第四章 强子结构和强相互作用

第一节 强子对称性

一、更高对称性的探索

- 我们先来看一看从同位旋对称性可以得到的经验：

a) 每个不可约表示用一个I描写；不可约表示内不同分量用I_3区分；
b) 粒子按不可约表示来分类，每个粒子对应一个分量；
c) 同一个不可约表示中各粒子的自旋宇称J^P相同；
d) 同一个不可约表示中各粒子质量相同（近似）；宽度相同（更弱近似）；
e) 同一个不可约表示中，一个粒子存在，则其它粒子也存在。

- 另外，强相互作用下，奇异数(S)和重子数(b)守恒，定义超荷 $Y=\frac{1}{2}(S+b)$ 则每一个粒子也具有确定的超荷Y。

- 同位旋对称性是内部空间的$SU(2)$对称性，超荷也是一个内部$U(1)$对称性的生成元。强子是同位旋第三分量和超荷的本征态，也就是说对于强子，这两个量可以同时测量。那么，一个自然的问题是，强子是否服从更高的对称性（用G群描述），$SU(2)\otimes U(1)$是这个群的子群， 即 $SU(2)\otimes U(1)\subset G$。

- 那么，G群应该具有什么性质呢？

a） $SU(2)$群是3阶1秩群
b） $U(1)$群是1阶1秩群

→ G群至少是二秩群 → 两个相互对易的生成元对应同位旋第三分量和超荷。

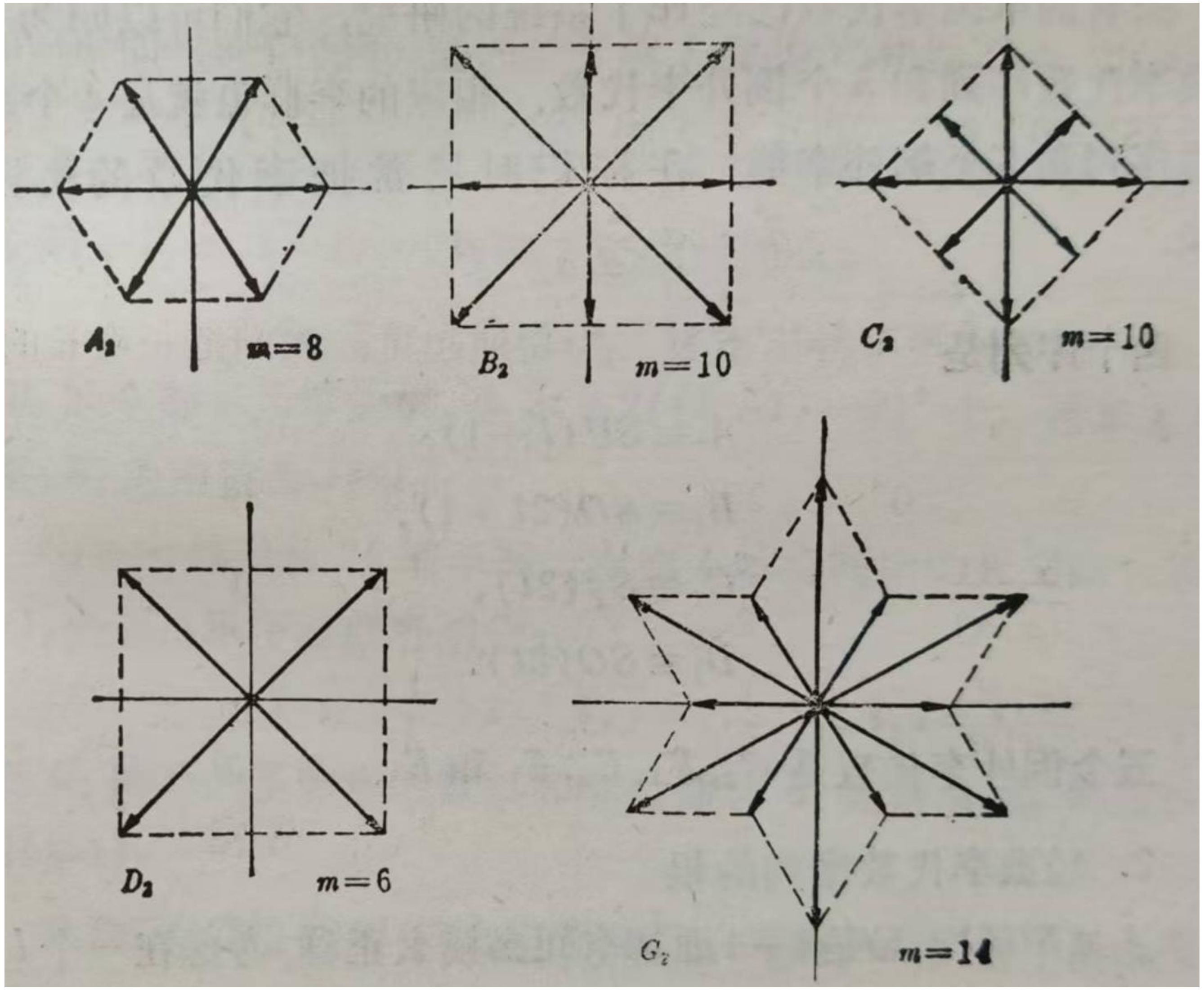
已知的二秩群有A_2, B_2, C_2, D_2, G_2，究竟哪个群才是能够描述强子性质的群呢？

