

第二章 粒子的运动学性质 和高能物理实验

第一节 粒子的运动学性质

1. 自然单位制

这是粒子物理中普遍使用的单位制，原因是标志狭义相对论效应的光速 c 、标志量子效应的普朗克常数 \hbar 频繁出现，表达式和数学计算会很复杂。

常数	约定	量纲	数值关系
光速	$c = 1$	[长度] = [时间]	$1s = 2.9979 \times 10^8 m$
普朗克常数	$\hbar = 1$	[能量] = [时间] $^{-1}$	$1(MeV)^{-1} = 6.582 \times 10^{-22} s$
玻尔兹曼常数	$k = 1$	[能量] = [温度]	$1eV = 11604 K$

粒子物理中常用的长度大单位是 **费米 (fm)**：

$$1\text{fm} = 10^{-15} m$$

自然单位制下唯一的单位——**电子伏特**

常用的单位有： eV, keV, MeV, GeV, TeV

长度单位费米 (fm) 和能量单位 (eV) 的关系：

$$\hbar c = 197.3(MeV \cdot fm) = 1$$

$$1\text{fm} = (197.3\text{MeV})^{-1}$$

能量单位——电子伏特 eV:

$$1\text{keV} = 10^3 \text{eV}, \quad 1\text{MeV} = 10^6 \text{eV},$$

$$1\text{GeV} = 10^9 \text{eV}, \quad 1\text{TeV} = 10^{12} \text{eV}$$

长度单位——费米 (femtometer) fm: $1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$

截面单位——巴 (barn) b : $1b = 10^{-28} \text{m}^2 = 10^{-24} \text{cm}^2$

普遍的自然单位制 (普朗克单位制) : $c = \hbar = k = G_N = 1$

相对论: $c = 299\ 792\ 458 \text{ m s}^{-1}$

量子论: $\hbar = 6.582\ 119\ 569 \dots \times 10^{-22} \text{ MeV s}$

热力学: $k = 8.617\ 333\ 262 \dots \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$

引力: $G_N = 6.708\ 83(15) \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2}$

$$G_N m_{\text{planck}}^2 = 1 \rightarrow \\ m_{\text{planck}} \sim \mathcal{O}(10^{19}) \text{ GeV}$$

普朗克单位制 (Planck units)

引入普朗克时间，普朗克长度，普朗克温度和普朗克质量，则所有相关的量以此为单位，则可以取 $G_N = 1$ 。或者说，如果在普通的自然单位制约定 $\hbar = c = k_B = 1$ 时，所有有量纲的量都以普朗克能量的相应幂次为单位，则可以取 $G_N = 1$

Table 1: Modern values for Planck's original choice of quantities

Name	Dimension	Expression	Value (SI units)
Planck length	length (L)	$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$	$1.616\ 255(18) \times 10^{-35} \text{ m}$ ^[7]
Planck mass	mass (M)	$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$	$2.176\ 434(24) \times 10^{-8} \text{ kg}$ ^[8]
Planck time	time (T)	$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}}$	$5.391\ 247(60) \times 10^{-44} \text{ s}$ ^[9]
Planck temperature	temperature (Θ)	$T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}}$	$1.416\ 784(16) \times 10^{32} \text{ K}$ ^[10]

来源于
[Wikipedia.org](#)
的“Planck
units”

2. 狹義相對論——Minkowski 度規和符號

度規張量: $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

時空坐標(四矢量): $x^\mu = (t, \vec{x})$ $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (t, -\vec{x})$

四動量: $p^\mu = (E, \vec{p})$ $p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = (E, -\vec{p})$

兩個四矢量的標積: $A \cdot B = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$

例如: $x^2 = x_\mu x^\mu = t^2 - \vec{x}^2$ $p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2$

類時動量: $p^2 > 0$ 類空動量: $p^2 < 0$

質殼條件: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ 

實的在殼粒子的4度動量 在此度規下 $p^2 = m^2 \geq 0$

3. 粒子的质量——静止质量m

自由粒子波函数满足薛定谔方程

$$i \frac{d}{dt} |t\rangle \equiv H|t\rangle = E|t\rangle$$

$$|t\rangle = e^{-imt}|0\rangle \quad \langle t|t\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$$

- 归一化条件是与时间无关的， t 时刻粒子在全空间中存在的概率为1，不随时间变化。
- 对于不稳定粒子，引入哈密顿量 H 的复本征值 $E = m - i\frac{\Gamma}{2}$

其中负号是考虑到因果关系。假设其产生时刻为 $t=0$ ，则

$$|t\rangle = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-i(m-i\frac{\Gamma}{2})t}|0\rangle & t \geq 0 \end{cases}$$

归一化条件为 $\langle t|t\rangle = e^{-\Gamma t}\langle 0|0\rangle = e^{-\Gamma t}(t \geq 0)$

- 也就是说，粒子数是时间的函数 $N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$

4. 粒子的寿命——能量本征值中虚部的物理意义

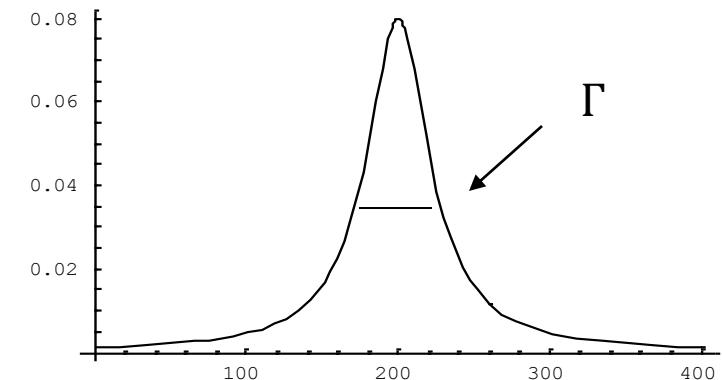
大多数已发现的粒子是不稳定的，粒子存在一段时间后就会衰变。粒子的寿命是指其静止时的寿命，相对论造成运动的粒子寿命延长，可以延长很多。

对自由粒子波函数作Fourier变换

$$|\phi(M)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{iMt} |t\rangle = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{iMt} e^{-i(m-i\frac{\Gamma}{2})t} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(M-m) + i\frac{\Gamma}{2}} |0\rangle$$

不稳定粒子的（归一化）质量分布函数

$$\rho(M) \equiv \Gamma \langle \phi(M) | \phi(M) \rangle = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(M-m)^2 + \Gamma^2/4}$$



Γ 是质量分布函数的半高宽，通常称为不稳定粒子的宽度。

- 粒子的寿命通常指大量粒子的平均寿命。

令 $N(t)$ 为 t 时刻某种不稳定粒子的数目，在 dt 时间间隔中，由于衰变，粒子数改变了 dN ，则 dN 应正比于 N ，还正比于 dt 。

粒子的宽度和寿命的关系：

$$dN(t) = -\frac{1}{\tau} N(t) dt, \quad N(t) = N(0) e^{-t/\tau}$$

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t dN / \int_0^\infty dN = \tau$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}}$$

- 对于不稳定粒子，一般有不止一种衰变方式但只有唯一的寿命，对应于全（总）宽度 Γ ， $\Gamma\tau = 1$ 。

不同衰变方式对总宽度的贡献称为分宽度（即单位时间内粒子衰变到该衰变道的几率），记为 Γ_i ，这样又引入一个概念——该衰变方式的分支比：

$$R_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$$

- 对于寿命长的粒子，在探测器中留下径迹，可以测量寿命 τ

$$m\tau = Et - pL = E \frac{L}{v} - pL = E^2 \frac{L}{p} - PL = \frac{L}{p}(E^2 - p^2) = \frac{m^2}{p}L \rightarrow \tau = m \frac{L}{p}$$

$$L = vt = \frac{v\tau}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{p}{E} \frac{\tau}{\sqrt{1-(p/E)^2}} = \frac{p\tau}{\sqrt{E^2-p^2}} = \frac{p\tau}{m}$$

- 对于寿命短的粒子，可以测量宽度 Γ
- 但对于中间的粒子最讨厌（不长不短），可以测量分支比 R_i ，理论上计算 Γ_i ，总宽度 Γ 利用 $\Gamma_i = \Gamma R_i$ 来估计——实验和理论联系。

- 一些粒子的寿命：

 γ

$$\tau = \infty$$

 e

$$\tau > 2 \times 10^{22} \text{yr}$$

 μ

$$\tau = (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6} \text{s}$$

 n

$$\tau = (896 \pm 10) \text{s}$$

 π^\pm

$$\tau = (2.6029 \pm 0.0023) \times 10^{-8} \text{s}$$

 π^0

$$\tau = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17} \text{s}$$

5. 粒子的电荷

基本电荷单位: $e = (1.60217733 \pm 0.00000048) \times 10^{-19} C$

质子电荷和电子电荷差的实验结果: $\frac{|q_p - q_e|}{q_e} < 10^{-21}$

电荷量子化: Dirac从理论上推出, 如果自然界存在磁单极, 则电荷量子化是严格成立的, $qg = \frac{n}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$

夸克的电荷是分数的: $q = \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$

已发现的粒子的最大电荷为2: $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$

6. 粒子的自旋

- 粒子的自旋是粒子的基本性质之一，其量子数可取整数或半整数

玻色子: 自旋为整数的粒子, $J = 0, 1, 2, \dots$, 服从玻色统计。

费米子: 自旋为半整数的粒子, $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$, 服从费米统计。

- 常见的粒子的自旋:

	e	μ	p	n	π	γ	W^\pm	Z
J	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1

- 零质量的矢量粒子（如光子）自旋在运动方向的投影只有 $J_z = \pm 1$, 即只有两种极化。
- 已发现的粒子的最大的自旋是 $J = \frac{11}{2}$

7. 粒子的磁矩

- 从经典图象来看，带电粒子在外磁场中做圆周运动产生（轨道）磁矩。如果带电粒子也有内禀角动量——自旋，则也有内禀磁矩(**intrinsic magnetic moment**)，也就是我们常说的粒子的磁矩。粒子的内禀磁矩可以表示为

$$\mu = g \frac{e}{2m} S \equiv gS\mu_B$$

μ_B 是玻尔磁子(Bohr's magneton)

g 是旋磁比(gyromagnetic ratio)

