

6.4 映射度理论

本节对于定向流形之间的逆紧映射，定义映射度的概念并给出应用。为此，首先需要计算任意 m 维光滑流形 M 的最高阶 de Rham 上调群。

6.4.1 最高阶 de Rham 上调群

¶ 可定向流形的最高阶紧支 de Rham 上调群

在前两节已经证明了 $H_c^m(S^m) \simeq \mathbb{R}$ 和 $H_c^m(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}$ 。下面证明该结论对一般的连通定向光滑流形都成立：

定理 6.4.1. (连通可定向流形的最高阶紧支 de Rham 上调群)

若 M 是 m 维连通定向光滑流形，则映射 $\int_M : H_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ 是线性同构。

(从而此时有 $H_c^m(M) \simeq \mathbb{R}$)



证明 因为 \int_M 是线性满射，只需证明 \int_M 是单射，即证

目标： 若 $\omega \in \Omega_c^m(M)$ 满足 $\int_M \omega = 0$ ，则存在 $\mu \in \Omega_c^{m-1}(M)$ 使得 $\omega = d\mu$ 。

因为 M 是连通的而且 $\text{supp}(\omega)$ 是紧集，可以取连通紧集 $K_\omega \supset \text{supp}(\omega)$ 。下面通过对“ K_ω 的好覆盖所需开集个数”进行归纳，证明上述结论。

如果 K_ω 有一个仅包含一个坐标卡的好覆盖，即存在包含 K_ω 的坐标卡 $U \simeq \mathbb{R}^m$ ，则 $\omega \in \Omega_c^m(U)$ ，则由紧支 de Rham 上调群的 Poincaré 引理(即定理 6.3.6)以及拓扑不变性，存在 $\mu_1 \in \Omega_c^{m-1}(U)$ 使得在 U 中有 $\omega = d\mu_1$ ，于是零扩张后的 $\mu = \iota_* \mu_1$ 就是所求。

下面假设欲证的目标对“所有满足‘ K_ω 具有一个由 $k-1$ 个坐标卡组成的好覆盖’的 $\omega \in \Omega_c^m(M)$ ”都成立，并设 $\omega \in \Omega_c^m(M)$ 满足“ K_ω 具有好覆盖 $\{U_1, \dots, U_k\}$ ”。

断言： 存在 U_i ，使得 $U = \cup_{j \neq i} U_j$ 是连通的。

断言的证明：构造图 G ，其顶点 v_1, \dots, v_k 分别对应于 U_1, \dots, U_k ；顶点 v_i 与 v_j 有边相连当且仅当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 。那么图 G 是一个连通图。根据图论，任意连通图总可以删除一个顶点(及与之相连的边)，使得剩下的图仍然是连通的：只需要选择该图的一棵“生成树”，并删除该树的“一片叶子”即可。

取 $U \cup V$ 关于覆盖 $\{U, V\}$ 的一个单位分解 $\{\rho_U, \rho_V\}$ ，并令

$$\omega_U = \rho_U \omega, \quad \omega_V = \rho_V \omega.$$

注意由 $\omega \in \Omega_c^m(M)$ 可知 $\omega_U, \omega_V \in \Omega_c^m(M)$ 。因为 K_ω 是连通的，所以 $U \cap V \neq \emptyset$ 。选取 M 上一个支集落在 $U \cap V$ 中的紧支 m 次微分形式 ω_0 ，使得

$$\int_M \omega_0 = \int_M \omega_U.$$

则 $\omega_U - \omega_0 \in \Omega_c^m(M)$ ，且 $\int_M (\omega_U - \omega_0) = 0$ 。根据归纳假设，存在 $\eta_U \in \Omega_c^{m-1}(M)$ 使得

$$\omega_U - \omega_0 = d\eta_U.$$

类似地, 由 $\int_M(\omega_V + \omega_0) = -\int_M \omega_U + \int_M \omega_0 = 0$ 可知存在 $\eta_V \in \Omega_c^{m-1}(M)$ 使得

$$\omega_V + \omega_0 = d\eta_V.$$

因此 $\omega = \omega_U + \omega_V = d(\eta_U + \eta_V)$, 其中 $\eta_U + \eta_V \in \Omega_c^{m-1}(M)$. □

