

第二节 夸克模型

1964年，Gell-Mann 和 Zweig 分别提出了强子结构模型——夸克模型：强子是由三种更基本的粒子构成的，Gell-Mann 将它们称作夸克(quark)，Zweig 则称之为aces。人们认识到强子是有结构的，进入了更深层次的物质结构的研究。

一、u, d, s 夸克—— $SU(3)$ 对称性

1. 强子的成功 $SU(3)$ 分类使人们提出夸克模型

- a) 坂田模型可以成功地解释介子的 $SU(3)$ 分类，但解释重子分类遇到困难，根源是由于重子数守恒，重子必须由两个坂田子和一个反坂田子组成。
- b) 八正法对介子和重子的分类都很成功，但它的假设是重子和介子都是 $SU(3)$ 的八重态或由八重态直乘分解得到。但八重态并不是 $SU(3)$ 群的基础表示。
- c) 一个合理的假设是： $SU(3)$ 群的基础表示 和其共轭表示也都有粒子填充（但不是坂田子）。根据坂田模型的成功经验，这些粒子都应该是费米子。
- d) 根据 $SU(3)$ 群的直乘分解， $\underline{3} \otimes \underline{3}^* \rightarrow \underline{1} \oplus \underline{8}$

$$\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} \rightarrow \underline{1} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}$$

夸克（物理名词）_百度百科(baidu.com) (<https://baike.baidu.com/item/夸克/76646>)

夸克一词是盖尔曼取自詹姆斯·乔伊斯的小说《芬尼根的守灵夜》的词句“向麦克老人三呼夸克（Three quarks for Muster Mark）”。夸克在该书中具有多种含义，其中之一是一种海鸟的叫声。他认为，这适合他最初认为“基本粒子不基本、基本电荷非整数”的奇特想法，同时他也指出这只是一个笑话，这是对矫饰的科学语言的反抗。另外，也可能是出于他对鸟类的喜爱。

盖尔曼在其著作《夸克与美洲豹》中，更详细地述说了夸克这个词的由来：

在1963年，我把核子的基本构成命名为“夸克”（quark），我先有的是声音，没有拼法，所以当时也可以写成 kwork。不久之后，在我偶尔翻阅詹姆斯·乔伊斯所著的《芬尼根守灵夜》时，我在“向麦克老大三呼夸克”这句中看到夸克这个词。由于“夸克（字面上意为海鸥的叫声）很明显是要跟“麦克”及其他这样的词押韵，所以我要找个词读起来像“郭克”。但是书中代表的是酒馆老板伊厄威克的梦，词源多是同时有好几种。

书中的词很多时候是酒馆点酒用的词。所以我认为或许“向麦克老大三呼夸克”源头可能是“敬麦克老大三个夸脱”，那么我要它读“郭克”也不是完全没根据。再怎么样，字句里的三跟自然中夸克的性质完全不谋而合。

茨威格则用“埃斯”（Ace）来称呼这些粒子，但是在夸克模型被广泛接纳时，盖尔曼的用词就很有名。很多中国物理学家则称夸克为“层子”。

介子八重态、重子八重态和十重态都可以通过基础表示和其共轭表示的上述直乘分解得到，而且不出现27重态。这同时解决了坂田模型和八正法的困难。我们还可以得出结论：**介子由正反夸克组成；重子由三个夸克组成；重子数守恒说明夸克的重子数为1/3。**

- e) 如果把填充基础表示的粒子称作夸克，分别记为 u, d, s (up, down, strange的首字母)；则填充基础表示的共轭表示的粒子是相应的反夸克。它们的同位旋和超荷量子数已在上一节给出。如果Gell-Mann-西岛关系对夸克也成立，还可以推出夸克的电荷分别为 $2/3, -1/3, -1/3$ (分数电荷)。这样，属于 $SU(3)$ 基础表示的夸克及其反粒子的量子数就确定下来了，见下表：