既然二秩群有两个相互对易的生成元I_3, Y，对应于两个可以同时测量的守恒量，如果强子可以按照这个群的不可约表示分类，我们可以在 $I_3 - Y$ 平面上按照强子的量子数来标记该强子为该平面上的一个点(这样的图在群论的语言中称为“权图”。

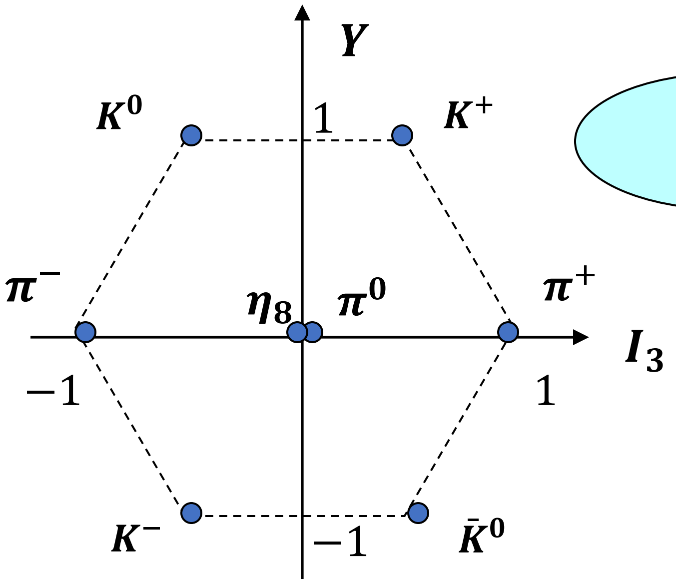
另外，同位旋和对应于超荷的$U(1)$对称性都是内部对称性，所以它们和空间对称性应该正交，可以将具有相同空间量子数 J^P 的强子画在一个权图上。

