第四节　自旋味道SU(6)对称性和颜色自由度的引入

一、自旋味道SU(6)对称性

为了在夸克层次上对强子结构有更精确的描述，我们必须引入时空自由度。作为非相对论的处理，我们可以认为强子中的夸克处于某种共同的势阱中，每个单个的夸克占据这个势阱中的一个状态。它们的自旋和轨道角动量耦合，系统的总角动量体现为强子的自旋。一个自然的假设是最轻的强子的轨道角动量为零，质量更高的粒子则具有非零的轨道角动量。在以下的讨论中，我们只考虑轨道角动量为零的粒子态，也就是说，我们只考虑与自旋和味道有关的粒子态。

Wigner(1937)年在研究核力时发现，核子的自旋和同位旋构成的四个状态满足SU(4)对称性，并且构成该群的基础表示。1964年，Gursey，Radicati和Sakita将这种时空对称性和内部对称性的联系推广到自旋SU(2)和味道SU(3)对称性的联系上。

如果构成强子的夸克之间的相互作用不强烈依赖自旋和味道，则强子可以看作在SU(6) 变换下不变。也就是说,强子态可以按照 SU(6) 的不可约表示分类。由于$SU(3)\times SU(2)$是SU(6)的子群,因此SU(6)不可约表示的味道和自旋成分可以从对$SU(3)\times SU(2)$表示的约化看到。

三个SU(2)的生成元的基础表示矩阵和八个SU(3)味对称性的生成元矩阵的直乘可以生成如下35个无迹厄米矩阵:

$$\lambda_0 \otimes \sigma_m, \lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{6}} I_3, m = 1,2,3;$$

$$\lambda_i \otimes I_2, i = 1,2,\cdots,8; \qquad \lambda_i \otimes \sigma_m, i = 1,2,\cdots,8; m = 1,2,3$$

其中，$I_{2,3}$是2×2 和3×3的单位矩阵，σ_m是Pauli矩阵，λ_i是Gell-Mann矩阵。

它们构成（加相应的常数因子）的生成元的基础表示矩阵,生成SU(6)对称群在基础表示(6)下的变换矩阵。

不同自旋的u, d, s夸克(6个分量)张成SU(6)的基础表示空间，把它们记为 q^A ，这是一个六分量的列向量：

$$q^A = q^{a,\alpha} \equiv \begin{pmatrix} q^{1\uparrow} \\ q^{1\downarrow} \\ q^{2\uparrow} \\ q^{2\downarrow} \\ q^{3\uparrow} \\ q^{3\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{\uparrow} \\ u^{\downarrow} \\ d^{\uparrow} \\ d^{\downarrow} \\ s^{\uparrow} \\ s^{\downarrow} \end{pmatrix};$$

$A = a, \alpha;$
$(a = 1, 2, 3; \alpha = 1, 2)$

它的共轭则构成基础表示的共轭表示 $\underline{6^*}$。

1. 介子

介子是由一对正反（价）夸克构成的，表示为 $q^A q_B$

$$q^A q_B = \frac{1}{6}\delta^A{}_B q^C q_C + \left(q^A q_B - \frac{1}{6}\delta^A{}_B q^C q_C\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} S\delta^A{}_B + M^A{}_B$$

$$\underline{6} \otimes \underline{6}^* = \underline{1} \oplus \underline{35}$$

味单态赝标量介子

单态S显然是$SU(2)$和$SU(3)$的标量，而$\underline{35}$在$SU(3)$和$SU(2)$变换下为

$$M^A{}_B \equiv M^{a\alpha}{}_{b\beta} = \frac{1}{3}\delta^a{}_b M^{c\alpha}{}_{c\beta} + \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta M^{a\rho}{}_{b\rho} + [M^{a\alpha}{}_{b\beta} - \frac{1}{3}\delta^a{}_b M^{c\alpha}{}_{c\beta} - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta M^{a\rho}{}_{b\rho}]$$

$$\underline{35} = (\underline{1}, \underline{3}) \oplus (\underline{8}, \underline{1}) \oplus (\underline{8}, \underline{3})$$

