

第一章张量分析与微分几何基础

流形张量场

流形和张量场的基本概念

从我们熟悉的直观概念说起——什么是“空间”？由若干个（实）参数描述的一种点集。 n 维空间。

在此意义上最简单的空间：实数轴 \mathbb{R} 。

[数学来源：集合、拓扑空间（连续性）]

（微分）流形的关键要素：具有可微性（微分结构）。换句话说，流形“每一局部看起来像” n 维空间 \mathbb{R}^n ， n 称为该流形的维数。

平凡流形：整体同构于 \mathbb{R}^n 的流形。

非平凡流形的最简单例子：圈 S^1 。

如何描述非平凡流形？以圈为例。坐标系（坐标片），即流形局部到 \mathbb{R}^n 局部的一一映射。坐标变换，其可微性（一般要求 C^∞ ）即微分结构之间的相容性。坐标图册(atlas)覆盖整个流形，给予流形一个完整确定的微分结构。

$$x^\mu = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$
$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x)$$

可微性给出

$$d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

映射的一一性（坐标变换的可逆性）进一步给出

$$\tilde{\partial}_\mu := \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} =: \tilde{\partial}_\mu x^\nu \partial_\nu$$

流形上的场即流形上的函数。以实场为例，它是流形到 \mathbb{R} 中的映射。

标量（零阶张量）场：1 个分量，在坐标变换下需满足

$$\tilde{T}(\tilde{x}) = T(x)$$

逆变矢量（一阶逆变张量）场： n 个分量，在坐标变换下需满足（与坐标微分一致）

$$\tilde{T}^\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu(x)$$

二阶逆变张量场： n^2 个分量，在坐标变换下需满足

$$\tilde{T}^{\mu\alpha}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} T^{\nu\beta}(x)$$

协变矢量（一阶协变张量）场： n 个分量，在坐标变换下需满足（与坐标求导一致）

$$\tilde{T}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} T_\nu(x)$$

二阶协变张量场： n^2 个分量，在坐标变换下需满足

$$\tilde{T}_{\mu\alpha}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\alpha} T_{\nu\beta}(x)$$

二阶混合张量场： n^2 个分量，在坐标变换下需满足

$$\tilde{T}_\alpha^\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\alpha} T_\beta^\nu(x)$$

高阶张量场可以依此类推，具有 p 个逆变指标（上指标）和 q 个协变指标（下指标）的张量场称为 (p,q) 阶张量场。

某一点的张量。零张量的坐标无关性。

按照以上定义，容易证明 Kronecker 记号

$$\delta_\alpha^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = \alpha \\ 0, & \mu \neq \alpha \end{cases}$$

是一个取值不依赖于坐标系的 $(1,1)$ 阶张量（常张量）。

张量的运算

由于一般的坐标变换 Jacobi 矩阵点点不同，故一般来说必须在同一点上的两个张量之间进行加法、减法和乘法运算才能使结果保持张量的性质。

同阶的张量才能相加减，具体定义为对应分量逐点相加减，如

$$C_\alpha^\mu(x) = A_\alpha^\mu(x) \pm B_\alpha^\mu(x)$$

张量的乘法一般称为直乘，一个 (p_1, q_1) 阶张量与一个 (p_2, q_2) 阶张量直乘后得到一个 $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$ 阶张量，如

$$C_{\alpha\beta}^\mu(x) = A_\alpha^\mu(x)B_\beta(x)$$

特别地，任意阶张量与标量直乘得到一个同阶的张量。

混合张量的缩并运算： (p,q) 阶张量某一对上下指标取相同值并求和，得到 $(p-1, q-1)$ 阶张量，如

$$\begin{aligned} C^\mu &= A_\alpha^{\alpha\mu} \\ D^\mu &= A_\alpha^{\mu\alpha} \end{aligned}$$

一般来说 C^μ 和 D^μ 是不同的张量。

作业： 证明缩并运算的结果确实为张量。

缩并运算的延伸：逆变矢量和协变矢量的配对

$$C = A^\mu B_\mu$$

实际上直乘后再缩并。

通常的矩阵可以看作 $(1,1)$ 阶张量，该张量的缩并就是矩阵求迹，而矩阵与矩阵的直乘就是相应张量的直乘。

张量运算的商定理：如对任意 x 有

$$A^\mu(x) = B_\alpha^\mu(x)C^\alpha(x)$$

且 A^μ 和 B_α^μ 均为张量，则能证明（作业） C^α 也是张量。

张量的对称性

物理中遇到的张量一般具有确定的对称性，其原因可以通过群论来解释。

二阶逆变张量 $T^{\mu\alpha}$ 是对称的，若

$$T^{\mu\alpha} = T^{\alpha\mu}$$

其是反对称（反称）的，若

$$T^{\mu\alpha} = -T^{\alpha\mu}$$

注意张量的对称性与坐标无关。

一般二阶逆变张量的对称分解：

$$T^{\mu\alpha} = S^{\mu\alpha} + A^{\mu\alpha}$$

$$S^{\mu\alpha} = \frac{1}{2}(T^{\mu\alpha} + T^{\alpha\mu}) =: T^{(\mu\alpha)}$$

$$A^{\mu\alpha} = \frac{1}{2}(T^{\mu\alpha} - T^{\alpha\mu}) =: T^{[\mu\alpha]}$$

二阶协变张量同理。

二阶混合张量不能直接讨论对称性。

高阶张量的对称（反称）性。特别地，（思考）三阶对称（反称）张量若前两个指标和后两个指标都对称（反称），则第一和第三个指标也对称（反称），即全对称（反称）。

反称张量的常用性质：

- 1) 反称指标取值相同时，该分量为零。反称指标与对称指标的缩并为零。
- 2) n 维流形上最高阶的反称张量为 n 阶，且该张量只有一个独立分量，如三维流形上的三阶反称张量 $T^{\mu\alpha\beta}$ 只有 T^{123} 一个独立分量。
- 3) n 维流形上的 $n-1$ 阶反称张量只有 n 个独立分量，如三维流形上的二阶反称张量 $T^{\mu\alpha}$ 的独立分量为 T^{12}, T^{23}, T^{31} 。一般地， n 维流形上的 m 阶反称张量有 C_n^m 个独立分量。

张量的平移和仿射联络

张量的平移操作可以把 P 点（坐标为 x^μ ）的张量平移到邻近的 Q 点（坐标为 $x^\mu + dx^\mu$ ）并成为 Q 点的张量。为了实现这一操作需要引进一种特殊的场，称为仿射联络。

以协变矢量为例。将 P 点的协变矢量 $A_\mu(P)$ 平移至 Q 点后的矢量记作 $A_\mu(P \rightarrow Q)$ ，线性理论的要求给出

$$A_\mu(P \rightarrow Q) - A_\mu(P) = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P) A_\lambda(P) dx^\nu$$

其中的比例系数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P)$ 就叫 P 点的仿射联络。要求 $A_\mu(P \rightarrow Q)$ 是 Q 点的协变矢量，即

$$\tilde{A}_\mu(P \rightarrow Q) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right)_Q A_\alpha(P \rightarrow Q)$$

则有

$$\tilde{A}_\mu(P) + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(P) \tilde{A}_\lambda(P) d\tilde{x}^\nu = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right)_Q [A_\alpha(P) + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda(P) A_\lambda(P) dx^\nu]$$

利用

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right)_Q - \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right)_P = \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} \right)_P d\tilde{x}^\nu$$

略去二级无穷小量可得（利用 A_α 和 dx^β 的任意性去掉 A_α 和 dx^β ）

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\lambda} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} + \Gamma_{\rho\beta}^\alpha \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}$$

注意这里所有的量都在 P 点取值。故仿射联络的坐标变换公式为

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(\tilde{x}) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\rho\beta}^\alpha(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha}$$

反过来，只要仿射联络满足该变换性质，就可以保证 $A_\mu(P \rightarrow Q)$ 是 Q 点的协变矢量，故为后者的充要条件。

注意标量场可以作平凡的平移而保持其标量性质：

$$F(P \rightarrow Q) = F(P)$$

由此可以通过 $F = A_\mu B^\mu$ 的标量性质并要求（平移与张量运算的相容性条件）

$$(A_\mu B^\mu)(P \rightarrow Q) = A_\mu(P \rightarrow Q) B^\mu(P \rightarrow Q)$$

来得到逆变矢量的平移公式：

$$B^\lambda(P \rightarrow Q) - B^\lambda(P) = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P)B^\mu(P)dx^\nu$$

不难验证（作业）这样的平移操作保持 B^μ 的逆变矢量性质。

讨论：

- 1) 仿射联络（简称联络）几乎是张量但不是张量。
- 2) 在同一流形上引入的任意两个联络 $\Gamma_{\mu\nu}^{(1)\lambda}$ 和 $\Gamma_{\mu\nu}^{(2)\lambda}$ 之差是(1,2)阶张量。
- 3) 若 $\Gamma_{\mu\nu}^{(1)\lambda}$ 是联络，则 $\Gamma_{\mu\nu}^{(2)\lambda} \equiv \Gamma_{\nu\mu}^{(1)\lambda}$ 也是联络。
- 4) 联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 的反称化 $\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda$ 是(1,2)阶张量，称为流形上的挠率张量；对称联络无挠。
- 5) 联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ 的对称化 $\Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda$ 也是同一流形上的联络，称为对称联络。
- 6) 任一联络总可表为对称联络和挠率张量之和，且该分解与坐标无关（思考）。

张量的协变导数（协变微商）

利用张量的平移，可以对任意张量定义一种保持张量性质的导数，称为协变导数。

对于标量场 $F(x)$ ，其普通导数

$$\partial_\mu F \equiv F_{,\mu}$$

自动具有协变矢量的性质。因此协变导数就定义为普通导数，即

$$F_{;\mu} = F_{,\mu}$$

实际上也可以看成

$$F_{;\mu} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{F(Q) - F(P \rightarrow Q)}{\Delta x^\mu} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{F(Q) - F(P)}{\Delta x^\mu} = F_{,\mu}$$

对于协变矢量场 $A_\mu(x)$ ，由于其普通导数不再具有张量性质，我们可以利用平移操作将协变导数定义为

$$A_{\mu;\alpha} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{A_\mu(Q) - A_\mu(P \rightarrow Q)}{\Delta x^\alpha} = A_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda A_\lambda$$

注意右边两项都不是张量，但它们之差是张量。

再看逆变矢量场 $B^\mu(x)$ ，其协变导数可以通过两种方式来导出：

- 1) 直接根据定义

$$B_{;\alpha}^\mu = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{B^\mu(Q) - B^\mu(P \rightarrow Q)}{\Delta x^\alpha}$$

- 2) “假设”协变导数与普通导数一样满足莱布尼茨法则

$$(A \cdots B \cdots)_{;\alpha} = A \cdots;_\alpha B \cdots + A \cdots B \cdots;_\alpha$$

这两种方式得到同一个结果

$$B_{;\alpha}^\mu = B_{,\alpha}^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu B^\beta$$

实际上协变导数的莱布尼茨法则可以根据其定义和平移的乘积性质类似于普通导数一样来证明（思考）。

对于高阶张量，其协变导数可以同样利用莱布尼茨法则来导出。以(1,1)阶张量 T_σ^ρ 为例：

$$(T_\sigma^\rho A_\rho B^\sigma)_{;\alpha} = (T_\sigma^\rho A_\rho B^\sigma)_{,\alpha}$$

$$\begin{aligned} T_{\sigma;\alpha}^\rho A_\rho B^\sigma + T_\sigma^\rho A_{\rho;\alpha} B^\sigma + T_\sigma^\rho A_\rho B_{;\alpha}^\sigma &= T_{\sigma,\alpha}^\rho A_\rho B^\sigma + T_\sigma^\rho A_{\rho,\alpha} B^\sigma + T_\sigma^\rho A_\rho B_{,\alpha}^\sigma \\ T_{\sigma;\alpha}^\rho A_\rho B^\sigma - T_\sigma^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda A_\lambda B^\sigma + T_\sigma^\rho A_\rho \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma B^\beta &= T_{\sigma,\alpha}^\rho A_\rho B^\sigma \end{aligned}$$

根据 $A_\mu(x)$ 和 $B^\mu(x)$ 的任意性可知

$$T_{\sigma;\alpha}^{\rho} = T_{\sigma,\alpha}^{\rho} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} T_{\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu} T_{\mu}^{\rho}$$

其规律可以总结为：对张量的每一协变指标按照协变矢量的协变求导规则操作，而每一逆变指标按照逆变矢量的协变求导规则操作。如

$$\begin{aligned} T_{;\alpha}^{\rho\sigma} &= T_{,\alpha}^{\rho\sigma} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} T_{\sigma}^{\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} T_{\sigma}^{\rho\mu} \\ T_{\rho\sigma;\alpha} &= T_{\rho\sigma,\alpha} - \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu} T_{\mu\sigma} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu} T_{\rho\mu} \end{aligned}$$

等等。

作为典型例子，我们计算 Kronecker 张量 $\delta_{\alpha}^{\mu}(x)$ 的协变导数：

$$\delta_{\sigma;\alpha}^{\rho} = \delta_{\sigma,\alpha}^{\rho} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} \delta_{\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\mu} \delta_{\mu}^{\rho} = \Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho} = 0$$

即其普通导数和协变导数均为零。

另一个例子是证明 $A_{\mu,\alpha}$ 的反称组合为张量。首先有

$$A_{[\mu;\alpha]} = A_{[\mu,\alpha]} - \Gamma_{[\mu\alpha]}^{\lambda} A_{\lambda}$$

由于上式左边和右边第二项均为张量，故 $A_{[\mu,\alpha]}$ 也为张量。注意，若采用对称联络（无挠联络），则有 $A_{[\mu;\alpha]} = A_{[\mu,\alpha]}$ 。

文献中也常用 ∂_{μ} 和 ∇_{μ} 来区分普通导数和协变导数。

测地线仿射参量

子流形流形中的曲线

粗略地说，从流形 S 到流形 M 中的一一可微映射（或者映射的像）称为 M 的子流形，一般要求 S 的维数低于 M 。

n 维流形中的 m 维子流形可由如下一组 n 个参数方程描述：

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= x^{\mu}(y), \quad \mu = 1, 2, \dots, n \\ y &= (y^1, y^2, \dots, y^m) \end{aligned}$$

流形中的曲线就是流形的一维子流形，即

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda), \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

其中的一维坐标 λ 称为曲线的参数（参量）。

切矢量积分曲线

曲线上任意一点的切矢量定义为

$$A^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$$

注意 A^{μ} 只在曲线上有定义，因此不是整个流形上的（逆变）矢量场，但可以说是局限在曲线上的逆变矢量场。流形上某一点的逆变矢量可视为在该点规定了一个方向，对于曲线的切矢量而言，这个方向就是曲线的切方向。对于同一点上的两个方向 A^{μ} 和 $T^{\mu} \neq 0$ ，我们可以定义平行的概念，即（注意该定义不依赖于坐标系）

$$A^{\mu} = a T^{\mu}, \quad a \neq 0$$

[线汇与流形上的逆变矢量场]

反之，如果流形上有一个逆变矢量场 T^{μ} ，过某一点 P 的一条曲线 C 若满足其切矢量与 T^{μ} （在 C 上）处处平行，则称 C 为 T^{μ} 过 P 的积分曲线。

积分曲线的直观理解：电力线、磁力线。

将同一点上的平行概念与前面相邻点之间的平移操作结合起来，我们就有相邻点之间矢量的平行概念。

测地线（自平行线）

通常欧氏空间中的直线可以看作其上任意相邻两点的切矢量都相互平行的曲线。这个概念在流形上的自然推广就是测地线（自平行线），这是流形上“最直的线”。

测地线：对于流形上给定的联络规定的矢量平移意义上，任意相邻两点的切矢量都相互平行的曲线。

用数学语言来描述，对于曲线上任意相邻两点 P 和 Q，切矢量的平行条件写作

$$A^\mu(Q) = (1 + f(\lambda)d\lambda)A^\mu(P \rightarrow Q)$$

利用逆变矢量的平移公式有

$$A^\mu(P \rightarrow Q) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} d\lambda$$

由切矢量在 P 点的泰勒展开又有

$$A^\mu(Q) = A^\mu(P) + \frac{dA^\mu(P)}{d\lambda} d\lambda = \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} d\lambda$$

综上可得

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

此即测地线方程。

注意测地线方程只跟仿射联络的对称部分有关。

仿射参量

曲线参数 λ 的选取过于任意，如作特殊选择可以简化测地线方程。为此，考虑如下变换

$$\lambda = \lambda(\sigma),$$

这样有

$$\begin{aligned}\frac{dx^\mu}{d\lambda} &= \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\lambda} \\ \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} &= \frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} \left(\frac{d\sigma}{d\lambda} \right)^2 + \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d^2\sigma}{d\lambda^2}\end{aligned}$$

故测地线方程化为

$$\left(\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right) \left(\frac{d\sigma}{d\lambda} \right)^2 = \frac{dx^\mu}{d\sigma} \left(f(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda} - \frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} \right)$$

实际上总可以选择适当的参数变换以满足

$$\frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} - f(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda} = 0$$

此时测地线方程简化为

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = 0$$

这样的参量 σ 称为仿射参量。

讨论：

- 1) 仿射参量只对测地线有定义，一般的曲线上没有仿射参量的概念。
- 2) 仿射参量依赖于流形上给定的联络（对称部分）。
- 3) 当采用仿射参量 σ 时有 $f(\sigma) = 0$ ，故此时

$$A^\mu(Q) = A^\mu(P \rightarrow Q)$$

注意这里 $A^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$ 。

4) 仿射参量并不唯一, 但若 σ 与 $\tilde{\sigma}$ 是两个不同的仿射参量, 它们之间的变换必须满足

$$\frac{d^2\sigma}{d\tilde{\sigma}^2} = 0$$

即不同仿射参量之间的变换只能是线性变换。

曲率张量

普通导数可以交换求导次序:

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta]F = 0$$

对于协变导数, 以协变矢量场 $A_\mu(x)$ 为例:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \nabla_\beta A_\mu &= \partial_\alpha A_{\mu;\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho A_{\rho;\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho A_{\mu;\rho} \\ &= \partial_\alpha \partial_\beta A_\mu - (\Gamma_{\mu\beta,\alpha}^\rho A_\rho)_\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho A_{\rho;\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho A_{\mu;\rho} \\ &= \partial_\alpha \partial_\beta A_\mu - \Gamma_{\mu\beta,\alpha}^\rho A_\rho - \Gamma_{\mu\beta}^\rho A_{\rho;\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma A_\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho A_{\rho;\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho A_{\mu;\rho} \\ [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A_\mu &= -\left(\Gamma_{\mu\beta,\alpha}^\rho - \Gamma_{\mu\alpha,\beta}^\rho\right)A_\rho - \left(\Gamma_{\mu\beta}^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\sigma\right)A_\sigma - 2\Gamma_{[\beta\alpha]}^\rho A_{\mu;\rho} \\ &= -R_{\mu\alpha\beta}^\sigma A_\sigma + 2\Gamma_{[\alpha\beta]}^\rho A_{\mu;\rho}\end{aligned}$$

其中

$$R_{\mu\alpha\beta}^\sigma = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\sigma - \partial_\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma + \Gamma_{\mu\beta}^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\sigma$$

由于 $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]A_\mu$ 和 $R_{[\alpha\beta]}^\rho A_{\mu;\rho}$ 的张量性质而必为张量, 称为曲率张量。故仅当流形上的曲率和挠率张量均为零时, 协变矢量的协变导数才能交换次序。注意该结论对逆变矢量及更高阶的各种张量也成立。

讨论:

1) 曲率张量具有反称性:

$$R_{\mu\alpha\beta}^\sigma = -R_{\mu\beta\alpha}^\sigma$$

2) 曲率张量作为(1,3)阶张量, 具有两种独立的缩并:

$$\begin{aligned}A_{\alpha\beta} &= R_{\sigma\alpha\beta}^\sigma \\ R_{\mu\beta} &= R_{\mu\sigma\beta}^\sigma\end{aligned}$$

