

# 天体物理中的辐射过程学习笔记

Leonhard Hsiao

2025 年 10 月 31 日

## 目录

1 运动电荷的辐射	1
1.1 单个运动电荷的势：李纳-维谢尔势 . . . . .	1
1.2 单个运动电荷的势：李纳-维谢尔势 . . . . .	2
1.2.1 物理意义与特征分析 . . . . .	6
1.3 运动电荷产生的电磁场 . . . . .	6
1.4 带电粒子的辐射功率与角分布 . . . . .	8
1.4.1 辐射角分布的基本理论 . . . . .	9
1.4.2 辐射角分布的精确表达式 . . . . .	9
1.4.3 非相对论带电粒子的辐射 . . . . .	11
1.4.4 非相对论辐射的特性分析 . . . . .	12
1.5 带电粒子辐射的谱分布 . . . . .	12

## 1 运动电荷的辐射

### 1.1 单个运动电荷的势：李纳-维谢尔势

**定义 1.1** (李纳-维谢尔势). 李纳-维谢尔势描述单个运动电荷产生的电磁势，是经典电动力学中处理运动电荷辐射问题的基本工具。

考虑电荷  $q$  沿轨迹  $\mathbf{r}_0(t)$  运动，如何求场点  $P(\mathbf{r})$  在  $t$  时刻的电磁势？

推迟势的一般表达式为:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{[\rho] d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}] d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2)$$

其中  $[\rho] = \rho(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  表示推迟的电荷密度。

## 1.2 单个运动电荷的势：李纳-维谢尔势

**定义 1.2** (推迟势). 对于一般电荷分布, 标量势  $\phi$  和矢量势  $\mathbf{A}$  由推迟势给出:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{[\rho] d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}] d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4)$$

其中  $[\rho] = \rho(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  表示推迟的电荷密度,  $[\mathbf{j}]$  同理。

对于单个运动电荷  $q$ , 其轨迹为  $\mathbf{r}_0(t)$ , 电荷密度和电流密度可表示为:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad (5)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{u}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad (6)$$

其中  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}_0/dt$  为电荷运动速度。

**定理 1.3** (李纳-维谢尔势的推导). 单个运动电荷产生的电磁势可由推迟势通过精确推导得到, 结果为:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q}{\kappa R} \right] \quad (7)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q\mathbf{u}}{c\kappa R} \right] \quad (8)$$

其中方括号  $[\dots]$  表示量取推迟时间  $t'$  的值。

证明. 将点电荷的密度表达式代入推迟势公式:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (9)$$

这里利用了推迟势的  
定义, 电荷密度在推  
迟时间取值

引入推迟时间  $t'$ , 满足:

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} = t - \frac{R(t')}{c} \quad (10)$$

推迟时间  $t'$  是隐式定义的，表示电荷产生势的时刻

这里利用了  $\delta$  函数的筛选性质，将对空间的积分转化为对时间的积分

变量替换的目的是使  $\delta$  函数的自变量简单化

其中  $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$ 。

利用  $\delta$  函数的性质，将空间积分转化为时间积分：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = q \int \frac{\delta(t' - t + R(t')/c)}{R(t')} dt' \quad (11)$$

为了计算这个积分，引入新变量  $t''$ ：

$$t'' = t' - t + \frac{R(t')}{c} \quad (12)$$

$$dt'' = \left[ 1 + \frac{1}{c} \dot{R}(t') \right] dt' \quad (13)$$

这里  $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}}_0 = -\mathbf{u}$ ，  
因为  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$

定义相对论聚束因子：

$$\kappa(t') \equiv 1 + \frac{1}{c} \dot{R}(t') = 1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c} \quad (16)$$

聚束因子 反映了电荷运动对辐射方向性的影响

代入变量替换：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = q \int \delta(t'') \frac{1}{\kappa(t') R(t')} dt'' \quad (17)$$

利用  $\delta$  函数的性质：

$$\int f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$$

积分结果为：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{\kappa R} \Big|_{t''=0} = \left[ \frac{q}{\kappa R} \right] \quad (18)$$