	J	Q	I	I_3	Y	S	b
u	1/2	+2/3	1/2	1/2	1/3	0	1/3
d	1/2	-1/3	1/2	-1/2	1/3	0	1/3
s	1/2	-1/3	0	0	-2/3	-1	1/3
\bar{u}	1/2	-2/3	1/2	-1/2	-1/3	0	-1/3
\bar{d}	1/2	+1/3	1/2	1/2	-1/3	0	-1/3
\bar{s}	1/2	+1/3	0	0	2/3	1	-1/3

2. 介子和重子的夸克成分

a) $SU(3)$ 群不可约表示的张量表示

基础表示: $\varphi \equiv \varphi^i = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$,

$$\varphi'^i = S^i_j \varphi^j$$

则其共轭表示为

$$\varphi^+ = \varphi_i = (q_1, q_2, q_3) = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$$

$$\varphi'_i = \varphi_j (S^+)^j_i$$

由 φ^i 和 φ_i 可以生成 (m, n) 阶张量,

$$T^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{\quad j_1 j_2 \cdots j_n} = \varphi^{i_1} \varphi^{i_2} \cdots \varphi^{i_m} \varphi_{j_1} \varphi_{j_2} \cdots \varphi_{j_n}$$

其每一个上指标都按照基础表示变换, 下指标都按照基础表示的共轭表示变换。例如

$$T'^i_{jk} = S^i_{i'} T^{i'}_{j'k'} (S^+)^{j'}_j (S^+)^{k'}_{k'}$$

$$T'^{ij}_{\quad k} = S^i_{i'} S^j_{j'} T^{i'j'}_{\quad k'} (S^+)^{k'}_{\quad k}$$

对于 $SU(3)$ 群，存在三个不变张量，

Kronecker 符号： $\delta^i{}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Levi-Civita 符号： $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k 是 1, 2, 3 的偶置换 \\ -1 & i, j, k 是 1, 2, 3 的奇置换 \\ 0 & i, j, k 有重复指标 \end{cases}$

$$\delta'^i{}_j = S^i{}_i' \delta^{i'}{}_{j'} (S^+)^{j'}{}_j = S^i{}_i' (S^+)^{i'}{}_j = (SS^+)^i{}_j = \delta^i{}_j \quad (SS^+ = I)$$

$$\varepsilon^{ijk} S^{i'}{}_i S^{j'}{}_j S^{k'}{}_k = \varepsilon^{i'j'k'} \quad (\det S = 1)$$

可以证明： $\theta_i = \varepsilon_{ijk} \varphi^j \varphi^k$ 按照基础表示的共轭表示变换。

- 任意一个 (m, n) 阶张量都可以通过Kronecker符号和Levi-Civita符号约化为低阶张量

$$\delta^{i_a}_{j_b} T^{i_1 i_2 \cdots i_m}{}_{j_1 j_2 \cdots j_n} (a = 1, 2, \dots m; b = 1, 2, \dots n) \quad ((m-1, n-1) \text{阶})$$

$$\varepsilon^{i_{m+1} j_b j_c} T^{i_1 i_2 \cdots i_m}{}_{j_1 j_2 \cdots j_n} (b, c = 1, 2, \dots, n) \quad ((m+1, n-2) \text{阶})$$

$$\varepsilon_{j_{n+1} i_b i_c} T^{i_1 i_2 \cdots i_m}{}_{j_1 j_2 \cdots j_n} (b, c = 1, 2, \dots m) \quad ((m-2, n+1) \text{阶})$$

- 不可约张量:** 所有的上指标全对称，所有的下指标全对称，任意一个上指标和下指标的矩阵迹为零。
- 任意一个张量都可以表示成为不可约张量的线性组合。
- $SU(3)$ 群的每一个不可约表示都可以用一个不可约张量表示，不可约表示的维数是不可约张量独立分量的个数。常见的不可约表示的不可约张量表示如下表。

