

第三章 对称性和守恒定律

第一节 守恒量的一般性质

一、对称和破缺

- 在自然界千变万化的运动演化过程中，显现出各式各样的对称性。
- 地球是圆的，即是球对称的，但当我们标出中国的轮廓时，对称性就破缺了。
- 人体是左右对称的，当我们关注右手时，对称性就破缺了；另外，如果仔细观察，每一个人的左右并不完全对称，因此左右对称对于人体来说，只是一个近似的对称性。等等。
- 因此研究自然现象中显现的各种对称性，研究它们产生和破缺的演化规律，是人们认识自然的一个重要方面。

二、对称性的分类

1. 变换和对称性

- **变换**: 将两种情况间通过确定的规则对应起来的关系，在数学上称为从一种情况到另一种情况的变换。
- **对称性**: 物理学中对称性的观念可以概括为，如果某一现象或系统在某一变换下不改变，则说该现象或系统具有该变换所对应的对称性。
- 既然每一种对称性都和某种特定的变换相联系，那么对称性的千差万别也就集中反映在与之相联系的各种变换上。因此可以根据变换所涉及的对象以及变换的性质来对对称性进行分类。

2. 对称性的分类

- 空间对称性：对空间性质进行变换所对应的对称性。
- 时间对称性：对时间性质进行变换所对应的对称性。

空间和时间对称性是最常见的对称性，但并不是所有的对称性都能归入到这两类对称性之中。各种物体的性质及其运动的不同，还体现在一些与空间和时间的描述相独立的其它性质上。

- 内部对称性：微观世界的许多对称性体现为抽象的变换不变性，它们和时空变换是独立的。抽象的连续变换的变换参量可以看作是内部抽象空间的自由度。这些对称性称为内部对称性。

在宏观物理学的范围里，外部对称性常常具有很大的直观性，因此认识其存在并没有很大困难。在微观范围里，内部对称性的直观性减少了，这并不表明内部对称性的重要性减少了；事实上，随着物理学对微观世界的探索日益深入，认识到的内部对称性也愈来愈多。

三、对称性和守恒定律——Noether定理

对称性和守恒定律在经典力学中就有普遍的讨论。物理系统的对称性，或者说在某种变换下的不变性，都可以通过系统的作用量（或运动方程）体现出来。在经典场论中，从作用量的对称性出发，可以得到相应的守恒流和守恒量，对称性和守恒定律的关系可以通过诺特(Noether)定理表述。

Noether's Theorem: 如果运动规律在某一不明显依赖于时间的变换下具有不变性，相应存在一个守恒定律。

由 Noether 定理可以推出经典物理中的几个守恒定律：

对称性	守恒定律
时间平移不变性	能量守恒
空间平移不变性	动量守恒
空间转动不变性	角动量守恒
整体U(1)不变性	矢量流守恒

- Noether定理尽管是在经典理论中推导出来的，但在量子理论中也普遍成立。
- 在量子力学中，任一物理系统的运动规律都可以用系统的哈密顿量 H 描写。一个不显含时间 t 的力学量 Q 守恒的必要条件是它和哈密顿量 H 对易。

$$[Q, H] = 0$$

利用以上性质，我们来讨论连续变换和分立变换不变性所对应的守恒量。

1. 连续变换

描述系统所处的状态常需要许多参量，例如系统所处的时间，对应系统各自由度的量（系统质心的空间坐标、对标准参考系的转角等）。此外为反映微观粒子内部属性还有一些类似的量，例如同位旋空间的方位角等内部自由度。一般说来，这种描述系统运动状态的量称为运动参量。

我们早已熟知的结果是：对应于循环坐标 ξ 的广义动量 p_ξ 是守恒量。这个结果可以推广到对任意连续运动参量的情形，并在量子力学的基础上加以证明。

循环坐标：拉氏量中不显含的广义坐标变量称作循环坐标。

对一个连续变换，总可通过引入一个连续变化的参量 ξ 来描写。一般说来，哈密顿量 H 是 ξ 的函数 $H(\xi)$ 。连续变换即表现为 ξ 改变为 $\xi + d\xi$ ，其中 $d\xi$ 可以取任意值并且可以连续地趋于零。如果运动规律在这变换下不变，则应有

$$H(\xi + d\xi) = H(\xi) \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \xi} = 0$$

- 对任意的量子态 $|\psi\rangle$, $\frac{\partial}{\partial\xi}H|\psi\rangle = \frac{\partial H}{\partial\xi}|\psi\rangle + H\frac{\partial}{\partial\xi}|\psi\rangle = H\frac{\partial}{\partial\xi}|\psi\rangle \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial\xi}, H\right] = 0$
- 对于 $\frac{\partial}{\partial\xi}$ 的任意本征态 $|a\rangle$, 有: $\frac{\partial}{\partial\xi}|a\rangle = a|a\rangle$, $\langle a|\frac{\partial}{\partial\xi}|a\rangle = a$
 $\frac{\partial}{\partial\xi}\langle a|a\rangle = \langle a|\overset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial\xi}}|a\rangle + \langle a|\frac{\partial}{\partial\xi}|a\rangle = \langle a|\overset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial\xi}}|a\rangle + a = 0$
 $\langle a|\overset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial\xi}}|a\rangle = -a$, $\langle a|\overset{\leftarrow}{\frac{\partial}{\partial\xi}} = \left(\frac{\partial}{\partial\xi}|a\rangle\right)^* = a^*\langle a| \rightarrow a^* = -a$
- 可以看出, a 是一个纯虚数, 也就是说, $\frac{\partial}{\partial\xi}$ 是一个反厄米算符。如果我们要求所有力学量的观测值为实数, 则可以定义该变换对应的力学量算符为

$$p_\xi = -i\frac{\partial}{\partial\xi}$$

p_ξ 是一个厄米算符, 和 H 对易, 是一个守恒量。

连续变换的数学描述——李群

如果 m 个生成元, $X_i, i = 1, 2, \dots, m, [X_i, X_j] = C_{ijk}X_k$

如果 l 个生成元相互对易, 则称为 m 阶 l 秩李群。

m 个守恒定律 (守恒量为 X_i), 其中有 l 个可以同时测量。

例如, 空间平移不变性 (动量守恒) :

$$m = 3, \quad X_i = P_i \\ l = 3, \quad [P_i, P_j] = 0$$

空间转动不变性 (角动量守恒) :

$$m = 3, \quad X_i = J_i \\ l = 1, \quad [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$$

2. 分立变换

- 在量子理论中，分立变换的不变性导致存在一个守恒量，这类守恒量在经典理论中是不存在的。
- 分立变换不能用一个运动参量的连续变化来描写，因此我们应直接讨论分立变换本身。对任意的量子态 $|\psi\rangle$ ，经过 U 变换， $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$

$$(H|\psi\rangle)' = UH|\psi\rangle = UHU^{-1}U|\psi\rangle = H'U|\psi\rangle$$

如果在分立变换 U 下哈密顿量 H 不变，即 $UHU^{-1} = H' = H$

$$UH|\psi\rangle = HU|\psi\rangle$$

所以， U 和 H 对易。如果 U 不显含 t ，则 U 是守恒量。

*****时间反演不变性并不存在守恒定律

量子力学中的Noether定理可以概括如下：

- 当哈密顿量 H 与连续运动参量 ξ 无直接依赖关系时， p_ξ 是守恒量；
- 当哈密顿量 H 在分立变换 U 下不变时， U 本身就是一个守恒量。

四、相加性守恒量和相乘性守恒量

从守恒量的数学表述来看，基本的守恒量可以区分为两大类：

- **相加性守恒量：**一个复合体系的总守恒量是其各组成部分所贡献该守恒量的代数和，这类守恒量称为相加性守恒量；如能量、动量、角动量、电荷、同位旋第三分量、奇异数、粲数、底数、轻子数和重子数等。
- **相乘性守恒量：**一个复合体系的总守恒量是其各组成部分该守恒量的乘积，这类守恒量称为相乘性守恒量，如P宇称、C宇称、G宇称，CP宇称都是相乘性守恒量。
- 有经典对应的守恒量都是相加性守恒量。
- 相乘性守恒量都是无经典对应的守恒量。

五．严格守恒和近似守恒

既然守恒定律的表现形式为一个孤立系统某物理量的总量在运动过程中不随时间改变，那么守恒定律的成立与否就直接和孤立系统的运动规律有关，特别是与相互作用有关。从这个关系上来考察，又可以把守恒定律分为两类，从而守恒量也分为两类：

- 1) 如果一个守恒定律对各种相互作用都成立则称为严格守恒律；
- 2) 如果一个守恒定律对某些相互作用成立，但对另一些相互作用则不成立，并且在运动过程中后者影响是次要的，则称为近似守恒定律(或部分守恒定律)。

能量、动量、角动量、电荷是有经典对应的相加性严格守恒量；
同位旋、奇异数是无经典对应的相加性近似守恒量；
P宇称、C宇称、CP宇称是无经典对应的相乘性近似守恒量.

第二节 同位旋

一、同位旋概念的引入

同位旋是粒子物理学中最早遇到的重要的内部对称性，这个概念首先是在实验的启示下提出的。我们来看质子和中子的性质：

	质量(MeV)	自旋(J)	电荷(Q)
质子(p)	938.27203(8)	1/2	1
中子(n)	939.56536(8)	1/2	0

$$\frac{m_n - m_p}{m_p} = 0.00138$$

- 质子和中子的质量相差很小，而且强相互作用性质很相似。
- 类似的还有 π 介子： π 介子有三种荷电状态， π^+, π^0, π^- ，分别带电子电荷 $Q = +1, 0, -1$ ，它们的强相互作用也相似。

	质量(MeV)	自旋(J)	电荷(Q)
π^+	139.57018(35)	0	1
π^0	134.97660(60)	0	0
π^-	139.57018(35)	0	-1

参考资料：对称性的归纳总结

- 如果若干个粒子（如 π^0, π^\pm ）的质量相同，相互作用性质相似，则预示着对称性；
- 该对称性可以用一个群 G 来描述；这些粒子构成 G 的一个表示（多重态）；
- 这些粒子态都是体系哈密顿量 H 的本征态： $H|A\rangle = m_A|A\rangle$ ；
- 对于 $\forall U \in G$ ，体系的哈密顿量 H 满足： $[H, U] = 0$ ；
- 这些态都可以通过对称变换联系起来： $|B\rangle = U|A\rangle, U \in G$ ；
- 可以证明： $m_A = m_B$

$$m_B|B\rangle \equiv H|B\rangle = HU|A\rangle = UH|A\rangle = m_AU|A\rangle = m_A|B\rangle$$

由于电磁相互作用和弱相互作用比强相互作用弱很多，因此相对于后者可以看作微扰修正。根据大量的实验的总结，可以有以下设想：

p, n : 是同一种“核子” (**nucleon**) 的不同带电状态；
 π^+, π^0, π^- : 是同一种**pion**介子的不同带电状态。

在量子力学中我们学过，电子的自旋为 $1/2$ ，如果在空间中选取一个特定的方向 **z**，则自旋在这个方向的投影 (**z** 分量) 为 $1/2$ 或 $-1/2$ 。在数学上，可以通过引入 Pauli 矩阵

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

来描述电子的自旋 $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ ：

$$s_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, s_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, s_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

简单的计算可以得到， $[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk} s_k, i, j, k = 1, 2, 3$

从而，

$$[s^2, s_i] = 0, s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$$

这说明，对于空间转动不变的系统， (s^2, s_3) 是可以同时测量的。因此电子的自旋本征态可以表示为

自旋向上 $|ss_3\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha$

自旋向下 $|ss_3\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$

自旋二重态 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 的空间转动性质可以表示为 $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = e^{i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

以上结论可以推广到任意角动量系统：角动量为 J 的态有 $2J + 1$ 个分量

$$|JM\rangle, M = -J, -J+1, \dots, J-1, J$$

这些分量张成一个 $2J + 1$ 维空间，这个空间的空间转动变换可以表示为

$$U = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}, \quad U|JM\rangle = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{J}}|JM\rangle$$

(注意这里的负号) 这是三维空间的一个么模么正变换，可以用SU(2)群描述。

类似地，也可以认为核子具有某种类似于粒子自旋的“旋”，称为“**同位旋**”(isospin)，它是和一种抽象复空间中公正么模变换的生成元构成的。粒子物理中对这类反映粒子内禀对称性的抽象空间称为内部空间以和普通的空间相区别。和同位旋相联系的内部空间称为同位旋空间。实验显示的各种规律性和特征可以概括为：

- 可以引入一个内部二维抽象复空间上的SU(2)变换群，强相互作用在这个内部空间的SU(2)群变换下具有不变性，相应的三个生成元构成一个具有三个分量的抽象空间中的矢量。考虑到这个内部对称性的数学结构和自旋相同，称这个SU(2)对称性为**同位旋对称性**。与自旋对应的这个量称为同位旋，它在强相互作用下守恒。
- 所有强子都具有确定的**同位旋**。粒子物理学中通常用 I 来标记同位旋。在同位旋空间里也可以选定一个特殊的方向，通常称为第三方向。同位旋 I 在第三方向上的投影可以取值为 $I_3 = I, I - 1, \dots, -I + 1, -I$ 共 $2I + 1$ 个值。
- 由于**同位旋把不同电荷的粒子统一起来**，因此可以规定 I_3 的本征态也就是电荷取确定值的态。同一同位旋多重态中不同态电荷的改变和同位旋第三分量的改变相等： $\Delta Q = \Delta I_3$ 。

同位旋和自旋的类比

自旋 (J)	同位旋 (I)
三维空间	抽象空间 (二维复空间)
$SU(2)$ 群	$SU(2)$ 群
在特定空间方向 (z) 上的分量 取值为 $M = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J$	在同位旋第三方向上的分量 取值为 $I_3 = -I, -I + 1, \dots, I - 1, I$
本征态表示为 $ JM\rangle$	本征态表示为 $ II_3\rangle$
空间转动不变系统的守恒量	同位旋空间转动不变性对应的守恒量
所有相互作用守恒	强相互作用的守恒量

重子八重态 $J^P = \frac{1}{2}^+$

粒子	J	I	I_3
p	1/2	1/2	1/2
n	1/2	1/2	-1/2
Σ^+	1/2	1	1
Σ^0	1/2	1	0
Σ^-	1/2	1	-1
Ξ^0	1/2	1/2	1/2
Ξ^-	1/2	1/2	-1/2
Λ^0	1/2	0	0

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix}$$

介子八重态 $J^P = 0^-$

粒子	J	I	I_3
K^+	0	1/2	1/2
K^0	0	1/2	-1/2
π^+	0	1	1
π^0	0	1	0
π^-	0	1	-1
\bar{K}^0	0	1/2	1/2
K^-	0	1/2	-1/2
η_8	0	0	0

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix}$$

参考资料：关于 $SU(2)$ 群的二维表示

- 在 $SU(2)$ 群的表示理论中，一个二重态 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 在 $SU(2)$ 变换下满足如下变换关系

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}' = e^{i\frac{\vec{\theta}}{2} \cdot \vec{\sigma}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

其中 $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 是三个 Pauli 矩阵，则 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 构成二维表示的基。

- 如果这个 $SU(2)$ 描述同位旋对称性，则这个二重态就是同位旋 $I = \frac{1}{2}$ 的态，并且

$$\alpha \rightarrow \left| \begin{array}{c} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right\rangle, \quad \beta \rightarrow \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle$$