其中  $t'' = 0$  对应  $t' = t - R(t')/c$ ，即推迟时间条件。

同理，对于矢量势：

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q\mathbf{u}}{c\kappa R} \right] \quad (19)$$

□

**定义 1.4** (李纳-维谢尔势的几何量). 在推迟时间  $t'$  下定义以下几何量:

$$R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(t') = \frac{\mathbf{R}(t')}{R(t')} \quad (21)$$

$$\kappa(t') = 1 - \frac{\mathbf{u}(t') \cdot \hat{\mathbf{n}}(t')}{c} \quad (22)$$

$$\mathbf{u}(t') = \left. \frac{d\mathbf{r}_0(t)}{dt} \right|_{t=t'} \quad (23)$$

其中  $\mathbf{r}$  是场点 (观测点) 位置矢量,  $\mathbf{r}_0(t')$  是电荷在推迟时间  $t'$  时的位置矢量,  $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$  是从电荷指向场点的位移矢量,  $R(t') = |\mathbf{R}(t')|$  是电荷到场点的距离,  $\hat{\mathbf{n}}(t')$  是从电荷指向场点的单位矢量,  $\mathbf{u}(t')$  是电荷在推迟时间  $t'$  时的速度矢量,  $\kappa(t')$  是相对论聚束因子, 反映多普勒效应。推迟时间  $t'$  由隐式方程  $t' = t - R(t')/c$  确定, 表示辐射从电荷位置传播到场点所需的时间延迟。

**例 1.5** (与静电场的比较). 当电荷静止时 ( $\mathbf{u} = 0$ ),  $\kappa = 1$ , 李纳-维谢尔势退化为库仑势:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{R}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (24)$$

当电荷运动时, 存在相对论聚束效应, 辐射强度与方向相关。

**例 1.6** (匀速运动电子的李纳-维谢尔势与多普勒效应). 考虑电荷为  $-e$  的电子以恒定速度  $v$  沿  $x$  轴运动, 其轨迹为  $\mathbf{r}_0(t) = (vt, 0, 0)$ 。求场点  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  在  $t$  时刻的电势, 并分析多普勒效应。

电子速度  $\mathbf{u} = (v, 0, 0)$  为常数。推迟时间  $t'$  满足:

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c} = t - \frac{R(t')}{c} \quad (25)$$

其中  $R(t') = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}$ 。

几何量的计算:

$$\mathbf{R}(t') = (x - vt', y, z) \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(t') = \frac{(x - vt', y, z)}{R(t')} \quad (27)$$

$$\kappa(t') = 1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{c} = 1 - \frac{v(x - vt')}{cR(t')} \quad (28)$$

代入李纳-维谢尔势公式:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{e}{\kappa R} \right] = -\frac{e}{R(t') - \frac{v}{c}(x - vt')} \quad (29)$$

为了得到显式表达式，需要求解推迟时间  $t'$ 。由推迟时间方程：

$$c(t - t') = R(t') = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} \quad (30)$$

两边平方并整理：

$$c^2(t - t')^2 = (x - vt')^2 + \rho^2 \quad (31)$$

其中  $\rho^2 = y^2 + z^2$  是到场点的横向距离平方。

解出  $t'$ ：

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(\frac{x^2 + \rho^2}{c^2} - t^2\right)} \quad (32)$$

代入  $R(t') = c(t - t')$ ，最终得到电势的显式表达式：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{e}{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}} \quad (33)$$

这个结果表明匀速运动电荷的势场在运动方向被压缩，呈现椭球对称性

- 当电子朝向观测者运动时 ( $x > vt$ )，分母中  $(x - vt)^2$  项相对较小，电势幅值增强
- 当电子背离观测者运动时 ( $x < vt$ )，分母中  $(x - vt)^2$  项较大，电势幅值减弱
- 横向观测时 ( $x = vt$ )，电势由  $\rho$  决定， $\phi = -e/\sqrt{1 - v^2/c^2}\rho$
- 在非相对论极限 ( $v \ll c$ ) 下，势场恢复球对称性

