$

另一方面，注意到“$f^{-1}(X)$ 是否是 M 中的光滑子流形”是一个局部问题: 只需对于任意 $p \in f^{-1}(X)$, 验证是否存在 p 在 M 中的邻域 U 使得 $U \cap f^{-1}(X)$ 是 M 的光滑子流形. 不妨设 $q = f(p)$ 并取 $U = f^{-1}(V)$，则可以将 $U \cap f^{-1}(X)$ 表示为 $g \circ f$ 的水平集:

$$U \cap f^{-1}(X) = f^{-1} \circ g^{-1}(0) = (g \circ f)^{-1}(0).$$

从而根据正则水平集定理，只要 0 是 $g \circ f$ 的正则值，$f^{-1}(X)$ 就是 M 的光滑子流形.

现在尝试寻找 f 和 S 所满足的条件（由于对于给定的 f 和 X, 映射 g 不是唯一的，故所求的条件应该是与 g 无关的），使得 0 是 $g \circ f$ 的正则值. 换句话说，要找的条件应该是使得对于任意 $p \in (g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(X) \cap U$, 微分 $d(g \circ f)_p$ 是满射. 根据链式法则,

$$d(g \circ f)_p = dg_q \circ df_p.$$

因为 dg_q 是核为 $\ker(dg_q) = T_qX$ 的满射，故为了让 $d(g \circ f)_p$ 是满射，仅需要假设

$$\boxed{\mathrm{Im}(df_p) \text{ 包含某个“} T_qX \text{ 在 } T_qN \text{ 的补空间”}.}$$

为了更准确地描述上述性质，需要以下线性代数的引理:

引理 2.7.1

设线性映射 $L: V \to W$ 为满射，且 $V_1 \subset V$ 为线性子空间，则 $L(V_1) = W$ 当且仅当 $V_1 + \ker(L) = V$. ♢

证明 若 $V_1 + \ker(L) = V$, 则 $L(V_1) = L(V_1 + \ker(L)) = L(V) = W$.

若 $V_1 + \ker(L) \neq V$, 取 $v \in V$ 满足 $v \notin V_1 + \ker(L)$. 则 $L(v) \notin L(V_1)$(否则存在 $v_1 \in V_1$ 使得 $L(v_1) = L(v)$, 即 $v - v_1 \in \ker(L)$, 于是 $v = v_1 + (v - v_1) \in V_1 + \ker(L)$, 矛盾). 故 $L(V_1) \neq W$.

□

¶ 光滑映射与子流形之间的横截相交

根据上述引理, 0 是 $g \circ f$ 的正则值当且仅当

$$\mathrm{Im}(df_p) + T_{f(p)}X = T_{f(p)}N, \qquad \forall p \in f^{-1}(X). \tag{2.7.1}$$

注意到这个条件仅依赖于 f 和 X, 不依赖于 g.

定义 2.7.2.（横截相交：映射与子流形） 令 $f: M \to N$ 为光滑映射, $X \subset N$ 为光滑子流形. 若(2.7.1)成立，则称 f 与 X **横截相交**, 并记为 $f \pitchfork X$. ♣

注 2.7.3. 有两种极端情况:

- 如果 $f^{-1}(X) = \emptyset$, 那么 f 与 X 横截相交，因为此时没有需要验证的条件.
- 如果 $X \subset N$ 是光滑子流形，使得任意 $q \in X$ 都是 $f: M \to N$ 的正则值, 那么 f 在每一点 $p \in f^{-1}(X)$ 处都是淹没, 从而横截条件(2.7.1)自动成立. 特别地,