3) 若流形上某区域内曲率和挠率张量均为零, 则可以证明(略), 总能找到一个适当的坐标变换 $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$, 使得在该区域内

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho = 0$$

由于对于平凡联络, 矢量平移是平凡的, 而且测地线方程简化为

$$\frac{d^2\tilde{x}^\mu}{d\sigma^2} = 0$$

(即为坐标意义上的直线), 故称该区域是平坦的。注意联络不是张量, 故其是否为零依赖于坐标系的选取。

4) 曲率和挠率张量的几何意义。首先考虑流形上无穷小平行四边形的闭合性, 就是将矢量(无穷小位移) dx^μ 平移 δx^μ 和将矢量 δx^μ 平移 dx^μ 后总位移的差别。按照逆变矢量的平移公

式，两种情况下的总位移分别为

$$\delta x^\mu + dx^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta$$

$$dx^\mu + \delta x^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta x^\alpha dx^\beta$$

故（二阶无穷小）差别为 $-T_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta = -2\Gamma_{[\alpha\beta]}^\mu dx^\alpha \delta x^\beta$ ，即流形上无穷小平行四边形的闭合性由挠率张量来刻画。

进一步，若联络无挠，即无穷小平行四边形闭合，再考虑矢量 A^μ 沿此闭合回路平移一周后的变化。直截了当的计算给出（二阶无穷小）

$$\delta A^\mu = -R_{\sigma\alpha\beta}^\mu A^\sigma dx^\alpha \delta x^\beta$$

即流形上矢量（张量）沿无穷小闭合回路平移一周的效应由曲率张量来刻画。

[holonomy]

黎曼(Riemann)流形度规张量

在流形上引入度规场及其规定的不变距离，就构成（伪）黎曼流形（黎曼空间）。

度规张量

用（非退化）二次型

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

来定义流形上相邻两点（坐标差为 dx^μ ）之间的距离（线元） ds 。根据张量运算的商定理， $g_{\mu\nu}$ 是二阶协变张量，称为度规张量。由于线元只与度规张量的对称部分有关，为简单起见假设度规张量是对称的。

若该二次型是正定的，则称度规张量为黎曼的，相应的流形为黎曼空间；否则称度规张量为伪黎曼的，相应的流形为伪黎曼空间。

有了度规场，流形上任意一条曲线段的长度可以通过线元沿曲线段的积分来得到。

黎曼空间的特例：三维欧氏空间。采用笛卡尔坐标 $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ ，三维欧氏空间中的线元为

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

即度规张量为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{\mu\nu})$$

如果采用球坐标 $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$ ，则线元公式变为（作业）

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

即度规张量为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

伪黎曼空间的特例：四维闵氏空间。采用闵氏坐标 $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ ，线元（四维距离）为

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

即度规张量为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\eta_{\mu\nu})$$

注意以后如无特殊需要我们都取 $c = 1$ 。

对于一个（伪）黎曼空间（或区域），如能适当选取坐标系，使其度规张量具有形式

$$g_{\mu\nu}(x) = \begin{cases} \pm 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

则称为平坦的（伪）黎曼空间（或区域）。

线性代数告诉我们，非退化二次型必定可以通过合同变换化为标准形式 $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ 。由此可知，对于一般的黎曼空间，总可以用坐标变换把任一给定点 P 的度规 $g_{\mu\nu}(P)$ 化为这种标准形式。而如果流形上某一区域 V 内度规张量不依赖于坐标，则称该区域是平坦的。

张量指标的升降

对于黎曼空间，任何逆变矢量 T^μ （以及任何有逆变指标的张量）可以利用度规张量将其逆变指标“下降”为协变指标：

$$T_\mu = g_{\mu\nu} T^\nu$$

由于度规矩阵非退化，可以定义逆变的度规张量 $g^{\mu\nu}$ ，满足

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$$

即为度规矩阵的逆矩阵，又称为逆度规。利用逆度规，可以将任何协变指标“上升”为逆变指标：

$$\begin{aligned} T^\mu &= g^{\mu\nu} T_\nu \\ T^{\mu\nu} &= g^{\mu\alpha} T_\alpha^{*\nu} \end{aligned}$$

任一矢量可以借助度规而构成一个标量：

$$g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = T_\nu T^\nu = g^{\mu\nu} T_\mu T_\nu$$

称为该矢量长度的平方。在此意义下，线元就是矢量 dx^μ 长度的平方：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

显然我们已经不止一次看到，度规的混合张量形式 g_ν^μ 就是 Kronecker 张量 δ_ν^μ 。

Christoffel 联络

对于黎曼空间中引进的仿射联络，一个自然的要求是由该联络规定的平移操作保持任意矢量的长度不变。

考虑 P 点的任意逆变矢量 A^μ ，上述要求表为

$$g_{\mu\nu}(Q) A^\mu(P \rightarrow Q) A^\nu(P \rightarrow Q) = g_{\mu\nu}(P) A^\mu(P) A^\nu(P)$$

再根据平移和张量运算的相容性

$$g_{\mu\nu}(P \rightarrow Q) A^\mu(P \rightarrow Q) A^\nu(P \rightarrow Q) = g_{\mu\nu}(P) A^\mu(P) A^\nu(P)$$

以及 A^μ 的任意性，可知

$$g_{\mu\nu}(P \rightarrow Q) = g_{\mu\nu}(Q)$$

或者写为

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha - g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha = 0$$

该方程称为联络与度规的相容性条件。注意该条件对指标 μ 和 ν 对称，因此只有 $n^2(n+1)/2$ 个独立分量。但是一般的联络 $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha$ 有 n^3 个独立分量，因此不足以被该条件完全确定。如果进一

步要求联络无挠(对称), 则其独立分量正好也是 $n^2(n+1)/2$ 个, 则可由度规场通过该条件完全确定。满足度规相容性条件的对称联络称为黎曼空间中的 Christoffel 联络。

利用指标的循环替换 $\mu \rightarrow \nu \rightarrow \lambda \rightarrow \mu$, 相容性条件可以写成

$$g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - g_{\nu\alpha} \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha = 0$$

$$g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\alpha\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha - g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$$

将后两式相加并减去原始形式, 注意到度规和联络的对称性可得

$$g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g_{\mu\nu,\lambda} = 0$$

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} := g_{\lambda\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda})$$

也可以写成

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = g^{\alpha\lambda} \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu,\mu} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda})$$

这是 Christoffel 联络的明显表达式。

作业: 验证 Christoffel 联络满足联络的坐标变换性质。

联络与度规的相容性条件意味着度规张量在协变导数下的行为类似于常数。实际上, 再利用 Kronecker 张量求协变导数为零的性质, 易知 (作业)

$$g_{;\lambda}^{\mu\nu} = 0$$

因此 (各种形式的) 度规张量可以自由地移入或移出求协变导数的操作。

若无特别声明, 我们以后将只限于讨论对称联络。可以证明以下定理:

零联络坐标定理 设坐标 x^μ 下 P 点的对称联络为 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P)$, 则总能找到坐标变换 $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ 使得

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(P) = 0$$

证: 设坐标变换具有形式:

$$x^\mu - x_P^\mu = \tilde{x}^\mu + \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}^\mu \tilde{x}^\alpha \tilde{x}^\beta$$

其中 x_P^μ 为 P 点的坐标 (我们要求 $\tilde{x}_P^\mu = 0$), $C_{\alpha\beta}^\mu = C_{\beta\alpha}^\mu$ 为常数。对于该坐标变换有

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}\right)_P = \delta_\nu^\mu = \left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu}\right)_P$$

以及

$$\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha \partial \tilde{x}^\beta}\right)_P = C_{\alpha\beta}^\mu$$

故有

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(P) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\rho\beta}^\alpha(P) \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} = C_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(P)$$

即只需令 $C_{\alpha\beta}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P)$ 就可以使新坐标 \tilde{x}^μ 下 P 点的联络为零。证完。

(注意该定理并不依赖于流形上是否定义了度规。)

对于黎曼空间, 若在某一坐标系下 P 点的联络为零, 则有

$$g_{\mu\nu,\lambda}(P) = g_{\mu\nu;\lambda}(P) = 0$$

即在 P 点附近的小区域内 (只要 dx^μ 的二级小量可以忽略) $g_{\mu\nu}$ 近似为常数。也就是说, 对黎曼空间中的任一点 P, 总能找到一个适当的坐标系, 使得在该坐标系下看来 P 点的邻域是近似平坦的, 这正是等效原理的数学基础。

作业: 对半径为 R 的球面采用经纬度坐标, 写出其度规的具体形式并计算 Christoffel 联络。

黎曼空间中的测地线（短程线）

伪黎曼空间中的曲线（段）

与标准的黎曼空间不同，伪黎曼空间由于其度规非正定， ds^2 不一定为正，甚至符号可以随时变化（包括为零）。

以闵氏空间为例，狭义相对论告诉我们任何真实粒子的速度都不能超过光速（只有无质量粒子可以达到光速），故对于真实粒子的世界线有

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \leq 1$$
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \leq 0$$

推广到一般的伪黎曼空间，我们将线元分为三类：

- 1) 若 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$ ，我们称该线元是类时的；
- 2) 若 $ds^2 = 0$ ，我们称该线元是类光(null)的；
- 3) 若 $ds^2 > 0$ ，我们称该线元是类空的。

其中前两类线元又统称因果的，因为它们可以是广义相对论中真实粒子世界线的线元。

对于伪黎曼空间中一般的曲线，完全可以其中一段类空，另一段类光或者类时，等等。但是可以证明（思考），一条测地线的因果性一定处处相同。

线长（固有时）作为仿射参量

首先以类空曲线（段）为例，可以引入一个标量积分

$$s(P) = \int_{P_0}^P ds$$

作为一个自然的参量（称为线长参量），其中 P_0 是曲线上的固定点， P 是曲线上的任意点。

在该参量下切矢量定义为

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

由 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 可知 u^μ 总为单位矢量：

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1$$

将上式求协变导数有

$$g_{\mu\nu} u^\mu_{;\lambda} u^\nu + g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu_{;\lambda} = 2u^\mu_{;\lambda} u_\mu = 0$$

注意对 u^μ 的求导实际上只有沿曲线（切）方向才有意义，我们实际上只能得到

$$u^\lambda u^\mu_{;\lambda} u_\mu = 0$$

现在以 s 为曲线参数写出测地线方程的一般形式：

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = f(s)u^\mu$$

两边同与 u_μ 缩并可得

$$\begin{aligned} f(s) &= u_\mu \left(\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta \right) \\ &= u_\mu \left(u^\beta u^\mu_{;\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta \right) \\ &= u_\mu u^\beta u^\mu_{;\beta} = 0 \end{aligned}$$

即 s 为该测地线的仿射参量，相应的测地线方程为

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0$$

其次，对于类时曲线（段）这样定义的 s 为纯虚数，但如果以它的模长 τ 作为线长参量（称为固有时参量），或者等价地定义

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

则以 τ 代替 s 进行上述讨论，同样可以证明 τ 为仿射参量，唯一的区别在于四速度

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$$

最后，对于类光曲线，线长（或者固有时）参量失去意义。但是在较为宽泛的条件下可以证明，类光曲线一定是测地线，此时总有仿射参量。

[测地线与短程线]

[有挠情形自平行线与短程线的背离]

黎曼曲率张量

对于一般的流形，我们已经知道曲率张量具有对称性

$$R_{\lambda\mu\nu}^\rho = -R_{\lambda\nu\mu}^\rho$$

如果只考虑对称联络，容易证明曲率张量还满足如下的对称关系（Ricci 恒等式）：

$$R_{\lambda\mu\nu}^\rho + R_{\mu\nu\lambda}^\rho + R_{\nu\lambda\mu}^\rho = 0$$

注意到这是一个张量关系式，最简单的证明方法是利用前面证明的零联络坐标定理，只需要（针对流形上每一点）在联络为零的特殊坐标系下证明此式，则此式在任意坐标系下均成立。而在该特殊坐标系下，由于联络本身为零，只需要在最后的表达式中保留联络的导数项即可。因此

$$R_{\lambda\mu\nu}^\rho(P) = \Gamma_{\lambda\nu,\mu}^\rho(P) - \Gamma_{\lambda\mu,\nu}^\rho(P)$$

进行指标的两次循环替换 $\mu \rightarrow \nu \rightarrow \lambda \rightarrow \mu$ 再全部相加显然为零，故原式得证。

进一步，对于黎曼空间，Christoffel 联络构成的曲率张量称为黎曼（曲率）张量，显然满足 Ricci 恒等式。再利用度规得到 $(0, 4)$ 阶的黎曼张量：

$$R_{\sigma\lambda\mu\nu} = g_{\sigma\rho} R_{\lambda\mu\nu}^\rho$$

可以发现后者具有更加丰富的对称性。其证明方法同样是利用零联络坐标定理，有

$$\begin{aligned} R_{\sigma\lambda\mu\nu}(P) &= g_{\sigma\rho}(P) [\Gamma_{\lambda\nu,\mu}^\rho(P) - \Gamma_{\lambda\mu,\nu}^\rho(P)] \\ &= \Gamma_{\sigma\lambda\nu,\mu}(P) - \Gamma_{\sigma\lambda\mu,\nu}(P) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\sigma\lambda,\nu\mu} + g_{\sigma\nu,\lambda\mu} - g_{\lambda\nu,\sigma\mu})(P) - \Gamma_{\sigma\lambda\mu,\nu}(P) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\sigma\nu,\lambda\mu} - g_{\lambda\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\mu,\lambda\nu} + g_{\lambda\mu,\sigma\nu})(P) \end{aligned}$$

则除了前面的两种对称性外，还可以看到该张量对 σ 和 λ 指标的反称性以及整体交换 $\sigma\lambda$ 和 $\mu\nu$ 指标的对称性。归纳起来，黎曼张量的对称性如下：

- 1) $R_{\sigma\lambda\mu\nu} = -R_{\sigma\lambda\nu\mu}$

- 2) $R_{\sigma\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\sigma\mu\nu}$
- 3) $R_{\sigma\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\sigma\lambda}$
- 4) $R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} = 0$

现在对于 $n = 4$ 的情形分析黎曼张量的独立分量数。由于前两种对称性， $\sigma\lambda$ 和 $\mu\nu$ 指标分别都只有 $C_2^2 = 6$ 种独立的取值，再由第三种对称性，独立分量约化为 $7 \times 6/2 = 21$ 个，最后第四种对称性只给出一个独立的限制

$$R_{0123} + R_{0231} + R_{0312} = 0$$

故黎曼张量共有 20 个独立的分量。

一般的曲率张量有两种独立的缩并，但是对于黎曼张量，缩并

$$A_{\mu\nu} = R_{\rho\mu\nu}^\rho = g^{\rho\lambda} R_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv 0$$

因此独立的缩并方式只有

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^\rho$$

称为 Ricci 张量，它是对称的（作业）。

在黎曼空间中，还可以利用度规张量与 Ricci 张量继续缩并得到

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu$$

称为标量曲率（或者曲率标量）。爱因斯坦进一步引入

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

称为爱因斯坦张量，显然也对称，它在广义相对论的引力场方程中扮演关键性的角色。

按照以前的讨论，由于现在采用无挠联络，故只需在某区域 V 内黎曼张量为零就一定可以找到适当的坐标系使得联络为零，即

$$g_{\mu\nu,\lambda} = 0$$

可知在区域 V 内度规为常数（即黎曼空间上的平坦性判据）；反之亦然。

作业：计算半径为 R 的球面上的黎曼张量。

[计算黎曼张量的 Mathematica 程序]

Bianchi 恒等式

可以证明黎曼张量的一阶协变导数满足关系式

$$R_{\lambda\mu\nu;\sigma}^\rho + R_{\lambda\nu\sigma;\mu}^\rho + R_{\lambda\sigma\mu;\nu}^\rho = 0$$

称为 Bianchi 恒等式。

再次利用零联络坐标定理，有

$$R_{\lambda\mu\nu;\sigma}^\rho(P) = \Gamma_{\lambda\nu,\mu\sigma}^\rho(P) - \Gamma_{\lambda\mu,\nu\sigma}^\rho(P)$$

进行指标的两次循环替换 $\mu \rightarrow \nu \rightarrow \sigma \rightarrow \mu$ 再全部相加显然为零，故原式得证。

将上面的 Bianchi 恒等式中 ρ 和 σ 缩并可得

$$R_{\lambda\mu\nu;\rho}^\rho - R_{\lambda\nu;\mu} + R_{\lambda\mu;\nu} = 0$$

再利用度规张量将 λ 和 ν 缩并可得

$$R_{\mu;\rho}^\rho - R_{;\mu} + R_{\mu;\lambda}^\lambda = 0$$

$$\nabla_\rho \left(R_\mu^\rho - \frac{1}{2} \delta_\mu^\rho R \right) = 0$$

即爱因斯坦张量的协变散度恒为零，这正是爱因斯坦在构造引力场方程时需要的性质。

李(Lie)导数 Killing 矢量场

微分同胚(diffeomorphism)映射和李导数

映射 $f: M \rightarrow M'$ 称为微分同胚(映射)，若 f 是一一到上的，且 f 与 f^{-1} 均为 C^∞ 的。此时称 M 和 M' 是互为微分同胚的。

在不考虑其它附加结构的前提下，互为微分同胚的流形在数学上可以看作同一个流形。

现在考虑从流形 M 到自身的微分同胚映射(变换)。由于我们最终关心的是无穷小变换，因此不妨设流形上任一点 P 及其变换后的点 Q 均处于同一坐标片中，坐标分别为 x^μ 和 \tilde{x}^μ ，则微分同胚变换可表为

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x)$$

由此引出微分同胚变换的两种等价观点：

- 1) 主动观点，即坐标系作为固定的框架，变换作用到流形的点上，使之移动；
- 2) 被动观点，即流形的点未动，变换作用到坐标片上，上式解释为坐标变换。

下面只采用主动观点。无穷小微分同胚变换可以描述为

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu$$

其中 ϵ 是一个无穷小参量， $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$ 是一个任意给定的 C^∞ 矢量场，代表每一点在变换下移动的方向。流形 M 上的微分同胚变换构成(李)群，称为 M 的微分同胚群，在群论术语下 ξ^μ 称为微分同胚群(变换)的生成元。

利用微分同胚变换可以定义张量场 $T(x)$ 的另外一种张量导数，称为李导数：

$$\mathcal{L}_\xi T(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(Q) - T(P \Rightarrow Q)}{\epsilon}$$

其中 $T(P \Rightarrow Q)$ 是 $T(P)$ 在微分同胚变换下的像。显然 $\mathcal{L}_\xi T(x)$ 作为张量场与 $T(x)$ 同阶。

对于标量场 F ，可以简单定义

$$F(P \Rightarrow Q) = F(P)$$

作为 Q 点的标量，故有

$$\mathcal{L}_\xi F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(Q) - F(P)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F_\mu \Delta x^\mu}{\epsilon} = F_\mu \xi^\mu$$

对于逆变矢量场 $k^\mu(x)$ ，由于 $k^\mu(P)$ 可以看作过 P 点某一曲线 C 的切矢量，微分同胚变换将 C 变到过 Q 点的另一曲线 D ，则 D 在 Q 点的切矢量显然是 Q 点的逆变矢量，我们自然将其定义为 $k^\mu(P \Rightarrow Q)$ 。在这一观点下，有

$$\begin{aligned} k^\mu(P) &= \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)_P \\ x^\mu &\xrightarrow{dx^\mu} \begin{cases} x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x) \\ x^\mu + dx^\mu + \epsilon \xi^\mu(x + dx) \end{cases} \\ d\tilde{x}^\mu &= dx^\mu + \epsilon \xi_{,\nu}^\mu dx^\nu \\ k^\mu(P \Rightarrow Q) &= \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda} = k^\mu(P) + \epsilon \xi_{,\nu}^\mu k^\nu(P) \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi k^\mu(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k^\mu(Q) - k^\mu(P) - \epsilon \xi_{,\nu}^\mu k^\nu(P)}{\epsilon} \\ &= k_{,\nu}^\mu \xi^\nu - \xi_{,\nu}^\mu k^\nu = -\mathcal{L}_k \xi^\mu(x) \end{aligned}$$

