

# 第 1 章 光滑流形

## 1.1 拓扑流形

### 1.1.1 点集拓扑概要

拓扑是附加在集合上的一种数学结构。该结构对几何和分析而言都是本质的：从几何上看，拓扑所刻画的是在抽象意义下的空间“临近关系”；从分析上，拓扑是用于定义“映射的连续性”时不可或缺的底层结构。下面对本书要用的拓扑知识作一个简单回顾。

#### ¶ 拓扑与连续性

先回忆一下在拓扑和连续映射的概念，以及在抽象集合上构造拓扑的基本方法。根据定义，若  $X$  的一个子集族  $\mathcal{T}$  满足以下公理：

- (1)  $\mathcal{T}$  包含集合  $X$  自身和空集  $\emptyset$ ，
- (2)  $\mathcal{T}$  中任意多个集合的并集仍在  $\mathcal{T}$  中，
- (3)  $\mathcal{T}$  中任意有限个集合的交集仍在  $\mathcal{T}$  中，

则称  $\mathcal{T}$  为  $X$  上的一个**拓扑**，并称  $\mathcal{T}$  中的集合为（该拓扑下的）**开集**。开集的补集被称为**闭集**。当然，在同一个集合上可以有很多不同的集族满足以上公理，从而有很多不同的拓扑。

从直觉上说，上述关于开集的公理所刻画的是空间的邻近性关系：若一个开集  $U$  包含了某点  $x$ ，则它也包含了所有跟  $x$  “充分靠近”的点。特别地，有了拓扑，就可以抛开距离的概念去谈论“邻近性”，从而研究“把邻近的点映为邻近的点”的映射：若两个拓扑空间  $X$  和  $Y$  之间的映射  $f: X \rightarrow Y$  满足“对于  $Y$  中任意开集  $V$ ，其原像  $f^{-1}(V)$  是  $X$  中的开集”，则称  $f$  是**连续映射**。

有许多自然的方式，可以从已有的拓扑去构造新的拓扑，其中很多自然定义的映射都是连续映射。例如，在本书中要用到的有

- 如果  $\mathcal{T}$  是  $X$  上的一个拓扑，而  $Y \subset X$ ，那么

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$$

是子空间  $Y$  上的拓扑。该拓扑被称为**子空间拓扑**。此时，包含映射  $\iota: Y \hookrightarrow X$  是连续映射。

- 如果  $\mathcal{T}_X$  和  $\mathcal{T}_Y$  分别是  $X$  和  $Y$  上的拓扑，那么

$$\mathcal{T}_{X \times Y} = \{W \mid \forall (x, y) \in W, \exists U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y \text{ 使得 } (x, y) \in U \times V \subset W\}$$

是乘积空间  $X \times Y$  上的拓扑。该拓扑被称为**乘积拓扑**。此时，投影映射

$$\pi_X: X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x$$

（以及类似的  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ ）和“分层嵌入”映射

$$\iota_y: X \hookrightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y)$$

(以及类似的  $\iota_x : Y \hookrightarrow X \times Y$ ) 都是连续映射.

- 如果  $(X, \mathcal{T}_X)$  是一个拓扑空间, 并且  $\sim$  是  $X$  上的一个等价关系, 那么

$$\mathcal{T}_{X/\sim} = \{V \mid \pi^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$$

是商空间  $X/\sim$  上的拓扑. 该拓扑被称为**商拓扑**. 此时, 商映射

$$\pi : X \rightarrow X/\sim$$

是连续映射.

## 拓扑性质

在拓扑学课程中, 可以学习到很多种不同的拓扑性质. 下面简要回顾其中最重要的几个, 它们在本书中也将会常常出现:

- (1) Hausdorff 性质: 若对于拓扑空间  $X$  中任意  $x \neq y$ , 都存在开集  $U \ni x$  和  $V \ni y$  使得  $U \cap V = \emptyset$ , 则称  $X$  是 **Hausdorff 空间**, 简称  $T_2$  空间.
- (2) 第二可数性质: 若对于拓扑空间  $X$ , 存在由可数个开集组成的子集族  $\mathcal{S}_0$ , 使得  $X$  中任意开集都可表示成  $\mathcal{S}_0$  中开集的并集, 则称  $X$  为**第二可数空间**, 简称  $A_2$  空间.