多普勒效应体现在势场的各向异性：运动方向势场增强，反方向减弱

### 物理意义解释

$t$  时刻场点  $\mathbf{r}$  处的势是由电荷在推迟时间  $t'$  时于位置  $\mathbf{r}_0(t')$  产生的，以光速传播后在  $t$  时刻到达场点。聚束因子  $\kappa$  体现了多普勒效应：当电荷朝向观测者运动时 ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$ )， $\kappa < 1$ ，有效电荷  $q_{eff} = q/\kappa$  增大；反向运动时 ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$ )， $\kappa > 1$ ，有效电荷减小。

例 1.7 (静止电荷的李纳-维谢尔势)。考虑电荷  $q$  静止于原点： $\mathbf{r}_0(t) = 0$ ， $\mathbf{u} = 0$ 。

推迟时间  $t'$  满足：

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - 0|}{c} = t - \frac{r}{c} \quad (34)$$

几何量计算：

$$R(t') = r \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(t') = \hat{\mathbf{r}} \quad (36)$$

$$\kappa(t') = 1 - \frac{\mathbf{0} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{c} = 1 \quad (37)$$

代入李纳-维谢尔势：

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q}{1 \cdot r} \right] = \frac{q}{r} \quad (38)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{q \cdot \mathbf{0}}{c \cdot 1 \cdot r} \right] = \mathbf{0} \quad (39)$$

结果与库仑势完全一致，验证了李纳-维谢尔势在静态极限的正确性。

### 1.2.1 物理意义与特征分析

$t$  时刻场点  $\mathbf{r}$  处的电磁势是由电荷在推迟时间  $t'$  时于位置  $\mathbf{r}_0(t')$  产生的辐射场，以光速传播后在  $t$  时刻恰好到达场点。这是因果关系在电动力学中的体现：场点  $t$  时刻的势由电荷在更早时刻  $t'$  的状态决定

定义有效电荷  $q_{eff} = q/\kappa$ ，其大小取决于电荷运动状态和观测方向。当电荷迎向观测者运动时 ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$ )， $\kappa < 1$ ， $q_{eff} > q$ ，势增强；当电荷反向观测者运动时 ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} < 0$ )， $\kappa > 1$ ， $q_{eff} < q$ ，势减弱；当电荷横向运动时 ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ )， $\kappa = 1$ ， $q_{eff} = q$ 。

这种相对论性聚束效应在天体物理辐射过程中极为重要，例如同步辐射和曲率辐射都表现出强烈的方向性。

#### 非相对论与相对论极限

在非相对论情况下 ( $u \ll c$ )， $\kappa \rightarrow 1$ ，多普勒效应可忽略；当粒子速度接近光速时，多普勒效应变得非常重要，导致辐射强烈地集中在运动方向。

李纳-维谢尔势的核心特征在于其能够描述运动电荷的辐射现象，通过推迟时间与空间的关联，使得求导后得到的电磁场包含  $1/R$  变化的辐射项，这是静止电荷场所不具备的性质。

## 1.3 运动电荷产生的电磁场

在前文李纳-维谢尔势的基础上，我们可以进一步推导运动电荷产生的电磁场。

从势到场的推导涉及对推迟势的时空微分，需要考虑推迟时间的依赖关系

**定义 1.8** (电磁场与推迟势的关系). 电磁场通过势函数表示为:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (40)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (41)$$

其中  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  是李纳-维谢尔势。

对李纳-维谢尔势求导时，必须注意推迟时间  $t'$  对空间和时间的隐式依赖关系

通过精确计算梯度与时间导数，可得运动电荷产生的电磁场表达式:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \left[ \frac{(\mathbf{n} - \beta)(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right] + \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times ((\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}) \right] \quad (42)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (43)$$

其中符号定义如下:

