# 第五章　对称性和守恒定律

# 一、对称和破缺

- 对称性是人们在观察自然和认识自然过程中所产生的一种观念．在自然界千变万化的运动演化过程中，显现出各式各样的对称性.
- 太阳是一个球体，而球体在绕过中心的任意轴旋转某一角度后，其形状和位置都不显现任何可以察觉的变化．这种性质称为绕球心旋转对称性．没有人会说看到太阳横过来或倒过来了.
- 如果要想确切判断球体是否绕过中心的任意轴转了一个角度，就需要在球上添加某些记号，根据这些记号的位置变化来判断球是否作了转动.
- 实际上，这些记号的作用就是使球不再具有严格的旋转对称性，亦即在一定程度上破坏了旋转对称性．物理学上称这种情况为对称性的破缺

- 地球是圆的，即是球对称的，但当我们将中国的轮廓标出来时， 对称性就破缺了。
- 人体是左右对称的，当我们关注右手时，对称性就破缺了；另外， 如果仔细观察，每一个人的左右都并不完全对称，因此左右对称对于人体来说，只是一个近似的对称性。
- 自然界千变万化的运动演化，从一个侧面来说，就体现为显现出各式各样的对称性，同时又通过这些对称性的演化和破缺来反映出运动演化的特点.
- 日夜交替是人们最熟知的自然现象，24小时的昼夜循环，在时间上显现出具有周期性的平移对称．但是，我们无法根据日夜交替的特点来区分任何两天.
- 为了能够区分和判断它，就需要找到对称性破缺的表现.
- 人们在长期的生活中，发现昼夜的时间长短比例和夜间星群的分布都有相似的周期性变化，而且月亮每天的位置和形状也不相同，后来，逐渐有了年的概念，并产生了历法。

- 从对称性的角度来看，地球上的生活环境显现出以24小时为周期的时间平移对称性，但这个对称性又有微小的破缺，
- 它提供了不同的两天之间的区分依据，同时通过这个破缺又显现出年的周期对称性和农历月的周期对称性.
- 如果日的周期对称性严格的不破缺，那就不可能显现出年的周期对称性和农历月的周期对称性.
- 因此研究自然现象中显现的各种对称性，研究它们产生和破缺的演化规律，是人们认识自然的一个重要方面

# 二、对称性的分类

无论什么样的对称现象，都是与把两种不同的情况相比较分不开的．一个球具有绕球心的旋转对称性，这是把球在转动前和绕球心转某一角度后的情况进行比较而得出的结论

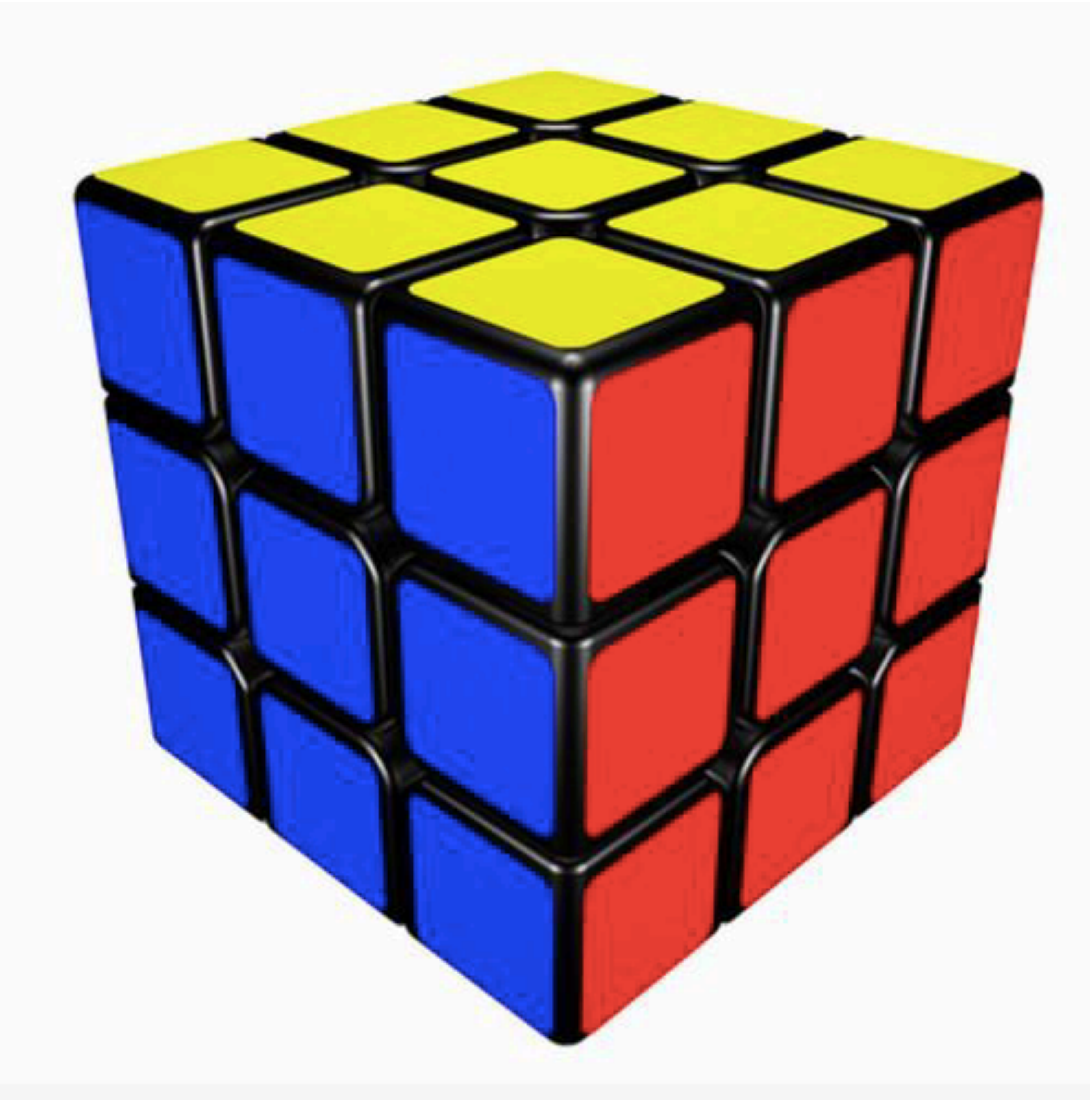
- 变换：将两种情况间通过确定的规则对应起来的关系，在数学上称为从一种情况到另一种情况的变换.

