Prof. Jan Kierfeld
jan.kierfeld@tu-dortmund.de

Sommersemester 2016
Technische Universität Dortmund

Computational Physics
Übungsblatt 3

Ausgabe: 29.04.2016

Abgabe: 06.05.2016

Sie sollen wahlweise Aufgabe 3 oder Aufgabe 4 bearbeiten.

Geändertes v_0 in Aufgabe 3. f)

Aufgabe 1. Runge-Kutta 4. Ordnung (10 P.)

Schreiben Sie ein Programm, das die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen in einem Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}\,, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung mit fester Schrittweite löst. Das Programm sollte einen Parameter enthalten, mit dem Sie ein beliebiges Kraftfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ angeben können.

Schreiben Sie das Programm zumindest für drei Raumdimensionen ($\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^3$), Sie können es aber auch allgemein für D Raumdimensionen schreiben.

Aufgabe 2. Harmonischer Oszillator (10 P.)

Wir testen das Programm aus Aufgabe 1 an einem einfachen Problem, dem harmonischen Oszillator mit

$$\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{r}\,. \tag{3}$$

a) Verifizieren Sie für Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}(0)$ beliebig und $\boldsymbol{v}(0) = 0$, dass Sie eine harmonische Schwingung erhalten. Was passiert für $\boldsymbol{v}(0) \neq 0$ und $\boldsymbol{v}(0) \nparallel \boldsymbol{r}(0)$?

b) Testen Sie, wie klein Sie die Schrittweite machen müssen, damit Ihr Oszillator bei mehreren Oszillationen immer wieder seine maximale Anfangsauslenkung erreicht. Testen Sie außerdem die Energieerhaltung.

Aufgabe 3. Fußball (10 P.)

Wir betrachten eine Bewegung eines Fußballs im dreidimensionalen Raum. Die im Flug auf den Ball wirkenden Kräfte sind

$$\boldsymbol{F}_{\text{Luftreibung}} = -\frac{1}{2}c_w \cdot \varrho \cdot A \cdot \boldsymbol{v}^2\,\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{F}_{\text{g}} = -m \cdot g \cdot \boldsymbol{e_z}. \tag{5}$$

Dabei sind für einen durchschnittlichen Fußball

$$
\begin{aligned}
c_w &= 0.2 && (6)\\
\text{Radius } R &= 11\,\mathrm{cm} \to \text{Querschnittsfläche } A = 0.038\,\mathrm{m}^2 && (7)\\
\text{Masse } m &= 0.43\,\mathrm{kg} && (8)\\
\text{Dichte der Luft } \varrho &= 1.3\,\mathrm{kg\,m^{-3}} && (9)\\
\text{Gravitationskonstante } g &= 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}. && (10)
\end{aligned}
$$

a) Stellen Sie aus den auf den Ball wirkenden Kräften eine (nicht-lineare) Differentialgleichung für $\boldsymbol{r}(t)$ auf.

b) Der Ball wird vom Ort $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, R)$ aus im Winkel α mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\alpha)$ losgeschossen. (Koordinaten in einem rechtshändigen Koordinatensystem mit nach oben zeigender z-Achse) Plotten Sie die Flugweite des Balls für 1000 Werte für $\alpha \in (0°, 90°)$ und $v_0 = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

   Lösen Sie hierzu die in a) aufgestellte Differentialgleichung mithilfe des Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung.

c) Verwenden Sie den Abschusswinkel α für den weitesten Schuss aus Aufgabenteil b) und plotten Sie die Bahnkurve $z(x)$ des Balles, wenn zusätzlich Wind $\boldsymbol{v}_{\text{Wind}} = (v_{\text{Wind}}, 0, 0)\mathrm{m\,s^{-1}}$ mit verschiedenen $v_{\text{Wind}} = -10, -5, 0, 5, 10$ weht. *Hinweis*: Überlegen Sie sich, welchen Einfluss der Wind auf die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in Gleichung (4) hat.

d) Nun versucht ein Spieler das 60 m entfernte gegnerische Tor zu treffen. Bestimmen Sie die Winkelbereiche α in denen der Ball hinter der Torlinie landet, wenn der Spieler mit $v_0 = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ schießt. (Höhe der Latte über dem Boden: 2.44 m) Bestimmen Sie die Bereichsgrenzen auf 0.01° genau. Verwenden Sie dafür z.B. das Verfahren der Intervallhalbierung.

