微分几何H 笔记

原生生物

*刘世平老师微分几何H课堂笔记

目录

一　曲线的几何

§1.1　欧氏空间

最早认识 三维欧氏空间E^3 (点、线、面、欧氏几何公理)
向量：空间中有长度、方向的量
*欧氏空间**齐次性**(不同原点无区别)、**各向同性**(不同方向无区别)，因此向量**不区分起点**，由此可定义向量运算

1. 加法(交换、结合、零元、逆元)
2. 数乘(结合、分配加法、单位)
   *抽象出$\mathbb{R}$上的**向量空间**结构
3. 内积$\langle v_1, v_2\rangle$(余弦定理、交换、双线性)
4. 外积$v_1 \wedge v_2$[平行四边形有向面积](**反交换**、双线性)

引入坐标：任取欧氏空间原点O，三个线性无关向量v_1, v_2, v_3，则$\{O; v_1, v_2, v_3\}$为E^3以O为原点的一个一般**标架**
*由此欧氏空间E^3与三维数组空间$\mathbb{R}^3$对应
为保证内积结构，需要$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_i^j$，此时即称为**正交标架**，所有运算可通过坐标表示
*混合积$(v_1, v_2, v_3) = \langle v_1, v_2 \wedge v_3\rangle$，代表张成平行六面体的有向体积$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$
运算性质：

1. $v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) = \langle v_1, v_3\rangle v_2 - \langle v_1, v_2\rangle v_3$
2. $\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4\rangle = \langle v_1, v_3\rangle \langle v_2, v_4\rangle - \langle v_1, v_4\rangle \langle v_2, v_3\rangle$
3. $(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1) = (v_3, v_1, v_2)$

*坐标坏处：不同点不同方向标架**未必一致**

坐标变换：若$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$[$T$为正交阵，行列式1代表两标架定向相同，否则相反]，则$\{O; e_1, e_2, e_3\}$下的坐标与$\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$下的坐标(y^1, y^2, y^3)关系为$(x^1, x^2, x^3) = (c^1, c^2, c^3) + (y^1, y^2, y^3)T$。
*保持欧氏空间结构(度量)的变换称**合同变换**

定理 1.1. *$\mathcal{T}$为E^3的合同变换，则存在$T \in O_3(\mathbb{R})$与$P \in E^3$使得$\forall X \in E^3, \mathcal{T}(X) = XT + P$。*

证明. 由平移不妨设保原点，通过保距离由余弦定理可推出保内积，由坐标定义可推出线性，从而得结果。 □

*欧氏空间中正交标架全体与合同变换群一一对应

对向量值函数$\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$，有微分性质：

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\vec{a}) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\vec{a} + \lambda\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\langle\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t},\vec{b}\rangle+\langle\vec{a},\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\rangle$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\wedge\vec{b}=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t},\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t},\vec{c})+(\vec{a},\vec{b},\frac{\mathrm{d}\vec{c}}{\mathrm{d}t})$

定理 1.2. *光滑向量值函数$\vec{a}(t)$长度不变$\iff\langle\vec{a}(t),\vec{a}'(t)\rangle=0$。*

证明. $\langle\vec{a}(t),\vec{a}(t)\rangle$恒定$\iff\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\vec{a}(t),\vec{a}'(t)\rangle=0$，由此得结论。 □

练习. *设$\vec{a}(t)$为光滑非零向量值函数，则*

1. *方向不变$\iff\vec{a}'(t)\wedge\vec{a}(t)=0$;*
2. *若$\vec{a}(t)$与某固定方向垂直，那么$(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))=0$；反之，若$(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))=0$且处处$\vec{a}'(t)\wedge\vec{a}(t)\neq0$，则$\vec{a}(t)$与某固定方向垂直。*

证明. 假设α为每问里提到的特殊方向：

1. 左推右：由于$\alpha\wedge\vec{a}(t)=0$，对t求导即有$\alpha\wedge\vec{a}'(t)=0$，从而$\vec{a}'(t)$方向与$\vec{a}(t)$相同，即得证。

   右推左：设$\vec{a}(t)=f(t)\alpha(t)$，其中α为单位向量，则计算知$\vec{a}(t)\wedge\vec{a}'(t)=f^2(t)\alpha(t)\wedge\alpha'(t)$，由条件$f(t)\neq0$，因此$\alpha(t)\wedge\alpha'(t)=0$，由$\alpha(t)$模长不变可知$\langle\alpha(t),\alpha'(t)\rangle=0$，由$\alpha(t)$为单位向量可知必须$\alpha'(t)=0$，从而得证。

2. 第一句：通过对$\langle\vec{a}(t),\alpha\rangle$求导可知$\langle\vec{a}'(t),\alpha\rangle=0$，同理$\langle\vec{a}''(t),\alpha\rangle=0$，于是三者共面，原命题得证。

   第二句：设$\vec{a}(t)=f(t)\alpha(t)$，其中α为单位向量，计算知$(\vec{a}(t),\vec{a}'(t),\vec{a}''(t))=f^3(t)(\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''(t))$，由条件$f(t)\neq0$得$(\alpha(t),\alpha'(t),\alpha''(t))=0$，有$\langle\alpha'(t),\alpha(t)\wedge\alpha''(t)\rangle=0$，结合条件知$\alpha''(t)\wedge\alpha(t)=0$，由此计算可得$(\alpha(t)\wedge\alpha'(t))\wedge(\alpha(t)\wedge\alpha'(t))'=(\alpha(t)\wedge\alpha'(t))\wedge(\alpha(t)\wedge\alpha''(t))=0$，利用1知$\alpha(t)\wedge\alpha'(t)$方向恒定，因此$\alpha(t)$与某固定方向垂直。

□

§1.2　微分形式

定义 1.3. *切向量*
切向量v_p包含一个向量v与起点p，而向量场是给每一个点p赋一个切向量v_p的函数。

性质：设$u_1(p)=(1,0,0)_p,u_2(p)=(0,1,0)_p,u_3(p)=(0,0,1)_p$，则任何向量场每点都可以表示为$u_1,u_2,u_3$组合。

定义 1.4. *E^3上的一形式、光滑一形式*
E^3一形式ϕ是定义在E^3所有切向量上的函数，使得对任意$a,b\in\mathbb{R},p\in E^3,v,w\in T_pE^3$(即以$p$为起点的切向量)，有$\phi(av+bw)=a\phi(v)+b\phi(w)$。
给定一形式与向量场V，有实函数$\phi(V):E^3\to\mathbb{R},\phi(V)(p)=\phi(V(p))$，若对任何光滑向量场$V$都有$\phi(V)$是光滑函数，则称$\phi$为光滑一形式。

运算：给定一形式ϕ,ψ，$f:E^3\to\mathbb{R}$，则$(\phi+\psi)(v)=\phi(v)+\psi(v)$，$(f\phi)(v_p)=f(p)\phi(v_p)$。
关于函数的线性性质：V,W为切向量场，f,g为空间函数，则$\phi(fV+gW)=f\phi(V)+g\phi(W)$。

给定空间光滑函数f，可定义一形式$\mathrm{d}f$，满足$\mathrm{d}f(v_p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t\to0}f(p+tv_p)$，由于其即为$\langle\mathrm{grad}\,f,v_p\rangle$，因此良定。
对投影函数$x^i:E^3\to\mathbb{R}$，计算发现有$\mathrm{d}x^i(v_p)=v_p^i$。

性质：E^3上一形式可表示为$\phi=\sum_{i=1}^3 f_i\mathrm{d}x_i$，其中$f_i=\phi(u_i)$。
验证：$\phi(v_p)=\phi(\sum v_p^i u_i)=\sum v_p^i\phi(u_i)(p)=\sum f_i v_p^i=\sum f_i\mathrm{d}x_i(v_p)$。

定义 1.5. E^3上的二形式
E^3上的二形式η是E^3上所有切向量对(v_p,w_p)，或写成$v_p\wedge w_p$上的实值函数，使得在任何p处满足双线性性、反对称性$\eta(v_p,w_p)=-\eta(w_p,v_p)$。
若对任何光滑向量场V,W满足$\eta(V,W)$是光滑函数，则称其为光滑二形式。

例：E^3中，令$\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j-\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^i$，即$(v_p,w_p)\to v_p^i w_p^j-v_p^j w_p^i$，则其为一个二形式。
性质：E^3上二形式可表示为$\eta=\sum_{i<j}\eta(u_i,u_j)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$，可与一形式的情况类似拆分验证。
几何意义：$\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j(v_p,w_p)=\begin{vmatrix} v_p^i & v_p^j \\ w_p^i & w_p^j\end{vmatrix}$，代表$E^3$中两切向量构成的平行四边形向坐标平面**投影的面积**。

定义 1.6. E^3上的三形式
E^3上的三形式ψ是E^3上所有(v_p,w_p,u_p)上的实值函数，使得在任何p处满足三重线性性、交换反对称性(交换任意两个都导致符号变化)。
若对任何光滑向量场V,W,U满足$\psi(V,W,U)$是光滑函数，则称其为光滑三形式。

$\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3=\sum_{\sigma\in S(3)}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{d}x^1\otimes\mathrm{d}x^2\otimes\mathrm{d}x^3=\det\begin{pmatrix} v_p & u_p & w_p\end{pmatrix}$，即**有向体积**。
*E^3上**不存在**非平凡的四形式；再扩充定义零形式，代表函数。

*记Ω_i代表E^3上光滑的i-形式

定义 1.7. 外微分运算d

$$\forall f\in\Omega_0,\mathrm{d}f=\sum\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

$$\forall\phi=\sum\phi(u_i)\mathrm{d}x^i\in\Omega_1,\mathrm{d}\phi=\sum\mathrm{d}(\phi(u_i))\wedge\mathrm{d}x^i=\sum_{i,j}\frac{\partial\phi(u_i)}{\partial x^j}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j$$

$$\forall\eta=\sum_{i<j}\eta(u_i,u_j)\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j,\mathrm{d}\eta=\sum_{i<j}\mathrm{d}(\eta(u_i,u_j))\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j=\psi\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3$$

*性质：由于对不同分量求偏导可交换，可计算得$\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$

*$\mathrm{d}\Omega_0$的系数与grad对应，$\mathrm{d}\Omega_1$的系数与rot对应，$\mathrm{d}\Omega_2$的系数与div对应，有$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f=0,\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,F=0$。

§1.3　平面曲线

*研究怎样的曲线？

定义 1.8. 正则曲线
$(a,b)\to E^3:t\to\gamma(t)$称为正则曲线，当其每个分量光滑且$|\gamma'(t)|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$处处非零(这保证了其为浸入，即局部一一映射)。

不是正则曲线的例子：如(t^2,t^3)在零点处对t导数为$(0,0)$，局部非一一映射。
长度：$\int_a^b|r'(t)|\mathrm{d}t$
弧长参数：$s(t)=\int_a^t|r'(u)|\mathrm{d}u$，$s'(t)=|r'(t)|>0$。
弧长参数化：$C=\gamma\circ s^{-1}$，则有$C(s)=\gamma(t)$，$|C'(s)|=|r'(t)t'(s)|=s'(t)|t'(s)|=0$。

平面曲线的曲率

对曲线的正则点t，当$t_1 < t_2 < t_3$充分靠近t时，$r(t_1), r(t_2), r(t_3)$各不相同。假设三点不共线，令三点趋近t，设C为三点构成的圆的圆心。

考察函数$t \to \langle r(t) - C(t_1,t_2,t_3), r(t) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle$在$t_{1,2,3}$处取值相同，求导，利用中值定理可知$\exists \xi_1 \in (t_1,t_2), \xi_2 \in (t_2,t_3), \langle \gamma'(t), \gamma(t) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle \mid_{t=\xi_{1,2}} = 0$。

再次求导并利用中值定理，可知$\exists \eta \in (\xi_1,\xi_2)$，使得$\langle \gamma''(\eta), \gamma(\eta) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle + \langle \gamma'(\eta), \gamma'(\eta)\rangle = 0$

结合以上两式，若$t_{1,2,3} \to t_0$时$C(t_1,t_2,t_3) \to C$，则满足$\langle \gamma'(t_0), \gamma(t_0) - C\rangle = 0$，且$\langle \gamma''(t_0), \gamma(t_0) - C\rangle + \langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = 0$。

*当$\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)$不共线时，$C$被唯一确定。

弧长参数$\gamma(s)$下：由于$\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = 1$，求导可知$\langle \gamma''(s), \gamma'(s)\rangle = 0$，因此$\gamma'(s_0), \gamma''(s_0)$共线当且仅当$\gamma''(s_0) = 0$。其不为0时，方程组化为$\begin{cases} \langle \gamma'(s_0), \gamma(s_0) - C\rangle = 0 \\ \langle \gamma''(s_0), \gamma(s_0) - C\rangle = -1 \end{cases}$。