- 对称性：物理学中对称性的观念可以概括为，如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有该变换所对应的对称性。

既然每一种对称性都和某种特定的变换相联系，那么对称性的千差万别也就集中反映在与之相联系的各种变换上。因此可以根据变换所涉及的对象以及变换的性质来对对称性进行分类。

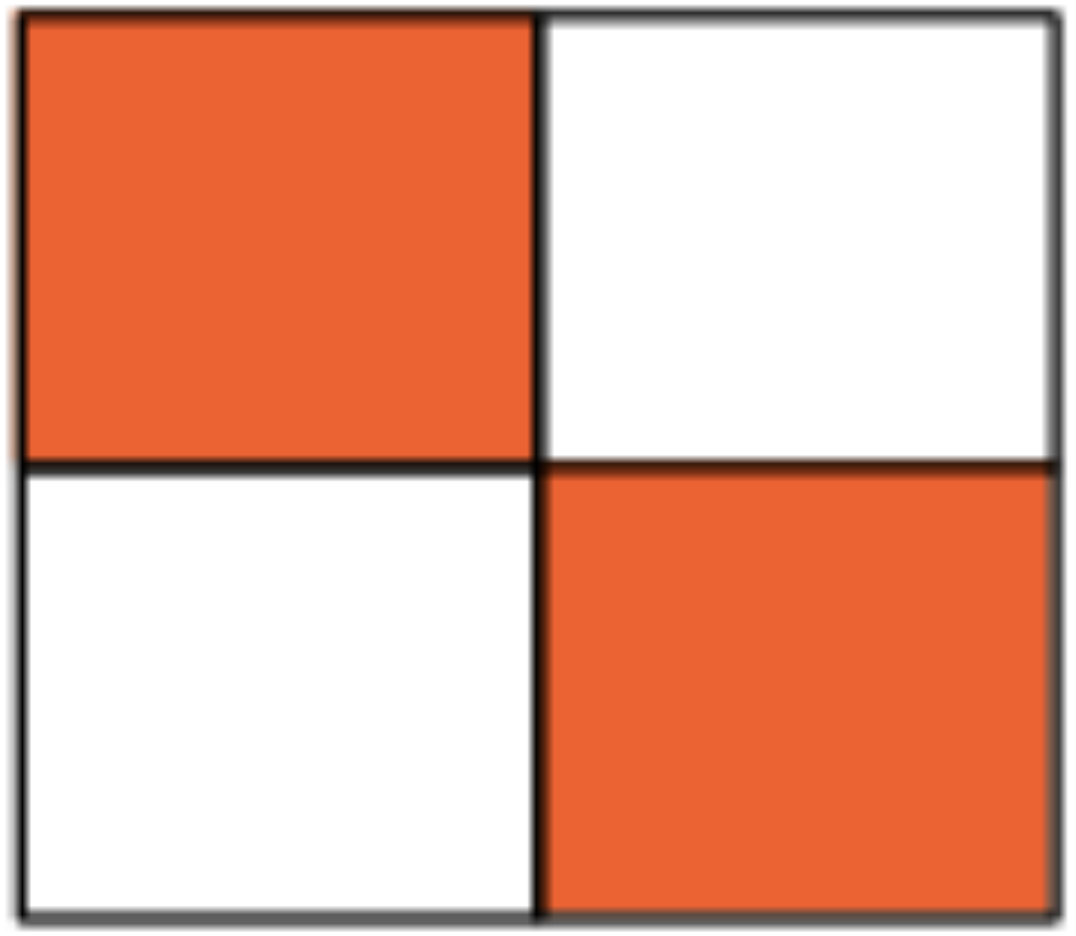
- 空间对称性：对空间性质进行变换所对应的对称性。
- 时间对称性：对时间性质进行变换所对应的对称性。
- 空间对称性和时间对称性是最基本、最常见的对称性，但并不是所有的对称性都能归入到这两类对称性之中。

# ：魔方的对称操作



- 连续 R、M’、L’ 再加上空间转动90度，这个操作可以将魔方变回原位。
- 其中操作 R 是空间变换吗？

# ：涂上颜色的方块



- 在平面上绕图形中心转180度角或绕过图形中心并过四边形的一
  180度，图形不变。
- 但正是由于有了颜色，图形又显现出新的对称性来：在平面上将图形绕中心转90度角，然后把红变成白，白变成红，在这样的复合变换下，原图形完全不变；
- 绕过图形中心并过四边形的一个边的中点的轴旋转180度．然后再把红色和白色互换．在这样的复合变换下，原图形也是完全不变的．
- 这些复合变换涉及的不仅是空间性质，还涉及到颜色．显然，颜色是物体的一种基本属性，原则上它与物体的空间性质是互相独立的，通过颜色体现的变换—不能简单地用某种空间变换来替代．

# 内部对称性

各种物体的性质及其运动的不同，不仅体现在对空间和时间的描述上，还体现在一些与空间和时间的描述相独立的其它性质上.

- 内部对称性：物理学中把通过与空间和时间相独立的各种物体的性质及其运动的不同对称性，称为内部对称性。

在宏观物理学的范围里，内部对称性常常具有很大的直观性，因此认识其存在并没有很大困难. 在微观范围里，内部对称性的直观性减少了，这并不表明内部对称性的重要性减少了；

事实上，随着物理学对微观世界的探索日益深入，认识到的内部对称性也愈来愈多.

# 三、 相加性守恒量和相乘性守恒量

从守恒量的数学表述来看，基本的守恒量可以区分为两大类：

- 相加性守恒量：一个复合体系的总守恒量是其各组成部分所贡献该守恒量的代数和，这类守恒量称为相加性守恒量；如能量、动量、角动量、电荷、同位旋、奇异数、粲数、底数、轻子数和重子数等。
- 相乘性守恒量：一个复合体系的总守恒量是其各组成部分该守恒量的乘积，这类守恒量称为相乘性守恒量，如P宇称、C宇称、G宇称，CP宇称都是相乘性守恒量。

有经典对应的守恒量都是相加性守恒量。

相乘性守恒量都是无经典对应的守恒量。

---逆定理不成立。

# 四. 严格守恒和近似守恒

既然守恒定律的表现形式为一个孤立系统某物理量的总量在运动过程中不随时间改变，那么守恒定律的成立与否就直接和孤立系统的运动规律有关，特别是与相互作用有关。从这个关系上来考察，又可以把守恒定律分为两类，从而守恒量也分为两类。

1. 如果一个守恒定律对各种相互作用都成立则称为严格守恒律；

2. 如果一个守恒定律对某些相互作用成立，但对另一些相互作用则不成立， 并且在运动过程中后者影响是次要的，则称为近似守恒定律(或部分守恒定律)。

- 能量、动量、角动量、电荷是有经典对应的相加性严格守恒量；
- 同位旋、奇异数是无经典对应的相加性近似守恒量；
- P宇称、C宇称、CP宇称是无经典对应的 相乘性近似守恒量.
- 重子数、轻子数是无经典对应的相加性严格守恒量

# 第二节 Noether定理

1 经典物理中的 Noether’s Theorem:

如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，相应存在一个守恒定律.