- 狄拉克通过Dirac方程推出电子的旋磁比 $g = 2$ 。更广泛的关系是，对于点粒子场，有 $gS = 1$ 。粒子的内禀磁矩对磁关系的偏离称为**反常磁矩**。最常见的几种费米子的内禀磁矩如下：

e : $gS = 1.001159622209(31)$

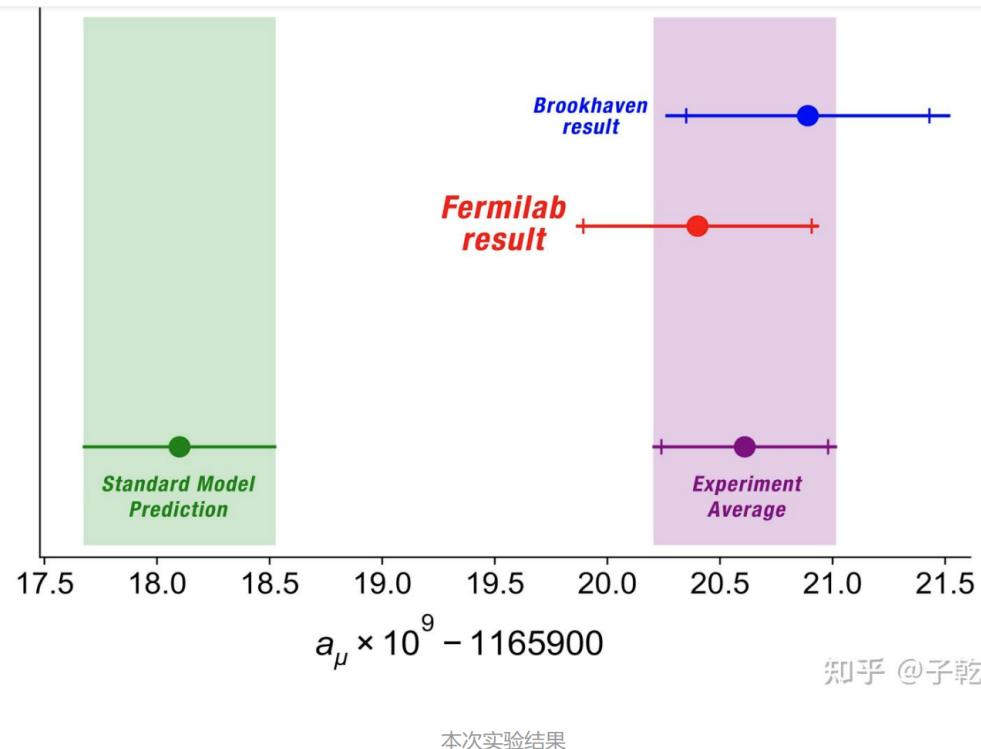
p : $gS = 2.7928444(11)$

μ : $gS = 1.001165923(9)$

n : $gS = -1.91304308(54)$

- 电子和muon子的反常磁矩来源于它们与自身产生的电磁场的自相互作用；质子和中子的反常磁矩与正常磁矩偏离很大，是因为它们是复合粒子；较大的反常磁矩是粒子内部结构的一种体现。

美国费米实验室的最新 μ 子试验结果对物理学有多大颠覆？粒子的...



μ 子反常磁矩的理论预测为：

$$a_\mu = 0.001\ 165\ 918\ 10(43)$$

而整合最新的数据后，实验结果为：

$$a_\mu = 0.001\ 165\ 920\ 61(41)$$

在小数点后第8位开始出现差距！这一差距让大家不得不认真对待。

BMW Col. arXiv:2407.10913 [hep-lat]

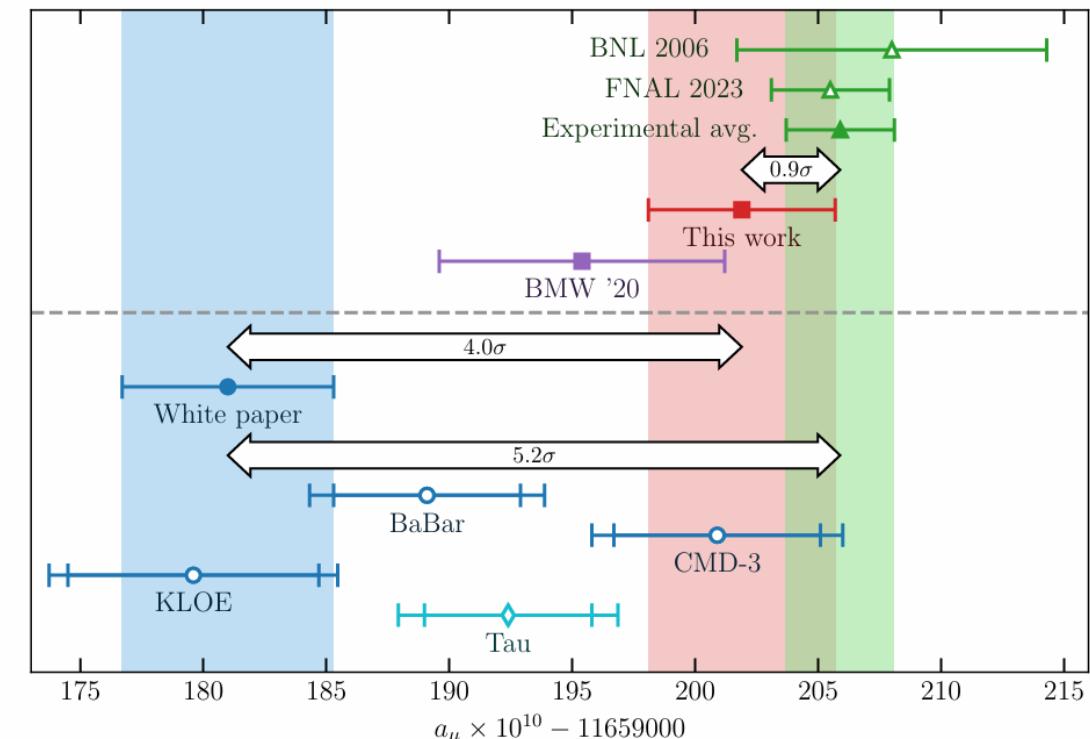


Figure 3: Comparison of standard-model predictions of the muon anomalous magnetic moment with its measured value. The panel above the dashed horizontal line shows a comparison of the world-average measurement of a_μ [1] denoted by a green band, with the standard-model prediction obtained here, denoted by the red band. The latter is obtained by adding the value of $a_\mu^{\text{LO-HVP}}$ computed in present work to the results for all of the other contributions summarised in Ref. [2]. The panel below the line shows the predictions for $a_\mu^{\text{LO-HVP}}$ obtained in the data-driven approach using the most precise measurements of the two-pion spectrum in electron-positron annihilation and τ -decay experiments [23]. These correspond to BaBar [15, 16], KLOE [17–20] and CMD-3 [4] for e^+e^- annihilation and Tau for τ decays [21, 22]. The blue band shows the muon $g - 2$ Theory Initiative combination of the data-driven results [2] (White paper), obtained prior to the publication of the CMD-3 measurement. That combination is currently being reassessed. The error bars are SEM.

第二节 粒子的运动学描述

1. 粒子的能量和动量 (E, \vec{p})

- 粒子的能量和动量构成一个Lorentz四矢量： $p^\mu = (E, \vec{p})$

- 粒子的运动速度： $\vec{v} = \vec{p}/E$

如果两个参照系的相对运动速度为 v ，则三动量可以写成： $\vec{p} = (p_L, \vec{p}_T)$

- 能动量的Lorentz变换关系为：

$$p'_L = \gamma(p_L - vE), \quad E' = \gamma(E - vp_L)$$

其中， $\gamma = (1 - v^2)^{-(1/2)}$

- 自由粒子的能量和动量满足“质壳条件”： $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$

2. 快度和赝快度

- 两个惯性系中的速度变换关系: $v_L' = \frac{v_L - v}{1 - v_L v}$, $v'_T = \frac{v_T}{(1 - v_L v)\gamma}$
- 为了表述方便, 引入快度(rapidity) y, Y : $\tanh y = v_L$, $\tanh Y = v$

$$\cosh y = \frac{1}{\sqrt{1 - v_L^2}}, \sinh y = \frac{v}{\sqrt{1 - v_L^2}}$$

- 两个惯性系中粒子的快度只相差一个常数: 假设两个惯性系的相对速度为 v , 则相对快度为

$$Y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v}{1 - v},$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + v_L}{1 - v_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_L}{E - p_L}$$

由快度的定义,

快度在纵向平移变换中具有相加性, 快度差具有 Lorentz 不变性。

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \ln \frac{E' + p'_L}{E' - p'_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - v)(E + p_L)}{(1 + v)(E - p_L)} \\ &= y - Y \end{aligned}$$

- 在实验中一般引入**赝快度**: $\eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$, θ 为粒子飞行方向与纵轴之间的夹角。

快度和赝快度的关系: 假设粒子的质量为0, 则

$$p_L = p_T \sin y, E = p_T \cosh y \quad \rightarrow \quad \frac{p_L}{p_T} = \cot \theta = \sin y, \quad \frac{p}{p_T} = \frac{1}{\sin \theta} = \cosh y$$

$$\eta = \ln(\cosh y + \sin y) = \ln e^y = y$$

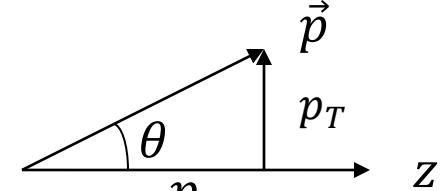
更普遍地, $\eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (p_L/p)}{1 - (p_L/p)} \Rightarrow$

$$th\eta = \frac{p_L}{p} = \frac{p_L E}{E p} = thy \sqrt{p^2 + m^2}/p = thy \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \quad \rightarrow \quad y = th^{-1} \left[\frac{th\eta}{\sqrt{1 + (m^2/p^2)}} \right]$$