味单态矢量介子　　赝标量介子味八重态　　矢量介子味八重态

也就是说，在$L=0$的假设下，最轻的正反夸克对系统的宇称都为负，其中包括一个自旋为零的味单态介子，一个自旋为1的矢量介子，一个自旋为零的味八重态介子（赝标介子），和一个自旋为1的味八重态矢量介子。这样，一个$SU(6)$单态和35重态包括了所有已知的质量最低的介子态，它们给出了这些介子正确的味道状态、自旋和宇称。

2. 重子

重子是三夸克系统，其张量表示为 $q^A q^B q^C$ ，张量约化为

$$\underline{6}\otimes\underline{6}\otimes\underline{6}=\underline{20}\oplus\underline{70}\oplus\underline{70}\oplus\underline{56}$$

20维表示与物理现象不符，可以认为没有物理对应。56维表示是全对称表示，即A,B,C 全对称。考虑向味SU(3)和自旋SU(2)的不可约表示的约化，全对称的A,B,C 可以由味道全对称和自旋全对称、味道混合对称和自旋混合对称这两种情形实现（由于三个自旋不能构成全反对称的状态，故不可能有味道全反对称和自旋全反对称的约化)。

全对称的 $\underline{\mathbf{56}}$ 表示的的直和分解：$\underline{\mathbf{56}} \to (\underline{\mathbf{8}}, \underline{\mathbf{2}}) \oplus (\underline{\mathbf{10}}, \underline{\mathbf{4}})$

即 $SU(6)$ 的全对称56维表示包括一个自旋为1/2的重子八重态和一个自旋为3/2的重子十重态。 具体用张量形式写出来就是：

$$\Psi^{ABC} = D^{abc,\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\left[\varepsilon^{abd}\varepsilon^{\alpha\beta}N^{c,\gamma}{}_d + \varepsilon^{bcd}\varepsilon^{\beta\gamma}N^{a,\alpha}{}_d + \varepsilon^{cad}\varepsilon^{\gamma\alpha}N^{b,\beta}{}_d\right]$$

其中，

$$D^{abc,\alpha\beta\gamma} = D^{abc}\chi^{\alpha\beta\gamma};$$

$$N^{a,\alpha}{}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(N^a{}_b\chi_S{}^\alpha + B^a{}_b\chi_A{}^\alpha\right);$$

$$\begin{cases} \chi_A^\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(q^1q^2 - q^2q^1\right)q^\alpha; \\ \chi_S^\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{\beta\gamma}S^{\alpha\beta}q^\gamma; \\ \chi^{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{1}{6}\left(S^{\alpha\beta}q^\gamma + S^{\beta\gamma}q^\alpha + S^{\gamma\alpha}q^\beta\right) \end{cases}$$

注意，两种味道八维表示都进入了自旋为1/2的重子八重态中。

这说明：

a) 已知的自旋1/2的重子八重态和自旋为3/2的重子十重态都正好包含在SU(6)的56维全对称表示中；

b) 这里的全对称是自旋和味道波函数总体的全对称；

c) 没有味道全反对称同时自旋全反对称的表示。

3. 基态重子SU(6)波函数的应用——核子磁矩

自旋向上的质子的$SU(6)$波函数为 $|p\uparrow\rangle = N_3^{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B^1{}_3\chi_A^1 + N^1{}_3\chi_S^1\right)$

其中，

$$\chi_A^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow \qquad \chi_S^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\uparrow\uparrow\downarrow - (\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow)\uparrow)$$

$$B^1{}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)u \qquad N^1{}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu)$$