当人们熟悉了对称性的观念之后，便想要弄清对称性和自然规律的关系是甚么，如何通过已经观察到的对称性来探究未知的规律

对称性和守恒定律在经典力学中就有普遍的讨论。

物理系统的对称性，或者说在某种变换下的不变性，都可以通过系统的作用量（或运动方程）体现出来。

在经典场论中，从作用量的对称性出发，可以得到相应的守恒流和守恒量，对称性和守恒定律的关系可以通过诺特(Noether)定理表述。

由Noether 定理可以推出经典物理中的几个守恒定律：

| 对称性 | 守恒定律 |
|---|---|
| 时间平移不变性 | 能量守恒 |
| 空间平移不变性 | 动量守恒 |
| 空间转动不变性 | 角动量守恒 |

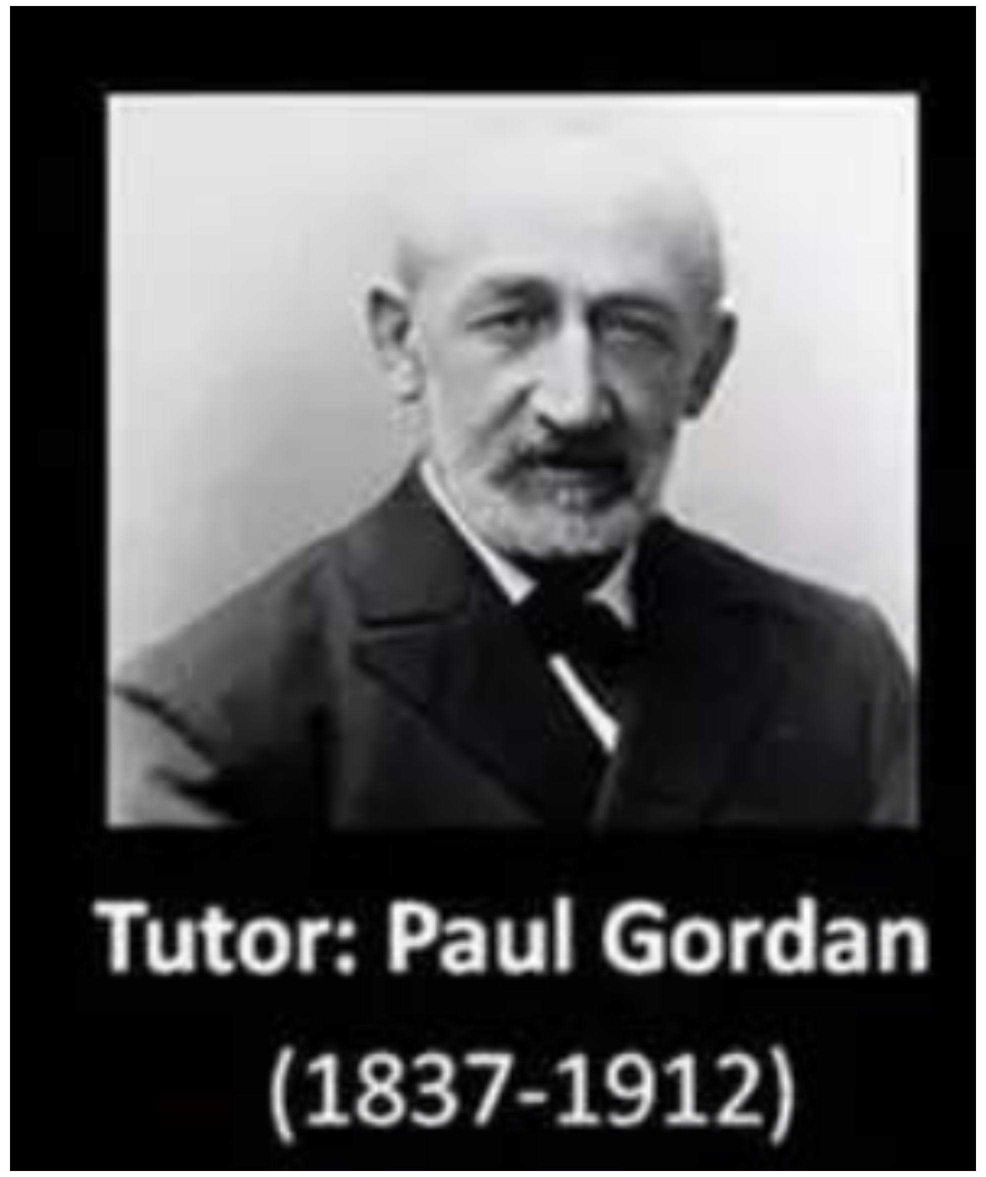

1900年的冬天，18岁的艾米顺利考取了父亲执教的埃朗根大学。可当时的德国，有这样一个非常歧视女性的规定，“不准女子在大学注册，只能当旁听生，并且要缴纳听课费”。1903年7月，艾米顺利的通过了学校的毕业考试。