作业：验证该李导数在坐标变换下满足逆变矢量的变换性质。

假设微分同胚变换（映射）与张量运算相容，同样可以得到李导数的莱布尼茨法则（思考），由此可以得出任意阶张量的李导数计算公式。以协变矢量场 $p_\mu(x)$ 为例：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi(p_\mu k^\mu) &= (p_\mu k^\mu)_{,\nu} \xi^\nu = p_{\mu,\nu} k^\mu \xi^\nu + p_\mu k_{,\nu}^\mu \xi^\nu \\ \mathcal{L}_\xi(p_\mu k^\mu) &= (\mathcal{L}_\xi p_\mu) k^\mu + p_\mu (\mathcal{L}_\xi k^\mu) \\ &= (\mathcal{L}_\xi p_\mu) k^\mu + p_\mu (k_{,\nu}^\mu \xi^\nu - \xi_{,\nu}^\mu k^\nu) \\ (\mathcal{L}_\xi p_\mu) k^\mu &= p_{\mu,\nu} k^\mu \xi^\nu + p_\mu \xi_{,\nu}^\mu k^\nu \\ \mathcal{L}_\xi p_\mu &= p_{\mu,\nu} \xi^\nu + p_\nu \xi_{,\mu}^\nu\end{aligned}$$

对于高阶张量场的类似结果直接写出如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi T_{\mu\alpha} &= T_{\mu\alpha,\nu} \xi^\nu + T_{\nu\alpha} \xi_{,\mu}^\nu + T_{\mu\nu} \xi_{,\alpha}^\nu \\ \mathcal{L}_\xi T_\mu^\alpha &= T_{\mu,\nu}^\alpha \xi^\nu + T_\nu^\alpha \xi_{,\mu}^\nu - \xi_{,\nu}^\alpha T_\mu^\nu\end{aligned}$$

讨论：

- 1) 李导数既取决于张量场本身，也依赖于矢量场 $\xi^\mu(x)$ 。
- 2) 李导数可以定义在任何微分流形上，不需要有度规，甚至不需要有联络。
- 3) 如果有联络且将李导数计算公式中的普通导数替换为协变导数，则联络的对称部分将会自动全部抵消。该性质常用于广义相对论的具体计算，如：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g_{\mu\alpha} &= g_{\mu\alpha,\nu} \xi^\nu + g_{\nu\alpha} \xi_{,\mu}^\nu + g_{\mu\nu} \xi_{,\alpha}^\nu \\ &= \xi_{\alpha;\mu} + \xi_{\mu;\alpha}\end{aligned}$$

等度规映射（变换）和 Killing 矢量场

对于黎曼空间，我们关心一类特殊的微分同胚变换，即保持不变距离（或者矢量长度）的变换，称为等度规(isometry)变换（或者等长变换）。注意在该定义下，我们实际上假设度规场不随微分同胚变换而变，但是由于微分同胚变换与张量运算的相容性，等度规变换的要求等价于（思考）

$$g_{\mu\nu}(P \Rightarrow Q) = g_{\mu\nu}(Q)$$

其无穷小形式为

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0$$

该方程称为 Killing 方程，满足该方程的矢量场 $\xi^\mu(x)$ （即等度规变换的生成元）称为 Killing 矢量场。给定度规看作 ξ^μ 满足的方程时显然超定，但在特殊情形有解。

由于度规是黎曼空间唯一独立的附加结构（联络由其决定），等度规变换（如果存在的话）实际上反映了黎曼空间的几何对称性。具体地，给定的黎曼空间中线性独立的 Killing 矢量场个数对应于该空间的独立几何对称性的数目。以欧氏平面 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 为例，求解 Killing 方程可以得到 3 个线性独立的解，分别对应于两个方向的平移变换和围绕原点的转动变换。

狭义相对论的闵氏空间是更为重要的例子。对于 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 求解 Killing 方程可以得到 10 个线性独立的解，分别对应于四个方向的时空平移变换和 6 个独立的 Lorentz 变换（包括空间旋转），如对应于时间平移变换的 Killing 矢量在闵氏坐标下具有极其简单的形式：

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

[最大对称空间]

考察更一般时空的几何对称性（不变性）在广义相对论中具有重要意义，此处我们以时间平移不变性为例。由于坐标时间在广义相对论中并无直接的物理意义，我们转而对 Killing 矢量场提出要求。如果某给定的时空中某区域存在类时的 Killing 矢量场，即

$$g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu < 0$$

则称该时空区域（的度规场）是稳定（稳态）的(stationary)。现在来分析稳定性与时间平移不变性的关系。在该区域以 $\xi^\mu(x)$ 的积分曲线为新坐标 $\tilde{x}^0 = \lambda$ 的坐标线，即

$$\xi^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

$$\tilde{\xi}^\mu(\tilde{x}) = \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\lambda} = (1, 0, 0, 0)$$

注意积分曲线定义中可能出现的比例系数 $a(\lambda)$ 已经通过参数的适当选取而归一化，同时“空间”坐标 $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ 的选择还留有较大的任意性且并不重要。这样构造的新坐标系称为矢量场 $\xi^\mu(x)$ 的适配坐标系。在适配坐标系下（为简便起见去掉所有符号上的“~”），容易看出任何张量的李导数直接退化为普通导数：

$$\mathcal{L}_\xi T = T_{,\nu} \xi^\nu = \partial_0 T$$

特别地，由于 Killing 方程不依赖于坐标系，因此在适配坐标系下有

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \partial_0 g_{\mu\nu}$$

即度规场不显含“时间”坐标 x^0 。换句话说，时间平移变换（ b 为常数）

$$x^0 \rightarrow x^0 + b$$

是等度规变换，该时空几何具有时间平移不变性。后面可以看到，时间平移不变性将导致能量守恒（广义相对论框架下的诺特定理）。不显含于度规场中的坐标称为循环坐标（注意循环坐标的概念不局限于对应的 Killing 矢量场类时的情形）。

黎曼空间中的常用计算

通常将度规 $g_{\mu\nu}$ 的行列式简记为 g ，易证

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}$$

其中 $\Delta^{\mu\nu}$ 为 $g_{\mu\nu}$ 的代数余子式。由此有

$$\partial_\rho g = gg^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu} g_{,\rho}^{\mu\nu}$$

故可知 Christoffel 联络的缩并

$$\Gamma_{\rho\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2g} \partial_\rho g = \partial_\rho \ln \sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \sqrt{-g}$$

协变散度是黎曼空间中的常用运算，以逆变矢量场 $J^\mu(x)$ 为例：

$$\nabla_\rho J^\rho = \partial_\rho J^\rho + \Gamma_{\rho\mu}^\mu J^\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} J^\rho)$$

如果 $J^\mu(x)$ 的协变散度为零，则意味着它是黎曼空间中的守恒流。

对于二阶逆变张量场 $T^{\mu\nu}(x)$ ，类似地有

$$\nabla_\rho T^{\rho\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} T^{\rho\nu}) + \Gamma_{\mu\rho}^\nu T^{\rho\mu}$$

故当 $T^{\mu\nu}(x)$ 反称时可得

$$\nabla_\rho T^{\rho\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} T^{\rho\nu})$$

这也是相当有用的结论。

作业：证明对于任意阶全反称逆变张量场 $H^{\mu\nu\dots\sigma}(x)$ 有

$$\nabla_\rho H^{\rho\nu\dots\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} H^{\rho\nu\dots\sigma})$$

第二章 引力场方程及广义相对论的实验检验

引力几何化与弱场近似

引力几何化

从点粒子出发，等效原理要求引力和惯性力可以用同样的方式来描述，而惯性力的本质是采用了一般的坐标系（非惯性系）来描述粒子运动。

对于狭义相对论的闵氏空间，自由质点的运动方程为

$$\frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0$$

其中 X^μ 是标准的闵氏坐标系。利用一般的坐标变换

$$x^\mu = x^\mu(X^\mu)$$

来引入非惯性系，则上述自由质点的运动方程变为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

其中

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{\partial^2 X^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}$$

显然惯性力场的场强是由联络描述的，因此根据等效原理引力场的场强也应该由黎曼空间的联络来描述，这种思想称为引力的几何化。在这一图像下，无论是在惯性力场中还是在引力场中，自由粒子的运动方程都是测地线方程。

由于克氏联络是度规场的导数，而联络对应于引力场强，因此度规就对应于引力势。这个类比相当有启发意义：静电势（标量） \rightarrow 电磁四矢势（矢量），自旋为1的场；牛顿引力势（标量） \rightarrow 相对论引力势（张量），（微扰理论下）自旋为2的场。

黎曼空间中的零联络坐标系就对应于局域惯性系，等效原理要求局域惯性系中狭义相对论成立，因此总能选择适当的坐标系使得在任意给定的点 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 。由于坐标变换

$$\eta_{\mu\nu} = \tilde{\partial}_\mu x^\alpha g_{\alpha\beta} \tilde{\partial}_\nu x^\beta$$

实际上是对称矩阵($g_{\mu\nu}$)的合同变换，而线性代数中的惯性定理告诉我们任何合同变换不改变对称矩阵本征值的正负，故 $g_{\mu\nu}$ 的本征值必定与 $\eta_{\mu\nu}$ 一样是 $(-, +, +, +)$ 。实际上，这是标准的广义相对论对一个黎曼空间可以作为物理时空的基本要求。

弱引力场中的自由粒子

前面已经指出，在任意引力场中自由粒子的运动方程都是（伪）黎曼空间中的测地线方程

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

现在我们考虑以下条件（非相对论弱场近似条件）：

1) 引力场是弱场，即

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ |h_{\mu\nu}| &\ll 1 \end{aligned}$$

2) 引力场是稳态的，即

$$g_{\mu\nu,0} = h_{\mu\nu,0} = 0$$

3) 引力场是空间缓变的, 即

$$|g_{\mu\nu,i}| = |h_{\mu\nu,i}| \ll 1$$

其中(及以后)拉丁指标表示空间坐标(1,2,3)。

4) 粒子运动是低速的, 即

$$\left| \frac{dx^i}{dx^0} \right| \ll 1$$

则容易论证测地线方程还原为牛顿方程:

根据条件1)-3), 联络是小量, 保留至一级小量有

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}(h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\rho\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\rho})$$

而条件4)和2)以及

$$d\tau^2 \approx -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \approx dx^0 dx^0$$

将测地线方程(同样保留至一级小量)简化为

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^0 \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^i \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

由前一式解出

$$t := x^0 = \tau + b$$

故后一式化为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}h_{00,i}$$

与牛顿方程

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i \varphi$$

(其中 φ 为牛顿引力势)比较可知

$$\varphi = -\frac{1}{2}h_{00}$$

其中本来可以差的常数项已经被无穷远处引力场消失的条件确定为零。故有

$$g_{00} = -1 + h_{00} = -1 - 2\varphi$$

因此, 从广义相对论看来, 牛顿方程在非相对论弱场近似下适用。那么, 对于这个方程已经在很高的精度上证实的天体力学领域而言, 非相对论弱场近似条件究竟是否成立呢? 我们可以通过讨论一个质量为 M 的静态球对称引力源来回答这个问题。

按照牛顿引力理论, 球对称引力源的外引力势为

$$\varphi = -\frac{GM}{r}$$

其中 G 为万有引力常数。对于弱场有

$$g_{00} = -1 - 2\varphi = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

而弱场条件为

$$r \gg 2GM =: R_g$$

其中 R_g 称为球对称引力源的引力半径(或史瓦西半径)。恢复光速: $R_g = 2GM/c^2$ 。

对于太阳而言, 质量 $M = 2 \times 10^{33} g$, 估算其引力半径为 $R_g = 3 km$, 而其实际半径为 $7 \times 10^5 km$, 即对于在太阳表面运动的粒子弱场条件也很好地成立。

注意，在引力源内部，上述外引力势公式不再适用。实际上，在已经观测到的所有星体中，只有中子星表面（及其内部）不满足弱场条件，必须用广义相对论来研究。

爱因斯坦方程及其牛顿近似

爱因斯坦引力场方程

由于牛顿引力场方程

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G\rho$$

左方的引力势 φ 在相对论情形已经推广为度规张量，自然想到右方的质量密度 ρ 也推广为张量，而能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 正是这样一个选择。于是引力场方程的数学形式可以推测为

$$F_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 最高只含度规张量的二阶导数，且对二阶导数项是线性的。黎曼几何中可以证明（略），由度规张量及其不超过二阶的导数构成，且对二阶导数项为线性的张量除了度规张量本身以外只有黎曼张量及其缩并。因此， $F_{\mu\nu}$ 最一般的形式为

$$F_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu}$$

其中系数为常数。由于狭义相对论中有能量动量张量守恒：

$$\partial_\nu T_\mu^\nu = 0$$

在广义相对论中这一事实自然推广为能量动量张量协变守恒：

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$$

因此 $F_{\mu\nu}$ 也必须协变守恒。由于 $R_{\mu\nu}$ 本身一般来说并不协变守恒，而前面我们又已经知道 $R_{\mu\nu}$ 和 $g_{\mu\nu}R$ 的线性组合爱因斯坦张量协变守恒，故引力场方程的一般形式只能是

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

其中 κ 称为相对论引力常数， Λ 称为宇宙学常数。 $\Lambda = 0$ 的最简单情形

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}$$

称为爱因斯坦引力场方程。

将爱因斯坦方程缩并得

$$R = -\kappa T$$

代入原方程有

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T)$$

若 $T_{\mu\nu} = 0$ 则有真空区域的引力场方程

$$R_{\mu\nu} = 0$$

满足这一方程的黎曼空间称为 Ricci 平坦的黎曼空间。

引力场方程的牛顿近似

现在我们讨论爱因斯坦方程退化为牛顿引力场方程的条件，并由此确定出相对论引力常数 κ 与牛顿引力常数的关系。

若物质分布为非相对论理想流体，由于微观的相对热运动速度远小于光速因而 $p \ll \rho$ ，其能量动量张量为

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

其中四速度场 $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ 满足归一化条件

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$$

故对于流体静止系有

$$u^\mu = (-g_{00})^{-1/2} (1, 0, 0, 0)$$

因此能量动量张量只有唯一的非零分量

$$T^{00} = -\rho/g_{00}$$

其迹为 $T = T^{00}g_{00} = -\rho$ 。

在静态、缓变、弱场条件下，保留至一级小量的联络表达式前面已写出，其非零分量为

$$\begin{aligned}\Gamma_{0i}^0 &= -\frac{1}{2}h_{00,i} = \Gamma_{00}^i \\ \Gamma_{ij}^0 &= -\frac{1}{2}(h_{0i,j} + h_{0j,i}) \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}(h_{0i,j} - h_{0j,i}) \\ \Gamma_{jk}^i &= \dots\end{aligned}$$

Ricci 张量保留至一级小量有

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho$$

其分量为

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\frac{1}{2}\partial_i \partial_i h_{00} \\ R_{0i} &= \dots, \quad R_{ij} = \dots\end{aligned}$$

在一级近似下

$$R^{00} = \eta^{00}\eta^{00}R_{00} = R_{00}$$

故爱因斯坦方程的 00 分量

$$R^{00} = \kappa(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00}T)$$

化为

$$\partial_i \partial_i h_{00} = -\kappa\rho$$

而前面已经知道

$$\varphi = -\frac{1}{2}h_{00}$$

故有类似于牛顿引力场方程的形式

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{2}\kappa\rho$$

对比标准的牛顿引力场方程可以定出 $\kappa = 8\pi G$ 。恢复光速： $\kappa = 8\pi G/c^4$ 。

注意如果在上述讨论中考虑到一般的引力场方程中可能出现的 $\Lambda g_{\mu\nu}$ 项，则导出的牛顿引力场方程右方将减去常数 Λ 。由于在太阳系（甚至更大）尺度上牛顿引力理论已经得到很好的验证而没有发现 Λ 的可观测效应，故 Λ 应该足够小。爱因斯坦首先指出这一项会在宇宙学上起作用，并称之为宇宙项。

球对称引力场史瓦西 (Schwarzschild) 解

球对称时空的度规场

爱因斯坦方程是非线性偏微分方程组，一般来说求解极其困难。但是经验告诉我们，对称性能够大大简化物理问题。以牛顿引力理论为例，球对称的引力场是最为简单的。广义相对论

中也不例外。

从几何上说，球对称性意味着有三个相互垂直方向的转动对称轴。对于度规场而言，绕这些轴的转动变换是等度规变换，其生成元是 Killing 矢量场。以这些轴向为基准建立坐标系 (x^0, x^1, x^2, x^3) ，度规写为

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^idx^j$$

无穷小转动变换 (ϵ 为转角)

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu$$

的生成元如下 (ξ^0 均为零):

1) 绕 x^1 转动:

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^2 = x^3, \quad \xi^3 = -x^2$$

2) 绕 x^2 转动:

$$\xi^1 = -x^3, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = x^1$$

3) 绕 x^3 转动:

$$\xi^1 = x^2, \quad \xi^2 = -x^1, \quad \xi^3 = 0$$

将上述三个生成元的具体形式代入 Killing 方程

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\rho}\xi^\rho + g_{\mu\rho}\xi_{,\nu}^\rho + g_{\nu\rho}\xi_{,\mu}^\rho = 0$$

即可给出球对称性对度规场的限制。

以 Killing 方程的 00 分量为例，三个生成元分别给出

$$g_{00,2}x^3 - g_{00,3}x^2 = 0$$

$$g_{00,3}x^1 - g_{00,1}x^3 = 0$$

$$g_{00,1}x^2 - g_{00,2}x^1 = 0$$

利用三维矢量分析的语言，形式上可以将以上方程统一写为

$$\nabla g_{00} \times \vec{r} = 0$$

因此 g_{00} 的最一般形式只能为

$$g_{00}(x) = F(x^0, r)$$

其中 $r = |\vec{r}|$ ，而 F 是任意函数。

Killing 方程的其它分量比 00 分量稍复杂，但最后不难解得球对称度规的一般形式为

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(x^0, r)(dx^0)^2 + 2G(x^0, r)x^i dx^0 dx^i \\ &\quad + A(x^0, r)dx^i dx^i + B(x^0, r)(x^i dx^i)^2 \end{aligned}$$

利用球坐标系代替空间直角坐标系，我们有

$$x^i dx^i = rdr$$

$$dx^i dx^i = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

故度规可以更方便地写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= F(t, r)dt^2 + 2N(t, r)dtdr \\ &\quad + M(t, r)dr^2 + L(t, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

通过坐标系的适当选择（坐标规范），还能将度规的形式进一步化简。依次作如下的坐标变换（保持 (θ, φ) 不变）：

$$\tilde{r}^2 = L(t, r)$$

$$t = t(\tilde{t}, \tilde{r})$$

其中 $t(\tilde{t}, \tilde{r})$ 总可以适当选取以消掉 $dtd\tilde{r}$ 交叉项（思考），最终可以将度规化简为

$$ds^2 = -e^{\nu(t,r)}dt^2 + e^{\mu(t,r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

其中 (t, r) 坐标上的 “~” 已经略去。这里的两个未知函数需要通过动力学来确定。

史瓦西解

史瓦西首先求出了真空引力场方程 $R_{\mu\nu} = 0$ 的静态球对称解。

由于上一小节得出的球对称度规的一般形式是对角的，因此其逆度规

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -e^{-\nu}, & g^{rr} &= e^{-\mu} \\ g^{22} &= r^{-2}, & g^{33} &= r^{-2} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

