第4章 李群初步

Lie 群是一类特殊的光滑流形,上面不仅赋有用以发展分析的拓扑结构与光滑结构,还赋有一个基本的代数结构即**群**结构。正如群是数学中用于描述对称性的语言一样,Lie 群不仅仅自身是带有良好性质的光滑流形,而且还是用于描述"一族光滑依赖于参数的对称性"的语言¹,在包括几何、分析、方程、代数以及物理(尤其是量子物理)中扮演了极其重要的角色.本章将从流形的视角简要介绍 Lie 群及其对应的 Lie 代数的基础知识。

4.1 Lie 群及其 Lie 代数

4.1.1 Lie 群

¶ Lie 群: 定义与例子

首先给出 Lie 群的定义。简单来说, Lie 群就是"赋有光滑流形结构与群结构,且二者相容"的数学对象:

定义 4.1.1. (Lie 群)

设 G 是一个群。如果 G 上还赋有一个光滑流形结构, 且群乘法

 $\mu: G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$

是一个光滑映射,则称G是一个Lie 群。

注意群运算中还有一个非常重要的"求逆"运算,所以在考虑相容性时,自然也应该要求它是光滑的。在上述 Lie 群的定义中并没有明确要求这一点,是因为在后面的命题4.1.10中将会证明:只要乘法运算是光滑的,那么求逆运算也将自动是光滑的²。

Lie 群不仅仅是微分流形的重要例子,更是研究微分流形时的重要工具³。从在某种意义上说, Lie 群是数学中最优美的对象之一:它们位于代数,分析与几何的交界处.下面给出 Lie 群的一些基本例子:

例 4.1.2.

- (1) \mathbb{R}^n , 作为加法群.
- (2) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \{0\}$, 作为乘法群.
- (3) S^1 , 作为乘法群.
- (4) S^3 (视作模长为 1 的四元数集合),作为四元数乘法群.

¹Wiki: Lie 群是由挪威数学家 Sophus Lie (1842-1899) 而得名的. 他建立了连续变换群理论的基础. Lie 引入 Lie 群的最初动机是为了描述微分方程理论中出现的连续对称, 这在很大程度上跟 Galois 引入有限群以描述代数方程理论中出现的离散对称类似.

²作为对比,可以回忆一下习题 1 中拓扑群的概念: 拓扑群是"赋有拓扑空间结构与群结构,且二者相容"的数学对象,在那里要求群乘法与求逆运算都是连续的,而且求逆运算的连续性不是群乘法连续性的推论。

³从范畴的角度来看,Lie 群的特殊性还在于它们是光滑流形范畴中的"群对象"(正如群是集合范畴的群对象、拓扑群是拓扑空间范畴的群对象一样).

例 4.1.3. 矩阵 Lie 群 (其群元素都是矩阵,而其乘法运算是矩阵乘法) 是 Lie 群的最重要的例子。矩阵 Lie 群有很多,最简单的矩阵 Lie 群有

$$\operatorname{GL}(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}, \quad (- \text{般线性群})$$
 $\operatorname{SL}(n,\mathbb{R}) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}, \quad (特殊线性群)$
 $\operatorname{O}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{R}) \mid XX^T = I_n\}, \quad (正交群)$
 $\operatorname{U}(n) = \{X \in M(n,\mathbb{C}) \mid X\overline{X}^T = I_n\}, \quad (西群).$

事实上,李群的一个重要结果是:任意紧 Lie 群都可被实现为矩阵 Lie 群。

- 注 4.1.4. 一个自然的问题是: Lie 群的乘积、Lie 群的子群等对象是否依然是 Lie 群?
 - 如果 G_1 与 G_2 都是 Lie 群, 那么显然它们的乘积 $G_1 \times G_2$ (赋予乘积群结构以及乘积流形结构) 也自动是 Lie 群.
 - •特别地, n 维环面 $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 是一个 Lie 群.、
 - 如果 G 是一个 Lie 群,H < G 是 G 的一个子群,同时还是一个光滑子流形,那么显然 H 也是一个 Lie 群。然而,在本章后面将会说明:在研究 Lie 群的"子 Lie 群"时,不必假设子群是光滑子流形。从 Lie 群-Lie 代数对应的角度看,所有具有 浸入子流形结构的子群都是自然的研究对象。

注 **4.1.5.** 1900 年 Hilbert 在巴黎数学家大会上提出了 23 个问题,揭开了 20 世纪数 学发展的大幕,其中第五问题就跟 Lie 群相关:

如所周知, Lie 借助于连续变换群的概念......Lie 假设了定义群的函数必须可微...... 可微性假设是否确实必不可少呢?它会不会就是群概念本身和其它公理的推论?