¶ 可定向流形的最高阶 de Rham 上同调群

由于紧流形的紧支 de Rham 上同调群就是通常的 de Rham 上同调群, 故

推论 6.4.2. (紧致连通可定向光滑流形的最高阶 de Rham 上同调群)

设 M 是 m 维紧致连通可定向光滑流形, 则

$$H_{dR}^m(M) \simeq \mathbb{R}.$$



为了计算非紧的可定向光滑流形的最高阶的 de Rham 上同调群, 需要如下引理:

引理 6.4.3. (非紧连通流形的特定开覆盖)

设 M 是非紧连通流形, 则存在 M 的局部有限可数覆盖 $\{V_k\}$, 满足

- (1) 每个 V_k 都是连通预紧开集,
- (2) 对于任意 k , 存在 $j > k$ 使得 $V_k \cap V_j \neq \emptyset$.



由此可以证明

定理 6.4.4. (非紧连通可定向光滑流形的最高阶 de Rham 上同调群)

设 M 是 m 维非紧的连通可定向光滑流形, 则

$$H_{dR}^m(M) = 0$$



证明 取 M 的满足上述引理的局部有限开覆盖 $\{V_k\}$, 并令 $\{\rho_k\}$ 为从属于该开覆盖的一个单位分解. 对于任意 k , 取定一个 $j(k) > k$ 使得 $V_k \cap V_{j(k)} \neq \emptyset$, 并取定 $\eta_k \in \Omega_c^m(V_k \cap V_{j(k)}) \subset \Omega_c^m(M)$ 使得 $\int_M \eta_k = 1$.

对任意 $\omega \in \Omega^m(M)$, 记 $\omega_k = \rho_k \omega \in \Omega_c^m(V_k)$. 令 $c_1 = \int_{V_1} \omega_1$, 则 $\omega_1 - c_1 \eta_1 \in \Omega_c^m(V_1)$ 且

$$\int_{V_1} (\omega_1 - c_1 \eta_1) = 0.$$

所以由定理 6.4.1, 存在 $\mu_1 \in \Omega_c^{m-1}(V_1)$ 使得

$$d\mu_1 = \omega_1 - c_1 \eta_1.$$

接下来归纳地定义 $\mu_i \in \Omega_c^{m-1}(V_i)$ 如下: 设已定义了常数 c_1, \dots, c_k , 以及 $\mu_1 \in \Omega_c^{m-1}(V_1), \dots, \mu_k \in \Omega_c^{m-1}(V_k)$, 使得对任意 $j \leq k$ 均有

$$d\mu_j = \omega_j + \sum_{j(i)=j} c_i \eta_i - c_j \eta_j.$$

令 $c_{k+1} = \int_{V_{k+1}} (\omega_{k+1} + \sum_{j(i)=k+1} c_i \eta_i)$, 则由 $\omega_{k+1} + \sum_{j(i)=k+1} c_i \eta_i - c_{k+1} \eta_{k+1} \in \Omega_c^m(V_{k+1})$

且

$$\int_{V_{k+1}} \omega_{k+1} + \sum_{j(i)=k+1} c_i \eta_i - c_{k+1} \eta_{k+1} \in \Omega_c^m(V_{k+1}) = 0$$