在大横动量条件下 ($p \gg m$)

$$y = \eta - \frac{m^2}{2p_T^2} \cos \theta$$

在快度为0 (粒子静止) 附近, 二者差别大一些, 在其它时候 (快速运动粒子) 二者差别不大。实验上定出的是 η , 因为角度容易测量, 而理论上要用 y 。



证明: $y = \eta - \frac{m^2}{2p_T^2} \cos \theta$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_L}{E - p_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{m^2 + p^2} + p_L}{\sqrt{m^2 + p^2} - p_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + m^2/(2p^2) + p_L/p + \dots}{1 + m^2/(2p^2) - \frac{p_L}{p} + \dots} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta + m^2/(2p^2) + \dots}{1 - \cos \theta + m^2/(2p^2) + \dots} = \frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} + m^2/(4p^2) + \dots}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m^2}{4p^2} + \dots} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{1 + m^2/(4p^2 \cos^2 \frac{\theta}{2})}{1 + m^2/(4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})} \right] \approx \eta + \ln \left[1 + \frac{m^2}{4p^2} \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \right] \\
&\approx \eta - \frac{m^2}{2p^2 \sin^2 \theta} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \eta - \frac{m^2}{2p_T^2} \cos \theta
\end{aligned}$$

3. 实验室系和质心系

粒子的许多运动性质是在其静止系中描述的，而测量是在实验室坐标系，两个基本坐标系之间通过Lorentz变换联系起来，但很不方便。根据相对论等价原理，惯性参照系是等价的。通过寻找粒子体系的Lorentz不变的运动学变量来描述粒子运动是一个简便的途径。对于多粒子体系，质心系是很有用的坐标系。

考虑两个粒子组成的系统——两粒子体系在研究粒子碰撞和粒子的两体衰变时很常见，其质心系总能量 E_{cm} 是一个重要的不变量：

$$\begin{aligned} m_{inv}^2 \equiv E_{cm}^2 &= (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos\theta \end{aligned}$$

其中 θ 是两个粒子运动方向之间的夹角。如果考虑的是两个粒子的碰撞， E_{cm} 是碰撞后产生的全部粒子质量和的上限；二粒子在质心系都静止最省能量，如果这两个粒子是由一个粒子衰变而来的， E_{cm} 就是初态粒子的质量。

$$\begin{aligned}
 m_{\text{inv}}^2 &\equiv E_{cm}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\
 &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

- 对撞实验：

两个粒子经过加速实现对撞，当其质量远小于加速能量时有

$$E_{cm}^2 = 4E_1E_2$$

如果是两个能量相等的基本点粒子的对撞，则有效反应能为质心系能量，即两个粒子能量的和

$$E_{cm} = 2E$$

对撞实验容易获得大的质心能量，所以目前的高能物理实验主要是对撞实验。

- 打靶实验

如果一个高速粒子去碰撞一个静止的靶粒子，即所谓打靶实验，可以简单表为（第二个粒子为靶粒子），

$$E_{cm}^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2$$

考虑入射粒子的相对论极限（高能加速器），有：

$$E_{cm}^2 = 2E_1 m_2 \Rightarrow E_{cm} = \sqrt{2E_1 m_2}$$

即质心系能量和入射粒子的能量的平方根成正比。

例如，Fermi实验室进行的正反质子对撞实验，要得到2TeV的质心系能量，质子和反质子（质子和反质子质量约为1GeV）分别加速到1TeV即可，但如果换成打靶实验，则入射粒子需要加速到

$$E_1 = E_{cm}^2 / (2m_p) \sim 2000 \text{ TeV}$$

所以，高能加速器都是考虑对撞机实验，而不是打靶实验。

4. N个粒子反应的Lorentz不变量

- 考虑一个粒子的衰变或两个粒子碰撞所产生的反应，如果初态和末态共涉及 n 个粒子，考察由这 n 个粒子的四维动量可以组成多少个 Lorentz不变的运动学变量，以避免坐标系变换。

两粒子碰撞反应: $A + B \rightarrow C + D + \dots$

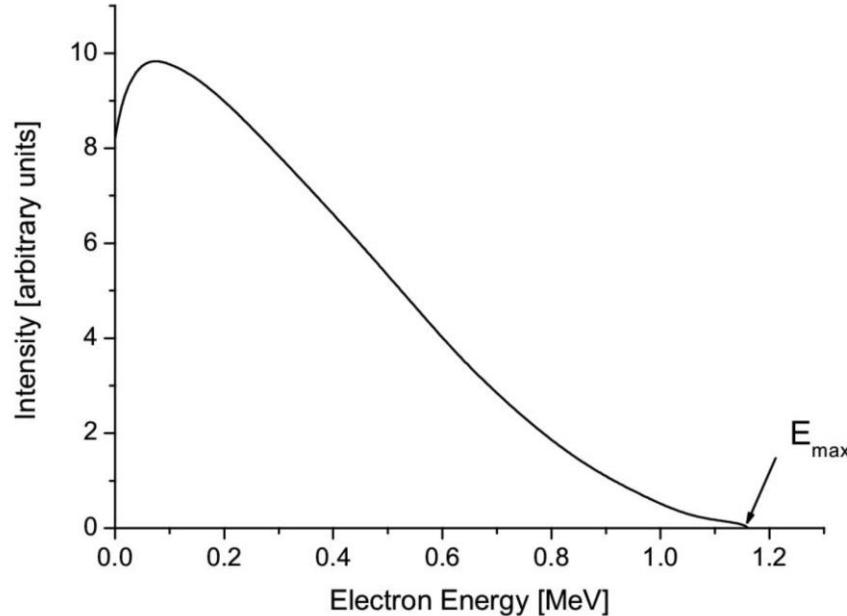
单粒子衰变反应: $A \rightarrow B + C + D + \dots$

- 二个四度矢量的内积是标量。 n 个四动量有 $n - 1$ 个独立（能动量守恒条件），它们能构成的Lorentz不变量共有 $n(n - 1)/2$ ，其中 n 个质壳条件。由此可见 n 个粒子反应中独立的可变的Lorentz不变量个数为

$$\frac{1}{2}n(n - 1) - n = \frac{1}{2}n(n - 3)$$

- 二体衰变 $A \rightarrow B + C$ 没有独立的Lorentz标量，动量都是确定的。

n	4	5	6	7	...
独立标量个数	2	5	9	14	...



Beta spectrum of Bi(210).
 $E_{max} = Q = 1.16\text{MeV}$ is
 the maximum energy.

注：Bi (210) 是铀系天然放
 射性同位素钋-210。

$$N(T) = C_L(T) F(Z, T) p E(Q - T)^2$$

$$F(Z, T) \approx \frac{2\pi\eta}{1 - e^{-2\pi\eta}}, \quad \eta = \frac{Ze^2 E}{p}$$

$$T = E - m_e, \quad p = \sqrt{E^2 - m_e^2}$$

电子能量可以取到 Q 值，
 动能最大，给中微子剩余
 的能量只是其静止能量，
 则中微子质量可以很小。

例子: 二体到二体散射 $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

能动量守恒条件: $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

三个Lorentz标量 (Mandelstam 变量):

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

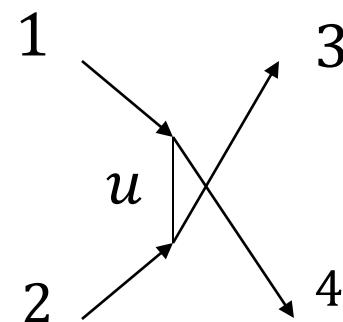
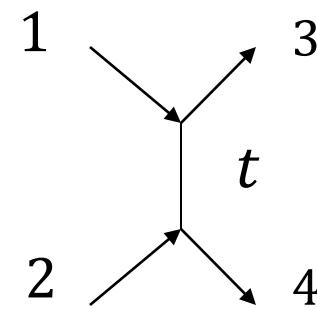
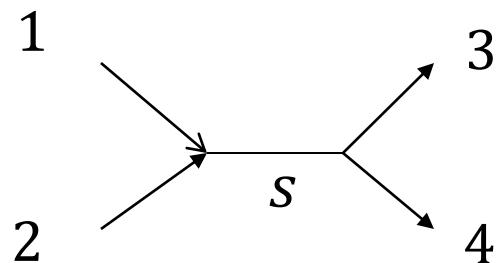
$$t \equiv (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$u \equiv (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

只有两个是独立的:

s : 质心系总能量平方
 t : 四维动量转移平方



*证明: $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2p_1 \cdot p_3$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2p_1 \cdot p_4$$

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_3 - 2p_1 \cdot p_4$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 + 2p_1 \cdot (p_2 - p_3 - p_4)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 - 2p_1 \cdot p_1$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

5. N体末态相空间(动量空间)

空间体积元 $d^3\vec{x}$ 不是Lorentz不变的，时间间隔元 dt 也不是Lorentz不变的，但四维时空体积元 $d^3\vec{x}dt$ 则是Lorentz不变的。同样，动量相空间体积元 $d^3\vec{p}$ 不是Lorentz不变的，能量间隔元 dE 也不是Lorentz不变的，但四维动量相空间体积元 $d^3\vec{p}dE$ 是Lorentz不变的。

末态粒子都是在壳的，能量和动量满足“质壳条件”： $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$
再考虑正能量条件， $E > 0$ ，引入阶梯函数：

$$\theta(E) = \begin{cases} 1, E > 0 \\ 0, E \leq 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

Lorentz不变，因为能量在Lorentz变换下不改变符号，因此函数值在Lorentz变换下不变。

则自由粒子的四维相空间不变体积元为：

$$d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) = dE d^3\vec{p} \delta(p^2 - m^2) \theta(E)$$

四维动量积分可以把能量积掉，有：

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{p} dE \delta(E^2 - \vec{p}^2 - m^2) \theta(E) &= \int d^3\vec{p} dE \frac{1}{|2E|} \left[\delta\left(E - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right) + \delta\left(E + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right) \right] \theta(E) \\ &= \int d^3\vec{p} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} \end{aligned}$$

$$\frac{\delta(f(x))}{1} = \frac{1}{|f'(x)|} \delta(x)$$

所以 n 体相空间积分元为：

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta \left(\sum_i p_i - \sum_{f=1}^n p_f \right) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_f^3}{(2\pi)^3 2E_f}$$

其中， δ 函数来自初末态总能动量守恒， $(2\pi)^3$ 来自Planck常数 \hbar 的定义。

如果末态粒子的质量都为 0，则计算大大简化，

$$\Phi_2 = \frac{(2\pi)^4}{4(2\pi)^5}, \quad \Phi_3 = \frac{(2\pi)^4 s}{32(2\pi)^7}, \dots \quad \frac{\Phi_3}{\Phi_2} = \frac{s}{32\pi^2}$$

$$\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \frac{s}{16\pi^2 n(n-1)} \Rightarrow \Phi_n = \frac{(2\pi)^4}{4(2\pi)^5 (n-1)! (n-2)!} \left(\frac{s}{16\pi^2} \right)^{n-2}$$