利用方程组与$\langle \gamma''(s), \gamma'(s)\rangle = 0$可推知$\gamma''(s_0) = a(\gamma(s_0) - C), a < 0$，同时点积$\gamma(s_0) - C$可知$a|\gamma(s_0) - C|^2 = -1$,，从而$|\gamma(s_0) - C| = \frac{1}{\gamma''(s_0)}$

定理 1.9. *设$r(s)$是弧长参数正则曲线，则：*

1. *$r''(s) \neq 0$时，$s_{1,2,3}$充分接近s时$r(s_1), r(s_2), r(s_3)$不共线，且在$s_{1,2,3} \to s$时，三点所确定的圆收敛到过$r(s)$的圆，半径为$\frac{1}{|r''(s)|}$，圆心在与$r(s)$处切线垂直的直线上。*
2. *$r''(s) = 0$时，即使$r(s_1), r(s_2), r(s_3)$不共线，其确定的圆也不可能收敛。*

证明. 以下不妨设$s_1 < s_2 < s_3$：

1. 若任何邻域内有$r(s_1), r(s_2), r(s_3)$共线，由柯西中值定理可知存在$s_1 < a < s_2 < b < s_3$使得$r'(a)$与$r'(b)$同向，又由弧长参数可知其相等，从而再由中值定理知存在$a < c < b$使得$r''(c) = 0$，再令s_1, s_3趋近s可得矛盾。

   设C为满足$\langle r'(s), r(s) - C\rangle = 0, \langle r''(s), r(s) - C\rangle = -1$的唯一确定的圆心，下证$s_{1,2,3}$构成的圆的圆心$C(s_1,s_2,s_3)$收敛到$C$，从而再由收敛到的圆过$r(s)$可知半径即为$\frac{1}{|r''(s)|}$。

   类似上方取中值，由中值定理，记$C(s_1,s_2,s_3) = C_0$，其满足$\langle r'(a), r(a) - C_0\rangle = \langle r'(b), r(b) - C_0\rangle = 0, \langle r''(c), r(c) - C_0\rangle = -1$。记$C - C_0 = D$，利用极限可知$\langle r'(a), D\rangle = \langle r'(b), D\rangle = \langle r''(c), D\rangle \to 0$。由连续性即可知$D \to 0$，因此得证。
2. 类似1，若C_0收敛到C，仍然存在$\langle r'(s), r(s) - C\rangle = 0, \langle r''(s), r(s) - C\rangle = -1$，但此时$r''(s) = 0$，第二个式子不可能成立，从而矛盾。

*这样确定的圆称为**密切圆** □

*设$r(s)$为平面弧长参数正则曲线，其s处曲率定义为$|r''(s)|$。

记$r'(s) = t(s)$，可发现其为单位切向量，设单位向量$n(s)$与$t(s)$垂直，且$\{t(s), n(s)\}$与$\{i, j\}$定向相同，则称其为s处的单位正法向量，由$t(s)$唯一确定。

$\{r(s); t(s), n(s)\}$是一个以$r(s)$为原点的正交标架，称它为沿曲线r的**Frenet标架**。

$t'(s) = r''(s) = \kappa(s)n(s)$，而由对$\langle t(s), n(s)\rangle$求导可算出$n'(s) = -\kappa(s)t(s)$，这里的$\kappa(s)$是标量函数，称为**带符号曲率**，与参数化有关(如记$\bar{r}(s) = r(l - s)$，则$\bar{\kappa}(s) = -\kappa(l - s)$)。

定理 1.10. *对正则曲线$r(t) = (x(t), y(t))$，有$\kappa = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$。*

证明. 弧长参数下，其为$r'(s), r''(s)$张成的有向面积，即$x'(s)y''(s)-x''(s)y'(s)$，再化为一般参数。 □

*常曲率曲线只能为直线(曲率为0)或圆(曲率非0)

证明. 前者由定义易得，后者通过求导可说明$p(s)=r(s)+\frac{1}{a}n(s)$为常向量，从而得证。 □

定理 1.11. *设$\kappa:(a,b)\to\mathbb{R}$为连续函数，则存在弧长参数曲线$r(s)$使得$s$处曲率为$\kappa(s)$，且若存在两条这样的曲线$r,\bar{r}$，则有刚体变换$A$使得$\bar{r}=A\circ r$。*

证明. 存在性也即寻找$r(s)$满足$\begin{cases} r'(s)=t(s) \\ t'(s)=\kappa(s)n(s)=\kappa(s)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}t(s)^T\end{cases}$，利用微分方程中的Picard存在唯一性定理，由任给的满足$|t(s_0)|=1$的初值可以解出t，进而解出r。

对于唯一性，r的初值相差平移矩阵，t的初值相差旋转矩阵，而旋转矩阵与$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$均可交换，从而可以提出，得唯一性。 □

§1.4　空间曲线

*正则曲线、曲率($|r''(s)|=\langle t',n\rangle$，$n$定义见下)、密切圆的定义与平面曲线相同

定理 1.12. *设$r:(a,b)\to E^3$为弧长参数的正则曲线，且$r''(s)$处处非零，则：*
1. $s_{1,2,3}$充分靠近时，$r(s_1),r(s_2),r(s_3)$不共线；
2. $s_{1,2,3}\to s$时，此三点确定的平面收敛到过$r(s_0)$，由$r'(s_0),r''(s_0)$张成的平面。

证明. 与平面情况类似可知1成立，记$P(s_1,s_2,s_3)$为三点唯一确定的平面，假设其单位法向量$a(s_1,s_2,s_3)$，p为其上一点，考虑函数$s\to\langle r(s)-p,a(s_1,s_2,s_3)\rangle$，利用两次中值定理可取出$\langle r'(\xi_{1,2}),a\rangle=\langle r''(\eta),a\rangle=0$。由于$a$方向不定，可不妨假设$\{r'(\xi_1),r''(\eta),a\}$成右手系，有收敛时$\begin{cases}\langle r'(s),a\rangle=\langle r''(s),a\rangle=0\\ \langle r'(s)\wedge r''(s),a\rangle=|r'(s)\wedge r''(s)|\end{cases}$。 □

*空间中，法向量不唯一，当$r''(s)\neq 0$时，令$n(s)=\frac{r''(s)}{|r''(s)|}$为主法向量，$b(s)=t(s)\wedge n(s)$为副法向量，则有空间中的Frenet标架$\{r(s);t(s),n(s),b(s)\}$，其中$t$-$n$平面称为**密切平面**，$n$-$b$平面称为**法平面**，$t$-$b$平面称为**从切平面**。

类似定义曲率，对$\langle n,b\rangle$求导，定义$\tau(s)=\langle n'(s),b(s)\rangle$，称为**挠率**，有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}$。

计算：利用$\tau=-\langle n,b\rangle$与定义可以化出$\tau(s)=\dfrac{(r'(s),r''(s),r'''(s))}{|r''|^2}$，进一步化为一般参数可知$\tau=\dfrac{(r',r'',r''')}{|r'\wedge r''|^2}$，而空间曲率可类似算得$\kappa=\dfrac{|r'\wedge r''|}{|r'|^3}$。
*计算可知，一点处κ,τ不依赖参数化的选取

挠率的几何意义：$|b'(s)|=|\tau(s)|$，为空间曲线**离开密切平面的速度**。

定理 1.13. *空间正则曲线$r=r(t)$曲率处处大于0，则其在某个平面上的充要条件是$\tau\equiv 0$。*

证明. 对左推右，设弧长参数化后有$\langle r(s)-r(s_0),a\rangle=0$恒成立，求导即可知$t(s),n(s)$亦在此平面，组合可知$\tau(s)\langle b(s),a\rangle=0$，从而得证。右推左时，由$b'(s)=0$可知$b(s)$为常向量，求导可验证$r(s)$与$b$恒垂直。 □

$\tau(s)$符号的意义：离开密切平面的方向与b相同/相反
*反向参数化后，挠率不变
计算得0处展开$r(s)$可得$r(s)=r(0)+(s-\frac{\kappa(0)^2s^3}{6})t(0)+(\frac{\kappa(0)s^2}{2}+\frac{\kappa'(0)s^3}{6})n(0)+\frac{\kappa(0)\tau(0)s^3}{6}b(0)+o(s^3)$，从而可得Frenet标架下点的坐标。

定理 1.14. *曲线的弧长、曲率、挠率在刚体运动下不变。*

证明. 设刚体运动将p变为$pT+x$，直接进行计算可发现旋转矩阵T由于行列式为1被合并消去，x在求导中消去，从而不变。 □

定理 1.15. 空间曲线基本定理
设$\kappa,\tau:(a,b)\to\mathbb{R}$连续，且$\kappa>0$，则存在弧长参数曲线$r:(a,b)\to E^3$以$\kappa,\tau$为曲率，挠率，若有两条不同，则可以通过刚体变换使之重合。

证明. 类似平面时的讨论，化为常微分方程控制。 □

对$s\in(a,b)$作为弧长参数的曲线，$\int_a^b\kappa(s)\mathrm{d}s$称为全曲率。
令$r:[0,l]\to E^3$为正则曲线(闭区间光滑指能光滑延拓到某开区间上)，且$r(0)$与$r(l)$各阶导数相等，则称其为闭曲线。若其在$[0,l)$上为一一映射，则称简单闭曲线。

练习. *探索平面简单闭曲线的全曲率。*

对空间曲线，由定义$\kappa(s)\geq 0$，由此全曲率必然非负。
Fenchel,1929：任何空间简单闭曲线有$\int_0^l\kappa(s)\mathrm{d}s\geq 2\pi$，取等等价于曲线为平面简单凸闭曲线。
Fary,1949/Milnar,1950：若曲线具非平凡扭结，则$\int_0^l\kappa(s)\mathrm{d}s\geq 4\pi$。

二　曲面的几何

*研究怎样的曲面？
曲面可作以下映射：$r:D\subset E^2\to E^3$，且满足每个分量函数光滑且$r_u=(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}),r_v=(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})$线性无关(即外积非零)，则称为**正则曲面片**。
一点$r(u_0,v_0)$处，考虑曲线$r(u,v_0)$与$r(u_0,v)$可得到两个切向量$r_u(u_0,v_0),r_v(u_0,v_0)$。
*曲面上过$r(u_0,v_0)$的所有光滑曲线在此处的切向量构成二维线性空间，即为r_u,r_v张成的平面，定义为**切平面**。

证明. 定义光滑函数$t\to(u(t),v(t))$，则曲面上的光滑曲线可写成$t\to r(u(t),v(t))$，不妨设$u(0)=u_0,v_0=v(0)$，求导可知$r(u_0,v_0)$处的切向量为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}r_u+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}r_v$。 □

另一个推论：$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$不可能同时为0，于是由反函数定理：
不妨设(u_0,v_0)处$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$非零，则存在$(u_0,v_0)$邻域，其上$(u,v)\to(x,y)$有反函数$(x,y)\to(u,v)$，于是$r(u,v)=(x,y,\tilde{z}(x,y))$。

法向量

*$r_u \wedge r_v$定义为法向量，与切平面垂直，$\{r; r_u, r_v, r_u \wedge r_v\}$构成(未必正交的)标架

对**光滑参数变换**$(\bar{u},\bar{v}) \to (u,v)$，记$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix} \overline{r_u} \\ \overline{r_v} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$，计算得$\overline{r_u} \wedge \overline{r_v} = \det(J) r_u \wedge r_v$，由此不同参数化下法向量可能反向。

§2.1　第一基本形式

记$E = \langle r_u, r_u \rangle, F = \langle r_u, r_v \rangle, G = \langle r_v, r_v \rangle$：

1. 曲面上**曲线的长度**

记$r = r(u,v), r(t) = r(u(t), v(t))$

曲线长度$s(a) = \int_0^a |r'(t)| \mathrm{d}t$

而$s'(a) = \sqrt{\langle r'(t), r'(t) \rangle}$，代入可发现根号内为$Eu_t^2 + 2Fu_t v_t + Gv_t^2$

2. 切向量$\nu = \lambda r_u + \mu r_v, \omega = \bar{\lambda} r_u + \bar{\mu} r_v$，则$\langle \nu, \omega \rangle = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$构成$T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$的映射，其中$T_pS$代表$S$在$P$处的切平面。

3. 计算可验证，在不同参数化下，$\begin{pmatrix} \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{F} & \bar{G} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J^T$。

定义$I = E\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + F\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + F\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}u + G\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v$，可发现其在坐标变换下保持不变，称为**第一基本形式**。

*它是一个由一形式$\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$张量积得到的二形式

定义说明：对$f: S \to \mathbb{R}$曲面上的光滑函数(可看作对u,v光滑)，可定义一形式

$$\mathrm{d}f(p): T_pS \to \mathbb{R}, v \to \mathrm{d}f(v)(p) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(r(t))$$