可知存在 $\mu_{k+1} \in \Omega_c^{m-1}(V_{k+1})$ 使得

$$d\mu_{k+1} = \omega_{k+1} + \sum_{j(i)=k+1} c_i \eta_j - c_{k+1} \eta_{k+1}.$$

最后, 令 $\mu = \sum_k \mu_k$. 由 $\{V_k\}$ 的局部有限性可知该求和是局部有限的, 所以确实定义了 $\Omega^{m-1}(M)$ 中的一个元素, 且

$$d\mu = d \sum_k \mu_k = \sum_k \omega_k + \sum_k \sum_{j(i)=k} c_i \eta_i - \sum_k c_k \eta_k = \omega,$$

从而定理得证. \square

不可定向流形的最高阶 de Rham 以及紧支 de Rham 上同调群

对于 m 维连通不可定向光滑流形 M , 为了计算其最高阶 de Rham 上同调以及紧支 de Rham 上同调群, 需要考虑其定向双重覆盖 $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$, 其中

$$\widetilde{M} = \{(p, O_p) \mid p \in M, O_p \text{ 是 } T_p M \text{ 的一个定向}\}$$

(称为 M 的定向双重覆盖空间), 而 $\pi(p, O_p) = p$ 是自然的投影映射. 可以证明(留作练习):

- \widetilde{M} 可被赋予拓扑和光滑结构, 使之成为一个 m 维连通定向流形, 且 π 是光滑双重覆盖映射.
- 该覆盖的非平凡 Deck 变换 $\sigma: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ 是反转定向微分同胚.

下面借助 \widetilde{M} 的最高阶 de Rham 上同调群去研究 M 的最高阶 de Rham 上同调群.

定理 6.4.5. (不可定向流形的最高阶 de Rham/紧支 de Rham 上同调群)

设 M 是 m 维连通不可定向光滑流形, 则

$$H_{dR}^m(M) = H_c^m(M) = 0.$$

证明 对于任意 $\omega \in \Omega_c^m(M)$, 令 $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$ (注意 π 是逆紧映射), 则 $\tilde{\omega} \in \Omega_c^m(\widetilde{M})$, 且

$$\sigma^* \tilde{\omega} = \sigma^* \pi^* \omega = (\pi \circ \sigma)^* \omega = \pi^* \omega = \tilde{\omega}.$$

于是 $\int_{\widetilde{M}} \tilde{\omega} = \int_{\widetilde{M}} \sigma^* \tilde{\omega} = - \int_{\widetilde{M}} \tilde{\omega}$. 由此可知 $\int_{\widetilde{M}} \tilde{\omega} = 0$. 由推论 6.3.11 以及推论 6.4.2, 存在 $\tilde{\eta} \in \Omega_c^{m-1}(\widetilde{M})$ 使得 $\tilde{\omega} = d\tilde{\eta}$. 注意 $\frac{1}{2}(\tilde{\eta} + \sigma^* \tilde{\eta})$ 在 Deck 变换下不变, 从而定义了 M 上的紧支 $m-1$ 形式 η , 且 $d\eta = \omega$. 这就证明了 $H_c^m(M) = \{0\}$.

对于 de Rham 上同调群, 若 M 是 m 维紧致连通不可定向光滑流形, 则 $H_{dR}^m(M) = H_c^m(M) = \{0\}$. 若 M 是 m 维非紧且连通不可定向光滑流形, 则由定理 6.4.4 可知 $H_{dR}^m(\widetilde{M}) = \{0\}$, 从而不必借助积分映射, 依然可得 $H_{dR}^m(M) = \{0\}$. \square

综上所述: 假设 M 是 m 维连通光滑流形, 则

$$H_{dR}^m(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & M \text{ 紧且可定向,} \\ 0, & M \text{ 非紧或不可定向} \end{cases} \quad \text{而} \quad H_c^m(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & M \text{ 可定向,} \\ 0, & M \text{ 不可定向.} \end{cases}$$