可作为一名没有注册的旁听生，她是学校里的黑户，根本拿不到毕业证。

她只身一人去到了哥廷根大学，旁听希尔伯特、克莱因、闵可夫斯基等著名数学家讲课。

1904年10月，埃朗根大学允许女生注册的消息传到了哥廷根，艾米回到了母校专攻数学，全系47个学生，她是唯一的女生。1907年，她以优异的成绩通过了博士考试。

她是德国第一位获得博士学位的女性。




可即便如此，德国仍然没有学校愿意接纳她，她只能在父亲生病的时候，给父亲代个课。

1915年，希尔伯特给艾米写了一封诚挚的邀请信，表达了希望她能到哥廷根大学执教的愿望。

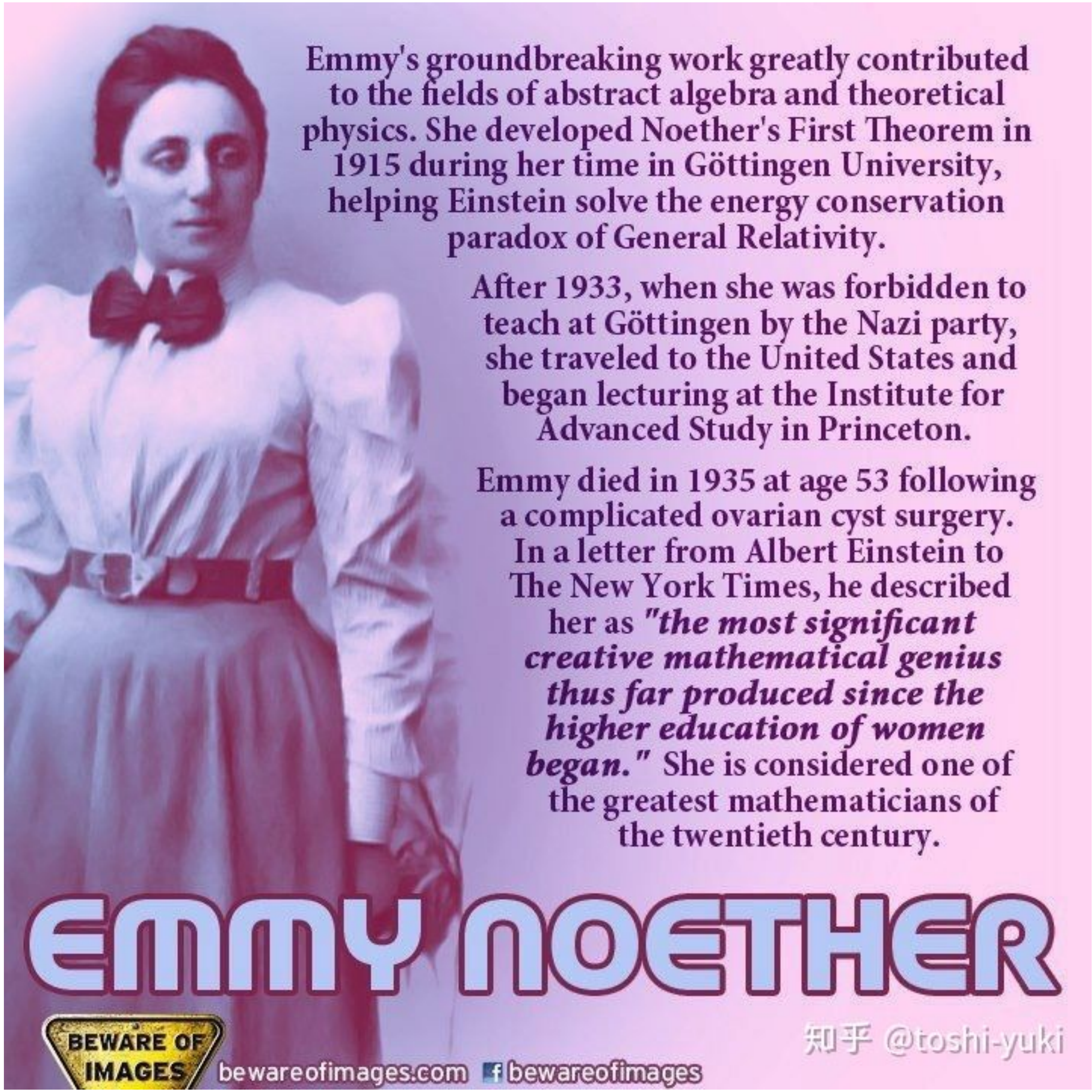
在教师会议上，他提出了他的这个请求，可等待他的，却是强烈的反对，艾米最终还是没能拿到正式的教职。她以为希尔伯特代课的名义，成为了不收学费的义务讲师。

一战结束后，德意志共和国成立，艾米才正式成为了哥廷根大学的讲师。即便这仍然是没有薪水的编外教职，但至少给了艾米一个正式的身份

艾米成了当之无愧的抽象代数的奠基人之一

她的研究影响了整个20世纪代数学甚至整个数学的面貌

艾米也因此获得了极大的声誉，她被称为“现代数学代数化的伟大先行者”，“抽象代数之母”



## 2．量子力学中的Noether定理

Noether 定理尽管是在经典理论中推导出来的，但在量子理论中也普遍成立。

在量子力学中，任一物理系统的运动规律都可以用系统的哈密顿量H描写。

一个不显含时间t的力学量Q守恒的必要条件是它和哈密顿量H对易。

$$[Q, H] = 0$$

利用以上性质，我们来讨论连续变换和分立变换不变性所对应的守恒量。

# 连续变换

描述系统所处的状态常需要许多参量，例如系统所处的时间，对应系统各自由度的量(系统质心的空间坐标、对标准参考系的转角等).

此外为反映微观粒子内部属性还有一些类似的量，例如同位旋空间的方位角等内部自由度.

一般说来，这种描述系统运动状态的量称为运动参量.

我们早已熟知的结果是：对应于循环坐标$\xi$的广义动量$p_\xi$是守恒量．这个结果可以推广到对任意连续运动参量的情形，并在量子力学的基础上加以证明.

对于一个连续变换，总可通过引入一个连续变化的运动参量$\xi$来描写.

一般说来，哈密顿量$H$是$\xi$的函数$H(\xi)$。连续变换即表现为$\xi$改变为$\xi + \mathrm{d}\xi$，其中$\mathrm{d}\xi$可以取任意值并且可以连续地趋于零. 如果运动规律在这变换下不变，则应有

$$H(\xi + \mathrm{d}\xi) = H(\xi) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \xi} = 0$$

一般公式，对任意的量子态$|\ \rangle$都应该成立

$$\frac{\partial}{\partial \xi} H|\rangle = \frac{\partial H}{\partial \xi}|\rangle + H\frac{\partial}{\partial \xi}|\rangle = H\frac{\partial}{\partial \xi}|\rangle \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial \xi}, H\right] = 0$$

亦即$\frac{\partial}{\partial \xi}$与哈密顿量$H$对易，可以定义为一个守恒量。

对于$\frac{\partial}{\partial \xi}$的任意本征态$|a\rangle$，则有$\frac{\partial}{\partial \xi}|a\rangle = a|a\rangle$，　$\langle a|\frac{\partial}{\partial \xi}|a\rangle = a$;

因此 $\frac{\partial}{\partial \xi}\langle a|a\rangle = \langle a|\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi}}|a\rangle + \langle a|\frac{\partial}{\partial \xi}|a\rangle = \langle a|\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi}}|a\rangle + a = 0$;

所以 $\langle a|\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi}}|a\rangle = -a$. 但是, $\langle a|\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \xi}} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}|a\rangle\right)^{\dagger} = a^*\langle a|$;

得到：$a^* = -a$

可以看出$a$是一个纯虚数，则$\frac{\partial}{\partial \xi}$是一个反厄米算符。如果我们要求所有力学量的观测值为实数，那么可以定义相应的力学量算符为 $p_\xi = -i\frac{\partial}{\partial \xi}$