一般来说，多体相空间要比少体的小得多

运动学上考虑，有限的初态衰变质量，产生的粒子数越多，概率越小。

应用举例：粒子的二体衰变 $A \rightarrow B + C$

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta(p_A - p_B - p_C) \frac{1}{2m_A} \frac{d^3 \vec{p}_B^3}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{d^3 \vec{p}_C^3}{(2\pi)^3 2E_C} |\mathbf{T}|^2$$
$$= \frac{|\mathbf{T}|^2}{32\pi^2 m_A} \delta(E_A - E_B - E_C) \frac{|\vec{p}_B|^2 d|\vec{p}_B| d\Omega}{E_B E_C} = \frac{|\vec{p}_B| |\mathbf{T}|^2 d\Omega}{32\pi^2 m_A^2}$$

$$dE_A = dE_B + dE_C = \frac{|\mathbf{p}_B| d|\mathbf{p}_B|}{E_B} + \frac{|\mathbf{p}_B| d|\mathbf{p}_B|}{E_C} = \frac{E_A |\mathbf{p}_B| d|\mathbf{p}_B|}{E_B E_C}$$

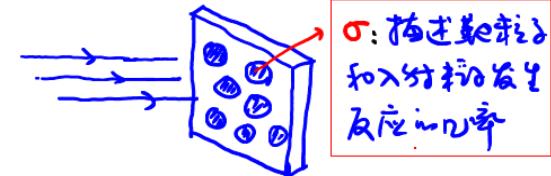
$$\Gamma = \int \frac{|\vec{p}_B| |\mathbf{T}|^2 d\Omega}{32\pi^2 m_A^2} = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{p}_B|}{m_A^2} \overline{|\mathbf{T}|^2}, \quad \overline{|\mathbf{T}|^2} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega |\mathbf{T}|^2$$

*补充：共振态的截面与宽度

一、 截面 (cross section)

两个粒子之间的相互作用强度可以用相互作用截面来描述。

考虑 $a + b \rightarrow c + d$ 的反应过程：



- 入射的流强 (通量, flux): $J = n_a v_i$, 单位时间内通过垂直于入射方向的单位面积的 a 粒子数 (密度为 n_a , 速度为 v_i)。
- 入射粒子束流扫过的 (单位面积的) 靶粒子 b 的粒子数 $N = n_b dx$
- 单位时间内该反应发生的事例数 (反应速率) 正比于 J 和 N :
$$W = \sigma J N$$
: σ 为比例系数, 和反应类型有关。
- 量纲分析 (自然单位制)
 - $[W]$: 时间的倒数, 量纲为 $[L]^{-1}$, 即长度量纲的 -1 次;
 - $[J]$: v_i 为速度, 是无量纲的数, $[n_a] = [L]^{-3}$;
 - $[N]$: 入射粒子流强扫过的靶粒子数, 为无量纲的数;
 - $[\sigma]$: 根据以上分析, 可以知道 $[\sigma] = [L]^2$, 即 σ 具有面积的量纲。

- σ 的物理意义：单位靶粒子和入射粒子发生“碰撞”（反应）的有效面积。
- 截面 σ 有概率的意义：每个靶粒子和单位流强的入射粒子发生反应的几率。

$$\sigma = W/JN$$

- 截面 σ 的单位：靶（巴），英文为 barn，记作 \mathbf{b}

$$1\mathbf{b} = 10^{-24}\text{cm}^2 = 10^{-28}\text{m}^2$$

常用的单位有：

\mathbf{mb} : 毫靶, millibarn, $1\mathbf{mb} = 10^{-3}\mathbf{b}$

$\mu\mathbf{b}$: 微靶, microbarn, $1\mu\mathbf{b} = 10^{-6}\mathbf{b}$

\mathbf{nb} : 纳靶, nanobarn, $1\mathbf{nb} = 10^{-9}\mathbf{b}$

\mathbf{pb} : 皮靶, picobarn, $1\mathbf{pb} = 10^{-12}\mathbf{b}$

\mathbf{fb} : 飞靶, fermtobarn, $1\mathbf{fb} = 10^{-15}\mathbf{b}$

\mathbf{ab} : 艾靶, attobarn , $1\mathbf{ab} = 10^{-18}\mathbf{b}$

- 截面有概率的意义，所以是相加性的。特定的末态，有特定的截面（多举截面，exclusive），也有总截面（单举，inclusive）

$$\sigma_X = \sigma(a + b \rightarrow X), \sigma_{tot} = \sum_X \sigma_X(a + b \rightarrow X)$$

二、亮度 (Luminosity)

$L = JN$ 称作亮度。亮度是加速器的基本参数，截面依赖于反应过程。

- 知道了加速器的亮度 L 和反应的事例数 $C = WT$ (T 为运行时间)，就可以从实验上测出该反应的反应截面 $\sigma = C/LT$ ，
- LT 又称作积分亮度： $[L] = [\sigma]^{-1}[T]^{-1}$ 的单位是 $b^{-1}s^{-1}$ 或者 $(mb)^{-1}s^{-1}$ 等；积分亮度 LT 的量纲为 $[LT] = [\sigma]^{-1}$ ，单位为 $b^{-1}, (mb)^{-1}$ 。
- 理论上知道了某种反应的截面，则要求实验上观测到具有统计显著性——统计量远大于误差——的该反应，则可以估计所需要的积分亮度

$$(LT) = C_{\text{required}} / \sigma$$

- 特定的装置 (L 固定)，就可以估计加速器需要进行相关实验的时间 T 。
- 环形对撞机的亮度

$$L = fn \frac{N_1 N_2}{A}$$

其中 f 为回旋频率， $N_{1,2}$ 为对撞束团中粒子的数目， n 为束流中束团的数目， A 为束流的截面积。环形对撞机中，束流由束团构成，在环形轨道内高速运动，束流在对撞点发生对撞。

- 对撞实验的典型的亮度：

e^+e^- 对撞机的亮度： $L = 10^{31} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1} - 10^{35} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

BEPCII 的亮度为 $10^{33} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ，
正在酝酿建造的 Super Tau-Charm Factory 目标亮度为
 $0.5 \times 10^{35} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

$p\bar{p}$ 对撞机： $L \sim 10^{30} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

pp 对撞机： $L \sim 10^{33} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

- 固定靶实验（亮度高）：

例如，每秒 10^{13} 个质子的束流，在液氢的靶中穿行 $1m$ （液氢分子数密度 $\mathcal{O}(10^{23}) \text{ cm}^{-3}$ ），可以获得 $L = 10^{38} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 的亮度。
也就是说，固定靶实验的亮度高。

三、共振态的产生截面

1. Fermi 黄金规则: $W = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_f(E_f), \quad \rho_f(E_f) = \frac{dN(E_f)}{dE_f}$

箱归一化: 体系处于体积为边长为 L 立方体箱子中, 满足周期性条件

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_x, \quad p_y = \frac{2\pi\hbar}{L} n_y, \quad p_z = \frac{2\pi\hbar}{L} n_z$$

$$dN = dn_x dn_y dn_z \equiv \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} d^3 \vec{p} = \frac{V}{8\pi^3} p_f^2 dp_f d\Omega$$

上面最后的等式我们采用了自然单位制 ($\hbar = c = 1$)。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{W}{J} = \frac{W}{v_i/V} = 2\pi |M_{fi}|^2 \frac{1}{v_i} \frac{V^2}{8\pi^3} p_f^2 \frac{dp_f}{dE_f}$$

$$\frac{dp_f}{dE_f} = v_f^{-1}, \quad \left(dp_f = d(E_f^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{E_f}{p_f} dE_f = \frac{dE_f}{v_f} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} (a + b \rightarrow c + d) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{V^2 p_f^2}{v_i v_f} |M_{fi}|^2$$

考虑初态自旋平均，末态自旋求和，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(a + b \rightarrow c + d) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{V^2 p_f^2}{v_i v_f} \frac{(2s_c + 1)(2s_d + 1)}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} |M_{fi}|^2$$

2. 不稳定粒子衰变

不稳定粒子态的波函数用 ψ_0 表示，衰变末态用波函数 $\psi_n (n \geq 1)$ 表示，它们满足正交归一化条件

$$\int dx \psi_m^*(x) \psi_n(x) = \delta_{mn}$$

系统的波函数可以表示为

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) e^{-iE_n t} \psi_n(\vec{r}), \quad E_n = \int dx \psi_n^*(x) \hat{H} \psi_n(x)$$

初条件： $t = 0$ 时， $a_0(0) = 1, a_n(0) = 0 (n \geq 1)$

根据 Schödinger 方程 $i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \Psi(\vec{r}, t)$

得到

$$\sum_m \left\{ i \frac{da_m}{dt} e^{-iE_m t} \psi_m + E_m a_m e^{-iE_m t} \psi_m \right\} = \sum_m a_m e^{-iE_m t} \hat{H} \psi_m$$

$$i \frac{da_n}{dt} = \sum_{m \neq n} H_{nm} e^{-i(E_m - E_n)t} a_m$$

在微扰近似 $H_{nm} \ll H_{0m}$ ($m, n \neq 0$) 下， $i \frac{da_n}{dt} = H_{n0} e^{-i(E_0 - E_n)t} a_0$ ($n \geq 1$)

在衰变粒子的质心系 ($E_0 = M$) (M 为粒子的质量)，并引入 $a_0(t)$ 时间指数衰减

$$a_0(t) = e^{-\frac{\Gamma t}{2}}$$

其中 $\Gamma = 1/\tau$ 为寿命的倒数。

求解方程得到

$$ia_n = -\frac{iH_{n0}}{(E_n - M) + i\Gamma/2} \left(e^{-i((M-E_n)-i\Gamma/2)t} - 1 \right) \xrightarrow{t \gg \tau=1/\Gamma} \frac{iH_{n0}}{(E_n - M) + i\Gamma/2}$$

即当 $t \gg \frac{1}{\Gamma}$ 时，发现末态 ψ_n 的几率（衰变到 ψ_n 的几率）为

$$P_n = |a_n(\infty)|^2 = \frac{|H_{n0}|^2}{(E_n - M)^2 + \Gamma^2/4} \equiv \frac{2\pi}{\Gamma} |H_{n0}|^2 P(E_n - M)$$

$$P(E_n - M) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E_n - M)^2 + \Gamma^2/4}$$