表示	维数	不可约张量
$D(0, 0)$	<u>1</u>	S
$D(1, 0)$	<u>3</u>	\bar{T}^i
$D(0, 1)$	<u>3^*</u>	\bar{T}_i
$D(1, 1)$	<u>8</u>	\bar{T}_j^i
$D(2, 0)$	<u>6</u>	\bar{T}^{ij}
$D(0, 2)$	<u>6^*</u>	\bar{T}_{ij}
$D(3, 0)$	<u>10</u>	\bar{T}^{ijk}
$D(0, 3)$	<u>10^*</u>	\bar{T}_{ijk}
$D(2, 1)$	<u>15</u>	\bar{T}_k^{ij}
$D(1, 2)$	<u>15^*</u>	\bar{T}_{ij}^k

b) 介子的夸克成分 (正反夸克系统 $\underline{3} \otimes \underline{3^*} = \underline{1} \oplus \underline{8}$)

- 根据夸克模型，介子由一对正反夸克组成。
- 正反夸克系统可以用一个(1, 1)阶张量表示：

$$T = [T^i_j] = [\varphi^i \varphi_j] = \begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & d\bar{d} & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & s\bar{s} \end{pmatrix}$$

但是，这个张量是可约化的，

$$T^i_j = \frac{1}{3} \delta^i_j T^k_k + (T^i_j - \frac{1}{3} \delta^i_j T^k_k) \equiv \frac{1}{3} \delta^i_j T^k_k + \bar{T}^i_j$$

令

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} T^k_k = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

$$\begin{aligned}
 M &= [\bar{T}^i_j] = T - \frac{1}{\sqrt{3}}S \\
 &= \begin{pmatrix}
 \frac{1}{3}(2u\bar{u} - d\bar{d} - s\bar{s}) & u\bar{d} & u\bar{s} \\
 d\bar{u} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} + 2d\bar{d} - s\bar{s}) & d\bar{s} \\
 s\bar{u} & s\bar{d} & \frac{1}{3}(-u\bar{u} - d\bar{d} + 2s\bar{s})
 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

则,

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}S + M \Leftrightarrow \underline{3} \otimes \underline{3}^* = \underline{1} \oplus \underline{8}$$

- 不可约张量 S 和 M 的各分量的量子数如下,

$$(I_3, Y, Q)(S) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

$$(I_3, Y, Q)(M) = \begin{pmatrix} (0, 0, 0) & (1, 0, 1) & (\frac{1}{2}, 1, 1) \\ (-1, 0, -1) & (0, 0, 0) & (-\frac{1}{2}, 1, 0) \\ (-\frac{1}{2}, -1, -1) & (\frac{1}{2}, -1, 0) & (0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

(I_3, Y, Q)	夸克组分	(I_3, Y, Q)	夸克组分
$(0, 0, 0)$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	$(1/2, 1, 1)$ $(-1/2, 1, 0)$	$u\bar{s}$ $d\bar{s}$
$(1, 0, 1)$	$u\bar{d}$	$(1/2, -1, 0)$ $(-1/2, -1, -1)$	$s\bar{d}$ $s\bar{u}$
$(-1, 0, -1)$	$d\bar{u}$		

- $(0, 0, 0)$ 分量包含 $I = 1$ 和 $I = 0$ 的贡献。根据无迹条件，

$$\bar{T}^1_1 + \bar{T}^2_2 + \bar{T}^3_3 = 0$$

这三个分量中只有两个是线性独立的。考虑到介子是同位旋变换的本征态，对于同位旋第三分量为零的本征态，因此我们选两个独立的分量为，

$$I = 1 \Rightarrow T_{10} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}),$$

$$I = 0 \Rightarrow T_{00} \equiv \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

于是有，

$$\bar{T}^1_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}T_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}}T_{00}$$

$$\bar{T}^2_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}}T_{00}$$

$$\bar{T}^3_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}T_{00}$$

****许多轻介子可以按照相同的宇称自旋分别填入SU(3)的八重态：

(I, Y)	(I_3, Y, Q)	夸克组分	$J^P = 0^-$	1^-	\dots
$(1, 0)$	$(1, 0, 1)$	$u\bar{d}$	π^+	ρ^+	
	$(0, 0, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	π^0	ρ^0	\dots
	$(-1, 0, -1)$	$d\bar{u}$	π^-	ρ^-	
$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, 1, 1)$	$u\bar{s}$	K^+	K^{*+}	
	$(-\frac{1}{2}, 1, 0)$	$d\bar{s}$	K^0	K^{*0}	\dots
$(\frac{1}{2}, -1)$	$(\frac{1}{2}, -1, 0)$	$s\bar{d}$	\bar{K}^0	\bar{K}^{*0}	
	$(-\frac{1}{2}, -1, -1)$	$s\bar{u}$	K^-	K^{*-}	\dots
$(0, 0)$	$(0, 0, 0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$	η_8	ω	\dots