注意如果仅假设背景空间是拓扑流形,以及假设群运算(包括乘积运算与求逆运算)的连续性,那所得的仅仅是底空间是拓扑流形的拓扑群(见第一章习题)。所以用现代的语言来说,Hilbert 第五问题就是在问: 底空间是拓扑流形的拓扑群,是否具有光滑结构使之成为 Lie 群? 该问题是最终在 1950 年代被 A. Gleason 以及 D. Montgomery,L. Zippin 解决,其答案是肯定的: 设 G 为任意一个底空间是拓扑流形的拓扑群,那么 G 上存在一个光滑结构使得它成为一个 Lie 群.

注 **4.1.6.** 不是每个光滑流形都能赋有一个 Lie 群结构. 例如,在所有球面 S^n 中,仅有 S^0 , S^1 与 S^3 可以带有 Lie 群结构. 下面是所有 Lie 群都满足的一些简单拓扑性质:

- (1) Lie 群的底空间必须是可定向的.
- (2) 连通 Lie 群 G (或者更一般的连通拓扑群 G)的基本群 $\pi_1(G)$ 一定是 Abel 群.
- (3) Lie 群的切丛 TG 都是平凡的: TG 同构于 $G \times \mathbb{R}^m$ (其中 $m = \dim G$).

下一章将看到 $TS^2 \not\simeq S^2 \times \mathbb{R}^2$,从而 S^2 上没有 Lie 群结构. 结合上述拓扑障碍可知,在 所有二维闭流形中 (即闭曲面), 唯一带有 Lie 群结构的是 $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$.

¶左/右乘法

假设 G 是一个 Lie 群. 对任意 $a,b\in G$, 存在两个自然映射, 即**左乘运算**(也叫做**左** 平移)

$$L_a: G \to G, \quad g \mapsto a \cdot g$$

与右乘运算(也叫做右平移)

$$R_b: G \to G, \quad g \mapsto g \cdot b.$$

注意如果记

$$j_a: G \hookrightarrow G \times G, \quad j_a(g) = (a, g),$$

$$i_b: G \hookrightarrow G \times G, \quad i_b(g) = (g, b),$$

则

$$L_a = \mu \circ j_a, \quad R_b = \mu \circ i_b.$$

特别地, L_a 和 R_b 都是光滑映射。此外,显然有

$$L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, \quad R_b^{-1} = R_{b^{-1}}.$$

于是 L_a 与 R_b 都是微分同胚. 不仅如此, 虽然 G 本身未必是可交换群, 但 L_a 与 R_b 可交换:

$$L_a R_b = R_b L_a.$$

作为左乘法的应用,下面证明

命题 4.1.7. (Lie 群切丛的拓扑)

对任意 m 维 Lie 群 G, 其切丛 TG 微分同胚于 $G \times \mathbb{R}^m$.

证明 将 m 维线性空间 T_eG 等同于 \mathbb{R}^m , 并定义

$$\phi: G \times T_eG \to TG, \quad \phi(a,\xi) = (a, dL_a(\xi))$$

这显然是一个双射, 其逆映射为 $\phi^{-1}(a,\xi) = (x,dL_{-a}(\xi))$. 注意到当固定 x 时, ϕ 与 ϕ^{-1} 都是 $\{a\} \times T_e G$ 与 $T_a G$ 之间的线性同构. 由此可见 ϕ 与 ϕ^{-1} 都是光滑的, 因此都是微分同胚.

注 **4.1.8.** 从证明可见, ϕ 在 "纤维" $\{a\} \times T_eG$ 与 T_aG 之间是线性同构,因而事实上是丛同构。

¶ 逆的光滑性

左乘法和右乘法可用于计算 μ 的微分:

引理 4.1.9. (Lie 群乘法映射的微分)

乘法映射 $\mu: G \times G \to G$ 的微分为

$$d\mu_{a,b}(X_a, Y_b) = (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b), \quad \forall (X_a, Y_b) \in T_aG \times T_bG \simeq T_{(a,b)}(G \times G).$$