Hausdorff 性质的推论之一是“任意收敛点列的极限一定是唯一的”, 这对于构造连续映射而言有时候是必不可少的. 第二可数性质则蕴含了“任意开覆盖一定有可数子覆盖”等性质, 在后文中从局部向整体过渡时起到了关键作用. 若无特别说明, 本书中涉及的所有空间都是 Hausdorff 且第二可数的. 注意

- 若  $X$  是 Hausdorff 空间或第二可数空间, 则它的任意子集 (赋予子空间拓扑) 都是 Hausdorff 空间或第二可数空间.
- 若  $X$  和  $Y$  都是 Hausdorff 空间或都是第二可数空间, 则它们的乘积空间 (赋予乘积拓扑) 依然是 Hausdorff 空间或第二可数空间.
- 但是, 一般而言 Hausdorff 空间或第二可数空间的商空间未必是 Hausdorff 空间或者第二可数空间, 有兴趣的读者可以尝试构造反例.

本书中还将常常用到另一些极其重要的拓扑性质. 因为它们不具有遗传性 (即具有该性质的拓扑空间, 其子空间未必具有该性质), 我们给出子集上相应性质的定义:

- (3) 紧致性: 设  $K$  是拓扑空间  $X$  的子集, 若  $K$  的任意开覆盖  $\{U_\alpha\}$  都存在一个有限子覆盖  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ , 即  $K \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$ , 则称  $K$  是  $X$  的**紧致子集**. 特别地, 若  $X$  本身满足该条件, 则称  $X$  是**紧致拓扑空间**.
- (4) 连通性: 设  $A$  是拓扑空间  $X$  的子集, 若存在  $X$  中的两个开集  $U_1$  和  $U_2$  使得  $A \cap U_1 \neq \emptyset$ ,  $A \cap U_2 \neq \emptyset$ , 并满足

$$A \subset U_1 \cup U_2 = X, \quad \text{且} \quad U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset,$$

则称  $A$  是**不连通的**. 如果  $A$  不是不连通的, 则称它是  $X$  的**连通子集**. (此外, 如果  $X$  是不连通的, 那么  $X$  的每个极大连通子集都被称为  $X$  的一个**连通分支**.)

- (5) 道路连通性: 设  $A$  是拓扑空间  $X$  的子集, 若对于任意  $p, q \in A$ , 都存在连续映射  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  使得  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ , 则称  $A$  是**道路连通的**. 这样的映射被称作

$A$  中从  $p$  到  $q$  的一条**道路**. (此外, 如果  $X$  不是道路连通的, 那么  $X$  的每个极大道路连通子集都被称为  $X$  的一个**道路连通分支**.)

虽然紧致性和连通性一般不能被遗传到子空间, 但它们是可乘和可除的: 紧致空间/连通空间/道路连通空间的乘积空间或商空间依然是紧致空间/连通空间/道路连通空间. 此外, 不难证明, 在连续映射下, 任意紧致子集/连通子集/道路连通子集的像依然具有紧致性/连通性/道路连通性.

在大多数情况下, 本书将假设所研究对象是连通的, 因为对于不连通的空间, 总可以逐个研究其连通分支. 另一方面, 虽然本书中确实会研究非紧致的空间, 但我们将会发现:

- 如果有紧致性的假设, 论证往往会简单很多;
- 很多非紧致空间的结论是建立在紧致空间相应结论基础之上的 (毕竟本书的研究对象—流形—具有两种较弱的紧致性, 即不仅在局部上是紧致的, 而且整体上总可以被表示成可数个紧致子集的并).

## ¶ 拓扑不变量

若两个拓扑空间  $X$  和  $Y$  之间的连续映射  $f: X \rightarrow Y$  是可逆的, 且其逆映射  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  也是连续的, 则称  $f$  是一个**同胚映射**, 并称  $X$  和  $Y$  是**同胚的**拓扑空间. 不难发现, 同胚给出了拓扑空间之间的一个等价关系. 我们将总是视同胚的拓扑空间为同一个拓扑空间.

显然, 在同胚映射下, 上面所提到的拓扑性质都自动被保持不变. 此外, 除了各种拓扑性质之外, 还有一些与拓扑空间相关的量 (可以是数值, 也可以是**群**、**向量空间**或者别的数学对象) 在同胚下被保持不变. 它们通常被称作**拓扑不变量**. 最简单的拓扑不变量包括

- 连通分支/道路连通分支的个数;
- 基本群;
- 同伦群, 同调群, 上同调群等 (这些不变量是代数拓扑课程的主要研究对象, 本书不作要求).