也是对角的。这里考虑的是静态解，故待求的 μ 和 ν 只是 r 的函数。

克氏联络的非零分量为

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}\nu', & \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}\mu', & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}e^{\nu-\mu}\nu' \\ \Gamma_{22}^r &= -re^{-\mu}, & \Gamma_{33}^r &= \Gamma_{22}^r \sin^2 \theta, & \Gamma_{r2}^2 &= r^{-1} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{r3}^3 &= r^{-1}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

而 Ricci 张量

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\lambda$$

的非零分量为

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{\nu-\mu} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'}{4}(\nu' - \mu') \right) \\ R_{rr} &= -\frac{\nu''}{2} + \frac{\mu'}{r} - \frac{\nu'}{4}(\nu' - \mu') \\ R_{22} &= -e^{-\mu} \left(1 - e^\mu + \frac{r}{2}(\nu' - \mu') \right) \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

因此有三个方程

$$\begin{aligned} \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'}{4}(\nu' - \mu') &= 0 \\ -\frac{\nu''}{2} + \frac{\mu'}{r} - \frac{\nu'}{4}(\nu' - \mu') &= 0 \\ 1 - e^\mu + \frac{r}{2}(\nu' - \mu') &= 0 \end{aligned}$$

实际上由于爱因斯坦张量满足 Bianchi 恒等式，其中只有两个方程是独立的，这样可以解出 μ 和 ν 两个未知函数。将前两式相加有

$$\mu' + \nu' = 0 \Rightarrow \mu + \nu = \lambda$$

其中 λ 为常数。将这个结果代入最后一个方程以消去 ν' ，可得

$$1 - e^\mu - r\mu' = 0 \Rightarrow (re^{-\mu})' = 1$$

即有

$$e^{-\mu} = 1 - \frac{k}{r} = 1/g_{rr}$$

其中 k 为常数。而

$$g_{tt} = -e^\nu = -e^{\lambda-\mu} = -e^\lambda \left(1 - \frac{k}{r} \right)$$

注意 λ 只出现在 g_{tt} 中，改变 λ 相当于改变时间标度，因此最简单的选择是令 $\lambda = 0$ 。再考虑到在牛顿近似下

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

故有 $k = 2GM$ 。最后可得

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

这就是描述静态球对称外引力场的史瓦西解。这个解与牛顿引力理论中球对称解的共同点是仅由一个积分常数 M 描述，从前面牛顿近似的分析可知其代表引力源的质量。

讨论：

- 1) 史瓦西解只对球对称引力源的外部真空区域有效，故又称为外部解。
- 2) 趋于无穷远 ($r \rightarrow \infty$) 时史瓦西解回到球坐标系下的闵氏空间。
- 3) r 为面积半径，不代表等时面上径向的固有距离。
- 4) t 不是静止观测者的固有时，但趋于无穷远 ($r \rightarrow \infty$) 时回到固有时。

Birkhoff 定理

如果球对称引力源并不一定静止，则 Birkhoff 定理说其外引力场仍然由史瓦西解描述。简要证明如下。

此时度规取最一般的球对称形式，即待求的 μ 和 ν 是 (t, r) 的函数。此时克氏联络多出三个非零分量：

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}\dot{\nu}, \quad \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2}\dot{\mu}, \quad \Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2}e^{\mu-\nu}\dot{\mu}$$

其中 “.” 代表对 t 的导数。Ricci 张量的 R_{22} 和 R_{33} 分量不变，但 R_{tt} 和 R_{rr} 变为

$$R_{tt} = \dots - \frac{1}{2}\left(\ddot{\mu} + \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}\right)$$

$$R_{rr} = \dots + \frac{1}{2}e^{\mu-\nu}\left(\ddot{\mu} + \frac{1}{2}\dot{\mu}^2 - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}\right)$$

另外还多了一个非零分量：

$$R_{tr} = r^{-1}\dot{\mu}$$

但是真空引力场方程 $R_{tr} = 0$ 直接给出 $\dot{\mu} = 0$ ，故 μ 仍只含 r ，且将其代入 R_{tt} 和 R_{rr} 表达式中显然动态情形的附加项完全消失，因此引力场方程的求解过程与上一小节基本相同。

实际上唯一需要注意的是

$$\dot{\mu}' + \dot{\nu}' = 0 \Rightarrow \mu + \nu = \lambda$$

这一步，现在 λ 可以是 t 的任意函数，故得到的度规形式为

$$ds^2 = -e^{\lambda(t)}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

但是 $\lambda(t)$ 同样只出现在 g_{tt} 中，因此只需对时间坐标作变换

$$e^{\lambda(t)}dt^2 = d\tilde{t}^2 \Rightarrow \tilde{t} = \int e^{\lambda(t)/2}dt$$

则以上度规完全回到标准的史瓦西解。

检验粒子在引力场中的运动

时空对称性与守恒量

首先考虑有质量的检验粒子（质点）。在相对论中，质点的逆变四动量为

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

其中 m 是质点的固有质量（静质量），为标量。引入协变四动量

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu$$

可以证明，若 ξ^μ 是 Killing 矢量场，则 $p_\mu \xi^\mu$ 是质点运动的一个守恒量（诺特定理在广义相对论检验粒子运动中的表现）。

实际上，我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (p_\mu \xi^\mu) &= (\xi_\mu p^\mu)_{,\nu} u^\nu = (\xi_\mu p^\mu)_{,\nu} u^\nu \\ &= m(u_{;\nu}^\mu u^\nu \xi_\mu + \xi_{\mu;\nu} u^\mu u^\nu) \\ &= m\left(\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu u^\rho u^\nu\right) \xi_\mu = 0 \end{aligned}$$

故得证。注意这个守恒的意思是 $p_\mu \xi^\mu$ 沿测地线是一个常数。

回忆起上一章关于 Killing 矢量场的讨论，若时空度规有循环坐标（或者对给定的 Killing 矢量场取其适配坐标） x^k ，则相应的 Killing 矢量场有简单形式

$$\xi^\mu = \delta^{\mu k}$$

而相应的微分同胚变换是 x^k 坐标平移：

$$\tilde{x}^\mu = \begin{cases} x^\mu, & \mu \neq k \\ x^\mu + \epsilon, & \mu = k \end{cases}$$

此时相应的守恒量是

$$p_\mu \xi^\mu = p_k$$

即协变四动量对应于循环坐标的分量。

对于史瓦西度规， t 和 φ 是循环坐标，故其中检验粒子运动的守恒量为

$$\begin{aligned} p_t &= g_{t\mu} p^\mu = g_{tt} p^t = -m\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \\ p_3 &= g_{3\mu} p^\mu = g_{33} p^3 = mr^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \end{aligned}$$

回到狭义相对论情形 ($M = 0$)（球坐标系），容易看清 p_t 和 p_3 的物理意义分别是（负）能量和角动量的第三分量（作业）。

史瓦西时空中检验粒子的运动方程

由于球对称性，质点必作平面运动，为方便起见不妨取赤道面为轨道平面，则有

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

再由 $p_t = -mE$ 和 $p_3 = mL$ 是守恒量有

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} &= E \\ r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} &= L \end{aligned}$$

最后，四速度 u^μ 的归一化条件 $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ 也给出一个方程

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -1$$

以上四个方程就是测地线方程的四个初积分，可以完全确定质点的运动。

将上述方程稍加整理可得如下这组方程：

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{d\tau} &= 0, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \\ \frac{dt}{d\tau} &= \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} E \\ \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)\end{aligned}$$

作为我们后面讨论的出发点。

作业：说明 $r \rightarrow \infty$ 时径向方程与狭义相对论中 $E^2 - \vec{p}^2 = 1$ 的关系。什么条件下质点不可能运动到无穷远？

对比牛顿力学中质点在球对称引力场中的运动方程，其初积分为

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{r^2} \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= 2E_n + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{r^2}\end{aligned}$$

引入径向运动的有效势

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}$$

即牛顿引力势和离心势的叠加，径向方程可以简单改写为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E_n - V(r)$$

显然经典的运动只能发生在 $E_n \geq V(r)$ 的范围内。

利用函数图像很容易总结出径向运动的完整分类：

- 1) $L = 0$: 吸收态（撞向力心或者逃逸到无穷远，若 $E_n < 0$ 则只能撞向力心）。
- 2) $L \neq 0, E_n < 0$: 束缚态。
- 3) $L \neq 0, E_n \geq 0$: 散射态。

对广义相对论情形，类似地引入有效势

$$\begin{aligned}U^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \\ &= 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3}\end{aligned}$$

而将径向方程写为

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - U^2$$

则 U^2 与 V 最大的区别在于 $-2GML^2/r^3$ 这一项 (U^2 中的常数项 1 只是反映相对论性静能量的贡献使得无穷远静止质点 $E^2 = 1$)。在 r 很小时这一 r 负幂次最高的项将起主导作用，使得有效势总是表现为吸引，这是与牛顿情形显著不同的地方。

为了方便分析，我们引入无量纲参数

$$\tilde{r} = \frac{r}{GM}, \quad \tilde{L} = \frac{L}{GM}$$

将有效势写成

$$U^2 = 1 - \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{r}^2} - \frac{2\tilde{L}^2}{\tilde{r}^3}$$

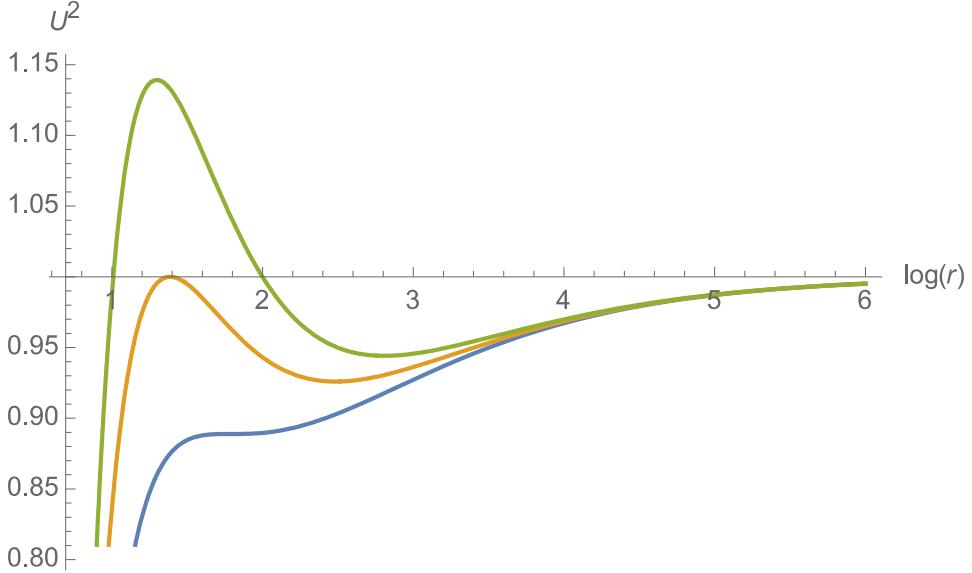
则有效势的形状随 \tilde{L} 的取值不同可以分为以下情况：

- 1) $\tilde{L} > 4$: 有效势 U^2 有一峰值 $U_m^2 > 1$ 的势垒。此时可能的运动分为三类： $E^2 < 1$, 束缚态；

$1 \leq E^2 < U_m^2$, 散射态; $E^2 \geq U_m^2$, 吸收态。

2) $2\sqrt{3} \leq \tilde{L} \leq 4$: 势垒仍存在, 但其峰值 $U_m^2 \leq 1$ 。此时可能的运动分为两类: $E^2 < U_m^2$, 束缚态; $E^2 \geq U_m^2$, 吸收态 (若 $E^2 < 1$ 则只能撞向力心)。

3) $\tilde{L} < 2\sqrt{3}$: 势垒消失, 只有吸收态 (若 $E^2 < 1$ 则只能撞向力心)。



总而言之, 广义相对论情形与牛顿情形相比, 质点被引力源吸收的可能性大大增加, 这是相对论天体力学中空间物质吸积理论的基础。

作业: 利用 $d_r U^2 = 0$ 和 $d_r^2 U^2 = 0$ 计算束缚态的最小圆轨道半径。

行星轨道近日点的进动

行星轨道方程

首先看牛顿情形。将角向方程代入径向方程有

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 = \frac{2E_n}{L^2} + \frac{2GM}{rL^2} - \frac{1}{r^2}$$

两边再对 φ 求导得到

$$2 \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right) \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = \frac{2GM}{L^2} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right) - \frac{2}{r} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2}$$

此即行星轨道的比内 (Binet) 公式。作无量纲化

$$u := GM/r$$

则比内公式写为

$$d_\varphi^2 u + u = \tilde{L}^{-2}$$

容易解得

$$u = \tilde{L}^{-2}(1 + e \cos \varphi)$$

其中 e 为行星轨道的偏心率, 当 $|e| < 1$ 时轨道为椭圆。

广义相对论情形可以作类似处理。将角向方程代入径向方程有

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2GM}{rL^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r^3}$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GM}{r^2}$$

$$d_\varphi^2 u + u = \tilde{L}^{-2} + 3u^2$$

水星近日点的进动

对于太阳有

$$GM = 1.5 \times 10^3 m$$

要使广义相对论的效应（比内公式的修正项 $3u^2$ ）最为明显，应考虑 u 较大即轨道半径 r 较小的情形。对于水星有

$$r = 5 \times 10^{10} m$$

故 u 的量级约为 10^{-7} （也是 \tilde{L}^{-2} 的量级），可以用微扰法来处理。

将待求函数 u 按照 \tilde{L}^{-2} 来展开：

$$u = \tilde{L}^{-2}(1 + e \cos \varphi) + \tilde{L}^{-4}u_2 + \dots$$

并代入相对论修正的比内公式中，可得

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{-4}(d_\varphi^2 u_2 + u_2) &= 3\tilde{L}^{-4}(1 + e \cos \varphi)^2 \approx 3\tilde{L}^{-4}(1 + 2e \cos \varphi) \\ d_\varphi^2 u_2 + u_2 &= 3 + 6e \cos \varphi \end{aligned}$$

其中用到水星轨道 $e \ll 1$ 的事实。这个关于 u_2 的方程是线性的，因此可以将其非齐次项拆为两部分来处理，最后得到满足要求的解

$$u_2 = 3(1 + e \cos \varphi) + 3e\varphi \sin \varphi$$

故精确到 \tilde{L}^{-4} ，我们有

$$\begin{aligned} u &\approx (\tilde{L}^{-2} + 3\tilde{L}^{-4})(1 + e \cos \varphi) + 3\tilde{L}^{-4}e\varphi \sin \varphi \\ &\approx (\tilde{L}^{-2} + 3\tilde{L}^{-4})(1 + e \cos \varphi + 3\tilde{L}^{-2}e\varphi \sin \varphi) \\ &\approx (\tilde{L}^{-2} + 3\tilde{L}^{-4})[1 + e \cos(\varphi - 3\tilde{L}^{-2}\varphi)] \end{aligned}$$

显然近日点的条件是

$$(1 - 3\tilde{L}^{-2})\varphi = 2n\pi$$

两次相邻的近日点其角度之差为

$$\Delta\varphi = 2\pi(1 - 3\tilde{L}^{-2})^{-1} - 2\pi = 6\pi \left(\frac{GM}{L}\right)^2$$

将水星的观测数据代入，可以算出每世纪其近日点积累的进动为 $43''$ ，与实际观测的结果（同时考虑到其它因素）相符。

光线的引力偏折

等效原理认为光线在引力场中一般来说将会偏折。

光子的固有质量为零，其世界线为类光线，无法取固有时参量 τ 。但是类光测地线可以取仿射参量 λ ，这样光子的逆变四动量定义为

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

与质点的情形类似，若 ξ^μ 是 Killing 矢量场，则容易证明 $p_\mu \xi^\mu$ 是光子运动的一个守恒量。

具体对于史瓦西度规，仍有 $p_t = -E$ 和 $p_3 = L$ 守恒，故可得

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L$$

而类光条件 $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$ 给出另一个初积分

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 &= 0 \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= E^2 - \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) =: E^2 - U^2 \end{aligned}$$

其中有效势 U^2 在 $r = 3GM$ (不稳定圆轨道半径) 处有一峰值为

$$U_m^2 = \frac{1}{27}\left(\frac{L}{GM}\right)^2$$

的势垒, 故当 $E^2 < U_m^2$ 为散射态, 而当 $E^2 \geq U_m^2$ 为吸收态。注意在引力半径 $r = R_g$ 处 U^2 为零, 当 $r \rightarrow \infty$ 时 U^2 也趋于零。

由角向和径向方程消去 λ 可得光子的轨道方程:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 &= \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r^3} \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} &= \frac{3GM}{r^2} \\ d_\varphi^2 u + u &= 3u^2 \end{aligned}$$

由于太阳半径 R 远大于 GM , 故估算擦过太阳表面的星光受到太阳引力的偏折效应时仍可将 u 作为小量, 采用微扰法求解。在零级近似下 (略去 $3u^2$ 项)

$$u = u_0 \cos \varphi, \quad u_0 = GM/R$$

即光线不偏折。将其代入原方程的右边, 有

$$d_\varphi^2 u + u = 3u_0^2 \cos^2 \varphi$$

其特解为

$$u_1 = u_0^2 (1 + \sin^2 \varphi)$$

故需要的一级近似解为

$$u = u_0 \cos \varphi + u_0^2 (1 + \sin^2 \varphi)$$

在无穷远处 $u = 0$, 设入射和出射的角度分别为 $\varphi = \pm(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, 则有

$$\begin{aligned} -u_0 \sin \alpha + u_0^2 (1 + \cos^2 \alpha) &= 0 \\ \Rightarrow \alpha &\approx 2u_0 \end{aligned}$$

因此最终的偏折角为

$$\Delta\theta = 2\alpha = 4GM/R$$

代入太阳的数据算出 $\Delta\theta = 1.75''$, 与实际观测的结果相符。

光频的引力红移

广义相对论中的局域观测: 若观测者在 P 点的四速度为 U^μ , 则以 U^μ 为时间轴的方向建立 P 点的局域闵氏坐标系, 然后沿用狭义相对论的观测理论。

以测量粒子的能量为例, 在狭义相对论框架下能量是粒子四动量 p^μ 的时间分量, 故有

$$E_l = -p_\mu U^\mu$$

总之, 回到广义相对论框架, 一切物理可观测量最终是标量。

[费米平动参考系]

对于稳态时空, 设与类时 Killing 矢量适配的时间坐标为 x^0 , 则“静止”观测者 (又称稳态观测者或 Killing 观测者) 在该坐标系下的四速度为

$$U^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} (1, 0, 0, 0) \Rightarrow E_l = \frac{-p_0}{\sqrt{-g_{00}}}$$

若粒子为光子，则由普朗克公式 $E_l = h\nu$ 有

$$\sqrt{-g_{00}}\nu = -p_0/h$$

由于上式右方是守恒量，故光子的频率 ν 与观测者所在地的 $\sqrt{-g_{00}}$ 成反比。

具体考察史瓦西时空，有

$$\sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}\nu(r) = \nu_\infty$$

其中 $\nu_\infty = -p_0/h$ 为无穷远静止观测者 ($g_{00} = -1$) 看到的光频。如果观测恒星表面 $r = R$ 发出的光（或者其吸收谱线），则 $\nu(R)$ 为光子（或谱线）的固有频率，而 $\nu_\infty < \nu(R)$ ，故一般称这种效应为引力红移。

引力红移效应的另一种理解——引力钟慢效应：设电磁波由带电粒子的振荡产生，两套固有频率完全相同的振荡装置分别静止于 $r = R$ 处和无穷远，则有单次振荡的固有时

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{R}\right) dt_R^2 = dt_\infty^2 \\ &\Rightarrow \frac{dt_\infty}{dt_R} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} \end{aligned}$$

即都以坐标时 t 来看， $r = R$ 处的振荡更慢一些。这是不同于（狭义相对论）运动钟慢效应的一种由引力场造成的钟慢效应。由此理解电磁波的引力红移。

[电影《星际穿越》里的引力钟慢效应]

