2.2 光滑映射的局部性态

作为光滑映射的线性逼近，微分是研究光滑映射的重要工具。根据定义，线性映射 df_p 所“编码”的是映射 f 在点 p 附近的性态。本节的目的则是反过来，从 df_p 的性质出发，“解码”出 f 在 p 附近的性态。

2.2.1 反函数定理

¶ 局部微分同胚

根据命题2.1.11，若 $f: M \to N$ 是一个微分同胚，则 df_p 是一个线性同构。反之一个自然的问题是: 如果线性化 df_x 是一个线性同构，那么 f 是否是一个微分同胚?

例 2.2.1. 对于 $M = N = \mathbb{R}^2 - \{0\}$，考虑映射

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

虽然在每一点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 处，

$$df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

是一个线性同构，但 f 不是微分同胚，因为它不可逆：$f(x,y) = f(-x,-y)$.

幸运的是，f 与微分同胚相差并不是太远：如果用复坐标 $\mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{R}^2 - \{0\}$，则上述映射 f 事实上是

$$f(z) = z^2.$$

于是对于任意 $z = (x,y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 总可以找到 z 的一个小邻域 U_z 和 z^2 的小邻域 V_z, 使得限制到 U_z 后 $f|_{U_z}: U_z \to V_z$ 是一个微分同胚. 类似地，还可以把该映射限制在 S^1 上，即考虑

$$f: S^1 \to S^1, \qquad f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}.$$

同样的，df_p 是线性同构，f 不是微分同胚，但限制在任何点的小邻域后是微分同胚。

事实上，只要存在开集 $U \subset M$ 和开集 $V \subset N$ 使得 $f: U \to V$ 是微分同胚，那么对于任意 $p \in U$，df_p 当然还是线性同构。所以一开始问 f 是否是微分同胚根本就是错误的提法，正确的提法应该是问 f 是否在 p 的某个小邻域中是微分同胚:

定义 2.2.2.（局部微分同胚）

设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射，$p \in M$。如果存在包含 p 的一个开邻域 U_p 和包含 $f(p)$ 的一个开邻域 $V_{f(p)}$，使得

$$f|_{U_x}: U_p \to V_{f(p)}$$

是一个微分同胚，则称 f 在 p 点附近是一个**局部微分同胚**。♣

局部微分同胚依然具有很多好的性质，例如局部微分同胚都是开映射，局部微分同

胚的流形具有相同的维数，两个局部微分同胚的复合依然是局部微分同胚等[3]。

例2.2.1表明，一个光滑映射可能在每一点处都是局部微分同胚，但是在整体上并不是微分同胚，因为它未必可逆。这样的例子其实有很多，比如任何光滑覆叠映射都是局部微分同胚（但反之未必）。事实上，跟习题 1 中局部同胚的情形类似，可逆性是一个“处处局部微分同胚”成为整体微分同胚的唯一障碍:

命题 2.2.3. (从局部微分同胚到整体微分同胚)

假设光滑映射 $f: M \to N$ 在每一点 $p \in M$ 附近都是一个局部微分同胚. 如果 f 还是可逆的，那么 f 是一个整体微分同胚.

证明 仅需证明 f^{-1} 的光滑性，而 f^{-1} 在任意一点 $q = f(p)$ 处的光滑性仅依赖于 f^{-1} 在 q 附近的行为. 因为 f 是从 p 的邻域到 q 的邻域的微分同胚，故 f^{-1} 是从 q 的邻域到 p 的邻域的光滑映射，从而 f^{-1} 在 q 处光滑. □

¶ 反函数定理

显然若光滑映射 $f: M \to N$ 在 p 点附近是一个局部微分同胚，则

$$df_p : T_pM = T_pU \to T_{f(p)}V = T_{f(p)N}$$

是一个线性同构。反之，线性范畴中的同构蕴含了光滑范畴中的局部微分同胚:

定理 2.2.4. （流形上的反函数定理）

如果 $f: M \to N$ 是光滑映射，且 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ 是一个线性同构，那么 f 在 p 点附近是局部一个微分同胚.

其证明依赖于如下欧氏情形的反函数定理，该定理是隐函数定理的特例，也可以通过压缩映射原理证明，参见 [5] 的附录或者一般的数学分析教材。

定理 2.2.5. （欧氏情形的反函数定理）

如果 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$f: U \to V$ 是光滑映射，并且 df_x 是一个线性同构，那么 f 在 x 附近是一个局部微分同胚.