- 二维表示的复共轭：

$$\begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}' = e^{-i\frac{\vec{\theta}}{2} \cdot \vec{\sigma}^*} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$$

- Pauli 矩阵具有如下性质: $\sigma_2 \sigma_i \sigma_2 = -\sigma_i^*$,

$$e^{i\frac{\vec{\theta}}{2} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

其中 $\vec{\theta} = \theta \vec{n}$, \vec{n} 表示沿 $\vec{\theta}$ 方向的单位矢量。我们有

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\vec{\theta}}{2} \cdot \vec{\sigma}^*} &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right)^* = \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \vec{\sigma}^* \cdot \vec{n} \\ &= \sigma_2 \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \right) \sigma_2 = \sigma_2 e^{i\frac{\vec{\theta}}{2} \cdot \vec{\sigma}} \sigma_2 \end{aligned}$$

- 从而我们得到

$$\begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}' = \sigma_2 e^{i\frac{\vec{\theta}}{2} \cdot \vec{\sigma}} \sigma_2 \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$$

即

$$i\sigma_2 \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}' = e^{i\frac{\vec{\theta}}{2} \cdot \vec{\sigma}} i\sigma_2 \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$$

- $i\sigma_2 \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$ 也是一个 $I = \frac{1}{2}$ 的二重态。实际上

$$i\sigma_2 \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix}$$

所以我们得到结论：

如果 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 构成 $SU(2)$ 的二重态，则 $\begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix}$ 也构成一个二重态。

- 一般来说， α 如果表示的是一个粒子态，则其复共轭 α^* 就是相应的反粒子态，例如，如果 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ ，则 $\begin{pmatrix} \beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}$ 。
- 注意，这个结论只对 $SU(2)$ 群的基础表示（二维表示成立）

同位旋和自旋（角动量）在数学上是相同的，都是SU(2)群的不可约表示。两个同位旋的耦合和两个角动量的耦合的数学关系也是相同的。关于角动量耦合的仔细讨论会在高等量子力学和群论中讲述，这里只介绍常用的结论：

- 两个角动量耦合： $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$
- 两个角动量和总角动量的本征态： $|j_1 m_1\rangle, |j_2 m_2\rangle, |jm\rangle$
- 总角动量 J 的可能取值为： $j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2$
- 总角动量的第三分量的取值： $m = m_1 + m_2$

令： $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$

则有 $|jm\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \langle j_1 j_2 m_1 m - m_1 | jm \rangle |j_1 j_2 m_1 m - m_1 \rangle$

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum_{\substack{j=|j_1-j_2| \\ m=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle |jm\rangle$$

Clebsch-Gordan 系数 (C. G. 系数) $\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle$ (实数)

相关的C. G系数

$$\left\langle j_1 \frac{1}{2} m_1 m_2 | jm \right\rangle$$

m_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$j_1 + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{j_1 + m + 1/2}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1}}$
$j_1 - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{j_1 - m + 1/2}{2j_1 + 1}}$	$\sqrt{\frac{j_1 + m + 1/2}{2j_1 + 1}}$

$$\langle j_1 1 m_1 m_2 | jm \rangle$$

j	m_2	1	0	-1
$j_1 + 1$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m)(j_1 + m + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m + 1)(j_1 + m + 1)}{(2j_1 + 1)(j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 - m + 1)}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)}}$	
j_1	$-\sqrt{\frac{(j_1 + m)(j_1 - m + 1)}{2j_1(j_1 + 1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{j_1(j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 + m + 1)}{2j_1(j_1 + 1)}}$	
$j_1 - 1$	$\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 - m + 1)}{2j_1(2j_1 + 1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1 - m)(j_1 + m)}{j_1(2j_1 + 1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1 + m)(j_1 + m + 1)}{2j_1(2j_1 + 1)}}$	

二、同位旋守恒

同位旋守恒对强相互作用的过程给出很强的限制和预言。同位旋守恒要求系统在同位旋空间中的状态在反应过程中保持不变。由于系统在同位旋空间所处的状态可以完全地通过系统的同位旋 I 及其在第三方向的投影 I_3 来描写，同位旋守恒直接表现为系统的 I 和 I_3 在反应前到反应后不变。

以 π 介子与核子 N 的散射为例，来看同位旋守恒给出的限制和预言。

	弹性散射过程	截面	准弹性散射过程	截面
电荷守恒 允许存在	$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$	σ_1	$\pi^+ + n \rightarrow \pi^0 + p$	σ_7
下述十个 过程：	$\pi^+ + n \rightarrow \pi^+ + n$	σ_2	$\pi^0 + p \rightarrow \pi^+ + n$	σ_8
	$\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$	σ_3	$\pi^0 + n \rightarrow \pi^- + p$	σ_9
	$\pi^0 + n \rightarrow \pi^0 + n$	σ_4	$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$	σ_{10}
	$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$	σ_5		
	$\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n$	σ_6		

- 散射过程的几率和按角度的分布用散射截面来描写。

如果没有同位旋守恒，也没有其它对称性的限制，这十个截面是互相独立的，需要独立进行测量。但是过程7和过程8互为逆过程，过程9和过程10互为逆过程。如果考虑了时间反演不变性，有

$$\sigma_7 = \sigma_8, \quad \sigma_9 = \sigma_{10}$$

也就是说只有八个互相独立的截面，需要用八个独立的跃迁振幅来描写。

另外，强相互作用如果在同位旋变换下不变，我们可以在同位旋空间进行一个绕第二轴180度的转动，则有 $p \rightarrow n, \pi^+ \rightarrow \pi^-, \pi^0 \rightarrow \pi^0$ 。

这样我们又得到截面的关系：

$$\sigma_1 = \sigma_6, \sigma_2 = \sigma_5, \sigma_3 = \sigma_4$$

$$\sigma_7 = \sigma_8 = \sigma_9 = \sigma_{10}$$

也就是说，只有四个截面可能需要独立测量。

- 同位旋变换不变还要求相互作用的哈密顿量 H 只依赖于总同位旋 I , 那么该过程的散射矩阵元满足:

$$\langle I'I'_3 | H | II_3 \rangle = \delta_{II'} \delta_{I_3 I'_3} M_I$$

- 核子的同位旋为 $1/2$, pion 介子的同位旋为 1 , 根据前面所说的同位旋的耦合规律, 初末态的总同位旋有两种可能:

$$I = I_N + I_\pi = 3/2, I = I_\pi + I_N = 1/2$$

- 因此, πN 系统只存在两种基本的散射矩阵元, 记为

$$M_{3/2} = \langle I = 3/2 | H | I = 3/2 \rangle, \quad M_{1/2} = \langle I = 1/2 | H | I = 1/2 \rangle$$

- 但是, $|\pi N\rangle$ 不一定是同位旋的本征态, 而是若干本征态的线性组合, 具体有:

$$|\pi^+ p\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|\pi^- p\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|\pi^- n\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|\pi^+ n\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|\pi^0 n\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|\pi^0 p\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

将以上各式代入 $\langle f|H|i \rangle = \langle \pi' N' |H|\pi N \rangle$ 可以得到：

$$\langle \pi^+ p | H | \pi^+ p \rangle = M_{3/2},$$

$$\langle \pi^+ n | H | \pi^+ n \rangle = (M_{3/2} + 2M_{1/2})/3$$

$$\langle \pi^0 p | H | \pi^0 p \rangle = (2M_{3/2} + M_{1/2})/3,$$

$$\langle \pi^0 p | H | \pi^+ n \rangle = \sqrt{2}(M_{3/2} + M_{1/2})/3$$

利用关系 $\sigma(\pi N \rightarrow \pi' N') \propto \kappa |\langle \pi' N' | H | \pi N \rangle|^2$, 可以得到各个道的散射截面。

在不同的质心系总能量下, $M_{1/2}$ 和 $M_{3/2}$ 所占的比重不同。在质心系总能量为 **1236MeV** 时, 散射矩阵元以 $M_{3/2}$ 为主, 即 $M_{3/2} \gg M_{1/2}$, 这时有关系:

$$\sigma_1 : \sigma_5 : \sigma_{10} = 1 : \frac{1}{9} : \frac{2}{9}$$

而实验给出:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_5 + \sigma_{10}} \approx 3$$

理论和实验结果符合的相当好, 这也直接证明了强相互作用下同位旋守恒。

三、同位旋破坏

1. 电磁相互作用的同位旋破坏

大量的实验结果表明，在电磁相互作用下，同位旋是不守恒的。但同位旋 I 的改变仅为0或1。因此可以总结出电磁作用下同位旋改变的选择定则：

例如：



$$\Delta I_3 = 0$$

$$\Delta I = 0, \pm 1$$

2. 弱相互作用中的同位旋破坏

弱作用下，总同位旋和其第三分量都不守恒，但大量实验结果表明，大多数弱作用下，总有 $|\Delta I| \leq 1$ ，这叫做最小破坏假设。

$$|\Delta I| \leq 1$$

3. 强相互作用的情形

回忆前面引入同位旋概念时，我们认为一个同位旋多重态中的不同粒子是同一个粒子的不同带电状态。如果同位旋对称性是严格的，那么同一个同位旋多重态中的粒子质量应该完全相等，但实际上它们是不完全相同的，尽管通常差别很小（这一点我们在前面核子和 π 介子的情形可以看到）。在这个意义上来说，同位旋对称性只是一种近似的对称性。这种同位旋的微小破坏可以在通过同位旋变换联系起来的物理过程中。

关于强相互作用同位旋破坏的一个典型例子是 φ 介子的强衰变。

根据强相互作用的规律分析， φ 有以下两种衰变方式：

$$\varphi \rightarrow K^+ K^-, \varphi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$$

$$m_\varphi = 1019.6 \pm 0.1 \text{ MeV}, \\ I = 0, J = 1, S = 0, b = 0$$

两个同位旋二重态： $K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix}$

强相互作用同位旋不变性要求这两个衰变道的衰变振幅相同（为什么？）；如果同一同位旋二重态中粒子的质量相同，则这两个衰变道的分支比应该相同。

- 但是，实验观测到的它们的质量是：
 $m_{K^0} = m_{\bar{K}^0} = (497.671 \pm 0.031)\text{MeV}$
 $m_{K^+} = m_{K^-} = (493.646 \pm 0.009)\text{MeV}$
- 这个微小差别 $m_{K^0} - m_{K^\pm} = (4.024 \pm 0.032)\text{MeV}$, 导致在质心系中末态粒子的平均衰变动量 k 分别为 110MeV 和 127MeV 。
- 这两个衰变过程的部分宽度为 $\Gamma = \frac{f^2 k^3}{6\pi m_\phi^2}$ $\left(k = \sqrt{\frac{m_\phi^2}{4} - m_K^2} \right)$
- 它们的相对分支比为： $R = 1.536$
- 实验值结果也支持这个结论，即 $R = 1.44(5)$ （上面理论估计和实验的偏差是由于没有考虑 ϕ 介子的宽度效应）

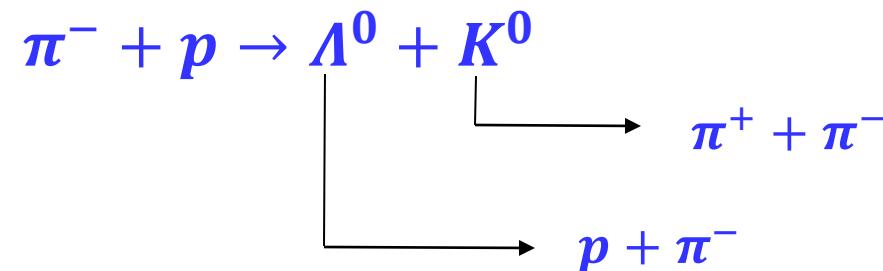
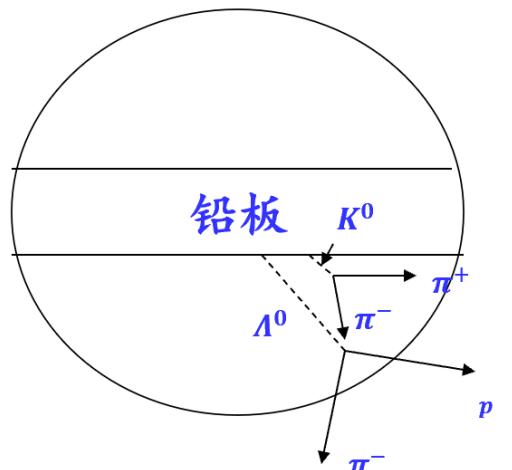
在讨论强相互作用过程中同位旋破坏的影响时，可以在处理相互作用过程时按照同位旋守恒来处理，而同位旋破坏的影响可以主要归结为同位旋多重态中不同分量之间质量差引起的运动学效应。

第三节 奇异数和重子数

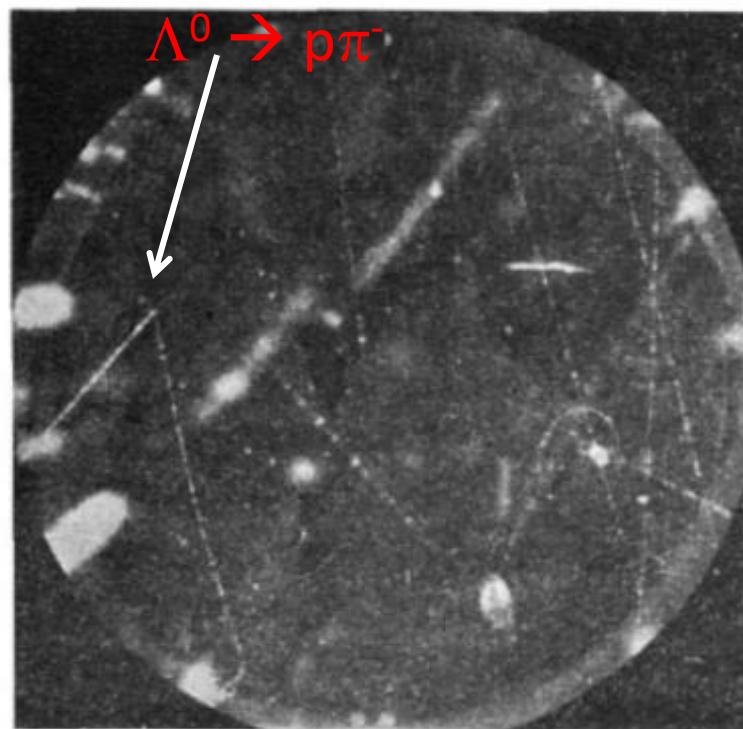
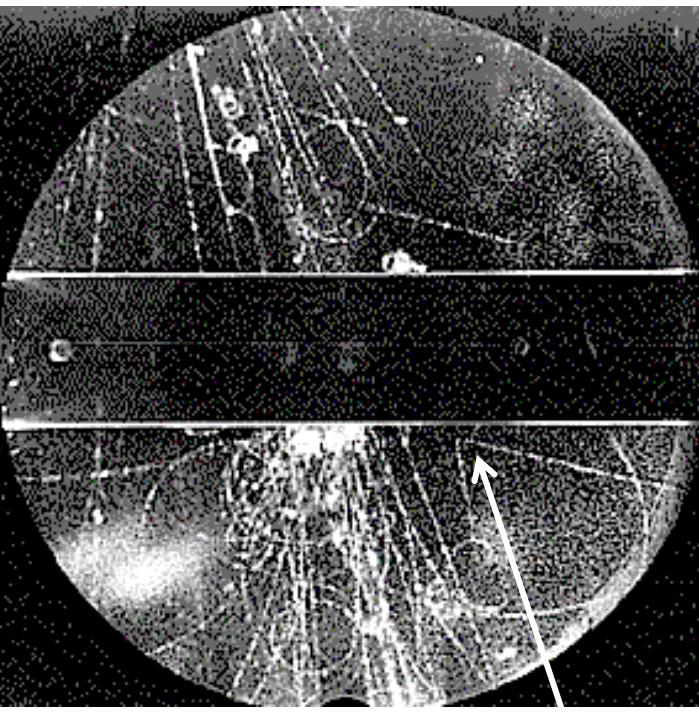
一、奇异粒子