  命题 2.7.4 如果 $f: M \to N$ 是淹没, 那么 f 与 N 的任意光滑子流形都横截相交. ♠

根据引理2.7.1之前的讨论，下述定理是自然的：

定理 2.7.5.（横截相交条件下子流形的原像） 设 $f: M \to N$ 为光滑映射, $X \subset N$ 为光滑子流形，且 $f \pitchfork X$. 则 $f^{-1}(X)$ 是 M 中的光滑子流形，它的余维数等于 X (在 N 中) 的余维数, 并且

$$T_p(f^{-1}(X)) = df_p^{-1}(T_{f(p)}X), \qquad \forall p \in f^{-1}(X).$$ ♡

证明 根据上述讨论，如果 $f \pitchfork X$, 那么 0 是 $g \circ f$ 的正则值. 因此 $f^{-1}(X) = (g \circ f)^{-1}(0)$ 是 M 中的光滑子流形. $f^{-1}(X)$ 的维数是 $\dim M - l$, 其中 $l = \dim N - \dim X$. 因此 $\dim M - \dim f^{-1}(X) = \dim N - \dim X$, 即

$$\mathrm{codim} f^{-1}(X) = \mathrm{codim} X.$$

最后，由正则水平集定理，$f^{-1}(X)$ 在 p 处的切空间为

$$T_p(f^{-1}(X)) = \ker(d(g \circ f)_p) = (dg_{f(p)} \circ df_p)^{-1}(0) = df_p^{-1}(dg_{f(p)}^{-1}(0)) = df_p^{-1}(T_{f(p)}X).$$

于是定理得证. □

¶ 两个子流形/映射之间的横截相交

在文献中还有两种常见的横截相交，都可以视作 $f \pitchfork X$ 的特殊情况.

两个子流形的横截相交: 设 X_1, X_2 为 M 的光滑子流形，记 $\iota: X_1 \hookrightarrow M$ 为典范嵌入. 则 $\iota^{-1}(X_2) = X_1 \cap X_2$. 此外，由于 $T_pX_1 = d\iota_p(T_pX_1)$, 条件 $\iota \pitchfork X_2$ 等价于 “对于每一点 $p \in X_1 \cap X_2$，均有 $T_pX_1 + T_pX_2 = T_pM$” .

定义 2.7.6.（横截相交：子流形与子流形）

设 X_1, X_2 是 M 的光滑子流形。若对于任意 $p \in X_1 \cap X_2$,

$$T_pX_1 + T_pX_2 = T_pM,$$

则称 X_1 与 X_2 在 M 中 **横截相交**，记作 $X_1 \pitchfork X_2$. ♣

注 2.7.7. 根据定义，如果 $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, 那么 $X_1 \pitchfork X_2$.

因此如果 $X_1 \pitchfork X_2$, 那么 $\iota \pitchfork X_2$. 所以 $X_1 \cap X_2 = \iota^{-1}(X_2)$ 是 M 的光滑子流形，且

$$\dim(X_1 \cap X_2) = \dim X_1 - (\dim M - \dim X_2) = \dim X_1 + \dim X_2 - \dim M.$$

此外, $X_1 \cap X_2$ 在 p 处的切空间为 $d\iota_p^{-1}(T_pX_2) = T_pX_1 \cap T_pX_2$. 于是

推论 2.7.8

令 X_1 和 X_2 为 M 中两个横截相交的光滑子流形, 那么 $X_1 \cap X_2$ 是 M 的光滑子流形，其维数等于 $\dim X_1 + \dim X_2 - \dim M$, 且对于任意 $p \in X_1 \cap X_2$,

$$T_p(X_1 \cap X_2) = T_pX_1 \cap T_pX_2.$$ ♡

注 2.7.9. 若 $X_1 \pitchfork X_2$, 那么 X_1, X_2 和 $X_1 \cap X_2$ 在 M 中的余维数满足以下简单的关系

$$\mathrm{codim} X_1 \cap X_2 = \mathrm{codim} X_1 + \mathrm{codim} X_2.$$

从本质上来说，这表示在交点处，定义子流形 X_1 的方程组跟定义子流形 X_2 的方程组是“无关”的，从而合在一起可以定义余维数更高的子流形。

两个映射的横截相交　更一般地，还可以定义两个映射之间的横截相交关系：

定义 2.7.10.（横截相交：映射与映射）

令 $f_1 : M_1 \to N$ 和 $f_2 : M_2 \to N$ 为光滑映射. 如果乘积映射

$$f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N \times N$$

与“对角线子流形”

$$\Delta_N = \{(q, q) \mid q \in N\} \subset N \times N$$

横截相交，则称 f_1 和 f_2 **横截相交**, 并记为 $f_1 \pitchfork f_2$. ♣

在这个框架下, 定理2.7.5变为(验证)

