

第四章 强子与强子间相互作用

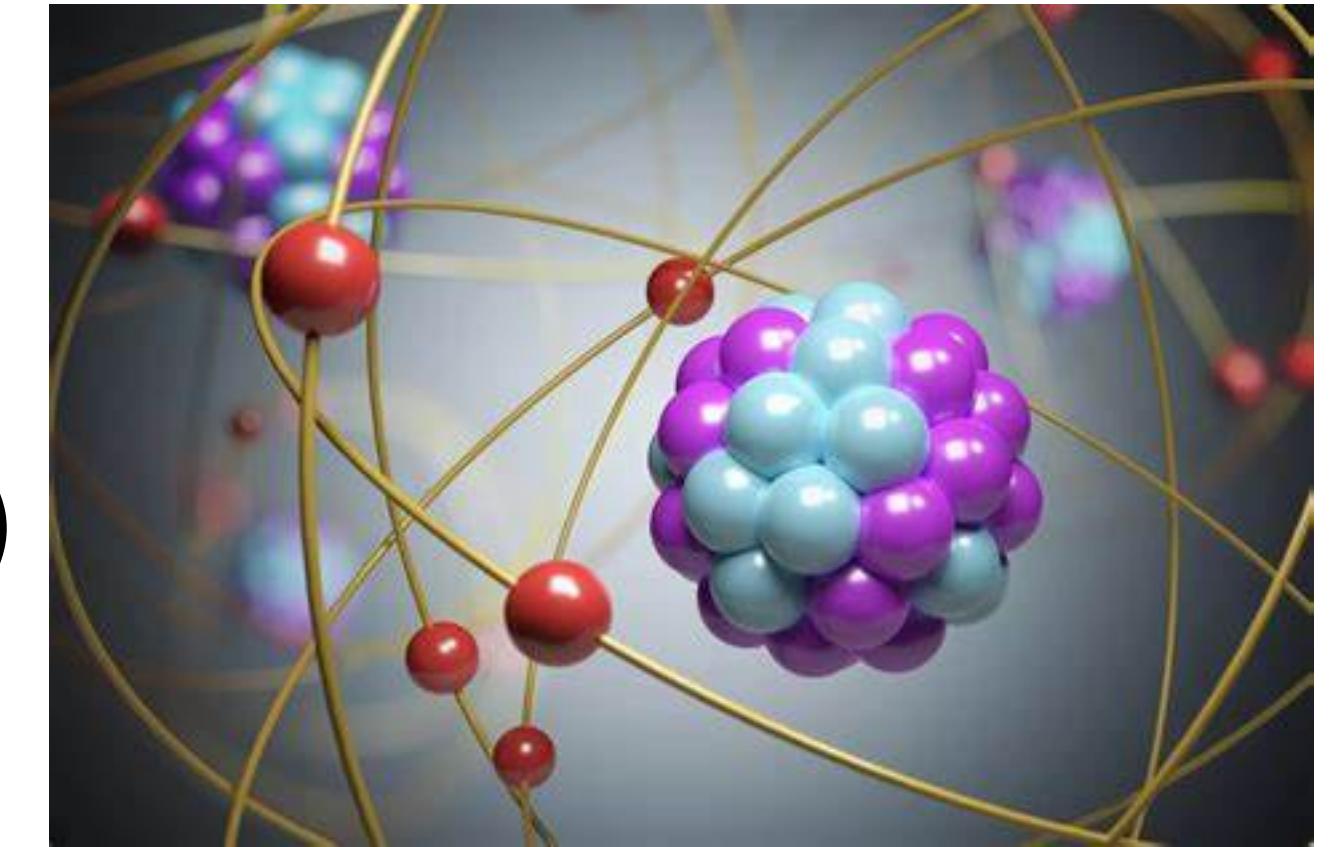
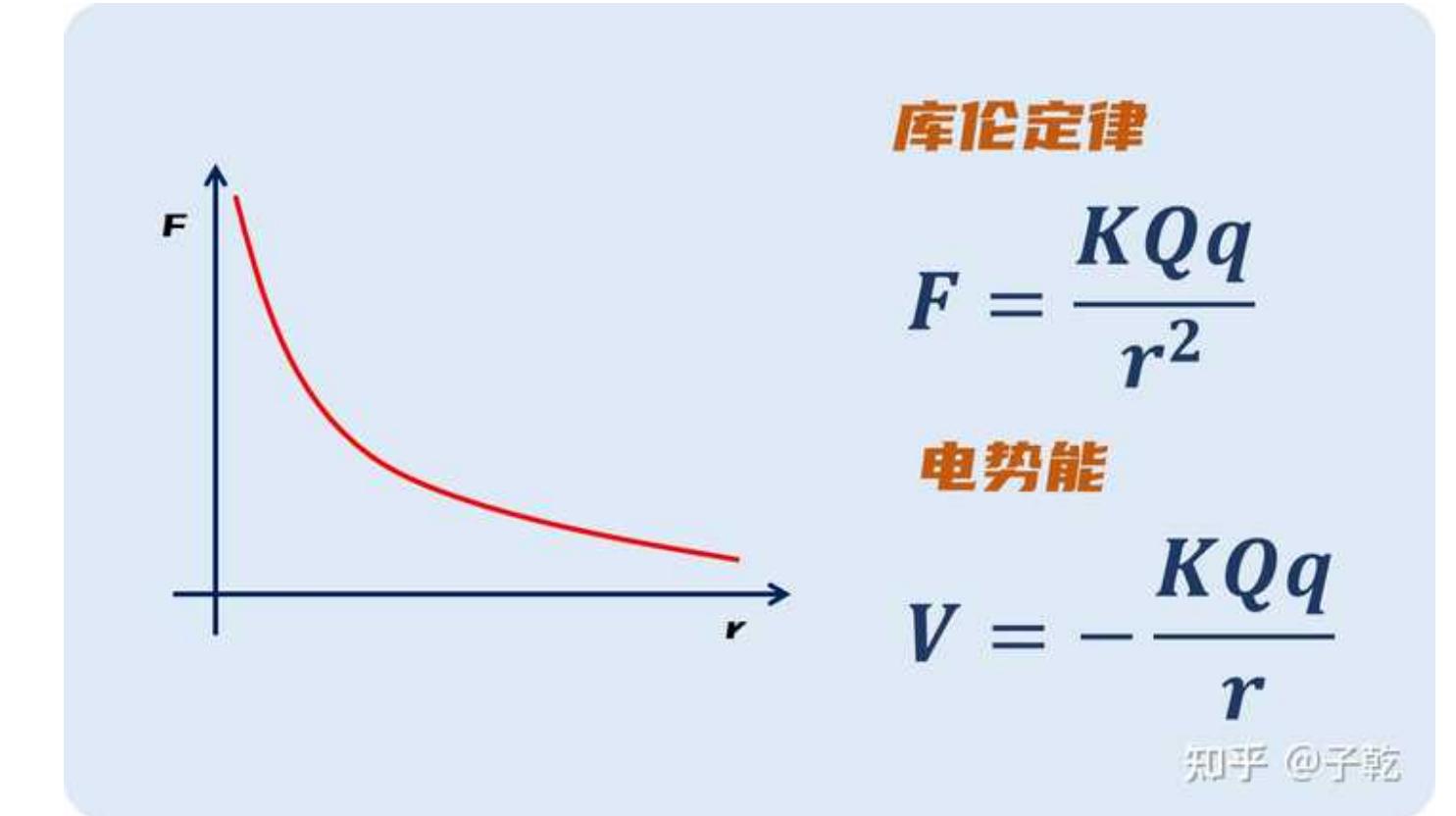
第一节 核力的汤川势