$p_\xi = -i\dfrac{\partial}{\partial \xi}$是一个厄米算符， 和H 对易，是一个守恒量。

这样我们在连续变换的情况下证明了Noether定理：当哈密顿量$H$与连续运动参量$\xi$无直接依赖关系时，$p_\xi$是守恒量。

在经典物理学中，我们早已熟知的结果是：对应于循环坐标$\xi$的广义动量$p_\xi$是守恒量。

上述的证明则把这个结果推广到对任意连续运动参量的情形，并在量子力学的基础上加以证明。

# 分立变换

- 在量子理论中，分立变换的不变性导致存在一个守恒量，这类守恒量在经典理论中是不存在的。

- 分立变换不能用一个运动参量的连续变化来描写，因此我们应直接讨论分立变换本身。
  如果在分立变换$U$下哈密顿量$H$不变，即$UHU^{-1} = H' = H$
  那么对于任意的量子态$|\ \rangle$，经过$U$变换，
  $UH|\ \rangle = UHU^{-1}U|\ \rangle = H'U|\ \rangle = HU|\ \rangle$
  因此$UH|\ \rangle = HU|\ \rangle$

- 所以，$U$和$H$对易。如果$U$不显含$t$，则$U$是守恒量。

量子力学中的Noether定理可以概括如下：

1. 当哈密顿量与连续运动参量 $\xi$ 无直接依赖关系时，$p_\xi$是守恒量；

2. 当哈密顿量在分立变换$U$下不变时，$U$本身就是一个守恒量。

根据Noether定理，可以用运动规律所满足的对称性来对相应的守恒量进行分类. 如果对称性是属于场和粒子的时空性质的某种变换，称为时空对称性，相应的守恒量称为时空对称性守恒量.

例如，时间平移不变性决定能量守恒；空间平移不变性决定动量守恒；空间转动不变性决定角动量守恒；空间反射不变性决定P宇称守恒，这些都是时空对称性守恒量.

时间反演变换T本身是直接施于时间的，运动规律满足时间反演变换不变性并不表明存在相应的守恒定律和守恒量。

如果对称性是属于场和粒子的独立于时空性质的某种变换，则称为内部对称性，相应的守恒量称为内部对称性守恒量．电荷，同位旋，奇异数，粲数，底数，重子数、轻子数，C宇称，G宇称等都属于内部对称性守恒量。

3．复合对称性守恒量

- 相乘性守恒量中，两个不守恒量乘起来就可能守恒，例如，弱作用中空间反射和粒子反演。相加性守恒量不可能。
- 二变换守恒，则复合变换也守恒，但没有增加守恒量个数。相乘性$P_1P_2$, 或者相加性$Q_1+Q_2$,都没有问题。

一乘一加呢?

相乘性守恒量P，相加性守恒量Q,

定义，$P' = Pe^{iQ}$ 或 $P' = Pe^{i\alpha Q}$ 则是相乘性守恒量。

# 证明：

- 相加性守恒量： $\sum_i Q_i = \sum_f Q_f$
- 相乘性守恒量： $\prod_i P_i = \prod_f P_f$
- 定义 $P' = Pe^{i\alpha Q}$，则

$$\prod_i P_i' = \prod_i P_i e^{i\alpha Q_i} = \left(\prod_i P_i\right) e^{i\alpha \sum_i Q_i} = \left(\prod_f P_f\right) e^{i\alpha \sum_f Q_f} = \prod_f P_f e^{i\alpha Q_f} = \prod_f P_f'$$

- 最终有 $\prod_i P_i' = \prod_f P_f'$

# 强力工具：群论

| | |
|---|---|
| $x + 3 = 5$ | • Integers under + |
| $[x + 3] + (-3) = 5 + (-3)$ | • Inverses |
| $[x + 3] + (-3) = 2$ | • Closed under + |
| $x + [3 + (-3)] = 2$ | • Associativity |
| $x + 0 = 2$ | • Identity |
| $x = 2$ | |

# 群的定义：

如果一个非空集合 $G$ 上定义了一个二元运算 $\bullet$，满足如下性质：

（1）封闭性，即对于 $\forall a, b \in G$，有 $a \bullet b \in G$；

（2）结合律，即对于 $\forall a, b, c \in G$，有 $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$；

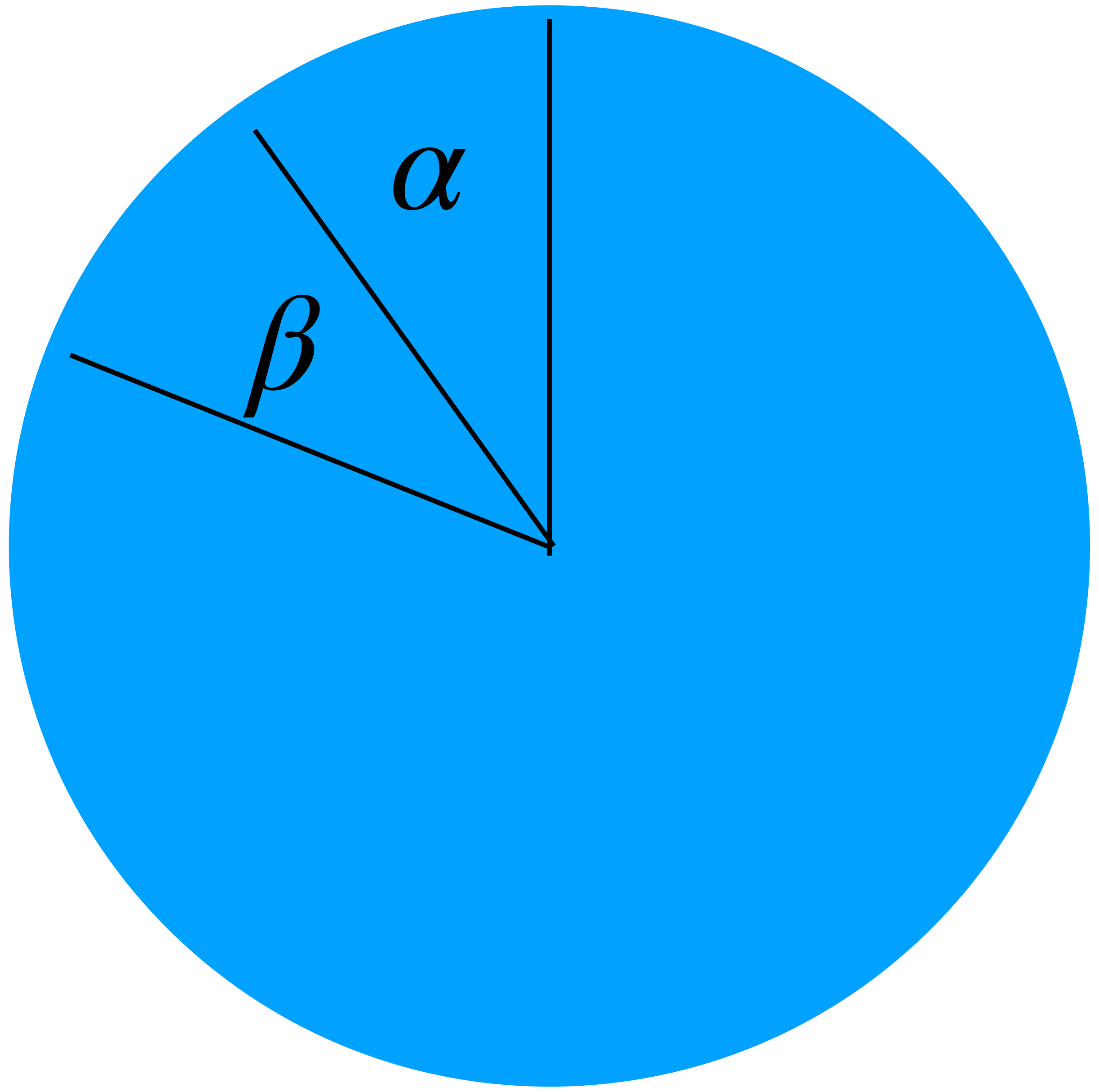
（3）存在 $e \in G$，使得 $\forall a \in G$，有 $e \bullet a = a \bullet e = a$；