1. 云室 (cloud chamber) 中的“V”型事例

1947年在宇宙射线实验中，罗切斯特和巴特勒用云室首先观察到了后来被称为奇异粒子的粒子——“V”型事例。因中性粒子在云室中不能留下径迹，所以只观察到两个末态带电粒子留下的叉形径迹。通过对带磁场的云室中带电粒子径迹的偏转曲率以及电离密度的测量分析，知道这两个末态粒子一个是质子，一个是 π^- 介子。通过测量末态粒子的能量和动量可以定出这个中性粒子的质量。它的质量显然比质子大。这是当时所知的质子、中子、电子、光子和 π 介子之外的一个新粒子。后来称其为 Λ 粒子（超子）。罗切斯特和巴特勒观察到的过程为 $\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-$ 。



“V” Particles ← totally unexpected



- Λ^0 质量比质子大，后来称为 Λ^0 超子。
- K^0 质量为电子质量的约1000倍，寿命约为 $10^{-10}s$ ，当时称为 θ 粒子。

2. 奇异粒子及其奇异特性

后来陆续又发现了 K^+ 介子等，新粒子的发现引起了人们的广泛注意。在 1954 年美国布鲁克海文实验室 3GeV 质子同步加速器实验中产生了奇异粒子后，它们的“奇异”特性才展现出来并得到系统的研究。

“奇异粒子”是当时新发现的一批粒子的总称，它们具有以下两个明显特征：

a) 协同产生 (A. Pais, 1952)，独立衰变。

在碰撞过程中至少有两个奇异粒子一起产生，然后每个奇异粒子再分别独立衰变掉，最终衰变成的粒子都是过去已知的粒子，而且不再有奇异粒子；



b) 快产生，慢衰变 (强产生，弱衰变)。

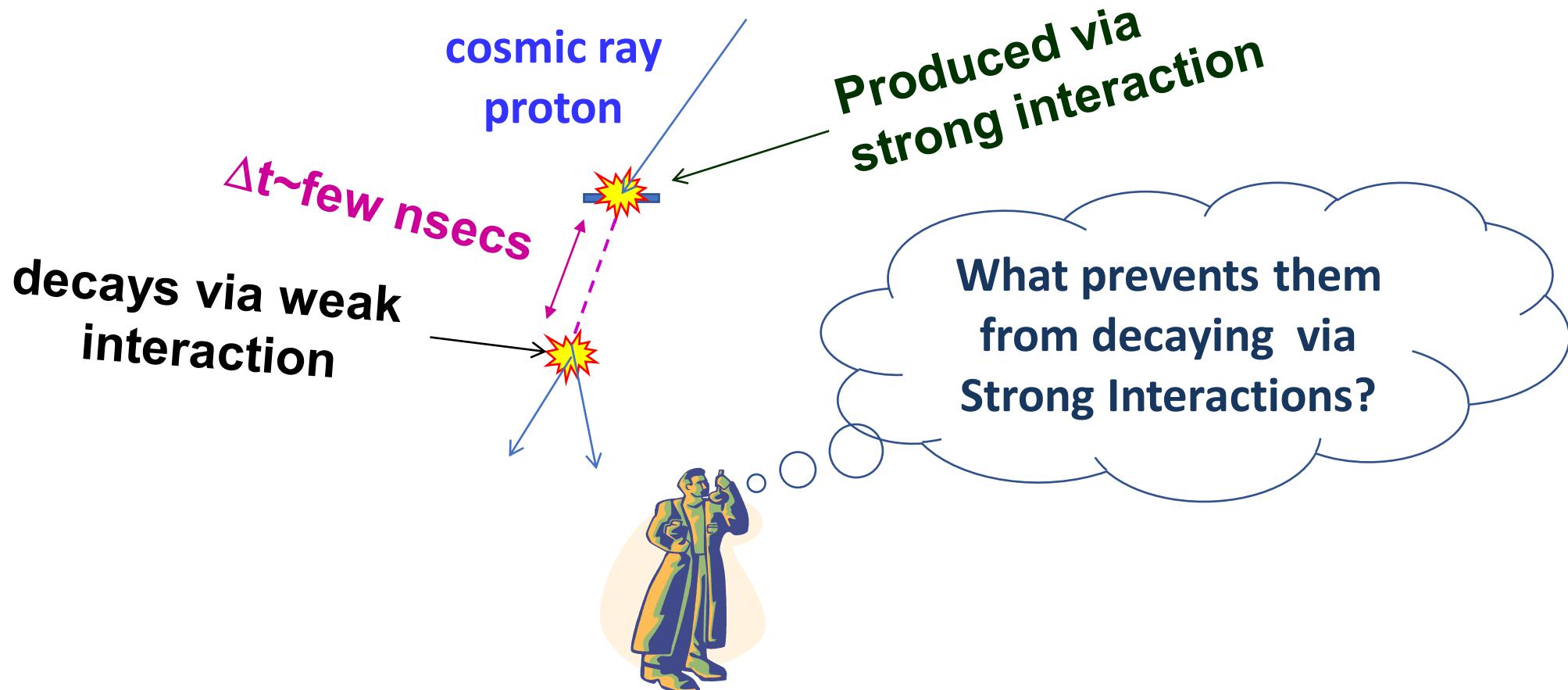
奇异粒子产生于粒子的高能碰撞，碰撞经历的时间量级为 $10^{-24}s$ ，而它们衰变的平均寿命时间量级为 $10^{-10}s$ 或更长

弱相互作用的典型时间

强相互作用的典型时间

Major puzzle

The V^0 , q^\pm and t^\pm particles are made by strong interactions, but live a long time and, so, must decay by weak interactions.



Strange particles are produced in pairs

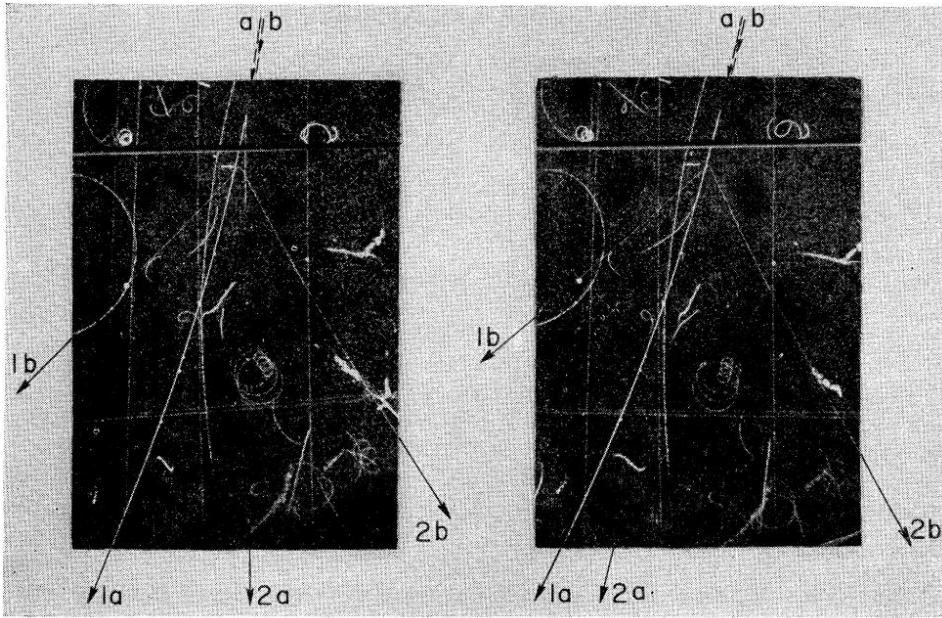


FIG. 1. Case C. Diffusion cloud-chamber photograph of two neutral V particles (a) and (b), whose lines of flight are almost colinear. (a) is believed to be a Λ^0 decaying into a proton (1a) and a negative π meson (2a). Tracks 1a and 2a practically coincide in the right view. (b) is probably a ϑ^0 decaying into π^+ (1b) and π^- (2b).

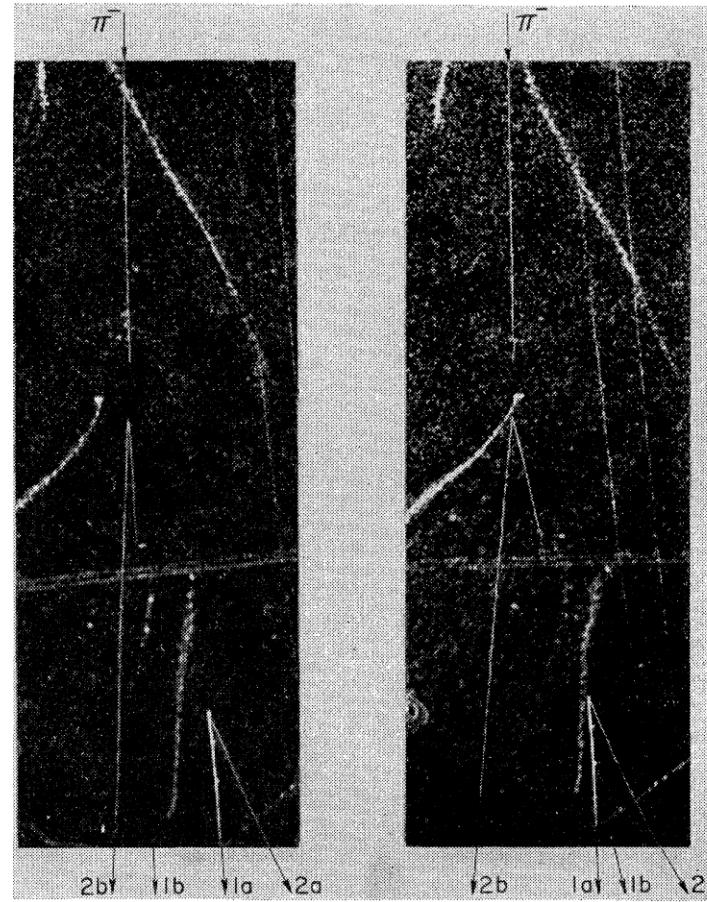


FIG. 2. Case D. Photograph of a 1.5-Bev π^- producing two neutral V particles in a collision with a proton. Tracks 1a and 2a, believed to be proton and π^- , respectively, are the decay products of a Λ^0 . A ϑ^0 is probably seen to decay into π^+ (1b) and π^- (2b). Because of the rather "foggy" quality of this picture tracks 1b, 2a, and 2b have been retouched for better reproduction.

二、奇异数的引入(Pais (1952), Nishijima (西岛, 1953), Gell-Mann(1953,1956))

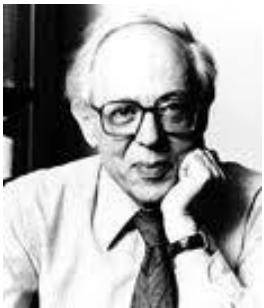
奇异粒子的特性，可以用一种新的守恒量子数——奇异数——来概括：

- 奇异数只能取整数。此前知道的粒子奇异数为0，称为普通粒子。
 - 奇异粒子的奇异数不为零。
 - 在强相互作用和电磁相互作用中，奇异数守恒，在弱相互作用中， $\Delta S = 0, \pm 1$ ，奇异数不一定守恒，
-
- 奇异粒子的产生是通过普通粒子的碰撞(**强相互作用**)实现的，强相互作用过程中奇异数守恒决定了末态中**奇异粒子必须协同产生**。
 - 奇异粒子的衰变是通过**弱作用**实现的，因为相互作用弱，需要的时间较长，但**不再要求奇异数守恒了**。
-
- 如果运动规律在这个**U(1)**内部变换群的作用下不变，则这个**U(1)**群的生成元**Y**就是一个相加性量子数。
奇异数守恒对应于一个内部**U(1)**对称性 $g\Phi g^{-1} = e^{iaY}\Phi, g \in U(1)$
 - 奇异数**S**是一个总结实验现象的规律性而得出的又一个内部相加性守恒量。

1955: Pais & Gell-Mann: Strangeness QN

Revised Pais' original idea:

A.Pais



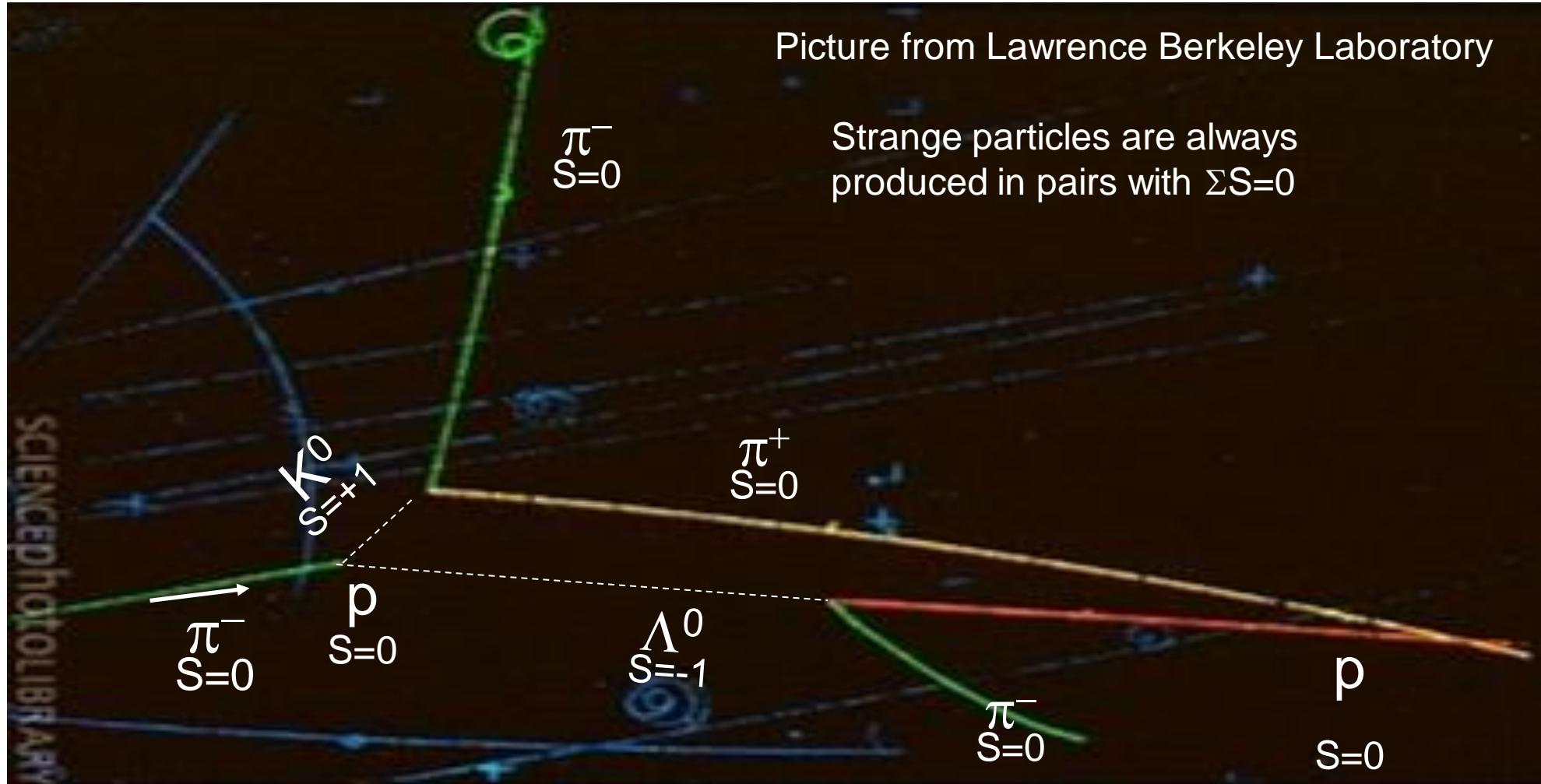
- for neutron/proton/p the new QN = 0
- for K^0/K^+ ... the new QN = +1
- for $L^0/S^{+/-}0$... the new QN = -1

