第 6 章 De Rham 理论

本章利用微分形式的分析手段研究流形的拓扑性质. 我们知道, 同调群是代数拓扑中用以刻画空间拓扑性质的重要拓扑不变量. 在代数拓扑中研究同调群的主要手段是"对空间进行剖分"以及"求边缘". 另一方面,"在流形的区域上对最高阶微分形式进行积分"这一操作事实上给出了空间区域跟微分形式之间的一种对偶关系, 而根据 Stokes 公式,"对空间区域求边缘"的运算跟"对微分形式求外微分"的运算是对偶的. 于是在光滑流形上, 可以不必通过对空间区域求边缘的几何/组合方式研究同调群, 而是通过对微分形式求外微分的分析方式研究其对偶即上同调群.

6.1 de Rham 上同调群

6.1.1 de Rham 上同调群

¶ 闭微分形式和恰当微分形式

正如在同调论中"一个区域是否具有非空边缘"以及"一个区域是否是另一个区域的边缘"是研究同调群时的基本出发点一样, 对于由微分形式定义的 de Rham 上同调群,"一个微分形式是否具有非零外微分"以及"一个微分形式是否是另一个微分形式的外微分"也是最基本的出发点:

定义 6.1.1. (闭与恰当形式)

设 M 是光滑流形, $\omega \in \Omega^k(M)$ 是 M 上的 k 次光滑微分形式.

(1) 若 $d\omega = 0$, 则称 ω 是 **闭微分形式**.

(2) 若存在 $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ 使得 $\omega = d\eta$, 则称 ω 是 **恰当微分形式**. ♣

M 上全体 k 次闭微分形式记为 $Z^k(M)$, 全体 k 次恰当微分形式记为 $B^k(M)$.

注 6.1.2. 设 $\dim M = m$. 则根据定义,

- 当 $k > m$ 时 $B^k(M) = Z^k(M) = \{0\}$.
- 当 $k = 0$ 时 $B^0(M) = \{0\}$, 而

$$Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid df = 0\} \simeq \mathbb{R}^K.$$

  其中 K 是 M 的连通分支的数量.
- 当 $k = m$ 时 $Z^m(M) = \Omega^m(M)$.

例 6.1.3. 考虑 $M = \mathbb{R}$. 则显然

$$B^0(\mathbb{R}) = \{0\}, \qquad Z^0(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \quad \text{以及} \qquad \Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}).$$

由于对 $\mathbb{R}$ 上的任意 1 形式 $g(t)dt$, 有

$$\omega = g(t)dt \Longleftrightarrow \omega = dG, \text{ 其中} G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau.$$

所以 $\Omega^1(\mathbb{R}) = B^1(\mathbb{R}) = Z^1(\mathbb{R})$.

¶ de Rham 上同调群

根据定义，

$$Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)),$$
$$B^k(M) = \operatorname{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)).$$

因为对于任意 k 和任意 $\omega \in \Omega^k(M)$，$d^2\omega = d(d\omega) = 0$，所以作为向量空间 (以及作为加法群)，有以下包含关系

$$B^k(M) \subset Z^k(M) \subset \Omega^k(M).$$

定义 6.1.4. (de Rham 上同调群)

定义 M 的 k 阶 **de Rham 上同调群**为商空间

$$H^k_{dR}(M) := Z^k(M)/B^k(M),$$

并称等价类 $[\omega]$ 为 $\omega \in Z^k(M)$ 所在的 **de Rham 上同调类**. ♣

例 6.1.5. 对于 $M = \mathbb{R}$，由例6.1.3易见

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ \{0\}, & k > 0 \end{cases}$$

注 6.1.6. 设 $\dim M = m$，且有 K 个连通分支. 根据注6.1.2,

$$H^k_{dR}(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}^K, & k = 0, \\ \{0\}, & k > m \end{cases}$$

特别地，$\dim H^0_{dR}(\mathbb{Z}) = \infty$.

虽然 $H^k_{dR}(M)$ 作为线性空间确实可能是无穷维的，本章后面将证明，对于许多光滑流形 (包括所有紧流形) 而言，所有 de Rham 上同调群都是有限维线性空间.