证明 对任意函数 $f \in C^{\infty}(G)$, 有

$$(d\mu_{a,b}(X_a, Y_b))(f) = (X_a, Y_b)(f \circ \mu) = X_a(f \circ \mu \circ i_b) + Y_b(f \circ \mu \circ j_a)$$
$$= X_a(f \circ R_b) + Y_b(f \circ L_a)$$
$$= (dR_b)_a(X_a)(f) + (dL_a)_b(Y_b)(f).$$

作为应用,接下来证明求逆运算自动是光滑的,并计算其微分:

命题 4.1.10. (求逆运算的光滑性)

对任意 Lie 群 G, 群的求逆运算

$$i: G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

是光滑的,并且

$$(di)_a(X_a) = -(dL_{a^{-1}})_e(dR_{a^{-1}})_a(X_a), \quad \forall X_a \in T_aG.$$

证明 证明思路是将映射 i 写成一些光滑映射的复合. 为此,考虑光滑映射

$$f: G \times G \to G \times G, \quad (a,b) \mapsto (a,ab).$$

显然它是双射. 根据上面的引理, f 的微分是

$$df_{(a,b)}: T_aG \times T_bG \to T_aG \times T_{ab}G, \quad (X_a, Y_b) \mapsto (X_a, (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b)).$$

因为 dR_b , dL_a 都是可逆线性映射, 所以 $df_{(a,b)}$ 是一个可逆线性映射. 由反函数定理可知 f 在任意 (a,b) 附近都是局部微分同胚. 但由于 f 本身是可逆映射, 所以它是一个整体 微分同胚, 从而它的逆映射

$$f^{-1}: G \times G \to G \times G, \quad (a,c) \mapsto (a,a^{-1}c)$$

是一个微分同胚. 因此群的求逆映射 i, 作为以下光滑映射的复合,

$$G \xrightarrow{i_e} G \times G \xrightarrow{f^{-1}} G \times G \xrightarrow{\pi_2} G$$

 $a \longmapsto (a, e) \longmapsto (a, a^{-1}) \longmapsto a^{-1}$

也是光滑的. 进一步, 还可计算它的微分:

$$(di)_a(X_a) = d\pi_2 \circ (df^{-1})_{(a,e)} \circ (di_e)_a(X_a) = d\pi_2 (X_a, -(dL_{a^{-1}})_e (dR_{a^{-1}})_a(X_a))$$
$$= -(dL_{a^{-1}})_e (dR_{a^{-1}})_a(X_a),$$

其中在第二步使用了如下事实

$$(df)_{(a,a^{-1})}(X_a, Y_{a^{-1}}) = (X_a, 0) \Longrightarrow Y_{a^{-1}} = -(dL_a)_{a^{-1}}(dR_{a^{-1}})_a(X_a)$$

$$= -(dL_{a^{-1}})_e(dR_{a^{-1}})_a(X_a).$$

由于 $dL_e = dR_e = \mathrm{Id}$, 立刻可以得到

推论 4.1.11. (单位元处群乘法与求逆运算的微分)

对任意的 $X_e, Y_e \in T_eG$, 有

$$(d\mu)_{e,e}(X_e, Y_e) = X_e + Y_e, \qquad (d\iota)_e(X_e) = -X_e.$$

96

4.1.2 Lie 群的 Lie 代数

从命题4.1.7的证明可见,得益于"左乘"这样的微分同胚,Lie 群在一点的切空间可被迁移到各点处。换而言之,Lie 群在单位元 e 附近的局部性态就"决定"了它在各点附近的局部性态。于是,Lie 群在 e 处的切空间在 Lie 群理论中自然会起到根本性的作用。

¶抽象 Lie 代数

先给出 Lie 代数的抽象定义:

定义 4.1.12. (Lie 代数)

若 V 是一个实向量空间^a,上面带有一个二元括号运算

$$[\cdot,\cdot]:V\times V\to V,$$

使得对任意的 $u, v, w \in V$ 以及 $a, b \in \mathbb{R}$,都有

- (1) (反对称性) [u,v] = -[v,u],
- (2) (线性性) [au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w],
- (3) (Jacobi 恒等式) [u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0,

则称 $(V, [\cdot, \cdot])$ 是一个 **Lie** 代数, 称 $[\cdot, \cdot]$ 为该 Lie 代数的 **Lie** 括号.

^aLie 代数可以在更一般的域中定义,本书仅考虑实数域上的 Lie 代数.

例 4.1.13. 任意向量空间都有一个平凡 Lie 代数结构: $[X,Y] \equiv 0$.

例 4.1.14. \mathbb{R}^3 在向量叉乘运算下形成一个 Lie 代数.