下面这个定理则告诉我们, 欧氏空间的维数是拓扑不变量, 这在接下来定义流形的维数时是必须的:

### 定理 1.1.1. (维数的同胚不变性)

如果  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集,  $V$  是  $\mathbb{R}^m$  中的开集,  $f: U \rightarrow V$  是同胚, 那么  $m = n$ .



该定理看似显然, 但其证明却绝不简单. 事实上, 虽然人们先后给出过该定理的很多不同证明, 但往往都要用到一些深刻的代数拓扑知识. 在本书的第二部分中, 将利用 de Rham 上同调群 (并结合逼近的思想) 给出一个证明. 一种应用微分拓扑的思想, 但不使用 (上) 同调群或同伦群等高级工具的初等证明可以参见本书作者编著的《拓扑学讲义》.

## 1.1.2 拓扑流形

## ¶ 局部欧氏空间

在数学分析等课程中，已经学过如何在欧氏空间这个最简单同时也最重要的拓扑空间上做分析（包括微分，积分等）。因为分析，尤其是映射的光滑性等微分性质，仅依赖于映射的局部性态，所以在将相应的理论拓展到更一般的空间时，自然地要去考虑局部同胚于欧氏空间的拓扑空间：

**定义 1.1.2. (局部欧氏空间)**

设  $M$  是一个拓扑空间。如果对于任意  $x \in M$ ，均存在三元组  $(\varphi, U, V)$ ，使得

- (1)  $U$  是  $x$  在  $M$  中的一个开邻域，
- (2)  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集，
- (3)  $\varphi: U \rightarrow V$  是  $U$  到  $V$  的同胚，

则称  $M$  是一个  $n$  维**局部欧氏空间**，并称三元组  $(\varphi, U, V)$  为  $M$  在点  $x$  附近的一个**坐标卡**，称  $U$  为一个**坐标邻域**，而  $\varphi$  为**坐标映射**。



注意由定理1.1.1，局部欧氏空间的维数是良定的概念。【为简单起见，我们不考虑“具有多个局部欧氏连通分支且各个连通分支具有不同维数”的空间。】

**注 1.1.3.**

(1) 在任意点  $x$  附近，坐标卡都远不是唯一的：设  $(\varphi, U, V)$  是  $x$  附近的坐标卡。那么

- 对于  $x$  的更小的开邻域  $U_1 \subset U$ ，若记  $\varphi_1 = \varphi|_{U_1}$ ，并且令  $V_1 = \varphi(U_1)$ ，则  $(\varphi_1, U_1, V_1)$  也是  $x$  附近的一个坐标卡。
- 对于任意同胚  $\phi: V \rightarrow V_1$ ，其中  $V_1 \subset \mathbb{R}^n$  也是欧氏开集，若记  $\varphi_1 = \phi \circ \varphi$ ，则  $(\varphi_1, U, V_1)$  也是  $x$  附近的一个坐标卡。特别地，对于任意  $v \in \mathbb{R}^n$ ，记  $V_v = V + \{v\}$  以及  $\varphi_v(x) = \varphi(x) + v$ ，那么  $(\varphi_v, U, V_v)$  是  $x$  附近的一个坐标卡。

当然，同一个点附近的两个不同坐标卡，一般而言未必是一个包含另一个，而完全可能是仅有部分重叠，如下图所示：

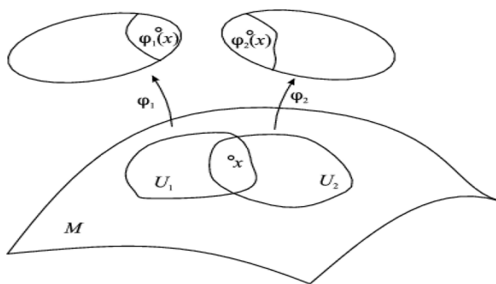


图 1.1: 重叠的坐标卡

(2) 通过缩小  $U$  并适当调整  $\varphi$ ，可以使得  $V$  是欧氏空间的单位开球体（或者是  $\mathbb{R}^n$  本身，因为它与单位开球同胚），并使得  $\varphi(x) = 0$ 。这样的坐标卡称为以  $x$  为中心的坐标卡，是最常用的坐标卡。