根据群表示理论，在所有的二秩群中，只有 A_2 群的表示可以描述强子的这种分类，实际上 $A_2 \equiv SU(3)$。

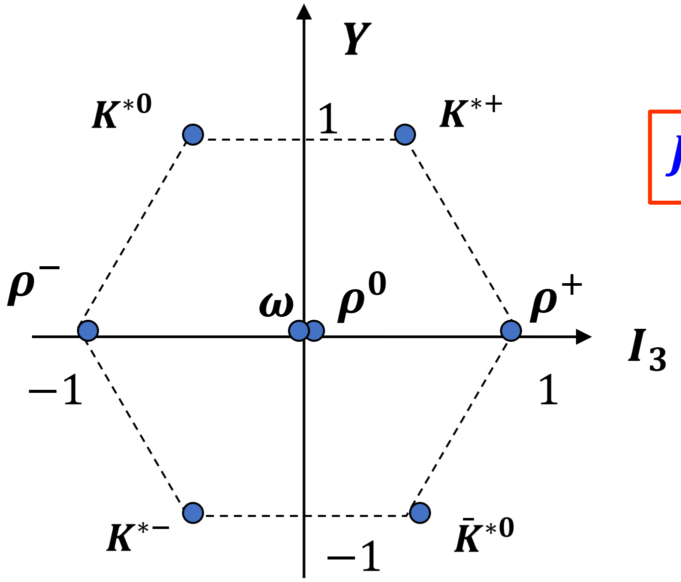
所以，可以换句话说，自然界选择了SU(3)群。


A_2 $m=8$
B_2 $m=10$
C_2 $m=10$
D_2 $m=6$
G_2 $m=14$

$J^P = 0^-$

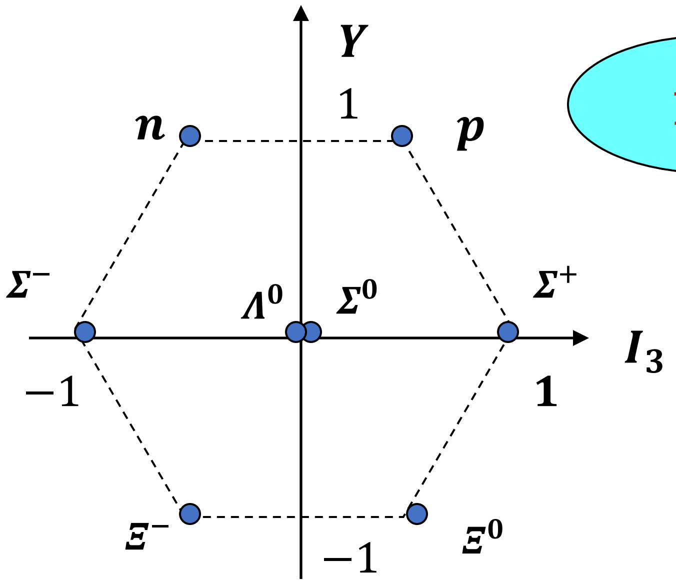


介子

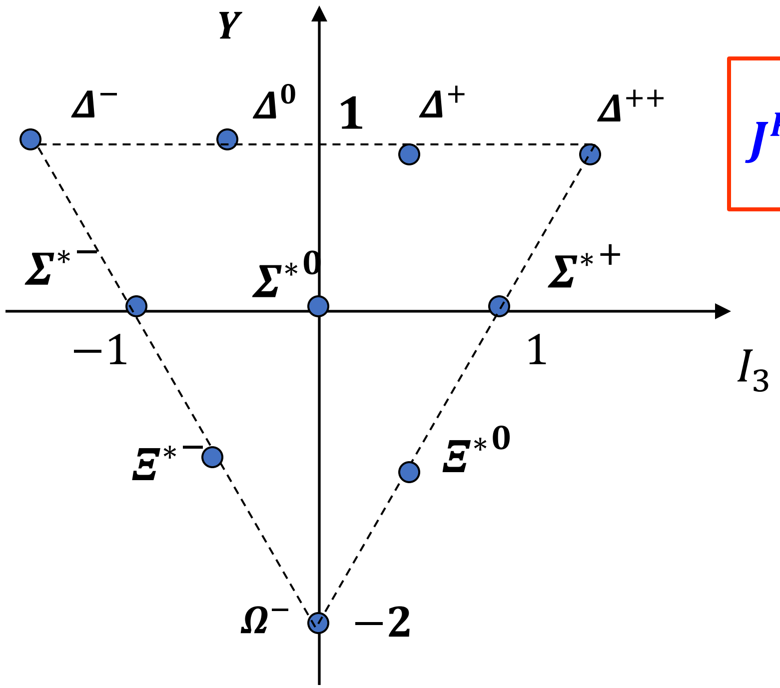


$J^P = 1^-$

$J^P = \frac{1}{2}^+$



重子



$J^P = \frac{3}{2}^+$

二、SU(3)群及其表示理论概要

1. SU(3)群是3维复空间的幺正幺模矩阵群：

$$U \in SU(3), \qquad U^{+}U = UU^{+} = I, \qquad \det(U) = 1$$

$SU(3)$共有8个生成元(经常把生成元通过N维复空间的矩阵形式写出来）：

$$\{I_i, i = 1,2,\cdots,8\} \qquad I_i = \frac{1}{2}\lambda_i, i = 1,2,\cdots 8.$$

其中， λ_i 是八个三阶复矩阵，称为Gell-Mann矩阵：

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Gell-Mann矩阵满足关系：$\boxed{Tr\lambda_i\lambda_j = 2\delta_{ij}}$