6.4.2 映射度

¶ 映射度

设 M, N 是 m 维连通定向流形, 则积分映射给出了线性同构 $H_c^m(M) \simeq \mathbb{R}$ 以及 $H_c^m(N) \simeq \mathbb{R}$. 现设 $f: M \rightarrow N$ 是逆紧光滑映射. 则拉回映射

$$f^*: \mathbb{R} \simeq H_c^m(N) \longrightarrow H_c^m(M) \simeq \mathbb{R}$$

是线性映射, 因此存在仅依赖于 f 的常数, 记作 $\deg(f)$, 使得 f^* 作为 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的映射就是“乘以常数 $\deg(f)$ ”. 换言之, 对于 $\omega \in \Omega_c^m(N)$, 均有

$$\int_M f^* \omega = \deg(f) \int_N \omega$$

定义 6.4.6. (映射度)

设 M, N 是 m 维连通定向流形, 而 $f: M \rightarrow N$ 是逆紧光滑映射, 则称上述常数 $\deg(f)$ 为 f 的映射度.



注 6.4.7. 同构 $H_c^m(N) \simeq \mathbb{R}$ 是由积分映射 \int_N 诱导的, 因此依赖于定向的选取: 同一个 ω 关于相反的定向会给出相反数. 故为了定义 $\deg(f)$, 需要先取定 M 和 N 的定向. 不过, 如果 M 是可定向的而 $f: M \rightarrow M$ 是 M 到自身的光滑映射, 则 $\deg(f)$ 与 M 的定向的选取无关.

例 6.4.8. 设 M, N 是连通定向流形, 而 $f: M \rightarrow N$ 是微分同胚. 由定理 5.3.9 (积分的变量替换公式) 可知

$$\deg(f) = \begin{cases} 1, & f \text{ 是保定向的,} \\ -1, & f \text{ 是反转定向的.} \end{cases}$$

特别地, 考虑对径映射

$$f: S^n \rightarrow S^n, \quad p \mapsto f(p) = -p.$$

则根据第五章习题可知当 n 是奇数时它是保定向的, 当 n 是偶数时它是反转定向的. 故

$$\deg(f) = \begin{cases} 1, & n \text{ 是奇数,} \\ -1, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

关于映射度, 下述性质是基本的:

命题 6.4.9. (映射度的基本性质)

设 M, N, P 是维数相同的连通定向流形.

(1) 如果 $f: M \rightarrow N$ 和 $g: N \rightarrow P$ 都是逆紧光滑映射, 则 $g \circ f$ 也逆紧, 且

$$\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g).$$

(2) 如果 $f: M \rightarrow N$ 和 $g: M \rightarrow N$ 是逆紧同伦的, 则

$$\deg(f) = \deg(g).$$



证明 (1) 由定义可得. (2) 由定理 6.3.3 可得. (3) . □

注 6.4.10. 设 M, N 为连通可定向光滑流形. 由于任意逆紧连续映射都逆紧同伦于

某个逆紧光滑映射, 而由定理6.3.3, 逆紧同伦于同一个逆紧连续映射的两个逆紧光滑映射具有相同的映射度. 因此, 对于任意逆紧连续映射 $f: M \rightarrow N$, 可以定义 $\deg(f)$ 为 $\deg(g)$, 其中 g 是任意一个逆紧同伦于 f 的逆紧光滑映射.

注 6.4.11. 注意紧流形之间的任意连续映射都是逆紧的. 于是若 M 是 m 维连通定向紧流形, 而 $f, g: M \rightarrow S^m$ 是同伦的两个光滑映射, 则 $\deg(f) = \deg(g)$. 反之, 映射度可以用来刻画两个映射是否同伦(证明参见[?]):

定理 6.4.12. (Hopf 映射度定理)

设 M 是 m 维连通定向紧流形. 则连续映射 $f, g: M \rightarrow S^m$ 同伦当且仅当 $\deg(f) = \deg(g)$.

这说明映射度是连续映射空间 $C(M, S^m)$ 的唯一同伦不变量!