假设$L=0$，磁矩算符只包含自旋部分（μ_0为夸克的玻尔磁子），

$$\mu_z = \mu_0 \sum_{i=1}^{3} \hat{e}_i {\sigma_z}^{(i)}$$

（全对称波函数）

$$\mu_p = \langle p\uparrow|\mu_z|p\uparrow\rangle = 3\mu_0\langle p\uparrow|\hat{e}_3\sigma_3^{(3)}|p\uparrow\rangle$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left\langle {B^1}_3\chi_A^1\middle|\hat{e}_3\sigma_3^{(3)}\middle|{B^1}_3\chi_A^1\right\rangle + \left\langle {N^1}_3\chi_S^1\middle|\hat{e}_3\sigma_3^{(3)}\middle|{N^1}_3\chi_S^1\right\rangle\right]$$

利用矩阵元

$$\left\langle\chi_A^1\middle|{\sigma_3}^{(3)}\middle|\chi_A^1\right\rangle = 1; \qquad \left\langle {B^1}_3\middle|e_3\middle|{B^1}_3\right\rangle = e_u;$$

$$\left\langle\chi_S^1\middle|{\sigma_3}^{(3)}\middle|\chi_S^1\right\rangle = -\frac{1}{3}; \qquad \left\langle {N^1}_3\middle|e_3\middle|{N^1}_3\right\rangle = \frac{1}{3}(e_u+2e_d).$$

得到

$$\mu_p = \frac{3}{2}\mu_0\left(e_u - \frac{1}{9}(e_u+2e_d)\right) = \frac{1}{3}\mu_0\,(4e_u - e_d)$$

交换u, d夸克可以得到（同位旋转动）： $\mu_n = \frac{1}{3}\mu_0\,(4e_d - e_u)$

代入u夸克的电荷2/3， d夸克的电荷-1/3，$\mu_p = u_0$，$\mu_n = -\frac{2}{3}\mu_0$

夸克模型预言： $\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2}$ 实验测量： $\left.\frac{\mu_p}{\mu_n}\right|_{\text{exp.}} = \frac{2.79}{-1.91} \approx -1.46$

组分夸克质量：如果将组分夸克看作一个Dirac费米子，

$$\mu_0 \equiv \frac{e}{2m_{u,d}} = \mu_p = 2.79\frac{e}{2M_P} \longrightarrow \boxed{m_{u,d} = \frac{M_p}{2.79} = 336\ \text{MeV}}$$

这就是唯象上常用的组分u, d夸克的质量(等效质量)。

核子磁矩的夸克模型描述与实验符合得相当好，这也支持核子中夸克的轨道角动量$L = 0$ 的假设，在对称夸克模型中，它们都处于轨道基态，轨道波函数是全对称的。

Table 15.8: Quark model predictions and measured magnetic dipole moments of the ground state baryons in units of μ_N; $\kappa \equiv \frac{e}{2m} = 2.793$ μ_N and $\kappa_s \equiv \frac{e}{2m_s} = -3\mu_\Lambda = 1.84\ \mu_N$. † $\Sigma^0 \to \Lambda$ transition magnetic moment.

Baryon	Quark model			Experimental value		
p	κ		input	2.793		
n	$-\frac{2}{3}\kappa$	=	–1.86	–1.913		
Λ	$-\frac{1}{3}\kappa_s$		input	–0.6138	±	0.0047
Σ^+	$\frac{8}{9}\kappa + \frac{1}{9}\kappa_s$	=	2.68	2.458	±	0.010
Σ^0	$\frac{2}{9}\kappa + \frac{1}{9}\kappa_s$	=	0.82			
$\Sigma^{0\dagger}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\kappa$	=	–1.61	–1.61	±	0.08
Σ^-	$-\frac{4}{9}\kappa + \frac{1}{9}\kappa_s$	=	–1.04	–1.160	±	0.025
Ξ^0	$-\frac{2}{9}\kappa - \frac{4}{9}\kappa_s$	=	–1.44	–1.250	±	0.014
Ξ^-	$\frac{1}{9}\kappa - \frac{4}{9}\kappa_s$	=	–0.51	–0.6507	±	0.0025
Ω^-	$-\kappa_s$	=	–1.84	–2.024	±	0.056
Δ^{++}	2κ	=	5.58	4.52	±	0.67
Δ^+	κ	=	2.79	2.3	-	4.5