核力的特点

某种极强的相互作用力束缚了核子（质子、中子）；

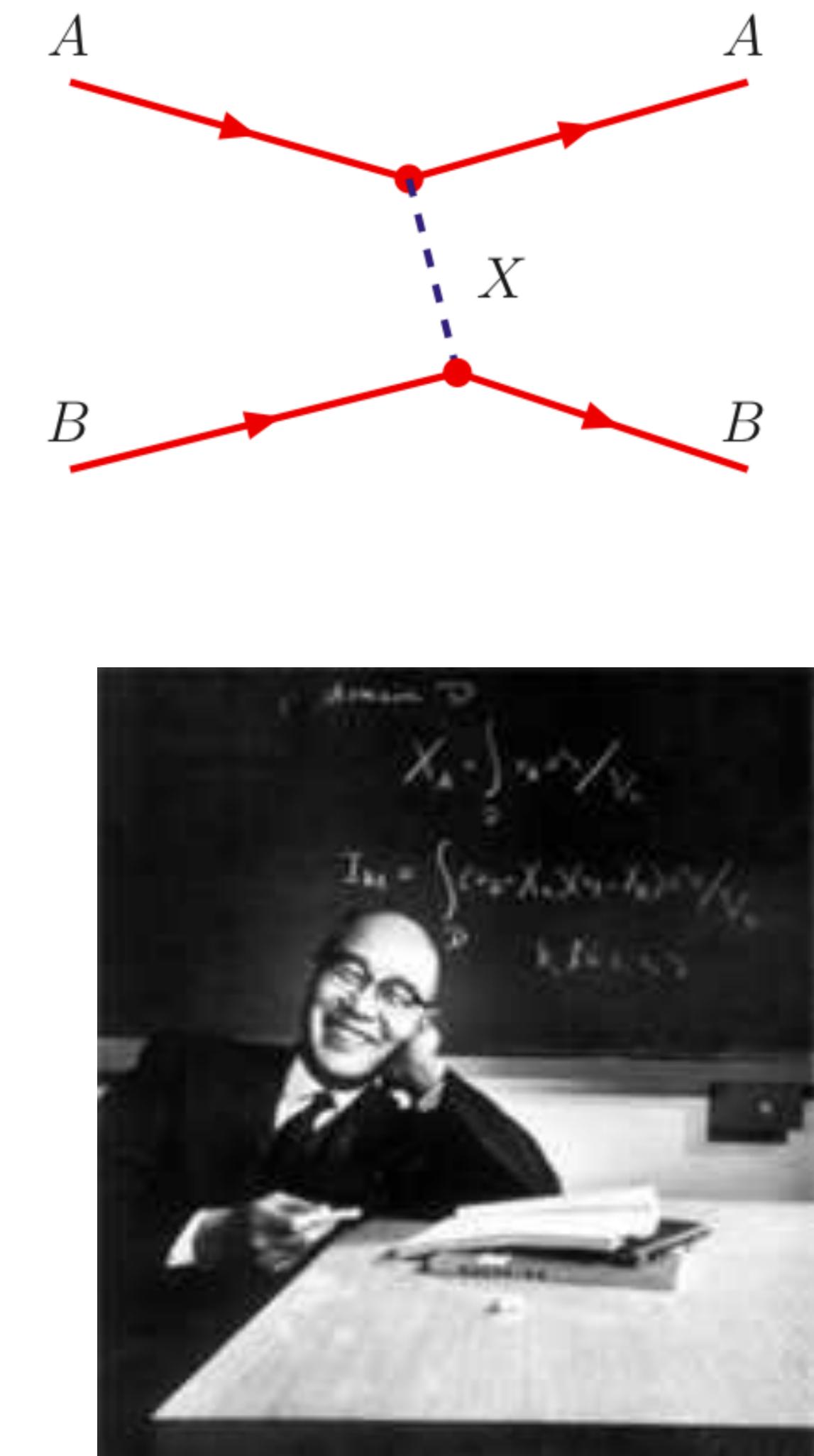
核子之间并没有如此强的相互作用。

1. 力程短, $\sim 10^{-15} m$; 作用强、快: $\sim 10^{-23} s$ (核反应之艰难)
2. 核力具有电荷无关性;
3. 核力不仅具有中心力的成分,也具有与自旋相关的非中心力成分;
4. 一个核子只与其近旁的少数几个核子发生作用,称之为核力的饱和性。



关于 π 介子的理论预言

- 1935年,汤川秀树 (Hideki Yukawa, 1907-1981) 发表了解释核内强相互作用的介子理论。
- 汤川秀树把核力场与电磁场做了类比,假设核子间存在由交换 π 介子而产生的核力场。预言了 π 介子的存在,并估算了其质量, ($m_\pi \approx 275 m_e$)。获得了1949年诺贝尔物理奖。(第一个获得诺贝尔奖的日本人)
- 我们知道,荷电粒子之间的电磁相互作用是长程的,是通过交换零质量的光子产生的。考虑到核力的短程性,两个强子A, B之间可能通过交换一个重的玻色子X产生核力



- 根据能量-动量不确定性关系，我们可以估算在被重新吸收以前，重X玻色子所能传播的最远距离。
- 因为能量的不确定度为 $\Delta E \geq m_X$, 如果 ΔE 存在的时间间隔为 Δt , 那么根据能量-动量不确定性关系, 有 $\Delta t \approx 1/\Delta E$ (自然单位制 $\hbar = 1$) , 所以X玻色子传播的距离, 即这种相互作用的力程, 为 $R \approx 1/m_X$ 。
- 我们已经知道核力被局限在原子核的范围内, 力程是 $10^{-15}m$, 所以汤川秀树通过上面的公式反推出传递核力的中间玻色子质量是100 MeV的量级。
- 1947年鲍威尔在宇宙线中发现了 π^\pm ; 1950年发现了 π^0 。
- 目前描写强相互作用的**最基础理论**是量子色动力学 (QCD, Quantum ChromoDynamics) , 现在, 人们用夸克之间的QCD强相互作用的剩余作用来解释核子之间的核力。

π 介子性质: $J^P = 0^-$, 质标介子

- 有3种 π 介子: π^+ , π^0 , π^-
- π^+ 介子的质量可以通过测量 π^+ 介子在磁场中的轨迹确定其动量, 另外测量 π^+ 介子在介质中的电离或射程以确定其速度或能量后, 计算出其质量。
- $m_{\pi^\pm} = 137 \text{ MeV}$, $\tau_{\pi^\pm} = 2.60 \times 10^{-8} \text{ s}$
- $Br(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu) = 99.99 \%$
- 对 π^0 介子质量的测量较为复杂, 需要通过测量其衰变末态两个光子的能量来获得。
- $m_{\pi^0} = 135 \text{ MeV}$, $\tau_{\pi^0} = 8.4 \times 10^{-17} \text{ s}$
- $Br(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 98.8 \%$, 电磁相互作用, 寿命很短。