2. SU(3)群生成元的对易关系——SU(3)群的结构常数

Lie群的生成元满足Lie代数关系：

$$[I_i, I_j] = C_{ijk} I_k$$

C_{ijk}称作该Lie群的结构常数。对于$SU(3)$，如果将生成元取作厄米矩阵（如上页），则生成元的对易关系为，

$$[I_i, I_j] = i f_{ijk} I_k$$

另外，$SU(3)$群的生成元还满足下列反对易关系：

$$\{I_i, I_j\} = I_i I_j + I_j I_i = \frac{1}{3}\delta_{ij} + d_{ijk} I_k$$

以上两式中的 f_{ijk} 和 d_{ijk} 都是实数，非零值具体如下：

$$f_{123} = 1;$$
$$f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = \frac{1}{2}$$
$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$
$$d_{146} = d_{157} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = \frac{1}{2};$$
$$d_{247} = d_{366} = d_{377} = -\frac{1}{2};$$
$$d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}};$$

注意，Lie群的结构常数是群的固有性质，和群的表示没有关系。

从$SU(3)$的结构常数可以看出，没有非零的$(3,8,x)$组合，这说明$SU(3)$群的第三个和第八个生成元对易：

$$\boxed{[I_3, I_8] = 0}$$

自然，这个对易关系在所有的表示中都成立。

3. $SU(3)$群的Casimir算子

a）$SU(2)$群的Casimir算子：$C_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J^2; J^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle$

b）$SU(3)$群的Casimir算子。$SU(3)$群是二秩群，存在两个Casimir 算子，

$$C_2 = \sum_{i=1}^{8} {T_i}^2, \qquad C_3 = 2(d_{ijk} + if_{ijk})T_iT_jT_k$$

Casimir算子和所有的生成元都对易： $[C_2, T_i] = 0$; $[C_3, T_i] = 0$

注意，这里$SU(3)$群生成元 $\{T_i, i = 1, 2, \cdots, 8\}$和$\{I_i, i = 1, 2, \cdots, 8\}$在含义上有所不同，前者为$SU(3)$群的某个不可约表示的生成元，如果为$n$维表示，就是$n \times n$ 的复矩阵；后者在本课程中特指$SU(3)$群的基础表示(3维)的生成元。无论是几维不可约表示，生成元在该表示中的矩阵形式都满足$SU(3)$群的生成元的对易和反对易关系（如上页），但Casimir算子的本征值则与表示有关。

4. $SU(3)$群的基础表示

1) 基础表示：关于基础表示的严格的群论定义参见群论课程。我们在这里只直接给出$SU(3)$的基础表示的明确表达。

$SU(2)$群的基础表示是二维表示，群元的表示矩阵是二阶复矩阵；
$SU(3)$群的基础表示是三维表示，群元的表示矩阵式三阶复矩阵。

在以u，d，s为基张成的三维复空间，它们各自可以用一个列向量来描述，

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

在这个空间中的矢量R的SU(3)变换矩阵可以由其在这个空间中的生成元矩阵 $\{I_i, i = 1, 2, \cdots, 8\}$ 生成，

$$R \to R' = U(\vec{\alpha})R, \qquad U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}} \equiv e^{-i\alpha^i I_i}$$

相应地，基变换为，$\varphi \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \to \varphi' = e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\varphi \equiv e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$，如果我们选算符

$$I_3 = \frac{\lambda_3}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$I_3 u = I_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u, \qquad Yu = Y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}u$$

$$I_3 d = I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}d, \qquad Yd = Y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}d$$

$$I_3 s = I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,s, \qquad Ys = Y\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}s$$

	I_3	Y
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
s	0	$-\frac{2}{3}$

u，d，s构成SU(3)群的基础表示，记作$\underline{3}$

2）基础表示的共轭表示（记为 $\underline{3^*}$ ）

如果基础表示为$\varphi \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$，则其共轭表示为 $\varphi^+ = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$

$SU(3)$变换关系为 $\varphi' = U\varphi \to \varphi^{+\prime} = \varphi^+ U^+$

在以 $(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$ 为基张成的三维复空间中，它们各自用一个列向量来描述，

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^* \equiv \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \to \varphi^{*\prime} = e^{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{I}^*}\varphi^* \equiv e^{i\vec{\alpha}\cdot(-\vec{I}^*)}\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix}$$

基础表示的共轭表示的生成元表示矩阵为 $\boxed{T_i = -I_i^*}$

和$SU(2)$不同，$SU(3)$基础表示和它的复共轭表示不能通过幺正变换联系，不等价。

因此在该表示中对同位旋第三分量的算符和超荷算符为

$$T_3 = -I_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = -\frac{\lambda_8}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