Gave the new QN a name: **Strangeness**

-Strong interactions conserve **strangeness**

-Weak Interactions do not conserve **strangeness**

"Strangeness" quantum number



S conserved in production (Strong or EM processes)
S violated in decay processes (Weak Interactions)

三、重子数

- 质子的质量是电子质量的1836倍，但质子是稳定的，没有观察到质子的衰变。自由中子虽然可以衰变，但它衰变时转化成质子。
- 这启示可能还存在一个内部 **U(1)** 对称性，相对应的相加性守恒量称为重子数 (b)。
- 质子和中子的重子数为1，介子、光子和电子的重子数都是0。
- 实验表明，重子数是一个严格的内部相加性守恒量。
- 电荷、重子数、奇异数都是内部相加性守恒量，它们的相同点在于数学结构相同，都是和某种内部 **U(1)** 变换不变性相联系的，可取值为整数。它们的不同点表现在物理内容上，而且守恒的程度也不相同。

电荷和重子数都是严格的守恒量；

奇异数在弱作用下不守恒

同位旋第三分量在电磁相互作用下守恒，但在弱作用下不守恒

- **这些相加性量子数的区别还表现在测量上：** 电荷可以通过粒子的电磁相互作用行为测量，因为电荷本身就是电磁相互作用的作用常数；重子数和奇异数没有这种动力学性质，只能根据守恒定律及已知粒子的重子数和奇异数来确定。

四、Gell—Mann—西岛(Nishijima)关系

1、奇异数的约定

- 粒子的奇异数S的值是根据奇异数守恒的要求以及实验分析赋予的，从这一点来说，粒子的奇异数并没有完全确定下来。
- 事实上，粒子的奇异数乘以任何一个共同常数，并不影响物理结论；粒子的奇异数再加上一个强相互作用中守恒的相加性量子数，重新定义奇异数，也可以满足上述要求。

物理上的约定：



历史上，奇异数的规定是根据上面的反应来确定的。根据强相互作用奇异数守恒的要求，上述反应的末态中， Λ^0 和 K^0 的奇异数必须大小相等，符号相反，因此人们规定：

$$S(\Lambda^0) = -1, S(K^0) = +1$$

那么，其他奇异粒子的奇异数就可以通过奇异数守恒的要求相应推出。

2. 奇异粒子的同位旋

奇异粒子都是从强相互作用中产生的，具有强子特性。根据强相互作用电荷无关性的要求，可以对这些奇异粒子的同位旋及第三分量进行规定，然后再进行实验检验其合理性。通常根据奇异粒子电荷多重态的情况（见下表）将其同位旋规定如下：

粒子	质量(MeV)	电荷
Λ^0	1115.6	0
Σ^+	1189.4	1
Σ^0	1192.5	0
Σ^-	1197.3	-1
Ξ^0	1314.9	0
Ξ^-	1321.3	-1

- 没有其它电荷多重态，所以
 $I = 0, I_3 = 0$
- 质量相近，选定
 $I = 1, I_3 = 1, 0, -1$
- 质量相近，选定
 $I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

3. Gell-Mann—西岛 (Nishijima) 关系

1955年，人们对强子的电荷、重子数、同位旋第三分量和奇异数归纳出以下关系

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{S})$$

称为Gell-Mann—西岛关系。以后的实验充分证明了这个关系的普遍性。这个关系在六十年代强子分类和探索中是一个基本的关系式。由于**b**和**S**总是相加出现，有时人们又引入超荷**Y** = **b** + **S**来代替奇异数。

奇异数的下述两个特点对粒子物理学的发展是有启示意义的：

- 它是“近似”守恒的相加性守恒量，在强相互作用和电磁相互作用下严格守恒，但是在弱相互作用下可以不守恒；
- 与电荷不同，奇异数本身不是某种相互作用的“荷”，只能通过实验的分析来确定，不能象电荷那样通过它所体现的相互作用性质的动力效应来测定。
- 1974年以后先后发现的粲数C和底数B，都是属于这类量子数。考虑到强子物理的这些发展，Gell-Mann—西岛关系已经推广为

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{S} + \mathbf{C} + \mathbf{B} + \mathbf{T})$$

第四节 正反粒子共轭变换（C变换）

一、正粒子和反粒子

1. Dirac方程、负能态和Dirac空穴理论

- 1928年，Dirac提出一个相对论性的电子运动方程——Dirac方程；
- Dirac方程能够给出正确的关于氢原子精细结构的描述；可以给出正确的电子磁矩等，它的结果和实验符合得很好，因此其正确性得到了检验。
- 但是，根据Dirac方程，电子既有正能态，也有负能态，负能态的理论解释很困难。Dirac将负能态解释成为“空穴”：

真空并不是没有电子的态。由于电子自旋为 $1/2$ ，Pauli不相容原理要求每一个状态中只能容纳一个电子，因此负能态都已填满电子，它不能放出能量从而输出信号，这也正符合真空态的基本性质。

如果把一个电子从负能态激发到正能态去，需要从外界输入至少两倍电子静能量。这表现为可以看到一个正能态的电子和一个负能态的空穴。按照电荷和能量守恒的要求，这个负能态的空穴应表现为带电荷 $+e$ ，也具有相当于一个电子静止能量的能量，表现为一个带电荷 $+e$ 的电子，即正电子。

- Dirac的“空穴”概念是“反粒子”的理论雏形。

2. 反粒子存在的早期实验证据及反粒子概念的阐述阐释

1932年，在宇宙线实验中发现了正电子；Dirac的预言得到证实。

1955年，在加速器实验中发现的反质子，它的质量和质子相同，带单位负电荷。

1956年，在加速器实验中发现了反中子，它的质量和中子相同，不带电。反中子和中子的差别：中子的磁矩和自旋反号，反中子的磁矩和自旋同号。

- 这些发现表明，各种粒子都有相应的反粒子存在，这个规律是普遍的。
- 现在在粒子物理中，已不再采用Dirac的空穴理论来认识正反粒子之间的关系，而是从正反粒子完全对称的场论观点来认识。
- 按照量子场论提供的图象，一般说来，场的激发态表现为粒子。场的任一种激发状态都有与之对应的复共轭的激发状态，这在物理上相应于粒子与反粒子。
- 粒子和反粒子质量，寿命，自旋相同，但一切内部相加性守恒量都互相反号。
- 某些粒子的一切内部相加性守恒量都为零，反粒子就是它们自己，这些粒子称为纯中性粒子，相应的场称为纯中性场。
- 是否存在没有反粒子的粒子？中微子可能就是这样的粒子（标准模型中）。

二、正反粒子变换 (C变换) 及基本性质

1. 正反粒子变换：一切粒子换为相应的反粒子，又称电荷共轭变换 (C变换)。

考察A粒子的态 $|A\rangle$, 其反粒子的态记作 $|\bar{A}\rangle$, C变换的结果一般表为：

$$C|A\rangle = C'(A)|\bar{A}\rangle$$

$C'(A)$ 称作粒子态 $|A\rangle$ 的C变换因子。更一般地，对于多粒子系统，C变换可以表为

$$C|ABC \dots \rangle = C'(A)C'(B)C'(C) \dots |\bar{A}\bar{B}\bar{C} \dots \rangle$$

C变换有以下性质：

a) 粒子和反粒子的C变换因子之间是复共轭关系，属于同一不可约表示的粒子的C变换因子取同一值。

按照定义，C变换满足： $C^2 = I$

$$C^2|A\rangle = CC'(A)|\bar{A}\rangle = C'(A)C|\bar{A}\rangle = C'(A)C'(\bar{A})|A\rangle \rightarrow C'(A)C'(\bar{A}) = 1$$

$$\rightarrow |C'(A)| = |C'(\bar{A})| = 1, \quad C'(\bar{A}) = C'^*(A)$$

b) 所有的相加性守恒量都和C变换反对易。

如果 Q 是一个相加性守恒量, $|A\rangle$ 是 Q 的任意本征态, 则有

$$QC|A\rangle = QC'(A)|\bar{A}\rangle = -Q'(A)C'(A)|\bar{A}\rangle = -Q'(A)C|A\rangle = -CQ|A\rangle$$
$$\rightarrow (QC + CQ)|A\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad QC + CQ = 0$$

因此, 一般来说, 相加性守恒量和C变换没有共同的本征态, 只有相加性守恒量取值都为零时才可能同时又是C变换的本征态。

三、纯中性态和C宇称(C Parity)

- 纯中性粒子指所有内部相加性量子数都为零的粒子。
- 纯中性粒子在C变换下不变，它的C变换相因子称为该粒子的C宇称。
- C宇称的取值只能是1或者-1，这取决于该粒子的场量在C变换下是否改变符号。
- 作为一个相乘性量子数，对于C宇称的值来说，重要的是它的符号，因此通常用 $C' = +$ 或 $-$ 来代替 $C' = +1$ 或 -1 。

1. 光子 (γ) 的C宇称：

光子是电磁场的量子，由电磁场量 $A_\mu(x)$ 来描写， $A_\mu(x)$ 满足Maxwell方程

$$\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = j_\mu$$

在C变换下，一切电荷电流都改号， $A_\mu(x)$ 场量也随着改号，因此光子的C宇称为负，即 $C'(\gamma) = -1$

2. π^0 介子的C宇称： π^0 也是纯中性粒子，它的C宇称可以由C宇称守恒来确定。

- π^0 介子可以通过电磁衰变到两个光子 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$;
- 电磁相互作用具有C变换不变性，C宇称在衰变过程中守恒，因此 π^0 的C宇称为 $C'(\pi^0) = C'(\gamma)C'(\gamma) = 1$

3. 纯中性系统

纯中性系统需要满足两个条件：

- a) 多粒子组成的系统，如果其所有内部相加性守恒量的总和为零，则有可能构成一个纯中性系统。
- b) 该系统在C变换下其组成不变。

例如， $K^+\Lambda^0\bar{P}$ 的相加性守恒量之和为零，但不构成纯中性系统，因为在C变换下成分改变； e^+e^- 则是一个纯中性系统，可以有确定的C宇称。

一对正反粒子组成的系统的C宇称为 $C' = (-)^{L+S}$ ，其中 L 为轨道角动量， S 为总自旋。这个结论对费米子或玻色子组成的系统都成立。

附录：证明

正反粒子构成的系统，其总波函数可以定性地写作：

$$\Phi(1, 2) = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \zeta(s_1, s_2) \chi(Q_1, Q_2)$$

其中， $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ 为空间波函数， $\zeta(s_1, s_2)$ 为自旋波函数， $\chi(Q_1, Q_2)$ 为所有相加性量子数如 Q, B, S ，等的波函数。

交换正反粒子，系统不变，但状态改变，交换前后的波函数满足自旋统计关系：

$$\Phi(1, 2) = (-)^{s_1+s_2} \Phi(2, 1)$$

但是，

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \xrightarrow{(1,2) \rightarrow (2,1)} \varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = (-)^L \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

由C.G. 系数的
交换性质推出。

$$\zeta(s_1, s_2) \xrightarrow{(1,2) \rightarrow (2,1)} \zeta(s_2, s_1) = (-)^{S-s_1-s_2} \zeta(s_1, s_2)$$

$$\chi(Q_1, Q_2) \xrightarrow{(1,2) \rightarrow (2,1)} \chi(Q_2, Q_1) = C' \chi(Q_1, Q_2)$$

所以，

$$(-)^L (-)^{S-s_1-s_2} C' = (-)^{s_1+s_2} \Rightarrow C' = (-)^{L+S}$$

- 球谐函数作为轨道角动量在坐标表象的本征态

$$|LM\rangle = Y_{LM}(\theta, \phi) = (-1)^M \left(\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!} \right)^{1/2} P_L^M(\cos \theta) e^{iM\phi}$$

在 \mathcal{P} 变换下, $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi)$, 相应地,

$$P_L^M(\cos \theta) \rightarrow P_L^M(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^{L+M} P_L^M(\cos \theta)$$

$$e^{iM\phi} \rightarrow e^{iM(\pi+\phi)} = (-1)^M e^{iM\phi}$$

所以 $Y_{LM}(\theta, \phi) \rightarrow (-1)^L Y_{LM}(\theta, \phi)$ 即 $\mathcal{P}|LM\rangle = (-)^L |LM\rangle$

- 两个角动量的波函数的交换性质由C.G. 系数的性质决定

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum_{\substack{j=|j_1-j_2| \\ m=m_1+m_2}}^{|j_1+j_2|} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle |jm\rangle$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \rangle = (-)^{j-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | jm \rangle$$

四、C变换不变和C宇称守恒

强相互作用和电磁相互作用在C变换下不变。这表明对于强相互作用过程和电磁相互作用过程有以下论断：

a) 通过C变换相联系的两个过程的规律和行为相同；

b) 如果初态是C变换的本征态(有确定的C宇称)，则末态也是C变换的本征态。

例一、 π^0 介子衰变 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 允许
 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ 不允许

例二、正负电子湮灭

如果 $L = 0$ ，则有以下两种情况：

a) $S = 0$ ，这时 $C' = +$ ，可以湮灭到两个光子，但不能到三个光子；

b) $S = 1$ ，这时 $C' = -$ ，可以湮灭到三个光子，但不能到两个光子。

C宇称守恒对于强相互作用和电磁相互作用过程给出了很强的预言，但是只有纯中性粒子和纯中性系统才有确定的C宇称，它的适用范围受到很大限制。

第五节 G变换和G宇称

一、G变换和G宇称

普通介子：除了同位旋对称性所包含的相加性守恒量 I_3 以及与之相关的电荷 Q 之外，其他内部相加性守恒量都为零的粒子称为普通介子。

普通介子满足新的对称性要求，这个对称性是由**同位旋和C变换复合而成的**。

G变换：绕同位旋第二轴转180度后再做C变换的复合变换，即：

$$G = CI_2(\pi) \equiv Ce^{i\pi I_2}$$

这里最后一个定义是作用在同位旋多重态

G变换的物理意义：

在同位旋空间中，绕第二轴转动180度相当于把第一轴和第三轴反向，这样，粒子的 I_3 就将反号；再经过C变换，粒子所有的内部相加性守恒量都变号，但 I_3 又回到原来的值。因此，G变换实际上不改变 I_3 的值，但把除 I_3 以外的其它所有的内部相加性量子数都变号。对于普通介子，除 I_3 以外的其它所有的内部相加性守恒量都为零，实际上就是G变换的本征态，其本征值就是G 宇称。