定义 6.1.7. (Betti 数与 Euler 示性数)

如果 $\dim H^k_{dR}(M) < \infty$ 对所有 k 成立，则称

$$b_k(M) = \dim H^k_{dR}(M)$$

为 M 的 k 阶 **Betti 数**，称

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k b_k(M)$$

为 M 的 **Euler 示性数**. ♣

注 6.1.8. 一般地，若一列线性空间 V_i 以及线性映射 $L_i : V_i \to V_{i+1}$ 满足 "对于任意 i 均有 $L_i \circ L_{i-1} = 0$"，则称 (有限或无限) 序列

$$\cdots \xrightarrow{L_{k-2}} V_{k-1} \xrightarrow{L_{k-1}} V_k \xrightarrow{L_k} V_{k+1} \xrightarrow{L_{k+1}} \cdots$$

为上链复形并定义相应的上同调群(若映射方向相反，则称为链复形并定义同调群). 特别地，

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \xrightarrow{d} 0.$$

是一个上链复形，被称为 **de Rham 上链复形**.

¶ 例子：S^1 的 de Rham 上同调群

下面计算 S^1 的 de Rham 上同调群 $H^k_{dR}(S^1)$.

根据注6.1.6，$H^0_{dR}(S^1) \simeq \mathbb{R}$，且 $k \geq 2$ 时 $H^k_{dR}(S^1) = 0$，所以只需计算 $H^1_{dR}(S^1)$. 注意到在 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上, 虽然 "角度" 变量 θ 不是一个整体定义的光滑函数, 但由 d 在 $\mathbb{R}$ 上的平移不变性可知微分形式 $d\theta$ 是 S^1 上整体定义的处处非零的 1 次微分形式 (因此 S^1 上的 1 次微分形式 $d\theta$ 是闭形式但不是恰当形式. 此外，$d\theta$ 是 S^1 上整体定义的光滑向量场 ∂_θ 的对偶). 故

$$\begin{aligned} Z^1(S^1) = \Omega^1(S^1) &= \{f d\theta \mid f \in C^\infty(S^1)\} \\ &\simeq \{f d\theta \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}), f\text{是周期为}2\pi\text{的周期函数}\}. \end{aligned}$$

另一方面，根据微积分基本定理，

$$\begin{aligned} &\omega \text{ 是 1 次恰当微分形式} \\ \Longleftrightarrow &\omega = df, \text{其中 } f \text{ 是周期函数，周期为 } 2\pi \\ \Longleftrightarrow &\omega = g(\theta)d\theta, \text{其中 } g \text{ 是周期为 } 2\pi \text{ 的周期函数, 且 } \int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = 0. \end{aligned}$$

所以

$$B^1(S^1) = \{g d\theta \mid g \in C^\infty(\mathbb{R}), g \text{ 是周期为 } 2\pi \text{ 的周期函数, 且 } \int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta = 0\}.$$

考虑线性映射

$$\varphi : H^1_{dR}(S^1) \to \mathbb{R}, \qquad [f d\theta] \mapsto \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta.$$

下证它是线性同构，从而 $H^1_{dR}(S^1) \simeq \mathbb{R}$:

- φ 是良定的:
$$[f_1 d\theta] = [f d\theta] \Longrightarrow f_1 d\theta - f d\theta \in B^1(S^1) \Longrightarrow \int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta.$$
- φ 是单射:
$$[f_1 d\theta] \neq [f d\theta] \Longrightarrow f_1 d\theta - f d\theta \notin B^1(S^1) \Longrightarrow \int_0^{2\pi} f_1(\theta)d\theta \neq \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta.$$
- φ 是满射: 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 令 $f(\theta) := \frac{c}{2\pi}$, 则 $f d\theta \in Z^1(S^1)$，且
$$\varphi([f d\theta]) = \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = c.$$

故 S^1 的所有 de Rham 上同调群为

$$H^k_{dR}(S^1) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, 1, \\ \{0\}, & k > 1. \end{cases}$$

特别地，$\chi(S^1) = 0$.