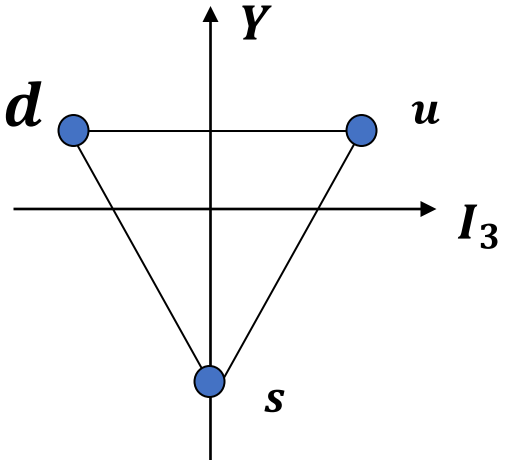
$$I_3\bar{u} = -\frac{1}{2}\bar{u}, \qquad Y\bar{u} = -\frac{1}{3}u$$

$$I_3\bar{d} = \frac{1}{2}\bar{d}, \qquad Y\bar{d} = -\frac{1}{3}d$$

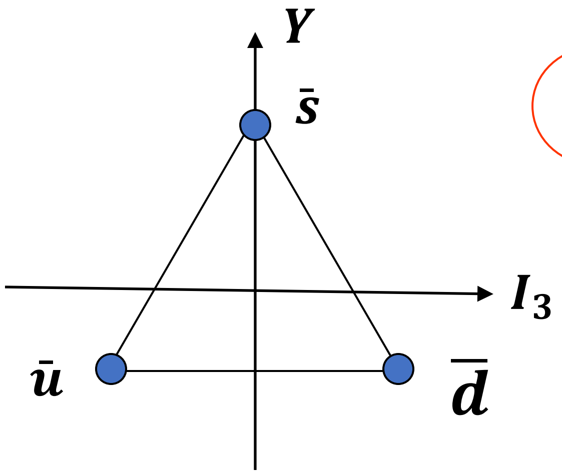
$$I_3\bar{s} = 0\,\bar{s}, \qquad Y\bar{s} = \frac{2}{3}\bar{s}$$

	I_3	Y
$\bar{u}$	$-1/2$	$-1/3$
$\bar{d}$	$1/2$	$-1/3$
$\bar{s}$	0	$2/3$

$\underline{\mathbf{3}}$



权图



$\underline{\mathbf{3}^*}$

5. $SU(3)$群的不可约表示

$SU(3)$群的不可约表示比较复杂，详细内容见群论课程讲解，这里只给出一般性结论：

a) $SU(3)$群的不可约表示可以用两个参数 λ, μ 来描写，记为$D(\lambda, \mu)$；

b) λ, μ 的含义：每一个不可约表示中的多重态在权图($I_3 - Y$平面)上的最外围的点连成一个多边形。λ, μ 分别是上边和下边的长度（态数减1）。例如：

基础表示：$D(1, 0)$　　八维表示：$D(1, 1)$

基础表示的共轭表示：$D(0, 1)$　　十维表示：$D(3, 0)$

c) 表示的维数为

$$N = \frac{1}{2}(1+\lambda)(1+\mu)(2+\lambda+\mu$$

d) Casimir算子的本征值：

$$C_2 = \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) + (\lambda + \mu)$$

$$C_3 = (\lambda + 2\mu)(\mu + 2) - \frac{1}{9}(\lambda - \mu)(2\lambda^2 + 5\lambda\mu + 2\mu^2)$$

C_3不常用，不在这里细说。

常用的不可约表示的维数和Casimir算子的本征值

表示	维数	C_2	C_3
$D(0,0)$	$\underline{1}$	0	0
$D(1,0)$	$\underline{3}$	4/3	16/9
$D(0,1)$	$\underline{3^*}$	4/3	56/9
$D(1,1)$	$\underline{8}$	3	9
$D(2,0)$	$\underline{6}$	10/3	20/9
$D(0,2)$	$\underline{6^*}$	10/3	160/9
$D(3,0)$	$\underline{10}$	6	0
$D(0,3)$	$\underline{10^*}$	6	36
$D(2,1)$	$\underline{15}$	16/3	88/9
$D(1,2)$	$\underline{15^*}$	16/3	200/9