例 4.1.15. 根据命题**3**.1.17, 光滑流形上全体光滑向量场 $\Gamma^{\infty}(TM)$ 在向量场的 Lie 括号运算下形成一个 Lie 代数. 进一步地,若 \mathcal{V} 是可积分布,则 $\Gamma^{\infty}(\mathcal{V})$ 也是 Lie 代数。

例 4.1.16. 由全体 $n \times n$ 实矩阵所组成的集合 $M(n,\mathbb{R})$ 在"矩阵的交换子运算"

$$[A,B] := AB - BA$$

下形成一个 Lie 代数。【一般的,结合代数在换位子运算 [a,b] = ab - ba 下都是 Lie 代数.】

¶ Lie 群上的左不变向量场

下面对每一个 Lie 群 G,都关联一个典范的 Lie 代数. 假设 G 是一个 Lie 群. 利用 左平移 L_a ,可以从任意向量 $X_e \in T_eG$ 开始, 定义一个 G 上的光滑向量场 X 如下:

$$X_a = (dL_a)_e(X_e).$$

一个并不令人吃惊(但很重要)的事实是:向量场 X 在任意左平移下仍是它自身:

$$(dL_a)_b(X_b) = (dL_a)_b \circ dL_b(X_e) = dL_{ab}(X_e) = X_{ab}.$$

具有该性质的向量场被称为左不变向量场:

定义 4.1.17. (左不变向量场)

若 Lie 群 G 上光滑向量场 X 满足

$$(dL_a)_b(X_b) = X_{ab}, \quad \forall a, b \in G,$$

则称它是G上的一个左不变向量场.

记 G 上的全体左不变向量场的集合为 \mathfrak{g} , 即

$$\mathfrak{g} = \{ X \in \Gamma^{\infty}(TG) \mid X \text{ } \text{\mathbb{Z} }$$

显然 \mathfrak{g} 是 $\Gamma^{\infty}(TG)$ 上的一个线性子空间.

于是 Lie 群在单位元 e 处的切向量 $X_e \in T_eG$ 决定了 G 上的一个左不变向量场 $X \in \mathfrak{g}$. 反之,G 上的任意左不变向量场 $X \in \mathfrak{g}$ 被它在 e 处的"值" X_e 所唯一决定,因为对于任意的 $a \in G$,总有 $X(a) = (dL_a)X_e$. 不难看出,对应关系 $X_e \in T_eG \iff X \in \mathfrak{g}$ 是线性同构。于是作为线性空间, \mathfrak{g} 与 T_eG 是同构的.特别地, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

¶ Lie 群 G 的 Lie 代数

接下来证明 \mathfrak{g} 是一个 Lie 代数, 其 Lie 代数结构继承自 $\Gamma^{\infty}(TG)$ 上的 Lie 代数结构:

命题 4.1.18. (Lie 括号保持左不变性)

如果 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 那么 $[X, Y] \in \mathfrak{g}$.

证明 设 X 与 Y 都是 G 上的左不变向量场,下证 [X,Y] 也是左不变的.首先注意到

$$Y(f \circ L_a)(b) = Y_b(f \circ L_a) = (dL_a)_b(Y_b)f = Y_{ab}f = (Y_b)(L_ab) = (Y_b)(L_ab)$$

对任意的光滑函数 $f \in C^{\infty}(G)$ 均成立. 因此

$$X_{ab}(Yf) = (dL_a)_b(X_b)(Yf) = X_b((Yf) \circ L_a) = X_bY(f \circ L_a).$$

类似地 $Y_{ab}Xf = Y_bX(f \circ L_a)$. 于是

$$dL_a([X,Y]_b)f = X_bY(f \circ L_a) - Y_bX(f \circ L_a) = X_{ab}(Yf) - Y_{ab}(Xf) = [X,Y]_{ab}(f).$$

于是 G 上的全体左不变向量场全体 \mathfrak{g} ,在向量场的 Lie 括号运算 $[\cdot,\cdot]$ 下,构成了一个 Lie 代数 (而且它是无穷维 Lie 代数 $\Gamma^{\infty}(TG)$ 的一个 m 维 Lie 子代数) .

定义 4.1.19. (Lie 群的 Lie 代数)

Lie 代数 \mathfrak{g} 被称为 Lie 群 G 的 Lie 代数.

例 4.1.20. (欧氏空间 \mathbb{R}^n .)

