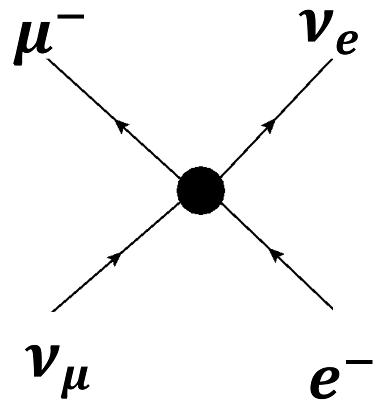
第三节　中间玻色子理论和电弱统一模型

一、四费米子有效作用理论的局限性

1.幺正极限的破坏



费米的弱作用有效理论是建立在点相互作用基础上的：费米子弱流相互作用发生在同一时空点。这在低能情形是很好的近似，因为低能情形对弱相互作用的短程结构不敏感。但在大能量转移情形则有问题——破坏幺正极限。

例如:散射过程　　$\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$

利用费米弱作用有效理论（点作用）可以算出散射总截面：　$\sigma_t = \dfrac{{G_F}^2}{\pi} s$

其中 s 是质心系总能量。显然总截面与 s 成正比，也就是说，如果 s 趋于无穷，总截面也趋于无穷。这显然是不合理的——由于截面是对散射概率的描写，根据概率守恒，这要求总截面应该有个上限，这就是幺正极限。

这是一个典型的非弹性散射过程，根据低能散射理论，这个过程(S 波)的截面的上限是

$$\sigma_{\max} \sim \frac{4\pi}{s}$$

于是可以推出前述公式成立的的质心系能量上限为，

$$\sigma_t \leq \sigma_{\max} \Rightarrow \sqrt{s} \leq \sqrt{\frac{2\pi}{G_F}} \approx 734\ \mathrm{GeV}$$

2. 普适费米弱作用的不可重整性

一个量子场论可以重整的必要条件是：所有基本相互作用的耦合常数的质量量纲为零或大于零。

但G_F的量纲是质量的负二次方，显然不满足上述条件。

由此可见，尽管普适费米弱作用理论取得了很大成功，但它不是弱作用的基本理论，而只能是在低能范围适用的近似理论。

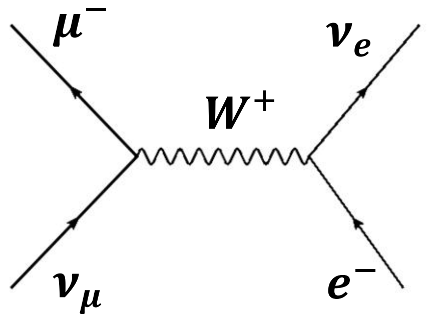
二、中间玻色子(intermediate vector boson)理论

电磁理论是流场作用项——电磁矢量流和电磁场（矢量场）的相互作用，电磁相互作用的媒介粒子是光子。很自然地，我们也可以认为弱作用也是通过某种弱力场传递的。和电磁相互作用类似，费米子以矢量流方式参与弱作用，因此这个弱力场也应该是矢量场，带电流与弱力场的弱作用拉氏量可以写成

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}\left(J^{-\mu}W_\mu^+ + J^{+\mu}W_\mu^-\right)$$

$W_\mu^\pm$ (weak) 代表弱力场，其量子就是中间玻色子 $W_\mu^\pm$ 。常系数是为了使 g 和以后电弱统一理论的耦合常数统一。矢量流就是轻子和强子带电弱流。

这样，散射过程 $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$ 的振幅可以写成，



$$i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{8}\bar{\psi}_\mu\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\frac{1}{q^2 - m_W^2}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e$$

$$\approx \frac{ig^2}{8m_W^2}\bar{\psi}_\mu\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_\mu}\bar{\psi}_{\nu_e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e, \quad (m_W^2 >> q^2)$$