e) $SU(3$的任意两个不可约表示的直乘可以按照不可约表示的直和分解。

$$\underline{\mathbf{8}} \otimes \underline{\mathbf{8}} \to \underline{\mathbf{1}} \oplus \underline{\mathbf{8}} \oplus \underline{\mathbf{8}} \oplus \underline{\mathbf{10}} \oplus \underline{\mathbf{10}^*} \oplus \underline{\mathbf{27}}$$

f) $SU(3)$的任意不可约表示都可以通过若干个基础表示和基础表示的共轭表示生成（后面可以看到，这就是夸克模型的基础）。

$$\underline{\mathbf{3}} \otimes \underline{\mathbf{3}^*} \to \underline{\mathbf{1}} \oplus \underline{\mathbf{8}}$$

$$\underline{\mathbf{3}} \otimes \underline{\mathbf{3}} \otimes \underline{\mathbf{3}} \to \underline{\mathbf{1}} \oplus \underline{\mathbf{8}} \oplus \underline{\mathbf{8}} \oplus \underline{\mathbf{10}}$$

关于$SU(3)$群不可约表示的直乘的直和分解规则详见群论课程讲述。

三、强子的$SU(3)$对称性和强子模型的发展

1. 坂田(Sakata)模型（1956）

质子(p)、中子(n)和 Λ 超子都是自旋为1/2的重子，质量相近，相互作用性质相似。基于这个事实，坂田1956年提出了一个强子模型：

a） p， n 和 Λ 构成$SU(3)$的一个基础表示$D(1,0)=\underline{\mathbf{3}}$，

b） 它们的反粒子构成其共轭表示$D(0,1)=\underline{\mathbf{3}^*}$，

c） 其它强子都是它们的复合态。

p， n 和 Λ 的量子数为：

	J^P	I	I_3	S	b
$p(938)$	$1/2^+$	$1/2$	$1/2$	0	1
$n(939)$	$1/2^+$	$1/2$	$-1/2$	0	1
$\Lambda(1115)$	$1/2^+$	0	0	-1	1

介子： $\underline{\mathbf{3}}\otimes\underline{\mathbf{3}^*}\to\underline{\mathbf{1}}\oplus\underline{\mathbf{8}}$

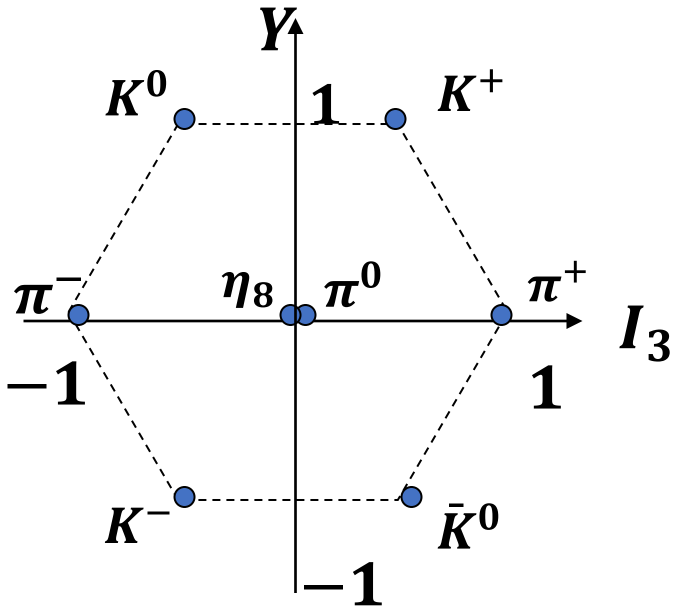
重子：

$\underline{\mathbf{3}}\otimes\underline{\mathbf{3}}\otimes\underline{\mathbf{3}^*}\to\underline{\mathbf{3}}\oplus\underline{\mathbf{3}}\oplus\underline{\mathbf{6}^*}\oplus\underline{\mathbf{15}}$

Sakata模型对介子的描述很成功：

$$\pi^+ = (p\bar{n})$$
$$\pi^- = (n\bar{p})$$
$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p\bar{p} - n\bar{n})$$

$$K^+ = (p\bar{\Lambda})$$
$$K^- = (\Lambda\bar{p})$$
$$K^0 = (n\bar{\Lambda})$$
$$\bar{K}^0 = (\Lambda\bar{n})$$