在能量区间 E_f 和 $E_f + dE_f$ 中衰变道的几率为

$$P_f(E_f) dE_f = \frac{2\pi}{\Gamma} |H_{f0}|^2 P(E_f - M) \rho_f(E_f) dE_f$$

如果 Γ 很小 ($\Gamma \ll M$) , $\rho_f(E_f)$ 在 $E_f = M$ 处会有一个尖峰。我们可以用 $\rho_f(M)$ 和 $|H_{f0}|^2$ 在 $E_f = M$ 处的值来代替，并对能量积分，可以得到该衰变道的分支比

$$R_f \equiv \frac{\Gamma_f}{\Gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_f P_f(E_f) = \frac{2\pi}{\Gamma} |H_{f0}|^2 \rho_f(M) \int_{-\infty}^{+\infty} dE_f P(E_f - M)$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma} |H_{f0}|^2 \rho_f(M)$$

$$\boxed{\Gamma_f = 2\pi |H_{f0}|^2 \rho_f(M)}$$

$$\boxed{P_f(E_f) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma_f}{(E_f - M)^2 + \Gamma^2/4}}$$

这是衰变过程 $\psi_0 \rightarrow \psi_f$ 随能量的几率分布密度。

3. 共振截面

如果不稳定粒子是在散射过程中产生，然后衰变到 f ，系统的波函数

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) e^{-iE_m t} \psi_m(\vec{r})$$

初条件： $t = 0$ 时有 $a_1(0) = 1, a_m(0) = 0 (m \neq 1)$

对于稳定的入射束流，我们一般认为 $\psi_1 \rightarrow \psi_0$ 的几率为常数，初末态动能

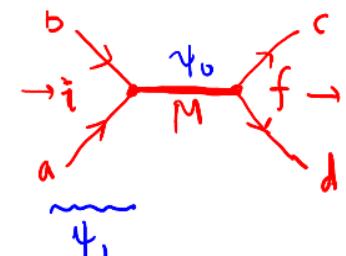
$$E_i = E_1 = E = E_f$$

Schödinger 方程给出

$$i \frac{da_0(t)}{dt} = H_{01} e^{-i(E_1 - E_0)t}$$

在得到上式时，我们用到近似：

$$a_n \sim O(H_{1n}), \quad H_{1n} \ll H_{10} (n \neq 0), \quad |a_1|^2 = 1 - \sum_{n \neq 1} |a_n|^2$$



考虑 ψ_0 衰变

$$i \frac{da_0(t)}{dt} = H_{01} e^{-i(E_1 - E_0)t} - i \frac{\Gamma}{2} a_0(t)$$

第二项为衰变项，表明当入射束流停止时 $a_0(t)$ 会指数衰减

$$i \frac{d}{dt} (a_0 e^{\Gamma t / 2}) = H_{01} e^{-i(E_1 - E_0 + i\Gamma/2)t}$$

在 $t \gg \frac{1}{\Gamma}$ 时，解的形式为

$$a_0(t) = \frac{H_{01} e^{-i(E_1 - E_0)t}}{(E_1 - E_0) + i\Gamma/2}$$

中间共振态产生随能量的几率分布

$$P(1 \rightarrow 0) = |a_0(t)|^2 = \frac{|H_{01}|^2}{(E_n - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

分宽度 Γ_f : 单位时间内 ψ_0 衰变到 ψ_f 的几率。

所以, 初态 i 通过 ψ_0 产生 ψ_f 的反应速率为

$$W(i \rightarrow f) = \Gamma_f |a_0(t)|^2 = \frac{|H_{01}|^2 \Gamma_f}{(E_n - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

根据反应截面的定义 $W(i \rightarrow f) = J_i \sigma_{fi}$, $J_i = n_i v_i = \frac{1}{V} v_i$

$$\sigma_{fi} = \frac{V}{v_i} W(i \rightarrow f) = \frac{V}{v_i} \frac{|H_{01}|^2 \Gamma_f}{(E_n - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

另外, 我们也可以得到 $\psi_0 \rightarrow \psi_i$ 的衰变宽度

$$\Gamma_i = 2\pi |H_{10}|^2 \rho_i(E_0) = \frac{V p_i^2}{\pi v_i} |H_{10}|^2 \quad \left(\rho_i = \frac{dN_i}{dE_i} = \frac{V p_i^2}{2\pi^2 v_i} \right)$$

从而有

$$|H_{01}|^2 = \frac{\pi v_i}{V} \frac{\Gamma_i}{p_i^2}$$

带入截面公式得到

$$\sigma_{fi} = \frac{\pi}{p_i^2} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

考虑初态粒子自旋平均，末态粒子自旋求和，有

$$\sigma_{fi} = \frac{\pi}{p_i^2} \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

$$= \frac{4\pi}{p_i^2} \frac{2J+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4} R_i R_f$$

其中， J 为共振态的自旋， s_a 和 s_b 为初态粒子 a, b 的自旋， $R_{i,f}$ 为共振态衰变到初、末态的分支比 ($R_i R_f$ 又称作联合分支比)：

$$R_{i,f} = \Gamma_{i,f}/\Gamma$$

6. 三体衰变, Dalitz图

粒子的三体衰变过程, 初末态粒子总数为4, 根据前面的讨论, 共有独立的2个Lorentz不变的运动学变量。类似两体散射过程,

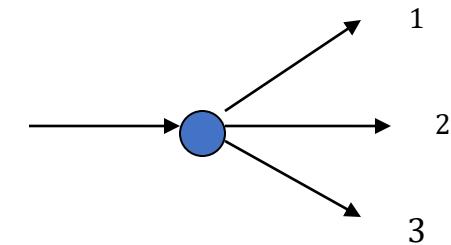
$$m_{12} = s_1 = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2$$

$$m_{23} = s_2 = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2$$

$$m_{13} = s_3 = (p_3 + p_1)^2 = (P - p_2)^2$$

可以证明,

$$m_{12} + m_{23} + m_{31} = s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$



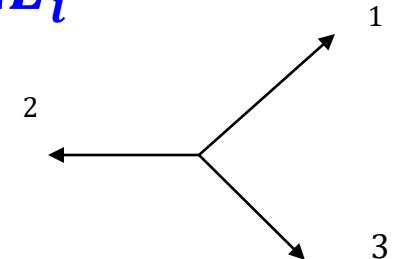
三体衰变的微分宽度为

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{1}{2M} \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} |T|^2$$

在衰变粒子质心系 $\vec{p} = (E, \vec{0})$, $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$

如果衰变粒子是标量粒子, 或者对其自旋状态求平均, 则

$$\Phi_3(M) = \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2 - p_3) = \frac{1}{32\pi^3} \int dE_1 dE_3$$



$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int dE_1 dE_3 |T|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 32M^3} \int ds_1 ds_2 |T|^2$$

另类Dalitz图的形式

Dalitz图的标准形式

标准的Dalitz图是在 $s_1 s_2$ 平面上描绘三体衰变的物理允许区域。当然也可以用其它运动学变量如 $E_1 E_2$ 等来表述，只要这些量和 $s_1 s_2$ 可以通过一个线性变换联系起来。

Dalitz图的物理意义很明显：

$$\frac{d\Gamma}{ds_1 ds_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |T|^2$$

也就是说，如果三体衰变的实验数据画在Dalitz图上，数据点的密度正比于衰变矩阵元的平方。反过来，也可以通过 Dalitz 图上的数据点的分布来研究衰变粒子的若干性质。

*证明：

$$\frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int dE_1 dE_3 |T|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 32M^3} \int ds_1 ds_2 |T|^2$$

考虑衰变粒子质心系 ($P = (M, \vec{0})$) ,

$$s_1 = (P - p_3)^2 = P^2 - 2P \cdot p_3 = M^2 - 2ME_3 \rightarrow ds_1 = -2M dE_3$$

$$s_2 = (P - p_1)^2 = P^2 - 2P \cdot p_1 = M^2 - 2ME_1 \rightarrow ds_2 = -2M dE_1$$

$$ds_1 ds_2 = 4M^2 dE_3 dE_1$$

得证。

• Dalitz 图

$s_1 s_2$ 的积分区域的确定比较繁琐，不在这儿具体介绍，有兴趣的同学可以参看 E. Byckling 和 K. Kajantie 的书《Particle Kinematics》(John Wiley & Sons, 1973)。结果见右边的公式。

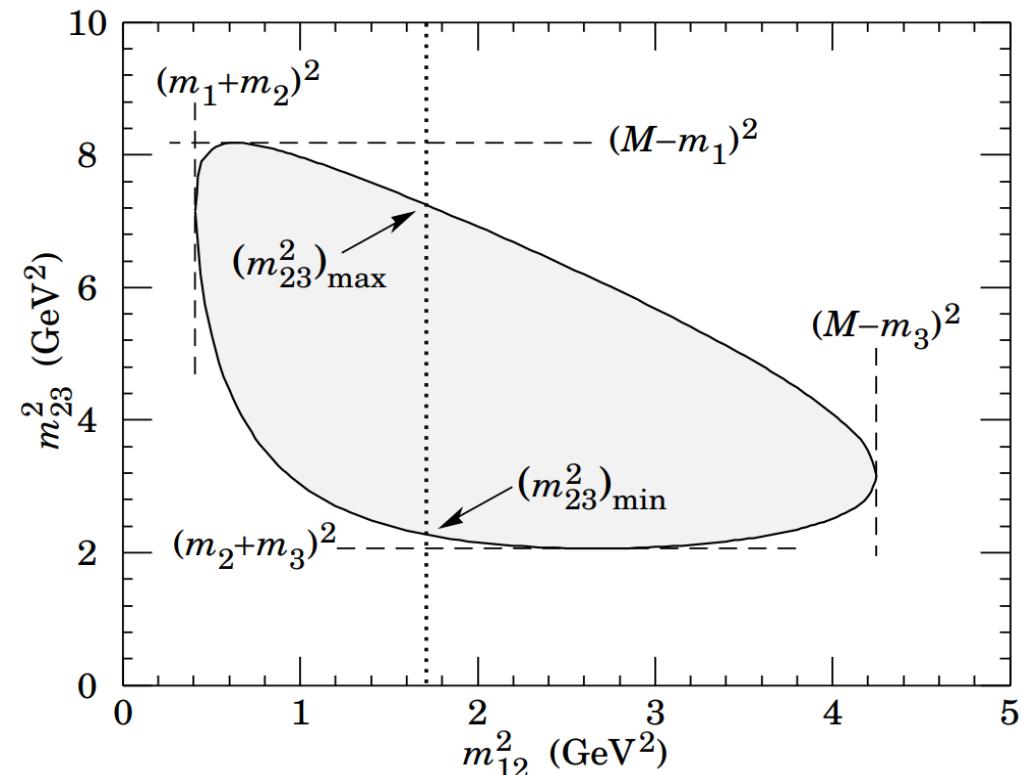
Dalitz图的边界由末态粒子的三动量共线给出。对于具体的末态粒子质量，边界线可以直接计算出来。同一粒子的不同三体末态的Dalitz图是不相同的，密度决定于衰变矩阵元平方，形状决定于末态粒子的质量。