推论 2.7.11

如果 $f_1 \pitchfork f_2$, 那么纤维积

$$F = (f_1 \times f_2)^{-1}(\Delta_N)$$

是 $M_1 \times M_2$ 的子流形，它在 $(p_1, p_2) \in F$ 处的切空间为

$$T_{(p_1,p_2)}F = \{(X_1, X_2) \mid X_i \in T_{p_i}M_i, (df_1)_{p_1}(X_1) = (df_2)_{p_2}(X_2).\}.$$ ♡

注意如果 f_2 为嵌入映射 $\iota_2 : X \hookrightarrow N$, 那么 $f_1 \pitchfork f_2$ 等价于 $f_1 \pitchfork X$.

2.7.2 横截相交的广泛存在性

¶ 横截性定理

下面给出在寻找横截映射时非常有用的横截性定理(M 是带边流形时也成立):

定理 2.7.12.（横截性定理）

令 $F : S \times M \to N$ 为光滑映射, $X \subset N$ 为光滑子流形. 对于每个 $s \in S$, 令

$$f_s : M \to N, \quad f_s(p) = F(s, p).$$

假设 $F \pitchfork X$. 那么对于以下投影映射的每个正则值 $s \in S$[a]

$$\pi : F^{-1}(X) \subset S \times M \to S, \quad \pi(s, p) = s,$$

有 $f_s \pitchfork X$. (于是根据 Sard 定理, 对于几乎所有的 $s \in S$, 都有 $f_s \pitchfork X$.)

[a]注意到因为 $F \pitchfork X$, $F^{-1}(X)$ 的原像是 $S \times M$ 中的光滑子流形. 因此投影映射 π 是光滑映射.

证明 令 s 为 π 的任意正则值. 对于任意 $p \in f_s^{-1}(X)$, 需要证明

$$\operatorname{Im}(df_s)_p + T_q X = T_q N,$$

其中 $q = f_s(p)$. 因为 $F \pitchfork X$, 对于任意 $Y_q \in T_q N$, 存在 $(Z_s, Z_p) \in T_{(s,p)}(S \times M)$ 和 $Z_q \in T_q X$ 使得

$$Y_q = (dF)_{(s,p)}(Z_s, Z_p) + Z_q.$$

由于 s 是 π 的正则值, 对于 $Z_s \in T_s S$, 存在 $Z_p' \in T_p M$ 使得 $(Z_s, Z_p') \in T_{(s,p)} F^{-1}(X)$. 因此

$$Y_q = (dF)_{(s,p)}(0, Z_p - Z_p') + (dF)_{(s,p)}(Z_s, Z_p') + Z_q.$$

最后，因为

$$(dF)_{(s,p)}(0, Z_p - Z_p') = (df_s)_p(Z_p - Z_p') \in \operatorname{Im}(df_s)_p,$$

以及

$$(dF)_{(s,p)}(Z_s, Z_p') \in dF_{(s,p)}\left(T_{(s,p)} F^{-1}(X)\right) \subset T_q X.$$

于是结论成立。 □

作为推论，可以证明横截映射是广泛存在的:

推论 2.7.13

给定任意光滑映射 $f : M \to \mathbb{R}^K$ 以及光滑子流形 $X \subset \mathbb{R}^K$，对于几乎所有的 $v \in \mathbb{R}^K$, “v-平移”映射

$$f_v : M \to \mathbb{R}^K, \qquad p \mapsto f_v(p) = f(p) + v$$

与 X 横截相交.