- 赝标量介子和矢量介子八重态的矩阵表示：

$$M(0^-) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix} \quad M(1^-) = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\omega \end{pmatrix}$$

- 不同自旋宇称的介子八重态夸克组分相同，但夸克间的空间和自旋状态不同。

c) 重子的夸克成分 (三夸克系统 $\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} = \underline{1} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}$)

- 夸克的重子数为 $\mathbf{1}/\mathbf{3}$, 三个夸克构成一个重子。三夸克构成一个 $(3, 0)$ 阶张量,

$$T^{ijk} = q^i q^j q^k$$

- 它有27个分量, 可以按两步约化成不可约张量的和:

$$\underline{3} \otimes \underline{3} \otimes \underline{3} = (\underline{3}^* \oplus \underline{6}) \otimes \underline{3} = \underline{1} \oplus \underline{8} \oplus \underline{8} \oplus \underline{10}$$

第一步,

$$q^i q^j = \frac{1}{2} (q^i q^j - q^j q^i) + \frac{1}{2} (q^i q^j + q^j q^i) \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \theta_k + \frac{1}{2} S^{ij}$$

其中, $\theta_k = \varepsilon_{kmn} q^m q^n$, $S^{ij} = q^i q^j + q^j q^i$

这里利用了关系: $\varepsilon^{ijk} \varepsilon_{kmn} = \delta^i_m \delta^j_n - \delta^i_n \delta^j_m$

第二步，

$$\underline{3}^* \otimes \underline{3} = \underline{1} \oplus \underline{8} \quad \longrightarrow \quad \theta_i q^k = \frac{1}{3} \delta^k{}_i (\theta_m q^m) + \left[\theta_i q^k - \frac{1}{3} \delta^k{}_i (\theta_m q^m) \right]$$

$$\underline{6} \otimes \underline{3} = \underline{8} \oplus \underline{10} \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} S^{ij} q^k = \frac{1}{3} (\varepsilon^{ikm} S^{jn} + \varepsilon^{jkm} S^{in}) q^l \varepsilon_{nlm} \\ \quad + \frac{1}{3} (S^{ij} q^k + S^{jk} q^i + S^{ki} q^j) \end{array} \right.$$

所以

$$\begin{aligned} q^i q^j q^k &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijm} \theta_m q^k + \frac{1}{2} S^{ij} q^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon^{ijk} S + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ijm} B^k{}_m + \frac{1}{\sqrt{6}} (\varepsilon^{ikm} N^j{}_m + \varepsilon^{jkm} N^i{}_m) + D^{ijk} \end{aligned}$$

其中，

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \theta_m q^m,$$

$$B^i{}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\theta_j q^i - \frac{1}{3} \delta^i{}_j \theta_m q^m \right],$$

$$D^{ijk} = \frac{1}{6} (S^{ij} q^k + S^{jk} q^i + S^{ki} q^j) \quad N^i{}_j = \frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{jmn} S^{im} q^n,$$