与普适费米弱作用理论比较，有

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$$

中间玻色子理论似乎可以解决普适费米弱相互作用的两个困难:

a) 低能情形用费米理论是很高的近似，高能时则由于中间玻色子传播子的动量转移依赖，则可以避免幺正性的问题。

b) 中间玻色子理论是流场相互作用，耦合常数是无量纲的，似乎满足重整化的必要条件。

但是，实际上这两个问题由于中间玻色子质量的存在并没有完全避免，这是后话。

中间玻色子的概念最早可以追溯到Yukawa理论。1935年，Yukawa首先讨论了弱作用是由费米子流和玻色场耦合的可能性。和核力（由有质量的介子传递）的情形相似，弱作用也可能有媒介粒子。类比电磁相互作用，在非相对论极限下，单光子交换的电磁相互作用可以用Coulomb势描述（光子没有质量），

$$V_{\text{em}}(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

如果媒介粒子有质量，则单媒介粒子交换的势是汤川(Yukawa)势

$$V_{\text{Yukawa}} = -\frac{\alpha}{r}e^{-mr}$$

对于核力，m 就是介子质量，对于弱作用，就是弱作用媒介粒子的质量 m_W。

如果媒介粒子的质量很重，则可以有近似，

$$V_{\text{Yukawa}} = -\frac{\alpha_W}{r}e^{-m_W r} \xrightarrow[m_W\to\infty]{} -\frac{4\pi\alpha_W}{m_W^2}\delta^3(\vec{r})$$

即近似为点相互作用，这正是费米理论，并且，$G_F \propto \frac{4\pi\alpha_W}{m_W^2}$

如果 $\alpha_W \approx \alpha$，则W玻色子质量的估计为 $m_W \sim \sqrt{\frac{4\pi\alpha}{G_F}} \sim 100\ \text{GeV}$

相互作用力程与媒介粒子质量成反比，则可以估计若作用力程为 $L \sim \frac{1}{m_W} \sim 10^{-18} m$

这可以自然解释弱作用距离很短的现象。

电磁相互作用和弱作用的中间玻色子理论有许多相似之处：

	电磁理论	中间玻色子理论
媒介粒子	光子	中间玻色子
质量和力程	$m_\gamma = 0 \Rightarrow$ 长程	m_W很大 $\Rightarrow$ 短程
媒介粒子自旋	1	1
电荷	0	± 1
耦合常数	1/137 普适	$\alpha_W \propto m_W^2 G_F/(4\pi)$ 普适

从电磁理论和中间玻色子理论的对比来看，电磁相互作用和弱相互作用的机理很相似——都是流场相互作用。电磁相互作用是规范相互作用，电荷的普适性和可重整性都与此分不开；弱相互作用也有普适性，也可能是一种规范相互作用。如果更进一步假设电磁相互作用和弱相互作用有共同的起源，可以统一地描述为同一种相互作用，那么这种统一的理论是什么？

1961年 Glashow 提出用 **SU(2)** $\otimes$ **U(1)** 统一描述电磁和弱相互作用的想法，并引入中性中间玻色子 ***Z***，后来 Weinberg (1967) 和 Salam (1968) 利用Higgs 机制建立起现代版本电弱统一规范理论，1970年 GIM 将粲夸克引入电弱统一理论。1973年 KM 提出三代夸克的混合机制，这样包括夸克和轻子的**SU(2)** $\otimes$ **U(1)**的电弱统一规范理论就建立起来了。

三、电弱统一规范理论的拉氏量的建立

1. 电弱统一的规范对称性的寻找

电磁相互作用是普适的 U(1) 规范理论，弱相互作用也有普适性。考虑只有第一代轻子的情形——基本自由度是电子和中微子：

a) 中微子质量为零，试验上观测到只存在左手中微子和右手反中微子；
b) 中微子不带电，只参与弱相互作用；
c) 电子既参加弱相互作用又有电磁相互作用；
d) 在弱作用中电子只以左手形式出现。

我们把电子场的算符分成左手部分和右手部分的和：

$$e(x)=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)e(x)+\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e(x)\equiv e_R(x)+e_L(x)$$