映射度的局部计算

下面给出用局部信息计算映射度的方法. 首先考虑 f 不是满射的情形:

命题 6.4.13. (不满射则映射度为0)

设 M, N 都是 m 维定向连通光滑流形. 如果逆紧光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 不是满射, 则 $\deg(f) = 0$.

证明 因为逆紧映射都是闭映射(见第二章习题), 所以如果 $q \notin f(M)$, 则存在 q 的开邻域 \tilde{U} 满足 $\tilde{U} \cap f(M) = \emptyset$. 选取一个支集包含在 \tilde{U} 中的 m 次微分形式 ω 使得 $\int_N \omega = 1$. 根据构造 $f^*\omega = 0$, 所以 $\deg(f) = 0$. \square

接下来假设逆紧光滑映射 f 是满射. 令 $q \in N$ 是 f 的一个正则值. 则(见第二章习题) $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$ 是有限集, 且存在 q 的邻域 \tilde{U} 和每个 p_i 的邻域 U_i , 使得

- 对于 $i \neq j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$,
- $f^{-1}(\tilde{U}) = \cup_{i=1}^k U_i$,
- f 将每个 U_i 微分同胚地映为 \tilde{U} .

显然可以选取 U 和 U_i 足够小, 使得它们都是连通的定向坐标卡. 令

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \text{如果 } f: U_i \rightarrow \tilde{U} \text{ 是保定向的,} \\ -1, & \text{如果 } f: U_i \rightarrow \tilde{U} \text{ 是反转定向的.} \end{cases}$$

取 $\omega \in \Omega_c^m(\tilde{U})$ 使得 $\int_N \omega = 1$. 则 $f^*\omega$ 的支集包含于 $f^{-1}(\tilde{U}) = \cup_{i=1}^k U_i$, 而且

$$\int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*\omega = \sum_{i=1}^k \sigma_i \int_{\tilde{U}} \omega = \sum_{i=1}^k \sigma_i.$$

于是我们证明了

定理 6.4.14. (映射度的局部计算公式)

f 的映射度一定是整数, 且等于

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \sigma_i.$$

例 6.4.15. 考虑映射

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = z^k.$$

由于每个 $w \neq 0$ 有 k 个原像, 且 f 保定向, 故 $\deg(f) = k$.

¶ 映射度的应用 1: 毛球定理

利用映射度, 可以证明著名的

定理 6.4.16. (毛球定理)

偶数维球面上不存在处处非零的光滑向量场.



证明 设 X 是 $S^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ 上处处非零的光滑向量场. 通过用欧氏度量对向量长度归一化, 可以假设对所有点 $p \in S^{2n}$ 都有 $|X_p| = 1$. 下面将 p 和 X_p 都视为 \mathbb{R}^{2n+1} 中的向量, 并考虑映射

$$F: S^{2n} \times [0, 1] \rightarrow S^{2n}, \quad F(p, t) = p \cos(t\pi) + X_p \sin(t\pi).$$

则由 $|p| = |X_p| = 1$, $p \perp X_p$ 以及勾股定理可知对于任意 $t \in [0, 1]$, $F(\cdot, t)$ 都是从 S^{2n} 到 S^{2n} 的映射. 这说明 F 是恒等映射 $F(\cdot, 0) = \text{Id}_{S^{2n}}$ 和对径映射

$$F(\cdot, 1) = f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}, f(p) = -p$$

之间的同伦. 所以由例 6.4.8 可得 $-1 = \deg(f) = \deg(\text{Id}_{S^{2n}}) = 1$, 矛盾. □

由于 Lie 群上有很多处处非零的左不变向量场, 所以作为推论, 立刻得到

推论 6.4.17. (偶数维球面不是 Lie 群)

对任意 $n \geq 1$, S^{2n} 上不存在 Lie 群结构.