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 32M^3} \int ds_1 ds_2 |T|^2$$

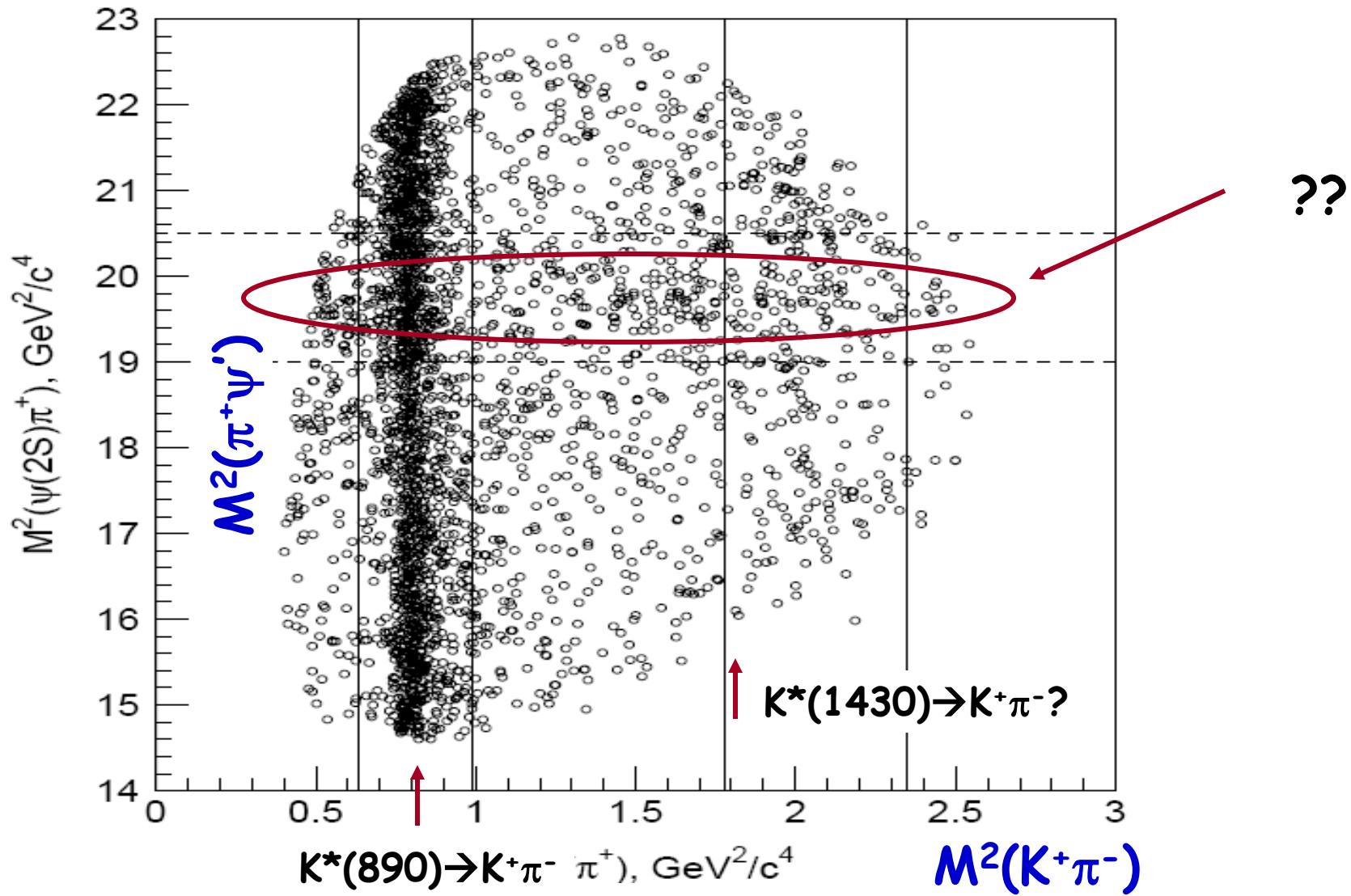
$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_1 = m_{12}^2 \leq (M - m_3)^2$$

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_2 = m_{23}^2 \leq (M - m_1)^2$$

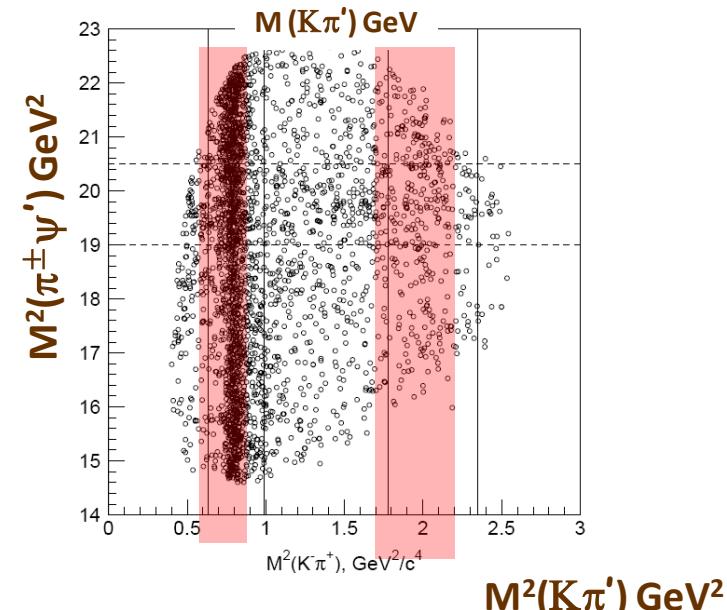
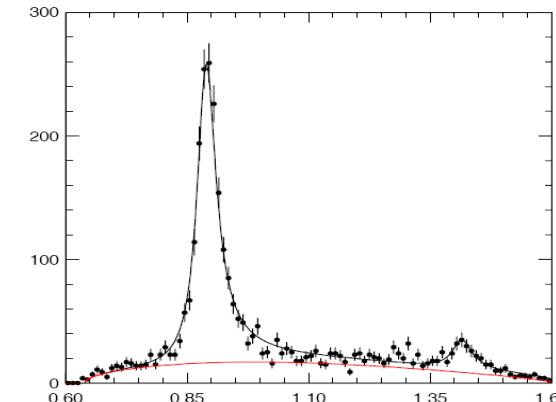
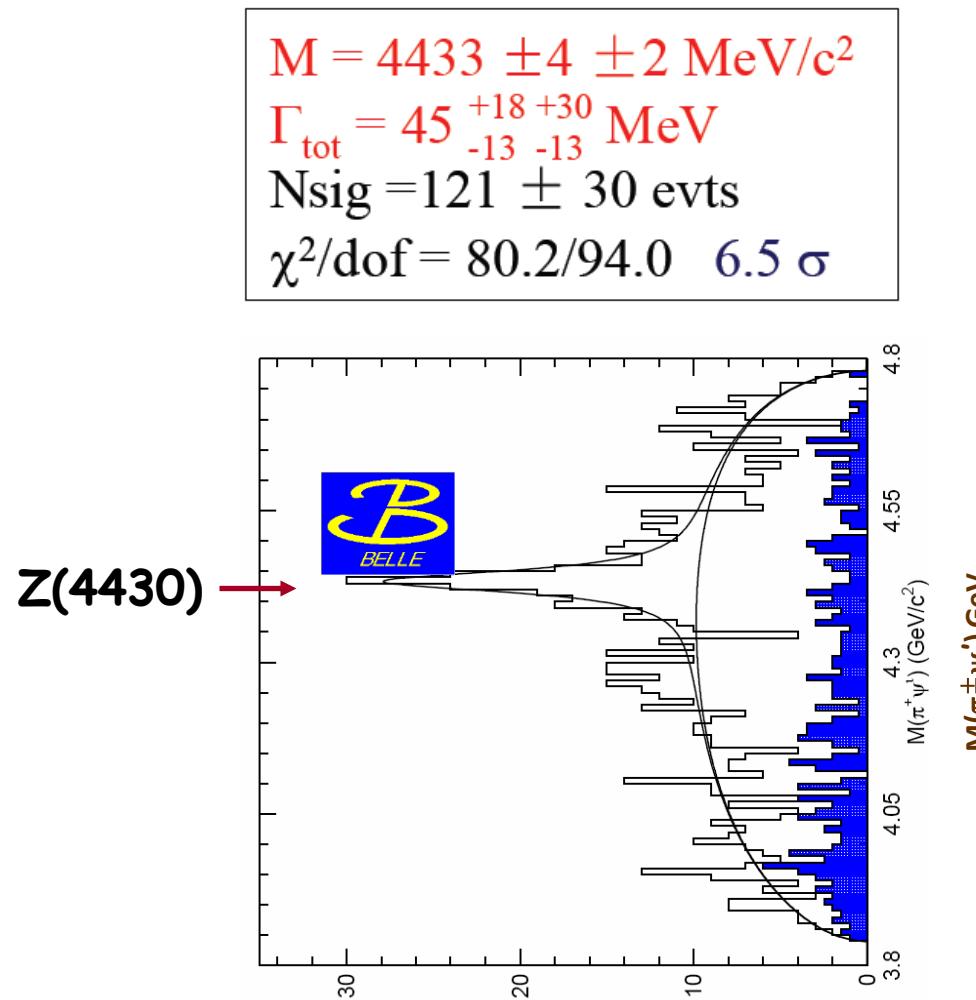
$$(m_3 + m_1)^2 \leq s_3 = m_{31}^2 \leq (M - m_2)^2$$