并且只考虑左手中微子场 $\nu_{eL}(x)$ ，自由的拉氏密度为（暂时不考虑电子质量）

$$\mathcal{L}_0(x)=\big(\bar{\nu}_{eL}(x),\bar{e}_L(x)\big)(i\gamma^\mu\partial_\mu)\begin{pmatrix}\nu_{eL}(x)\\ e_L(x)\end{pmatrix}+\bar{e}_R(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu)\,e_R(x)$$

这包括了由第一代轻子构成的参与弱相互作用和电磁相互作用的轻子组合。在不考虑相互作用时，我们是不能区分左手电子和左手左手中微子的。也就是说，上面的拉氏密度在一个**整体的** $\mathbf{SU(2)}$ 变换下不变。

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{U} U \begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}, U \in \mathbf{SU(2)} \Rightarrow \mathcal{L}_0(x) \xrightarrow{U} \mathcal{L}_0(x)$$

和色SU(3)对称性的定域化（规范化）类似，如果将这个整体 $\mathbf{SU(2)}$ 对称性定域化为**定域** $\mathbf{SU(2)}$ **对称性**，$U \rightarrow U(x)$

显然自由的拉氏密度在这个定域 $\mathbf{SU(2)}$ 变换下不再是不变的，参照 QCD 的逻辑，我们需要引入 $\mathbf{SU(2)}$ 规范场和流场相互作用，这样一来，拉氏密度应该写成，

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(W_{\mu\nu}(x)W^{\mu\nu}(x)\right) + \left(\bar{\nu}_{eL}(x), \bar{e}_L(x)\right)\left(i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - igW_\mu(x)\right)\right)\begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}$$

$$+ \bar{e}_R(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu)e_R(x)$$

其中，$$W_\mu(x) \equiv W_\mu^a(x)t^a = W_\mu^a(x)\frac{\sigma_a}{2}$$

$$W_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x) - ig[W_\mu(x), W_\nu(x)] \equiv W_{\mu\nu}^a(x)\frac{\sigma_a}{2}$$

显然这个拉氏密度在如下定域 SU(2) 变换下不变：

$$W_\mu(x) \xrightarrow{U(x)} U(x)W_\mu(x)U^+(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^+(x),$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{U(x)} U\begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix},$$

$$e_R(x) \xrightarrow{U(x)} e_R(x)$$

这个定域的 SU(2) 群称作弱同位旋变换群(注意：和同位旋没有关系）。

如果我们再引入组合，
$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$$

$$W_\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

根据这个拉氏密度，我们来看 $\nu - e - W$ 相互作用项

$$\mathcal{L}_{\nu eW} = \frac{g}{\sqrt{2}}[(\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL})W_\mu^- + (\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L)W_\mu^+]$$
$$+\frac{g}{2}(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL} - \bar{e}_L\gamma^\mu e_L)W_\mu^3$$

考虑到 $\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$，上式第一项正好是前面引入的中间玻色子理论的拉氏量（相因子除外）

$$\mathcal{L}_W = \frac{g}{2\sqrt{2}}(J^{+\mu}W_\mu^- + J^{-\mu}W_\mu^+)$$

只要我们要求中间玻色子质量很重，现在就可以回到费米相互作用理论。但从上面的拉氏量还看不到中间玻色子的质量来源机制。另外这还不是一个弱电统一理论，因为电磁相互作用在这里还没有很好地考虑进来。$\boldsymbol{W_\mu^3}$ 并不简单地对应电磁场，因为根据电磁理论的相互作用项，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EM}}=-e(\bar{e}\gamma^\mu e)A_\mu=-e(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L+\bar{e}_R\gamma^\mu e_R)A_\mu$$

电磁场既和左手电子场耦合，又和右手场耦合，但不和中微子场耦合。

到现在为止，我们只考虑了自由拉氏密度的SU(2)整体对称性，实际上，还有两个整体 U(1) 对称性

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} \to e^{i\phi} \begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}, \qquad e_R(x) \to e^{i\phi'} e_R(x)$$

自由拉氏密度在这两个 $U(1)$ 变换下不变。对这两个 $U(1)$ 整体变换进行和电磁场类似的定域化可以进一步得到两个矢量场，对应于两个质量为零的规范玻色子。最简单的情形是，上述变换来自相同的U(1)整体变换，但左右手场的“荷”不同：