其中$r(t) = r(u(t), v(t))$满足$r(0) = p, r'(0) = v$。

其具有线性性，事实上只与p, v有关，与$r(t)$选取无关。

于是，$r(u,v) \to u$的映射(不妨记为u)，有$\mathrm{d}u(r_u)(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\big|_{u=u_0} u(r(u, v_0)) = 1$，$\mathrm{d}u(r_v) = 0$，同理$\mathrm{d}v(r_u) = 0, \mathrm{d}v(r_v) = 1$。

于是，对任何$V = \lambda r_u + \mu r_v, W = \bar{\lambda} r_u + \bar{\mu} r_v$，即有$I(V,W) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$。

*第一基本形式在合同变换下不变

面积：设$r: D \to E^3$为正则曲面片，其面积定义为$\iint_D |r_u \wedge r_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$

*$|r_u \wedge r_v|^2 = \langle r_u, r_u \rangle \langle r_v, r_v \rangle - \langle r_u, r_v \rangle^2$

曲率：高斯曲率定义为$K(p) = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$，其中$n_u, n_v$代表$r_u \wedge r_v$归一化后对$u,v$偏导，由于两者平行可作商。

*验证可知面积、曲率均不依赖参数选取，且在合同变换下不变

例：计算$(u, v, f(u,v))$的高斯曲率。

$$r_u = (1, 0, f_u), r_v = (0, 1, f_v) \Rightarrow r_u \wedge r_v = (-f_u, -f_v, 1)$$

$$n = \left(\frac{-f_u}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \frac{-f_v}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}\right)$$

$$K(p) = \frac{f_{uu} f_{vv} - f_{uv}^2}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^2}$$

参数变换

由r_u, r_v不共线，对某点附近可参数化使得$r(u,v) = (u, v, f(u,v))$，下面不妨考虑$(0,0)$处高斯曲率：
在$(0,0)$处切平面上取标准正交基e_1, e_2，记

$$\begin{cases} h(u,v) = \langle r(u,v) - r(0,0), n(0,0)\rangle \\ \bar{u}(u,v) = \langle r(u,v) - r(0,0) - h(u,v)n(0,0), e_1\rangle \\ \bar{v}(u,v) = \langle r(u,v) - r(0,0) - h(u,v)n(0,0), e_2\rangle \end{cases}$$

可以发现$\bar{r}(u,v) = (\bar{u}, \bar{v}, h)$是$r$在平移$(0,0,f(0,0))$至$(0,0,0)$后将切平面转到$xy$平面的结果。
计算知$\frac{\partial(\bar{u},\bar{v})}{\partial(u,v)} = \langle r_u \wedge r_v, e_1 \wedge e_2\rangle \neq 0$，局部可存在$\bar{r}(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{f}(\bar{u},\bar{v}))$。由于$h_u(0,0) = h_v(0,0) = 0$，利用复合函数求导可知$\bar{f}_{\bar{u}} = \bar{f}_{\bar{v}} = 0$，从而$\bar{K}(\bar{r}(0,0)) = \bar{f}_{\bar{u}\bar{u}}\bar{f}_{\bar{v}\bar{v}} - \bar{f}_{\bar{u}\bar{v}}^2$。
另一方面，由于此时切平面已经在xy平面上，考虑适当的绕z轴的旋转，也即成为$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{f} \circ R_\theta(\bar{u},\bar{v}))$，这时

$$\begin{cases} \tilde{u}\cos\theta - \tilde{v}\sin\theta = \bar{u} \\ \tilde{u}\sin\theta + \tilde{v}\cos\theta = \bar{v} \\ \bar{f}(\bar{u},\bar{v}) = \tilde{f}(\tilde{u},\tilde{v}) \end{cases}$$

计算可知$\tilde{f}_{\tilde{u}\tilde{v}} = \bar{f}_{\bar{u}\bar{v}}\cos 2\theta + (\bar{f}_{\bar{v}\bar{v}} - \bar{f}_{\bar{u}\bar{u}})\sin\theta\cos\theta$，从而可选取合适的角度使得$\tilde{f}_{\tilde{u}\tilde{v}} = 0$。
于是，经过合适的合同变换与参数变换，正则曲面片在一点处周围总可以写成$r(u,v) = (u, v, f(u,v))$使得$K(u_0, v_0) = f_{uu}f_{vv}$。
不妨设这点为$(0,0)$，此时由于$f_v(0,0) = 0$，计算可得$v - z$平面上截线$(0,0)$处带符号曲率为$f_{vv}(0,0)$，$u - z$平面上则为$f_{uu}(0,0)$。
*一般做不到参数u, v使得r_u, r_v点点标准正交，除非曲面“平坦”

定义 2.1. 法曲率
取O点处任何单位切向量v与单位法向量n，将张成平面对曲面的截线参数化(弧长参数、正确方向)使得O点切向量为v，则此时的定向$\{O; v, n\}$对应截得的带符号曲率$K_n(v)$称为O点处单位切向量的法曲率。

*由于取相反的v时参数化方向与定向同时反向，$K_n(-v) = K_n(v)$
一点处参数化使得$K(u_0, v_0) = f_{uu}f_{vv}$后，考虑任何$v = \cos\theta r_u + \sin\theta r_v$，可计算发现以$v - n$为平面标架时$r(t) = (t, f(t\cos\theta, t\sin\theta))$即为所需的参数化曲线，此时$K_n(v)$即为$f_{uu}\cos^2\theta + f_{vv}\sin^2\theta = K_n(e_1)\cos^2\theta + K_n(e_2)\sin^2\theta$。

定理 2.2. *Euler: 若$K_n(v)$不全相等，则不区分$\pm v$的意义下存在唯一方向v_1使得$k_1 = K_n(v_1)$达到最大值；唯一方向v_2使得$k_2 = K_n(v_2)$达到最大值，且两方向相互垂直。若v与v_1成角度θ，则$K_n(v) = \cos^2\theta k_1 + \sin^2\theta k_2$。*

§2.2　第二基本形式

考虑$r(u,v)$与一点$P = r(u_0, v_0)$，取过P点的一条弧长参数化的曲线$r(s) = r(u(s), v(s))$。
考虑$\langle r_{ss}, n\rangle = \langle r_{uu}, n\rangle u_s^2 + 2\langle r_{uv}, n\rangle u_s v_s + \langle r_{vv}, n\rangle v_s^2 = II(V,V)$，其中$V = r_u u_s + r_v v_s$，而$II$即为第二基本形式，由$L = \langle r_{uu}, n\rangle, M = \langle r_{uv}, n\rangle, N = \langle r_{vv}, n\rangle$决定。
*$II = L\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u + M\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + M\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}u + N\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v$
对P点任一切向量$V = \lambda r_u + \mu r_v$，有$K_n(V) = \langle r_{ss}, n\rangle_P = \begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & M \\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix}$。
而对$V = \lambda r_u + \mu r_v, W = \xi r_u + \eta r_v$，有$II(V,W) = \begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & M \\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}$，第二基本形式是**对称双线性**的。
*当V为单位切向量时，$K_n(V) = II(V,V)$即为沿V的法曲率。

而对任一切向量，沿其的法曲率为

$$K_n(\frac{V}{|V|}) = II\big(\frac{V}{|V|}, \frac{V}{|V|}\big) = \frac{II(V,V)}{|V|^2} = \frac{II(V,V)}{I(V,V)}$$

性质：设$r = r(u,v)$，合同变换T下为$\tilde{r}$，则对$r(u,v)$任一切向量V有$II(V,V) = \det(T)\tilde{I}I(\mathcal{T}(V), \mathcal{T}(V))$。

证明. 利用$\langle r_u, n\rangle = 0$求导可得$\langle r_{uu}, n\rangle = -\langle r_u, n_u\rangle$，从而利用$\tilde{n} = \dfrac{\mathcal{T}(r_u)\wedge\mathcal{T}(r_v)}{|\mathcal{T}(r_u)\wedge\mathcal{T}(r_v)|} = \det(T)\mathcal{T}(n)$可计算$\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$知结论成立(中间利用了$\det T = \pm 1$，于是乘除无区别)。 □

*对$r(u,v)$的任一切向量V，$II(V,V)$在同向参数变换下不变，反向参数变换下反号
*法曲率的最值也即求$\frac{II(V,V)}{I(V,V)}$的最值，可写为$\frac{xS_0x^T}{xSx^T}$的最值(记第一基本形式对应的矩阵为S，第二基本形式为S_0，x为V在r_u, r_v下的矩阵表示)，又由于S正定，S_0对称，设$S = LL^T$，利用线代知识可发现其即化为求$L^{-1}S_0L^{-T}$的最大/最小特征值，由相似进一步化为S_0S^{-1}的最大/最小特征值(由于矩阵为二阶，即为所有特征值λ_1, λ_2)。

Weingarten变换
考虑$T_P(M)$上由$I(V,W)$定义内积产生的内积空间，对第二基本形式$II: T_P(M)\times T_P(M)\to\mathbb{R}$，设存在线性算子$\mathcal{W}$使得$II(V,W) = \langle V, \mathcal{W}(W)\rangle$，由二形式对称性可知$\mathcal{W}$是自伴算子。
接下来推导$\mathcal{W}$的形式：考虑$II(V,V)$可知$\mathcal{W}(\lambda r_u+\mu r_v) = -\lambda n_u - \mu n_v$，从而$\mathcal{W}: T_P(M)\to T_P(M)$由$\mathcal{W}(r_u) = -n_u, \mathcal{W}(r_v) = -n_v$确定。
*可验证$\mathcal{W}$的确满足上述条件
*高斯映射$g: M\to S^2, r(u,v)\to n(u,v)$，考虑其微分：
$p = r(u_0, v_0)$，定义$\mathrm{d}g_p: T_pM\to T_{g(p)}S^2$，对于$V\in T_pM$，选$M$上过$p$的一条曲线$r(t)$使得$r(0) = p, r'(0) = V$，则$\mathrm{d}g_p(V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} g(r(t))$。
计算：$r'(t) = r_uu_t + r_vv_t$，设$V = ar_u + br_v$，则$\mathrm{d}g_p(v) = (g\circ r)_uu_t + (g\circ r)_vv_t = a(g\circ r)_u + b(g\circ r)_v$，具有**线性性**。
由定义，$\mathrm{d}g_p(r_u) = n_u(g(p))$，只需要再平移到$p$点即只与Weingarten变换差符号，于是$\mathcal{W} = P\circ(-\mathrm{d}g_p)$。
*由于$II(V,W) = \langle\mathcal{W}(V), W\rangle = I(\mathcal{W}(V), W)$，可知$\mathcal{W}$在基$r_u, r_v$下的的矩阵表示为$SS_0^{-1}$

*由定义与上方推导，高斯曲率

$$K(P) = \frac{\mathcal{W}(r_u)\wedge\mathcal{W}(r_v)}{r_u\wedge r_v} = \det(\mathcal{W}) = \frac{\det S}{\det S_0}$$

进一步计算，由于$|r_u\wedge r_v|^2 = EG - F^2 = \det S_0$，有$L = \dfrac{(r_{uu}, r_u, r_v)}{\sqrt{\det S_0}}, M = \dfrac{(r_{uv}, r_u, r_v)}{\sqrt{\det S_0}}, N = \dfrac{(r_{vv}, r_u, r_v)}{\sqrt{\det S_0}}$，通过复杂的计算可发现$LN - M^2$可以通过$E, F, G$对$u, v$求至多两阶导数表示，从而有：

定理 2.3. 高斯绝妙定理
高斯曲率只依赖第一基本形式。

*第一基本形式是**内蕴**的，第二基本形式则是**外蕴**的
*内蕴：将参数反向，法向量变向，但由高斯绝妙定理容易发现高斯曲率不变
*高斯曲率在**等距变换**下不变

定义 2.4. 等距变换
设$M, \tilde{M}$是E^3中两正则曲面片，考虑$\sigma: M\to\tilde{M}$双射且其与其逆均光滑。若对任何M上曲线C，C与$\sigma(C) = \tilde{C}$长度相等，则称其为等距变换。

*曲面上的度量结构可以归结为**每点切空间的内积**上，即关乎第一基本形式

$$s(T)=\int_0^T\sqrt{I(r'(t),r'(t))}\mathrm{d}t=\tilde{s}(T)=\int_0^T\sqrt{\tilde{I}(\tilde{r}'(t),\tilde{r}'(t))}\mathrm{d}t$$

两边求导可知I与$\tilde{I}$对应相等。

考虑$\sigma_*:=\mathrm{d}\sigma_p:T_pM\to T_{\sigma(p)}M$，$V\to\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\sigma(r(t))$，$r(t)$为过$p$且0处以$V$为切向量的曲线。

利用极化，$I(V,V)=\tilde{I}(\sigma_*(V),\sigma_*(V))$可推出$I(V,W)=\tilde{I}(\sigma_*(V),\sigma_*(W))$，由此对每点处的内积空间，$\sigma_*$都构成同构。