证明 定义光滑映射 F:

$$F : M \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^K, \qquad (p, v) \mapsto f(p) + v.$$

那么对于任意固定的点 $p \in M$, $F(p,\cdot)$ 是淹没(事实上是微分同胚). 由此可得 F 是从 $M \times \mathbb{R}^K$ 到 $\mathbb{R}^K$ 的淹没. 因此根据命题2.7.4, F 与 $\mathbb{R}^K$ 中的任意光滑子流形 X 横截相交. 由以上的横截定理可以得到结论. □

特别地，如果取 f 为嵌入映射，则有

推论 2.7.14.（一般位置引理）

令 M, N 为 $\mathbb{R}^K$ 的光滑子流形. 则对于几乎所有 $a \in \mathbb{R}^K$, $M + a$ 与 N 横截相交. ♡

¶ 同伦横截性定理

通过管状邻域定理，可以证明:

定理 2.7.15.（同伦横截性定理）

如果 $f : M \to N$ 为光滑映射, 并且 $Y \subset N$ 为任意光滑子流形. 那么 f 同伦于某个与 Y 横截相交的光滑映射 $g : M \to N$. 此外，如果 $X \subset M$ 是闭子流形并且 f 在 X 上与 Y 横截相交 (即 (2.7.1) 对于 $f^{-1}(Y) \cap X$ 中的点成立)，那么可以选择 g 使得 $g|_X = f|_X$. ♡

证明 将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^K$，并令 $\pi_\varepsilon : N^\varepsilon \to N$ 为 N 的 ε-邻域，其中 $\varepsilon : N \to \mathbb{R}_{>0}$ 取为光滑函数 (例如取为 ε 邻域定理中连续函数 $\varepsilon/2$ 的光滑 $\varepsilon/2$ 逼近). 再取光滑函数 $\delta : M \to \mathbb{R}$ 使得 $0 \le \delta \le 1$ 且 $A = \delta^{-1}(0)$. 定义

$$F : B \times M \to N \quad F(s,p) = \pi_\varepsilon(f(p) + \delta(p)\varepsilon(f(p))s),$$

其中 B 是 $\mathbb{R}^K$ 中的开单位球. 下证 F 与 Y 横截相交：对于任意 $(s,p) \in F^{-1}(Y)$，

- 若 $p \notin X$，则由映射 $(s,p) \mapsto f(p) + \delta(p)\varepsilon(f(p))s$ 对于任意固定的 p 都是淹没映射可知 F 在 (s,p) 处是淹没映射，从而 $\mathrm{Im}(dF_{(s,p)}) + T_{F(s,p)}Y = T_{F(s,p)}N$.
- 若 $p \in X$，则由 f 在 X 上与 Y 横截相交可知 $\mathrm{Im}(df_p) + T_{f(p)}Y = T_{f(p)}N$. 但此时由定义可知 $F(s,p) = f(p)$，故 $\mathrm{Im}(dF_{(s,p)}) + T_{F(s,p)}Y = T_{F(s,p)}N$.

于是由横截性定理，存在 $s \in B$ 使得 $g = f_s = F(s,\cdot)$ 与 Y 横截相交。显然 $F(rs,\cdot)$ 给出了 g 与 $f = f_0$ 之间的同伦，且当 $p \in X$ 时，$g(p) = f(p)$. □

作为推论，可以证明下述“直观上很显然”的结论:

推论 2.7.16.（余维数 2 不改变连通性）

设 M 为 m 维连通光滑流形，而 $S \subset M$ 是维数 $k \le m-2$ 的光滑子流形. 那么补集 $M \setminus S$ 是连通的. ♡

证明 设 $x, y \in M \setminus S$. 令 γ 为 M 中连接 x 和 y 任意的道路. 根据定理2.6.12，γ 同伦于连接 x 和 y 的光滑曲线 γ'. 再由上述推论, γ' 同伦于连接 x 和 y 且与 M 横截相交的光滑映射 γ''. 通过计算维数，就得到 $\mathrm{Image}(\gamma'') \cap M = \emptyset$，于是 γ'' 就是一条连接 x 与 y 的道路。 □

类似地，还可以证明：如果从光滑流形中挖掉余维数至少为 3 的子流形，其基本群不改变（留作习题）。