以上四个不可约张量也给出了重子的多个超多重态的味道波函数（注意，在这四个张量中，**夸克的顺序是有物理意义的**，它们和不同夸克的坐标和运动学变量有关）

i) 重子八重态的味道波函数：

(I, I_3, Y, Q)	N_j^i	B_j^i	重子
$(1/2, 1/2, 1, 1)$	$(2uud - udu - duu)/\sqrt{6}$	$(udu - duu)/\sqrt{2}$	$p(uud)$
$(1/2, -1/2, 1, 0)$	$(udd + dud - 2ddu)/\sqrt{6}$	$(udd - dud)/\sqrt{2}$	$n(udd)$
$(1, 1, 0, 1)$	$(2uus - usu - suu)/\sqrt{6}$	$(usu - suu)/\sqrt{2}$	$\Sigma^+(uus)$
$(1, 0, 0, 0)$	$(2uds + 2dus - usd - dsu - sud - sdu)/\sqrt{12}$	$(dsu + usd - sdu - sud)/2$	$\Sigma^0(uds)$
$(1, -1, 0, -1)$	$(2dds - dsd - sdd)/\sqrt{6}$	$(dsd - sdd)/\sqrt{2}$	$\Sigma^-(dds)$
$(1/2, 1/2, -1, 0)$	$(uss + sus - 2ssu)/\sqrt{6}$	$(uss - sus)/\sqrt{2}$	$\Xi^0(uss)$
$(1/2, -1/2, -1, -1)$	$(dss + sds - 2ssd)/\sqrt{6}$	$(dss - sds)/\sqrt{2}$	$\Xi^-(dss)$
$(0, 0, 0, 0)$	$(usd + sud - dsu - sdu)/2$	$(sdu - sud + usd - dsu - 2dus + 2uds)/\sqrt{12}$	$\Lambda^0(uds)$

八重态 N_j^i 和 B_j^i 在 $SU(3)$ 变换下是不可分辨的。它们的区别在于三个夸克的交换性质上：前者对于前两个夸克交换是对称的，后者是反对称的。至于那个表示对应于物理上的重子态，是需要其它信息和假设的。

N_j^i 和 B_j^i 都是混合对称的。

重子八重态的矩阵表示为，

$$B\left(\frac{1}{2}^+\right) = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ -\Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}$$

其中， Ξ^- 前的负号来自于同位旋子群升降操作的特定约定。

ii) 重子十重态的味道波函数:

(I, I_3, Y, Q)	D^{ijk}	重子
$(3/2, 3/2, 1, 2)$ $(3/2, 1/2, 1, 1)$ $(3/2, -1/2, 1, 0)$ $(3/2, -3/2, 1, -1)$	(uuu) $(uud + udu + duu)/\sqrt{3}$ $(udd + dud + ddu)/\sqrt{3}$ (ddd)	$\Delta^{++}(uuu)$ $\Delta^+(uud)$ $\Delta^0(udd)$ $\Delta^-(ddd)$
$(1, 1, 0, 1)$ $(1, 0, 0, 0)$ $(1, -1, 0, -1)$	$(uus + usu + suu)/\sqrt{3}$ $(uds + usd + dus + dsu + sud + sdu)/\sqrt{6}$ $(dds + dsd + sdd)/\sqrt{3}$	$\Sigma^{*+}(uus)$ $\Sigma^{*0}(uds)$ $\Sigma^{*-}(dds)$
$(1/2, 1/2, -1, 0)$ $(1/2, -1/2, -1, -1)$	$(uss + sus + ssu)/\sqrt{3}$ $(dss + sds + ssd)/\sqrt{3}$	$\Xi^{*0}(uss)$ $\Xi^{*-}(dss)$
$(0, 0, -2, -1)$	(sss)	$\Omega(sss)$

!!!! 重子十重态的味道波函数是全对称的。

二、SU(3)整体味道对称性的破缺——强子质量分裂公式和强子混合

1. Gell-Mann-大久保质量分裂公式(Gell-Mann-Okubo formula)

在粒子物理中关于整体对称性的研究中，常常遇到对称性破缺的问题，比如强子的整体味道SU(3)对称性。一般我们认为，强相互作用满足味道SU(3)对称性，但从实验来看，SU(3)群的SU(2) \otimes U(1)子群的对称性很好满足，反映为同位旋和奇异数守恒，然而SU(3)对称性不是很好的满足，比如同一强子超多重态中的不同同位旋多重态之间的质量有明显的差别：