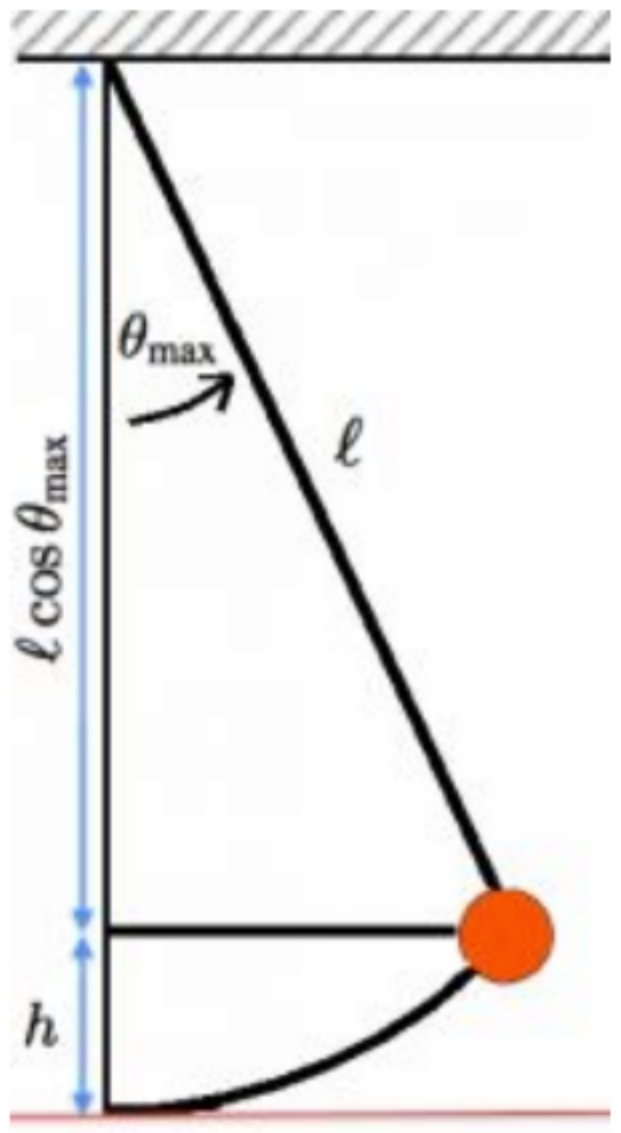
（4）对于 $\forall a \in G$，存在逆元 $b \in G$，使得 $a \bullet b = b \bullet a = e$，

则称 $G$ 关于运算 $\bullet$ 构成一个**群**（group），记为 $(G, \bullet)$，或简记为 $G$。

# 物理系统的对称操作构成群

- 旋转角度$\alpha$的对称操作$R_\alpha$，再加上旋转角度$\beta$的对称操作$R_\beta$，那么$R_\beta \bullet R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$仍然为对称操作。
- 单摆系统 $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$，拉氏量在变换 $\theta \to -\theta$ 下不变，因此是系统的一个对称性。
- 一般情况下，系统的对称操作的叠加仍然是对称操作（封闭性），恒等操作作为单位元，反向对称操作也是对称操作（逆元）。



# 群论的诞生

- 直到16岁，伽罗瓦才被准许读他的第一门数学课程。
- 迦罗瓦中学毕业后，两次投考巴黎综合工科学校落榜。这所巴黎综合工科学校可是法国数学家之母，与半数以上的法国数学家有缘。据说，**“伽罗瓦只因在面试时无法容忍人类的愚蠢，失去了耐心，在愤怒和绝望中，他用板刷精准的击中了主考官的面部。”**
- **1829年，伽罗华考入巴黎高等师范大学。**第一次所交论文由大数学家**柯西**审阅，柯西根本不重视这件事，**将他的文稿遗失了**。
- 1830年，送到**傅里叶**，可是62岁的傅里叶，**死于心力衰竭，离开了人世**。
- 1831年，伽罗瓦再次提交论文，**泊松给出了“不可理解”**的评语，论文第三次被搁置。

伽罗瓦（1811-1832）

Évariste Galois

1832年3月16日伽罗瓦获释后不久，这位年轻气盛的伽罗瓦为了一个舞女（据说是狱中认识的），卷入了一场他所谓的为“爱情与荣誉”的决斗。决斗的对象据说是一名枪法很好的军官。

决斗前夕 1832年5月29日，自知第二天必死的伽罗瓦在前一夜通宵达旦地将平生（其实只有5年）所研究的数学成果狂笔疾书写成极其潦草的大纲，并在遗书书稿一旁写下“我没有时间”，这就是对后世影响深远的群论。

决斗之晨 1832年5月30日清晨，在巴黎的葛拉塞尔湖附近躺着一个昏迷的年轻人，过路的农民从枪伤判断他是决斗后受了重伤，就把这个不知名的青年抬到医院。然后在第二天（1832年5月31日）早晨十点，这个可怜的年轻人离开了人世，数学史上最年轻、最富有创造性的头脑停止了思考。