设$\tilde{r}(u,v)=\sigma(r(u,v))$，则$\tilde{E}=\langle\tilde{r}_u,\tilde{r}_u\rangle=\langle\sigma_*(r_u),\sigma_*(r_u)\rangle=E$，$F,G$类似，于是两个曲面片若等距同构，一定可以参数化使对应点第一基本形式相同。

例：环面去掉两个圆构成的曲面片$\big((R+r\cos u)\cos v,(R+r\cos u)\sin v,r\sin u\big),u,v\in(0,2\pi)$

由r_u,r_v定义(或计算)可发现$E=r^2,F=0,G=(R+r\cos u)^2$，于是$I=r^2\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+(R+r\cos u)^2\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v$。

$n=(-\cos u\cos v,-\cos u\sin v,-\sin u)$，于是$L=r,M=0,N=(R+r\cos u)\cos u$，$K(u,v)=\frac{\cos u}{r(R+r\cos u)}$。

曲面全曲率$\iint_{(0,2\pi)^2}K|r_u\wedge r_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$可计算发现为0。

*对球面，计算知这一积分的结果为4π

*切平面内积的定义？(当前的定义为外围空间诱导，若强行定义r_u,r_v单位正交，可发现全曲率仍然不变)

*即同样的拓扑对应不同度量时结果不变

§2.3 平均曲率、局部外蕴几何

*由前述讨论有$K=\det(\mathcal{W})$，线性变换的另一个重要量？

定义 2.5. 平均曲率

$H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathcal{W})=\frac{k_1+k_2}{2}$称为平均曲率，计算可知其为$\dfrac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$。

*和面积密切相关(如$H\equiv 0$的曲面称**极小曲面**)

考虑正则曲面片$r:D\to E^3$，假设D紧且边界(分段)光滑。光滑映射$\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\times D\to E^3$满足$\alpha(0,u,v)=r(u,v)$称为$r$的**变分**，而$W(u,v)=\frac{\partial\alpha}{\partial t}$称为**变分向量场**。

下面考虑$\alpha=r(u,v)+\varphi(u,v)n(u,v)t$的情况，变分向量场为$\varphi n$。

性质：对上述的一族曲面片$r_t(u,v)$，面积为$A(t)=\iint_D|(r_t)_u\wedge(r_t)_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，有

$$A'(0)=-\iint_D 2\varphi H|r_u\wedge r_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

证明. $A(t)=\iint_D\sqrt{E_tG_t-F_t^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，而展开知$\begin{cases}E_t=E-2t\varphi L+o(t)\\F_t=F-2t\varphi M+o(t)\\G_t=G-2t\varphi N+o(t)\end{cases}$，从而进一步计算并利用求导积分交换可得结果。 □

*由此可知$H=0$时有极值

*曲面的局部**外蕴**几何[第二基本形式的几何意义]

对正则曲面片$r(u,v)$，设$P=r(0,0)$，高度函数$h(u,v)=\langle r(u,v)-r(0,0),n(0,0)\rangle$为任何点到$P$点切平面距离。

计算发现$h(0,0)=h_u(0,0)=h_v(0,0)=0$，而恰好有$L=h_{uu}(0,0),M=h_{uv}(0,0),N=h_{vv}(0,0)$，于是$h(u,v)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+o(u^2+v^2)$。若$LN-M^2>0$，则$\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$正定时高度函数达到

最小值，P为凸点，反之负定时P为凹点；若$LN-M^2<0$，$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$不定，类似鞍点；$LN-M^2=0$，则构成退化情况。

*一点处刚体变换至$(u,v,h(u,v))$后，进一步近似成$\left(u,v,\frac{1}{2}(Lu^2+2Muv+Nv^2)\right)$。

假定参数化$(u,v,f(u,v))$使r_u,r_v为$r(0,0)$处主方向，此时$\mathcal{W}(e_i)=k_ie_i$，于是$L=k_1,M=0,N=k_2$，称$\left(u,v,\frac{1}{2}(k_1u^2+k_2v^2)\right)$为这点的**密切抛物面**(计算可发现密切抛物面这点的主曲率与原本一致)。$LN-M^2=k_1k_2$，若其大于0，所有法曲率符号一致，为**椭圆抛物面**；其小于0时，有两个线性无关切向量使得法曲率均为0，此时为**双曲抛物面**，也即马鞍面；其为0且k_1,k_2不全为0时，构成**抛物柱面**；而k_1,k_2全为0时即为平面。

*根据密切抛物面(第二基本形式情况)，可将曲面上的点分为四类：椭圆点、双曲点、抛物点、平点(L,M,N全为0)

*对双曲点，切平面截密切抛物面得两直线

*注：考虑(u,v,u^3+v^2)与(u,v,u^3-3uv^2)[猴鞍面]可发现抛物点、平点附近可能具有不同性态

定义 2.6. *渐进方向*

曲面在一点处法曲率为0的方向称为该点的渐进方向。

*椭圆点、抛物点分别有零个、一个渐进方向，而平点每个方向都是渐进方向。

*双曲点有两个渐进方向(截得的直线)，计算可发现夹角$\tan^2\theta=-\frac{k_1}{k_2}$，当且仅当平均曲率为0时两渐进方向垂直。

定义 2.7. *脐点*

沿各个方向法曲率为常数的点，即$k_1=k_2$，每个方向都是主方向。

*性质：由法曲率计算可发现此点处$\frac{II}{I}$为常数k，即$\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=k$。当$k\neq 0$时称为**圆点**，$k=0$时即为平点。计算发现，这点处的$\mathcal{W}$恰好为数乘。

定理 2.8. *给定连通正则曲面片，若其每点均为脐点，则其必然为平面或球面的一部分*

证明. 设$II=k(u,v)I$，对$\mathcal{W}(r_u)=-n_u,\mathcal{W}(r_v)=-n_v$求导可知$-n_{uv}=k_vr_u+k_ruv,-n_{vu}=k_ur_v+kr_{vu}$，于是$k_ur_v=k_vr_u$，由其线性无关可知必须$k_u=k_v=0$，从而$k$必为常数

于是，再次利用$\mathcal{W}$知$n=-kr+v_0$，$\langle r,n\rangle$为常数，从而分类讨论，$k\neq 0$时考虑$|r-\frac{v_0}{k}|$可发现为球面。 □

*点点$L=M=N=0$的曲面必为平面

*问题：给定基本形式是否存在曲面？(容易想到，$EFGLMN$需要满足一些结构性方程才可能存在)

§2.4　特殊曲面

旋转曲面

考虑xz平面正则曲线$c(u)=(f(u),g(u)),f(u)>0$，绕z旋转后$r(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$。

$r_u=(f'(u)\cos v,f'(u)\sin v,g'(u)),r_v=(-f(u)\sin v,f(u)\cos v,0)$，可验证其满足正则性。

计算知$E=(f')^2+(g')^2,F=0,G=f^2,L=\frac{f'g''-f''g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}},M=0,N=\frac{fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$，而Weingarten变换矩阵为$\operatorname{diag}\left(\frac{f'g''-g'f''}{((f')^2+(g')^2)^{3/2}},\frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\right)$。

几何角度：$u\to n(u,v_0)$是xz平面曲线，而n_u为切向量，于是考虑切平面与xz平面交线发现只能每点$-n_u$与r_u共线，r_u即为主方向，相应的主曲率即为母线的曲率$\frac{f'g''-g'f''}{((f')^2+(g')^2)^{3/2}}$。另一方面，$v\to n(u_0,v)$事实上也是平面曲线($n_v$第三个坐标为0)，于是也有$-n_v$与$r_v$共线(观察可知亦有同向)。注意到$-n(u_0,v)$与$r(u_0,v)$为同参

数化的圆，于是n_v, r_v的长度比例为两圆的半径比例，而一个为f，一个为$\frac{g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$(考察三角函数)，即可知另一个主曲率为$\frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$。
*若要求u为母线的弧长参数，则矩阵变为$\mathrm{diag}(f'g''-g'f'', \frac{g'}{f})$，对$(f')^2+(g')^2$求导可发现$(f'g''-g'f'')g' = -f''$，于是高斯曲率为$-\frac{f''}{f}$。
*重要方程：$f''+Kf=0$ [当K为常数时容易求解]

1. $K=0, f''=0 \Longrightarrow f(u)=au+b$

   计算发现只能为平面、柱面或圆锥面。

2. $K=c^2, f''+c^2f=0 \Longrightarrow f(u)=A\cos(cu)+B\sin(cu)=a\cos(cu+b)$

   当$a=\frac{1}{c}$时为球面，$a<\frac{1}{c}$时为纺锤形，$a>\frac{1}{c}$时为桶形。

3. $K=-c^2, f''-c^2f=0 \Longrightarrow f(u)=a\mathrm{e}^{cu}+b\mathrm{e}^{-cu}$

   a,b有一个为0时，不妨设$b=0$[相差负参数化]且$a>0$，再次通过参数化可使$a=\frac{1}{c}$，此时$g(u)=\pm\int_0^u\sqrt{1-\mathrm{e}^{2ct}}\mathrm{d}t$，考虑$u\in(-\infty,0)$的情况，此时曲面称为**伪球面**[表面积与同半径球面一致，体积相差$\frac{1}{2}$]。

   性质：考虑切向量$(f'(u), g'(u))$，计算可发现切点与切线z轴交点的距离为定值$\frac{1}{c}$，因此(f,g)被称为**曳物线**。

*极小旋转曲面：须$ff''+(f')^2=1$，解出$f(u)^2=u^2+2Au+B$，由大于0，$f(u)=\sqrt{u^2+2Au+B}$，而$g'(u)^2=\frac{B-A^2}{u^2+2Au+B}$。

1. $B=A^2$

   只能为平面的一部分。

2. $B-A^2=a^2$

   可参数化为$f(u)=\sqrt{u^2+a^2}$，于是$g(u)=\pm a\,\mathrm{arcsinh}\,\frac{u}{a}$，可化为$x=a\cosh\frac{z}{a}$，称为**悬链线**。

直纹面
$r(u,v)=a(u)+vb(u)$，当$a'(u)$与$b(u)$线性无关时一定为正则曲面片
*$N=0, K=\frac{-M^2}{EG-F^2}$
例子：

1. $b(u)=b_0$ 广义柱面

2. $a(u)=a_0$ 广义锥面，正则要求$v\neq 0, b'(u)\wedge b(u)\neq 0$

3. $r(u,v)=a(u)+va'(u)$ 切线面(曲线的切线组成的曲面)，依然要求$v\neq 0$且$a'(u)\wedge a''(u)\neq 0$

   *计算发现高斯曲率恒为0，高斯曲率为0的直纹面称为**可展曲面**

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 单叶双曲面

   *取$r(u,v)=(a\cos u, b\sin u, 0)+v(\pm a\sin u, \mp b\cos u, c)$均可

   *当$a=b$时为旋转面

5. $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 双曲抛物面

   *取$r(u,v)=(au,0,u^2)+v(a,\pm b,2u)$均可

定理 2.9. 直纹面可展$\Longleftrightarrow (a', b, b') = 0 \Longleftrightarrow$任给$u_0$，沿直母线$r(u_0, v)$方向法向量不变。

证明. 直接计算$\langle r_{uv}, n\rangle = c\langle r_{uv}, r_u \wedge r_v\rangle$，进一步计算得第一个等价成立。
对第二个等价，直纹面可展可等价于n_v与r_u, r_v内积均为0，于是只能为0。 □

*可展曲面局部：从$(a', b, b') = 0$出发分类讨论。若局部$b \wedge b' \equiv 0$，则$b(u)$方向不变，局部是柱面；若局部$b \wedge b' \neq 0$，a'可以写作$\lambda(u)b(u) + \mu(u)b'(u)$，利用参数化$\tilde{a}(u) = a(u) - \mu(u)b(u)$，$\tilde{v} = v + \mu(u)$有$r(u, v) = \tilde{a}(u) + \tilde{v}b(u)$，进一步分类讨论可知$\lambda(u) - \mu'(u) = 0$时为锥面，否则为切线面。
*直纹面是极小曲面时：
$r(u, v) = a(u) + vb(u)$，由正则化条件可不妨参数化为$|b(u)| = 1, \langle a', b'\rangle = 0$。
当$b' \equiv \mathbf{0}$时，即$b(u) = b_0$，为广义柱面，又由极小要求知为平面。其他情况可假定$|b'(u)| = 1$。
直纹面$H = 0 \Leftrightarrow LG = 2MF$，计算可得

$$F = \langle a', b\rangle, G = 1, L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(a'' + vb'', a' + vb', b), M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(b', a' + vb', b)$$

整理出$1, v, v^2$项可得到方程

$$-2\langle a', b\rangle (b', a', b) + (a'', a', b) = (b'', a', b) + (a'', b', b) = (b'', b', b) = 0$$