显然它在向量加法运算下是一个 Lie 群, 因为群运算

$$\mu((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)):=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n).$$

是光滑的. 不仅如此, 对任意的 $a \in \mathbb{R}^n$, 左平移 L_a 就是 \mathbb{R}^n 上通常的平移映射. 故左不

变向量场实际上就是常值向量场

$$X_v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

由于 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 与 $\frac{\partial}{\partial x_j}$ 两两可交换,所以任意两个左不变向量场的 Lie 括号为零. 换而言之,向量加法群 $G=\mathbb{R}^n$ 的 Lie 代数就是 n 维平凡 Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^n$.

例 4.1.21. (圆 S^1)

 S^1 上左平移映射是旋转映射,因而左不变向量场就是 $\{a\frac{\partial}{\partial_{\theta}}\}$,它们两两可交换。于是 S^1 的 Lie 代数是 1 维平凡 Lie 代数 \mathbb{R}^1 (带有平凡的 Lie 括号. (事实上, 从 Lie 代数的定义可知, 唯一的 1 维 Lie 代数是平凡 Lie 代数.)

例 4.1.22. (仿射群 $\mathbb{R}^* \ltimes \mathbb{R}^1$)

赋予 R*×R 通常的流形结构,以及群运算

$$\mu((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1).$$

它被称为是 \mathbb{R}^1 的**仿射群**,是一个 2 维非交换 Lie 群. 对左乘求微分可得

$$dL_{(x_1,y_1)}(v_1\frac{\partial}{\partial x} + v_2\frac{\partial}{\partial y}) = x_1v_1\frac{\partial}{\partial x} + x_1v_2\frac{\partial}{\partial y}.$$

因此如果 $a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ 是一个左不变向量场,则对所有的 $x,y,x_1,y_1 \in \mathbb{R}$,有

$$a(x_1x, x_1y + y_1) = a(x, y)x_1$$
 \Rightarrow $b(x_1x, x_1y + y_1) = b(x, y)x_1.$

特别地, $X=x\frac{\partial}{\partial x}$ 与 $Y=x\frac{\partial}{\partial y}$ 为两个左不变向量场. 由于这个 Lie 群是 2 维的,所以 X,Y 构成它的 Lie 代数的一组基. 其 Lie 括号由 [X,X]=[Y,Y]=0 以及

$$[X,Y] = [x\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y}] = x\frac{\partial}{\partial y} = Y.$$

给出.(它是唯一的 2 维非平凡 Lie 代数.)

例 4.1.23. (一般线性群)

 $GL(n,\mathbb{R})$ 是一个 n^2 维非紧 Lie 群. 它是不连通的, 而且恰有两个连通分支, 即

$$GL_{+}(n,\mathbb{R}) = \{ X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det X > 0 \},$$

$$GL_{-}(n,\mathbb{R}) = \{ X \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det X < 0 \}.$$

由于 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 是 $M(n,\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{n^2}$ 的一个开子集,所以 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的 Lie 代数的底空间,即 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 在 $e=I_n$ 处的切空间,就是集合 $M(n,\mathbb{R})$ 自身,

$$\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \{A \mid A \ 是 - \uparrow n \times n \ 矩阵\}.$$

为了求出 Lie 括号运算, 任取矩阵 $A=(A_{ij})_{n\times n}\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, 并记 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 上的全局坐标系为 (X^{ij}) . 那么跟 A 相应的在 $T_{I_n}\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 处的切向量是 $\sum A_{ij}\frac{\partial}{\partial X^{ij}}$, 而它生成的左不变向量场在矩阵 $X=(X^{ij})$ 处的向量为 $\sum X^{ik}A_{kj}\frac{\partial}{\partial X^{ij}}$. 从而矩阵 $A,B\in\mathfrak{g}$ 之间的Lie 括号 [A,B] 是对应于向量场

$$\begin{split} \left[\sum X^{ik} A_{kj} \frac{\partial}{\partial X^{ij}}, \sum X^{pq} B_{qr} \frac{\partial}{\partial X^{pr}} \right] &= \sum X^{ik} A_{kj} B_{jr} \frac{\partial}{\partial X^{ir}} - \sum X^{pq} B_{qr} A_{rj} \frac{\partial}{\partial X^{pj}} \\ &= \sum X^{ik} \left(A_{kr} B_{rj} - B_{kr} A_{rj} \right) \frac{\partial}{\partial X^{ij}}. \end{split}$$

的矩阵. 换句话说,g 上的 Lie 括号运算就是矩阵换位子 [A,B] = AB - BA.