$B \rightarrow K^\pm \pi^\mp \psi'$ (in Belle)



The $Z(4430)^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}\psi'$ peak



$$B \rightarrow K^{\mp} \pi^{\pm} \psi'$$

- 另类Dalitz图

因为粒子的动能为总能量减去静止质量， $T_1 = E_1 - m_1, T_3 = E_3 - m_3$ ，我们有

$$\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int dE_1 dE_3 |T|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3 8M} \int dT_1 dT_3 |T|^2$$

另外，质心系中末态粒子的动能之和 Q 为常数，

$$Q = T_1 + T_2 + T_3 = E_1 + E_2 + E_3 - m_1 - m_2 - m_3 = M - m_1 - m_2 - m_3$$

从平面几何知等边三角形内任何一点到三边的距离之和为常数，等于等边三角形的高。因此，可以将三体衰变的数据（末态粒子质心系动能）画在高为Q的等边三角形内，这样的图是另类Dalitz图。

但是，并不是三角形内的每一点都代表物理上允许的运动学分布，典型的例子是三角形的顶点——不满足能动量守恒。

考虑衰变末态三个粒子质量相同的情形： $m_1 = m_2 = m_3 = m$

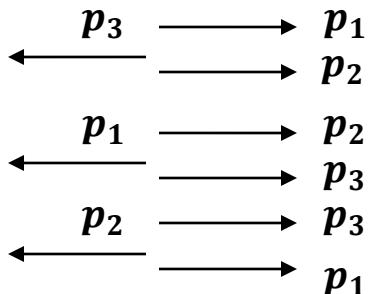
在质心系中，有 $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos \theta \longrightarrow 4p_1^2p_2^2 \geq (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)^2$

在非相对论情形下， $T_i = \frac{p_i^2}{2m} \longrightarrow 4T_1T_2 \geq (T_3 - T_1 - T_2)^2$

$4T_1T_2 = (T_3 - T_1 - T_2)^2$ 表示等边三角形的内接圆

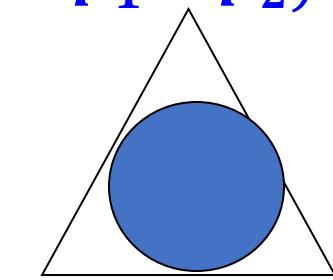
在极端相对论情形下： $T_i = E_i = p_i$

$$T_3 = \begin{cases} T_1 + T_2 \\ T_1 - T_2 \\ -T_1 + T_2 \end{cases}$$

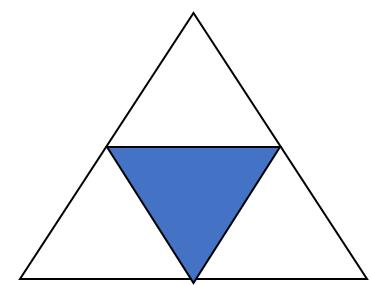


物理情形介于非相对论情形和极端相对论情形之间。

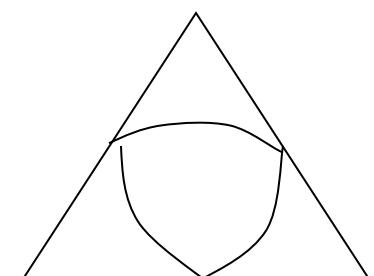
和Dalitz图一样，三角形内阴影区的事例点密度正比于衰变矩阵元的平方。通过事例点的分布可以研究衰变的动力学机制，也有可能确定初态粒子的自旋、宇称等量子数



$$4T_1T_2 \geq (T_3 - T_1 - T_2)^2$$



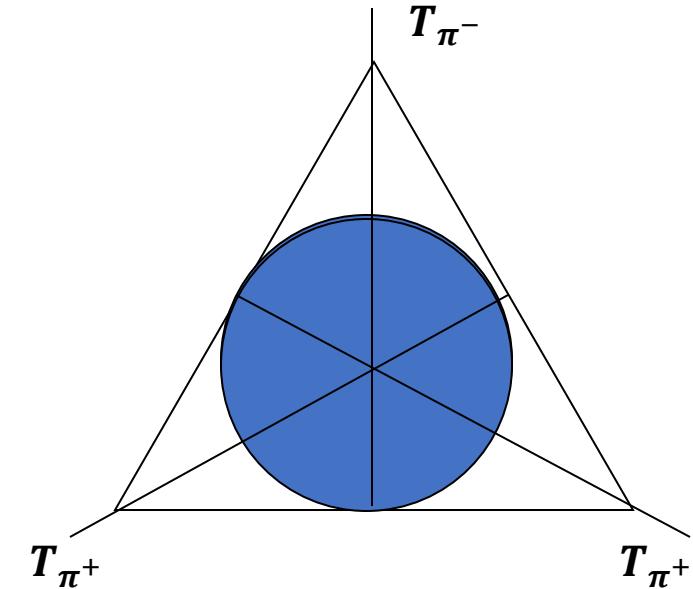
$$T_i = E_i = p_i$$



Dalitz图的应用示例——确定 K^+ 介子的自旋: $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$

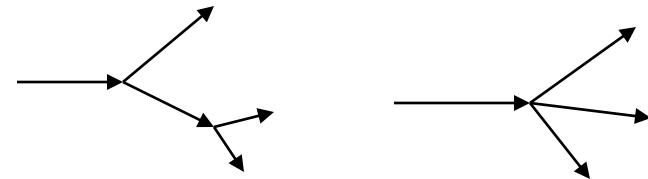
设两个 π^+ 介子之间轨道角动量为 L 。两个 π^+ 介子为全同玻色子，因此 $L = 0, 2, 4, \dots$ (偶数)。另外的 π^- 介子相对 $\pi^+\pi^+$ 对的轨道角动量记为 l ，则 l 的可能取值为 $l = 0, 1, 2, \dots$ 。

- 1) 若 $L \geq 2$ ，即 $\pi^+\pi^+$ 对的轨道角动量具有较大值，因此 $\pi^+\pi^+$ 对占去较多能量，于是 π^- 的动能就会减少。如果是这种情况，Dalitz图中圆的上部事例点的分布就会减少。
- 2) 若 $l \geq 1$ ，则 π^- 相对于 $\pi^+\pi^+$ 对具有较大的轨道角动量，则其动能也较大，于是Dalitz图中圆的下部事例点的分布就会减少。



比较实验上测得的事例点分布，没有发现事例点的分布有偏移现象，事例点的分布是均匀的。因此排除了上述两种可能性。 L 和 l 只能为 $L = 0$ 和 $l = 0$ 。因为已经知道 π 介子的自旋为 0，所以 K^+ 介子的自旋只能是 0。

综合示例——利用不变质量谱分析共振态



考虑初态粒子 A 衰变到 C, D, E 末态的过程 ($m_C \approx m_D \approx m_E \approx 0$)。为方便，假设参加反应的粒子都是 中性无自旋粒子。如果末态粒子 D, E 也可以通过一个中间过程产生，即 A 先衰变到 B, C ， B 然后衰变到 D, E ，则我们可以利用前面介绍的两体衰变宽度公式

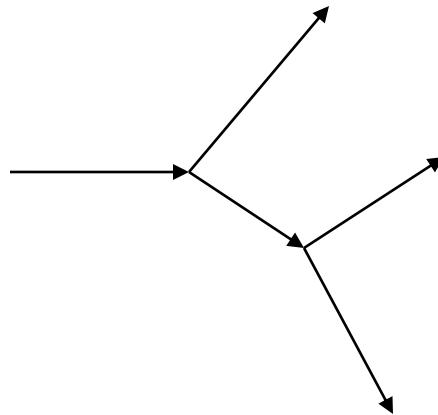
$$\Gamma_A = \int \frac{|\vec{p}_B| |T|^2 d\Omega}{32\pi^2 m_A^2} = \frac{1}{8\pi} \frac{|\vec{p}_B|}{m_A^2} \frac{|T|^2}{|T(A \rightarrow BC)|^2} = \frac{1}{8\pi} \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A^3} \frac{|T(A \rightarrow BC)|^2}{|T(A \rightarrow BC)|^2}$$

引入等效相互作用的拉氏量： $\mathcal{L}_{eff} = fABC + gBDE$

$$m_A = \sqrt{m_B^2 + k_B^2} + k_B \Rightarrow k_B = \frac{m_A^2 - m_B^2}{2m_A}$$

则上式中的矩阵元可以用等效耦合常数代替：

$$\Gamma_A = \frac{f^2}{16\pi} \frac{m_A^2 - m_B^2}{m_A^3}, \quad \Gamma_B = \frac{g^2}{16\pi} \frac{1}{m_B} \quad \Gamma_B = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{m_B} \frac{1}{|T(B \rightarrow DE)|^2}$$



如果考虑传播函数,

$$\frac{1}{p^2 - \alpha + i\beta} = \frac{1}{p^2 - m_B^2 + im_B\Gamma_B}$$



也可以得到上面的 A 的衰变宽度。考虑前面的等效拉氏量和左边的Feynman图，我们可以定性地写出这个过程的振幅

$$T(A \rightarrow BC \rightarrow CDE) \propto \frac{1}{s_1 - m_B^2 + im_B\Gamma_B}$$

这个图也可以看作 $A + \bar{C} \rightarrow D + E$ 的散射的Feynman图，截面为

$$\sigma(A + \bar{C} \rightarrow D + E) \propto \frac{1}{(s_1 - m_B^2)^2 + m_B^2\Gamma_B^2}$$

$$\approx \frac{1}{4m_B^2(\sqrt{s_1} - m_B)^2 + \Gamma_B^2/4}$$

窄共振近似:

$$I = \int_0^M ds_2 \int_0^{M-s_2} ds_1 \frac{1}{(s_1 - \alpha)^2 + \beta^2} \quad (M = m_A^2)$$
$$= \frac{M - \alpha}{\beta} \left\{ \left(\arctan \frac{M - \alpha}{\beta} + \arctan \frac{\alpha}{\beta} \right) + \frac{\beta}{M - \alpha} \ln \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(M - \alpha)^2 + \beta^2} \right\}$$

$$\beta \ll \alpha, \beta \ll M - \alpha \quad \rightarrow \quad \arctan \frac{M - \alpha}{\beta} + \arctan \frac{\alpha}{\beta} \approx \pi$$