汤川势

- 粒子产生湮灭：必须使用相对论性KG方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi - m^2 \psi$$

- 考虑静态场方程

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = m^2 \psi$$

- 其解为

$$\psi(r) = \frac{g_0}{r} \exp(-mr)$$

- 对比库伦势

$$\psi(r) = \frac{g_c}{r}$$

“我觉得，如果一个人想得到创造力，重要的一点就是要全力以赴埋头干一件事，而不管那些乱七八糟的任务和那些日常生活要求我们注意的信息洪水。换言之，需要的就是那种不达目的决不罢休的韧性。”

——汤川秀树



第二节 同位旋

同位旋概念的引入

同位旋是粒子物理学中最早遇到的重要的内部对称性，这个概念首先是在实验的启示下提出的。我们来看质子和中子的性质：

	质量(MeV)	自旋(J)	电荷(Q)
质子(p)	938.27203(8)	1/2	1
中子(n)	939.56536(8)	1/2	0

$$\frac{m_n - m_p}{m_p} = 0.00138$$

质子和中子都有很强的强相互作用，它们的强相互作用性质相似，质量相差很小，但是电磁相互作用和弱相互作用性质不同。

镜象核

- 两种原子核,其核子总数一样, 而一个核的中子数等于另一个核的质子数
- “镜象核”之间的能级分布相似
- “镜象核”的基态结合能相差不大, 而且结合能的差值基本上等于“镜象核”的库仑位能差

表 4.1 一些“镜象核”的基态结合能.

镜象核	${}_1H^3$ 和 ${}_2He^3$	${}_3Li^7$ 和 ${}_4Be^7$	${}_6C^{14}$ 和 ${}_8O^{14}$
结合能 (MeV)	8.33, 7.60	38.96, 37.33	104.70, 98.14
结合能差 (MeV)	0.73	1.65	6.55
库仑位能差 (MeV)	0.8	1.8	6.7

类似的还有 π 介子： π 介子有三种荷电状态 π^+ , π^0 , π^- , 分别带 $Q = +1, 0, -1$ 电子电荷, 它们的强相互作用也相似。

	质量(MeV)	自旋(J)	电荷(Q)
π^+	139.57018(35)	0	1
π^0	134.97660(60)	0	0
π^-	139.57018(35)	0	-1

由于电磁相互作用和弱相互作用比强相互作用弱很多, 因此相对于后者可以看作微扰修正。根据大量的实验的总结, 可以有以下设想:

- 质子p和中子n, 是同一种“核子” (nucleon) 的不同带电状态。 π^+, π^0, π^- , 是同一种 π 介子的不同带电状态。
- 在量子力学中我们学过, 电子的自旋为 $1/2$, 如果在空间中选取一个特定的方向z, 则自旋在这个方向的投影 (z分量) 为 $+1/2$ 或 $-1/2$ 。
- 类似地, 也可以认为核子具有某种类似于粒子自旋的“旋”, 称为“同位旋” (isospin), 它是和一种抽象复空间中幺正幺模变换的生成元构成的。
- 粒子物理中对这类反映粒子内禀对称性的抽象空间称为内部空间以和普通的空间相区别。

和同位旋相联系的内部空间称为**同位旋空间**。实验显示的各种规律性和特征可以概括为：

- 可以引入一个内部二维抽象复空间上的SU(2)变换群，**强相互作用在这个内部空间的SU(2)群变换下具有不变性**，相应的三个生成元构成一个具有三个分量的抽象空间中的矢量
- 考虑到这个内部对称性的数学结构和自旋相似，**称这个SU(2)对称性为同位旋对称性**。
- 与自旋对应的这个量称为**同位旋**，它在强相互作用下守恒。
- 由于同位旋把不同电荷的粒子统一起来，因此可以规定 I_3 的本征态也就是电荷取确定值的态。
- 同一同位旋多重态中不同态电荷的改变和同位旋第三分量的改变相等：
$$\Delta Q = \Delta I_3$$

如果一种粒子 π 的同位旋为1，则它在z方向的投影可以有+1, 0, -1 三个取值。

- 类似于角动量: $|JM\rangle$, $M = (-J), (-J+1), \dots, (J-1), J$
- 可以推广到任意同位旋系统: 同位旋为 I 的态有 $2I + 1$ 个态
 $|II_3\rangle$, $I_3 = (-I), (-I+1), \dots, (I-1), I$
- 粒子物理学中通常用 I 来标记同位旋。在同位旋空间里也可选定一个特殊的方向, 通常称为第三方向。同位旋 I 在第三方向上的投影可以有 $2I + 1$ 个取值。
- 自旋是和空间中的旋转对应的某种角动量, 用群论的语言来说, 自旋角动量是由空间三个方向转动的生成元所构成。类似地, 同位旋也是和一种抽象空间中的旋转对应的某种“角动量”。
- 它是强相互作用下的守恒量, 所有的强子都具有确定的同位旋。

角动量 (\mathbf{J})	同位旋 (\mathbf{I})
三维空间	抽象空间 (二维复空间)
SO(3)群	SU(2)群
在特定空间方向(z)上的分量 取值为 $m = -J, -J + 1, \boxed{?}, J - 1, J$	在同位旋第三方向上的分量 取值为 $I_3 = -I, -I + 1, \boxed{?}, I - 1, I$
本征态表示为 $ Jm\rangle$	本征态表示为 $ I_{I_3}\rangle$
空间转动不变系统的守恒量	同位旋空间转动不变性对应的守恒量
所有相互作用守恒	强相互作用的守恒量

重子八重态 $J^P = \frac{1}{2}^+$

粒子	J	S	b
p	1/2	0	1
n	1/2	0	1
Σ^+	1/2	-1	1
Σ^0	1/2	-1	1
Σ^-	1/2	-1	1
Ξ^0	1/2	-2	1
Ξ^-	1/2	-2	1
Λ	1/2	-1	1

$$\begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{bmatrix}$$

介子八重态 $J^P = 0^-$

粒子	J	S	b
K^+	0	1	0
K^0	0	1	0
π^+	0	0	0
π^0	0	0	0
π^-	0	0	0
\bar{K}^0	0	-1	0
K^-	0	-1	0
η_8	0	0	0

$$\begin{bmatrix} K^+ \\ K^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{bmatrix}$$

同位旋和自旋在数学上是相同的，都是SU(2)群的不可约表示。（角动量是SO(3)群）

两个同位旋的耦合和两个角动量的耦合的数学关系也是相同的。关于角动量耦合的仔细讨论会在高等量子力学和群论中讲述，这里只介绍常用的结论：

- 两个角动量耦合： $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$
- 总角动量 J 的可能取值为：
$$J = |J_1 - J_2|, |J_1 - J_2| + 1, \dots, J_1 + J_2 - 1, J_1 + J_2$$
- 两个角动量及其总角动量的本征态： $|j_1 m_1\rangle, |j_2 m_2\rangle, |jm\rangle$
- 总角动量的第三分量的取值： $m = m_1 + m_2$

$$\text{令: } |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

$$\text{则有 } |jm\rangle = \sum_{m_1} \langle j_1 j_2 m_1 m - m_1 | jm \rangle |j_1 j_2 m_1 m - m_1\rangle$$

$$\text{及 } |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum_{j=-|j_1-j_2|, m=m_1+m_2}^{|j_1+j_2|} \langle jm | j_1 j_2 m_1 m_2 \rangle |jm\rangle$$