## 拓扑流形

虽然局部欧氏性质对于即将定义的拓扑流形而言是最核心的性质，但是确实有一些局部欧氏空间在“半局部”或整体上性质不够好，例如

- 具有两个原点的直线是局部欧氏的，但是它不是 Hausdorff 空间，而这将会导致“一个收敛点列会同时收敛到两个不同的点”这样的现象发生，从而在这样的空间上无法建立起合理的极限和分析理论。
- 长直线是局部欧氏的，但是它不是第二可数的，于是对于这样的空间，无法从局部过渡到整体（这种过渡主要是利用后文即将建立的“单位分解定理”）。

对这些病态的例子，本书不具体展开，感兴趣的读者可在 [1] 中了解其定义和基本性质。

下面定义拓扑流形的概念。粗略地说，拓扑流形是在刨去那些病态反例后剩下的性质比较好的局部欧氏空间：

### 定义 1.1.4. ( $n$ 维 拓扑流形)

若拓扑空间  $M$  满足

- (1)  $M$  是 Hausdorff 空间，
- (2)  $M$  是第二可数空间，
- (3)  $M$  是  $n$  维局部欧氏空间，

则称  $M$  是一个  $n$  维 拓扑流形。



**注 1.1.5.** 根据点集拓扑的相关知识，不难证明拓扑流形具有以下各种良好拓扑性质：

- 任意拓扑流形都是局部紧的（即任意点都有开邻域使得其闭包是紧集）
- 任意拓扑流形都是局部连通（即任意点的任意邻域都有一个包含该点的连通开子集）、局部道路连通的（即任意点的任意邻域都有一个包含该点的道路连通开子集）
- 任意拓扑流形都是可分的（即存在可数稠密集）
- 任意拓扑流形都是 Lindelöf 的（即任意开覆盖都有可数子覆盖）
- 任意拓扑流形都是  $\sigma$  紧的（即可以写成可数个紧集的并）
- 任意拓扑流形都是正则的（即点和不交闭集可用开集分离）和正规的（即两个不交闭集可用开集分离）
- 任意拓扑流形都是仿紧的（即任意开覆盖都有局部有限开加细）
- 任意拓扑流形都是可度量化了的（即存在度量结构，使得诱导的拓扑一致）

**注 1.1.6.** 部分书籍在定义拓扑流形时，不假设第二可数性或者 Hausdorff 性质，或者用某些较弱的条件（例如仿紧性等）代替。

需要指出的是，还有一些仅仅在较弱的意义下具有欧氏性质的空间，也可以被用作局部模型而发展分析理论。例如，可以用“欧氏空间开集或者欧氏半空间开集”为局部模型，建立带边流形的理论；或者用“特定的 Hilbert 空间/Banach 空间/Fréchet 空间/拓扑向量空间”为模型，建立相应的无穷维流形的理论。本书中我们仅考虑有限维流形的理论。



注 1.1.7. 我们简要介绍一下流形概念的历史：

- **流形**的概念首次出现于 B. Riemann 于 1854 年 7 月 10 日在哥廷根大学所做的题为“论作为几何学基础的假设”的就职演说里，在其中他将  $n$  维流形直观地描述为  $(n-1)$  维流形的连续堆叠。这是人类思维的一次重大飞跃：从此欧氏空间不再是唯一可能的物理空间模型（但是作为局部模型，欧氏空间仍然有着特殊的地位）。
- 在 1895 年，H. Poincaré 发表了他的著名论文“位置分析”。在这篇文章（连同 1899 年至 1904 年间的五篇补编）当中，他研究了三维以及更高维的流形。他首次将微分流形外蕴地定义为欧氏空间之间（满足特定“非退化性”假设的）连续可微映射的水平集，并且进一步利用流形链定义了更一般的流形。后者是现代记号中“图册”这一概念的前身。
- 在 1911-1912 年，H. Weyl 在其黎曼曲面课程中，通过引入点集拓扑，利用图册抽象而内蕴地定义流形，给流形理论建立了牢固的基石。
- 最终在二十世纪三十年代，H. Whitney 证明了对于光滑流形而言（具体定义见下节），由图册给出的抽象内蕴定义等价于 Poincaré 用欧氏空间中子集给出的外蕴定义。



注 1.1.8. Riemann 引入流形时将之命名为 Mannigfaltigkeit（德文），这里简要介绍一下它在几种语言中的译名：

- 该词在英语中被译为 manifold（原意为“多层，多样化”）【因而在日文中被翻译为“多様體”】。不过，英文中主要用 manifold 表示带有拓扑或微分结构的如上定义的空间，而用另一个词 variety 表示相应的带有代数结构的空间（通常译为代数簇）。
- 该词在在法语中被译为 variété。带有拓扑/微分/代数结构的空间分别被翻译为 variétés topologiques/différentielle/algébrique。
- 该词最优美的翻译是在中文里：中国拓扑学的奠基人江泽涵取用南宋诗人、民族英雄文天祥《正气歌》中的一句