¶ de Rham 上同调的函子性

根据定义，对于任意光滑流形 M，其 k 阶 de Rham 上同调群 $H^k_{dR}(M)$ 是一个群 (事实上是线性空间). 事实上，H^k_{dR} 可以被视为是 "所有光滑流形的范畴" 到 "所有群 (或所有线性空间) 的范畴" 的一个反变函子 (见第一章习题). 为此，对于每个光滑映射 (光滑流形范

畴中的态射)$\varphi \in C^\infty(M,N)$，需要给出相应 de Rham 上同调群之间的群同态 (或线性映射)，其定义方式非常自然，即借用微分形式的拉回运算：

定义 6.1.9. (de Rham 上同调群的拉回)

对于任意 $\varphi \in C^\infty(M,N)$，称

$$\varphi^*: H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M), \quad \varphi^*([\eta]) := [\varphi^*\eta]$$

为由 φ 诱导的 de Rham 上同调群的**拉回映射**. ♣

当然，首先需要验证上述定义的合理性：由 $d\varphi^* = \varphi^* d$ 可知

$$\varphi^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M) \quad 且 \quad \varphi^*(B^k(N)) \subset B^k(M).$$

于是

- 若 η 是 N 上的闭微分形式，则 $\varphi^*\eta$ 是 M 上的闭微分形式，
- 若 $[\eta_1] = [\eta_2]$，则 $[\varphi^*\eta_1] = [\varphi^*\eta_2]$，

故上述 φ^* 的定义不依赖于上同调类 $[\eta]$ 中代表元的选取，从而是良定的.

显然拉回映射 φ^* 是线性映射 (从而是加法群同态)，且容易验证对应关系 $\varphi \rightsquigarrow \varphi^*$ 满足 (反变)函子性，即

(a) $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$.

(b) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

作为直接推论，立刻得到 de Rham 上同调群在微分同胚下的不变性：

推论 6.1.10. (微分同胚不变性)

如果 $\varphi: M \to N$ 是微分同胚，则对任意 k

$$\varphi^*: H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M)$$

是线性同构. 特别地，

$$b_k(N) = b_k(M), \forall k, \quad 以及 \quad \chi(N) = \chi(M).$$

♡

¶ 上同调类的乘积

还可以将微分形式的乘积 (即楔积) 改造为上同调类的运算. 很自然地定义 $[\omega]$ 和 $[\eta]$ 的乘积为 $[\omega \wedge \eta]$，为此需要验证良定性：

- 首先设 $\omega \in Z^k(M)$，$\eta \in Z^l(M)$，则

  $$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta = 0,$$

  即 $\omega \wedge \eta \in Z^{k+l}(M)$.
- 其次，对于任意 $\xi_1 \in \Omega^{k-1}(M)$ 以及 $\xi_2 \in \Omega^{l-1}(M)$，

  $$(\omega + d\xi_1)\wedge(\eta + d\xi_2) = \omega\wedge\eta + d\left[(-1)^k \omega\wedge\xi_2 + (-1)^{k-1}\xi_1\wedge\eta + (-1)^{k-1}\xi_1\wedge d\xi_2\right].$$

  换言之，$[\omega \wedge \eta]$ 与 $[\omega]$ 中的 ω 以及 $[\eta]$ 中的 η 的选取无关.

所以可以定义

定义 6.1.11. (上同调类的上积)

定义上同调类 $[\omega] \in H^k_{dR}(M)$ 和 $[\eta] \in H^l_{dR}(M)$ 的**上积**为

$$[\omega] \cup [\eta] := [\omega \wedge \eta] \in H^{k+l}_{dR}(M).$$

♣

注 6.1.12. 上积给出了

$$H^*_{dR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{m} H^k_{dR}(M)$$

上的一个分次环结构，因而 $(H^*_{dR}(M), +, \cup)$ 被称为 **de Rham 上同调环**. 对于任何光滑映射 $\varphi : M \to N$，由 $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$ 可知拉回映射 $\varphi^* : H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$ 实际上是环同态，且满足同样的函子性. 换而言之，H^*_{dR} 是从光滑流形范畴到分次环范畴的一个反变函子. 特别地，如果 φ 是微分同胚，则 $\varphi^* : H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$ 是环同构.