以太阳为例，由于

$$\frac{\nu_\infty}{\nu(R)} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} \approx 1 - \frac{GM}{R}$$

通常定义红移量

$$z := \frac{\nu_p = \nu(R)}{\nu_o = \nu_\infty} - 1 \approx \frac{GM}{R}$$

对于太阳，其值为 10^{-6} 的量级，因此引力红移效应容易被太阳大气湍流引起的多普勒红移等效应干扰，观测以较低的精度验证了理论预言。

在较高的精度上，引力红移效应是在 60 年代由 Pound 等人首次实验检验的。该实验是在地球上将一束 γ 射线从二十多米高处射向地面，利用穆斯堡尔效应精确测量其频率的蓝移（量级为 10^{-15} ），结果与广义相对论的预言相符。

以上即为广义相对论的三大验证，此外还有雷达回波的延迟、脉冲双星的近星点进动和轨道周期缩短等其它验证。但是总体来说，目前关于广义相对论的精确实验检验仍然不足。

谐和坐标条件线性近似

以四维情形为例，度规张量有 10 个独立分量。爱因斯坦方程看起来也是 10 个方程，但是由于 Bianchi 恒等式 $G_{\nu;\mu}^\mu = 0$ 和能量动量张量的协变守恒性带来的 4 个恒等式，实际上只有 6 个独立的方程。因此即便在数个数的意义上，场方程也不可能完全确定度规，而这正是广义相对论具有微分同胚（规范）不变性的反映。实际上，这时可以采用微分同胚变换的被动观点，即场方程在坐标变换下形式不变；若 $g_{\mu\nu}$ 是场方程的解，则任意坐标变换 $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ 后的 $\tilde{g}_{\mu\nu}$

也是解。无穷小微分同胚变换

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \xi^\mu(x)$$

正好有 4 个独立的局域自由度，如果（原则上）选取了合适的坐标规范以固定这 4 个自由度，引力场方程（再加适当的初始和边界条件）将完全确定度规。

一种常用的坐标规范称为谐和坐标条件（又叫 de Donder 规范），其要求是

$$\Gamma^\lambda := g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$$

由于容易证明（略）

$$\Gamma^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\rho\lambda})$$

故有

$$\square \phi := \nabla_\rho \nabla^\rho \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} g^{\rho\lambda} \partial_\lambda \phi) = g^{\rho\lambda} \partial_\rho \partial_\lambda \phi - \Gamma^\lambda \partial_\lambda \phi$$

若取 ϕ 为 x^μ （看作一组标量函数），则在这一规范下 x^μ 显然满足谐和（调和）方程

$$\square x^\mu = 0$$

这是其名称的来源。一般地，调和方程（其解称为调和函数）在这一规范下具有比较简单的形式

$$g^{\rho\lambda} \partial_\rho \partial_\lambda \phi = 0$$

闵氏空间中的闵氏坐标系显然满足谐和条件，因此谐和坐标系在一定意义上可以看作闵氏坐标系在弯曲时空中的推广。但值得强调的是，4 个谐和坐标条件仍不足以完全确定坐标系，这一事实类似于电动力学中 Lorentz 规范也不能完全固定电磁势的规范自由度。

在弱场线性近似下谐和坐标条件尤为方便。将线性近似下联络的表达式写为

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} (h_{\alpha,\beta}^\mu + h_{\beta,\alpha}^\mu - h_{\alpha\beta}^\mu)$$

注意张量指标的升降皆用 $\eta^{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 。而 Ricci 张量

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda = -\frac{1}{2} (h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + h_{,\mu\nu}^\alpha - h_{\mu,\nu\alpha}^\alpha - h_{\nu,\mu\alpha}^\alpha)$$

其中

$$h := h_\mu^\mu = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$$

为方便起见我们定义

$$\bar{S}_{\mu\nu} := S_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} S_\mu^\mu \Rightarrow$$

$$\bar{\bar{S}}_{\mu\nu} = \bar{S}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{S}_\mu^\mu = S_{\mu\nu}$$

注意后式只在四维情形成立（思考）。故谐和坐标条件为

$$\Gamma^\mu = h_{,\alpha}^{\alpha\mu} - \frac{1}{2} h^\mu = 0 \Rightarrow \bar{h}_{\mu\alpha}^\alpha = 0$$

其形式类似于电磁势的 Lorentz 规范条件，故又称为引力势的 Lorentz 规范条件。

线性化的爱因斯坦方程写为

$$\bar{R}_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

整理得（作业）

$$\frac{1}{2} (\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha + \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - \bar{h}_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \bar{h}_{\nu\alpha,\mu}^\alpha) = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

故在谐和条件下简化为

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha = -16\pi G T_{\mu\nu}$$

其形式类似于电磁势在 Lorentz 规范条件下的达朗贝尔方程。

现在来讨论剩余规范自由度的问题。若进一步作坐标变换

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

其中 $\xi^\mu(x)$ 为 $h_{\mu\nu}$ 的同级小量，则有

$$\begin{aligned}\delta_\xi g_{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) \approx \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \xi^\rho \partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}(x) \\ &\approx \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \xi^\rho \partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu} - \partial_\mu \tilde{x}^\alpha \partial_\nu \tilde{x}^\beta \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}) \\ &= \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - \xi^\rho \partial_\rho \tilde{g}_{\mu\nu} - (\delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha) (\delta_\nu^\beta + \partial_\nu \xi^\beta) \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}) \\ &\approx -\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi^\alpha g_{\alpha\nu} - \partial_\nu \xi^\beta g_{\mu\beta} \\ &= -\xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu}\end{aligned}$$

(此即推导被动观点下的李导数表达式，与主动观点差一整体负号。) 这样对弱场线性近似相当于

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \xi_{\mu,\nu}$$

代入 Lorentz 规范条件 $\bar{h}_{\mu\alpha}^\alpha = h_{\mu\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} h_{,\mu} = 0$ 可知 ξ_μ 只要满足

$$\xi_{\alpha,\mu}^\alpha + \xi_{\mu,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} 2\xi_{\alpha,\mu}^\alpha = \xi_{\mu,\alpha}^\alpha = 0$$

则上述坐标变换将保持 Lorentz 规范条件。这一事实非常类似于电动力学中的相应结论。

引力波引力辐射

线性化的爱因斯坦方程对于真空情形即为 $h_{\mu\nu}$ 满足的波动方程

$$h_{\mu\nu,\alpha}^\alpha = 0 = \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha$$

其波速为光速。该方程的解总可看作单色平面波的线性叠加，由于对称性不妨考察沿 z 方向传播的单色平面波（类似于电磁波作复化）

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{i(kz-\omega t)}$$

波动方程要求 $k = \omega$ 。Lorentz 规范条件

$$\bar{h}_{\mu\alpha}^\alpha = \bar{A}_\mu^\alpha \partial_\alpha e^{i(kz-\omega t)} = 0$$

进一步要求

$$\bar{A}_\mu^3 = \bar{A}_\mu^0$$

故自由度还剩下 $10 - 4 = 6$ 个。

再考虑剩余的规范对称性，由于形如

$$\xi^\mu = X^\mu e^{i(kz-\omega t)}$$

的矢量场生成的微分同胚变换显然保持单色平面形式，而且也满足 $\xi_{\mu,\alpha}^\alpha = 0$ ，故有对应于 X^μ 的 4 个独立的剩余规范变换。实际上，首先利用

$$h_{0\nu} \rightarrow h_{0\nu} - \xi_{\nu,0} - \xi_{0,\nu} \quad (\nu = 1,2)$$

$$\bar{A}_{0\nu} \rightarrow \bar{A}_{0\nu} + i\omega X_\nu \quad (\nu = 1,2)$$

故适当选取 $X_{(1,2)}$ 即可使 $\bar{A}_{(1,2)}^0 = 0$ 。其次，有

$$h_{03} \rightarrow h_{03} - \xi_{3,0} - \xi_{0,3} \Rightarrow \bar{A}_{03} \rightarrow \bar{A}_{03} + i\omega X_3 - ikX_0$$

故适当选取 $X_3 - X_0$ 即可使 $\bar{A}_3^0 = 0$ 。最后，有

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\nu} \xi_{\mu,\nu} \Rightarrow \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} - 2i\omega X_0 - 2ikX_3$$

故利用仅存的规范变换 $X_0 + X_3$ 可以使得 $A_\mu^\mu = 0 = \bar{A}_\mu^\mu$ 。综上，由 $\bar{A}_i^0 = 0$ 与 $\bar{A}_\mu^3 = \bar{A}_\mu^0$ 相结合可知 $\bar{A}_{\mu\nu}$ 的非零分量只有 $\mu, \nu = 1, 2$ ，而 $\bar{A}_\mu^\mu = 0$ 给出无迹条件 $\bar{A}_{11} + \bar{A}_{22} = 0$ 。故剩余规范对称性最终使得物理的自由度只有 $6 - 4 = 2$ 个，它们可取为 A_{11} 和 A_{12} （横向无迹(TT)规范）。

[引力场的6个物理自由度与引力波的2个物理自由度]

[电动力学中的规范变换与物理自由度]

作业：定义 $A_{\pm} := A_{11} \mp iA_{12}$, 证明在空间旋转变换 $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 下, A_{\pm} 的变换性质为 $\tilde{A}_{\pm} = e^{\pm 2i\theta} A_{\pm}$ (螺旋度 ± 2)。

当存在引力源时, $\bar{h}_{\mu\nu}$ 满足的达朗贝尔方程具有推迟势解 (参见电动力学)

$$\bar{h}_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = 4G \int \frac{T_{\mu\nu}(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c})}{r} dV' \approx \frac{4G}{r_0} \int T_{\mu\nu}(\mathbf{r}')^* dV'$$

其中 r 为观测点离引力源的空间距离, 约等号采用的是引力源小尺度和观测点远距离近似 (r_0 为平均距离), “*” 表示推迟。

引力场的能量动量张量

[引力场能量的非定域性与能量表述]

设背景度规 $g_{\mu\nu}$ 满足真空爱因斯坦场方程, 考虑扰动

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\rightarrow g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu}^{(0)} &= R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} R^{(0)} g_{\mu\nu} = 0 \\ \Rightarrow R_{\mu\nu}^{(0)} &= 0, \quad R^{(0)} = 0 \\ G_{\mu\nu}^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} (R^{(1)} g_{\mu\nu} + R^{(0)} h_{\mu\nu}) \\ &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} R^{(1)} g_{\mu\nu} \\ R^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} g^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(0)} h^{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)} g^{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu}^{(1)} &= R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{(1)} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

故完整的爱因斯坦场方程

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

可写为

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi G (T_{\mu\nu}^G + T_{\mu\nu})$$

其中引力场的能量动量张量

$$T_{\mu\nu}^G := -\frac{1}{8\pi G} (G_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}^{(1)})$$

包含 $h_{\mu\nu}$ 两阶以上的所有贡献。利用 Bianchi 恒等式 (∇^μ 为背景协变导数)

$$\tilde{\nabla}^\mu G_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(1)} + \Gamma_{(1)}^\mu G_{\mu\nu}^{(0)} = \nabla^\mu G_{\mu\nu}^{(1)} = 0$$

可知总能量动量张量 $T_{\mu\nu}^G + T_{\mu\nu}$ 在背景度规下的协变守恒性。

在远场区 (满足真空条件和 $h_{\mu\nu}$ 衰减条件), $T_{\mu\nu}^G$ 将由 $h_{\mu\nu}$ 的两阶项 $G_{\mu\nu}^{(2)}$ 主导。由于

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (R^{(2)} g_{\mu\nu} + R^{(1)} h_{\mu\nu})$$

而

$$R^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(1)} h^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(0)} h^{\mu\rho} h_\rho^\nu = R_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(1)} h^{\mu\nu}$$

再由（真空远场情形）场方程

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi G T_{\mu\nu}^G = \mathcal{O}(h^2)$$

有

$$G_{\mu\nu}^{(1)} g^{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}^{(1)} g^{\mu\nu} = \mathcal{O}(h^2) \Rightarrow R_{\mu\nu}^{(1)} = G_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{(1)} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} = \mathcal{O}(h^2)$$

$$R^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} g^{\mu\nu} = \mathcal{O}(h^2)$$

故有

$$\begin{aligned} R^{(2)} &= R_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}^{(1)} h^{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(2)} g^{\mu\nu} \\ G_{\mu\nu}^{(2)} &= R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} (R^{(2)} g_{\mu\nu} + R^{(1)} h_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{(2)} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

即

$$T_{\mu\nu}^G = \frac{-1}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{-1}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}^{(2)} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \right)$$

谐和坐标下平面引力波的平均能量动量张量

即便在平直时空背景下 $R_{\mu\nu}^{(2)}$ 的具体形式仍较为复杂，但是若将平面引力波的形式

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik \cdot x} + A_{\mu\nu}^* e^{-ik \cdot x}$$

代入 $R_{\mu\nu}^{(2)}$ 并考察大时空尺度 ($\gg \omega^{-1}$) 下的平均值，再考虑到谐和坐标条件则有

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{k_\mu k_\nu}{2} \left(A^{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}^* - \frac{1}{2} |A_\lambda^\lambda|^2 \right)$$

故由 $k \cdot k = 0$ 可得

$$\langle T_{\mu\nu}^G \rangle = \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G} \left(A^{\rho\sigma} A_{\rho\sigma}^* - \frac{1}{2} |A_\lambda^\lambda|^2 \right)$$

在剩余规范变换

$$\xi^\mu = iX^\mu e^{ik \cdot x} - iX^*\mu e^{-ik \cdot x}$$

下， $A_{\mu\nu}$ 的变化为

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A_{\mu\nu} + k_\mu X_\nu + k_\nu X_\mu$$

容易证明， $\langle T_{\mu\nu}^G \rangle$ 在此变换下保持不变（作业）。

若引力波沿 z 方向传播，取 TT 规范后有

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu}^G \rangle &= \frac{k_\mu k_\nu}{8\pi G} (|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) \\ &= \frac{k_\mu k_\nu}{16\pi G} |A_{ij}|^2 = \frac{k_\mu k_\nu}{32\pi G} \langle h_{ij}^2 \rangle \end{aligned}$$

具体考察“实时”的能流密度，实际上有（参见“引力辐射（补充）.pdf”）

$$T^{Gtz} \simeq \frac{1}{32\pi G} h_{ij}^2$$

引力波源的辐射功率

$$\bar{h}_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{4G}{r_0} \int T^{ij}(\mathbf{r}')^* dV'$$

注意到由于 $T_{\mu\nu}$ 的守恒性有

$$\begin{aligned} \int T^{ij} dV &= \int T^{kj} \partial_k x^i dV = - \int x^i \partial_k T^{kj} dV = \partial_t \int x^i T^{tj} dV \\ &= \partial_t \int x^i T^{tk} \partial_k x^j dV = \frac{1}{2} \partial_t \int T^{tk} \partial_k (x^i x^j) dV \\ &= \frac{1}{2} \partial_t^2 \int x^i x^j T^{tt} dV =: \frac{1}{2} \partial_t^2 t^{ij} \end{aligned}$$

其中 t^{ij} 为引力源的四极矩。故有

$$\bar{h}_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{2G}{r_0} \ddot{t}_{ij}^*$$

TT 规范相当于作投影：

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2G}{r_0} \ddot{t}_{kl}^* \left(P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{kl} P_{ij} \right), \quad P_{ij} = \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j \\ h_{ij}^{TT} h_{ij}^{TT} &= \frac{4G^2}{r_0^2} \ddot{t}_{kl}^* \left(P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{kl} P_{ij} \right) \ddot{t}_{mn}^* \left(P_{im} P_{jn} - \frac{1}{2} P_{mn} P_{ij} \right) \\ &= \frac{4G^2}{r_0^2} \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{mn}^* \left(P_{km} P_{ln} - \frac{1}{2} P_{kl} P_{mn} - \frac{1}{2} P_{mn} P_{kl} + \frac{1}{2} P_{kl} P_{mn} \right) \\ &= \frac{4G^2}{r_0^2} \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{mn}^* \left(P_{km} P_{ln} - \frac{1}{2} P_{kl} P_{mn} \right) \\ &= \frac{4G^2}{r_0^2} \left(\ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{mn}^* (\delta_{km} - \hat{k}_k \hat{k}_m) (\delta_{ln} - \hat{k}_l \hat{k}_n) - \frac{1}{2} (\ddot{t}^* - \ddot{t}_{kl}^* \hat{k}_k \hat{k}_l)^2 \right) \\ &= \frac{4G^2}{r_0^2} \left(\ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* - 2 \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{ml}^* \hat{k}_k \hat{k}_m + \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{mn}^* \hat{k}_k \hat{k}_m \hat{k}_l \hat{k}_n - \frac{1}{2} (\ddot{t}^* - \ddot{t}_{kl}^* \hat{k}_k \hat{k}_l)^2 \right) \\ \int \hat{k}_1 \hat{k}_1 d\Omega &= \frac{1}{3} \int \hat{k}_i \hat{k}_i d\Omega = \frac{4\pi}{3}, \quad \int \hat{k}_1 \hat{k}_2 d\Omega = 0 \Rightarrow \int \hat{k}_i \hat{k}_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \\ \int \hat{k}_k \hat{k}_l \hat{k}_m \hat{k}_n d\Omega &= a(\delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}) \\ \Rightarrow \int \hat{k}_k \hat{k}_k \hat{k}_m \hat{k}_n d\Omega &= 5a \delta_{mn} \Rightarrow a = \frac{4\pi}{15} \\ \int h_{ij}^{TT2} d\Omega &= \frac{16\pi G^2}{r_0^2} \left(\frac{1}{3} \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* + \frac{1}{15} (2 \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* + \ddot{t}^{*2}) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \ddot{t}^{*2} + \frac{1}{15} (2 \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* + \ddot{t}^{*2}) \right) \right) \\ &= \frac{8\pi G^2}{r_0^2} \left(\frac{2}{3} \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* + \frac{1}{15} (2 \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* + \ddot{t}^{*2}) - \frac{1}{3} \ddot{t}^{*2} \right) \\ &= \frac{8\pi G^2}{r_0^2} \left(\frac{4}{5} \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* - \frac{4}{15} \ddot{t}^{*2} \right) = \frac{32\pi G^2}{5r_0^2} \left(\ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* - \frac{1}{3} \ddot{t}^{*2} \right) \end{aligned}$$

故总的平均辐射功率为

$$\begin{aligned} \int \langle T^{Gti} \rangle \hat{k}_i r_0^2 d\Omega &= \frac{\omega^2 r_0^2}{32\pi G} \int \langle h_{ij}^{TT2} \rangle d\Omega \\ &= \frac{G\omega^2}{5} \langle \ddot{t}_{kl}^* \ddot{t}_{kl}^* - \frac{1}{3} \ddot{t}^{*2} \rangle = \frac{G\omega^2}{5} \langle \ddot{t}_{ij}^{*2} \rangle \end{aligned}$$

其中（无迹化的四极矩）

$$\hat{t}^{ij} := t^{ij} - \frac{1}{3} t_k^k \delta^{ij} = \int \left(x^i x^j - \frac{1}{3} x^k x_k \delta^{ij} \right) \rho(\mathbf{r}) dV$$

对于一般的非周期运动，其引力辐射的总能量为（参见“引力辐射（补充）.pdf”）

$$\begin{aligned} \int T^{Gti} \hat{k}_i r_0^2 d\Omega dt &= \frac{1}{32\pi G} \int h_{ij}^{TT2} r_0^2 d\Omega dt \\ &= \frac{G}{5} \int \ddot{\tilde{t}}_{ij}^{*2} dt \end{aligned}$$

讨论：

- 1) 引力辐射（最低阶）为四极辐射。
- 2) 引力辐射的功率正比于周期运动频率 ω 的6次方。
- 3) “刚体”的（无迹化）四极矩在随动系中即为转动惯量（无迹部分的负值）。
[脉冲双星的引力辐射]