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} \to e^{iy_L\phi} \begin{pmatrix} \nu_{eL}(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix}, \qquad e_R(x) \to e^{iy_R\phi} e_R(x)$$

y_R 和 y_L 是对应于右手场和左手场的固定的数，它们是这个统一的 U(1) 群变换的生成元 Y 的量子数，分别称作左手场和右手场的弱超荷（注意：和强作用中的超荷没有关系）。如果把左手费米子和右手电子场写成统一的旋量形式，那么它们在弱超荷 U(1) 变换下的统一变换方式为，

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \xrightarrow{U_Y(1)} e^{i\phi Y} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} = e^{i\phi Y}\psi(x)$$

Y 是一个对角化的矩阵，

$$Y = \begin{pmatrix} y_L & 0 & 0 \\ 0 & y_L & 0 \\ 0 & 0 & y_R \end{pmatrix}$$

对这个 U(1) 整体对称性规范化将引入一个新的 Abelian 规范场 $B_\mu(x)$，其表现形式和电磁场相同，

$$B_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x)$$

那么，总的拉氏密度就写出来了，

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} Tr(W_{\mu\nu}(x)W^{\mu\nu}(x)) - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x)) + \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu D_\mu(x)\psi(x)$$

$$D_\mu(x) = \left(\partial_\mu - igW_\mu^a(x)T_a - ig'\,B_\mu(x)Y\right)$$

其中T和Y是$\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{U}(1)$的生成元： $T_a=\begin{pmatrix}\sigma_a/2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

它们满足对易关系：

$$[T_a,T_b]=i\varepsilon_{abc}T_c,$$
$$[T_a,Y]=0, a=1,2,3$$

注意，规范群是两个群的直乘，在协变导数中有两个耦合常数，g和g'。

根据这个拉氏密度，完整的耦合项可以写成

$$\mathcal{L}_{int}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\left(gW_{\mu}^{a}T^{a}+g'B_{\mu}Y\right)\psi$$
$$=\frac{g}{\sqrt{2}}\left[(\bar{e}_L\gamma^{\mu}\nu_{eL})W_{\mu}^{-}+(\bar{\nu}_{eL}\gamma^{\mu}e_L)W_{\mu}^{+}\right]$$
$$+\frac{1}{2}(gW_{\mu}^{3}+2y_Lg'B_{\mu})\bar{\nu}_{eL}\gamma^{\mu}\nu_{eL}$$
$$-\frac{1}{2}(gW_{\mu}^{3}-2y_Lg'B_{\mu})\bar{e}_L\gamma^{\mu}e_L+y_Rg'B_{\mu}\bar{e}_R\gamma^{\mu}e_R$$

y_L 和 y_R 的选取有一定的任意性，传统上取 $\boxed{y_L = -\frac{1}{2}}$

显然，W_μ 场和 B_μ 场都耦合到左手中微子场，而且光子场还没有明显出现，因此我们选取正交变换：

$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu,$$
$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu,$$

其中，

$$\boxed{\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}}$$

θ_W 称作 Weinberg 角。这样，相互作用项可以写成，

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{\sqrt{2}}\left[(\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL})W_\mu^- + (\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L)W_\mu^+\right]$$
$$+\sqrt{g^2+g'^2}\left(\frac{1}{2}\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL} - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu e_L - \sin^2\theta_W\left(-\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + y_R\bar{e}_R\gamma^\mu e_R\right)\right)Z_\mu$$
$$+\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left(-\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + y_R\bar{e}_R\gamma^\mu e_R\right)A_\mu$$

如果令 $\boxed{y_R = -1,}$ $e = \dfrac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$

我们就得到了电磁场的正确的耦合形式，而且有以下关系：

$$\boxed{e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = \sqrt{g^2 + g'^2}\sin\theta_W\cos\theta_W}$$

于是，拉氏密度的相互作用项可以写成更紧致的形式：

$$\mathcal{L}_{int} = e\left\{J^\mu_{em}A_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\left(\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_{eL}W^-_\mu + \bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L W^+_\mu\right) + \frac{1}{\sin\theta_W\cos\theta_W}J^\mu_{NC}Z_\mu\right\}$$