6.1.2 同伦不变性

¶ de Rham 上同调的同伦不变性

接下来证明一个更强的结果：如果两个流形是同伦等价的，那么它们有相同的 de Rham 上同调群. 首先回忆同伦等价的概念：

> 对于拓扑空间 M 和 N，如果存在连续映射 $\varphi : M \to N$ 和 $\psi : N \to M$ 使得 $\varphi \circ \psi$ 与 Id_N 同伦，$\psi \circ \varphi$ 与 Id_M 同伦，则称 M 和 N **同伦等价**.

同伦等价是比同胚或微分同胚弱得多的等价关系，同伦等价的空间可以具有不同的维数，例如 S^{m-1} 同伦等价于 $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$，而 $\mathbb{R}^m$ 中任意星形区域同伦等价于单点集 $\{x_0\}$.

定理 6.1.13. (de Rham 上同调群的同伦不变性)

设 M, N 为光滑流形. 如果 M 和 N 同伦等价，则

$$H^k_{dR}(M) \simeq H^k_{dR}(N), \qquad \forall k.$$

♡

显然，同伦不变性蕴含了

推论 6.1.14. (de Rham 上同调群的拓扑不变性)

如果 M 和 N 同胚，则 $H^k_{dR}(M) \simeq H^k_{dR}(N)$ 对于所有 k 成立.

♡

注 6.1.15. 虽然在定义 $H^k_{dR}(M)$ 时需要使用 M 上的光滑结构 (例如定义算子 d 和以及空间 $\Omega^k(M)$ 等)，但是由拓扑不变性可知 $H^k_{dR}(M)$ 只依赖于 M 的拓扑结构，而与其光滑结构无关！事实上，对于任意拓扑空间 X，可以定义它的**奇异上同调群** $H^k_{sing}(X, \mathbb{R})$，它只依赖于 X 的拓扑 (事实上只依赖于 X 的同伦类). 著名的 de Rham 定理断言

定理 6.1.16. (de Rham 定理)

$H^k_{dR}(M) = H^k_{sing}(M, \mathbb{R})$, $\forall k$.

♡

该定理的证明参见**??**，第 5.5 节.

同伦不变性的另一个直接推论是

推论 6.1.17. (Poincaré 引理)

如果 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个星形区域，那么对于任意 $k \geq 1$，$H^k_{dR}(U) = 0$. 特别地,

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^m) = 0, \qquad \forall k \geq 1.$$

由于流形中的任意点都有一个同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中星形区域的邻域，因此任意闭微分形式都是局部恰当的:

推论 6.1.18. (闭形式局部都是正合的)

设 $k \geq 1$. 那么对于任意 k 次闭微分形式 $\omega \in Z^k(M)$ 和任意 $p \in M$，都存在 p 的邻域 U 和 $(k-1)$ 次微分形式 $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$，使得在 U 上有

$$\omega = d\eta.$$

¶ de Rham 上同调的同伦不变性：证明

同伦不变性是如下定理的推论:

定理 6.1.19. (函子同伦不变性)

设 $f, g \in C^\infty(M, N)$ 是同伦的，则

$$f^* = g^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M).$$

【由定理 6.1.19推导定理 6.1.13】 设 $\varphi : M \to N$ 和 $\psi : N \to M$ 是连续映射且满足 $\varphi \circ \psi \sim \mathrm{Id}_N$ 和 $\psi \circ \varphi \sim \mathrm{Id}_M$. 根据定理2.6.12，光滑流形之间的任意连续映射都与某个光滑映射同伦，故存在 $\varphi_1 \in C^\infty(M, N)$ 和 $\psi_1 \in C^\infty(N, M)$ 使得 $\varphi_1 \sim \varphi$ 且 $\psi_1 \sim \psi$. 因此 $\varphi_1 \circ \psi_1$ 和 $\psi_1 \circ \varphi_1$ 都是光滑映射，而且 $\varphi_1 \circ \psi_1 \sim \mathrm{Id}_N$, $\psi_1 \circ \varphi_1 \sim \mathrm{Id}_M$. 于是利用函子性并应用定理 6.1.19可得

$$\varphi_1^* \circ \psi_1^* = \mathrm{Id} : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(M)$$
$$\psi_1^* \circ \varphi_1^* = \mathrm{Id} : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(N).$$