平面引力波对检验粒子的作用

对于TT规范下的平面引力波，由于

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} h_{tt,t} = 0, \quad \Gamma_{tt}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (2h_{tj,t} - h_{tt,j}) = 0$$

测地线方程

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

有解（设无初速度）

$$t = \tau, \quad x^i = \text{常数}$$

[正交坐标（法坐标）规范]

故在这一规范下自由检验粒子的空间坐标不变，且坐标时就是固有时，但是固有空间距离由于 h_{ij} 而发生改变。对于沿 z 方向传播的平面引力波， h_{ij} 的非零独立分量只有 h_{xx} 和 h_{xy} ，这就是平面引力波的两个独立（线）偏振模式：

$$h_+: A \begin{pmatrix} \cos \omega t & 0 \\ 0 & -\cos \omega t \end{pmatrix}, \quad h_x: A \begin{pmatrix} 0 & \cos \omega t \\ \cos \omega t & 0 \end{pmatrix}$$

设引力波到达前检验粒子位于 xy 平面内半径为 R 的圆周上：

$$x^2 + y^2 = R^2$$

引力波到达后，利用 xy 平面内的固有距离

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = x^i g_{ij} x^j = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 + h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & 1 + h_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

其中 \tilde{x} 和 \tilde{y} 为平面欧氏坐标，可得

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & 1 + h_{yy} \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} R^2 &= (x \ y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\tilde{x} \ \tilde{y}) \begin{pmatrix} 1 + h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & 1 + h_{yy} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \\ &\approx (\tilde{x} \ \tilde{y}) \begin{pmatrix} 1 - h_{xx} & -h_{xy} \\ -h_{yx} & 1 - h_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

每一瞬时，这是一个椭圆方程。对于 h_+ 模式，椭圆的半长（短）轴分别位于 x 或 y 方向，其长度为

$$a \approx R \left(1 + \frac{h_{xx}}{2} \right) = R \left(1 + A \frac{\cos \omega t}{2} \right), \quad b \approx R \left(1 + \frac{h_{yy}}{2} \right) = R \left(1 - A \frac{\cos \omega t}{2} \right)$$

对于 h_x 模式，椭圆的半长（短）轴分别位于 $\pi/4$ 或 $3\pi/4$ 方向，其长度与 h_+ 情形相同。线偏振模式的动画。

h_+ 和 h_x 模式等振幅相差 $\pi/2$ 相位叠加可以形成圆偏振模式：

$$h_{L,R} = A \begin{pmatrix} \cos \omega t & \pm \sin \omega t \\ \pm \sin \omega t & -\cos \omega t \end{pmatrix}$$

以左旋圆偏振模式 h_L 为例，对角化可知椭圆的半长轴位于

$$\vec{i} \cos \frac{\omega t}{2} + \vec{j} \sin \frac{\omega t}{2}$$

方向，其长度保持为 $R \left(1 + \frac{A}{2} \right)$ 。圆偏振模式的动画。

平面引力波引起的固有距离变化正比于距离本身，即垂直方向的光程差正比于光程，故可以利用大臂长的干涉仪探测引力波。

[LIGO 引力波探测器]

第三章致密星与黑洞

球对称引力源的内引力场星体平衡

静止流体的四速度场

$$U = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(1, 0, 0, 0)$$

故能量动量张量的混合形式

$$T_v^\mu = (\rho + p)U^\mu U_\nu + p\delta_v^\mu = \begin{pmatrix} -\rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(r) \end{pmatrix}$$

将静态球对称度规代入爱因斯坦方程

$$R_v^\mu - \frac{1}{2}R\delta_v^\mu = 8\pi G T_v^\mu$$

可得 (*)

$$\begin{aligned} -e^{-\mu} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'}{4}(\nu' - \mu') \right) &= 8\pi G \left(-\rho - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right) \\ e^{-\mu} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\mu'}{r} - \frac{\nu'}{4}(\nu' - \mu') \right) &= 8\pi G \left(p - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right) \\ -e^{-\mu} \left(\frac{1 - e^\mu}{r^2} + \frac{1}{2r}(\nu' - \mu') \right) &= 8\pi G \left(p - \frac{1}{2}(3p - \rho) \right) \end{aligned}$$

能量动量张量的协变守恒性 $T_{v;\mu}^\mu = 0$ 给出

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}T_r^\mu) - \Gamma_{r\mu}^\sigma T_\sigma^\mu &= 0 \\ r^{-2}e^{-(\mu+\nu)/2}\partial_r(r^2e^{(\mu+\nu)/2}p) - \Gamma_{rt}^t(-\rho) - (\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r2}^2 + \Gamma_{r3}^3)p &= 0 \\ p' + \left(\frac{1}{2}(\mu' + \nu') + \frac{2}{r}\right)p + \frac{1}{2}\nu'\rho - \left(\frac{1}{2}\mu' + \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right)p &= 0 \\ \Rightarrow p' &= -\frac{\nu'}{2}(\rho + p) \end{aligned}$$

该方程实际上是流体的静力平衡方程。Bianchi 恒等式使得该方程和爱因斯坦方程的上述三个分量 (*) 构成的方程组中只有三个方程是相互独立的，但是未知函数总共有四个，因此要构成一组完备的方程还需要添加流体的物态方程

$$\rho = \rho(p)$$

在球对称引力源（星体）表面 $r = R$ 处 $\rho(R) = 0 = p(R)$ ，内引力场的时空度规需要与史瓦西外部解衔接，故有

$$e^{-\mu(R)} = e^{\nu(R)} = 1 - \frac{2GM}{R}$$

(*) 式中的前两个方程相减得 (%)

$$e^{-\mu} \frac{\mu' + \nu'}{r} = 8\pi G(\rho + p)$$

再与第三个方程组合消去 ν' 有

$$\frac{1 - e^{-\mu}}{r^2} + e^{-\mu} \frac{\mu'}{r} = 8\pi G\rho$$

若令

$$m(r) := \frac{r}{2G}(1 - e^{-\mu})$$

则上式可写为

$$m' = 4\pi r^2 \rho$$

即 m 可解释为面积半径为 r 的球面内包含的质量:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$$

而 (%) 式与 (*) 式中的第三个方程组合消去 μ' 有 (\$)

$$-\frac{1 - e^{-\mu}}{r^2} + e^{-\mu} \frac{\nu'}{r} = 8\pi Gp$$

再将该方程与流体的静力平衡方程结合消去 ν' 可得压强满足的方程

$$p' = -(\rho + p) \frac{Gm + 4\pi Gr^3 p}{r(r - 2Gm)}$$

称为奥本海默方程 (又称为 Tolman–Oppenheimer–Volkoff 方程, 即 TOV 方程)。该方程结合物态方程即可求解 ρ (及 m) 和 p , 再代入 (\$) 式就得到星体的引力场分布。

作业: 试推导 TOV 方程的牛顿力学版本, 并与 TOV 方程比较。

只有对一些特殊的流体物态方程, 上述方程组才能求出解析解, 不可压缩流体是其中一个重要的例子, 其物态方程为

$$\rho(r) = \rho_0$$

此时 (#)

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho_0 r^3, \quad r \leq R$$

代入奥本海默方程有

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho_0 + p) \frac{4\pi Gr^3 (\frac{\rho_0}{3} + p)}{r(r - \frac{8\pi G}{3} \rho_0 r^3)}$$

简单分离变量即可解得

$$p(r) = \rho_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{2GMr^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2GMr^2}{R^3}}}$$

其中 $M = 4\pi\rho_0 R^3 / 3$ 为星体的总质量。而由 (#) 式和 $m(r)$ 的定义已经有

$$e^{-\mu} = 1 - \frac{2Gm}{r} = 1 - \frac{2GMr^2}{R^3} = 1/g_{rr}$$

再与 $p(r)$ 的表达式一起代入 (\$) 即得

$$e^{\nu/2} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2GMr^2}{R^3}} = \sqrt{-g_{tt}}$$

其中的积分常数已由衔接条件确定。这种内引力场被称为史瓦西内部解。

讨论：星体的内压力向中心单调递增，中心压强为

$$p_c = \rho_0 (1 - \sqrt{1 - 2GM/R}) / (3\sqrt{1 - 2GM/R} - 1)$$

显然当 $p_c \rightarrow \infty$ 时 $2GM/R$ 具有上限 $8/9$ 。而且可以证明（略），在物理上合理的其它物态方程下 $2GM/R$ 的上限都小于 $8/9$ 。因此，球对称星体在其半径尚未小到引力半径时就已经无法维持静力平衡。

白矮星

TOV 方程的牛顿近似(*)

$$p' = -\rho \frac{Gm}{r^2} \Rightarrow \left(\frac{r^2}{\rho} p' \right)' = -4\pi G r^2 \rho$$

考虑球对称引力源（流体）满足多方(polytropic)物态方程

$$p = K\rho^\gamma$$

其中 K 为常数。进行无量纲化

$$r = \alpha\xi, \quad \rho = \rho_0\theta(\xi)^{1/(\gamma-1)}$$

其中 α 为常数， ρ_0 为星体中心的能量密度 ($\theta(0) = 1$)，则 (*) 式化为

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\alpha^2 \xi^2}{\rho_0 \theta^{1/(\gamma-1)}} \frac{d}{d\xi} (K\rho_0^\gamma \theta^{\gamma/(\gamma-1)}) \right) &= -4\pi G \alpha^2 \xi^2 \rho_0 \theta^{1/(\gamma-1)} \\ \frac{K\gamma \rho_0^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)\alpha^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d}{d\xi} \theta \right) &= -\xi^2 \theta^{1/(\gamma-1)} \end{aligned}$$

故有

$$\alpha^2 = \frac{K\gamma \rho_0^{\gamma-2}}{4\pi G(\gamma-1)} \Rightarrow \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d}{d\xi} \theta \right) = -\xi^2 \theta^{1/(\gamma-1)}$$

在边界条件

$$\theta(0) = 1, \quad \theta'(0) = 0$$

下，上述方程的解为 Lane-Emden 函数

$$\theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6} + \frac{\xi^4}{120(\gamma-1)} - \dots$$

星体半径为 (%)

$$R = \alpha\xi_1$$

其中 ξ_1 为 Lane-Emden 函数的第一个根 $\theta(\xi_1) = 0$ 。星体质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\alpha\xi_1} 4\pi r^2 \rho_0 \theta^{1/(\gamma-1)} dr = 4\pi \alpha^3 \rho_0 \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^{1/(\gamma-1)} d\xi \\ &= 4\pi \alpha^3 \rho_0 \int_0^{\xi_1} -\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d}{d\xi} \theta \right) d\xi = 4\pi \alpha^3 \rho_0 [-\xi_1^2 \theta'(\xi_1)] \end{aligned}$$

利用 (%) 式消去 ρ_0 可得质量半径关系：

$$\rho_0 = \left(\frac{R}{\xi_1} \right)^{\frac{2}{\gamma-2}} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{-\frac{1}{\gamma-2}} \Rightarrow$$

$$M = 4\pi \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \rho_0^{\frac{3\gamma-4}{2}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 4\pi \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{\frac{-1}{\gamma-2}} \left(\frac{R}{\xi_1} \right)^{\frac{3\gamma-4}{\gamma-2}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|$$

[多方球 (polytrope) 的稳定性 ($\gamma > 4/3$ 为稳定平衡)]

白矮星作为中小质量恒星演化的晚期形态：主序星→（核心氢燃尽，辐射压与引力平衡打破，氦核收缩升温，外围氢点燃）红巨星→（核心氦或更重元素燃尽，或者核聚变进行到铁而终止，辐射压几乎消失，引力最终被电子简并压平衡）白矮星。

简并电子气体的电子数密度

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}$$

其中 k_F 为费米动量。对于实际的白矮星，由于其费米温度 $\sqrt{k_F^2 + m_e^2} - m_e \sim 10^9 \text{ K}$ （其中 m_e 为电子质量， $k_B = 1$ ）远大于其核心温度 $T \sim 10^7 \text{ K}$ ，取零温极限是合理的。星体密度

$$\rho = \mu m_N n$$

其中 μ 为核子数与电子数之比（对于氢已燃尽的恒星 $\mu \approx 2$ ）， m_N 为核子质量。而压强即动量流密度：

$$p = \frac{1}{3} \int \frac{k^2}{E_k} dn = \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_e^2}} k^2 dk$$

在一般情形 p 和 ρ 的关系（物态方程）较为复杂，但若定义临界密度

$$\rho_c = \rho(k_F = m_e c) \approx 10^6 \mu \text{ g/cm}^3$$

则在如下两种极端情形可以近似归结为多方物态方程：

1) 非相对论情形 $\rho \ll \rho_c$ ($k_F \ll m_e$)

$$p = \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{m_e} dk = \frac{k_F^5}{15\pi^2\hbar^3 m_e} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu m_N} \right)^{5/3} = K \rho^{5/3}$$

这是一个 $\gamma = 5/3$ 的多方物态方程。质量半径关系为

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \left(\frac{5K}{8\pi G} \right)^3 \left(\frac{R}{\xi_1} \right)^{-3} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 4\pi \left(\frac{\hbar^2}{24\pi^3 G m_e} \right)^3 \left(\frac{3\pi^2}{\mu m_N} \right)^5 R^{-3} \xi_1^5 |\theta'(\xi_1)| \\ &= \frac{9\pi^2 \hbar^6}{128G^3 m_N^5 m_e^3} \xi_1^5 |\theta'(\xi_1)| \mu^{-5} R^{-3} \end{aligned}$$

2) 极端相对论情形 $\rho \gg \rho_c$ ($k_F \gg m_e$)

$$p = \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^3 dk = \frac{k_F^4}{12\pi^2\hbar^3} = \frac{\hbar}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 \rho}{\mu m_N} \right)^{4/3} = K \rho^{4/3}$$

这是一个 $\gamma = 4/3$ 的多方物态方程。质量半径关系为

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 4\pi \left(\frac{\hbar}{12G\pi^3} \right)^{3/2} \left(\frac{3\pi^2}{\mu m_N} \right)^2 \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \\ &= \frac{3^{1/2} \pi^{1/2} \hbar^{3/2} c^{3/2}}{2G^{3/2} m_N^2} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| \mu^{-2} \end{aligned}$$

故实际上质量并不依赖于半径（随遇平衡）。代入数值有

$$M = M_C := 5.87 \mu^{-2} M_\odot$$

其中 M_\odot 为太阳质量。

对于一般的 ρ_0 ，物态方程介于两种极端情形之间，分析可知 M 随 ρ_0 单调增长，当 $\rho_0 \rightarrow \infty$ 时达到最大值 M_C ，称为钱德拉塞卡 (Chandrasekhar) 极限。随 μ 取值的不同 ($\mu_{Fe} = 56/26$)，该极限在 $1.265 M_\odot$ 到约 $1.44 M_\odot$ 之间变动。考虑到较实际的物态方程和其它修正，一般认为由铁组成的白矮星质量上限约为 $1.2 M_\odot$ 。

另外，广义相对论效应虽然对白矮星的结构没有重要影响，但是白矮星表面发出的光具有明显的引力红移效应 (1925)。

中子星

较大质量（大于约 8 倍太阳质量）恒星的演化：铁核积累到超过 1.4 倍太阳质量（电子简并压无法抗衡引力） \rightarrow 引力塌缩（反 β 衰变，原子核结合能减小，中子滴出） \rightarrow 中子星（超新星爆发？）。

简并中子气体的中子数密度

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} 4\pi k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} = \frac{\rho_c}{m_N} x^3$$

其中 $\rho_c := \frac{m_N^4}{3\pi^2\hbar^3}$, $x := \frac{k_F}{m_N c}$ 。能量密度

$$\rho = \int E_k dn = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} 4\pi \sqrt{k^2 + m_N^2} k^2 dk = \frac{m_N^4}{\pi^2\hbar^3} \int_0^x \sqrt{u^2 + 1} u^2 du = 3\rho_c g(x)$$

其中

$$g(x) = x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} - \sinh^{-1} x$$

为简化 $g(x)$ 的形式，令

$$t := 4\sinh^{-1} x = 4\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

此时有

$$x = \sinh \frac{t}{4} \Rightarrow \sinh t = 2 \sinh \frac{t}{2} \cosh \frac{t}{2} = 4x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}(\sinh t - t) \Rightarrow \rho = \frac{3}{4}\rho_c(\sinh t - t)$$

而压强

$$p = \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_N^2}} k^2 dk = \frac{m_N^4}{3\pi^2\hbar^3} \int_0^x \frac{u^4}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \rho_c f(x)$$

其中

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(\sinh t - 8 \sinh \frac{t}{2} + 3t \right) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\rho_c}{4} \left(\cosh t - 4 \cosh \frac{t}{2} + 3 \right)$$

代入 TOV 方程有

$$p' = -G(\rho + p) \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2Gm)} \Rightarrow \frac{dt}{dr} \frac{dp}{dt} = -G\rho_c \left(\sinh t - 2 \sinh \frac{t}{2} \right) \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2Gm)}$$

故归结为以下联立方程

$$\begin{aligned} m' &= 4\pi r^2 \rho = 3\pi r^2 (\sinh t - t) \\ t' &= \frac{-G\rho_c}{dp/dt} \left(\sinh t - 2 \sinh \frac{t}{2} \right) \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2Gm)} \end{aligned}$$

其边界条件为

$$r = 0: t(0) = t_0, \quad m(0) = 0$$

$$[r = R: t(R) = 0, \quad m(R) = M]$$

该联立方程仅在一些极限情形才能得到解析结果。一般情形数值求解可知，中子星总质量 M 有一极大值 $M_{OV} \approx 0.71M_\odot$ ，称为奥本海默极限（又称为 Oppenheimer–Volkoff 极限）。

实际的中子星并不完全由中子构成，还有少量的电子和质子甚至超子，能量密度较低的表层应该会有原子核，深层和核心部分可能会出现夸克态或者我们尚未了解的其它物态。总而言之，实际的物态方程显然远比我们上面讨论的要复杂。目前，各种理论模型计算得到的中子星质量上限基本都在 $1 \sim 3M_\odot$ 范围内。

[脉冲星与蟹状星云]

史瓦西黑洞 爱丁顿坐标

黑洞——引力的奇迹

拉普拉斯黑洞 $R = R_g = 2GM/c^2$ 。

史瓦西黑洞 $R = R_g$ 。广义相对论中黑洞的三种形成机制：

- 1) 早期宇宙密度涨落形成的原初小黑洞 $M \sim 10^{12} \text{ kg}$ 。
- 2) 大质量恒星演化的可能结局——恒星级黑洞 $M \sim 10M_\odot$ 。
- 3) 星团或星系核引力塌缩形成的巨型黑洞 $M \sim 10^4 \sim 10^9 M_\odot$ 。

史瓦西黑洞

史瓦西外部解 ($r > 2GM$)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

可以描述一个“永久黑洞”外的真空引力场。在 $r = R_g$ (史瓦西半径) 处度规失去解析性，这是由于史瓦西坐标系无法覆盖整个永久黑洞时空流形造成的 (坐标奇异性)。

考察史瓦西时空中径向下落的质点：

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \\ \frac{dt}{d\tau} &= E / \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\end{aligned}$$

显然当 $r \rightarrow 2GM$ 时 $dr/d\tau$ 有限，但是 $dt/d\tau \rightarrow \infty$ ，因此速度 $dr/dt \rightarrow 0$ 。史瓦西坐标时 t 与无穷远静止观测者的固有时一致，故上述讨论表明，对无穷远观测者来说自由下落的质点永远也不可能穿过引力半径。但是对于质点本身 (或者随质点一起自由下落的观测者) 而言， τ 才是物理时间，而当 $r \rightarrow 2GM$ 时 $dr/d\tau$ 并不趋于零，故可以穿过引力半径。