证明 [定理2.2.4的证明] 取 p 附近的一个坐标卡 (φ, U, V) 和 $f(p)$ 附近的一个坐标卡 (ψ, X, Y) 使得 $f(U) \subset X$. 因为 $\varphi: U \to V$ 和 $\psi: X \to Y$ 是微分同胚，

$$d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} = d\psi_q \circ df_p \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}V = \mathbb{R}^n \to T_{\psi(q)}Y = \mathbb{R}^n$$

是线性同构. 由欧氏情形的反函数定理可知，存在 $\varphi(p)$ 的邻域 V_1 和 $\psi(q)$ 的邻域 Y_1 使得 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是一个从 V_1 到 Y_1 的微分同胚. 取 $U_1 = \varphi^{-1}(V_1)$ 和 $X_1 = \psi^{-1}(Y_1)$. 则

$$f = \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$$

是从 U_1 到 X_1 的一个微分同胚. □

[3]考虑“带点光滑流形”范畴，其中态射定义为“光滑映射芽”，则局部微分同胚恰好是这个范畴的“等价”。

2.2.2 淹没、浸入和常秩映射

¶ 淹没和浸入

如果 df_p 不是一个线性同构呢？注意到线性同构既是满射也是单射．研究那些微分为满射或单射的光滑映射是很自然的:

定义 2.2.6.（淹没与浸入）

设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射.

(1) 若 $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是满射，则称 f 在 p 点处是**淹没**. 若 f 处处是淹没，则称 f 是一个**淹没映射**.

(2) 若 $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是单射，则称 f 在 p 点处是**浸入**. 若 f 处处是浸入，则称 f 是一个**浸入映射**.

♣

显然

- 如果 f 在一点处是淹没，那么 $\dim M \geq \dim N$.
- 如果 f 在一点处是浸入，那么 $\dim M \leq \dim N$.

显然任何局部微分同胚都同时是淹没和浸入．下面是两个典范的例子:

例 2.2.7.（典范淹没） 如果 $m \geq n$, 那么投影映射

$$\pi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (x^1, \cdots, x^m) \mapsto (x^1, \cdots, x^n)$$

是淹没.

例 2.2.8.（典范浸入） 如果 $m \leq n$, 那么嵌入映射

$$\iota: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x^1, \cdots, x^m) \mapsto (x^1, \cdots, x^m, 0, \cdots, 0)$$

是浸入.

事实上，任何淹没/浸入从局部看都跟以上两种典范情形一致:

定理 2.2.9.（典范淹没定理）

设 $f: M \to N$ 是在点 $p \in M$ 处的淹没, 那么 $m = \dim M \geq n = \dim N$, 并且存在 p 附近的坐标卡 (φ_1, U_1, V_1) 和 $q = f(p)$ 附近的坐标卡 (ψ_1, X_1, Y_1) 使得

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = \pi|_{V_1}.$$

♡

定理 2.2.10.（典范浸入定理）

设 $f: M \to N$ 是在点 $p \in M$ 处的浸入, 那么 $m = \dim M \leq n = \dim N$, 并且存在 p 附近的坐标卡 (φ_1, U_1, V_1) 和 $q = f(p)$ 附近的坐标卡 (ψ_1, X_1, Y_1) 使得

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = \iota|_{V_1}.$$

♡

这两个定理在处理淹没和浸入的时候非常有用．我们不分别证明上述两个定理，而是证明一个更一般的定理，即下面的常秩定理.

¶ 常秩定理

在叙述常秩定理之前，需要先定义

定义 2.2.11.（常秩映射）

设 $f: M \to N$ 是光滑映射，$p \in M$. 如果存在 p 的一个邻域 U 以及常数 $r \in \mathbb{N}$ 使得对于任意 $q \in U$，线性映射 df_q 的秩为 r，则称 f 为 p 附近的一个（秩为 r 的）**常秩映射**.

例 2.2.12. 如果 f 在 p 点处是一个淹没/浸入，则在 p 的坐标邻域里，df_p 对应的 Jacobi 矩阵有一个满秩子矩阵。由连续性，存在 p 的小邻域 U_p 使得对于任意 $q \in U_p$，对应的子矩阵是满秩的。于是 f 在 p 附近处处是淹没/浸入。换而言之，若 f 在 p 点处是一个淹没或浸入，那么它在 p 附近是一个常秩映射.

例 2.2.13.（"典范" 常秩映射） 典范淹没和典范浸入的复合是常秩映射

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{r+m-r} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^r \xrightarrow{\iota} \mathbb{R}^{r+n-r} = \mathbb{R}^n,$$

它将 $(x^1, \cdots, x^r, x^{r+1}, \cdots, x^m) \in \mathbb{R}^m$ 映射到 $(x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

下面证明这样得到的常秩映射是典范的：

定理 2.2.14.（常秩定理）

设 $f: M \to N$ 是一个在 p 附近秩恒为 r 的常秩映射. 那么存在 p 附近的坐标卡 (φ_1, U_1, V_1) 和 $f(p)$ 附近的坐标卡 (ψ_1, X_1, Y_1) 使得

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(x^1, \cdots x^m) = (x^1, \cdots, x^r, 0, \cdots, 0).$$

证明 先证明欧氏情形，然后把一般情形转化成欧氏情况.