Clebsch-Gordan 系数(C.G.系数) (实数) $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle$

46. Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and d Functions

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$. Notation:

$1/2 \times 1/2$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & +1/2 & 1/2-1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$2 \times 1/2$	$\begin{bmatrix} 5/2 & 5/2 & 3/2 \\ +2 & +1/2 & 1 & +3/2+3/2 \\ +2-1/2 & 1/2 & 4/5 & 5/2-3/2 \\ +1+1/2 & 4/5-1/5 & 1/2+1/2 & -1/2-1/2 \\ -1/2-1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$
$1 \times 1/2$	$\begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ +3/2 & 3/2-1/2 & 1/2 \\ +1+1/2 & 1/2 & 1/2+1/2 \\ +1-1/2 & 2/3 & 3/2-1/2 \\ -1-1/2 & 1/3-2/3 & 3/2 \end{bmatrix}$	$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 5/2 & 3/2 \\ 0+1/2 & 3/5-2/5 & -1/2-1/2 \\ 0-1/2 & 3/5-2/5 & -1+1/2 \\ 2/5-3/5 & -3/2-3/2 & 1 \end{bmatrix}$
2×1	$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ +3 & 3-2 & 2 \\ +2+1 & 1 & 2 \\ +2-1 & 0 & 1/2 \\ +1+1 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$	$Y_1^2 = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$	$Y_2^1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$	$\begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 5/2 & 3/2 \\ -2+1/2 & 1/5-4/5 & -5/2 & 1 \\ -1-1/2 & 1/5-4/5 & -2-1/2 & 1 \\ 2/5-3/5 & -3/2-3/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
			$3/2 \times 1/2$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ +3/2 & +1/2 & 1 & +1+1 \\ +3/2-1/2 & 1/4 & 3/4 & 2-1 \\ +1/2+1/2 & 3/4-1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Notation:

J	J	\dots
M	M	\dots
m_1	m_2	Coefficients
m_1	m_2	
\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^m \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & \vdots \\ -1 & 0 & 1/2-1/2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 1/2 & \vdots \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 JM \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 JM \rangle$$

$$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$$

$$2 \times 3/2 \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ +3/2 & +3/2 & 2 \\ +1/2 & 1 & -2 \\ +3/2+3/2 & 1 & +1+1 \\ +1/2-3/2 & 1/2 & -1/2 \\ +3/2+1/2 & 1/5 & 3/10 \\ +1/2-1/2 & 3/5 & 0-2/5 \\ -1/2-3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$d_{0,0}^1 = \cos \theta \quad d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2} \quad d_{1,1}^{1,-1} = \frac{1+\cos \theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2} \quad d_{1,0}^{1,0} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1,-1}^{1,-1} = \frac{1-\cos \theta}{2}$$

$$3 \times 2 \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ +4 & 3 \\ +2+3/2 & 1 & 5/2+5/2 \\ +2+3/2 & 7/2 & 5/2 \\ +2+3/2 & 7/2-5/2 & 3/2 \\ +2+1/2 & 3/7 & 4/7 \\ +1+3/2 & 4/7 & 3/7 \\ +1+3/2 & 4/7-3/7 & 3/2 \\ +1+3/2 & 0 & 1/2 \\ +0+3/2 & 2/7 & 18/35 \\ +0+3/2 & 2/7-18/35 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$d_{2 \times 2}^j = \frac{1+\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,3/2}^j = \frac{1+\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,1/2}^j = -\sqrt{3} \frac{1+\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-1/2}^j = \sqrt{3} \frac{1-\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-3/2}^j = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,1/2}^j = \frac{3\cos \theta-1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^j = -\frac{3\cos \theta+1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{2,2}^j = \left(\frac{1+\cos \theta}{2}\right)^2$$

$$d_{2,1}^j = -\frac{1+\cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,0}^j = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$$

$$d_{2,-1}^j = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,-2}^j = \left(\frac{1-\cos \theta}{2}\right)^2$$

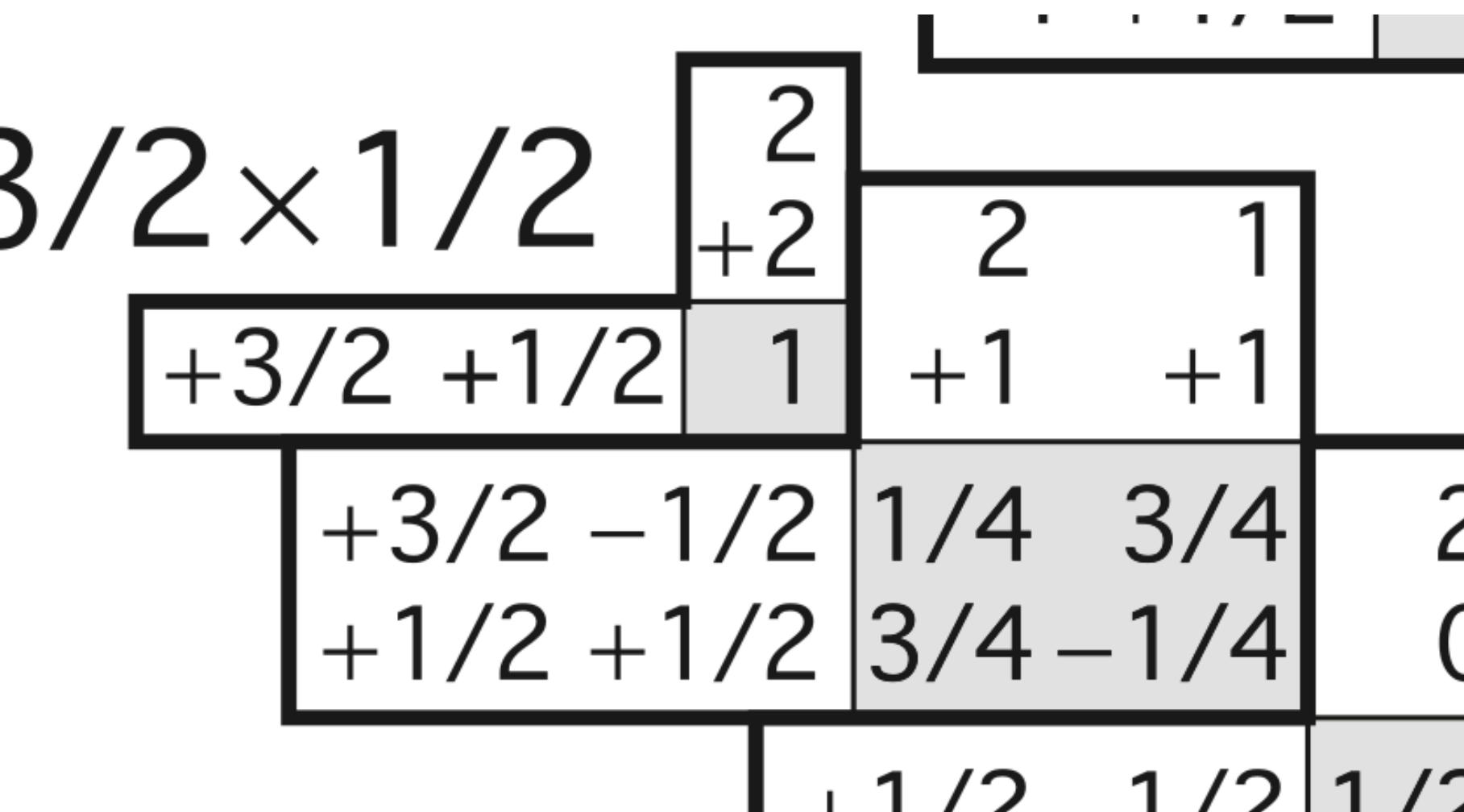
$$d_{1,1}^j = \frac{1+\cos \theta}{2} (2\cos \theta-1)$$

$$d_{1,0}^j = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$$

$$d_{1,-1}^j = \frac{1-\cos \theta}{2} (2\cos \theta+1)$$

$$d_{0,0}^j = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 46.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).