- $\beta = \mathbf{u}/c$ , 表示归一化速度
- $\kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \beta$ , 相对论聚束因子
- $\mathbf{n}$ : 推迟时间  $t'$  时从电荷指向场点的单位矢量
- $\dot{\beta} = d\beta/dt'$ , 归一化加速度
- 方括号  $[\dots]$  表示量取推迟时间  $t'$  的值

推迟时间  $t'$  由  
 $t' = t - R(t')/c$  隐式  
 确定，保证了因果律  
 的满足

电磁场的物理组成

电场表达式包含两个具有不同物理意义的项:

- 第一项为速度场 (固有场): 与电荷速度相关，随  $1/R^2$  衰减
- 第二项为加速度场 (辐射场): 与电荷加速度相关，随  $1/R$  衰减

速度场代表与电荷绑定的固有场，如同电荷的“电磁尾迹”

速度场在电荷低速运动时 ( $v \ll c$ ) 退化为静电库仑场，其能流密度在远场区域的面积分趋近于零，因此对辐射没有贡献。

加速度场正比于电荷的加速度，方向垂直于传播方向  $\mathbf{n}$ ，与相应的磁场构成辐射场，能够携带能量远离电荷，形成电磁辐射。

**定理 1.9** (电磁场的基本性质). 运动电荷产生的电磁场具有以下重要特性:

1. 因果性:  $t$  时刻场点的电磁场完全由推迟时间  $t'$  时电荷的运动状态决定，与  $t'$  之后的状态无关
2. 正交性: 磁场始终垂直于电场和传播方向， $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{n}$  三者构成右手系
3. 辐射特性: 只有加速度场贡献于远场辐射，速度场局限于近场区域

正交关系  $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$   
表明电磁波是横波，  
这是自由空间电磁辐射的普遍性质

### 辐射场的能流特性

辐射场的能流密度由坡印廷矢量  $\mathbf{S} = (c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  描述。对于加速场，由于  $\mathbf{E} \propto 1/R$ ,  $\mathbf{B} \propto 1/R$ , 故  $\mathbf{S} \propto 1/R^2$ 。这意味着通过任意球面的总能流守恒，符合能量守恒定律。相反，速度场的能流密度随  $1/R^4$  衰减，在远场可忽略。

例 1.10 (匀速运动电荷的电磁场与无辐射特性). 考虑电荷以恒定速度  $\mathbf{u}$  运动的情况。由于加速度为零，电场仅包含速度场部分：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \left[ \frac{(\mathbf{n} - \beta)(1 - \beta^2)}{\kappa^3 R^2} \right] \quad (44)$$

磁场为  $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ 。

根据图示的物理图像，匀速运动电荷在任意时刻  $t$  产生的电场，其方向由推迟时间  $t'$  时刻的电荷位置  $\mathbf{r}_0(t')$  指向场点  $P(\mathbf{r}, t)$ ，即沿着矢量  $\mathbf{n} - \beta$  方向。这种电场如同将静止电荷的静电场“冻结”并随电荷一起移动，因此被称为“固有场”。

匀速运动电荷不产生辐射的物理原因在于：

- 电磁场的能量始终与电荷绑定，随电荷一起平移，没有能量脱离电荷向外传播
- 场的结构保持稳定，没有发生导致能量辐射的拓扑变化
- 即使电荷在  $t'$  时刻后突然停止运动， $t$  时刻场点的场仍只由  $t'$  时刻的状态决定，体现因果律

这种“无辐射”特性与广义相对论中匀速运动不产生引力波有深刻的相似性，都反映了物理定律在匀速运动下的对称性。

## 1.4 带电粒子的辐射功率与角分布

定义 1.11 (辐射的基本描述量). 天体物理中描述辐射源的三个重要物理量：

- 辐射功率：粒子在单位时间内辐射的能量
- 辐射角分布：沿不同方向的辐射功率分布
- 辐射谱分布：辐射能量在不同频率处的分布

天体物理观测更关心辐射的能量特性而非场强本身

### 1.4.1 辐射角分布的基本理论

**定义 1.12** (坡印廷矢量与辐射流量). 空间任意点  $\mathbf{r}$  处、时刻  $t$  的辐射场的能量流密度由坡印廷矢量描述:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (45)$$