- 对于单粒子态，

C变换的本征态是纯中性态，本征值为 $C' = (-)^{L+S}$
G变换的本征态是普通介子，本征值为 $G' = C'(-)^I$

例如 π^0 介子， $G'_\pi = C'_{\pi^0}(-)^{I_\pi} = -1$

- G**宇称守恒只在强相互作用下适用，**C**宇称守恒不适用于电磁和弱作用。

二、强子的G变换性质和G宇称

同位旋变换是内部空间——同位旋空间的**SU(2)**变换。对于普通介子，
 $Q = I_3$ ，同位旋为整数，同位旋本征态可以用球谐函数表示，

$$|II_3\rangle = Y_{II_3}(\theta, \phi)$$

$$1. \text{ G变换: } \mathbf{G} = \mathbf{C} \mathbf{I}_2(\boldsymbol{\pi}) \equiv \mathbf{C} e^{i\boldsymbol{\pi}\mathbf{I}_2}$$

- $\mathbf{I}_2(\boldsymbol{\pi})$ 绕同位旋第二轴转动180度, 相当于把 (θ, ϕ) 方向转为 $(\pi - \theta, \pi - \phi)$;
- \mathbf{C} 变换使波函数取复共轭, 相当于将 $(\pi - \theta, \pi - \phi)$ 方向变为 $(\pi - \theta, \pi + \phi)$ 同时再乘以 \mathbf{C}' 变换相因子 \mathbf{C}' :

$$\mathcal{C} \circ \phi_A = \mathbf{C}'_A \phi_A^*, \quad Y_{II_3}(\theta, \phi) \propto (\text{Real function}) \times e^{iI_3\phi}$$

- 由于 $Y_{II_3}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-)^I Y_{II_3}(\theta, \phi) = (-)^I |II_3\rangle$, 所以, 普通介子的G字称为

$$\mathbf{G}' = \mathbf{C}'(-)^I$$

重子和非普通介子也都有各自的G变换性质, 但不是G变换的本征态, 没有确定的G字称。

例如，K介子的G变换性质

K介子: $S = 1, B = 0, I = \frac{1}{2}, K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$ 同位旋二重态

$$I_2(\pi) = e^{i\pi I_2} = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$GK = CI_2(\pi) \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} K^0 \\ -K^+ \end{pmatrix} = C'(K) \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix},$$

所以,

$$G|K^+\rangle = C'(K)|\bar{K}^0\rangle, \quad G|K^0\rangle = -C'(K)|K^-\rangle,$$

规定C变换相因子
对同一同位旋多重
态的不同分量相同。

再考虑**K**介子的反粒子, $S = -1, B = 0, \bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix}$

$$G\bar{K} = CI_2(\pi) \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -K^- \\ -\bar{K}^0 \end{pmatrix} = C'(\bar{K}) \begin{pmatrix} -K^+ \\ -K^0 \end{pmatrix},$$

注意这里的
负号

$$G|\bar{K}^0\rangle = -C(\bar{K})|K^+\rangle, \quad G|K^-\rangle = C'(\bar{K})|K^0\rangle,$$

对于二维表示, 由于SU(2)
是SO(3)的双重覆盖群, 需要
4π 转动才能回到起点。

三、多个强子组成的系统的G变换性质

一个有多个强子组成的系统，只要其

a) 所有的内部相加性守恒量除同位旋第三分量和电荷外都为零；

b) 有确定的总同位旋；

c) 并且其相应的总同位旋第三分量为零的态有确定的C宇称；

则这个系统就具有确定的G宇称，其值为 $G' = C'(-)^I$

特别是对一对正反粒子组成的具有确定轨道角动量L和总自旋S的系统，

例如， $K\bar{K}$ 系统

$$G' = (-)^{L+S+I}$$

从前几页的推导可以知道， $K\bar{K}$ 有四种组合，它们的G变换性质如下：

$$G|K^+\bar{K}^0\rangle = -C'(K)C'(\bar{K})|\bar{K}^0K^+\rangle = -|\bar{K}^0K^+\rangle = (-)^{L+1}|K^+\bar{K}^0\rangle$$

$$G|K^0\bar{K}^-\rangle = -C'(K)C'(\bar{K})|K^-\bar{K}^0\rangle = -|K^-\bar{K}^0\rangle = (-)^{L+1}|K^0\bar{K}^-\rangle$$

$$G|K^+K^-\rangle = C'(K)C'(\bar{K})|\bar{K}^0K^0\rangle = |\bar{K}^0K^0\rangle$$

$$G|K^0\bar{K}^0\rangle = C'(K)C'(\bar{K})|K^-\bar{K}^+\rangle = |K^-\bar{K}^+\rangle$$

讨论:

a) $|K^+\bar{K}^0\rangle, |K^0\bar{K}^-\rangle$ 是 $I = 1, I_3 = \pm 1$ 的态, 是G变换的本征态。正反粒子交换, 空间波函数贡献一个 $(-)^L$ 因子, G字称为 $(-)^{L+1}$

b) $|K^+K^-\rangle, |K^0\bar{K}^0\rangle$ 是 $I_3 = 0$ 的态, 但总同位旋不确定, 需要进行线形组合:

$$|K\bar{K}(I = 0, I_3 = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^+K^-\rangle + |K^0\bar{K}^0\rangle), G' = (-)^L$$

$$|K\bar{K}(I = 1, I_3 = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^+K^-\rangle - |K^0\bar{K}^0\rangle), G' = (-)^{L+1}$$

c) 以上结论也可以直接利用公式 $G' = (-)^{L+S+I}$ 得出:

K 介子自旋为0, 所以总自旋为 $S = 0$;

K 介子同位旋为 $1/2$, 所以总同位旋只能为 $I = 0$ 或 $I = 1$,

所以, 当 $I = 1$ 时, G字称为 $G' = (-)^{L+S+I} = (-)^{L+1}$

当 $I = 0$ 时, G字称为 $G' = (-)^{L+S+I} = (-)^L$

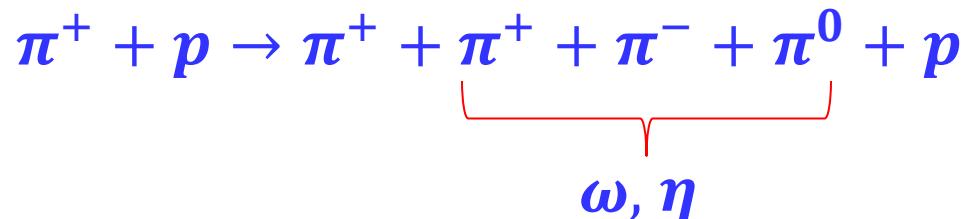
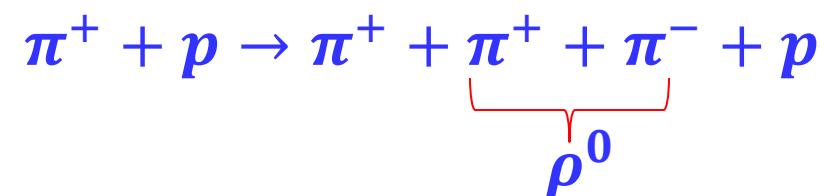
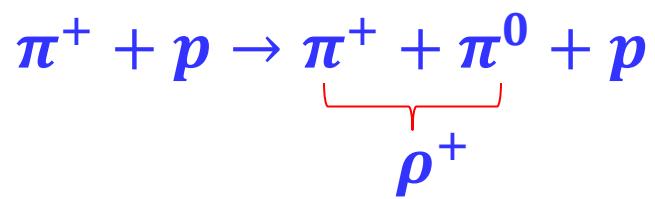
四、G宇称守恒及其在强子物理中的应用

强相互作用在C变换和同位旋转动下不变 \rightarrow 强相互作用在G变换下不变。
电磁相互作用同位旋不守恒 \rightarrow 电磁相互作用下G宇称不守恒。

G宇称在强相互作用下守恒，在电磁相互作用下不守恒，这个性质在研究和分析普通介子的强衰变时特别重要，它给出很强的限制和预言。

以下以几个例子说明G宇称守恒在强子物理中的应用：

历史上， ρ , ω 和 η 介子都是在 πp 碰撞试验中首先发现的，例如：



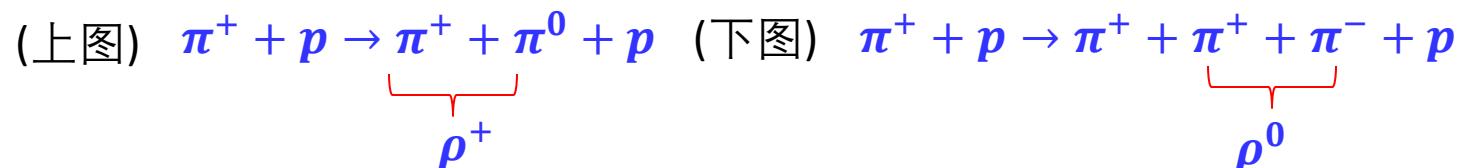
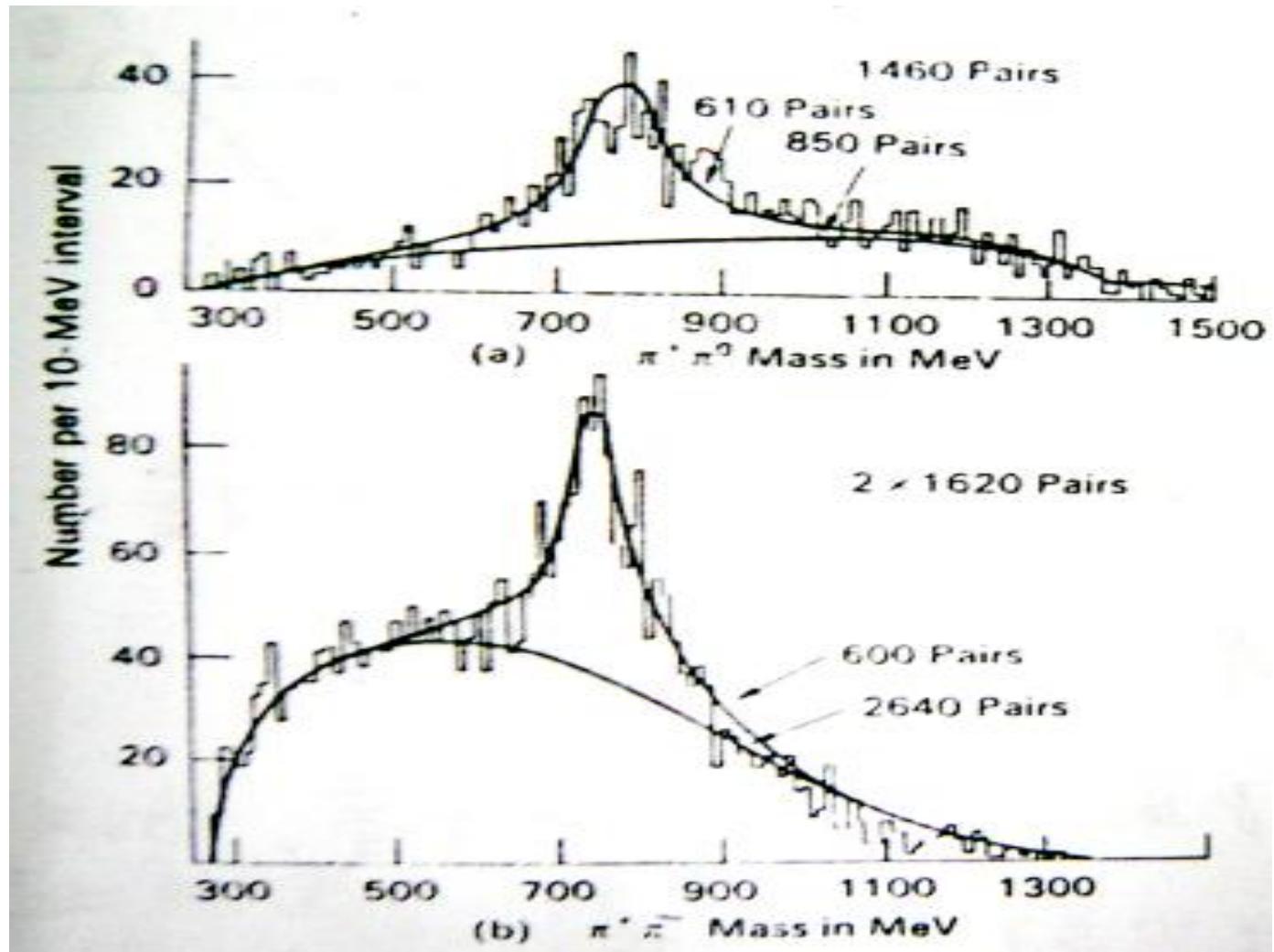
1. ρ 介子 ($I^G J^{PC} = 1^+ 1^{--}$)

实验现象：

强子碰撞产生多个 π 介子的末态中，发现 $\pi^+\pi^0$, $\pi^+\pi^-$ 以及 $\pi^-\pi^0$ 的不变质量在 (768.3 ± 0.5) MeV 处有一个很宽的峰，宽度为

$$\Gamma = (149.1 \pm 2.9)$$

但在 $\pi^+\pi^+$ 和 $\pi^-\pi^-$ 的不变质量谱中没有发现类似的结构。



- 理论分析:**
- a) 这些峰的出现表明存在一个强子共振态，命名为 ρ 粒子；
 - b) 宽度远大于 MeV 量级，可以判定它是通过强作用衰变的；
 - c) 只存在电荷 $Q = 1, 0, -1$ 的态，只有普通介子，所以 $I = 1$ 。
 - d) 强衰变 G 宇称守恒，而且 $G_\pi = -$ ，所以 ρ 的 G 宇称为 +。
 - e) 利用关系 $G' = C'(-)^I$ 可以推出 ρ^0 的 C 宇称为负。
 - f) $\pi\pi$ 系统的总自旋为 $S = 0$ ，所以 $\pi^+\pi^-$ 的 C 宇称为 $(-)^L$ ，根据上面定出的 ρ^0 的 C 宇称为负，可以确定 L 为奇数，从而 ρ 的自旋 $J = L$ 为奇数，进一步的实验确定了 ρ 的自旋 $J = 1$ 。

- 理论预言:**
- a) ρ 介子强衰变到 $\pi\pi\pi$ 末态是禁戒的 (G 宇称守恒)；
 - b) ρ 介子电磁衰变到 $\gamma\gamma$ 末态是严格禁戒的 (C 宇称守恒)；
 - c) ρ 介子电磁衰变到 $\pi\gamma$ 末态是允许的 (C 宇称守恒)。
 - d) ρ 介子衰变到 $\pi^0\pi^0$ 末态是禁戒的 (C 宇称守恒)
 - e) 这些预言后来都被实验很好地检验了。

