Prof. Jan Kierfeld
jan.kierfeld@tu-dortmund.de

Sommersemester 2016
Technische Universität Dortmund

Computational Physics
Übungsblatt 2

Ausgabe: 22.04.2016 Abgabe: 29.04.2016

Aufgabe 1. Integrale (10 P.)

a) Berechnen Sie folgendes Hauptwertintegral numerisch:

$$I_1 = \mathcal{P} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{e}^t}{t} \, . \tag{1}$$

(Kontrolle: $I_1 \simeq 2.114\,501\,8$)

b) Berechnen Sie folgendes Integral numerisch mit einem relativen Fehler $\epsilon \leq 10^{-5}$:

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t \, \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \, . \tag{2}$$

(Kontrolle: $I_2 \simeq 1.772\,453\,85$)

Berechnen Sie zum Vergleich das Integral auch analytisch.

Aufgabe 2. Elektrostatik (15 P.)

Das elektrostatische Potential für zwei Ladungsverteilungen in einem Würfel der Kantenlänge $2a$ soll numerisch durch direkte dreidimensionale Integration berechnet werden.

a) Zuerst betrachten wir eine homogene Ladungsverteilung

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0, & |x| < a, |y| < a, |z| < a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

und berechnen das elektrostatische Potential auf der x-Achse:

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}y' \int \mathrm{d}z' \, \frac{\rho(x', y', z')}{\left[(x - x')^2 + y'^2 + z'^2\right]^{1/2}} \, . \tag{4}$$

Führen Sie eine geeignete Wahl der Einheiten für ϕ und x ein, um das numerisch zu berechnende Integral einheitenlos zu machen.

Führen Sie das dreidimensionale Integral zunächst für x-Werte $x/a = 0.1n$ mit $n = 11, 12, \dots, 80$ außerhalb des Würfels numerisch aus. Plotten Sie die entsprechenden Werte $\phi(x)$. Welche Asymptotik erwarten Sie für große x? (*Hinweis:* Multipolentwicklung) Überprüfen Sie Ihre Vermutung.

b) Versuchen Sie das Integral auch für $|x| < a$ innerhalb des Würfels (x-Werte $x/a = 0.1n$ mit $n = 0, 1, \ldots, 10$) numerisch auszuwerten. Könnte es Probleme geben?

c) Nun betrachten wir die Ladungsverteilung

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 \frac{x}{a}, & |x| < a, |y| < a, |z| < a \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \tag{5}$$

Überlegen Sie sich wieder, wie Sie das numerisch zu berechnenden Integral einheitenlos machen.

Führen Sie das dreidimensionale Integral dann außerhalb und innerhalb des Würfels numerisch aus, d.h. für x-Werte $x/a = 0.1n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots, 80$. Plotten Sie die entsprechenden Werte $\phi(x)$. Welche Asymptotik erwarten Sie nun für große x? Berechnen Sie das erste nicht-verschwindende Multipolmoment und überprüfen Sie das zu erwartende asymptotische Verhalten.