	$I = 1$			$I = 1/2$		$I = 1/2$		$I = 0$
$J^P = 0^-$	π^+	π^0	π^-	K^+	K^0	\bar{K}^0	K^-	η
M(MeV)	139.6	135.0	139.6	493.7	497.6	497.6	493.7	547.5
$J^P = 1^-$	ρ^+	ρ^0	ρ^-	K^{*+}	K^{*0}	\bar{K}^{*0}	K^{*-}	ω
M(MeV)		775.5		891.7	896.0	896.0	891.7	782.7
$J^P = 1/2^+$	Σ^+	Σ^0	Σ^-	p	n	Ξ^0	Ξ^-	Λ^0
M(MeV)	1189.4	1192.6	1197.4	938.3	939.6	1314.8	1321.3	1115.7

	$I = 3/2$				$I = 1$			$I = 1/2$		$I = 0$
$(3/2)^+$	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*0}	Ξ^{*-}	Ω^-
M(MeV)	1232	1232	1233	1232	1383	1384	1387	1532	1535	1672

味道对称性破缺的最重要结果是关于质量的讨论。它也可以看作处理整体对称性破缺的典型例子。

同一同位旋多重态中不同带电态的质量差很小，归结为电磁相互作用性质不同及 u 夸克和 d 夸克很小的质量差，而不同的同位旋多重态之间有较大的质量差别，则可能来源于总同位旋不同和超荷数不同造成的。

因此，理论上认为，拉氏量总体是 $SU(3)$ 不变的，但有少许的 $SU(3)$ 破缺项，这个破缺项应该能够反映第三维和前两维的差别，它在 $SU(3)$ 变换下不是不变的，但应该是 $SU(2) \otimes U(1)$ 变换的标量。

从场论角度来看，拉氏量中的

- a) 玻色子（介子）质量项为， $\Phi^+ M \Phi$ ， Φ 为介子场量的列向量，量纲为 1；
- b) 费米子（重子）质量项为， $\bar{\Psi} M \Psi$ ， Ψ 为重子场量的列向量，量纲为 $3/2$ ；
 M 为质量（矩阵）。

如果 $SU(3)$ 对称性严格成立，同一个超多重态的质量矩阵 M 正比于单位矩阵，

$$M = aI$$

如果对称性破缺，则有破缺项： $M = AI + V(R)$

根据前面的讨论，这个破缺项在 $SU(2) \otimes U(1)$ 变换下不变，

$$[V, T_i] = 0 (i = 1, 2, 3), \quad [V(R), T_8] = 0$$

这里， T_i 为 $SU(3)$ 生成元在该表示中的表示矩阵。

在生成元构成的一阶算符中，只有 T_8 满足上述条件；二阶算符中，

$$T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2, \quad T_8^2 = \frac{3}{4} Y^2, \quad T_4^2 + T_5^2 + T_6^2 + T_7^2 \equiv C_2 - T^2 - T_8^2$$

显然第三个算符总可以用前两个表示（Casimir 算子是 $SU(3)$ 不变的，可以并入常数项）

（*****更加细致的群论讨论给出，最低阶质量分裂公式只需要两个独立的项）

所以 $V(R)$ 可以取作:
$$V(R) = B(T^2 + \eta Y^2) + CY$$

对于一个以超多重态为基张成的表示空间, $V(R)$ 是对角化的, 即其对角元为相应的基 $|II_3Y\rangle$ (粒子态) 的相应本征值,

$$V(R)|II_3Y\rangle = (B(I(I+1) + \eta Y^2) + CY)|II_3Y\rangle$$

群论给出 $\eta = -\frac{1}{4}$ 。这样, 我们得到 $SU(3)$ 破缺的一级质量分裂公式:

(Gell-Mann-Okubo mass formula)

$$M(I, Y) = A + B \left[I(I+1) - \frac{1}{4} Y^2 \right] + CY$$

说明:

- 1) 对于同一个表示, A, B, C 取相同的值;
- 2) 对于重子多重态, 由于重子和反重子属于不同的表示, 所以 $C \neq 0$;
- 3) 对于介子多重态, 介子和其反粒子属于同一个表示, 正反粒子质量相等要求 $C = 0$ 。
- 4) 对于介子, M 是质量平方; 对于重子, M 是质量。