其中，

$$J^\mu_{NC} = \frac{1}{2}\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu\nu_{eL} - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu e_L - \sin^2\theta_W J^\mu_{em}, \qquad J^\mu_{em} = -\bar{e}\gamma^\mu e$$

就是第一代轻子的中性弱流（neutral current）的表达式（当费米子种类确定后，中性流由Weinberg角唯一确定）。

到此为止，我们找到了可以统一描述电磁相互作用和弱相互作用的规范理论。这实际上也是1961年 Glashow 得到的结果。但这离电弱统一理论还差一步——质量去哪里了?

1967年和1968年，Weinberg 和 Salam 引入 Higgs 机制完成了这个理论。

2. Higgs场和对称性自发破缺机制

为了解决电弱统一理论中的质量来源为题，Weinberg 和 Salam 引入了基本标量场——Higgs 场。基本标量场的最简单的形式是二分量的复场

$$\boldsymbol{\Phi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} : \boldsymbol{\Phi}(x) \xrightarrow{U \in \mathrm{SU}(2)} U\boldsymbol{\Phi}(x), \boldsymbol{\Phi}(x) \xrightarrow{\mathrm{U}(1)} e^{i\theta y_H}\boldsymbol{\Phi}(x)$$

它是 $SU(2)$ 的二重态，弱超荷为 y_H 。它的拉氏密度可以取如下形式

$$\mathcal{L}_{\Phi}(x) = \partial_\mu \Phi^+(x)\partial^\mu \Phi(x) - V(\Phi),$$

满足整体SU(2)变换不变，同时保证可重整性的势能形式只能是

$$V(\Phi) = -\mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2, (\mu^2 > 0, \lambda > 0)$$

这个体系的基态——能量最低态应该是动能为零，势能取极小的状态，也就是说基态时场量是一个常数，

$$\Phi(x) = \Phi_0 = \text{const.}$$

令 $\frac{\rho}{\sqrt{2}} = \sqrt{\Phi_0^+\Phi_0}$ ，则势能可以写作

$$V(\Phi_0) = -\frac{1}{2}\mu^2\rho^2 + \frac{1}{4}\lambda\rho^4$$

基态由如下条件给出：

$$\left.\frac{dV}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0} = 0 \Rightarrow \rho_0 = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

实际上我们现在只确定了基态常量的模，而其在内部 SU(2) 空间的取向并不确定。从数学上来说，任意的满足基态条件的真空场都可以通过如下形式生成，

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = e^{i\phi^a \sigma_a/2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

显然，基本标量场的基态是高度简并的，因为上面的群变换参量是连续的，但是，如果取定任意一个基态（场），如

$$\boldsymbol{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

那么，这个基态在 SU(2) 变换下就不再是不变的了，也就是说 SU(2) 对称性就破缺了，这种对称性的破缺就是对称性的自发破缺。

对称性自发破缺的含义可以概括为：

尽管体系的拉氏量由某种对称性，但由于特定真空态的选取而造成对称性的破缺，这种破缺机制就称为对称性自发破缺。

到此为止，我们讨论的只是经典场的情形，如果转到量子场论，经典场的基态在最低阶近似下对应量子场的真空期望值，即

$$\langle 0|\boldsymbol{\Phi}(x)|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho_0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

引入真空减除后的新的标量场，则

$$\boldsymbol{\Phi}'(x) = \boldsymbol{\Phi}(x) - \langle 0|\boldsymbol{\Phi}(x)|0\rangle,$$

$$\langle 0|\boldsymbol{\Phi}'(x)|0\rangle = 0$$

前面讨论的是整体 $\mathbf{SU(2)}$ 对称性的自发破缺机制。电弱统一的 $\mathbf{SU(2)\times U(1)}$ 对称性是规范对称性，如果将这种机制推广到规范对称性的破缺，相应的标量场拉氏密度中的导数应该换成协变导数，