由于相对论情形的径向方程与牛顿情形

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2E_n + \frac{2GM}{r}$$

形式上完全一样 (只需作对应 $\tau \rightarrow t$, $E^2 - 1 \rightarrow 2E_n$)，显然从引力半径外自由下落的质点可以在有限的时间 τ 内穿过引力半径并到达力心 $r = 0$ 。即便对于一般的 E , $r(\tau)$ 的解析形式也不难求出。此处我们仅讨论 $E^2 = 1$ 的简单情形：

$$\frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \Rightarrow \sqrt{2GM}(\tau - C) = -\frac{2}{3}r^{3/2}$$

故从 $r_0 > 2GM$ 处开始计时至到达 $r = 0$ 处经历的固有时 $\Delta\tau$ 为 $(2GM)^{-1/2} \frac{2}{3}r_0^{3/2}$ 。

后面我们将会看到，通过适当选取坐标系，引力半径处度规表现出来的奇异性确实可以部分或者完全消除。然而， $r = 0$ 处的奇异性却无法通过坐标变换消除，这是一个物理奇异性，故 $r = 0$ 处称为史瓦西时空的奇点。

虽然引力半径处没有局域的奇异性，但是史瓦西时空中 $r = 2GM$ 所代表的超曲面确实是一个特殊的超曲面，称为史瓦西黑洞的视界 (horizon)。下面我们将说明这一点。

闵氏时空中的光锥。采用球坐标， $r-t$ 图上的光锥 $r = \pm t + C$ 。质点的运动必须满足

$$|dr/dt| < 1$$

即通过光锥顶点的世界线必包含于光锥内部。过去光锥、未来光锥、因果结构。

史瓦西时空中的光锥线方程：

$$ds^2 = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)$$

$$\pm t + C = r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|$$

为方便起见，引入乌龟坐标

$$r^* := r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|$$

则光锥线可以写为

$$t + r^* = V, \quad t - r^* = U$$

从光锥线也可以看出，史瓦西时间 t 确实无法描述粒子穿过视界的运动。

引力半径内的时空（因果）结构值得注意。由于 $r < 2GM$ 时线元中 dt^2 和 dr^2 的系数交换了正负号，故质点的物理运动条件 $ds^2 < 0$ 对应的光锥内部应表为

$$\left| \frac{dr}{dt} \right| > \left| 1 - \frac{2GM}{r} \right| = \frac{2GM}{r} - 1 \Rightarrow \left| \frac{dt}{dr} \right| < \left(\frac{2GM}{r} - 1 \right)^{-1}$$

实际上决定了 r 方向的运动是单向的（从某种意义上说更适合看作视界内的时间坐标），而 t 则没有单调性质。特别地， $dr/dt = 0$ 是物理上不允许的，即任何物理粒子不可能“静止”在视界内。具体的运动究竟是使得 r 单调增加还是减小，则取决于对过去方向（光锥）和未来方向（光锥）的选择。当然，在讨论这一问题时史瓦西坐标原则上已经不适用。从后面的讨论可以看到，如果选择 r 减小的方向作为未来，则视界外的物质一旦穿过视界就只能落向奇点，这种情形称为黑洞；反之，视界内的物质只能向外运动穿出视界，而视界外的物质无法进入视界内，这种情形称为白洞。

爱丁顿坐标

通过坐标变换（至少部分地）消除视界处的度规奇异性。我们暂时附加一个要求：当 $r \rightarrow \infty$ 时度规回到闵氏度规（球坐标）。注意到上一小节中光锥线接近视界时史瓦西时间的发散行为

$t \sim -2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|$ ，满足要求的一个坐标变换如下：

$$\tilde{t} = t + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|, \quad \tilde{r} = r$$

在新坐标系下的线元为（作业）

$$d\tilde{t} = dt + \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right)^{-1} dr$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \frac{4GM}{r} dr dt + \left(1 + \frac{2GM}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 + 2GMr^{-1}(dt + dr)^2$$

其中所有的“~”已经略去。径向的光锥线方程为

$$\frac{dr}{dt} = -1, \quad \frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) / \left(1 + \frac{2GM}{r} \right)$$

故内行和外行光锥线分别为

$$t + r = V, \quad t - r - 4GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right| = U$$

从图线容易看出，在该坐标系下外部粒子在有限的坐标时 t 即可穿过视界，且进入视界内部后光锥的未来和过去取向仍分别与 t 的增减方向一致。注意在视界内部当 t 增加时 r 必减小，故该坐标正确地描述了黑洞的行为（或者说向内穿越视界的行为），但是不能描述白洞的行为（思考），因此被称为**内行爱丁顿坐标**（或称 Eddington-Finkelstein 坐标）。

若要描述白洞的行为，可以引入**外行爱丁顿坐标**：

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t - 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|, \quad \tilde{r} = r \\ ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 - \frac{4GM}{r} dr dt + \left(1 + \frac{2GM}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 + 2GMr^{-1}(dt - dr)^2\end{aligned}$$

类似的讨论不再重复。

如果放弃当 $r \rightarrow \infty$ 时回到闵氏度规的要求，实际上还可以有更简单（也更常用）的爱丁顿坐标。注意到

$$\begin{aligned}ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \left(d\tilde{t} - \frac{dr}{1 - 2GMr^{-1}} \right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) d\tilde{t}^2 + 2d\tilde{t} dr + r^2 d\Omega^2\end{aligned}$$

即需要的坐标变换为

$$dt = d\tilde{t} - \frac{dr}{1 - 2GMr^{-1}} \Rightarrow \tilde{t} = t + r^*$$

此时内行和外行光锥线分别为

$$\tilde{t} = V, \quad \tilde{t} - 2r^* = U$$

这是另一种形式的内行爱丁顿坐标。相应的外行爱丁顿坐标可以通过 $\tilde{t} = t - r^*$ 定义。

作业：求两种内行爱丁顿度规的逆度规。

总之，爱丁顿坐标可以部分地消除视界处的度规奇异性，但是无法同时描述向内和向外穿越视界的行为。换句话说，爱丁顿坐标系无法同时覆盖黑洞和白洞视界。

Kruskal 坐标

为了同时描述黑洞和白洞的行为，60 年代 Kruskal 和 Szekeres 独立地找到了一套可以完全消除视界奇异性坐标系，称为 Kruskal 坐标（也称 Kruskal-Szekeres 坐标）。

[测地完备性 史瓦西时空的最大延拓]

在关于爱丁顿坐标的讨论中我们已经看到选择 $\tilde{t} = V$ （光锥线的编号）就可以部分地消除视界奇异性，那自然可以想到如果同时选择 U 作为另一个坐标，是否就可以完全消除视界奇异性呢？在此观点下，首先容易得到

$$dUdV = dt^2 - dr^{*2} = dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-2} dr^2$$

故有

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dUdV + r^2 d\Omega^2$$

显然并没有直接做到消除视界奇异性。但如果再辅以光锥线的重新编号

$$\tilde{U} = e^{-\frac{U}{4GM}} = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r-t}{4GM}} \Rightarrow d\tilde{U} = -\frac{\tilde{U}dU}{4GM}$$

$$\tilde{V} = e^{\frac{V}{4GM}} = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r+t}{4GM}} \Rightarrow d\tilde{V} = \frac{\tilde{V}dV}{4GM}$$

则度规变为

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} d\tilde{U} d\tilde{V} + r^2 d\Omega^2$$

即视界奇异性不复存在。注意此处面积半径 r 以隐函数的形式被 \tilde{U} 和 \tilde{V} 所决定：

$$\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{\frac{r}{2GM}} = \tilde{U}\tilde{V}$$

\tilde{U} 和 \tilde{V} 就是类光形式的 Kruskal 坐标。

为了使得光锥线的方向更符合习惯，也常定义另一种形式的 Kruskal 坐标：

$$u = \frac{1}{2}(\tilde{V} + \tilde{U}) = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \cosh \frac{t}{4GM}$$

$$v = \frac{1}{2}(\tilde{V} - \tilde{U}) = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{\frac{r}{4GM}} \sinh \frac{t}{4GM}$$

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2$$

在这种形式的 Kruskal 坐标图（略去 (θ, φ) 坐标，故每个点代表一个球面）上：

1) 面积半径 r 为常数的超曲面表现为双曲线

$$u^2 - v^2 = \tilde{U}\tilde{V} = \text{常数}$$

特别地，视界 $r = 2GM$ 成为其渐近线 $u^2 - v^2 = 0$ 。原则上史瓦西坐标无法覆盖视界内部，要将 Kruskal 坐标延拓到视界内部需要更仔细的讨论。最终的结果是，黑洞的奇点（对应于史瓦西坐标的引力中心 $r = 0$ ）成为双曲线 $u^2 - v^2 = -1$ ，而在此之外的区域对应于 $r < 0$ （非物理）。

2) 等 t 面表现为过原点的直线

$$v/u = \text{常数}$$

特别地，当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时该直线也趋于视界。

3) 史瓦西坐标的一个 (t, r) 点对应于 Kruskal 坐标的两个 (u, v) 点。整个 Kruskal 时空被视界分为四片，视界外 ($r > 2GM$) 对应于第一、三片，但是这两片之间没有因果联系，可以把第一片取为我们的物理世界。第二片的边界是黑洞视界，第四片的边界是白洞视界。内行爱丁顿坐标可以覆盖第一、二片，外行爱丁顿坐标可以覆盖第一、四片。

4) Kruskal 时空所代表的永久黑洞只是理论上的一种理想模型，宇宙中实际存在的黑洞原则上应该是由引力塌缩从无到有产生的，这种实际黑洞的因果结构与 Kruskal 时空大不相同，粗糙地说第三、四片是不存在的。

如果进一步定义彭罗斯 (Penrose) 坐标 (x, y) :

$$\tilde{U} = \tan \frac{\pi}{2} x, \quad \tilde{V} = \tan \frac{\pi}{2} y$$

则奇点 $r = 0$ 表示为

$$\tilde{U}\tilde{V} = -1 \Rightarrow |x - y| = 1$$

而物理的时空区域为 $|x - y| < 1$ 。彭罗斯图。

[塌缩黑洞的彭罗斯图]

史瓦西时空的其它常用坐标

谐和坐标:

$$ds^2 = -\frac{1 - \frac{GM}{X}}{1 + \frac{GM}{X}} dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{X}\right)^2 dX^2 + \frac{1 - \frac{GM}{X}}{1 + \frac{GM}{X}} \left(\frac{GM}{X^2} X \cdot dX\right)^2$$

空间共形平坦坐标 (作业):

$$r = \rho \left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^2 \Rightarrow ds^2 = -\left(\frac{1 - \frac{GM}{2\rho}}{1 + \frac{GM}{2\rho}}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{2\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$$

Gullstrand - Painlevé 坐标:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(d\tilde{t} - \sqrt{\frac{2GM}{r}} \frac{dr}{1 - 2GMr^{-1}}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tilde{t}^2 + 2\sqrt{\frac{2GM}{r}} d\tilde{t} dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

空间平坦且在视界处非奇异，类似于（内行）爱丁顿坐标。

黑洞解

爱因斯坦-麦克斯韦理论 Reissner - Nordström 黑洞

电真空引力场-电磁场方程:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F_\mu^{*\rho} F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right), \quad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

静态球对称黑洞解 (RN 黑洞，电荷为 Q):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{-g_{tt}} + r^2 d\Omega^2, \quad A_\mu = \left(-\frac{Q}{r}, 0, 0, 0\right)$$

(为方便起见本节取 $G = 1$)。视界位置:

$$r^2 - 2Mr + Q^2 = 0 \Rightarrow r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$$

极端情形 $M = |Q|$ ，内外视界重合。实际上，内外视界处度规的奇异性仍然只是坐标奇异性（思考：RN 时空的爱丁顿坐标），只有 $r = 0$ (奇点) 处的奇异性是物理的。若 $M < |Q|$ 则出现裸奇点。

[宇宙监督原理]

[Birkhoff 定理在电真空情形的推广]

RN 时空中的不带电检验粒子仍然走测地线，类似于史瓦西情形的讨论可知仍然有守恒量 p_t 和 p_3 ，且总可选 $\theta = \pi/2$ (平面运动)。特别地，对于有质量粒子径向方程变为

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

显然由于 Q 的出现彻底改变了 $r \rightarrow 0$ 时有效势的行为，使得 RN 黑洞的中心奇点实际上不可能被检验粒子达到。对于无质量粒子 ($L \neq 0$) 也有类似结论。一般认为，RN 黑洞内视界之内的时空结构可能是不稳定的。

[RN 黑洞的彭罗斯图]

[带电检验粒子在 RN 时空中的运动]

真空稳态轴对称解 Kerr 黑洞

60 年代 Kerr 得到了真空爱因斯坦方程的一个**稳态轴对称解**

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - adt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2}dtd\varphi + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)\sin^2 \theta d\varphi^2 + \dots$$

(Boyer-Lindquist 坐标), 实际上描述的是一个带角动量 $J = aM$ 的黑洞, 其中

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

当比角动量 $a = 0$ 时 Kerr 解回到质量为 M 的史瓦西解。

$[M = 0 \rightarrow$ 扁球坐标系下的闵氏时空]

当 $\Delta = 0$ 时出现坐标奇异性, 此处是 Kerr 黑洞的视界位置

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$

极端情形 $M = |a|$, 内外视界重合。 $\rho^2 = 0$ (即 $r = 0$ 且 $\theta = \pi/2$) 处则是物理奇异性 (实际上此时 $r = 0$ 并非一个点而是一个圆盘)。若 $M < |a|$ 则出现裸奇异性。

注意 (t, φ) 仍然是 Kerr 度规的两个循环坐标, 直接对应稳态和轴对称性质。但是度规中 $dtd\varphi$ 这种“时空交叉项”的出现使其具有与史瓦西时空很不一样的特征。为示区别, 我们将没有时空交叉项 (时轴正交) 的稳态时空称为静态的。流体类比。

前面关于稳态时空的光频引力红移分析同样适用于 Kerr 时空:

$$\sqrt{-g_{00}}v_p = v_{\infty}$$

故在 $g_{00} = 0$ 处发出光对于远处的观测者将产生无限红移。史瓦西时空的无限红移面与视界重合, 但是 Kerr 时空的无限红移面

$$1 - \frac{2Mr}{\rho^2} = 0 \Rightarrow r_{\pm}^s = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

显然除 $\cos^2 \theta = 1$ (南北极点) 外与视界均不重合。外视界与外无限红移面之间的区域称为 (外) 能层。一旦从外面越过无限红移面进入能层, 由于 $g_{00} > 0$ 使得 t 的坐标线不再类时 (与 t 平移对应的 Killing 矢量不再类时), 故任何实物粒子或观测者不可能静止在能层内。因此无限红移面又称静界。分析易知 (可以通过等 (r, θ) 面上的光锥), 能层内的类时运动必然牵涉与黑洞同方向的转动, 这种现象一般称为转动黑洞的拖曳效应。

为看清 Kerr 黑洞的内禀奇异性, 引入“直角坐标”:

$$\begin{cases} \tilde{t} = t - r + \int \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \\ x = (r \cos \tilde{\varphi} - a \sin \tilde{\varphi}) \sin \theta \\ y = (r \sin \tilde{\varphi} + a \cos \tilde{\varphi}) \sin \theta \\ z = r \cos \theta, \quad \tilde{\varphi} := \varphi + \int \frac{a}{\Delta} dr \end{cases}$$

则 Kerr 度规变成

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + dX^2 + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left(\frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + d\tilde{t} \right)^2$$

注意 $r = 0$ 在该坐标系下表示为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

即半径为 a 的圆盘，再由 $\theta = \pi/2$ 知内禀奇异性只出现在该圆盘的边缘

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

故称为 Kerr 黑洞的奇环。

[Kerr 时空的彭罗斯图]

Kerr-Newman 黑洞

电真空中爱因斯坦方程的一个稳态轴对称解 (Boyer-Lindquist 坐标):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - adt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &= -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right)dt^2 - 2\frac{(2Mr - Q^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2}dtd\varphi \\ &\quad + \left(r^2 + a^2 + \frac{(2Mr - Q^2)a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right)\sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ A_\mu &= \left(-\frac{Qr}{\rho^2}, 0, 0, \frac{Qra \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \end{aligned}$$

其中 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$, ρ^2 与 Kerr 解相同。视界位置:

$$\Delta = 0 \Rightarrow r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{J}{Mc}\right)^2 - \frac{GQ^2}{c^4}}$$

描述带电荷 Q 角动量 J 的黑洞，简称 KN 黑洞。具体讨论与 Kerr 解类似。

在一定条件下，可以证明 KN 黑洞是最一般的稳态黑洞，即所有的稳态黑洞只依赖于质量 M 、电荷 Q 、角动量 J 三个宏观参量（黑洞无毛定理）。稳态黑洞与热力学系统的相似性（详见黑洞热力学部分）。引力塌缩趋于稳态黑洞的过程与非平衡体系趋于热平衡的相似性。

其它黑洞解

主要介绍其它常见的球对称黑洞解。

带宇宙学常数的黑洞——史瓦西-AdS 黑洞:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

其中 l 为 AdS 半径，与宇宙学常数 Λ 之间的关系为 $l^2 = -3/\Lambda$ (详见宇宙学常数部分)。

动态黑洞——Vaidya 黑洞 (内行爱丁顿形式):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M(\tilde{t})}{r}\right)d\tilde{t}^2 + 2d\tilde{t}dr + r^2 d\Omega^2$$

非真空 (纯辐射场)、非稳态 (成长)。

彭罗斯过程

通常黑洞被想象为物质只进不出的区域，但是彭罗斯在 60 年代末注意到实际上可以从 Kerr 黑洞 (或者任何其它具有能层的黑洞) 中提取能量。

以 Kerr 黑洞为例，设 $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 为时间平移不变性对应的 Killing 矢量。我们从远方实验室向黑洞释放一个检验粒子，其四动量为 p_0^μ ，则实验室测得的能量

$$E_0 = -p_0^\mu \xi_\mu$$

在粒子向黑洞自由下落的过程中守恒。假如在下落过程中该粒子分裂为两个粒子，则局域的 (狭义相对论) 四动量守恒关系

$$p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$$

给出

$$E_0 = E_1 + E_2$$

如能设法使（不失一般性） $E_1 < 0$ ，那么粒子 2 将可能以守恒能量 $E_2 > E_0$ 自由运动回远方实验室，从而实现能量提取过程（称为彭罗斯过程）。

然而，如果 ξ^μ 类时，则 $E_1 = -p_1^\mu \xi_\mu$ 必大于零。要证明这一点，只需选取一个方便的局域闵氏坐标系，如以 p_1^μ 为时间轴的局域闵氏坐标系，此时 $\tilde{p}_1^\mu = (m_1 > 0, 0, 0, 0)$ ，而 ξ^μ 的类时性使其在该闵氏坐标系中的形式也只能为 $\tilde{\xi}^\mu = (b > 0, \dots)$ ，故有

$$E_1 = -\eta_{\mu\nu} \tilde{p}_1^\mu \tilde{\xi}^\nu = m_1 b > 0$$

但是当 ξ^μ 类空时则无此限制， E_1 可正可负。

实际上在 Kerr 黑洞的能层内就有 $g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = g_{00} > 0$ 即 ξ^μ 类空，故若让初始粒子在进入能层后分裂，则有可能使 $E_1 < 0$ （即通常所说的能层内可以有负能轨道）。对于 Kerr 时空中测地线的具体计算表明，彭罗斯过程确实可以发生，即适当的条件下 $E_1 < 0$ 且粒子 2 可以逃逸到无穷远，但是粒子 1 必定掉入黑洞。