¶ 映射度的应用 2: Brouwer 不动点定理

映射度是“将在边界上定义的映射扩张为在内部定义的映射”的拓扑障碍:

命题 6.4.18. (边界映射向内部扩张的条件)

设 M 是 m 维可定向的紧致连通带边流形, 其边界 ∂M 也连通. 设 X 是 $(m-1)$ 维连通定向无边流形. 若光滑映射 $f: \partial M \rightarrow X$ 可扩张为光滑映射 $g: M \rightarrow X$, 则 $\deg(f) = 0$.



证明 令 $\iota: \partial M \rightarrow M$ 是包含映射, 则 $f = g \circ \iota$. 取 $\omega \in \Omega^{m-1}(X)$ 使得 $\int_X \omega = 1$. 则

$$\deg(f) = \deg(f) \int_X \omega = \int_{\partial M} f^* \omega = \int_{\partial M} \iota^* g^* \omega = \int_M d(g^* \omega) = \int_M g^* d\omega = 0,$$

其中最后一步用到了事实 $d\omega = 0$. □

注 6.4.19. 若 M 的边界 ∂M 有 k 个连通分支, 分别记为 $\partial_i M$ ($1 \leq i \leq k$), 并记 $f_i = f|_{\partial_i M}$, 则在其他条件不变的情况下, 用同样的证明可得

$$\sum_{i=1}^k \deg(f_i) = 0.$$

由上述命题可得著名的

推论 6.4.20. (Brouwer不动点定理)

每个从 \mathbb{R}^m 中的闭单位球体 \bar{B} 到它自身的连续映射都有不动点.



证明 用反证法. 设 $F_0: \bar{B} \rightarrow \bar{B}$ 是没有不动点的连续映射. 取正数

$$0 < r < \inf_{p \in \bar{B}} |p - F_0(p)|/3.$$

则根据 Whitney 逼近定理, 存在光滑映射 $F_1: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得

$$|F_0(p) - F_1(p)| < r, \quad \forall p \in \bar{B}.$$

考虑映射

$$F: \bar{B} \rightarrow \bar{B}, \quad F(p) = F_1(p)/(1+r).$$

则 F 是 \bar{B} 到自身的光滑映射. 又因为

$$|F(p) - F_0(p)| \leq |F(p) - F_1(p)| + |F_1(p) - F_0(p)| < |F(p)|r + r \leq 2r < |F_0(p) - p|,$$

所以 F 没有不动点. 于是光滑映射

$$G: \bar{B} \rightarrow S^{m-1}, \quad p \mapsto \frac{p - F(p)}{|p - F(p)|}$$

是下述光滑映射

$$g = G|_{S^{m-1}}: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}.$$

的扩张. 根据命题 6.4.18, $\deg(g) = 0$.

另一方面, 映射(注意由 $|F(p)| \leq 1$ 且 $p \neq F(p)$ 可知 H 良定)

$$H: S^{m-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{m-1}, \quad (p, t) \mapsto \frac{p - tF(p)}{|p - tF(p)|}$$

是恒等映射和 g 之间的同伦. 所以 $\deg(g) = \deg(\text{Id}) = 1$. 矛盾. □

映射度的应用3: Borsuk-Ulam定理

首先证明

命题 6.4.21. (球面到自身奇映射的映射度是奇数)

设 $f: S^m \rightarrow S^m$ 是光滑奇映射(即对所有 p 都有 $f(-p) = -f(p)$), 则 $\deg(f)$ 是奇数. ♠

证明 用归纳法, 先假设 $m = 1$, 即假设 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 是奇映射. 为简单起见, 分别记上半圆、下半圆、左半圆、右半圆为 $S_\Delta^1, S_\nabla^1, S_\triangleleft^1$ 和 S_\triangle^1 . 不妨设 $N = (0, 1)$ 是 f 的一个正则值, 则 $f^{-1}(\{N, -N\})$ 是有限集. 利用同伦类中小的光滑扰动(例如旋转), 可设 $f((\pm 1, 0)) \neq N$, 且不妨设 $f((1, 0)) \in S_\triangle^1$. 由定理 6.4.14, 只需证明 $f^{-1}(N)$ 包含奇数个点. 由 f 是奇映射可知

$$\#f^{-1}(N) = \frac{1}{2} \#f^{-1}(\{N, -N\}) = \#f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_\Delta^1.$$