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu^a\sigma_a/2 - ig'B_\mu y_H$$

相应地，拉氏密度为

$$\mathcal{L}_\Phi(x) = (D_\mu\Phi(x))^+ D^\mu\Phi(x) - V(\Phi),$$

如果Higgs场的弱超荷取 $y_H = y_L - y_R = 1/2$ (Yukawa耦合弱超荷守恒，见后），并且将 $\Phi(x) = \Phi'(x) + \langle 0|\Phi(x)|0\rangle$ 带入，得到 Higgs场 的真空期望值值的贡献为

$$\langle 0|\Phi^+|0\rangle(igW_\mu^a\sigma_a/2 + ig'B_\mu/2)(-igW_\mu^a\sigma_a/2 - ig'B_\mu/2)\langle 0|\Phi|0\rangle$$

$$= \frac{g^2\rho_0^2}{4}W_\mu^+W^{-\mu} + \frac{1}{2}\frac{(g^2+g'^2)\rho_0^2}{4}Z_\mu Z^\mu$$

可以看出，由于Higgs场的真空期望值不等于零，在拉氏密度中出现了$W_\mu^\pm$，Z_μ场的质量项，由此可以直接读出$W^\pm$、Z粒子的质量，

$$m_W^2=\frac{g^2\rho_0^2}{4}=\frac{e^2\rho_0^2}{4\sin^2\theta_W},$$

$$m_Z^2=\frac{(g^2+g'^2)\rho_0^2}{4}=\frac{e^2\rho_0^2}{4\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W}.$$

$$\boxed{\frac{m_W^2}{m_Z^2\cos^2\theta_W}=1}$$

显然，电磁场并没有获得质量，所以电磁的U(1)规范对称性仍然保持。

解决了中间玻色子的质量来源问题，我们来看费米子的质量来源：

Higgs场也可以和费米子场耦合。从理论的可重整性的要求，并且保证规范不变性，它们的耦合方式只能是，

$$\boxed{L_{Yukawa}=-f_e\bar{e}_R\Phi^+\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}+h.c.}$$

对费米子场的相位的约定可以保证耦合系数为正数，这就是Yukawa耦合形式。

这个耦合形式显然是 SU(2) 不变的，要保证弱超荷 U(1) 变换不变，则要求，

$$y_H = y_L - y_R = 1/2$$

Higgs 场的正空期望值的贡献为 （$\Phi^+ = \left(0, \frac{\rho_0}{\sqrt{2}}\right)$），

$$-f_e\left[\bar{e}_R\langle 0|\Phi^+|0\rangle\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix} + h.c.\right] = -\frac{f_e\rho_0}{\sqrt{2}}(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) = -\frac{f_e\rho_0}{\sqrt{2}}\bar{e}e$$

所以，可以得到电子的质量：

$$\boxed{m_e = \frac{f_e\rho_0}{\sqrt{2}}}$$

类似地，Higgs场的真空期望值也可以给出Higgs粒子的质量。

总能找到一个定域SU(2)变换，使得，

$$\boldsymbol{\Phi}(x) \xrightarrow{U(x)\in SU(2)} U(x)\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

这相当于在量子化时取幺正规范(unitary gauge)，那么， $\langle 0|\rho(x)|0\rangle = \rho_0$

引入真空减除场， $\rho'(x) = \rho(x) - \langle 0|\rho(x)|0\rangle = \rho(x) - \rho_0$

这样在拉氏密度中的势能项就写为，

$$-\mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2 = \frac{1}{2}\left(2\lambda\rho_0^2\right)\rho'^2 + \cdots$$