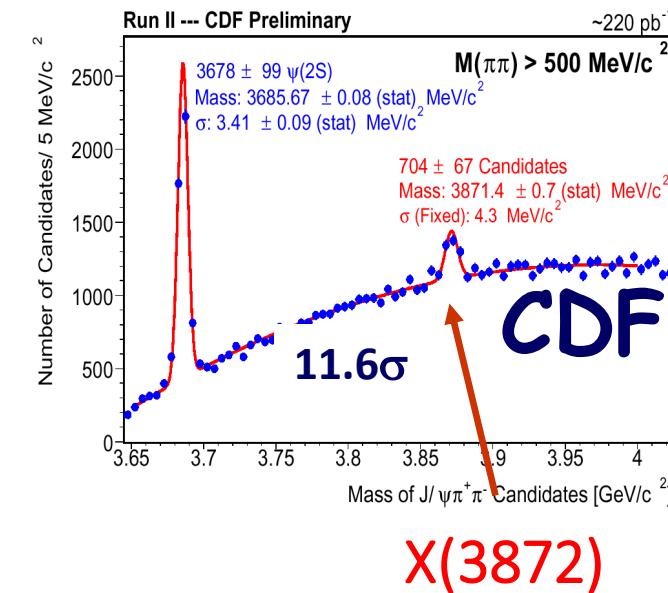
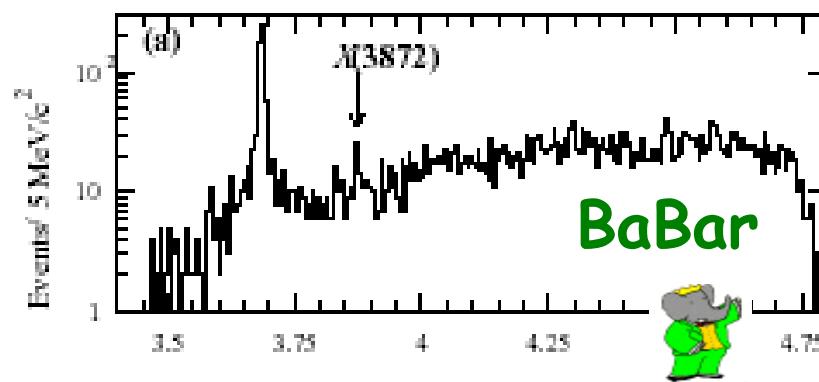
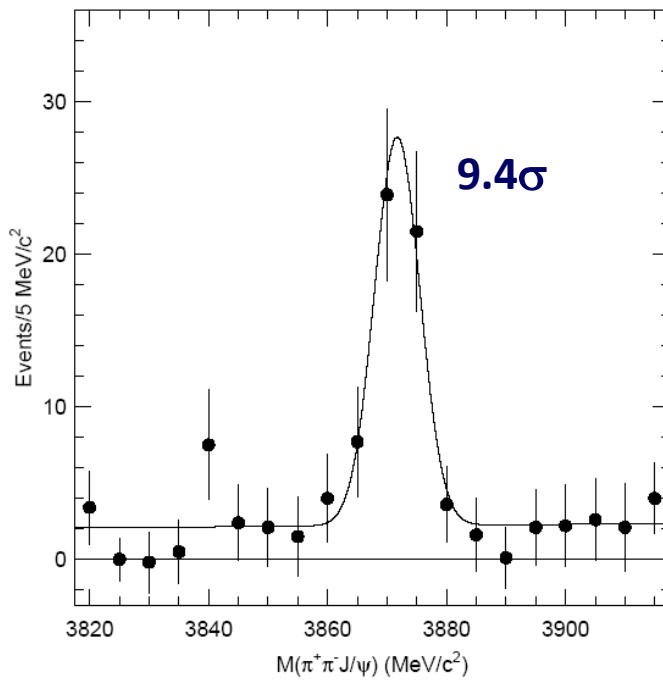
$$I \approx \pi \frac{M - \alpha}{\beta}$$

$$\Gamma_A = \frac{f^2}{16\pi} \frac{g^2}{16\pi} \frac{m_A^2 - \alpha}{m_A^3 \beta}$$

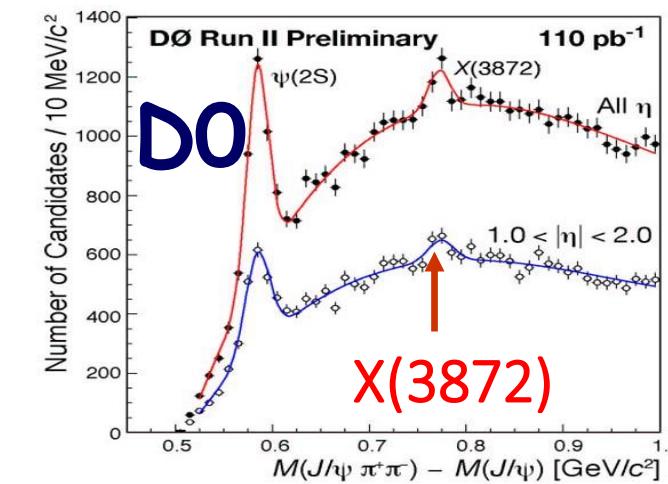
$$\alpha = m_B^2$$
$$\beta = m_B \Gamma_B$$

$$\Gamma_A = \frac{f^2}{16\pi} \frac{m_A^2 - m_B^2}{m_A^3}, \Gamma_B = \frac{g^2}{16\pi} \frac{1}{m_B}$$

$X(3872)$ is well established seen in 4 experiments



$X(3872)$

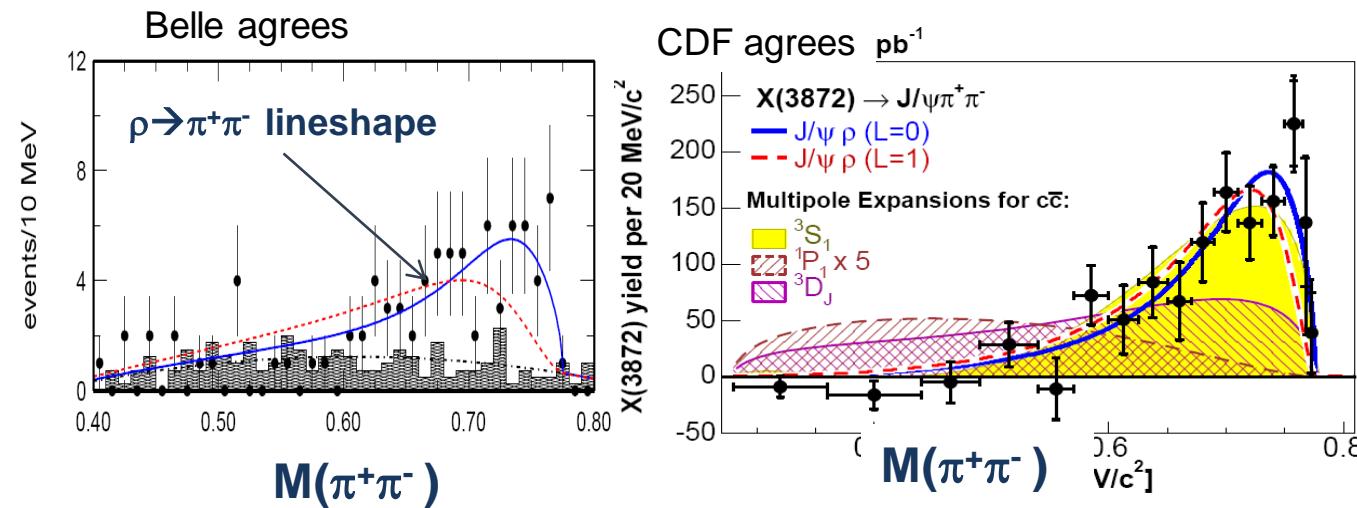
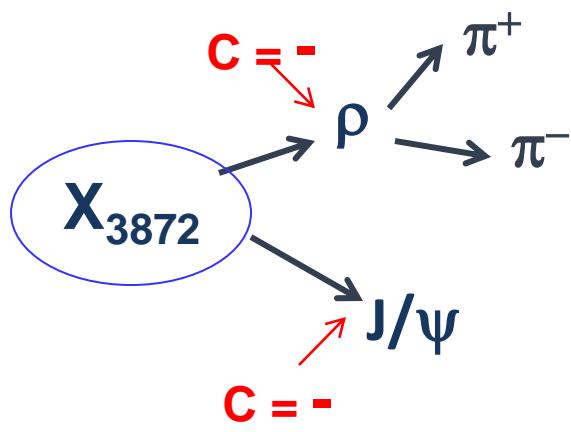


$$X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi \quad \longrightarrow \quad C(X) \text{ must be } (-1) \times (-1) = +1$$

$C = -$ $C = -$

if $C(X) = +$:

$\pi^+ \pi^-$ system in $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ must come from $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$.



从实验中 **A** 到 **CDE** 所有事例中，考虑 **DE** 末态粒子的不变质量谱，即事例数随 **DE** 不变质量 $s_1 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$ 的分布，我们就能发现，在连续的相空间背景上会叠加一个峰结构，这个峰结构就来源于共振态 **B** 的存在。在 **CDE** 三体末态中，**DE** 的相空间本底来源于 **A** 到 **CDE** 的直接衰变过程，它是可以计算的

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \int (2\pi)^4 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 \vec{p}_i^3}{(2\pi)^3 2E_i} \\
&= \int d^4 p_{12} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{12} - \mathbf{p}_3) \delta(\mathbf{p}_{12} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 \vec{p}_i^3}{(2\pi)^3 2E_i} \\
&= \int ds_1 \delta(p_{12}^2 - s_1) \int d^4 p_{12} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{12} - \mathbf{p}_3) \delta(\mathbf{p}_{12} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 \vec{p}_i^3}{(2\pi)^3 2E_i} \\
&\propto \int ds_1 \Phi_2(M; \sqrt{s_1}, \mathbf{m}_3) \Phi_2(\sqrt{s_1}; \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)
\end{aligned}$$

$$P(\sqrt{s_1}) \propto 2\sqrt{s_1} \frac{\Phi_2(M; \sqrt{s_1}, \mathbf{m}_3) \Phi_2(\sqrt{s_1}; \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2)}{\Phi_3}$$