天地有正气，杂然赋流形。

将它翻译成“流形”，雅致而达意。该词更原始的出处见《易经·乾·彖传》，

云行雨施，品物流形。

此外，该译法还有一重巧妙的地方：总所周知，研究“数的分析”的理论，最初被牛顿称为 fluxion 并被翻译为“流数”；故而把研究“形上的分析”时的背景空间叫做“流形”，数与形这数学中两个最基本研究对象就形成了巧妙的呼应！

## ¶ 拓扑流形最简单的例子

显然若  $M$  是拓扑流形，而  $N$  同胚于  $M$ ，那么  $N$  也是一个拓扑流形。正如对于拓扑空间那样，同胚的拓扑流形将被视为同一个拓扑流形。下面给出拓扑流形的几个最简单的例子：

- (1) 只有一个 0 维连通拓扑流形，即单点集。如果不要求连通性，那么任意可数点集（赋予离散拓扑）是 0 维拓扑流形，反之任意 0 维拓扑流形都是一个可数点集。
- (2) 只有两个不同的 1 维连通拓扑流形，分别是实直线  $\mathbb{R}$  和圆  $S^1$ 。
- (3) 2 维紧致连通拓扑流形也有一个相对较为简单的分类，即  $\Sigma_k = \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2$  ( $k \geq 0$ ) 和  $\tilde{\Sigma}_k = \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$  ( $k \geq 1$ )。但对于 3 维及更高维拓扑流形，分类问题则异常复杂，没有这种简单而完全的列表。
- (4) 欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  本身是一个  $n$  维拓扑流形。事实上， $\mathbb{R}^n$  中的任意开集  $U$  是一个  $n$  维拓扑流形，因为可以取其坐标卡为  $(\varphi, U, U)$ ，其中映射  $\varphi$  为恒等映射。特别地，
  - (a). **(矩阵空间)**. 令  $M(n, \mathbb{R})$  为全体  $n \times n$  实矩阵的集合。它是同构于  $\mathbb{R}^{n^2}$  的线性空间，因此可以自然地被视为是一个同胚于  $\mathbb{R}^{n^2}$  的拓扑流形。
  - (b). **(一般线性群)**. 一个更有趣的例子是一般线性群

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

它是  $M(n, \mathbb{R})$  中的开集，从而是一个  $n^2$  维拓扑流形。本书后文中将会证明，它的“闭子群”都是光滑流形。由此可以得到很多由矩阵构成的流形，它们都是李群的重要例子。

- (5) 更一般地，拓扑流形  $M$  的任意开子集  $U$ （赋予子空间拓扑）仍然是拓扑流形，因为根据定义，
  - 作为 Hausdorff 空间  $M$  的子空间， $U$  仍然是 Hausdorff 空间；
  - 作为第二可数空间  $M$  的子空间， $U$  仍然是第二可数空间；
  - 若  $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$  是  $M$  的一个坐标卡，则  $(\varphi_\alpha|_{U \cap U_\alpha}, U \cap U_\alpha, \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha))$  是  $U$  的一个坐标卡。
- (6) 如果  $M_1$  和  $M_2$  分别为  $n_1$  维和  $n_2$  维拓扑流形，那么乘积空间  $M_1 \times M_2$ （赋予乘积拓扑）是  $n_1 + n_2$  维拓扑空间。事实上，如果  $(\varphi_1, U_1, V_1)$  和  $(\varphi_2, U_2, V_2)$  分别为  $M_1$  和  $M_2$  上点  $p$  和点  $q$  附近的坐标卡，那么可以证明： $(\varphi_1 \times \varphi_2, U_1 \times U_2, V_1 \times V_2)$  是  $M_1 \times M_2$  上  $(p, q)$  附近的坐标卡。[当然还要用到如下事实：两个 Hausdorff 空间或第二可数空间的乘积空间仍然是 Hausdorff 空间或第二可数空间]

下一节中我们将定义光滑流形并给出一些更复杂但更有意思的例子，包括函数的图像，球面，实射影空间等等，而它们（以及本书后文中将出现的各种光滑流形）当然也都是拓扑流形。