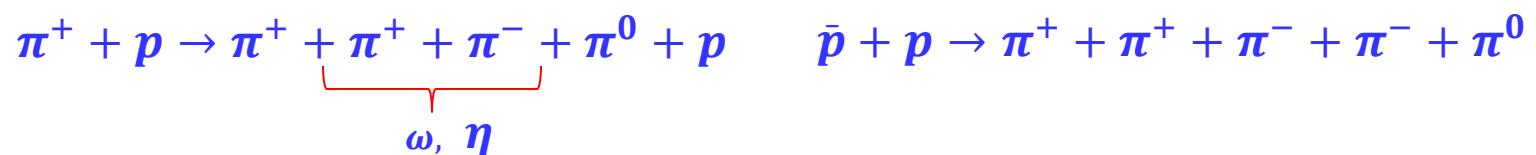
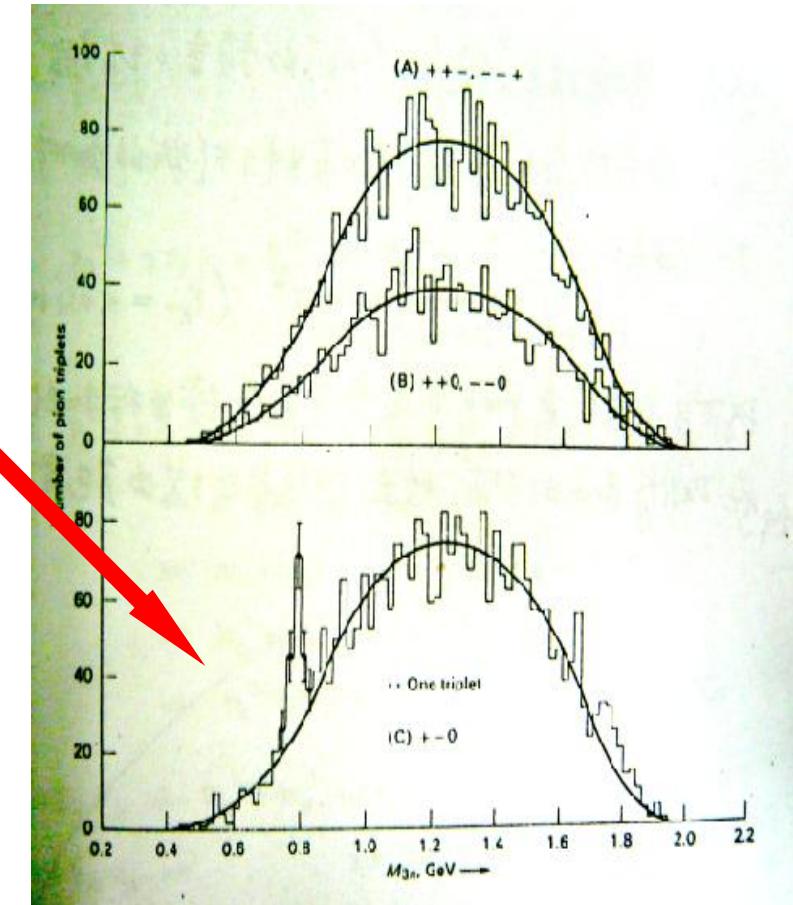
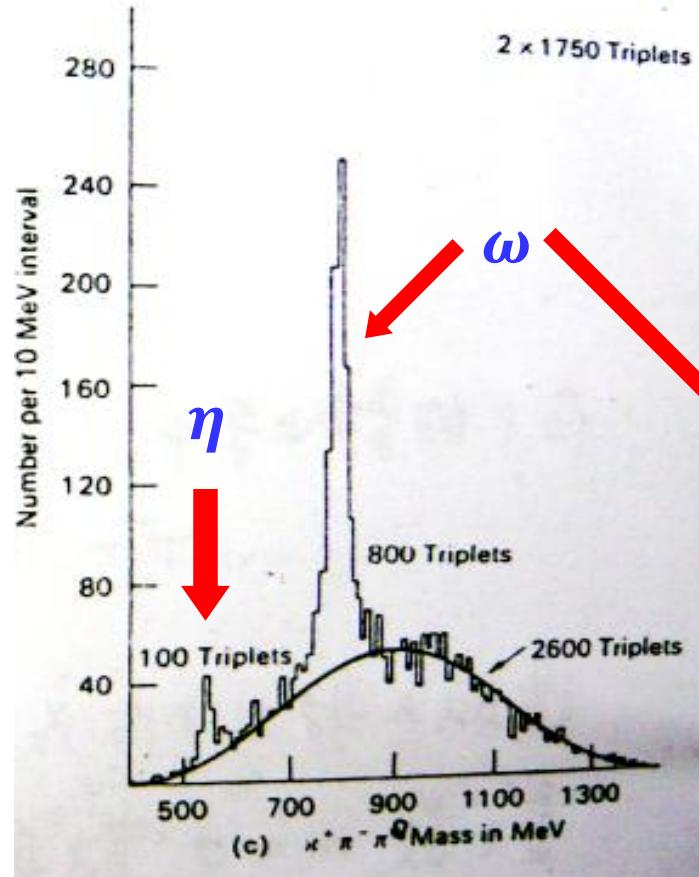
2. ω 介子共振态

实验现象：

在研究强子碰撞产生多个 π 介子的末态中，发现 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 系统存在共振结构

$$m_R = 781.95(14)\text{MeV}$$
$$\Gamma = (8.43 \pm 0.10)\text{MeV}$$

但在 $\pi^+\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^+\pi^-\pi^-$ 的不变质量谱中没有发现类似的结构。



- 理论分析:**
- a) 这表明存在一个强子共振态，命名为 ω 粒子；
 - b) 宽度在 MeV 量级，可以判定它是通过强作用衰变的；
 - c) 只存在电荷 $Q = 0$ 的态，而且末态中只有普通介子，所以 $I = 0$ ；
 - d) 强衰变 G 守恒，而且 $G_\pi = -$ ，所以 ω 的 G 守称为负。
 - e) 利用关系 $G' = C'(-)^I$ 可以推出 ω 的 C 守称为负。
 - f) 受 G 守恒的限制， ω 介子不能强衰变到 $\pi^+ \pi^-$ 末态，但如果的自旋 $J=奇数$ ，则可以通过电磁相互作用衰变到 $\pi^+ \pi^-$ 末态，因为这时 $\pi^+ \pi^-$ 的 C 守称也为负。实验上后来发现 ω 介子有 $(2.2 \pm 0.3)\%$ 的分支比衰变到 $\pi^+ \pi^-$ ，这也印证了 ω 介子的自旋为奇数。实验上最后确定 ω 介子的自旋为 $J = 1$ 。

-
- 理论预言:**
- a) ω 介子强衰变到 $\pi^+ \pi^-$ 末态是禁戒的 (G 守恒)；
 - b) ω 介电磁衰变到 $\gamma\gamma$ 末态是禁戒的 (C 守恒)；
 - c) ω 介电磁衰变到 $\pi^0 \pi^0$ 末态是禁戒的 (C 守恒)；
 - d) ω 介子电磁衰变到 $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ 末态是禁戒的 (C 守恒)。
 - e) 这些预言后来都被实验很好地检验了。

3. η 介子共振态

实验现象：在研究强子碰撞产生多个 π 介子的末态中，发现 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 和 $\pi^0\pi^0\pi^0$ 的不变质量在 $(548.8 \pm 0.6)\text{MeV}$ 处有一个峰，当时观察到的宽度为 $\Gamma < 1\text{MeV}$ ，但在 $\pi^+\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^+\pi^-\pi^-$ 不变质量谱中没有发现类似结构。

- 理论分析：**
- a) 这表明存在一个强子共振态，命名为 η 粒子；
 - b) 只存在电荷 $Q=0$ 的态，而且末态中只有普通介子，所以 $I = 0$ ；
 - c) 强衰变和电磁衰变 C 守恒，而且 $C'(\pi) = +$ ，利用过程 $\eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 可以得到 $C'(\eta) = +$ ；
 - d) 利用关系 $G' = C'(-)^I$ 可以推出 η 的 G 守恒为正。
 - e) 受 G 守恒的限制，介子不能强衰变到 $\pi\pi\pi$ 末态。所以， $\eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 和 $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 只能通过（二级）电磁相互作用进行（****见后面说明）

f) 由于 η 介子的另外两个主要衰变方式是

$$\eta \rightarrow \gamma\gamma, \quad \eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$$

它们分别是通过二级和一级电磁相互作用进行，所以 η 介子的宽度应该远小于 MeV 的量级。现在实验测定 η 介子的总宽度为

$$\Gamma = 1.19 \pm 0.12 \text{ keV}$$

注：如果考虑同位旋破坏效应， $\eta \rightarrow 3\pi$ 也可以通过强相互作用发生，但分宽度正比于 $(m_d - m_u)^2$ ，参阅参考文献

η and η' Mesons with Connection to Anomalous Glue

Steven D. Bass and Paweł Moskal, arXiv:1810.12290 (hep-ph)

- η 和 η' 的两个主衰变模式:

$$\eta(\eta') \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0, \quad \eta(\eta') \rightarrow \gamma\gamma$$

- 强子衰变对其中的手征对称性动力学很敏感。
- 3π 末态的衰变是G宇称破坏的，更根本的是同位旋破坏效应。
- 同位旋破坏效应来自 u, d 夸克质量的不同——同位旋对称性不是严格的对称性。
- 因此，尽管 3π 衰变是强衰变，但其分宽度和 2γ 是相同量级的。

$\eta(547)$: $\Gamma = 1.31 \pm 0.05 \text{ keV}$,

$$Br(\eta \rightarrow 3\pi^0) = 32.68 \pm 0.23\%,$$

$$Br(\eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) = 22.92 \pm 0.28 \%$$

$$Br(\eta \rightarrow 2\gamma) = 39.31 \pm 0.20\%,$$

$\eta'(958)$: $\Gamma = 0.196 \pm 0.009 \text{ MeV}$

$$Br(\eta' \rightarrow \eta \pi^+ \pi^-) = 42.6 \pm 0.7\%$$

$$Br(\eta' \rightarrow \eta \pi^0 \pi^0) = 22.8 \pm 0.8\%$$

五、G变换小结

1. G变换不改变同位旋第三分量的值，但把除同位旋第三分量以外的其它所有的内部相加性量子数都变号。
2. 所有强子都有确定的G变换性质，但只有普通介子才具有G宇称。
3. 一个由多个强子组成的系统，只要其所有的内部相加性守恒量除同位旋第三分量外都为零，又有确定的同位旋，并且相应的中性分量具有确定的C宇称，则这个态就是G变换的本征态，有确定的G宇称。
4. 由几个具有确定的G宇称的子系统所组成的系统也具有确定的G宇称，其值等于各个子系统的G宇称的乘积。

第六节 空间反射变换 (P 变换)

一、空间反射变换—— P 变换

空间反射变换：定义为空间坐标都反号，但时间不变的变换，即

$$P\vec{x}P^{-1} = -\vec{x}, \quad P\vec{t}P^{-1} = \vec{t}, \quad P^2 = 1$$

在 P 变换下，每一个运动状态变为另一个状态。虽然对于一个特定的点来说， P 变换的效果等价于某种转动。但对于一个物理状态来说，它不完全等效于某种转动。一般来说， P 变换是一种典型的分立变换，不能等价于某种特殊的连续变换。在经典物理范围内， P 变换不变性不对应某种守恒定律，但在微观物理中， P 变换直接和宇称守恒相联系。

相应地，空间动量： $P\vec{p}P^{-1} = -\vec{p}$ ，能量： $PEP^{-1} = E$

角动量： $P\vec{L}P^{-1} = P\vec{x} \times \vec{p}P^{-1} = (-\vec{x}) \times (-\vec{p}) = \vec{L}$ 

$[P, \vec{L}] = 0$  轨道角动量和 P 变换有共同的本征态，可以同时测量。

常见的一些物理量在P变换下的性质：

物理量	位置	动量	角动量（自旋）	电场	磁场	电偶极矩	磁偶极矩
	\vec{r}	\vec{p}	$\vec{L}(\vec{S})$	\vec{E}	\vec{B}	$\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$
\mathcal{P} 变换	$-\vec{r}$	$-\vec{p}$	$\vec{L}(\vec{S})$	$-\vec{E}$	\vec{B}	$-\vec{\sigma} \cdot \vec{E}$	$\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$

二、轨道宇称(orbital parity)和内禀宇称(intrinsic parity)

1. 轨道宇称——系统空间运动状态的P变换本征值

在量子力学中我们已经知道，当系统轨道角动量为 L 时，轨道角动量的本征态可以用球谐函数表示，

$$|LM\rangle = Y_{LM}(\theta, \phi) = (-1)^M \left(\frac{(2L+1)(L-M)!}{4\pi(L+M)!} \right)^{1/2} P_L^M(\cos \theta) e^{iM\phi}$$

在 P 变换下， $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi)$ ，相应地，

$$P_L^M(\cos \theta) \rightarrow P_L^M(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^{L+M} P_L^M(\cos \theta)$$

$$e^{iM\phi} \rightarrow e^{iM(\pi+\phi)} = (-1)^M e^{iM\phi}$$

所以 $Y_{LM}(\theta, \phi) \rightarrow (-1)^L Y_{LM}(\theta, \phi)$ 即 $P|LM\rangle = (-)^L |LM\rangle$

这正是前面得到的结论，轨道角动量和P变换有共同的本征态，轨道角动量为 L 的态P变换本征值——空间宇称——为 $(-)^L$

2. 内禀宇称

在P变换下，粒子内部波函数还有一定的P宇称，称作内禀宇称，简称为粒子的宇称。

- a) 粒子的内禀宇称与其内部运动性质有关，但我们目前还不十分清楚其内部运动性质，不能像轨道运动那样给出明显的P变换表达式，只能从实验确定。
- b) 目前所用的假设是：强作用和电磁相互作用下宇称守恒+其它合理假设。
- c) P变换是空间变换，它和内部对称变换正交，因此它与内部的对称性变换应该是对易的。这就要求属于内部变换群的同一个不可约表示的各个粒子由相同的宇称量子数。所以，同一个同位旋多重态的不同电荷态有相同的宇称。
- d) 中微子不参加电磁相互作用和强相互作用，所以无法确定其宇称。

三、 相对宇称和绝对宇称

内禀宇称只能根据 P 宇称守恒定律的要求来确定，从这一点上来说具有相对性。只有纯中性粒子（可以推广到普通介子）才有绝对的内禀宇称（它们可以独立产生和湮灭）：

- a) 如果粒子可以单独产生和湮灭，所以可以有绝对宇称；
- b) 重子数守恒要求正反重子同时产生，重子的宇称需要约定；
- c) 电磁和强相互作用奇异数守恒要求奇异粒子协同产生，宇称是相对的。

1) 纯中性粒子(及普通介子) 的内禀宇称由实验测定，例如：

$$P'(\gamma) = -1, \quad P'(\pi^0) = -1,$$

2) 质子和中子可以看作是同一种粒子——核子——的不同带电状态，它们有相同的内禀宇称，约定为：

$$P'(p) = P'(n) = +1$$

3) 重子数守恒，所以可以约定所有的重子的内禀宇称为+1。

4) 更一般地, 对于非纯中性粒子的内禀宇称, 针对各种不同的内部相加性守恒量, 再补充一些约定以消除不确定性:

守恒量	宇称约定	守恒量	宇称约定
电荷 Q	同一同位旋多重态的不同电荷态宇称相同 $P'(N) = +$	e 轻子数 μ 轻子数	$P'(e) = +$ $P'(\mu) = +$
重子数 b		τ 轻子数	$P'(\tau) = +$
奇异数 S	$P'(K) = P'(\pi) = -$	底数 B	$P'(B) = P'(\pi) = -$
粲数 C	$P'(D) = P'(\pi) = -$		