同位旋守恒

- 同位旋守恒对强相互作用的过程给出很强的限制和预言。
- 同位旋守恒要求系统在同位旋空间中的状态在反应过程中保持不变。
- 由于系统在同位旋空间所处的态可以完全地通过系统的同位旋 I 及其在第三方向的投影 I_3 来描写，同位旋守恒直接表现为系统的 I 和 I_3 在反应前到反应后不变。
- 以 π 介子与核子 N 的散射为例，来看同位旋守恒给出的限制和预言。

以 π 介子与核子 N 的散射为例，电荷守恒允许存在下述十个过程：

散射过程的几率和按角度的分布用散射截面来描写。

弹性散射过程	截面	准弹性散射过程	截面
$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$	σ_1	$\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$	σ_7
$\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$	σ_2	$\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$	σ_8
$\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$	σ_3	$\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$	σ_9
$\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$	σ_4	$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$	σ_{10}
$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$	σ_5		
$\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$	σ_6		

- 如果没有同位旋守恒，也没有其它对称性的限制，这十个截面是互相独立的，需要独立进行测量。
- 但是过程7和过程8互为逆过程，过程9和过程10互为逆过程，如果考虑了时间反演不变性，有 $\sigma_7 = \sigma_8$, $\sigma_9 = \sigma_{10}$
- 也就是说只有八个互相独立的截面，需要用八个独立的跃迁振幅来描写。
- 但是下面可以看到，考虑了同位旋不变性后，这八个过程最后将只需要用两个独立振幅来描写。

- 首先，强相互作用在同位旋空间转动时具有不变性，我们可以在同位旋空间进行一个绕第二轴180度的转动，这样就把第三轴的方向反向了，所有的粒子的 I 不变，但 I_3 变号则有

$$p \leftrightarrow n, \pi^+ \leftrightarrow \pi^-, \pi^0 \leftrightarrow \pi^0$$

- 这样我们又得到截面的关系：
 $\sigma_1 = \sigma_6, \sigma_2 = \sigma_5, \sigma_3 = \sigma_4, \sigma_7 = \sigma_8 = \sigma_9 = \sigma_{10}$
- 也就是说，现在只有四个截面可能需要独立测量。

- 同位旋变换不变还要求相互作用的哈密顿量 H 只依赖于总同位旋 I , 那么该过程的散射矩阵元 M_I 满足:

$$\langle I' I_3' | H | II_3 \rangle = \delta_{II'} \delta_{I_3 I_3'} M_I$$

- 核子的同位旋为 $1/2$, π 介子的同位旋为 1 , 根据前面所说的同位旋的耦合规律, 初末态的总同位旋有两种可能: $3/2$ 或 $1/2$
- 因此, πN 系统只存在两种基本的散射矩阵元, 记为

$$M_{3/2} = \langle I = 3/2 | H | I = 3/2 \rangle, \quad M_{1/2} = \langle I = 1/2 | H | I = 1/2 \rangle$$

- 但是， $|\pi N\rangle$ 不是单一同位旋的本征态，而是若干本征态的线性组合，具体有：

$$|\pi^+ p\rangle = \left|1\frac{1}{2}1\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}\frac{3}{2}\right\rangle \quad |\pi^0 n\rangle = \left|1\frac{1}{2}0-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|\pi^0 p\rangle = \left|1\frac{1}{2}0\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \quad |\pi^+ n\rangle = \left|1\frac{1}{2}1-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$|\pi^- p\rangle = \left|1\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\rangle \quad |\pi^- n\rangle = \left|1\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right\rangle$$

- 反应前后同位旋及第三分量守恒： $\langle I'I_3' | H | II_3 \rangle = \delta_{II'} \delta_{I_3'I_3'} M_I$

- 代入就可以得到：

$$M_1 = M_6 = \langle \pi^+ p | H | \pi^+ p \rangle = M_{3/2}$$

$$M_2 = M_5 = \langle \pi^+ n | H | \pi^+ n \rangle = (M_{3/2} + 2M_{1/2})/3$$

$$M_3 = M_4 = \langle \pi^0 p | H | \pi^0 p \rangle = (2M_{3/2} + M_{1/2})/3$$

$$M_7 = M_8 = M_9 = M_{10} = \langle \pi^0 p | H | \pi^+ n \rangle = \sqrt{2}(M_{3/2} - M_{1/2})/3$$

- 利用 $\sigma(\pi N \rightarrow \sigma' N') = \kappa |\langle \pi' N' | H | \pi N \rangle|^2$ 就可以得到各个过程的散射截面。
- 由于反应截面正比于跃迁振幅绝对值的平方，所以和测量有直接关系的是这两个跃迁振幅的绝对值和它们的相角差，亦即只有三个需要独立测量的量。计算给出的四个不同的截面 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_7$ 之间还必须满足关系 $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_3 + \sigma_7$

- 在不同的质心系总能量下， $M_{1/2}, M_{3/2}$ 所占的比重不同。在系统的质心系总能量为 1236 MeV 时，散射矩阵元以 $M_{3/2}$ 为主，即 $M_{3/2} \gg M_{1/2}$ ，这时有