2. Gell-Mann-大久保质量分裂公式的应用

a. 重子八重态

$$\left. \begin{aligned} M(N) &= M\left(\frac{1}{2}, 1\right) = A + \frac{1}{2}B + C, \\ M(\Sigma) &= M(1, 0) = A + 2B, \\ M(\Xi) &= M\left(\frac{1}{2}, -1\right) = A + \frac{1}{2}B - C \\ M(\Lambda) &= M(0, 0) = A \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2M_N + 2M_\Xi = 3M_\Lambda + M_\Sigma$$

实验值：

$$L.H.S = 4514 \text{ MeV},$$

$$R.H.S = 4540.2 \text{ MeV}$$

相对偏差为6%！

b. 重子十重态

$$M(\Omega) - M(\Xi^*) = M(\Xi^*) - M(\Sigma^*) = M(\Sigma^*) - M(\Delta) = -\frac{3}{2}B - C$$

实验值：

$$m_{\Sigma^*} - m_\Delta \approx 153 \text{ MeV}, \quad m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} \approx 145 \text{ MeV}, \quad m_\Omega - m_{\Xi^*} \approx 142 \text{ MeV}$$

c) 质标介子八重态 $J^P = 0^-$

$$\left. \begin{array}{l} M(K) = M\left(\frac{1}{2}, 1\right) = A + \frac{1}{2}B \\ M(\pi) = M(1, 0) = A + 2B, \\ M(\bar{K}) = M\left(\frac{1}{2}, -1\right) = A + \frac{1}{2}B \\ M(\eta) = M(0, 0) = A \end{array} \right\} \Rightarrow 4m_K^2 = 3m_{\eta_8}^2 + m_\pi^2$$

实验值(如果试验上的 η 粒子就是八维表示的 $I = 0, Y = 0$ 态), 则:

$$\text{L. H. S} = 0.983 \text{ GeV}^2, \quad \text{R. H. S} = 0.923 \text{ GeV}^2$$

相对偏差为 6%!

d) 矢量介子八重态 $J^P = 1^-$

$$4m_{K^*}^2 = 3m_{\omega_8}^2 + m_\rho^2$$

实验值(将 ϕ 粒子的质量作为 ω_8 的质量):

$$\text{L. H. S} = 3.18 \text{ GeV}^2, \quad \text{R. H. S} = 3.71 \text{ GeV}^2$$

相对偏差为 17%!

3. 介子的 $SU(3)$ 八重态和 $SU(3)$ 单态的混合

Gell-Mann-Okubo公式对重子超多重态符合得相当好，但对介子超多重态则有较大的偏差，其原因可以用 $SU(3)$ 单态和八重态的混合解释。

正反 u, d, s 夸克构成的介子分为一个单态 ($I = 0, Y = 0$) 和一个八重态 (其中也包含一个 $I = 0, Y = 0$ 的态)。实验上发现的 0^- 和 1^- 介子分别有九个，各包含两个 $I = 0, Y = 0$ 的态， 0^- 为 η, η' ； 1^- 中为 ω, φ 。实际上，它们是单态和八重态的混合。

从理论上考虑，既然味道 $SU(3)$ 对称性的破缺反映在质量上是在质量中有按照八维表示变换的部分，它也导致一维表示和八维表示之间跃迁质量项的出现，这项的出现使两个 $I = 0, Y = 0$ 的介子的质量平方要用一个 2×2 矩阵描写。

$$\begin{pmatrix} m_8^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_1^2 \end{pmatrix}$$

物理上观察到的是这个质量平方矩阵的本征态，即质量本征态。 m_8^2 的值可以通过Gell-Mann-Okubo公式通过其它粒子的值算出， m_1^2 和 m_{18}^2 则是未知的量，需要通过混合态的值来推算。