二、颜色自由度的引入

1. 问题的提出

重子是费米子，服从Fermi-Dirac 统计关系，波函数应该是全反对称的。然而，如果我们假设基态重子中的夸克的轨道角动量为零，则其轨道波函数是全对称的。在前面的讨论中我们也看到，基态重子的自旋味道波函数也是全对称的，如果没有其它新的自由度，那么重子的总波函数也是全对称的，这显然和自旋—统计关系相矛盾。

关于上面的讨论，最典型的例子是重子十重态

$$\Delta^{++}\sim uuu,\Delta^{-}\sim ddd,\Omega^{-}\sim sss,$$

夸克间的轨道角动量都为零（基态），由于它们的自旋都为3/2，这说明三个夸克的的自旋都取同样的方向（同样的自旋状态），三个夸克的同位旋状态也相同，空间波函数也相同（都处于$1s$态），这说明三个夸克的自旋、同位旋和空间状态都相同。而夸克是费米子，如果没有其他内部自由度，则根据Pauli 不相容原理——全同费米子不能处于相同的状态，这显然是矛盾的。

另外，夸克带分数电荷，但是所有现在实验上观测到的粒子都带有整数电荷，根据电荷守恒定律，必然存在一个稳定的带分数电荷的夸克。但实验上并没有发现这样的稳定夸克。

还有，实验上已经确立的强子态都可以用正反夸克对(介子)和三夸克或三反夸克（重子或反重子）体系来描述，那么一个自然的问题是，为什么没有两夸克或多夸克系统存在？

这些问题都是理论上需要回答，而简单的夸克模型很难解释这些现象。

对于夸克模型违反自旋-统计关系的疑难，可以有两个解决办法：

a) 抛弃夸克的概念?——但实在难以割舍，它们在描述强子静态性质时时如此的成功和漂亮；

b) 对自旋-统计关系的修正? ——经过大量的实验验证是正确的，不容挑战。那么，要解决重子波函数的问题，必然要引入新的自由度。

2. SU(3)颜色对称性

这种新的自由度称作“颜色”自由度（Greenberg 1964, Han and Nambu 1965, Nambu 1966, Gell-Mann 1972, Fritzsch 1973）——每一味夸克还有颜色自由度，颜色数不少于3。这样，组成重子的三个夸克如果分别带有不同的颜色，则它们将不受Pauli不相容原理的限制。 如果颜色数正好是$N_c = 3$，那么将有更丰富的物理后果。比如，u，d，s夸克都分别带三种颜色，

如果我们假设自然界满足颜色对称性，即在颜色变换下不变。进一步假设，夸克的三种颜色态构成颜色 SU(3) 基础表示，反夸克的三种颜色态构成颜色SU(3)的基础表示的共轭表示。再进一步，颜色 SU(3) 变换质改变夸克的颜色，不改变夸克的味道，即

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u^1 & u^2 & s^1 \\ d^1 & d^2 & s^2 \\ s^1 & s^2 & s^3 \end{pmatrix}$$

味道变换

颜色变换

$$q^i \to q^{i'} = U^{i'}{}_i q^i, \quad (q = u, d, s), U \in \mathrm{SU_c}(3)$$

$$\bar{q}_i \to \bar{q}_{i'} = \bar{q}_i U^i{}_{i'}, \quad (\bar{q} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}), U \in \mathrm{SU_c}(3)$$

颜色SU(3)对称性严格对称性，那么味道相同、颜色不同的夸克应该具有相同的质量。

颜色SU(3)对称性和味道SU(3)对称性、自旋SU(2) 、空间转动O(3)正交。

在考虑三色自由度以后，我们再来看重子的波函数

$$\Psi_{baryon} = \Phi(\mathrm{space})\Psi^{ABC}(\mathrm{flavor-spin})\chi(\mathrm{color})$$

正如我们前面的假设，基态重子内部夸克的轨道角动量为0，因此空间波函数全对称。自旋——味道波函数 Ψ^{ABC}是全对称的，如果$\chi(color)$ 是全反对称的，则重子的自旋-统计关系自然恢复。