由于 $f^{-1}(\{N, -N\})$ 中的点将 S_Δ^1 分成有限段圆弧, 而 N 是 f 的正则值, 故 f 将相邻的圆弧分别映入 S_\triangle^1 和 S_\triangleleft^1 . 又因为 $f((1, 0))$ 和 $f((-1, 0))$ 分别属于 S_\triangle^1 和 S_\triangleleft^1 , 所以

$\#f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_\lambda^1$ 一定包含奇数个点, 从而此时结论成立.

对于 $m > 1$, 用投影降维和类似的论证. 设 $f: S^m \rightarrow S^m$ 是光滑奇映射. 依然不妨设 $N = (0, \dots, 0, 1)$ 是 f 的正则值, 且 $f(S^{m-1}) \neq N$, 其中 S^{m-1} 是 S^m 中由方程 $x^{m+1} = 0$ 所给出的“赤道”. 同理可得

$$\#f^{-1}(N) = \frac{1}{2} \#f^{-1}(\{N, -N\}) = \#f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_\lambda^m,$$

其中 S_λ^m 为上半球面. 设 $f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_\lambda^m = \{p_1, \dots, p_k\}$, 并取 N 的充分小的可缩邻域 U 以及 p_1, \dots, p_k 的相应邻域 U_i 使得 f 把每个 U_i 微分同胚地映为 U 或 $-U$, 且所有 U_i 都被包含在上半球面之内. 令 $M = S_\lambda^m - \cup_i U_i$, 以及 $g = r \circ \pi \circ f|_M$, 其中 $\pi(x^1, \dots, x^{m+1}) = (x^1, \dots, x^m)$ 为投影映射, 而 $r(x) = x/|x|$ 为从 m 维去心球体到 $m-1$ 维球面 S^{m-1} 的收缩映射. 记 $g_0 = g|_{S^{m-1}}$ 以及 $g_i = g|_{\partial U_i}$. 则

- 由构造知 $g_0: S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ 是奇映射, 从而由归纳假设, $\deg(g_0)$ 是奇数.
- 由构造中 $g_i: \partial U_i \rightarrow S^{m-1}$ 是微分同胚, 从而 $\deg(g_i) = \pm 1$.
- 由注 6.4.19 可知 $\sum_{i=0}^k \deg(g_i) = 0$.

于是 k 一定是奇数, 从而命题得证. □

由此可得

定理 6.4.22. (Borsuk-Ulam 定理)

对于任意连续映射 $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, 存在 p_0 使得 $f(-p_0) = f(p_0)$. ♡

证明 对 m 归纳. 当 $m = 1$ 时由 $f(p) - f(-p) = -(f(-p) - f(p))$ 以及连续函数介值定理知结论成立.

下设 $m > 1$. 若存在连续映射 $f: S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, 使得 $f(-p) \neq f(p)$, 令 $\varepsilon_0 = \inf |f(-p) - f(p)|$, 可知 f 的任意 ε_0 光滑逼近满足同样性质, 故不妨设 f 是光滑映射. 定义映射

$$g: S^m \rightarrow S^{m-1}, \quad g(p) = \frac{f(p) - f(-p)}{|f(p) - f(-p)|}.$$

根据定义, $\tilde{g} := g|_{S^{m-1}}$ 是从 S^{m-1} 到它自身的奇映射, 从而 $\deg(\tilde{g}) \neq 0$. 另一方面, 显然 g 是 \tilde{g} 的扩张, 从而 $\deg(\tilde{g}) = 0$, 矛盾. □