四、 正反粒子组成的纯中性系统的宇称

- 在正反粒子系统的质心系中，设系统的轨道角动量为 L ，总自旋为 S 。系统 的状态可以写成 $|A(\vec{r}, s_1)\bar{A}(-\vec{r}, s_2)\rangle$ ， s_1, s_2 分别表示正反粒子的自旋状态。
- 对上面的态进行 C 变换和 P 变换的联合变换（ CP 变换，详细讨论见后），

$$\begin{aligned} P|A(\vec{r}, s_1)\bar{A}(-\vec{r}, s_2)\rangle &= P'(A)P'(\bar{A})|A(-\vec{r}, s_1)\bar{A}(\vec{r}, s_2)\rangle \\ &= (-)^{L+2s}|A(\vec{r}, s_1)\bar{A}(-\vec{r}, s_2)\rangle \end{aligned}$$

这里用到一个**场论的结论**：

$$P'_{\text{内禀}}(A\bar{A}) = (-)^{2s}$$

正反费米子的内禀宇称符号相反；
正反玻色子的内禀宇称符号相同。

所以，正反粒子系统的（绝对）宇称为

$$\begin{cases} P' = (-)^{L+1} & (\text{正反费米子对}) \\ P' = (-)^L & (\text{正反玻色子对}) \end{cases}$$

五、宇称守恒

大量实验表明，宇称在电磁和强相互作用下守恒，但在弱作用下不守恒。

例如，中子的电偶极矩

设中子的磁偶极矩值为 μ_m ，电偶极矩值为 μ_e ，则在外电磁场中的 Hamiltonian 为

$$H = H_0 + \mu_m \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

其中 H_0 为 P 变换不变的部分。在 P 变换下，有

$$PHP^{-1} = H_0 + \mu_m \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{E}$$

选定有确定宇称的态 $|\alpha\rangle$ 来讨论，

$$\langle \alpha | \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{E} | \alpha \rangle = \langle \alpha | P^{-1} P \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{E} P^{-1} P | \alpha \rangle = -P'(\alpha)^2 \langle \alpha | \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{E} | \alpha \rangle$$

所以有 $\mu_e = 0$ 。

目前实验测到的中子的电偶极矩为 $\mu_e(n) < 10^{-25} e \cdot cm$ ，这是很小的量。这说明强相互作用和电磁作用下宇称守恒。

六、宇称不守恒

1. $\theta - \tau$ 疑难

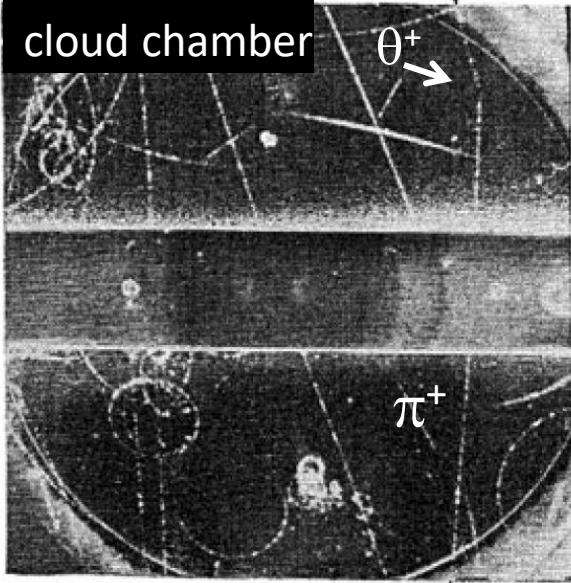
在对最轻的奇异粒子衰变过程的研究中遇到了一个疑难，即“ $\theta - \tau$ 疑难”。这个疑难表现为：实验中发现了两种质量、寿命和电荷都相同的粒子 θ 和 τ ，衰变时， θ 衰变为两个 π 介子， τ 衰变为三个 π 介子。

实验结果的分析表明，三个 π 介子的总角动量为零，宇称为负；而两个 π 介子的总角动量如为零，则宇称只能是正。因此从质量、寿命和电荷来看， θ 和 τ 似乎应是同一种粒子，但是从衰变行为来看，如果宇称是守恒量，则 θ 和 τ 就不可能是同一种粒子。

2. 宇称不守恒概念的提出

1956年李政道和杨振宁全面分析了 $\theta - \tau$ 疑难有关的全部实验和理论工作之后指出，这个疑难的焦点在于认为微观粒子的运动过程中宇称守恒。他们指出，在强相互作用和电磁相互作用过程中宇称守恒是得到了实验的判定性检验的，但在弱相互作用过程中宇称守恒并没有得到实验的判定性检验。

1947



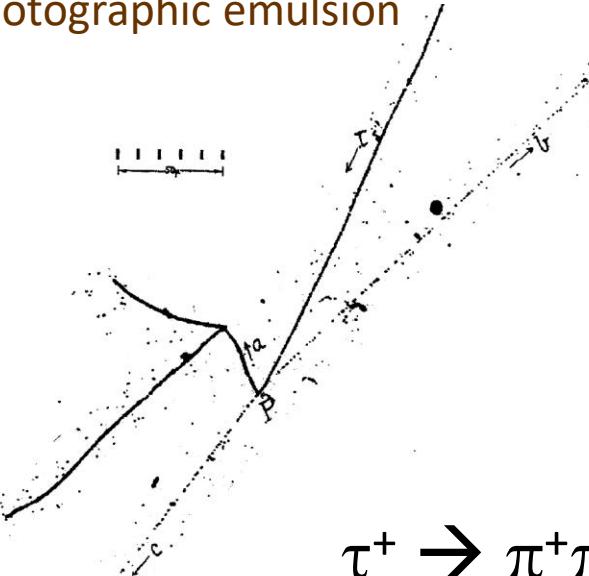
$$\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$$

$$m_\theta \approx m_p/2$$

G.D. Rochester & C.C. Butler,
Nature 160, 855 (1947)

1949

photographic emulsion



$$\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$$

$$m_\tau = 970 m_e \text{ (495 MeV)}$$

R.Brown et al., Nature 163, 47,82 (1949)

$$P(\theta^+) = (-1)(-1) = +\theta^+$$

θ has even parity

same mass,
same lifetime,
opposite P

$$P(\tau^+) = (-1)^3 = -\tau^+$$

τ has odd parity

T.D. Lee & C.N. Yang (Phys. Rev 104, 254 (1956)) $\theta^+ = \tau^+$ (now = K⁺ meson) & parity is violated in weak decays

李政道和杨振宁提出，这个疑难产生的原因在于弱相互作用过程中宇称可以不守恒。他们进一步建议可以通过钴60的衰变实验



来对这一点进行判定性检验：考虑计上述极化钴60的 β 衰变，放出的电子的角分布应该表示成为

$$I(\theta) \propto 1 + \alpha \frac{\vec{p} \cdot \hat{J}}{E_p} = 1 + \alpha \frac{p}{E} \cos\theta$$

其中 \hat{J} 为钴60的极化方向， θ 为电子动量 \vec{p} 和 \hat{J} 的夹角。显然，第一项是 P 变换不变的，而第二项是变的， $\alpha \neq 0$ 表示 P 的破坏程度。

随后，吴健雄按照李-杨的方案做了实验，发现 $\alpha \approx -1$ ：电子倾向于沿极化 \hat{J} 的相反方向发射。考虑到初末态原子核自旋差 $\Delta J = 1$ ，角动量在 \hat{J} 方向守恒，则电子的手性（螺旋度）应该为-1，即左手态电子，这也确定了低能弱相互作用的 $V-A$ 理论（见第五章内容）

3. 宇称不守恒的实验检验

在宏观范围内运动规律具有很好的左右对称性，亦即在空间反射变换下具有不变性，但在宏观范围内这种不变性并不对应存在守恒定律。在微观范围内如果运动规律具有左右对称性，则对应存在P宇称守恒定律。

实验的原理是利用核磁技术使钴60的原子核极化，即原子核自旋方向沿确定方向排列，观察钴60通过 β 衰变（弱作用）放出电子的方向分布。如果宇称是守恒的，则包含自旋轴正向的半球方向内射出的电子数应与包含自旋轴负向的半球方向内射出的电子数相近（自旋与角动量在镜像变换下不变），即左右对称；反之如果这两个半球方向内射出的电子数不相等，即表现出明显的左右不对称性；则表明弱相互作用过程中宇称可以不守恒。

1957年吴健雄进行了这个实验，证实了李政道和杨振宁提出的分析判断。

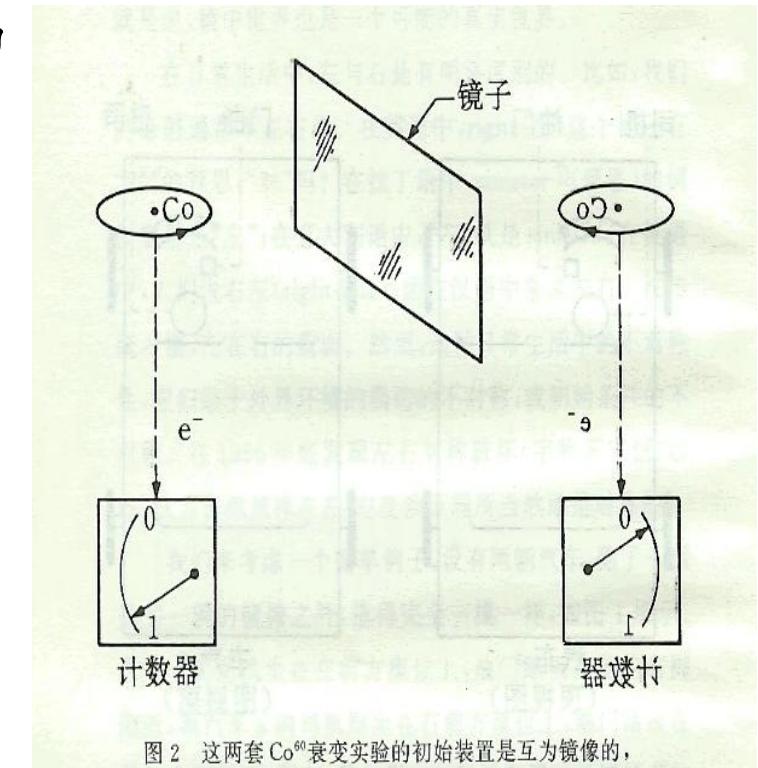


图2 这两套 Co^{60} 衰变实验的初始装置是互为镜像的，

第七节 CP 变换

一、CPT定理

CPT定理 (在量子场论中证明) :

如果所讨论的场是定域场 (即场所对应的粒子是点粒子) ; 场具有相对论要求的正Lorentz 协变性; 满足自旋统计关系 (即自旋为整数的粒子满足玻色统计, 自旋为半整数的粒子满足费米统计) , 则运动规律在CPT联合变换下不变。

CPT定理的几个直接的推论:

- a) 粒子和反粒子的质量、寿命、自旋磁矩的g因子都完全相同;
- b) 粒子的某一衰变道的衰变速率和C变换后反粒子的相应的衰变道的衰变速率相等。

CPT定理在相当高精度下为实验所证实。

当然这些并不是CPT定理的物理含义的全部。具体内容和证明参见量子场论等。

二、CP变换的性质

1. C变换和P变换的关系

对粒子态 $|A\rangle$ 做 C 和 P 的联合变换

$$CP|A\rangle = CP'(A)|A\rangle = C'(A)P'(A)|\bar{A}\rangle; \quad PC|A\rangle = PC'(A)|\bar{A}\rangle = C'(A)P'(\bar{A})|\bar{A}\rangle.$$

显然，一般情况下，由于正反粒子的 P字称并不一定相等，所以 C变换和P变换一般情况下不对易，不一定有共同的本征态。只有纯中性粒子（系统）才是 C 和 P 的共同本征态。

2. CP变换的性质

CP和PC不对易，但互为逆变换： $CPPC = 1$

定义双 CP变换 F： $F = CPCP$

$$\begin{aligned} F|A\rangle &= CPCP|A\rangle = C'(A)P'(A)CP|\bar{A}\rangle \\ &= C'(A)P'(A)P'(\bar{A})C'(\bar{A})|A\rangle = P'(A)P'(\bar{A})|A\rangle = (-)^{2s}|A\rangle \end{aligned}$$

3. 内禀CP宇称

- a) 纯中性粒子是CP变换的本征态，有确定的CP宇称，其值等于该粒子的C宇称和P宇称的乘积。
- b) 正反粒子组成的纯中性系统也是CP变换的本征态，其本征值为 $(-1)^{S-2s}$ ，和轨道角动量无关。

根据前面的内容：

- i) 正反粒子对系统的内禀宇称为 $(-)^{2s}$
- ii) 正反粒子的轨道宇称为 $(-)^L$
- iii) 正反粒子的C宇称为 $(-)^{L+s}$

$\left. \begin{array}{l} (-)^{2s} \\ (-)^L \\ (-)^{L+s} \end{array} \right\} (-1)^{S-2s}$

特别是正反赝标介子组成的系统，其CP宇称恒正，因此其C宇称和P宇称同号。

4. 弱相互作用的CP不变性

- 1957年，发现弱相互作用下P宇称不守恒；一个自然的问题是弱作用下C宇称是否还是守恒量，CP呢？
- 1957–1958年建立的普适费米弱相互作用理论，很好地概括了弱作用宇称可以不守恒的要求，而且在这个理论中，C宇称也可以不守恒，但CP是守恒的。关于弱相互作用的费米理论很快得到了实验的验证。

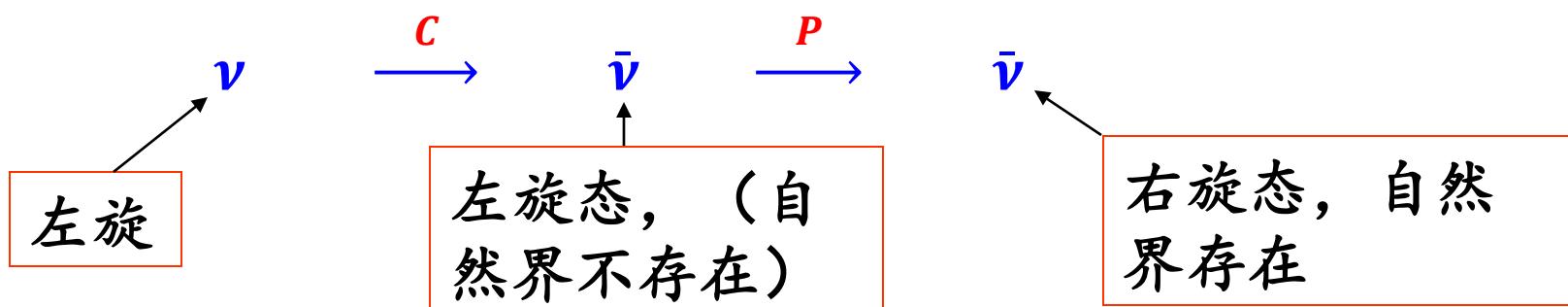
1) 中微子和反中微子的变换关系是CP变换。

a) 中微子是质量为0（在标准模型中），自旋为1/2的费米子；

b) 右旋（右手）中微子和左旋（左手）中微子都是Dirac方程的解；

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi = \begin{cases} -\chi & \text{左旋 (左手)} \\ \chi & \text{右旋 (右手)} \end{cases}$$

c) 自然界只存在左旋（左手）中微子和右旋反中微子。



$$\begin{array}{l} \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\ \vec{J} \rightarrow \vec{J} \end{array}$$