三个颜色基础表示组成的全反对称表示是单态，

$$\chi(color) = \frac{1}{\sqrt{6}}\varepsilon_{ijk}q_1^i q_2^j q_3^k$$

其中q的下指标代表著称重子的三个夸克的味道，上指标是相应夸克的颜色。

对于重子，自旋统计关系要求颜色波函数为全反对称，即重子是颜色单态的，但对于介子——正反夸克组成的系统，则又出现问题：夸克的三种颜色状态属于颜色的基础表示，反夸克属于颜色的基础表示的共轭，那么一对正反夸克构成的系统的颜色状态应该既有单态，也有八重态，

$$\underline{3}_c \otimes \underline{3^*}_c = \underline{1}_c \oplus \underline{8}_c$$

也就是说，对于相同的自旋宇称量子数，应该存在九个味道九重态介子，它们的味道波函数和质量关系完全相同（颜色对称性是严格对称性）。但实验上只发现了一个这样的九重态。

这促使人们又进一步假设：只有颜色单态的强子才是现实存在的粒子。

在这个假设下，前面的几个疑难则自然有了答案：

1）不存在由两个、四个夸克构成的强子态，因为它们的颜色状态不可能为单态：

$$\underline{\mathbf{3}}_c \otimes \underline{\mathbf{3}}_c = \underline{\mathbf{3}^*}_c \oplus \underline{\mathbf{6}}_c$$

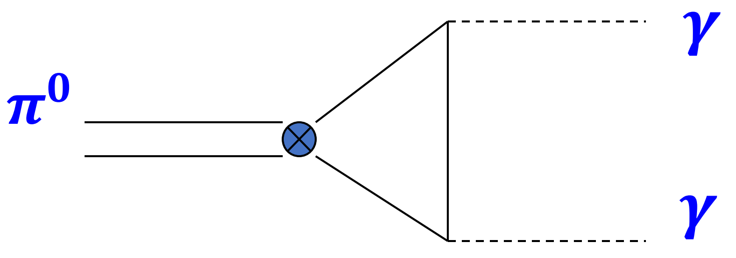
$$\underline{\mathbf{3}}_c \otimes \underline{\mathbf{3}}_c \otimes \underline{\mathbf{3}}_c \otimes \underline{\mathbf{3}}_c = \underline{\mathbf{3}}_c \oplus \underline{\mathbf{6}^*}_c \oplus \cdots$$

2) 分数电荷的强子态不会出现，单个的自由夸克不存在，夸克只能处于强子内部，即夸克禁闭。

三、颜色数为三的实验证据和理论需要

1. 中性pion介子的双光子衰变($\pi \to \gamma\gamma$)

这个过程的最低阶贡献来自著名的三角反常的贡献（如图）。理论给出这个过程的衰变宽度为，



$$\Gamma_{\pi^0\to\gamma\gamma} = \frac{m_\pi^3}{64\pi}\left(\frac{\alpha N_C}{3\pi f_\pi}\right)^2$$

其中，$f_\pi = 93\ \mathrm{MeV}$是pion介子的衰变常数(decay constant),α是精细结构常数，N_C 是颜色数。实验上测到的宽度为，

$$\Gamma_{\mathrm{exp.}} = 7.71(12)\ \mathrm{eV}$$

将其它参数带入得到，

$$\boxed{N_C = 3.01 \pm 0.03}$$

颜色数进入衰变宽度是考虑到每一味夸克有 N_C 种颜色状态而出现的，该宽度的实验值与三种颜色自洽。

2. 规范理论可重整性的要求

在量子场论中，物理体系的对称性表现为格林函数满足的一系列关系，统称为**Ward恒等式**。这些恒等式是场论拉氏量中对称性性质的直接反映，对一个场论的可重正性的证明十分关键。但是，当理论存在轴矢流耦合作用时，**轴矢Ward恒等式**不再保持，出现反常项。