进一步计算出$b(u)$曲率为1，挠率为0，于是$b(u)$为单位圆，不妨刚体变换后参数化为$(\cos u, \sin u, 0)$，再结合第二个方程得$a(u) = (\alpha(u), \beta(u), \lambda u + c)$，刚体变换可使$a(u) = (\alpha(u), \beta(u), \lambda u)$，代回第一个方程讨论。若$\lambda = 0$时可说明其为平面的部分，否则可得到$r(u, v) = (\alpha, \beta, \lambda u) + v(\cos u, \sin u, 0)$[**正螺面**]。

问题：两张曲面片之间存在映射保持高斯曲率不变，该映射是否等距？若高斯曲率平均曲率都不变，是否合同？
答案：均否。

练习. 给定曲面片

$$\begin{cases} r_1(u, v) = (v\cos u, v\sin u, u) \\ r_2(u, v) = (u\cos v, u\sin v, \ln u) \\ r_3(u, v) = (\sqrt{1 + u^2}\cos v, \sqrt{1 + u^2}\sin v, \operatorname{arcsinh} u) \end{cases}$$

证明在合适参数范围下，r_1到r_2存在保高斯曲率的一一映射，但不为等距映射；r_1到r_3存在保高斯曲率、平均曲率的一一映射，但不为刚体运动。

三　标架与曲面论基本定理

核心问题：给定第一、第二基本形式，能否在相差刚体运动的情况下唯一确定正则曲面？
(**存在性、唯一性**)

§3.1　活动标架与运动方程

由于E, F, G, L, M, N是由$r_u, r_v, r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}$确定的，事实上是希望通过这些解出$r$。
*$\{r_u, r_v, n\}$成为曲面上的**活动标架**(标架：$\{r; x_1, x_2, x_3\}$，曲面上处处线性无关的向量场，一般要求定向为正)
*$r_{uu}, r_{uv}, r_{vv}, n_u, n_v$[即标架的偏导]在标架下的表示？
之前的计算方式：设$r_{uu} = \Gamma^u_{uu} r_u + \Gamma^v_{uu} r_v + C_{uu} n$，由$\langle r_{uu}, n\rangle = L$知$C_{uu} = L$，而对于$\Gamma^u_{uu}, \Gamma^v_{uu}$，有

$$\langle r_{uu}, r_u\rangle = \Gamma^u_{uu}E + \Gamma^v_{uu}F = \frac{1}{2}E_u,\ \langle r_{uu}, r_v\rangle = \Gamma^u_{uu}F + \Gamma^v_{uu}G = F_u - \frac{1}{2}E_v$$

可知$\begin{pmatrix}\Gamma_{uu}^u\\ \Gamma_{uu}^v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E_u/2\\ F_u-E_v/2\end{pmatrix}$
*类似可得到其他的$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$

引入记号：$u^1=u,u^2=v,r=r(u^1,u^2)$，下标1或2代表对对应分量求导，可叠加；记$g_{\alpha\beta}=\langle r_\alpha,r_\beta\rangle,b_{\alpha\beta}=\langle r_{\alpha\beta},n\rangle$，即对应$E,F,G,L,M,N$。
Einstein求和约定：同时在上下指标出现的指标视为对所有求和，省去求和符号。由此有$I=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\otimes\mathrm{d}u^\beta,II=b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\alpha\otimes\mathrm{d}u^\beta$。
记$(g_\alpha\beta)^{-1}$对应位为$g^{\alpha\beta}$，则由矩阵逆定义$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma}=\delta_\gamma^\alpha$，其中$\delta_i^j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$。再记$g=\det(g_{\alpha\beta})$，$b=\det(b_{\alpha\beta})$。
将想求解的式子利用新的记号写作：$\begin{cases}r_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}r_\gamma+b_{\alpha\beta}n\\ n_\alpha=D_\alpha^\beta r_\beta\end{cases}$，下面求解$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$与$D_\alpha^\beta$。
*$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$称为**第一类Christoffel符号**
D_α^β的求解：由于$-b_{\alpha\gamma}=\langle n_\alpha,r_\gamma\rangle=D_\alpha^\beta g_{\beta\gamma}$，乘$g^{\gamma\delta}$并对$\gamma$求和可知$D_\alpha^\delta=-b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\delta}$。记$b_\alpha^\delta=b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\delta}$，即有$D_\alpha^\delta=-b_\alpha^\delta$。
*(b_α^β)就是Weingarten变换在基r_1,r_2下的矩阵
$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$的求解：利用$r_\xi$内积可知$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\xi}=\langle r_{\alpha\beta},r_\xi\rangle$，记$g_{\alpha\beta,\gamma}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}$，轮换相减可知$g_{\beta\gamma,\alpha}+g_{\alpha\gamma,\beta}-g_{\alpha\beta,\gamma}=2\Gamma_{\alpha\beta}^\xi g_{\xi\gamma}$，从而乘$g^{\xi\gamma}$并求和可知$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}(g_{\beta\gamma,\alpha}+g_{\alpha\gamma,\beta}-g_{\alpha\beta,\gamma})$。
*交换α,β结果不变
*定义$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\xi}=\frac{1}{2}(g_{\beta\gamma,\alpha}+g_{\alpha\gamma,\beta}-g_{\alpha\beta,\gamma})$为**第二类Christoffel符号**
于是标架满足

$$\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\ \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma+b_{\alpha\beta}n\\ \frac{\partial n}{\partial u^\alpha}=-b_\alpha^\beta r_\beta\end{cases}$$

称为曲面自然标架的**运动方程**。

§3.2　曲面结构方程

给定$g_{\alpha\beta},b_{\alpha\beta}$，解是否存在？
*偏微分可交换：$\begin{cases}r_{\alpha\beta}=r_{\beta\alpha} & (1)\\ r_{\alpha\beta\gamma}=r_{\alpha\gamma\beta} & (2)\\ n_{\alpha\beta}=n_{\beta\alpha} & (3)\end{cases}$
直接利用结构方程知(1)即$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma=\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma,b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}$。、
(2)计算可得

$$\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta}+\Gamma_{\alpha\beta}^\eta\Gamma_{\eta\gamma}^\xi-\Gamma_{\alpha\gamma}^\eta\Gamma_{\eta\beta}^\xi-b_{\alpha\beta}b_\gamma^\xi+b_{\alpha\gamma}b_\beta^\xi=0\quad\text{(Gauss)}$$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}+\Gamma_{\alpha\beta}^\xi b_{\xi\gamma}-\Gamma_{\alpha\gamma}^\xi b_{\xi\beta}=0\quad\text{(Codazzi)}$$

引入**Riemman记号**$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=g_{\delta\xi}\big(\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\xi}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^\xi}{\partial u^\beta}+\Gamma_{\alpha\beta}^\eta\Gamma_{\eta\gamma}^\xi-\Gamma_{\alpha\gamma}^\eta\Gamma_{\eta\beta}^\xi\big)$，则计算知Gauss方程可写为$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=b_{\alpha\beta}b_{\gamma\delta}-b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}$。
*此处为书中定义，老师讲义中R为此处相反数，两种定义都合理

练习. *利用第二类Christoffel符号说明*

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 g_{\delta\beta}}{\partial u^\gamma\partial u^\alpha}-\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma\partial u^\delta}-\frac{\partial^2 g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}+\frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta\partial u^\delta})-\Gamma^\eta_{\alpha\beta}\Gamma_{\eta\delta\gamma}+\Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\Gamma_{\eta\delta\beta}$$

并进一步计算R_{1212}，得到高斯绝妙定理。

(3)计算可得$\frac{\partial b^\xi_\beta}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial b^\xi_\gamma}{\partial u^\beta}=-b^\eta_\beta\Gamma^\xi_{\eta\gamma}+b^\eta_\gamma\Gamma^\xi_{\eta\beta}$，而将$b^\beta_\alpha$展开后可发现其事实上与Codazzi方程等价。
由对称性，Gauss方程只有一个独立方程

$$R_{1212}=-b$$

同理Codazzi只有两个独立方程

$$\begin{cases}\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=b_{1\xi}\Gamma^\xi_{12}-b_{2\xi}\Gamma^\xi_{11}\\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}=b_{1\xi}\Gamma^\xi_{22}-b_{2\xi}\Gamma^\xi_{21}\end{cases}$$

这三个方程称为**曲面的结构方程**。

曲面论基本定理

定理 3.1. *唯一性*
同一个参数域上的两个曲面，若对应点第一、二基本形式都相同，则必然存在刚体变换使两者相等。

证明. 通过刚体变换与某点处r_u,r_v内积的结果可不妨设刚体变换使一点处的自然标架重合。此时从第一、二基本形式相同可知自然标架的任何微分处处相同，从而利用PDE的唯一性定理可知这时两者必然处处相等。 □

定理 3.2. *存在性*
给定E,F,G,L,M,N，若从其得到的记号满足Gauss方程与Codazzi方程，且$EG-F^2>0$ (即非零，确保有标架)，必然存在第一、第二基本形式符合这些量的正则曲面片。

证明. 将其看作对r,r_1,r_2,n的一阶线性偏微分方程组，利用PDE解的存在性定理可知其对任何点r,r_α,n给定的任何初值条件有解。取初值满足一点处$\langle r^0_\alpha,r^0_\beta\rangle=g_{\alpha\beta}(u_0)$，$\langle r^0_\alpha,n^0\rangle=0$且$\langle n^0,n^0\rangle=1$，且标架为右手系，两边内积可进一步验证这样解出的曲面任何点处第一、第二基本形式符合这些量。 □

*作为一阶线性偏微分方程组，Gauss方程与Codazzi方程事实上是活动方程的**可积性条件**

§3.3　正交活动标架

曲面自然标架$\{r_u,r_v,n\}$，r_u,r_v未必正交。
对曲线：$\{t(s),n(s),b(s)\}$为正交标架[Frenet标架]
曲面的标架运动方程见上节，而曲线的标架运动方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\-\kappa&0&\tau\\0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\n\\b\end{pmatrix}$，注意到其中的系数矩阵是**反对称**的。
*曲面比起曲线的困难：求导方向可以对二维上的任何方向(可以归结为两个参数曲线的方向)
对$V=a\frac{\partial}{\partial u_1}+b\frac{\partial}{\partial u_2}$方向求导，意义：参数平面上找曲线$c(t)$使得$c(0)=0,c'(0)=V$，则$V$方向求导事实上是$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}r(c(t))$，于是任何方向求导可以看作**微分**

由此改造曲面活动方程：$\begin{cases}\mathrm{d}r=(\mathrm{d}u^\alpha)r_\alpha\\ \mathrm{d}r_\alpha=(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta)r_\gamma+(b_{\alpha\beta}\mathrm{d}u^\beta)n\\ \mathrm{d}n=-(b^\gamma_\alpha\mathrm{d}u^\alpha)r_\gamma\end{cases}$

(其中$\mathrm{d}r=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$)

进一步写作

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{1\beta}\mathrm{d}u^\beta & \Gamma^2_{1\beta}\mathrm{d}u^\beta & b_{1\beta}\mathrm{d}u^\beta \\ \Gamma^1_{2\beta}\mathrm{d}u^\beta & \Gamma^2_{2\beta}\mathrm{d}u^\beta & b_{2\beta}\mathrm{d}u^\beta \\ -b^1_\alpha\mathrm{d}u^\alpha & -b^2_\alpha\mathrm{d}u^\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ n \end{pmatrix}$$

*当e_1, e_2, e_3为标准正交标架，类似构造矩阵$A = (a^j_i)$，对$\langle e_i, e_j\rangle$求导可发现其必然为**反对称阵**，能不能类似曲线Frenet标架更加优化，使得a^3_1与a^1_3为0，从而只有两个自由度？

练习. 当$\kappa = \sqrt{(a^2_1)^2 + (a^3_1)^2} > 0$时，不妨设$a^2_1 \neq 0$，计算说明，一定可以在$e_2, e_3$构成的平面对$e_2, e_3$作适当旋转使得$a^3_1 = 0, a^2_1 > 0$。

*对曲线，这样的条件下得到的恰好为Frenet标架

曲面的正交活动标架

*对曲面，无法通过参数化使得$\{r_u, r_v, n\}$为标准正交标架，因为这会导致高斯曲率为0，对一般曲面不成立

定义 3.3. 光滑向量场

在曲面$r(u,v)$上每点处给一个向量给$X(u_0, v_0)$，且$X(u,v)$对u, v光滑，则X称为曲面上的一个光滑向量场。

定义 3.4. 活动标架场

若任一点处$\{r(u,v) : X_1(u,v), X_2(u,v), X_3(u,v)\}$为$E^3$上标架，$X_i$光滑，不失一般性假设$(X_1, X_2, X_3) > 0$，$\{r : X_1, X_2, X_3\}$其称为曲面上的活动标架场。