一个瘦弱而极富激情的天才就这样走了，最后闪出的是绝对光华，他的生命只有21岁!后来的一些著名数学家们说，他的死使数学的发展被推迟了几十年。 他的朋友 Chevalier （在师范大学学习的第一年结认的唯一亲近的朋友）遵照伽罗瓦的遗愿，将他的数学论文寄给卡尔·弗里德里希·高斯与雅各比，但是都石沉大海，要一直到1843年，才由刘维尔肯定伽罗瓦结果之正确、独创与深邃，并在1846年将它发表。 这位21岁时死于决斗，用生命验证了其人生的对称性，最终没有被数学史遗忘！ 贡献 伽罗瓦使用群论的想法去讨论方程式的可解性，整套想法现称为伽罗瓦理论，是当代代数与数论的基本支柱之一。

# 典型的群

**整数加群**：整数集 $\mathbb{Z}$ 对于整数的加法构成整数加群 $(\mathbb{Z}, +)$，其单位元为0，逆元为加法相反数。

**非零实数乘法群**：非零实数集 $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ 对于实数的乘法构成乘法群，其单位元为1，逆元为乘法倒数。

**一般线性群**（general linear group）：数域 $\mathbb{F}$ 上n阶可逆矩阵的集合 $GL_n(\mathbb{F})$ 对于矩阵乘法构成一般线性群，其单位元为单位矩阵，逆元为一个矩阵的逆矩阵。

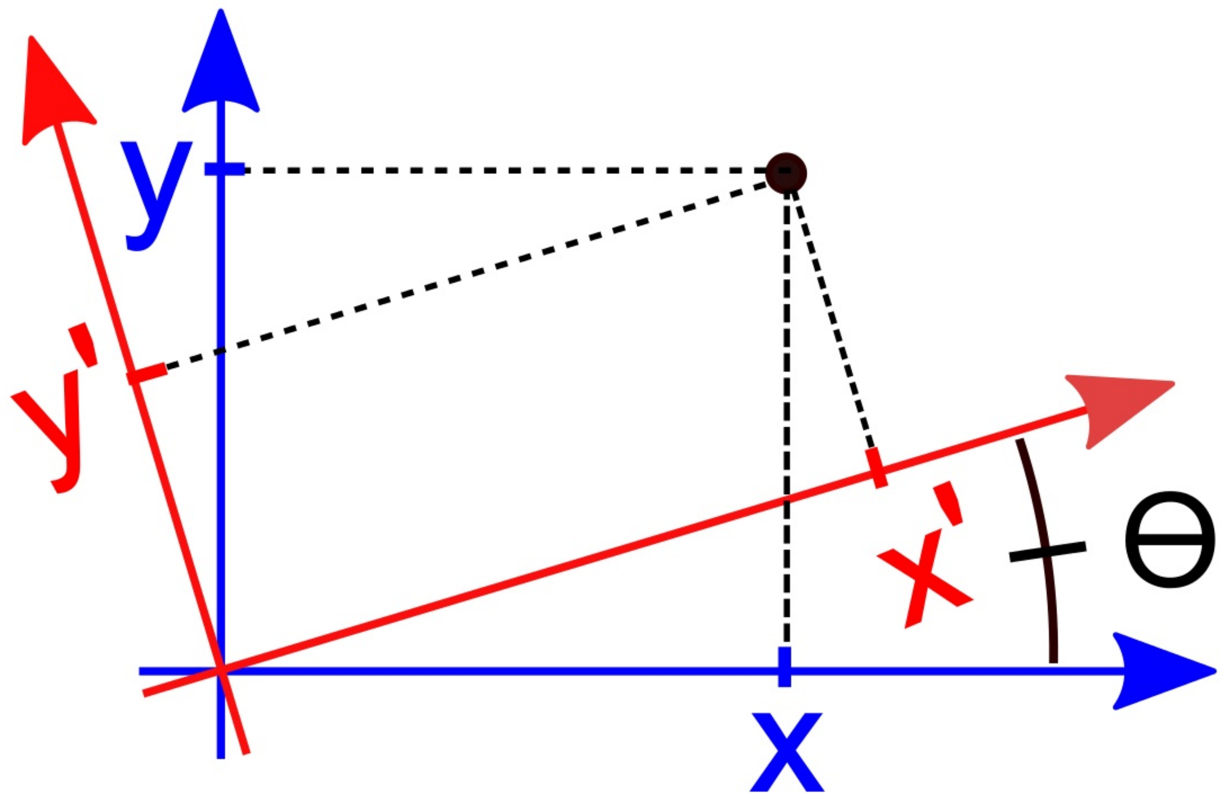
**特殊线性群**（special linear group）：数域 $\mathbb{F}$ 上行列式为1的n阶可逆矩阵的集合 $SL_n(\mathbb{F})$ 对于矩阵乘法构成特殊线性群，其单位元为单位矩阵，逆元为一个矩阵的逆矩阵。

**正交群**（orthogonal group）：所有n阶正交矩阵的集合 $O(n)$ 对于矩阵乘法构成正交群。所有行列式为1的n阶正交矩阵的集合 $SO(n)$ 对于矩阵乘法构成**特殊正交群**。

**酉群**（unitary group）：所有n阶酉矩阵的集合 $U(n)$ 对于矩阵乘法构成酉群。所有行列式为1的n阶酉矩阵的集合 $SU(n)$ 对于矩阵乘法构成**特殊酉群**。

# 转动群

- $SO(2)$：矩阵乘法下的所有行列式为1的2阶正交矩阵的集合。——形式上可以表示为二维转动矩阵，即该群可以描述为二维转动群。




$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 可以发现二维转动矩阵可以交换顺序，即$SO(2)$是一个阿贝尔群（Abel）。

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix}$$

李群（Lie Group）：具有连续（光滑）性质的群

# 转动生成元——李代数（Lie Algebra）

- 以$SO(2)$中转动$R(\theta)$为例，可以分解为$N$个$\theta/N$的转动$R(\theta/N)$。如果$N$特别大，那么可以做Taylor展开
$$R(\frac{\theta}{N}) = I + \frac{\theta}{N}X$$
- 复合$N$个变换可以发现
$$R(\theta) = \lim_{N\to\infty}\left(I + \frac{\theta}{N}X\right)^N = \exp(\theta X), \qquad X = \left.\frac{dR}{d\theta}\right|_{\theta=0}$$
- 重定义$J = i\hbar X$可以发现
$$R(\theta) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\theta J)$$
- $X$是转动生成元，$J$是角动量生成元。

Sophus Lie

(1842—1899)