对于$\mathrm{SU}(2)\times \mathrm{U}(1)$电弱统一理论，反常项中的非零贡献只有

$$\mathrm{Tr}\left(\{\tau^a,\tau^b\}Q\right)=\delta^{ab}\mathrm{Tr}Q$$

这里Q是电荷算符，求迹针对费米子种类。**反常消除的条件为所有费米子的电荷之和为0**，即$\mathrm{Tr}Q=0$ 。我们已知的费米子分为三代，各包含两味夸克和一代轻子，以第一代为例，

$$\mathrm{Tr}Q=\mathrm{Tr}Q_L+\mathrm{Tr}Q_q,\qquad \mathrm{Tr}Q_L=Q_e=-1,$$
$$\mathrm{Tr}Q_q=N_C(Q_u+Q_d)=N_C/3$$

反常消除的条件要求颜色数为3 。

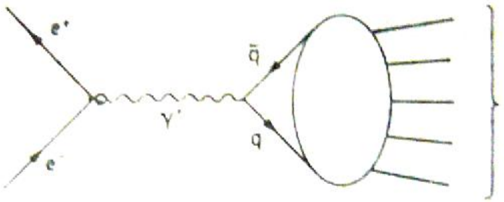
3. 正负电子湮灭实验

正负电子湮灭实验也强烈地支持颜色数为3。

在高能正负电子对撞实验中，正负电子湮灭成一个虚光子，然后产生轻子对或强子末态的过程的总截面依赖于对产生的粒子的电荷平方。这个截面直接和 $\mu^+\mu^-$ 对产生的界面联系起来（高能情形下，质心系能量平方远大于电子质量和对产生粒子质量时）：

$$\boxed{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}$$

如果认为强子是由点状的夸克组成，正负电子湮灭产生强子的总截面可以理解为由虚光子产生正反轻子对和正反夸克对，然后通过其它机制（如夸克碎裂机制等）转化为强子末态，则，



强子

$$\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons}) = \sum_L (ee \to L\bar{L}) + \sum_q (ee \to q\bar{q})$$

$$\approx \sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)\sum_i {Q_i}^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sum_i Q_i^2$$

所以，在所有的单举过程（inclusive processes ）中，除去共振态和末态相互作用的效应，总反应截面应该正比于相空间允许产生的夸克和轻子的电荷平方和（电子和 muon不在求和中，它们不会衰变到强子），引入一个量——R值，

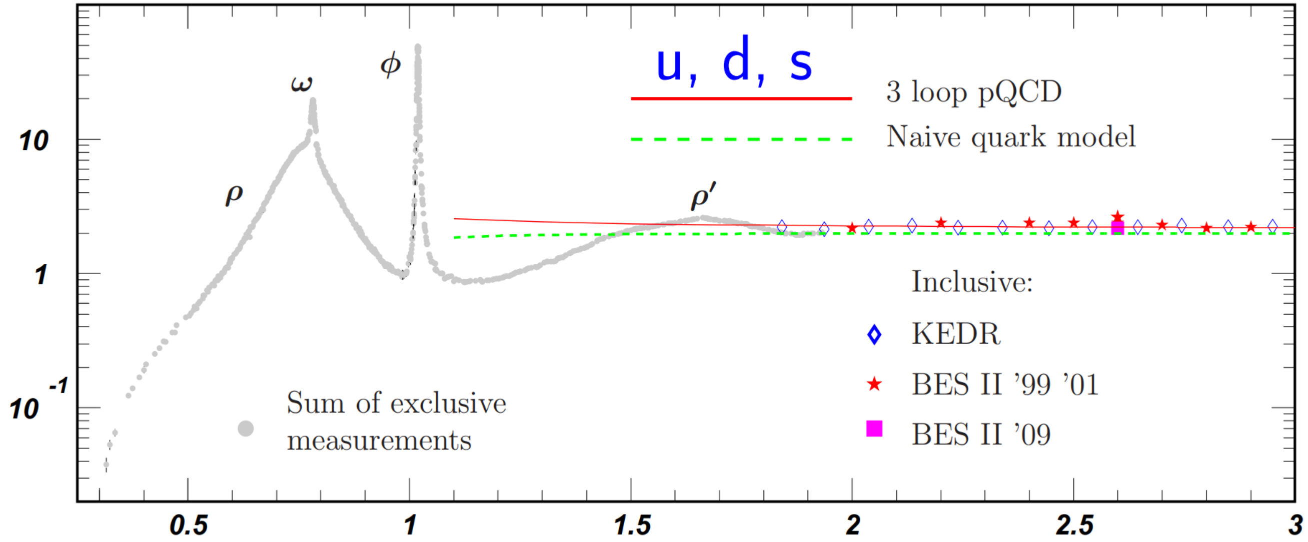
$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to hadrons)}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = \sum_i Q_i{}^2$$