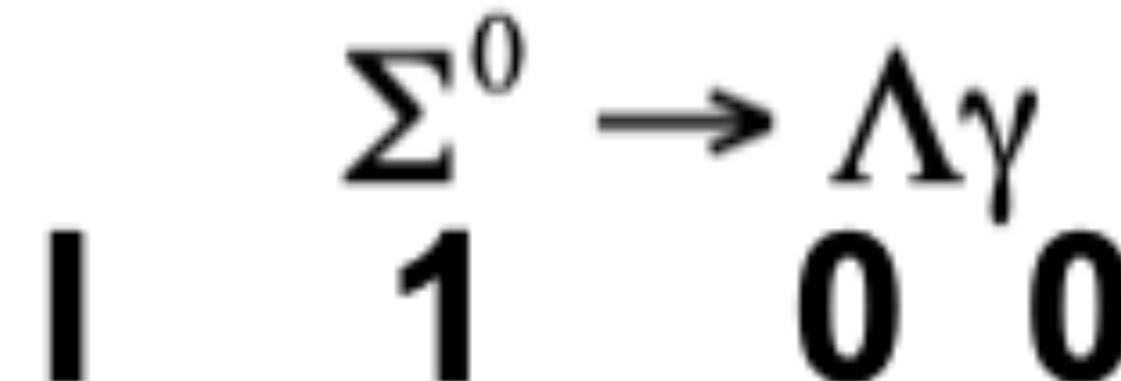
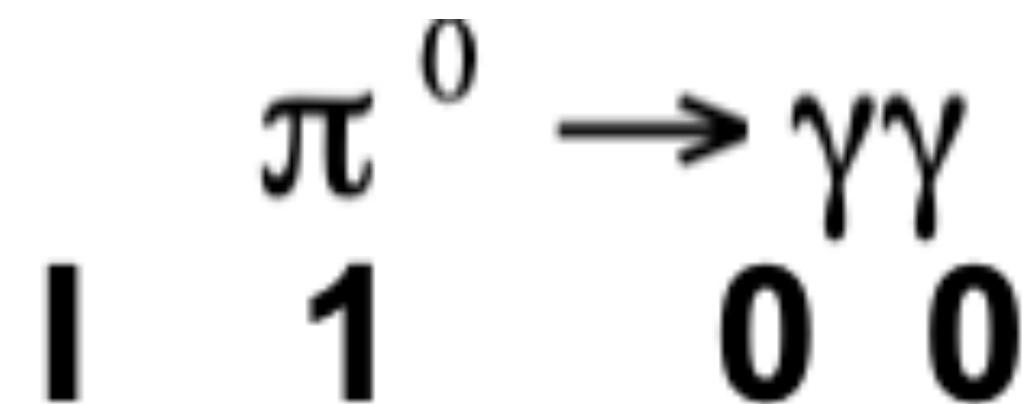
$$\sigma_1 : \sigma_5 : \sigma_{10} = 1 : \frac{1}{9} : \frac{2}{9}$$
- 实验测量给出的结果为 $\frac{\sigma_1}{\sigma_5 + \sigma_9} \approx 3$
- 理论和实验结果符合的很好，这也直接证明了强相互作用下同位旋守恒。

同位旋破坏

1. 电磁相互作用下的同位旋破坏

大量的实验结果表明，在电磁相互作用下，同位旋是不守恒的。但同位旋 I 的改变在大多数情况下仅为0或1。因此可以总结出电磁作用下同位旋改变的选择定则： $\Delta I_3 = 0, \Delta I = 0, \pm 1$

例如（光子无同位旋，只有强子才有。[第三分量不变](#)）：



同位旋破坏

2. 弱相互作用下的同位旋破坏

- 弱作用下，总同位旋和其第三分量都不守恒，但大量实验结果表明，大多数弱作用下，总有 $|\Delta I| \leq 1$ ，这叫做最小破坏假设。
 $|\Delta I| \leq 1, |\Delta I_3| \leq 1$
- 但是注意，弱相互作用下也包含有 $\Delta I = 0, \Delta I_3 = 0$ 的情况。
- 有时候也存在 $\Delta I = 2$ 的二级弱相互作用。

3. 强相互作用下的情形

- 回忆前面引入同位旋概念时，我们认为一个同位旋多重态中的不同粒子是同一个粒子的不同带电状态。
- 如果同位旋对称性是严格的，那么同一个同位旋多重态中的粒子质量应该完全相等，但实际上它们是不完全相同的，尽管通常差别很小（这一点我们在前面核子和 π 介子的情形可以看到）。
- 在这个意义上来说，同位旋对称性只是一种近似的对称性。
- 这种同位旋的微小破坏可以体现在可以通过同位旋变换联系起来的物理过程中。

- 关于强相互作用同位旋破坏的一个典型例子是 ϕ 介子的强衰变
 $\phi : m_\phi = 1019.6 \pm 0.1 \text{MeV}, I = 0, J = 1, S = 0, b = 0$
- 根据强相互作用的规律分析, ϕ 有以下两种衰变方式:
 $\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0 \quad \phi \rightarrow K^+ K^-$
- 两个同位旋二重态
$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix}$$
- 显然, 强相互作用同位旋不变性要求这两个衰变道的衰变振幅相同 (为什么?) ; 如果同一同位旋二重态中粒子的质量相同, 则这两个衰变道的分支比应该相同。

- 但是，实验观测到的它们的质量是：

$$m_{K^0} = m_{\bar{K}^0} = (497.671 \pm 0.031) \text{MeV}$$
$$m_{K^+} = m_{K^-} = (493.646 \pm 0.009) \text{MeV}$$

- 这个微小差别 $m_{K^0} - m_{K^\pm} = (4.024 \pm 0.032) \text{MeV}$ 导致在质心系中末态粒子的平均衰变动量 k 分别为 110MeV 和 127MeV 。
- 这个差别将导致这两种衰变方式的分支比有所不同。
- 由于 K 介子的自旋为零，这两种衰变方式应该通过轨道角动量为 1 的分波进行。

- 根据量子力学中一般证明的离心位垒的性质：
粒子衰变轨道角动量为L时，其衰变几率正比于质心系衰变动量p的 $2L+1$ 次方。

- 量子场论的一般计算给出这两个衰变过程的部分宽度为

$$\Gamma = \frac{f^2 k^3}{6\pi m_\phi^2}, \quad \left(k = \sqrt{\frac{m_\phi^2}{4} - m_K^2} \right)$$

- 可以得出在同位旋守恒的基础上并考虑了质量微小差别的影响后，它们的相对分支比为：

$$R = 1.536$$

- 如果进一步考慮到 ϕ 介子的宽度 $\Gamma_\phi = 4.22\text{MeV}$, 并对 ϕ 的质量用Breit-Wigner 分布求平均, 可以得到更精确的衰变宽度

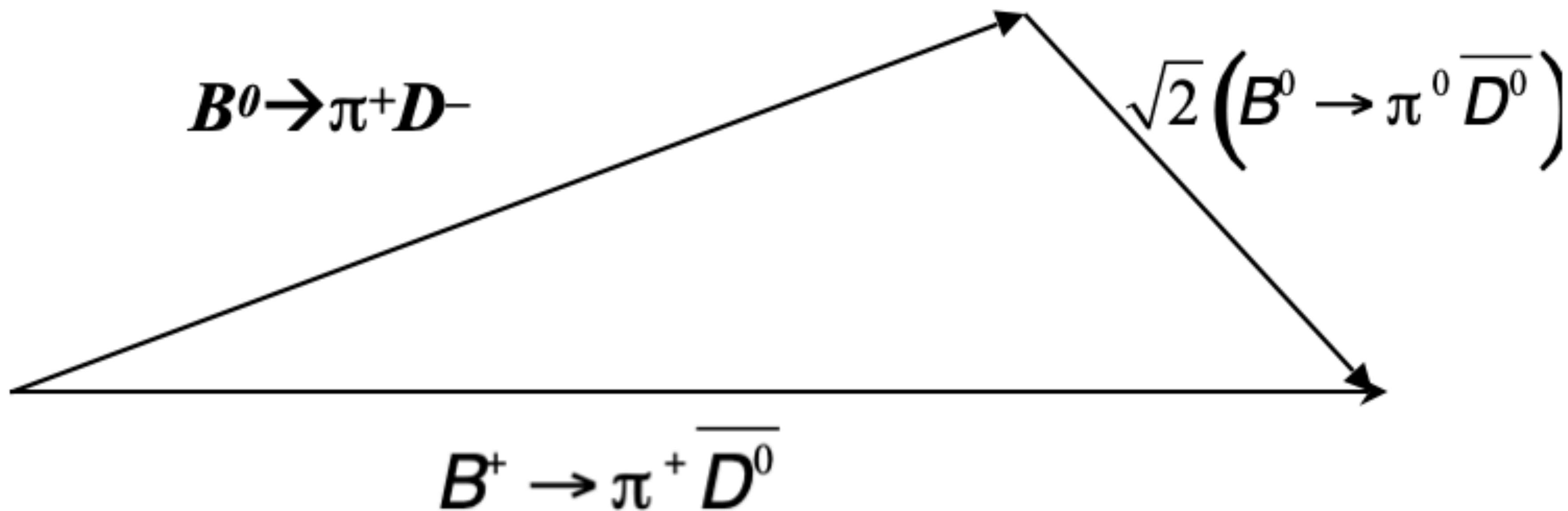
$$\Gamma = \frac{f^2}{48\pi^2} \int ds \frac{m_\phi \Gamma_\phi (s - 4m_K^2)^{3/2}}{\left[(s - m_\phi^2) + m_\phi^2 \Gamma_\phi^2 \right] s}$$