# 三维转动群

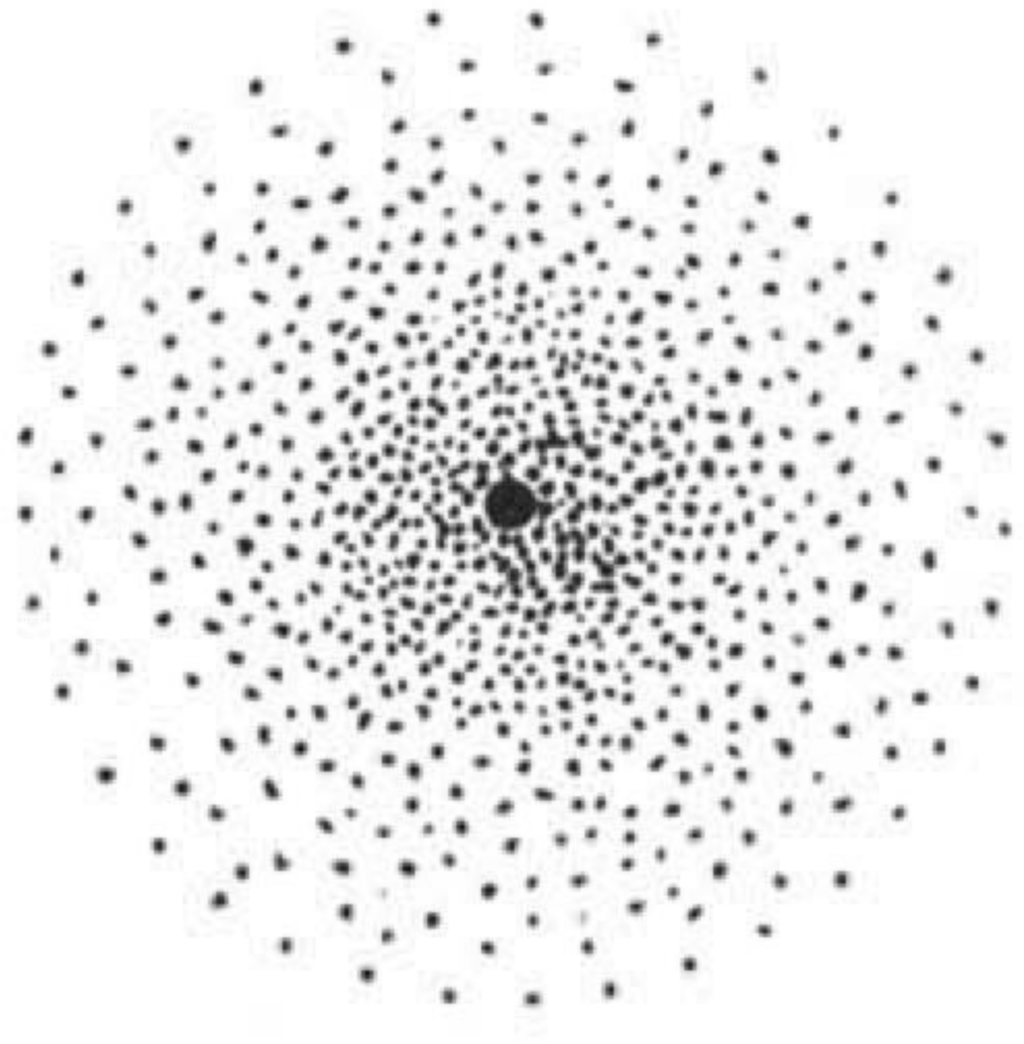


图 1 氢原子电子云

- $SO(3)$：矩阵乘法下的所有行列式为1的3阶正交矩阵的集合。——三维转动矩阵的集合，构成三维转动群。

- 若转动变换$R \in SO(3)$，则有 $R^T R = I$ 以及 $\det(R) = 1$。

- 那么其转动生成元有三个（反厄米），$\left[X_i, X_j\right] = \epsilon_{ijk} X_k$

$$X_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- 重定义厄米生成元 $J_k = iX_k$，可得 $\left[J_i, J_j\right] = i\epsilon_{ijk} J_k$ ——李代数

# Lorentz洛伦兹群 $O(3,1)$

- 保持四维闵氏时空内积不变的变换，即在变换 $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ 下，内积 $\eta_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = \eta_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma}$ 不变，其中 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$。
- 可以得到 $\det(\Lambda) = \pm 1$，同时依据$\Lambda^{0}_{0}$分量的符号将洛伦兹群分为四个部分，其由时间反演 $\mathrm{T} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ 和空间反演 $\mathrm{P} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ 相互联系。

# 正规正时Lorentz群$L_+^\uparrow$

- 正规正时部分由3个转动和3个boost构成（快度$\eta$：$\tanh\eta \equiv v/c$）

$$\Lambda_{\text{rotation 1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \Lambda_{\text{boost1}} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & 0 & 0 \\ \sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\text{rotation 2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \Lambda_{\text{boost 2}} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & \sinh\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & \cosh\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\text{rotation 3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda_{\text{boost 3}} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & 0 & 0 & \sinh\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\eta & 0 & 0 & \cosh\eta \end{pmatrix}$$

# 生成元和李代数

$$(J_1)^{\mu}{}_{\nu} = i\frac{d}{d\theta}\Lambda_{\text{rotation1}}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad (K_1)^{\mu}{}_{\nu} = i\frac{d}{d\eta}\Lambda_{\text{boost1}}\Big|_{\eta=0} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_2)^{\mu}{}_{\nu} = i\frac{d}{d\theta}\Lambda_{\text{rotation2}}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (K_2)^{\mu}{}_{\nu} = i\frac{d}{d\eta}\Lambda_{\text{boost2}}\Big|_{\eta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_3)^{\mu}{}_{\nu} = i\frac{d}{d\theta}\Lambda_{\text{rotation3}}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (K_3)^{\mu}{}_{\nu} = i\frac{d}{d\eta}\Lambda_{\text{boost3}}\Big|_{\eta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

一般的洛伦兹变换可以写为：$\Lambda = \exp(-i\vec{J}\cdot\vec{\theta} - i\vec{K}\cdot\vec{\eta})$

洛伦兹群的李代数：$\left[J_i, J_j\right] = i\epsilon_{ijk}J_k,\ \left[J_i, K_j\right] = i\epsilon_{ijk}K_k,\ \left[K_i, K_j\right] = -i\epsilon_{ijk}J_k$

# 庞加莱群
## ——描述了四维闵氏时空的所有对称性

- 庞加莱群 = 洛伦兹群 + 时空平移群
- 一般的庞加莱群的群元

$$R(\Lambda, a) = \exp\left(-ia_\mu P^\mu - i\vec{\theta}\cdot\vec{J} - i\vec{\eta}\cdot\overrightarrow{K}\right)$$

- 庞加莱群的Casimir算符

1. $P^\mu P_\mu \equiv m^2$ 即粒子质量；
2. $W^\mu W_\mu$： $W^\mu \equiv \dfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu J_{\rho\sigma}$ 恰好为粒子自旋。