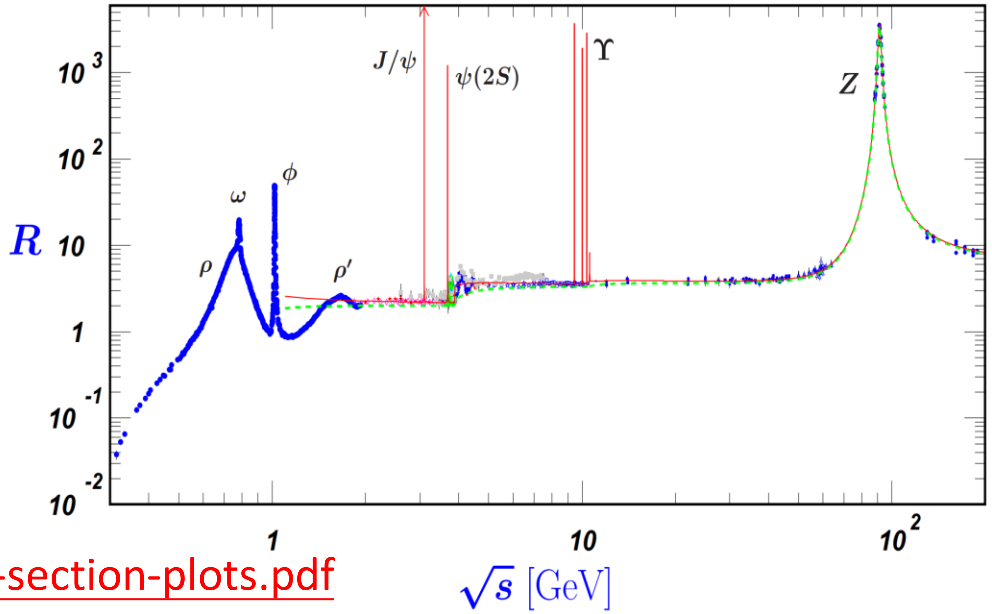
R值的物理意义：

a） 在每一个新粒子对产生阈，R值会增加（跳跃）新粒子的电荷平方；

b） 在两个粒子对产生阈之间，R值随不变能量的增加为常数；

c） R值直接测量的是在该能量区域所出现的基本费米子场的电荷平方和。



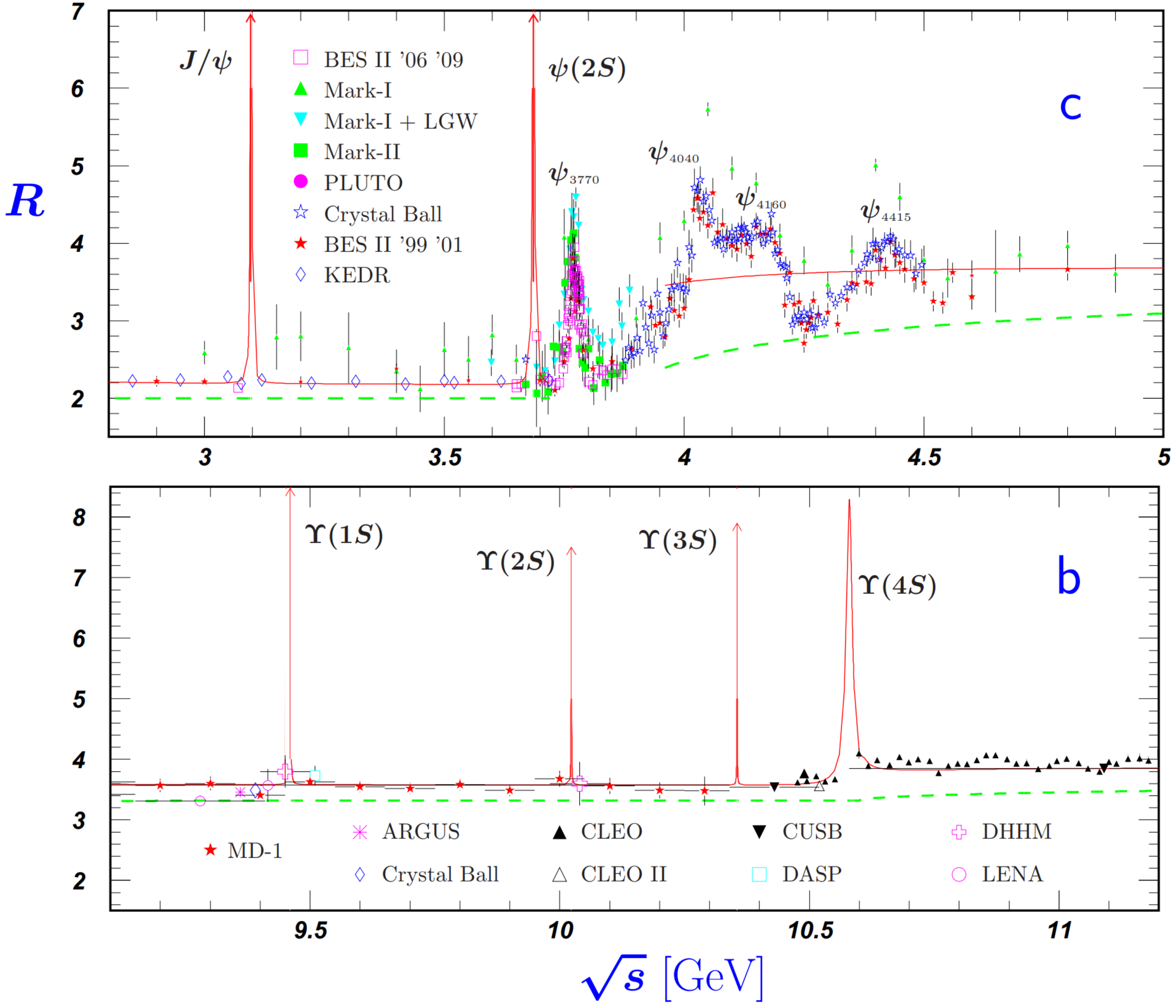


https://rpp2022-rev-cross-section-plots.pdf

质心系总能量低于3GeV时，只有u, d, s夸克有贡献，因此理论上期望

$$R \approx Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

实验上测到的R值确实在该能量区为常数，这符合点粒子特征，但其值在误差范围内与2相符，这正是每一味夸克有三种颜色的体现。如果以上的逻辑是正确的，那么如果在某个不变能量出现R的突变，则预示着一种新的夸克或者轻子的出现（如tau 轻子、Charm夸克、Bottom夸克）



R
c
J/ψ
$\psi(2S)$
ψ_{3770}
ψ_{4040}
ψ_{4160}
ψ_{4415}
BES II '06 '09
Mark-I
Mark-I + LGW
Mark-II
PLUTO
Crystal Ball
BES II '99 '01
KEDR
b
$\Upsilon(1S)$
$\Upsilon(2S)$
$\Upsilon(3S)$
$\Upsilon(4S)$
MD-1
ARGUS
Crystal Ball
CLEO
CLEO II
CUSB
DASP
DHHM
LENA
$\sqrt{s}$ [GeV]