2) CP变换不变性: 两个通过CP变换联系起来的过程, 其演化性质和概率分布完全相同。

例如, 两个弱相互作用过程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu \\ \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \end{array} \right.$$

就是通过CP变换联系起来的:

$$\pi^+(\vec{p}) \xrightarrow{CP} \pi^-(-\vec{p})$$

$$\mu^+(\vec{k}, s_k) \xrightarrow{CP} \mu^-(-\vec{k}, s_k)$$

$$\nu_\mu(\vec{k}', s_{k'} = -\frac{1}{2}) \xrightarrow{CP} \bar{\nu}_\mu(-\vec{k}', s_{k'} = -\frac{1}{2})$$

弱相互作用CP不变性要求这两个过程的性质和衰变宽度完全相同, 实验也很好地证明了这一点。

三、CP破坏效应

1. 中性K介子的弱相互作用行为

K^0 介子和它的反粒子 \bar{K}^0 介子是不同的粒子：

$$\begin{cases} K^0: S = 1, I_3 = -1/2; \\ \bar{K}^0: S = -1, I_3 = 1/2 \end{cases}$$

但是，弱相互作用下，它们的差别都不是守恒量，所以从衰变行为不能区分。

一部分中性K介子衰变得很快， $\tau = (0.892 \pm 0.002) \times 10^{-10}s$ ，记为 K_S ；
一部分中性K介子衰变得很慢， $\tau = (5.17 \pm 0.04) \times 10^{-8}s$ 记为 K_L 。

理论上可以给出如下解释：弱相互作用下CP变换不变性是很好的近似（只有千分之几的破坏效应）。可以先忽略其破坏效应而把CP作为严格的守恒量。那么，中性K介子在弱衰变时应作为CP宇称为正 (K_S) 和CP宇称为负的态 (K_L) 的叠加，而这两个态分别按照CP宇称守恒的要求衰变。具体地，

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + CP|K^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle),$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - CP|K^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle).$$



$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L\rangle + |K_S\rangle),$$

$$|\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_L\rangle - |K_S\rangle).$$

- 首先，由于弱相互作用CP（近似）守恒，而且 $\pi\pi$ 中性系统的CP为正，

$K_S \rightarrow \pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-$ 是允许的，

$K_L \rightarrow \pi^0\pi^0, \pi^+\pi^-$ 是禁戒的。

- 实验上， K_S 和 K_L 的主衰变方式没有二体纯轻子衰变，只有三体半轻子衰变和强子衰变；强子衰变可以到两个和三个 π 介子；
- K_S 可以衰变到两个 π 末态； K_L 只能衰变到三个 π 介子末态。
- 两体末态的相空间远比（用初态质量无量纲化后）三体衰变末态相空间大；所以 K_S 介子的平均寿命要比 K_L 的平均寿命短很多。

2. 中性K介子衰变中的CP破坏

a) 如果CP不变性严格成立，则初末态的CP宇称应该严格守恒。

实际上，1964年实验中发现长寿命的 K_L 粒子也有一小部分可以衰变到两个 π 介子，这表明在弱相互作用过程中也有少量的CP破坏的分量。为了对弱相互作用下CP破坏的程度以定量的描写，可以通过 K_S 介子和 K_L 介子的双 π 衰变来测量。定义

$$|\eta_{+-}| = \left[\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)} \right]^{1/2}, \quad |\eta_{00}| = \left[\frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0)} \right]^{1/2}$$

理论上，如果CP不变性严格成立，应该有 $|\eta_{+-}| = 0, \quad |\eta_{00}| = 0$.

而实验上

$$|\eta_{+-}| = (2.286 \pm 0.018) \times 10^{-3},$$

$$|\eta_{00}| = (2.274 \pm 0.018) \times 10^{-3}.$$

b) 如果CP不变性严格成立，则通过CP联系的两个过程的性质应该完全相同。

在 K_L 的半轻子衰变道中，由CP变换互相联系的两个衰变道

$$K_L \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu_\mu, \quad K_L \rightarrow \pi^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$$

衰变分宽度应相同，即理论上

$$\delta\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu) = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu) - \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \mu^- \bar{\nu})}{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu) + \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \mu^- \bar{\nu})}$$

应该为零，但实验上给出，

$$\delta\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu_\mu) = (0.64 \pm 0.08)\%$$

$$\delta\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e) = (0.666 \pm 0.028)\%$$

c) 这说明弱相互作用下CP变换不变性在相当好的近似下保持，但在某些弱相互作用过程中，观察到有约千分之几的CP破坏效应。

d) 考虑CP破坏效应后 K_S 和 K_L 的表达式

弱相互作用中的CP破坏效应首先是在中性K介子的衰变中观察到的。

从前面的讨论可以知道，由于CP破坏效应， K_S 和 K_L 都不再是CP的严格本征态， K_S 和 K_L 的表达式需要修改成，

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}} ((1+\varepsilon)|K^0\rangle + (1-\varepsilon)CP|K^0\rangle),$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\varepsilon|^2)}} ((1+\varepsilon)|K^0\rangle - (1-\varepsilon)CP|K^0\rangle).$$

ε 是一个复量，
描述CP破坏成分所占比例。

现有的实验结果为，

$$\text{Re}(\varepsilon) = (1.630 \pm 0.083) \times 10^{-3},$$

$$\arg(\varepsilon) = (44.6 \pm 1.2)^\circ,$$

$$\arg(\varepsilon) = (48.5 \pm 3.1)^\circ,$$

对 $\pi^+\pi^-$ 衰变末态；

对 $\pi^0\pi^0$ 衰变末态；

3. 正反中性 K 介子组成的系统

- 正反中性 K 介子组成的系统的CP宇称恒为正。
- 如果略去弱相互作用中少量的CP破坏，正反中性 K 介子都将表现为CP的本征态 K_S 和 \bar{K}_S 的叠加。

$$CP(K_SK_L) = CP(K_S)CP(K_L)(-)^L = +1$$

$$CP(\bar{K}_SK_S) = CP(\bar{K}_S)CP(K_S)(-)^L = +1$$

$$CP(K_L\bar{K}_L) = CP(K_L)CP(\bar{K}_L)(-)^L = +1$$

- 考虑到正反中性 K 介子之间的相对轨道角动量的不同，实验上观察到的衰变行为还可以有两种情况：

$$\begin{array}{ccc} K_SK_L, & \longrightarrow & L = 1, 3, 5, \dots \Rightarrow P' = -1, C' = -1; \\ \bar{K}_SK_S, K_L\bar{K}_L & \longrightarrow & L = 0, 2, 4, \dots \Rightarrow P' = +1, C' = +1. \end{array}$$

4. CP破坏的可能来源

弱相互作用下CP破坏现象发现后，人们曾试图给出理论解释，也曾致力于找出除中性K介子的衰变外还有哪些实验中可以观察到CP破坏的效应。

在60年代的各种理论探索中，超弱相互作用理论是最为多数人所接受的理论。按照这个理论，CP破坏效应来自于与弱相互作用不同的超弱相互作用，并且CP破坏效应也将只能在中性K介子的衰变中被观察到。当时的实验发现除中性K介子的衰变外其它的实验中也都没有观察到CP破坏现象。如果存在超弱作用，这种超弱作用的来源和机理，仍然是理论上需要回答的问题。现有的新实验包括K介子和B介子衰变的实验基本排除了超弱作用理论。

70年代规范场论的发展给出CP破坏现象的两个可能的来源：强CP破坏和弱CP破坏。

a) 强CP破坏

量子色动力学(QCD)是目前公认的描述强相互作用的正确理论。根据QCD理论，QCD的拉氏量可以有一项

$$\mathcal{L}_\theta = \theta \frac{g^2}{32\pi^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

其中 θ 是一个无量纲的常量， $\theta \neq 0$ 时将导致强相互作用中有CP破坏出现，通常称为强CP破坏。这是实验上发现的CP破坏现象的一个可能的来源。

如果实验上发现的CP破坏现象由来自强CP破坏的贡献，则参量 θ 的值应约为 10^{-8} 。为什么 θ 的值会取这样一个非常接近于零而不等于零的数，这个问题又需要理论进一步给出回答。

b) 弱CP破坏

- 按照电弱统一理论，基本的费米子，即轻子和夸克是成组(称为“代”)地出现的。各代费米子的相互作用性质对应相同，它们之间的不同直主要表现为质量的不同。
- 不同代的夸克之间会发生混合。如果自然界存在 n 代费米子，数学上用一个 n 维复空间基矢间的么正变换来描写不同代夸克之间的混合。
- 目前实验上发现存在三代夸克。它们的混合矩阵(CKM)矩阵为

$$\begin{array}{c|c} \text{弱作用本} & \xrightarrow{\quad} \\ \text{征态} & \end{array} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \xleftarrow{\quad} \begin{array}{c|c} \text{质量本} & \\ \text{征态} & \end{array}$$

- CKM矩阵是一个 **么正矩阵**，它可以参数化为三个欧拉角和一个不可去的相角，这个相角的存在会破坏CP，称为 **弱CP破坏**。

- CP破坏也是宇宙中物质和反物质不对称的可能来源。
- 弄清实验上观察到的CP破坏现象的物理来源和机理是当前粒子物理实验和理论研究上的一个重要课题。在日本KEK的B介子工厂Belle及其升级版Belle II 实验的主要任务就是要研究CP破坏的机制问题。Belle的结果与标准模型一致，更高亮度的Belle II 已经开始取数。

第八节 全同粒子交换变换

一、全同粒子交换变换

1. 全同粒子变换的定义

- 考察n个粒子的系统；第i个粒子和第j个粒子的交换变换记作 P_{ij} , $P_{ij}^2 = I$,
- n 个粒子间任意的置换构成一个置换群 S_n ,
- S_n 群中的所有置换都可以分解成许多交换变换的连续操作；
- 因此，重要的是研究最简单的交换变换，构成一个 S_2 群 $\{P_{ij}, 1\}$

2. P_{ij} 对全同粒子体系是守恒的

全同性原理：交换全同粒子不改变系统状态；运动规律对全同粒子不可分辨。

- 因此，系统哈密顿量在全同粒子交换下不变： $[P_{ij}, H] = 0$
- P_{ij} 在各种相互作用下都是不变的， P_{ij} 的本征值取 ± 1 。

3. 自旋统计关系

根据 $P_{ij}\psi(i,j) = \pm\psi(i,j)$ 可以把一切粒子分为两大类：

- a) 玻色子： P_{ij} 本征值为正的粒子的自旋为整数，波函数为完全对称的，
- b) 费米子： P_{ij} 本征值为负的粒子的自旋为半整数，波函数完全反对称。
所以， P_{ij} 的本征值可以写作 $(-1)^{2s}$ ，其中 s 为全同粒子的自旋。

P_{ij} 是一个严格守恒量的物理含义：

- 每一种粒子是费米子还是玻色子是确定的，任一种粒子在其存在时间内不可能改变 P_{ij} 的本征值，亦即其波函数是对称还是反对称这两种情况不能相互转化。
- 全同粒子交换变换是定义在全同粒子存在的时间内，亦即只对所涉及的粒子的数目不变的过程中 P_{ij} 才有明确的含义。

三、全同粒子系统的选择定则

两个全同粒子构成的系统，其总波函数可以定性地写作：

$$\Phi(1, 2) = \varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \zeta(s_1, s_2) \chi(Q_1, Q_2)$$

其中， $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ 为空间波函数， $\zeta(s_1, s_2)$ 为自旋波函数， $\chi(Q_1, Q_2)$ 为所有相加性量子数如 Q , B , S 等的波函数，对于全同粒子， $Q_1 = Q_2$ ，所以对称。因此，

$$\Phi(2, 1) = P_{12} \Phi(1, 2) \equiv (-)^{2s} \Phi(1, 2) = (-)^{L+S+2s} \Phi(1, 2)$$

根据上式，我们可以得到一个对于两个全同粒子组成的系统的重要的性质：

$$L + S = \text{偶数}$$

这个关系对于全同玻色子和费米子都成立。

四、广义全同粒子

强相互作用下，同位旋守恒把同一同位旋多重态的不同电荷态联系在一起。
同一同位旋多重态的不同电荷态可以看作同一种粒子在同位旋空间的不同状态，
这类似于全同粒子在空间特定方向上的不同自旋投影态。

同位旋对交换算符的本征值的贡献和自旋类似。两个广义全同粒子的系统：

自旋波函数的交换关系： $\zeta(2, 1) = (-)^{S-2s} \zeta(1, 2)$

同位旋波函数的交换关系： $\xi(2, 1) = (-)^{I-2i} \xi(1, 2)$

$$\Phi(2, 1) = P_{12} \Phi(1, 2) \equiv (-)^{2s} \Phi(1, 2) = (-)^{L+S+I+2s+2i}$$

由此，我们可以得到一个对于两个广义全同粒子组成的系统的重要的性质：

$$L + S + I - 2i = \text{偶数}$$

例一、氘核

- 氘核是由一个中子和一个质子组成的原子核。
- 质子和中子的自旋、同位旋都为 $1/2$;
- 实验上测到的氘核的总自旋为 $S = 1$; 轨道角动量为 $L = 0, 2$;
- 根据选择定则 $L + S + I + 2i = \text{even}$
- 所以，总同位旋只能是 $I = 0$
- 也就是说，没有与氘核(pn)对应的(pp)和(nn)束缚态存在。
- 实验上也没有观察到这样的态。

例二、两个 π 介子组成的系统

- π 介子的自旋为 $s = 0$, 同位旋为 $i = 1$, G 宇称为负。玻色性统计要求
 $L + S + I - 2i = L + I = \text{偶数}$
- 所以 L 和 I 的奇偶性应该相同: $I = 0, 2$ 时, $L = \text{偶数}$,
 $I = 1$ 时, $L = \text{奇数}$ 。
- 另外, $\pi\pi$ 系统的总角动量等于轨道角动量: $J = L$; 宇称为: $P = (-)^L$
- $\pi\pi$ 介子组成的系统 G 宇称恒为正,
- 相应的中性分量的 C 宇称为 $C' = G'(-)^I = (-)^I$
- 这样, 物理上允许的两 $\pi\pi$ 系统为

注意, $J^{PC} = (1, 3, 5, \dots)^{--}$
不会有 $\pi^0\pi^0$ 出现。

$I^G J^{PC}$	粒子组态
$0^+(0, 2, 4, \dots)^{++}$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$
$1^+(1, 3, 5, \dots)^{--}$	$\pi^+\pi^-, \pi^+\pi^0, \pi^-\pi^0$
$2^+(0, 2, 4, \dots)^{++}$	$\pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0, \pi^+\pi^0, \pi^-\pi^0, \pi^+\pi^+, \pi^-\pi^-$

$\eta \rightarrow \pi\pi$ 是禁戒的; $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ 是禁戒的。

第九节 守恒定律的回顾

粒子物理世界中的各种对称性及其适用范围可以概括如下：

一、相加性守恒量

守恒量	E, P	J	J_3	Q	b	L	I	I_3	S	C	B
强相互作用	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
电磁相互作用	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓
弱相互作用	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	X	X	X

(注：“✓”表示守恒，“X”表示不守恒。)

二、相乘性守恒量

守恒量	C	P	CP	G	P_{ij}
强相互作用	✓	✓	✓	✓	✓
电磁相互作用	✓	✓	✓	X	✓
弱相互作用	X	X	✓*	X	✓

注：

- ✓ 表示守恒，
- X 表示不守恒，
- ✓* 表示基本守恒，但有时约有0.002的不守恒成分。