e) Rotiert der Ball mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse $\boldsymbol{\omega}$ ist eine korrektere Beschreibung der Flugbahn nur unter Berücksichtigung der *Magnus-Kraft* möglich:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{Magnus}} &= \gamma \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} && (11)\\
\gamma &= 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}. && (12)
\end{aligned}
$$

   Zusätzlich verlangsamt sich die Drehbewegung durch Reibung mit der Luft:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\omega}} &= -\eta\boldsymbol{\omega} && (13)\\
\eta &= 0.01\,\mathrm{s^{-1}}. && (14)
\end{aligned}
$$

   Erweitern Sie wenn nötig Ihr Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 1, sodass dieser neben den 3 Raumkoordinaten zusätzlich 3 Drehwinkel mit entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}$ nach der Differentialgleichung (13) berechnen kann.

f) Nun trainiert der Spieler auf dem leeren Platz aus eine Ecke ein Tor zu schießen. Der Schuss habe folgende Anfangsgeschwindigkeit und Drall:

$$
\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ \mathbf{16} \end{pmatrix} \mathrm{m\,s^{-1}}, \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \mathrm{s^{-1}} \tag{15}
$$

(siehe Abbildung 1). In welchem Bereich darf ω liegen, wenn der Schuss im 34 m entfernten, 7.32 m breiten, Tor hinter der Torlinie landen soll?

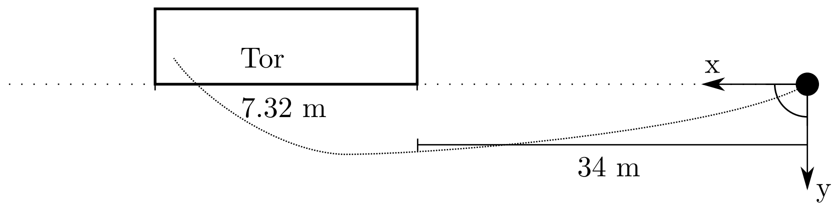

Abbildung 1: Der Torschuss.

Aufgabe 4. Kepler-Ellipsen (10 P.)

Das kompliziertere Problem, dass wir nun in drei Raumdimensionen behandeln wollen, ist das Kepler-Problem mit $V(r) = -mG/r$ oder

$$\frac{1}{m}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -G\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{16}$$

mit einer Konstanten G, wobei Sie erst einmal $G = 1$ setzen.

a) Berechnen Sie numerisch die Bahn des Teilchens für $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 0)$. Finden Sie eine Anfangsgeschwindigkeit, so dass das Teilchen eine Ellipse beschreibt. Wie klein müssen Sie die Schrittweite wählen, damit sich die Ellipse auch wirklich schließt? Welches Problem bekommen Sie bei sehr kleinen Anfangsgeschwindigkeiten?

b) Überprüfen Sie numerisch Energieerhaltung und das zweite Keplersche Gesetz (Drehimpulserhaltung).

   Überprüfen Sie auch das dritte Keplersche Gesetz.

c) Testen Sie, ob der Lenz-Runge-Vektor

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{Gm}\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{17}$$

   in Ihrer Numerik erhalten ist. Auf welchen Punkt der Bahn zeigt der Lenz-Runge-Vektor?

d) Testen Sie die Fehler und Stabilität Ihrer Integration, indem Sie N Runge-Kutta-Schritte machen, dann die Zeit umkehren, d.h. den Geschwindigkeitsvektor des Teilchens umkehren $\boldsymbol{v}_u(t=0) \equiv \boldsymbol{v}(t=Nh)$ und wieder für N Runge-Kutta-Schritte integrieren. Überprüfen Sie, ob Sie wieder am Ausgangspunkt $\boldsymbol{r}_u(t=Nh) = \boldsymbol{r}(t=0)$ mit umgekehrter Ausgangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_u(t=Nh) = \boldsymbol{v}(t=0)$ landen. Versuchen Sie, N möglichst groß zu wählen.

e) Was passiert mit Ihrer Ellipsenbahn, wenn Sie das Potential abändern zu $V(r) = -mG/r^\alpha$, wobei $\alpha \neq 1$? Untersuchen Sie die beiden Fälle $\alpha = 0.9$ und $\alpha = 1.1$. Ist der Lenz-Runge-Vektor immer noch erhalten?