这样看来，是否可以利用彭罗斯过程从 Kerr 黑洞中无限制地提取能量，从而使黑洞成为永动机呢？答案是不可能，因为上面的检验粒子图象忽略了粒子对于黑洞的影响（反作用）。实际上，由于黑洞和粒子的总体能量守恒，负能粒子掉入黑洞将使黑洞的质量减小，即彭罗斯过程提取能量是以黑洞的能量减小为代价的。更进一步，可以证明掉入黑洞的负能粒子总是具有与黑洞相反的角动量，故使得黑洞的角动量减小（且能层缩小）。反复进行彭罗斯过程，当黑洞的角动量减小到零时，Kerr 黑洞退化为史瓦西黑洞，彭罗斯过程将无法继续。故粗略地说，彭罗斯过程提取的是 Kerr 黑洞的转动能量。具体计算表明，对于比角动量最大的极端黑洞（ $|J| = M^2$ ），提取能量的极限是 $1 - 1/\sqrt{2} \approx 29\%$ 。

[黑洞面积不减定理]

[Misner 超辐射]

Kerr 时空中的最小稳定圆轨道

下面讨论检验粒子在 Kerr 时空中的运动。以质点为例，首先仍然有守恒量 p_t 和 p_3 ，即

$$\begin{aligned} p_t &= m \frac{dx^\mu}{d\tau} g_{\mu t} = -mE \Rightarrow -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \frac{dt}{d\tau} - \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{d\varphi}{d\tau} = -E \\ p_3 &= m \frac{dx^\mu}{d\tau} g_{\mu 3} = mL \Rightarrow \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{2Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{dt}{d\tau} = L \end{aligned}$$

但这是关于 $d_\tau t$ 和 $d_\tau \varphi$ 的耦合表达式，需解出 $d_\tau t$ 和 $d_\tau \varphi$ 后再代入四速度的归一化条件，可得

$$\left(-1 - \frac{2Mr(r^2 + a^2)}{\Delta \rho^2}\right) E^2 + \frac{4Mar}{\Delta \rho^2} EL + \frac{\rho^2 - 2Mr}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta} L^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = -1$$

仅有轴对称性带来的后果是检验粒子不再一定作平面运动，故无法一般地取 $\theta = \pi/2$ 从而直接得到径向方程。但是上述方程在适当选取参量后仍可将径向和 θ 方向的运动分离，因此检验粒子在 Kerr 时空中的运动最终约化为一组一阶常微分方程。实际上，该体系具有隐含的对称性并由此带来一个额外的守恒量——Carter 常数。尽管如此，一般情形的分析仍显复杂，此处略去。注意 $\theta = \pi/2$ 的特殊平面运动仍然存在（思考）。

作业：试推导 $\theta = \pi/2$ 情形的径向方程。

以下具体讨论 $\theta = \pi/2$ 的情形（赤道运动）。径向方程如下：

$$r^4 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 2Mr(r^2 + a^2)E^2 + 4MraEL + (\Delta - a^2)L^2 = \Delta r^2(E^2 - 1)$$

$$r^4 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = r^2 [(r^2 + a^2)E^2 - L^2 - \Delta] + 2Mr(aE - L)^2$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - 1 + \frac{2M}{r} + \frac{a^2 E^2 - L^2 - a^2}{r^2} + \frac{2M}{r^3} (aE - L)^2 =: W$$

圆轨道的条件为（略去稳定性的讨论）

$$W = 0, \quad W' = 0$$

而最小圆轨道还应满足

$$W'' = 0$$

从以上三个联立方程可以解出 (E, L, r) ，具体分析略去。特别地，对于极端情形 $a = M$ ，较易得出最小稳定圆轨道的能量

$$E = 1/\sqrt{3} \approx 58\%$$

且其 L 为正（与黑洞角动量方向一致）。因此粒子如果进入该圆轨道，则可以释放约 42% 的固有能量，这将是比史瓦西情形更强有力的放能机制。

这里顺便提到检验粒子赤道运动的一种尤其简单的情况，即 $L = aE$ 时，径向方程简化为

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

形式上与 RN 时空中的不带电检验粒子径向方程在 $L = 0$ 的情形一致 ($Q \rightarrow a$)。注意这两种情形的共同点：RN 时空中的不带电检验粒子不改变黑洞的电荷 Q ；而 Kerr 时空中的检验粒子若满足 $L = aE$ ，则由能量和角动量守恒关系

$$\delta M = E, \quad \delta J = L$$

可知不改变黑洞的比角动量 a 。另外，从这种情况下的径向方程易知检验粒子也无法到达奇环 $r = 0$ 。

[一般情形奇环的不可到达性]

第四章广义相对论的发展

引力作用量

首先以自由检验质点在时空中的运动（短程线）为例来说明作用量原理：

$$I = -m \int d\tau = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

[非相对论极限]

考虑粒子世界线的无穷小形变

$$x^\mu(\lambda) \rightarrow x^\mu(\lambda) + \delta x^\mu(\lambda)$$

有（变分）

$$\begin{aligned}\delta I &= \frac{m}{2} \int (\dots)^{-1/2} \left(g_{\mu\nu,\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= \frac{m}{2} \int (\dots)^{-1/2} \left(g_{\mu\nu,\rho} \delta x^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - 2g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} - 2g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &\quad - \frac{m}{2} \int 2g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} (\dots)^{-1/2} d\lambda + \frac{m}{2} \int_A^B d \left(2(\dots)^{-1/2} g_{\mu\nu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)\end{aligned}$$

若规定边界条件

$$\delta x_A^\mu = 0 = \delta x_B^\mu$$

并令 $\lambda = \tau$ ，则对于任意 $\delta x^\mu(\lambda)$ 都有 $\delta I = 0$ （作用量取极值）的充要条件为

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2} g_{\rho\nu,\mu} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

此即测地线方程

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$$

作业：试从带电检验质点在电磁场中的作用量

$$I = \int \left(-m \sqrt{-g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} + q A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) d\lambda$$

导出其运动方程。

[粒子作用量的世界线重参数化不变性和电磁规范不变性]

标量函数 $f(x)$ 在时空流形上的积分：

$$\int f(x) \sqrt{-g} d^4 x$$

其中 $\sqrt{-g} d^4 x$ 为微分同胚不变的积分测度（体元）：

$$\det(g_{\mu\nu}) = \det(\partial_\mu \tilde{x}^\alpha \tilde{g}_{\alpha\beta} \partial_\nu \tilde{x}^\beta) = \left| \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right|^2 \tilde{g}, \quad d^4 x = \left| \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right| d^4 \tilde{x}$$

爱因斯坦-希尔伯特作用量：

$$I = \int R \sqrt{-g} d^4 x$$

该作用量对度规的变分稳定性条件将给出真空爱因斯坦方程：

$$\begin{aligned}
\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\delta g_{\mu\sigma,\nu} + \delta g_{\nu\sigma,\mu} - \delta g_{\mu\nu,\sigma}) + \frac{1}{2}\delta g^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\delta g_{\mu\sigma;\nu} + \delta g_{\nu\sigma;\mu} - \delta g_{\mu\nu;\sigma}) =: \frac{1}{2}(\delta g_{\mu;\nu}^{\rho} + \delta g_{\nu;\mu}^{\rho} - \delta g_{\mu\nu}^{\rho}) \\
\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\mu} &= \frac{1}{2}\delta g_{\mu;\beta}^{\mu} \\
\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} \\
\delta R_{\beta\nu} &= \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\beta\nu}^{\mu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\beta\mu}^{\mu} = \frac{1}{2}\nabla_{\mu}(\delta g_{\beta;\nu}^{\mu} + \delta g_{\nu;\beta}^{\mu} - \delta g_{\beta\nu}^{\mu}) - \frac{1}{2}\delta g_{\mu;\beta\nu}^{\mu} \\
\delta(g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}) &= 0 \Rightarrow \delta(g^{\alpha\beta}) = -\delta g^{\alpha\beta} \text{ (作业)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta R &= g^{\beta\nu}\delta R_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}\delta(g^{\beta\nu}) = \nabla_{\mu}\left(\delta g_{;\nu}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta g_{\nu}^{;\mu}\right) - \frac{1}{2}\delta g_{\mu;\nu}^{\mu\nu} - R_{\beta\nu}\delta g^{\beta\nu} \\
&= \nabla_{\mu}(\delta g_{;\nu}^{\mu\nu} - \delta g_{\nu}^{;\mu}) - R^{\beta\nu}\delta g_{\beta\nu} \\
\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} &= gg^{\mu\nu} \Rightarrow \delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}(-g)^{-\frac{1}{2}}gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\beta\nu}\delta g_{\beta\nu} \\
\delta I &= \int \left(\nabla_{\mu}(\delta g_{;\nu}^{\mu\nu} - \delta g_{\nu}^{;\mu}) - R^{\beta\nu}\delta g_{\beta\nu} + \frac{1}{2}g^{\beta\nu}R\delta g_{\beta\nu}\right)\sqrt{-g}d^4x
\end{aligned}$$

高斯定理的协变形式：

$$\int_V \nabla_{\mu} J^{\mu} \sqrt{-g} d^4x = \int_V \partial_{\mu}(\sqrt{-g} J^{\mu}) d^4x = \int_{\partial V} n_{\mu} J^{\mu} \sqrt{-g} d^3\bar{x}$$

注意由于 δI 的边界项中含有 $\delta g_{\mu\nu}$ 的外部导数，实际上即便规定边界条件 $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial V} = 0$ 也无法得到使作用量稳定的运动方程。暂时忽略这个缺陷（直接丢弃边界项），则有

$$\delta I = \int -G^{\beta\nu}\delta g_{\beta\nu}\sqrt{-g}d^4x = 0 \Rightarrow G_{\mu\nu} = 0, \quad \frac{\delta I}{\delta g_{\beta\nu}} = -G^{\beta\nu}\sqrt{-g}$$

[Gibbons-霍金边界项]

[引力作用量的微分同胚不变性与 Bianchi 恒等式]

与物质场的耦合：

$$I = \int \left(\frac{R}{16\pi G} + L_{\text{mat}}\right) \sqrt{-g} d^4x$$

由于物质场的能动张量

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int L_{\text{mat}} \sqrt{-g} d^4x$$

故有

$$\delta I = 0 \Rightarrow G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}$$

以实标量场 ϕ 为例：

$$\begin{aligned}
L_{\text{mat}} &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\
T^{\mu\nu} &= 2\frac{\partial L_{\text{mat}}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{2}{\sqrt{-g}}L_{\text{mat}}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \\
&= \nabla^{\mu}\phi\nabla^{\nu}\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\nabla_{\rho}\phi\nabla^{\rho}\phi + m^2\phi^2)
\end{aligned}$$

对于闵氏情形显然有

$$T^{tt} = (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} [-(\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] = \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] > 0$$

符合能量密度为正的物理要求。

[弯曲时空中的物质场运动方程和能量条件]

[弯曲时空中的量子场论]

标架自旋联络

流形 M 上一点 P 处所有的切矢量构成的线性空间称为 M 在 P 处的切空间，记为 $T_P(M)$ 。切空间 $T_P(M)$ （作为线性空间）的维数等于流形 M 的维数 n 。如同切矢量可以直观地看作曲线在某一处的“掰直”，切空间也可以看作弯曲空间在某一处的“压平”。

设 $e_a^\mu(P)$ ($a = 1, 2, \dots, n$) 为线性空间 $T_P(M)$ 的一组基，则 P 处任一切矢量可以按照这组基来展开：

$$T^\mu(P) = T^a(P)e_a^\mu(P)$$

若 $e_a^\mu(P)$ 满足“正交归一”条件

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$$

则称 $e_a^\mu(P)$ 为一组（正交归一）标架 (frame)，四维情形又专称 tetrad)。当 P 取遍流形 M 上的所有点 x , $e_a^\mu(x)$ 满足一定的光滑条件时称为 M 上的标架场。称 e_a^μ 的指标 μ 为坐标指标（或流形指标），指标 a 为标架指标（或切空间指标）。相应地， T^μ 称为切矢量 T 的坐标分量， T^a 称为 T 的标架分量。

显然任一点 P 处正交归一基 e_a^μ 的取法并不唯一，不同取法之间相差一个洛伦兹变换：

$$M_c^a M_d^b \eta_{ab} = \eta_{cd}, \quad (M) \in SO(1,3)$$

[类光标架和 Newman–彭罗斯 (NP) 形式]

类似于坐标分量 T^μ 的平行移动需要引进仿射联络 $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ ，标架分量 T^a 的平行移动需要引进相应的联络 $\omega_{*b\mu}^a$ ，称为自旋联络：

$$\nabla_\mu T^a = \partial_\mu T^a + \omega_{*b\mu}^a T^b$$

如果要求切矢量的平行移动不依赖于用坐标分量还是标架分量来表达，则有相容性条件

$$\begin{aligned} \nabla_\mu e_a^\nu &= \partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu e_a^\rho - \omega_{*a\mu}^b e_b^\nu = 0 \\ \Rightarrow \omega_{*a\mu}^b &= e_b^\nu \partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu e_a^\rho e_b^\nu \end{aligned}$$

其中逆标架场 e_ν^b 满足

$$e_\nu^b e_a^\nu = \delta_a^b, \quad e_\nu^b e_b^\mu = \delta_\nu^\mu$$

由此有

$$\nabla_\mu \eta_{ab} = 0 \Rightarrow -\omega_{*a\mu}^c \eta_{cb} - \omega_{*b\mu}^c \eta_{ac} = 0$$

若定义 $\omega_{ba\mu} := \omega_{*a\mu}^c \eta_{cb}$ ，则可知 $\omega_{ab\mu}$ 对其标架分量反对称：

$$\omega_{ba\mu} + \omega_{ab\mu} = 0$$

实际上，自旋联络（对于确定的指标 μ ）取值在 $so(1, 3)$ 李代数上。

弯曲时空背景中狄拉克场的拉氏量：

$$L_D = i\bar{\psi}(\gamma^a e_a^\mu D_\mu - m)\psi$$

其中 γ^a 为伽马矩阵：

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$$

D_μ 为旋量协变导数算符：

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_{ab\mu} \gamma^{ab} - iqA_\mu, \quad \gamma^{ab} := \frac{1}{2} [\gamma^a, \gamma^b] = \gamma^a \gamma^b$$

可以证明以上拉氏量在局域洛伦兹变换下不变。通过相应作用量的变分稳定性条件可得弯曲

时空中的狄拉克方程

$$(\gamma^a e_a^\mu D_\mu - m)\psi = 0$$

黑洞热力学

稳态黑洞仅由少数几个宏观参量来描述：暗示黑洞与热力学的关系。

黑洞面积不减定理（霍金，1971）：暗示黑洞（视界）面积与熵的关系。

由于在一定条件下可以证明 KN 黑洞是最一般的稳态黑洞，下面通过对 KN 黑洞宏观参量的分析来导出黑洞的热力学关系（热一律）。KN 度规：

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - adt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$A_\mu = \left(-\frac{Qr}{\rho^2}, 0, 0, \frac{Qra \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)$$

其中 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ 。KN 黑洞的外视界 r_+ 满足

$$\Delta(r_+) = r_+^2 - 2Mr_+ + \frac{J^2}{M^2} + Q^2 = 0$$

微分（变分）上式得

$$r_+ dr_+ - M dr_+ - r_+ dM + \frac{J dJ}{M^2} - \frac{J^2 dM}{M^3} + Q dQ = 0$$

$$\left(r_+ + \frac{a^2}{M} \right) dM = (r_+ - M) dr_+ + \frac{a}{M} dJ + Q dQ$$

$$(r_+^2 + a^2) dM = (r_+ - M) r_+ dr_+ - \left(\frac{a^2}{M} r_+ - a^2 \right) dM + \frac{a}{M} r_+ dJ + Q r_+ dQ$$

$$dM = \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2} \left(r_+ dr_+ - \frac{a^2}{M} dM + \frac{a}{M} dJ \right) + \frac{a}{r_+^2 + a^2} dJ + \frac{Q r_+}{r_+^2 + a^2} dQ$$

$$= \frac{1}{2} \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2} d(r_+^2 + a^2) + \frac{a}{r_+^2 + a^2} dJ + \frac{Q r_+}{r_+^2 + a^2} dQ$$

注意到在 $r = r_+$ 处

$$ds_+^2 = \frac{\sin^2 \theta}{\rho_+^2} [(r_+^2 + a^2)d\varphi - adt]^2 + \rho_+^2 d\theta^2, \quad A_\mu = \left(-\frac{Qr_+}{\rho_+^2}, 0, 0, \frac{Qr_+ a \sin^2 \theta}{\rho_+^2} \right)$$

变换到非转动坐标系（可以看出 Ω 实际上为角速度）：

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \Omega t, \quad \Omega := \frac{a}{r_+^2 + a^2}$$

$$ds_+^2 = \frac{\sin^2 \theta}{\rho_+^2} (r_+^2 + a^2)^2 d\tilde{\varphi}^2 + \rho_+^2 d\theta^2$$

$$\tilde{A}_t = -\frac{Qr_+}{\rho_+^2} + \Omega \frac{Qr_+ a \sin^2 \theta}{\rho_+^2} = -Qr_+ \frac{r_+^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta}{\rho_+^2 (r_+^2 + a^2)} = -\frac{Qr_+}{r_+^2 + a^2} =: -\Phi$$

而视界的截面（等时面）面积

$$A = \int \sqrt{\gamma} d\theta d\varphi = \int \sqrt{(r_+^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta} d\theta d\varphi = 4\pi(r_+^2 + a^2)$$

故有

$$dM = \frac{\kappa}{2\pi} d\frac{A}{4} + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad \kappa := \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2}$$

其中 κ 实际上是所谓的视界表面引力（讨论略）。对于极端黑洞 $\kappa = 0$ 。

霍金在 1974 年利用半经典方法证明黑洞具有温度 $T = \kappa/2\pi$ 的黑体辐射（霍金辐射），再与黑洞面积不减定理结合可知黑洞满足热一律

$$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad S = \frac{A}{4} = \frac{A}{4G\hbar}$$

其中的熵 S 称为黑洞的 Bekenstein–霍金熵。

[黑洞熵的微观解释]

完整的黑洞热力学：

热零律	稳态视界表面引力 κ 处处相等。
热一律	$dM = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ$
热二律	视界面积不减。
热三律	物理过程不可能形成极端黑洞。

宇宙学常数

带宇宙学常数 Λ 的爱因斯坦–希尔伯特作用量：

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + L_{\text{mat}} \right) \sqrt{-g} d^4x \\ \delta I &= \int \left(\frac{-G^{\beta\nu} - \Lambda g^{\beta\nu}}{16\pi G} + \frac{T^{\beta\nu}}{2} \right) \delta g_{\beta\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \\ \Rightarrow G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} &= 8\pi G T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

若暂不考虑物质场的 $T^{\mu\nu}$ 而将 Λ 的影响看作一种特殊的物质场，则有

$$G^{\mu\nu} = -\Lambda g^{\mu\nu} =: 8\pi G T_A^{\mu\nu}$$

将 $T_A^{\mu\nu}$ 与理想流体的形式 $(\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}$ 对比可知 $p = -\rho$ ，且当 $\Lambda > 0$ 时 $\rho > 0$ ，这种完全由宇宙学常数带来的能量密度称为真空能。根据第二章中的讨论，宇宙学常数一定极其微小，以至于在太阳系甚至银河系尺度上完全没有可观测效应。

对于真空静态球对称情形求解带宇宙学常数的引力场方程，易得

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

这就是上一章中提到的史瓦西–AdS 黑洞解 ($\Lambda < 0$)，而当 $\Lambda > 0$ 时称为史瓦西–de Sitter 解。若令 $M = 0$ ，则成为“静态坐标”下的 de Sitter (dS) 时空 ($\Lambda > 0$) 和反 de Sitter (AdS) 时空 ($\Lambda < 0$)：

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

可以证明，dS 和 AdS 时空均匀且各向同性，具有与闵氏时空一样的最高对称性（10 个独立的 Killing 矢量）。实际上，dS 和 AdS 时空可以分别看作嵌入于五维“闵氏”空间

$$\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1), \quad \eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, -1)$$

中半径为 $l^2 = 3/\Lambda$ 和 $l^2 = -3/\Lambda$ 的“伪球面”。

[常曲率空间（最大对称空间）]

[宇宙学常数问题]