- 带入数值可以得到相对分支比的更精确地理论估计 $R = 1.421$, 和实验值 $R = 1.44(5)$ 符合得相当好。
- 在讨论强相互作用过程中同位旋破坏的影响时, 可以在处理相互作用过程时按照同位旋守恒来处理,
- 而同位旋破坏的影响可以主要归结为同位旋多重态中不同分量之间质量差引起的运动学效应。

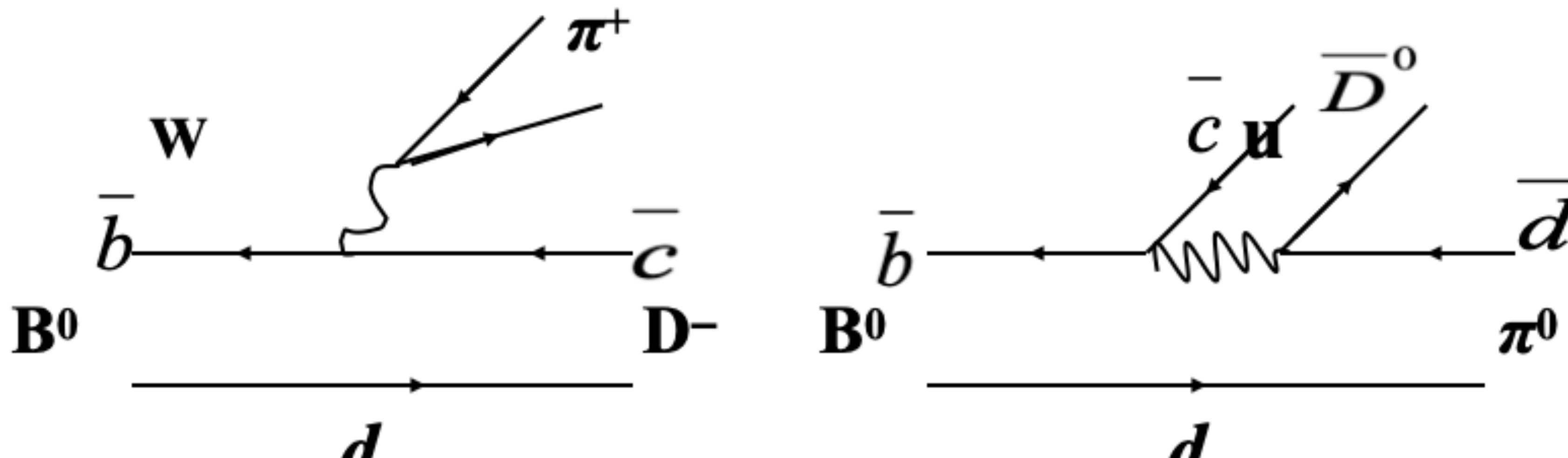
同位旋在弱衰变中的应用

- 在B物理里面经常提到的同位旋三角关系

$$\sqrt{2} M(B^0 \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0) + M(B^0 \rightarrow \pi^+ D^-) = M(B^+ \rightarrow \pi^+ \bar{D}^0)$$



$B^0 \rightarrow \pi^+ D^-$ $B^0 \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0$ 衰变