Sakata模型对重子的描述遇到困难：

a) 具有同样 J^P 的八个重子放在两个表示中，不自然；

b) 预言的一些重子态实验上没有找到，如 $pn\bar{\Lambda}$ 等。

$$\Sigma^+ = (\Lambda\pi^+) = (\Lambda p\bar{n})$$
$$\Sigma^- = (\Lambda\pi^-) = (\Lambda n\bar{p})$$
$$\Sigma^+ = (\Lambda\pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda p\bar{p} + \Lambda n\bar{n})$$

2. Gell-Mann-Ne’emann 理论——八正法(eightfold way)

1961年，Gell-Mann和Ne’emann提出八正法 (eightfold way)理论：介子和重子都属于SU(3)的八维表示或者由八维表示的直乘分解所得的表示，

$$\underline{8}\otimes\underline{8}\rightarrow\underline{1}\oplus\underline{8}\oplus\underline{8}\oplus\underline{10}\oplus\underline{10^*}\oplus\underline{27}$$

	$\underline{1}$	$\underline{8}\oplus\underline{8}$	$\underline{10}$	$\underline{10^*}$	$\underline{27}$
介子	○	○	×	×	×
重子	○	○	○	×	×
反重子	○	○	×	○	×

可以看出， 介子的分类和Sakata模型相同；

8个 $\frac{1}{2}^{+}$ 重子可以归入一个8维表示，这克服了Sakata模型的缺陷；

当时还已经发现了9个 $\frac{3}{2}^{+}$ 重子，可以归入一个10维表示。这9个重子的量子数如下表：

同位旋多重态	$I=\frac{3}{2}$				$I=1$			$I=\frac{1}{2}$	
粒子名	Δ^{++}	Δ^{+}	Δ^{0}	Δ^{-}	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*0}	Ξ^{*-}
I_3	3/2	1/2	-1/2	-3/2	1	0	-1	1/2	-1/2
b	1	1	1	1	1	1	1	1	1
S	0	0	0	0	-1	-1	-1	-2	-2
Y	1	1	1	1	0	0	0	-1	-1
质量 (MeV)	1230-1234				1383-1387			1532-1535	

这些粒子的同位旋和超荷量子数与$SU(3)$群10维表示的结构相同，其质量差也不大，应该属于同一个超多重态。

八正法对 Ω^- 粒子的成功预言：

a）根据SU(3)对称性，在这个10重态中也应该存在第十个粒子，

$$\boxed{\Omega^-: I=0, Y=-2, b=1 \Rightarrow S=-3, Q=-1}$$

b）另外，尽管这个10重态中的已发现的 9个粒子的质量差别不大，但最大的质量差也达到150MeV，这说明 $SU(3)$ 对称性还是有一定程度的破缺的。

c）同一同位旋多重态中粒子的质量差可以认为是由于电磁相互作用性质不同引起的；

d）不同同位旋多重态的质量差则主要是超荷数不同的结果。根据前表中的质量，我们有以下关系，

$$m_{\Sigma^*} - m_{\Delta} \approx 153 \text{ MeV}, (\Delta Y = -1)$$

$$m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} \approx 145 \text{ MeV}, (\Delta Y = -1)$$

可以推断出，

$$m_{\Omega} - m_{\Xi^*} \approx 140 \text{ MeV}, (\Delta Y = -1) \Rightarrow \boxed{m_{\Omega} \approx 1670 \text{ MeV}}$$

e）这个质量预言和前面的量子数预言可以对 Ω^- 的性质给出更强的预言：

$$\boxed{m_\Omega < m_\Xi + m_{\bar{K}}, m_\Sigma + 2m_{\bar{K}}, m_\Lambda + 2m_{\bar{K}}}$$

Ω^- 是质量最轻的$S=-3$的强子(体系)，根据电磁相互作用和强相互作用奇异数守恒，它不能通过强相互作用和电磁相互作用衰变，只能通过弱相互作用衰变(如以下几个弱衰变道)，是一个长寿命粒子，

$$\Omega^- \to \Xi^0\pi^-, \qquad \Xi^-\pi^0, \qquad \Lambda^0 K^-(\Delta S = 1)$$

1964年，实验上找到了这个粒子，其量子数和预言符合，其质量和寿命为，

$$M_\Omega = (1672.43 \pm 0.32)\ \text{MeV}, \qquad \tau = (0.822 \pm 0.012) \times 10^{-10} s$$

这是八正法理论的巨大成功。但是，八正法理论也面临一个很大的困难：

为什么介子只有表示1和8，重子只有表示1，8和10，而表示10*和27并不出现。

这个问题在1964年提出的夸克模型中得到解决。