Higgs粒子的质量就是

$$\boxed{m_{\rho'}{}^2 = 2\lambda\rho_0^2}$$

3. 小结一下

a) 引入弱同位旋 SU(2) 对称性和弱超荷 U(1) 对称性。

b) 左手费米子构成弱同位旋二重态，右手费米子是弱同位旋单态。

c) 将弱同位旋和弱超荷构成的整体 $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ 对称性定域规范化，建立规范理论。在此过程中引入了 SU(2) 规范场 $W_\mu^a(x)$ 和 U(1) 规范场 $B_\mu(x)$，相应的规范耦合常数为 g 和 g'。

d) 通过两个正交变换： $W_\mu^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1\mp iW_\mu^2)$, 以及

$$Z_\mu=\cos\theta_W W_\mu^3-\sin\theta_W B_\mu,$$

$$A_\mu=\sin\theta_W W_\mu^3+\cos\theta_W B_\mu,$$

得到新的规范场 $W_\mu^\pm(x), Z_\mu(x), A_\mu(x)$，分别对应四种规范玻色子： $W^\pm, Z^0, \gamma$。

e) 在此过程中引入了一个量——Weinberg 角，定义为：

$$\sin\theta_W=\frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}},\qquad \cos\theta_W=\frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$$

f) 由此得到电弱统一理论中的流场作用项：

$$\mathcal{L}_I = e\left\{J^{\mu}_{\mathrm{em}} A_{\mu} + \frac{1}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\left(\bar{e}_L \gamma^{\mu} \nu_{eL} W^{-}_{\mu} + \bar{\nu}_{eL}\gamma^{\mu} e_L W^{+}_{\mu}\right) + \frac{1}{\sin\theta_W \cos\theta_W} J^{\mu}_{NC} Z_{\mu}\right\}$$

预言了中性弱流的存在：

$$J^{\mu}_{NC} = \frac{1}{2}\bar{\nu}_{eL}\gamma^{\mu}\nu_{eL} - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma^{\mu} e_L - \sin^2\theta_W J^{\mu}_{\mathrm{em}}$$

$$\left(J^{\mu}_{em} = -\bar{e}\gamma^{\mu} e\right)$$

g) 对比电磁相互作用，可以得到关系：

$$e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = \sqrt{g^2 + g'^2}\sin\theta_W \cos\theta_W$$

h) 电磁相互作用顶点： $-ieQ\gamma_\mu$

带电弱流相互作用顶点： $i\frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W}\gamma_\mu(1-\gamma_5)$

中性弱流相互作用顶点： $i\frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}(\gamma_\mu(1-\gamma_5)T_3-\sin^2\theta_W\,Q\gamma_\mu)$

j) 为了解决质量来源问题，引入对称性自发破缺的Higgs机制。在引入Higgs 机制以前，理论还是一个无质量的理论。但规范玻色子质量项的存在必然破坏规范不变性，因此需要对称性破缺机制。

k) 满足要求的最简单的Higgs 场是一个SU(2)二重态的复场，并且具有自相互作用势

$$V(\Phi)=-\mu^2\Phi^+\Phi+\lambda(\Phi^+\Phi)^2,(\mu^2>0,\lambda>0)$$

h) 在这个标量场理论中，标量场的真空期望值不等于0，

$$\langle 0|\Phi(x)|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_0 = \sqrt{\mu^2/\lambda}$$

i) 考虑规范对称性后，标量场动能项中的协变导数项由于真空期望值的存在给出规范玻色子 $W^{\pm}, Z^0$ 的质量，电磁场仍是零质量场。

$$\left.\begin{aligned} m_W^2 &= \frac{g^2\rho_0^2}{4} = \frac{e^2\rho_0^2}{4\sin^2\theta_W}, \\ m_Z^2 &= \frac{(g^2+g'^2)\rho_0^2}{4} = \frac{e^2\rho_0^2}{4\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W}. \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\frac{m_W^2}{m_Z^2\cos^2\theta_W} = 1}$$

j) 费米子质量由Higgs场和费米子场的Yukawa耦合形式给出

$$-f_e\left[\bar{e}_R\langle 0|\Phi^+|0\rangle\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix} + h.c.\right] = -\frac{f_e\rho_0}{\sqrt{2}}(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_R e_L) = -\frac{f_e\rho_0}{\sqrt{2}}\bar{e}e$$

$$\boxed{L_{Yukawa} = -f_e\bar{e}_R\Phi^+\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix} + h.c.} \qquad \boxed{m_e = \frac{f_e\rho_0}{\sqrt{2}}}$$