当$\{X_1, X_2, X_3\}$为单位正交标架，则称为正交活动标架。

*存在性：对r_u, r_v作Schmit正交化，即可与n得到正交活动标架

正交活动标架的运动方程

重新考虑r_1, r_2：对任何参数平面D的切向量$V \in T_p(D)$，有$\mathrm{d}r(V) = r_1\mathrm{d}u^1(V) + r_2\mathrm{d}u^2(V) \in T_{r(p)}r(D)$，即将$\mathrm{d}r$看作曲面上的切映射。

为了**与参数化脱钩**，对曲面的任何切向量V，可直接在曲面上看求导方向：$\mathrm{d}r_\alpha(V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} r_\alpha(c(t))$，类似其中$c(t) = r(u(t), v(t))$。这样，$u, v$可以看作曲面上的函数(曲面上点$p$的$u, v$坐标，$r(u(p), v(p)) = p$)，$\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$也成为了曲面上的一形式。

于是，$\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \dfrac{\partial}{\partial u^2}$与$r_1, r_2$相对应(这样的定义下即有$\mathrm{d}u^i(r_j) = \delta^j_i$)。这时$\mathrm{d}r(X) = r_i\mathrm{d}u^i(X) = X$。

假设$\{r : e_1, e_2, e_3\}$为曲面的正交活动标架，$e_3 = n$，下面考察运动方程(由于相差线性组合，记$r_\alpha = a^\beta_\alpha e_\beta$)。

计算$\mathrm{d}r = r_\alpha\mathrm{d}u^\alpha = (a^\beta_\alpha e_\beta)\mathrm{d}u^\alpha$，记$\omega^\beta = a^\beta_\alpha\mathrm{d}u^\alpha$，则$\mathrm{d}r = \omega^\beta e_\beta$。

ω^i的实际含义：给定切向量场$X = X^\alpha r_\alpha$，则$\omega^\alpha(X) = X^\eta a^\alpha_\eta = \langle X, e_\alpha\rangle, \alpha = 1, 2$，于是$\omega^\alpha$是$e_\alpha$的**对偶一形式**。

定义 3.5. 曲面上的一形式

给定正则曲面片M，其上的一形式定义为所有切向量集合上的函数，限制在每点p处的$\phi : T_pM \to \mathbb{R}$是线性函数。

若对任何光滑向量场X有$\phi(X)$光滑则称为光滑一形式。

性质：若曲面上光滑切向量场V_1, V_2逐点线性无关，一形式Θ^1, Θ^2为光滑一形式使得$\Theta^\alpha(V_\beta) = \delta^\alpha_\beta$，则曲面片上任何光滑一形式$\phi = \phi(V_\alpha)\Theta^\alpha$。

证明. $\phi(X) = X^\alpha\phi(V_\alpha) = \Theta^\alpha(X)\phi(V_\alpha) = (\phi(V_\alpha)\Theta^\alpha)(X)$。 □

于是，$\phi = \phi(e_\alpha)\omega^\alpha$，而设$\mathrm{d}e_i = \omega_j^i e_j$，则只有$\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$三个独立分量。结合$\mathrm{d}r = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$，运动方程归结为五个一形式。
基本形式$I(V,W) = \langle V, W\rangle = \langle V, e_1\rangle \langle W, e_1\rangle + \langle V, e_2\rangle \langle W, e_1\rangle = (\omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2)(V,W)$，而$II(V,W) = \langle V, \mathcal{W}(W)\rangle$，而设Weingarten变换在基$e_1, e_2$下为$\mathcal{W}(e_\alpha) = h_\alpha^\beta e_\beta$，则计算$\mathrm{d}n$可知$\omega_3^\alpha = -h_\beta^\alpha \omega^\beta$，进一步推导知$II = \omega^\alpha \otimes \omega_\alpha^3$。
性质：第一基本形式与正交活动标架的选取无关，第二基本形式与同法向正交活动标架选取无关。

证明. 当e_3固定为法向时，利用$\mathrm{d}r$、$\mathrm{d}n$不变直接计算可发现若$(\bar{\omega}^\alpha) = A(\omega^\alpha)$，则$(\bar{\omega}_\alpha^3) = A(\omega_\alpha^3)$，又由两者都为正交标架可知$A$为正交阵，从而将$I, II$类似内积展开计算得结论。 □

*当e_1, e_2每一点为主方向时，Weingarten矩阵为$h_i^j = k_i\delta_i^j$，从而$II = k_\alpha \omega^\alpha \otimes \omega^\alpha$，$k_\alpha$为主曲率。
问题：是否存在？

练习. 证明对不是脐点的点$p \in M$，有邻域存在上述标架。

*ω_1^2是什么？

§3.4 曲面上的微分形式

零形式-曲面上的光滑函数
一形式-函数的微分

定义 3.6. 曲面上的二形式
M是正则曲面片，η定义为$T_pM \times T_pM, \forall p \in M$上的函数，且满足每点处双线性性与反对称性$\eta(v,w) = -\eta(w,v)$。
若η对任何光滑切向量场是光滑函数，则称为光滑二形式。

性质：$\eta(av+bw, cv+dw) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\eta(v,w)$

定义 3.7. 外积
假设ϕ, ψ为曲面上的一形式，定义$\phi \wedge \psi(V,W) = \phi(V)\psi(W) - \psi(V)\phi(W)$，即$\phi\wedge\psi = \phi\otimes\psi - \psi\otimes\phi$，则外积结果为二形式。

*设u_1, u_2是M上处处无关的光滑切向量场，ψ^1, ψ^2为两个一形式满足$\psi^\alpha(u_\beta) = \delta_\beta^\alpha$，则$M$上任何(光滑)二形式$\eta = \eta(u_1, u_2)\psi^1 \wedge \psi^2$。

证明. 直接计算可知$\eta(u_{1,2}) = \eta(u_1, u_2)\psi^1 \wedge \psi^2(u_1, u_2)$，于是由于左右都为二形式，由二形式性质可知相等。 □

*由于切平面最多有两个线性无关向量，类似上方定义三形式后会有线性相关，利用反对称性可知**恒为0**，类似知更高次形式均恒为0。

定义 3.8. 外微分
一形式ϕ的外微分$\mathrm{d}\phi(r_u, r_v) = \frac{\partial}{\partial u}\phi(r_v) - \frac{\partial}{\partial v}\phi(r_u)$。
即$\mathrm{d}\phi = (\frac{\partial}{\partial u}\phi(r_v) - \frac{\partial}{\partial v}\phi(r_u))\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$

*计算可以发现与参数变换无关
*利用偏导可交换知$\mathrm{d}^2 = 0$
运算法则(f为零形式，ϕ, ψ为一形式)：

1. $\mathrm{d}(\phi+\psi)=\mathrm{d}\phi+\mathrm{d}\psi$

2. $\mathrm{d}(f\phi)=\mathrm{d}f\wedge\phi+f\mathrm{d}\phi$

正交标架下的结构方程

由曲面外微分运算的要求需要$\mathrm{d}(\mathrm{d}r=0),\mathrm{d}(\mathrm{d}e_i)=0$，结合运动方程$\mathrm{d}r=\omega^\alpha e_\alpha$计算可知

$$\begin{cases}\mathrm{d}\omega^1-\omega^2\wedge\omega_2^1=0\\ \mathrm{d}\omega^2-\omega^1\wedge\omega_1^2=0\\ \omega^\alpha\wedge\omega_\alpha^3=0\end{cases}$$

性质：前两个方程可唯一确定ω_1^2。

证明. 设$\mathrm{d}\omega^1=a\omega^1\wedge\omega^2,\mathrm{d}\omega^2=b\omega^1\wedge\omega^2$，可验证$\omega_1^2=a\omega^1+b\omega^2$为解，若此解不唯一，作差可知其差与$\omega^1,\omega^2$外积都为0，从而只能为0。 □

*设$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$，则$\bar{\omega}_1^2=\omega_1^2+\mathrm{d}\theta$，而若复合反射(法向变为相反)有$\bar{\omega}_1^2=-\omega_1^2-\mathrm{d}\theta$。

而外微分条件结合$\mathrm{d}e_i=\omega_i^je_j$可知$\mathrm{d}\omega_i^k=\omega_i^j\wedge\omega_j^k,i,k=1,2,3$。其中实际上的独立方程有$\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2$与$\begin{cases}\mathrm{d}\omega_1^3=\omega_1^2\wedge\omega_2^3\\ \mathrm{d}\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3\end{cases}$，前者即为Gauss方程，后者为Codazzi方程。

Gauss方程：考虑Weingarten变换在正交标架下的矩阵，可以发现$\mathrm{d}\omega_1^2=-K\omega^1\wedge\omega^2$，即$K=-\frac{\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$，事实上是**高斯绝妙定理**。

*注意求和中指标范围1到2与1到3的区别

*考虑E^3上的正交活动标架，也可以类似定义$\omega^\alpha,\omega_\alpha^\beta$，$\alpha,\beta=1,2,3$，考虑到反对称性事实上有六个独立分量。类似可得结构方程为$\mathrm{d}\omega^j=\omega^i\omega_i^j,\mathrm{d}\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j$。而曲面上的标架可以小范围延拓成三维欧氏空间上的标架，即可以看作上方$\omega^3=0$的情况。

正交标架选取

若$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$，有$\begin{pmatrix}\bar{\omega}_1\\ \bar{\omega}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}\bar{\omega}_1^3\\ \bar{\omega}_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}$

假设$r_\alpha=a_\alpha^\beta e_\beta$，可以发现$\omega^\alpha=a_\beta^\alpha\mathrm{d}u^\beta$，即相差转置。于是$\omega^1\wedge\omega^2=\det(A)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$，利用Weingarten变换矩阵表示可以算出$\det(A)=\sqrt{EG-F^2}$，不依赖正交活动标架选取，由$\omega_1^3\wedge\omega_2^3=\det(\mathcal{W})\omega^1\wedge\omega^2$可知$\omega_1^3\wedge\omega_2^3$也不依赖，类似知$\omega^1\wedge\omega_2^3-\omega^2\wedge\omega_1^3$亦不依赖。

*计算可知$\omega^1\wedge\omega_2^3-\omega^2\wedge\omega_1^3=h_\alpha^\alpha\omega^1\wedge\omega^2=2H\omega^1\wedge\omega^2$

应用：可展曲面

给定正则曲面片，其主曲率k_1,k_2为常函数且不等(无脐点)，如何分类？

*圆柱面为简单的例子，是否唯一？

由无脐点，可以构造正交活动标架使得e_1,e_2为主方向，这时Weingarten变换在基下的矩阵表示为$\mathrm{diag}(k_1,k_2)$，于是$\omega_1^3=k_1\omega^1,\omega_2^3=k_2\omega^2$。

求微分得$\mathrm{d}\omega_1^3=k_1\mathrm{d}\omega^1=k_1\omega^2\wedge\omega_2^1$，另一方面其为$\omega_1^2\wedge\omega_2^3=k_2\omega_1^2\wedge\omega^2$，联立即有$(k_1-k_2)\omega_1^2\wedge\omega^2=0$，同理$(k_1-k_2)\omega_1^2\wedge\omega^1=0$，得到$\omega_1^2=0$，于是高斯曲率为0，$k_1k_2=0$。

不妨设$k_2=0$，有$\omega_1^3=k_1\omega_1,\omega_2^3=\omega_1^2=0$。此时标架运动方程变为$\mathrm{d}e_1=k_1\omega^1e_3,\mathrm{d}e_2=0,\mathrm{d}e_3=-k_1\omega^1e_1$。

由于e_2为常向量，取一个垂直于e_2过曲面上一点得平面解得一条曲线c_1，弧长参数下(调整正负)曲线的切

向量即为e_1。这时e_1, e_2, e_3成为Frenet标架，限制在曲线上有$(e_1)_s = k_1 e_3, (e_3)_s = -k_1 e_1$，对比平面曲线运动方程可发现曲率恒为为$k_1$，于是曲线必然为圆。另一方面，对某点$P$处，找曲线$c_2(t)$满足$\frac{\mathrm{d}c_2(t)}{\mathrm{d}t} = e_2(t)$，且$c_2(0) = P$，可发现其必然为直线。综合上方讨论可知此曲面片必然为圆柱面。

*性质推广：曲面片M高斯曲率为0且无脐点，则其必然为直纹面(从而为可展曲面)

证明. 仍然取e_1, e_2为主方向的正交活动标架，两主曲率为光滑函数。由于高斯曲率处处为0，可不妨设$k_1 \neq 0, k_2 = 0$(不可能发生转换，否则会产生脐点)。类似上方可推导出$0 = \mathrm{d}\omega_2^3 = k_1 \omega_2^1 \wedge \omega^1$.设$\omega_1^2 = f\omega^1 + g\omega^2$，可知$g = 0$。
由运动方程知$\mathrm{d}e_2 = -f\omega^1 e_1$。依然类似上方寻找$c(s)$使得$\frac{\mathrm{d}c(s)}{\mathrm{d}s} = e_2(s)$，且$c(0) = P$，由ODE理论可知局部存在唯一解。而$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} e_2(s) = \mathrm{d}e_2(e_2) = -fe_1\omega^1(e_2) = 0$，于是局部为直线，从而可延拓到整体的直线，即证明了其为直纹面。 □