步骤 1: 欧氏空间的情形.

首先假设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 是开集，$f: U \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射且对于任意 $x \in U$, df_x 的秩为常数 r. 在对 f 的定义域与值域均复合上适当的平移（注意平移是微分同胚）后，可以假设 $0 \in U$ 且 $f(0) = 0$. 因为 $\operatorname{rank}(df)_0 = r$, 通过调整定义域和值域中坐标的次序（注意调整坐标次序是微分同胚）不妨可以假设 Jacobi 矩阵 $(\frac{\partial f_i}{\partial x^j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ 的左上角 $r \times r$ 子矩阵在 $x = 0$ 处是非奇异的，从而在 $x = 0$ 附近也是非奇异的.

定义映射 $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ 为

$$\varphi(x) = (f_1(x), \cdots, f_r(x), x^{r+1}, \cdots, x^m).$$

则 $\varphi(0) = 0$, 且微分

$$d\varphi = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{1 \le i,j \le r} & * \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-r} \end{pmatrix}$$

在 $x = 0$ 处是非奇异的. 由反函数定理，φ 是 0 附近的局部微分同胚，即存在 0 在 $U \subset \mathbb{R}^m$ 中的邻域 U_1 和 0 在 $\mathbb{R}^m$ 中的邻域 V_1 使得 $\varphi: U_1 \to V_1$ 是一个微分同胚. 记

$$f \circ \varphi^{-1}(x^1, \cdots, x^m) = (g_1(x), \cdots, g_n(x)), \qquad x \in V_1.$$

注意到由定义,

$$f\circ\varphi^{-1}(f_1(x),\cdots,f_r(x),x^{r+1},\cdots,x^m)=f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))=f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$$

即在 0 附近有

$$f\circ\varphi^{-1}(x)=(x^1,\cdots,x^r,g_{r+1}(x),\cdots,g_n(x)),$$

故 $g_1(x)=x^1,\cdots,g_r(x)=x^r$, 而当 $i\geq r+1$ 时有 $g_i(0)=0$. 此外, 由链式法则,

$$df_{\varphi^{-1}(x)}\circ(d\varphi^{-1})_x=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_r & 0\\ * & \left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j}\right)_{r+1\leq i\leq n,r+1\leq j\leq m}\end{pmatrix}.$$

关键观察: 因为 $(d\varphi^{-1})_x$ 是一个线性同构, "在 0 附近有 $\mathrm{rank}(df_x)=r$" 蕴含着 "在 0 附近有 $\mathrm{rank}(df_{\varphi^{-1}(x)}\circ(d\varphi^{-1})_x)=r$", 因此在 0 附近必须有

$$\frac{\partial g_i}{\partial x^j}=0,\qquad\forall r+1\leq i\leq n,r+1\leq j\leq m.$$

由此可知, 在 0 的一个小邻域中,

$$g_i(x)=g_i(x^1,\cdots,x^r),\qquad\forall r+1\leq i\leq n.$$

换句话说, 在 0 附近有

$$f\circ\varphi^{-1}(x)=(x^1,\cdots,x^r,g_{r+1}(x^1,\cdots,x^r),\cdots,g_n(x^1,\cdots,x^r)).$$

下面 "消灭" 这些多余的 g_i: 在 0 附近的一个小邻域里, 令

$$\psi(y)=\big(y^1,\cdots,y^r,y^{r+1}-g_{r+1}(y^1,\cdots,y^r),\cdots,y^n-g_n(y^1,\cdots,y^r)\big),$$

从而

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x^1,\cdots,x^r,x^{r+1},\cdots,x^n)=(x^1,\cdots,x^r,0,\cdots,0).$$

最后只需验证 ψ 是一个局部微分同胚, 而这是反函数定理的推论, 因为由定义可得

$$d\psi_0=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_r & 0\\ * & \mathrm{Id}_{n-r}\end{pmatrix}.$$

步骤 2: 光滑流形的情形.

通过标准的技巧可以轻松从欧氏情形过渡到一般情形: 取 p 附近的一个坐标邻域 (φ,U,V) 和 $f(p)$ 附近的一个坐标邻域 (ψ,X,Y), 使得 $f(U)\subset X$, 并且 df_q 在 U 上的秩是常数. 因为 $(d\varphi^{-1})_x$ 和 $d\psi_{f(\varphi^{-1}(x))}$ 都是线性同构, 而

$$d(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_x=d\psi_{f(\varphi^{-1}(x))}\circ df_{\varphi^{-1}(x)}\circ(d\varphi^{-1})_x,$$

所以 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:V\to Y$ 是常秩 r 的光滑映射, 于是由欧氏空间情形的结论可以得到一般情形的结论. $\square$

特别地，常秩满射一定是一个淹没，常秩单射一定是一个浸入，而一般的常秩映射在局部总能被写作一个淹没 s 和一个浸入 j 的复合 $j\circ s$。