l) Higgs粒子的质量由Higgs场的真空期望值通过自耦合耦合作用给出，

$$m_{\rho'}{}^2 = 2\lambda\rho_0^2$$

m) $\mathbf{SU(2)} \otimes \mathbf{U(1)}$ 电弱统一规范对称性自发破缺以后还剩下一个由生成元

$$\boldsymbol{Q = T_3 + Y}$$

生成的 $\boldsymbol{U}(1)$ 规范对称性，这就是电磁U(1)对称性，

$$e^{i\theta(\sigma_3/2+y_H)}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0/\sqrt{2} \end{pmatrix} = e^{i\theta\left(-\frac{1}{2}+y_H\right)}\begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

即真空态在此变换下仍然不变。

n) 最后写出只有第一代轻子的电弱统一理论的包含Higgs场的拉氏密度，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Tr(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + (\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L)i\gamma^\mu D^{(L)}{}_\mu \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$$
$$+\bar{e}_R i\gamma^\mu D_\mu^{(R)} e_R - f_e\left(\bar{e}_R \Phi^+ \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L)\Phi e_R\right)$$
$$+\left(D_\mu^{(H)}\Phi\right)^+ D^{(H),\mu}\Phi - \mu^2\Phi^+\Phi + \lambda(\Phi^+\Phi)^2$$

其中，协变导数分别为

$$\boxed{\begin{aligned} D_\mu^{(L)} &= \partial_\mu - igW_\mu^a\sigma_a/2 + ig'B_\mu/2, \\ D_\mu^{(R)} &= \partial_\mu + ig'B_\mu, \\ D_\mu^{(H)} &= \partial_\mu - igW_\mu^a\sigma_a/2 - ig'B_\mu/2 \end{aligned}}$$

在拉氏密度中有5个独立的参数： $\boxed{g, g', f_e, \mu^2, \lambda}$

o) 在考虑对称性自发破缺后，这五个独立参数可以用五个物理可观测量表示

$$\boxed{e, \sin\theta_W, m_e, m_W, m_\rho,}$$

四、电弱统一理论向三代轻子和三代夸克的扩充

轻子和夸克都参与弱作用，因此前面的理论自然要进行扩充。

扩充的一个总原则是：右手费米子是 SU(2) 的单态，左手费米子可以组织成弱同位旋二重态。费米的弱超荷的取值有一定任意性，在这里主要参照费米子的电荷，按照 $Q = T_3 + Y$ 来选取。前面的表格给出了所有费米子的弱超荷和弱同位旋以及电荷量子数。

			T	T_3	Y	Q
$\begin{pmatrix}\nu_{eL}\\ e_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\mu L}\\ \mu_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\nu_{\tau L}\\ \tau_L\end{pmatrix}$	1/2 1/2	1/2 −1/2	−1/2 −1/2	0 −1
e_R	μ_R	τ_R	0	0	−1	−1
$\begin{pmatrix}u_L\\ d'_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}c_L\\ s'_L\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}t_L\\ b'_L\end{pmatrix}$	1/2 1/2	1/2 −1/2	1/6 1/6	2/3 −1/3
u_R	c_R	t_R	0	0	2/3	2/3
d_R	s_R	b_R	0	0	−1/3	−1/3

对于三代轻子，扩充是直接的: 我们已经知道了三代轻子弱作用的普适性，而且它们的电磁作用形式也相同，在引入Higgs以前，代与代之间是完全相同的，带电轻子质量的不同主要体现在Yukawa耦合常数的不同。

对于三代夸克，则由于代与代之间的混合问题，情况稍微复杂一些。复杂性主要体现在弱作用本征态和质量本征态（强作用本征态）之间的混合矩阵。在电弱统一理论中混合矩阵是通过Yukawa耦合引入的，我们在后面专门进行讨论。当扩充到三代夸克和三代轻子情形时，将带来更多新的参数——不同费米子的Yukawa耦合常数。

总地来说，共有九个Yukawa耦合常数，两个规范耦合常数，两个标量场参数和四个CKM矩阵参数，共有17个自由参数——这是一个基本理论吗?