四　曲面的内蕴几何

§4.1　测地线与协变导数

*高斯绝妙定理保证了等距变换下第一基本形式不变，于是高斯曲率不变。反之，若不存在保持高斯曲率的变换，则不可能等距同构(如球面与平面)。
*内蕴几何即为**等距变换下不变的几何**
对球面三角形，利用初等几何可以发现满足$\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \frac{S(\triangle ABC)}{R^2}$，有$\int_{\triangle ABC} K \mathrm{d}S = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$，其中$S$代表面积元，$K$代表高斯曲率。
*对任何**测地三角形**[测地线构成的三角形]都对
测地线为连接曲面上两点的最短光滑曲线，设L为连接P, Q两点的光滑曲线到$\mathbb{R}$的函数，利用变分进行计算。
对测地线$C : r(s) = r(u^1(s), u^2(s)), s \in (0, l)$，可取曲面正交标架使得$C$上$e_1 = r_s, e_3 = n$[Darbour标架]。设沿着$C$有$e_2 = a^i r_i$，假设$f$为$[0, l]$上任一两端为零光滑函数，考虑曲线的变分

$$r^\lambda(s) = r(u^1(s) + \lambda f(s) a^1(s), u^2(s) + \lambda f(s) a^2(s)), \lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$$

它满足$r^0(s) = r(s), \frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial \lambda}\big|_{\lambda=0} = f(a^i r_i) = f(e_2), r^\lambda(0) = P, r^\lambda(l) = Q$。
利用条件，假设其长度为$L(\lambda)$，必有$L_\lambda(0) = 0$。而交换求导次序计算知

$$\left.\frac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^l \left|\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s}\right| \mathrm{d}s \bigg|_{\lambda=0} = -\int_0^l f \left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} \right\rangle \mathrm{d}s$$

由于f的任意性，测地线应满足处处$\left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} \right\rangle = 0$。

定义 4.1. 测地线
曲面上的弧长参数曲线$r(s)$，若其Darbour标架满足处处$\left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} \right\rangle = 0$，则称为一条测地线。

*例：平面上的直线e_1不变，是测地线
*沿测地线线t_s只有曲面法向量方向的分量，测地线等价于**主法向量垂直曲面**的曲线

定义 4.2. 测地曲率
曲面上的弧长参数曲线$r(s)$，由其Darbour标架计算的$\left\langle e_2, \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} \right\rangle$为曲面沿着曲线的测地曲率。

*根据法曲率几何意义可知$e_{1s} = r_{ss} = k_g e_2 + k_n e_3$，于是$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$。
*由于$k_g = \langle \mathrm{d}e_1(e_1), e_2 \rangle = \omega_1^2(e_1)$，而由于$\omega^1(e_1) = 1$，限制在曲线上有$k_g \omega^1 = \omega_1^2$。

当u,v为正交参数时，利用ω_1^2可化简参数曲线上的测地曲率，即$k_g(u)=-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}},k_g(v)=\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}$。假设弧长参数曲线$r(s)$在某点处与$u$线的夹角为$\theta$，利用$\varpi_1^2=\omega_1^2+\mathrm{d}\theta$进一步算得$k_g$为[Liouville公式]

$$k_g=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}-\frac{(\ln E)_v}{2\sqrt{G}}\cos\theta+\frac{(\ln G)_u}{2\sqrt{E}}\sin\theta$$

利用自然标架，可算出

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2}=\left(\frac{\mathrm{d}^2 u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha+\left(b_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)n$$

于是法曲率$k_n=\langle r_{ss},n\rangle=II(e_1,e_1)=\langle\mathcal{W}(e_1),e_1\rangle$，测地曲率$k_g=\langle r_{ss},n\wedge r_s\rangle$。定义$\kappa_g=\left(\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha$为**测地曲率向量**，用Darbour标架可以写成$\langle(e_1)_s,e_2\rangle e_2=k_g e_2$。
从而，一条曲线为测地线当且仅当$\frac{\mathrm{d}^2u^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}=0,\alpha=1,2$[仅由**第一基本形式**决定]。此为非线性常微分方程，只能确定解**局部存在**。

定理 4.3. 测地线存在唯一性
对正则曲面M，$r=r(u,v)$，对任何$p\in M,V\in T_pM$，则$\exists\varepsilon>0,r=r(s),s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$为测地线，满足$r(0)=p,r_s(0)=V$。

证明. 将初值作为上方常微分方程的初值，利用解的存在唯一性定理即得证。 □

*可验证测地曲率向量在参数化改变时不变，从而与**协变导数**相关

协变导数
考虑沿曲线的切向量场$r_s=V^\alpha r_\alpha$为切向量场，其再求导r_{ss}未必是切向量场，如何转化为切向量场？(去除法向分量)

定义 4.4. 协变导数 *Covariant derivative along a curve*
正则曲面片$M:r=r(u,v)$，上有一条正则曲线$C:r=r(t)$，假设V是沿曲线的光滑切向量场，$V(t)\in T_{r(t)}M$，定义V沿C的协变导数$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-\left\langle\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t},n\right\rangle n$。

*计算自然标架下$V=V^\alpha r_\alpha$，可得到$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}V^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}V^\beta\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha+\left(b_{\alpha\beta}V^\alpha\frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}s}\right)n$，于是即有$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}V^\alpha}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}V^\beta\frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}s}\right)r_\alpha$。
*于是测地线可刻画为$\frac{\mathrm{D}e_1}{\mathrm{d}s}=0$
*协变导数只由第一基本形式确定，在正则参数变换下不变
*不依赖参数化的意义：曲面片相交处会有不同参数化，不依赖代表可以在**整体曲面**上定义
性质：假设V,W是曲线C上的两个光滑切向量场，f是沿曲线光滑函数，则有：

1. $\frac{\mathrm{D}(V+W)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}$
2. $\frac{\mathrm{D}(fV)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}V+f\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$
3. $\frac{\mathrm{d}\langle V,W\rangle}{\mathrm{d}t}=\left\langle\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t},W\right\rangle+\left\langle V,\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle$

*性质3证明：先写出d，再由与切向量内积可将d换为D

§4.2 平行移动

定义 4.5. *Levi-Civita*平行
正则曲面片$M:r=r(u,v)$，上有一条正则曲线$C:r=r(t)$，假设V是沿曲线的光滑切向量场，若$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=0$，则称切向量场沿曲线$C$是平行的。
在此情况下，称$V(t_1)$是由$V(t_2)$沿C作平行移动得到。

*平移的存在性？唯一性？[本质还是ODE问题，由于其为线性，整体存在唯一解]
*测地线另一等价说法：$e_1(s)$沿$r=r(s)$**平行**。
利用上方性质3，假设V,W是沿曲线平行的光滑切向量场，可以得到$\langle V,W\rangle$不变，从而“平行移动”是**保持内积**的(保长、保角)。于是，对曲面片上两点p,q，取一条曲线C，可以定义映射$PT_C:T_p(M)\to T_q(M)$，由平行移动得来。由于保内积，可以得到线性性等，进一步推出PT_C为内积空间的同构。于是，协变导数有时也称为**联络**。
*反过来，有联络就有平行移动，从而可以考虑不同点切平面张量的差距，可以定义导数
*平移的结果与曲线选取**有关**，于是切向量沿闭曲线绕一圈后未必为原向量，事实上与高斯曲率有关
*若两曲面M_1,M_2沿着某曲线C相切，即C上对应点处切平面相同，则$V(t)$在M_1上沿C平行等价于$V(t)$在M_2上沿C平行(可用于简化计算)

考察沿曲线平移的方法：假设有一条曲面上的正则曲线$r=r(t)$，考虑其每点处切平面上与曲线切向量垂直的向量方向构成的切线面(有局部正则性)，切线面可以展开成平面，从而变为欧氏空间上平移考察。
例：球面的纬线圈，赤道处会如此展为柱面，否则为锥面。假设纬度(在上半球中)为ψ，可作锥面展开，计算可知扇形的圆心角$\theta=2\pi\sin\psi$。通过考察平面中平移可发现，切向量沿纬线圈平行移动一圈后，转过的角度即为θ[物理：**傅科摆**证明地球自转]。
关于测地线问题：
是否全局最短？[未必]
任意两点之间是否存在测地线？[取决于曲面的完备性，如圆盘挖掉一点后相对的点间不存在测地线]
测地线是否唯一？[未必，且无上界，如球面对径点间]
*对圆柱面，可发现任何圆柱螺线都是测地线，因此不在同一纬线圈上会有无穷多条。

练习. *考察张角为θ圆锥面两点间测地线条数最多最少。*

*测地线具有**局部**最短性
思路：如何证明两点间直线最短？考察挖去原点的极坐标系，计算极坐标系上的第一基本形式可得$I=\mathrm{d}\rho\otimes\mathrm{d}\rho+\rho^2\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta$，于是切向量长度$|r'(t)|\geq|r_\rho(t)|$，后者恰好是直线对应参数化下的的切向量长度。
建立曲面上一点处极坐标系：
指数映射$\exp_p:T_p^M\to M$，$\exp_p(V)=\gamma(\frac{V}{|V|},|V|)$，其中$\gamma$是过$p$点以$\frac{V}{|V|}$为单位切向量的弧长参数测地线在$s=|V|$处的点(即沿指定方向走过指定弧长的测地线)。利用解对初值的连续性可知此映射一定对模长充分小的V存在[由于S^1紧，对每点存在必有最小值]，且若对V由定义一定对$tV,0<t<1$有定义。
*$|V|$取定称为以p为心的**测地圆**
由于T_p^M即为二维欧氏空间，考虑其上的一组基后，指数映射也是曲面的**参数化**。下面说明$r(x^1,x^2)=\exp_p(x^1e_1+x^2e_2)$是$p$附近的正则参数化：

证明. 由于存在参数化$r=r(u^1,u^2)$使得p点处有$\langle r_\alpha,r_\beta\rangle\big|_p=\delta_\alpha^\beta$，取$e_1=r_1,e_2=r_2$，说明正则性只需说明$r_{x^1}\wedge r_{x^2}\neq0$在$p$点成立(根据光滑即得局部成立)，计算参数变换可知等价于$\det\left(\frac{u^\alpha}{x^\beta}\right)\big|_p\neq0$。
事实上，p点处此矩阵为**单位阵**，从而结论成立。看法：考虑测地线自身的参数化代入计算。 □

*称(x^1,x^2)为P点处的**法坐标系**，此坐标系在P点处的$r_1=r_{x^1},r_2=r_{x^2}$标准正交，从而第一基本形式$g_{\alpha\beta}(P)=\delta_\alpha^\beta$，且这点处Christoffel符号都为0，从而推出$g_{\alpha\beta,\gamma}(P)=0$。
*$g_{\alpha\beta,\gamma}(P)=\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\langle r_\alpha,r_\beta\rangle=\langle\Gamma_{\alpha\gamma}^\eta r_\eta,r_\beta\rangle+\langle r_\alpha,\Gamma_{\beta\gamma}^\eta r_\eta\rangle=\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta(P)+\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(P)$
*证明Christoffel符号都为0：利用测地线方程与参数区域上极坐标直接计算。

定理 4.6. 高斯引理
从M上一点P出发的测地线与以P为心的测地圆正交。

证明. 在法坐标系上作参数变换将欧氏坐标化为极坐标(ρ,θ)[这时称为**测地极坐标系**，可发现除原点外正则]，计算可知$\lim_{\rho\to 0}F(\rho,\theta)=0$，且$F_\rho=0$[可通过内蕴或外蕴角度计算]，于是$F=0$，得证。 □

*测地极坐标系中，θ线为测地圆，ρ线为测地线

定理 4.7. *设$p\in M$为一点，总存在一个邻域U使得对U中任意q，落在U内的连接pq的测地线长度为所有连接pq的曲线的最短长度。*

证明. 取充分小U使得其上有极坐标系，指数映射对应的$|V|<\varepsilon$，对U内的曲线$C: r(t), r\in(0,t_0)$，$L(C)=\int_0^{t_0}\sqrt{\rho_t^2+G(\rho,\theta)\theta_t^2}\mathrm{d}t\ge\int_0^{t_0}\sqrt{\rho_t^2}\mathrm{d}t=|\rho(t_0)-\rho(0)|=\rho_0$。若不完全落在$U$内，可以取落在内部的部分估算，得到长度大于等于$\varepsilon$，从而不影响最短。 □

*问题：测地极坐标系下高斯曲率？
由于其为正交活动标架，直接计算可知$\omega_1^2=\frac{(\sqrt{G})_\rho}{\sqrt{G}}\omega^2$，进一步得到$K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$。[当$K$为常数时，可以直接解出第一基本形式。]
性质：测地极坐标系下有$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$、$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1$。