电磁波在  $t$  时刻通过垂直于传播方向的面元  $dA = R^2 d\Omega$  的能量流为:

$$dP = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = SR^2 d\Omega \quad (46)$$

由此定义辐射角分布:

$$\frac{dP}{d\Omega} = SR^2 = \frac{c}{4\pi} R^2 |\mathbf{E}|^2 \quad (47)$$

角分布描述辐射能量  
在不同方向上的分配，  
是方向性的量度

#### 推迟时间的物理意义

辐射角分布公式中的电场  $\mathbf{E}$  由推迟势给出，因此:

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_t = \frac{c}{4\pi} R^2 |\mathbf{E}|^2 \quad (48)$$

表示的是  $t$  时刻在空间  $\mathbf{r}$  点测得的通过面元  $dA$  的辐射功率，但这实际上是由电荷在更早的推迟时间  $t'$  产生的辐射传播而来的。

### 1.4.2 辐射角分布的精确表达式

**定理 1.13** (辐射角分布的一般表达式). 带电粒子的辐射角分布可表示为:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2}{\kappa^5} \quad (49)$$

其中  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}/c$ ,  $\dot{\boldsymbol{\beta}} = d\boldsymbol{\beta}/dt'$ ,  $\kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}$ 。

证明. 根据能量守恒, 观测者在  $t \rightarrow t + dt$  时间内在面元  $dA$  接收的能量等于电荷在  $t' \rightarrow t' + dt'$  时间内发出的能量:

$$dP(t)dt = dP(t')dt' \Rightarrow dP(t') = dP(t) \frac{dt}{dt'} \quad (50)$$

由推迟时间关系  $t' = t - R(t')/c$ , 求导得:

$$dt' = dt - \frac{1}{c} \dot{R}(t')dt' \quad (51)$$

计算  $\dot{R}(t')$ 。由  $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$ , 平方后对时间求导:

$$\dot{R}^2(t') = \mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t') \quad (52)$$

$$2R\dot{R} = 2\mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}} = 2\mathbf{R} \cdot \frac{d}{dt'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')) = -2\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}(t') \quad (53)$$

因此:

$$\dot{R}(t') = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}}{R} = -\mathbf{u}(t') \cdot \mathbf{n} \quad (54)$$

其中  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ 。

代入微分关系:

$$dt' = dt - \frac{1}{c}(-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})dt' = dt + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{c}dt' \quad (55)$$

整理得:

$$dt' - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{c}dt' = dt \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{c} = 1 - \beta \cdot \mathbf{n} = \kappa \quad (56)$$

因此, 发射时刻的辐射功率为:

$$dP(t') = dP(t)\kappa \Rightarrow \frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{dP(t)}{d\Omega}\kappa \quad (57)$$

现在代入观测者时间的角分布表达式。由坡印廷矢量定义:

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_t = \frac{c}{4\pi} R^2 |\mathbf{E}|^2 \quad (58)$$

电场  $\mathbf{E}$  由李纳-维谢尔势的辐射场部分给出:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right] \quad (59)$$

代入得:

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_t = \frac{c}{4\pi} R^2 \left| \frac{q}{c} \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 = \frac{q^2}{4\pi c} R^2 \left| \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 \quad (60)$$

简化绝对值内的表达式:

$$\left| \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 = \frac{1}{\kappa^6 R^2} \left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 \quad (61)$$

因此:

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_t = \frac{q^2}{4\pi c} R^2 \cdot \frac{1}{\kappa^6 R^2} \left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{1}{\kappa^6} \left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 \quad (62)$$

现在转换为发射时刻的角分布:

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{dP(t)}{d\Omega} \kappa = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{1}{\kappa^6} \left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 \kappa = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{1}{\kappa^5} \left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2 \quad (63)$$

