Prof. Jan Kierfeld
jan.kierfeld@tu-dortmund.de

Sommersemester 2016
Technische Universität Dortmund

Computational Physics
Übungsblatt 8

Ausgabe: 10.06.2016 Abgabe: 17.06.2016

Aufgabe 1. Bifurkationsdiagramme (10 P.)

Berechnen und plotten Sie die Bifurkationsdiagramme für die Abbildungen

a) logistische Abbildung ($x_n \in [0,1]$)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)\,, \tag{1}$$

b) kubische Abbildung ($x_n \in [-\sqrt{1+r}, \sqrt{1+r}]$)

$$x_{n+1} = r x_n - x_n^3\,, \tag{2}$$

durch numerische Iteration. Vergrößern Sie dafür den Parameter r in kleinen Schritten in einem Bereich $0 < r < r_{\text{max}}$. Was passiert, wenn Sie r zu groß wählen und welche r_{max} ergeben sich? Iterieren Sie dann für jedes r lange genug, bis sich ein Fixpunkt oder ein Orbit einstellt. Jeder Punkt des Orbits ergibt einen Punkt im Bifurkationsdiagramm.

Abgabe: Plots der Bifurkationsdiagramme

Aufgabe 2. Feigenbaum-Konstante (10 P.)

Die Fixpunkt-Gleichung für die 2^n-fach iterierte logistische Abbildung $f(r,x) = rx(1-x)$,

$$x = f^{2^n}(r,x)\,, \tag{3}$$

gibt für $r < r_\infty = 3.5699\ldots$ die Werte eines Orbits der Länge 2^n im Periodenverdopplungsszenario nach Feigenbaum.

Bestimmen Sie für $n = 1,2,3$ numerisch die Werte $r = R_n < r_\infty$, für die superstabile Fixpunkte existieren. Diese Werte erfüllen die Gleichung

$$\frac{1}{2} = f^{2^n}\left(r, \frac{1}{2}\right). \tag{4}$$

a) Plotten Sie zunächst

$$g_n(r) \equiv 1/2 - f^{2^n}\left(r, \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

als Funktion von r für $n = 0,1,2,3$ im Bereich $0 < r < r_\infty$. Wird n um 1 vergrößert, kommt jeweils eine Nullstelle von $g_n(r)$ bei $r = R_n$ hinzu. Machen Sie die Schrittweite in Ihrem Plot so klein, dass Sie Schranken für die Nullstellen angeben können.

Abgabe: Plots von $g_n(r)$ in den jeweiligen Schranken

b) Bestimmen Sie numerisch mit Hilfe von Intervallhalbierung oder Regula falsi ausgehend von den Schranken aus a) die Nullstellen R_n von $g_n(r)$ für $n = 1, 2, 3$.

Abgabe: Werte R_1, R_2, R_3

c) Gewinnen Sie aus Ihren Ergebnissen eine erste Schätzung der Feigenbaum-Konstante

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{n-1} - R_{n-2}}{R_n - R_{n-1}} \tag{6}$$

Abgabe: Feigenbaum-Konstante

Freiwillige Zusatzaufgabe: (+5 P.)

d) Es kann auch ein Newton Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen von R_n von $g_n(r)$ aufgesetzt werden, dass hier schnell und genau arbeitet. Dazu braucht man eine separate Iteration für die Ableitung $g'_n(r)$ (Strich = Ableitung nach r). Zeigen Sie, dass die Iteration

$$y_{k+1} = ry_k(1 - y_k)\,, \quad y_0 = \frac{1}{2}\,, \tag{7}$$

$$y'_{k+1} = y_k(1 - y_k) + r(1 - 2y_k)y'_k\,, \quad y'_0 = 0 \tag{8}$$

auf

$$y_k = f^k\left(r, \frac{1}{2}\right)\,, \tag{9}$$

$$y'_k = \partial_r f^k\left(r, \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

führt. Daher gilt

$$g_n(r) = \frac{1}{2} - y_{2^n}\,, \tag{11}$$

$$g'_n(r) = -y'_{2^n}\,. \tag{12}$$

Damit können Sie dann das Newton-Verfahren realisieren, um zur Nullstelle R_n zu konvergieren:

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \frac{g_n(\rho_i)}{g'_n(\rho_i)} \tag{13}$$

und ρ_i konvergiert gegen R_n. Dazu brauchen Sie allerdings einen „guten“ Startwert. Hier können Sie benutzen, dass für $n \geq 2$

$$\delta_n = \frac{R_{n-1} - R_{n-2}}{R_n - R_{n-1}} \tag{14}$$

gegen die Feigenbaumkonstante konvergieren sollte. Damit kann man ausgehend von der Nullstelle R_n eine gute Approximation für R_{n+1} finden:

$$R_{n+1} \approx R_n + \frac{R_n - R_{n-1}}{\delta_n}\,, \tag{15}$$

die man als Startwert im Newtonverfahren für R_{n+1} verwenden kann. (Sie können $R_0 = 2$ und $R_1 = 1 + \sqrt{5}$ als bekannt voraussetzen und mit der Bestimmung von R_2 starten; benutzen Sie dabei $\delta_1 = 5$, um den Startwert zu generieren.) Mit diesem Startwert sollten zehn Iterationen im Newton-Verfahren in jedem Fall ausreichen.

Dieses Verfahren ist hochgenau und sollte bis $n \sim 10 - 15$ erfolgreich funktionieren.

Abgabe: Werte R_n und δ_n bis zu möglichst hohem n