颜色增强的

颜色压低的

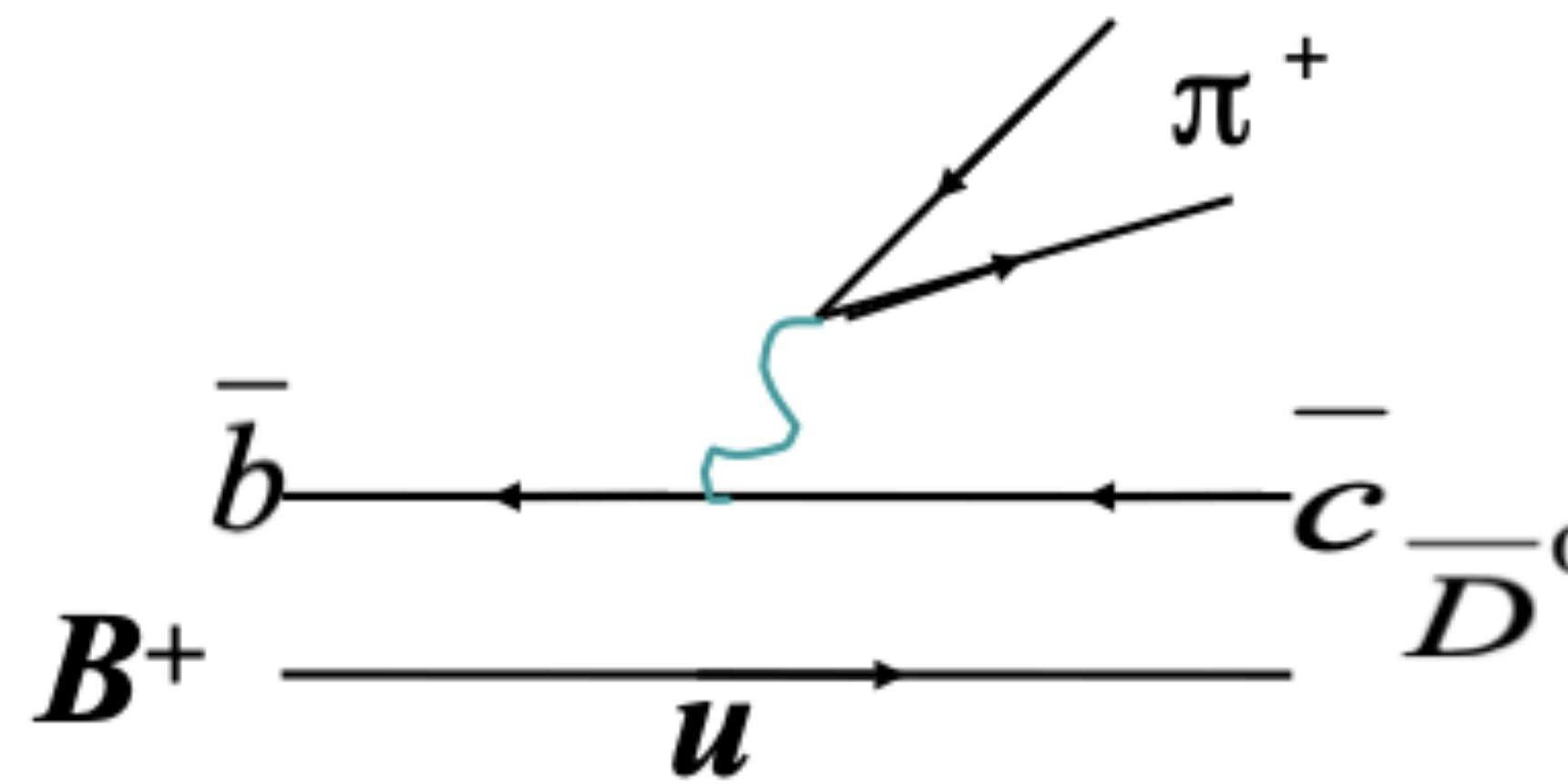
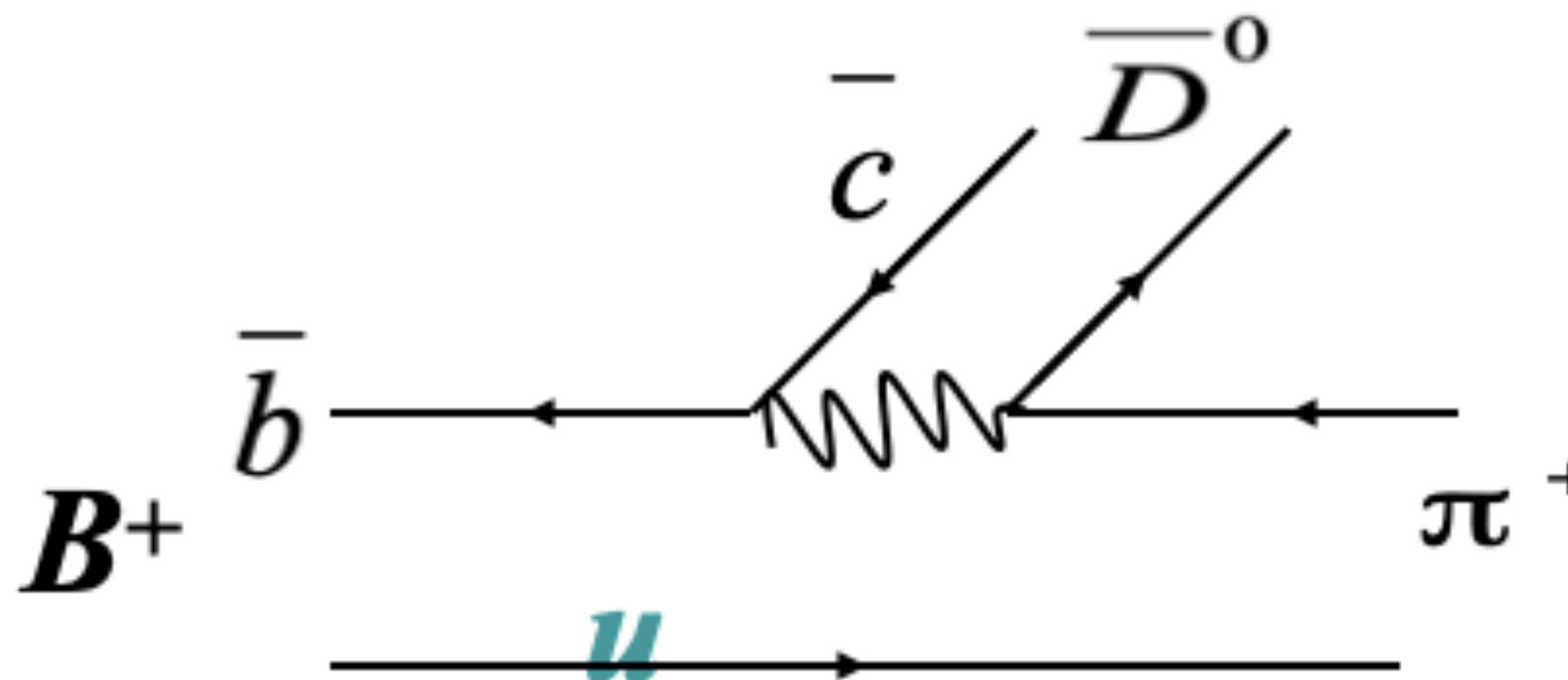
$$M(B^0 \rightarrow \pi^+ D^-) \propto C_2 + C_1 / N_c^{\text{eff}} = a_1$$

$$M(B^0 \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0) \propto C_1 + C_2 / N_c^{\text{eff}} = a_2$$

因子化方法中的第三类衰变

上面两类图
都有贡献

$$\begin{aligned} M(B^+ \rightarrow \pi^+ \bar{D}^0) &\propto \\ (\mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_1) (1 + \frac{1}{N_c^{\text{eff}}}) \\ = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$



同位旋分析

- 初态 (B^+, B^0) 是同位旋 $1/2$ 的二重态 $|B^0\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$
- 夸克层次弱作用 $\bar{b} \rightarrow \bar{c}u\bar{d}$, 改变同位旋 $\Delta I = 1, \Delta I_3 = 1$,
等效 $|H_{eff}\rangle = |1,1\rangle$
- 也就是说通过弱作用可以有两种同位旋振幅, 对应于: $A_{1/2}, A_{3/2}$
- $\langle B^0 | H_{eff} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right|$

$B^0 \rightarrow \pi^+ D^-$ \bar{D}^0, D^- 也是同位旋1/2的二重态

$$|\pi^+ D^- \rangle = \left| 1, 1, , \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$M(B^0 \rightarrow \pi^+ D^-) = 1/3 A_{3/2} + 2/3 A_{1/2}$$

$B^0 \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0$

$$|\pi^0 \bar{D}^0 \rangle = \left| 1, 0, , \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$M(B^0 \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0) = \sqrt{2}/3 (A_{3/2} - A_{1/2})$$

$$\langle B^0 | H_{eff} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, , , 1, 1 \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right| + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right|$$

$$B^+\rightarrow\pi^+\overline{D}^0$$

$$\left\langle B^+ \left| H_{eff} = \right. \frac{1}{2}, \frac{1}{2},,,1,1 \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right|$$

$$\left| B^+ \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \qquad \left| \pi^+ \overline{D}^0 \right\rangle = \left| 1, 1, , \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle$$

$$M(B^+\rightarrow\pi^+\overline{D}^0)=A_{3/2}$$

$$M(B^0\rightarrow\pi^+D^-)=~1/3~A_{\textcolor{red}{3/2}}+2/3~A_{\textcolor{red}{1/2}}$$

$$M(B^0\rightarrow\pi^0\overline{D}^0)=\sqrt{2}/3(A_{3/2}-A_{1/2})$$

$$\sqrt{2}M(B^0\rightarrow\pi^0\overline{D}^0)+M(B^0\rightarrow\pi^+D^-)=M(B^+\rightarrow\pi^+\overline{D}^0)$$

$$\sqrt{2}M(B^0 \rightarrow \pi^0 \bar{D}^0) + M(B^0 \rightarrow \pi^+ D^-) = M(B^+ \rightarrow \pi^+ \bar{D}^0)$$