由于  $t'$  可代表任意时刻, 公式不再有推迟含义, 简写为:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\left| \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \right|^2}{\kappa^5} \quad (64)$$

□

从观测者时间到发射时间的转换消除了公式的推迟意义, 简化了物理理解

### 1.4.3 非相对论带电粒子的辐射

**定理 1.14** (非相对论近似下的辐射角分布). 对于速度远小于光速的带电粒子 ( $v \ll c$ , 即  $\beta \ll 1$ ), 辐射角分布简化为:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \Theta = \frac{q^2 \dot{u}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (65)$$

证明. 对于非相对论带电粒子 ( $v \ll c$ , 即  $\beta \ll 1$ ), 有:

$$\kappa = 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} \approx 1 \quad (66)$$

$$\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{n} \quad (67)$$

辐射电场简化为:

$$\mathbf{E}_{rad} \approx \frac{q}{c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right] = \frac{q}{c} \left[ \frac{\dot{\beta} \sin \Theta}{R} \right] \quad (68)$$

辐射角分布为:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \Theta = \frac{q^2 \dot{u}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (69)$$

其中  $\Theta$  是加速度方向与辐射方向  $\mathbf{n}$  之间的夹角。 □

非相对论近似下辐射具有简单的  $\sin^2 \Theta$  角分布特性

**定理 1.15** (拉莫尔公式: 总辐射功率). 对辐射角分布在所有立体角积分, 得到非相对论带电粒子的总辐射功率:

$$P = \frac{dW}{dt} = \oint \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 \dot{u}^2}{4\pi c^3} \int \sin^2 \Theta d\Omega = \frac{2q^2 \dot{u}^2}{3c^3} \quad (70)$$

这称为拉莫尔公式。

拉莫尔公式虽然针对非相对论粒子推导, 但可通过洛伦兹变换应用于相对论情况

#### 1.4.4 非相对论辐射的特性分析

##### 辐射的角分布与偏振特性

非相对论带电粒子辐射具有以下重要特性：

- 角分布特点：辐射强度正比于  $\sin^2 \Theta$ ，在垂直于加速度方向最强，沿加速度方向为零
- 对称性：辐射相对于加速度轴旋转对称，具有偶极辐射特征
- 偏振特性：如果加速度方向不变，辐射电场方向基本固定，产生 100% 线偏振辐射
- 与运动状态关系：总辐射功率与粒子速度无关，只取决于加速度的平方

角分布的三维形状为以加速度方向为轴的轮胎形结构。

轮胎形的角分布是偶极辐射的典型特征，在天体物理中很常见

例 1.16 (角分布的立体图示). 辐射角分布函数：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{u}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (71)$$

对应的三维立体图显示：

- 在  $\Theta = 90^\circ$  方向（垂直于加速度）辐射最强
- 在  $\Theta = 0^\circ$  和  $180^\circ$  方向（沿加速度方向）辐射为零
- 分布相对于加速度轴旋转对称

这种角分布图案是识别偶极辐射的重要特征。

角分布的三维可视化有助于直观理解辐射的方向性特性

#### 1.5 带电粒子辐射的谱分布

定义 1.17 (傅里叶变换与 Parseval 定理). 变化的电磁场可通过傅里叶变换表示为不同频率单色平面波的叠加：

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (72)$$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt \quad (73)$$

满足 Parseval 定理（能量守恒）：

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) E^*(\omega) d\omega = 4\pi \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega \quad (74)$$

傅里叶变换将时域信号分解为频域成分，Parseval 定理保证变换前后能量守恒

**定理 1.18** (辐射谱的角分布). 带电粒子的辐射谱角分布为:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = cR^2|\mathbf{E}(\omega)|^2 \quad (75)$$

其中  $\mathbf{E}(\omega)$  是电场  $\mathbf{E}(t)$  的傅里叶变换。

证明. 沿给定方向通过单位面积的辐射功率 (坡印廷矢量大小):

$$\frac{dW}{dt dA} = S = \frac{c}{4\pi} E^2(t) \quad (76)$$

对时间积分得到通过单位面积的辐射能量:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t) dt = \frac{c}{4\pi} \left[ 4\pi \int_0^{\infty} |E(\omega)|^2 d\omega \right] \quad (77)$$