所以 φ^* 和 ψ^* 是线性同构. □

最后构造如下图所示的上链同伦证明定理 6.1.19:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{k-1}(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "g^*"'] \arrow[d, shift left, "f^*"] \arrow[dl, dashed, red, "h"'] & \Omega^k(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "g^*"'] \arrow[d, shift left, "f^*"] \arrow[dl, dashed, red, "h"'] & \Omega^{k+1}(N) \arrow[r, "d"] \arrow[d, shift right, "g^*"'] \arrow[d, shift left, "f^*"] \arrow[dl, dashed, red, "h"'] & \cdots \arrow[dl, dashed, red, "h"'] \\
\cdots \arrow[r, "d"] & \Omega^{k-1}(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^k(M) \arrow[r, "d"] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "d"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定义 6.1.20. (上链同伦)

设 $f, g \in C^\infty(M, N)$ 是同伦的. 若是一列映射 $h_k : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$ 满足

$$g^* - f^* = d_M h_k + h_{k+1} d_N.$$

则称映射列 $h = (h_k)$ 是 f^* 和 g^* 之间的一个**上链同伦**.

【假设上链同伦存在，证明定理 6.1.19】 对任意 $[\omega] \in H^k_{dR}(N)$，有

$$g^*\omega - f^*\omega = (dh + hd)\omega = d(h\omega) \in B^k(M).$$

因此 $f^*([\omega]) = [f^*\omega] = [g^*\omega] = g^*([\omega])$. □

¶ 上链同伦的存在性

最后构造上链同伦，工具是使用特定向量场生成的流. 先证明一个引理：

引理 6.1.21

设 X 为 M 上的完备向量场，ϕ_t 为 X 生成的流. 则存在线性算子 $Q_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ 使得对任意 $\omega \in \Omega^k(M)$ 有

$$\phi_1^*\omega - \omega = dQ_k(\omega) + Q_{k+1}(d\omega).$$

♢

证明 首先，直接计算可得

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_{t+s}^*\omega = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_s^*\phi_t^*\omega = \mathcal{L}_X(\phi_t^*\omega) = d\iota_X(\phi_t^*\omega) + \iota_X d(\phi_t^*\omega),$$

于是对于 $\omega \in \Omega^k(M)$，若令 $Q_k(\omega) = \int_0^1 \iota_X(\phi_t^*\omega)dt$，则 $Q_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$，且

$$\phi_1^*\omega - \omega = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega\right) dt = dQ_k(\omega) + Q_{k+1}(d\omega).$$

□

利用该引理完成 de Rham 上同调群同伦不变性证明的最后一步：

【上链同伦 $h_k : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$ 的构造】 设 $W = M \times \mathbb{R}$, 则 $X = \frac{\partial}{\partial t}$ 是 W 上的完备向量场，且它生成的流是

$$\phi_t(p, a) = (p, a + t).$$

由引理 6.1.21, 存在线性算子 $Q_k : \Omega^k(W) \to \Omega^{k-1}(W)$ 使得

$$\phi_1^*\omega - \omega = dQ_k(\omega) + Q_{k+1}(d\omega).$$

根据定理2.6.14，任意两个同伦的光滑映射都是光滑同伦的. 设 $F : W \to N$ 是 f 和 g 之间的光滑同伦, 并设 $\iota : M \hookrightarrow W$ 是包含映射 $\iota(p) = (p, 0)$, 则

$$f = F \circ \iota \quad \text{且} \quad g = F \circ \phi_1 \circ \iota,$$

由此对任意 $\omega \in \Omega^k(N)$ 有

$$g^*\omega - f^*\omega = \iota^*\phi_1^*F^*\omega - \iota^*F^*\omega = \iota^*(dQ_k + Q_{k+1}d)F^*\omega = (d\iota^*Q_kF^* + \iota^*Q_{k+1}F^*d)\omega.$$

所以如果记 $h_k = \iota^*Q_kF^*$, 则 $h_k : \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$ 满足

$$g^*\omega - f^*\omega = (dh_k + h_{k+1}d)\omega,$$

从而这些 h_k 就是所需的上链同伦. □