证明. 回到测地法坐标系进行计算，$\sqrt{G}=\sqrt{g_{\alpha\beta}x_\theta^\alpha x_\theta^\beta}$，利用测地法坐标系性质可算出结果。 □

练习. *考虑曲线$C(s)$，每点作与曲线切向量垂直的测地线，考虑$F=\langle r_\rho,r_s\rangle$，有$F(0,s)=0$，$F_\rho$是否为0?*

测地三角形内角和

定理 4.8. *测地三角形内角和-基础形式*
曲面上三个点之间两两用测地线连接得到测地三角形，假设它们落在以A为心的测地极坐标系之内，且连接A与BC中间某点的测测地线$\alpha(s)$坐标可以写为$(f(\theta(s)),\theta(s))$，则有$\iint_{\triangle ABC}K\mathrm{d}V=\angle A+\angle B+\angle C-\pi$(角定义为测地线切向量在切空间中夹角)。

证明. 此时$\iint_{\triangle ABC}K\mathrm{d}V=\iint_{\triangle ABC}-(\sqrt{G})_{\rho\rho}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\angle A}(1-(\sqrt{G})_\rho f(\theta))\mathrm{d}\theta$。
考虑BC与每条$\alpha(s)$的夹角$\varphi(s)$，有$\varphi(0)=\pi-\angle B,\varphi(s_0)=\angle C$，且$\begin{cases}\cos\varphi(s)=\langle\alpha'(s),r_\rho\rangle\\ \sin\varphi(s)=\left\langle\alpha'(s),\frac{r_\theta}{\sqrt{G}}\right\rangle\end{cases}$。假设$\alpha(s)$每点坐标$(\rho(s),\theta(s))$，对第一个式子求导可得到$-\sin\varphi(s)\varphi_s=\langle r_\rho\rho_s+r_\theta\theta_s,r_{\rho\rho}\rho_s+r_{\rho\theta}\theta_s\rangle$(消去由测地线知为零的$\alpha''(s)$)，化简得$-\sin\varphi(s)\varphi_s=\frac{1}{2}G_\rho(\theta_s)^2$。而第二个式子可以化简为$\sin\varphi(s)=\sqrt{G}\theta_s$，代入得$\varphi(s)=-(\sqrt{G})_\rho\theta_s$。于是$\int_0^{\angle A}-(\sqrt{G})_\rho f(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^L-(\sqrt{G})_\rho\theta_s\mathrm{d}s=\angle C+\angle B-\pi$，从而得证。 □

§4.3 局部Gauss-Bonnet公式

测地曲率的加入
利用Liouville公式，计算可知测地极坐标系下对测地线有$\varphi_s+\frac{\sqrt{G}_\rho}{\sqrt{G}}\sin\varphi(s)=0$，而$\sin\varphi(s)=\left\langle\alpha_s,\frac{r_\theta}{\sqrt{G}}\right\rangle=\left\langle r_\theta\theta_s,\frac{r_\theta}{\sqrt{G}}\right\rangle=\sqrt{G}\theta_s$，于是$\varphi_s+\sqrt{G}_\rho\theta_s=0$。
一般情况下$k_g(s)=\varphi_s+\sqrt{G}_\rho\theta_s$，于是对测地线$AB$、$AC$，$BC$未必为测地线时，进行积分可算出(以下$AB$记为$\gamma$，$AC$记为$\beta$，$BC$记为$\alpha$)：

Gauss-Bonnet I:
在三角形ABC中，β,γ为测地线，三点都落在以A为心的测地极坐标系中，α在极坐标系下坐标写成$(f(\theta),\theta)$，则有

$$\iint_{\triangle ABC}K\mathrm{d}V=\angle A+\angle B+\angle C-\pi-\int_0^{l(\alpha)}k_g(s)\mathrm{d}s$$

Gauss-Bonnet II:
多边形$A_1,\dots,A_n$落在内部某点O为心的测地极坐标系中，且每条边可在极坐标系下写成$(f_i(\theta),\theta)$，即只与径向**相交一次**，则记区域为D有：

$$\iint_D K\mathrm{d}V+\int_{\partial D}k_g(s)\mathrm{d}s=\sum_i\angle A_i-(n-2)\pi=-\sum_i(\pi-\angle A_i)+2\pi$$

Green公式：对平面定向分段光滑简单闭曲线C围成区域D，对区域中任何光滑函数f,g，有

$$\oint_C f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y=\iint_D(g_x-f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Gauss-Bonnet III:
考虑D和去掉绕O的某小圈和一条径向的长条后的连通区域D_ε，D_ε高斯曲率的积分极限与D相同，于是：

$$\iint_D K\mathrm{d}V=\lim_{\varepsilon\to0}\iint_{D_\varepsilon}-\sqrt{G}_{\rho\rho}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\lim_{\varepsilon\to0}\oint_{C_\varepsilon}-\sqrt{G}_\rho\mathrm{d}\theta=2\pi+\int_{\partial D}(\varphi_s-k_g)\mathrm{d}s$$

由此可以不要求能写成$(f_i(\theta),\theta)$。

对不同点的测地极坐标系进行拼接，最终得到

定理 4.9. *Gauss-Bonnet定理*
对曲面M上一条分段光滑简单闭曲线C，围成单连通区域D，则有

$$\iint_D K\mathrm{d}V+\int_C k_g(s)\mathrm{d}s+\sum_i(\pi-\angle A_i)=2\pi$$

*另一个证明思路：由$K=\frac{-\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$，对微分形式进行积分，乘面积元即对$-\mathrm{d}\omega_1^2$积分，靠**Stokes定理**可计算出结论。

应用：**角差**

定理 4.10. 平行移动角差
对曲面上光滑简单闭曲线$C:r=r(s),s\in[0,l]$，围成单连通区域D，其上的*Darbour*标架$\{r:e_1,e_2,n\}$。沿曲面平行的单位切向量场$V(s)$，记$V(s)$与$e_1(s)$夹角$\beta(s)$，有$\beta(l)-\beta(0)=\iint_D K\mathrm{d}V$.

证明. 利用$V=\cos\beta e_1+\sin\beta e_2$直接代入计算得$\iint_D K\mathrm{d}V=\int_0^l\beta_s\mathrm{d}s$。 □

***角度函数**

定理 4.11. $C:r=r(s),s\in I$为弧长参数正则曲线，V,W为沿其的处处非零光滑切向量场，则存在光滑函数$\varphi(s),s\in I$满足$\frac{W}{|W|}=\cos\varphi\frac{V}{|V|}+\sin\varphi J\big(\frac{V}{|V|}\big)$，其中$n$为曲面法向量，$J:S^1\subset T_pM\to S^1\subset T_pM,J(V)=n\wedge v$，于是$\{V,J(V),n\}$构成正交活动标架，这时$\varphi$称$V$到$W$的有向角。

证明. 不妨设两切向量场已被单位化，则存在$W=fV+gJ(V)$，f,g从内积得到，光滑，且由单位知$f^2+g^2=1$。在一点s_0处，可取到$\varphi(s_0)\in[0,2\pi)$，$f(s_0)=\cos s_0,g(s_0),\sin s_0$。由此构造$\varphi:I\to\mathbb{R},\varphi(s)=\varphi(s_0)+\int_{s_0}^s(fg'-f'g)\mathrm{d}s$
计算可知$L(s)=(f-\cos\varphi)^2+(g-\sin\varphi)^2$的导数为零(需要利用$ff'=gg'$)，从而得证。 □

*角差计算中存在**定向**问题

平面曲线
对光滑简单闭曲线，此时高斯曲率为0，有$2\pi=\oint_{\partial D}k_g\mathrm{d}s$，而利用定义可发现$k_g$恰为平面曲线在定向下的**带符号曲率**。于是对平面光滑简单闭曲线$r=r(s),s\in[0,l]$，且$0,l$处各阶导函数(包含0)相等。记κ为带符号曲率，则$2\pi=\oint_C\kappa(s)\mathrm{d}s$，此处积分定向选取与曲线定向一致。

定义 4.12. 旋转指数 *Rotation Index*
定义$i = \frac{1}{2\pi}\int_0^l \kappa(s)\mathrm{d}s$为闭曲线的旋转指数。

性质；考虑$r_s = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$，$\theta$取$e_1$到$r_s$的有向角，则

$$\int_0^l \kappa(s)\mathrm{d}s = \int_0^l \langle r_{ss}, J(r_s)\rangle \,\mathrm{d}s = \int_0^l \theta_s \mathrm{d}s = \theta(l) - \theta(0)$$

§4.4 整体Gauss-Bonnet公式

全曲率
*定义为高斯曲率在整个曲面上的积分，计算可知球面积分结果为4π，环面积分结果为0[同一条线上反向算两次]。

练习. 证明旋转面上两条纬线间的全曲率为$2\pi(\sin\varphi(a) - \sin\varphi(b))$，其中$a, b$为纬线上$u$的取值，$\varphi$为这点处沿母线切向量和$(0,1)$夹的有向角。

定义 4.13. E^3整体曲面
E^3的一个子集M称为E^3中的光滑曲面，若对子集中任何点，存在E^3中邻域$\mathcal{V}$与一个映射$r: U \subset E^2 \to \mathcal{V} \cap M$，其中$U$为开集，$r$是一个可逆的正则参数化。

*也可定义为一族正则曲面片，且两个正则曲面片交的部分有光滑的正则参数变换
*球面可由去掉上顶点与去掉下顶点的两个曲面片覆盖。

定义 4.14. 可定向曲面
若$M = \bigcup_\alpha M_\alpha$，使得每个正则曲面片上可选取一个单位法向量$n_\alpha$，使得任何两个曲面片的交处$n_\alpha = n_\beta$，则称其可定向，否则不可定向。

*球面、柱面、环面可定向，莫比乌斯带不可定向。
性质：光滑曲面M可定向等价于M上存在**处处非零**二形式。

证明. 由定义可知可定向⇔存在整体的光滑单位法向量场n，即对每点p有$n(p)$在一点处为曲面法向，此外，二形式在一点处为0⇔此点任意一对切向量映射到0，
左推右：对法向量场u，定义二形式μ，一点$p \in M$处$\mu_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$，$\mu_p(v, w) = (n(p), v, w)$，可验证其为光滑二形式，取$v, w$线性无关即有一点处非零。
右推左：对处处非零二形式μ，定义向量场n，一点$p \in M$处找线性无关切向量v, w，$n(p) = \frac{v \wedge w}{\mu(v,w)}$。若有另一对线性无关切向量$v', w'$，利用双线性反对称计算可知$n$不改变，从而$n$为光滑法向量场。 □

定义 4.15. 紧致曲面
当曲面M是有界闭集时称为紧致曲面。

*其存在有限子覆盖，从而可分取有限个正则曲面片拼成
*类似平面**Jordan曲线定理**可以说明任何紧致曲面把空间分为了内部和外部，从而可定向。

曲面的三角剖分
*称曲面上的三边形围成的三角形区域为二维的面，其边称为一维的面，顶点称为零维的面。

定义 4.16. 曲面的三角剖分
M上的一族三角形区域T_α，满足并集为整个曲面、任意两个交集若非空则为各自的零维或一维的面，且包含每点的三角形个数有限。

性质：紧致曲面上总存在二维面数有限的三角剖分(拓扑中证明)。
*记不同的二维面、一维面、零维面个数为F, E, V。考虑对三角形的进一步划分可感受曲面三角剖分的$V-E+F$为定值(事实上其为拓扑不变量)，称为**欧拉示性数**，记作$\chi(M)$。

定理 4.17. *整体Gauss-Bonnet定理*
设M是E^3中紧致光滑曲面，则有
$$\iint_M K\mathrm{d}V = 2\pi\chi(M)$$

证明. 取M的一个三角剖分，设每个T_i上的内角为$\angle A_i, \angle B_i, \angle C_i$，对每片利用局部的Gauss-Bonnet公式，由于整体可定向可以发现每条边k_g项被反向积分两次，于是被抵消。最终得到$2\pi F = \iint_M K\mathrm{d}V + 3\pi F - \sum_i(\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i)$，所有面上所有角加和即$2\pi V$，又由于$3F = 2E$可得结果。 □

*于是任何等距变换全曲率不变
*事实上对任何紧致可定向光滑曲面都对，未必需要嵌入E^3
*拓扑结论：这样的曲面的拓扑可以由**亏格**个数g确定，欧拉示性数为$2-2g$。反过来，这个定理代表了几何量可以确定拓扑。

*应用：**处处非零切向量场**
对紧致曲面，若存在这样的V，可单位化出整体的e_1，再结合整体n，有整体的正交活动标架。于是利用正交活动标架有全曲率为$\iint_M -\omega_1^2$，而利用Stokes公式，由于边界为空，全曲率必须为0，于是M同胚于环面。

五　几个重要定理

(见讲义28-33)