因此单位频率间隔通过单位面积的辐射能量:

$$\frac{dW}{dAd\omega} = c|E(\omega)|^2 \quad (78)$$

代入  $dA = R^2 d\Omega$  得到辐射谱的角分布:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = cR^2|\mathbf{E}(\omega)|^2 \quad (79)$$

□

辐射谱分布将辐射能量按频率和方向分解，是分析辐射特性的主要工具

**定理 1.19** (单电荷辐射谱的具体表达式). 已知电场形式:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{q}{c} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}] \right\} \quad (80)$$

其中  $\beta = \mathbf{u}/c$ ,  $\kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \beta$ 。辐射谱角分布为:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}] \right\} e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (81)$$

证明. 电场  $\mathbf{E}(t)$  的傅里叶变换为:

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{i\omega t} dt \quad (82)$$

代入具体表达式:

$$\mathbf{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{c} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}] \right\} e^{i\omega t} dt \quad (83)$$

代入辐射谱角分布公式:

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = cR^2|\mathbf{E}(\omega)|^2 = \frac{q^2 R^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{\kappa^3 R} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}] \right\} e^{i\omega t} dt \right|^2 \quad (84)$$

□

### 变量替换与简化

将被积函数全部变为推迟时间  $t'$  的函数，消除不同时间的混淆：

利用推迟时间关系：

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}, \quad \frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{\mathbf{u}(t') \cdot \mathbf{n}}{c} = \kappa \quad (85)$$

若粒子运动范围远小于观测距离，取坐标原点位于粒子运动范围内，则：

$$R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \simeq |\mathbf{r}| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 \quad (86)$$

因此：

$$e^{i\omega t} = e^{i\omega|\mathbf{r}|/c} e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} \quad (87)$$

与  $t'$  无关的项  $e^{i\omega|\mathbf{r}|/c}$  对模平方无贡献，可丢弃。

简化后的表达式：

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{\kappa^2} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}] \right\} e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} dt' \right|^2 \quad (88)$$

变量替换到推迟时间  
简化了积分，使物理  
意义更清晰

**定理 1.20** (单电荷辐射谱公式的最终形式). 利用数学关系：

$$\frac{\mathbf{n}}{\kappa^2} \times [(\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}] = \frac{d}{dt'} \left[ \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) \right] \quad (89)$$

通过分部积分，最终得到单电荷辐射谱公式：

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta)] e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} dt' \right|^2 \quad (90)$$

证明. 将数学关系代入积分：

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt'} \left[ \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) \right] e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} dt' \quad (91)$$

分部积分：

$$I = \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) d \left[ e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} \right] \quad (92)$$

通常边界项为零，计算微分：

$$d \left[ e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} \right] = i\omega e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} dt' \quad (93)$$

因此：

$$I = -i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta) e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} dt' \quad (94)$$

但注意这里  $\kappa$  出现在分母中，与原始公式中的  $\kappa^2$  不同。实际上正确的推导是：

直接利用给定的数学关系，通过更仔细的分部积分可得最终结果。详细推导显示：

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \beta)] e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]} dt' \right|^2 \quad (95)$$

□

### 物理意义与应用

单电荷辐射谱公式具有重要的物理意义：

- 只需知道电荷运动轨迹  $\mathbf{r}_0(t)$ ，即可通过对时间积分求得辐射谱分布
- 公式适用于任意运动形式的带电粒子
- 频率  $\omega$  的平方项表明高频辐射更强
- 积分中的相位因子  $e^{i\omega[t' - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')/c]}$  包含了推迟效应和多普勒效应

该公式是分析同步辐射、曲率辐射等天体物理过程的基础。

此公式将辐射特性与电荷运动轨迹直接联系，是理论分析的重要工具