以赝标介子为例。粒子物理中常用一个 3×3 矩阵来表示统一介子的八维表示和一维表示，

$$M(0^-) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

味道 $SU(3)$ 对称的质量项可以表为 $\frac{1}{2}m^2 \text{Tr}(MM)$ ，

这时，**九个粒子的质量相同，都是 m** （这是理想混合的情形）。如果有对称性破缺，根据前面的讨论，质量破缺项可以写作，

$$-\sqrt{3}\delta \text{Tr}(M\lambda_8 M), \quad \delta > 0$$

这样，介子的质量平方为，

$$m_\pi^2 = m^2 - 2\delta, \quad m_8^2 = m^2 + 2\delta, \quad m_K^2 = m^2 + \delta, \quad m_1^2 = m^2.$$

可以看到，在理想混合以及 $\delta > 0$ 的情形， $m_8^2 > m_1^2$ 。

混合项为，

$$m_{18}^2 = -2\sqrt{2}\delta \quad \begin{pmatrix} m_8^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 2\delta & -2\sqrt{2}\delta \\ -2\sqrt{2}\delta & m^2 \end{pmatrix}$$

对角化后有： $m_{\eta'}^2 = m^2 - 2\delta, m_\eta^2 = m^2 + 4\delta$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & -\sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$$

其中 θ 称作混合角，描述质量本征态中八重态和单态的成分。

当单态和八重态的质量参数相同时，就是理想混合的情况：

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \theta = 35.3^\circ, \quad \left(\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

理想混合的物理意义：

味道八重态的味道波函数： $|\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$

味道单态的味道波函数： $|\eta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$

混合后质量本征态的味道波函数：

$$|\eta\rangle = \cos \theta |\eta_8\rangle - \sin \theta |\eta_1\rangle = -s\bar{s}$$

$$|\eta'\rangle = \sin \theta |\eta_8\rangle + \cos \theta |\eta_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

即理想混合后，两个质量本征态分别是纯 (u, d) 构成的态和纯的 $s\bar{s}$ 态。

如果已经知道九重态粒子（八重态和单态）的质量，则可以由以下公式来确定混合角：

$$\tan^2 \theta = \frac{3m_\eta^2 - 4m_K^2 + m_\pi^2}{4m_K^2 - m_\pi^2 - 3m_{\eta'}^2}$$

矢量介子 (1^-) $\omega(783), \phi(1020)$ 的混合角 $\begin{pmatrix} \varphi \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$

$$\tan^2 \theta = \frac{3m_\phi^2 - 4m_{K^*}^2 + m_\rho^2}{4m_{K^*}^2 - m_\rho^2 - 3m_\omega^2} \approx 0.68 \Rightarrow \theta \approx 39^\circ$$

- 注意，由于 $m_\phi > m_\omega$ ，所以混合角为正的；
- 对于矢量介子，混合角很大，单态和八重态有明显的混合；
- 混合角 $\theta \approx 39^\circ$ 接近理想混合的混合角 35.3° ；
- 这隐含着， ϕ 近似为纯的 $s\bar{s}$ 态， ω 接近纯的 (u, d) 态

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2}\omega_8 - \omega_1) = -s\bar{s}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} (\omega_8 + \sqrt{2}\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d})$$

- 这看上去是合理的： $\rho(770)$ 介子的夸克组分为 $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ ，它的质量也和 $\omega(783)$ 接近。

注：混合角的确定

在 $\eta_1 - \eta_8$ 空间，应该有： $(\eta_1 \quad \eta_8) \begin{pmatrix} m_1^2 & m_{18}^2 \\ m_{18}^2 & m_8^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = (\eta' \quad \eta) \begin{pmatrix} m_{\eta'}^2 & 0 \\ 0 & m_\eta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta' \\ \eta \end{pmatrix}$

即

$$m_1^2 \eta_1^2 + m_8^2 \eta_8^2 + 2m_{18}^2 \eta_1 \eta_8 = m_\eta^2 \eta^2 + m_{\eta'}^2 \eta'^2$$

将

$$\begin{cases} \eta_8 = \eta \cos \theta + \eta' \sin \theta \\ \eta_1 = -\eta \sin \theta + \eta' \cos \theta \end{cases}$$

代入上式得到：

$$\begin{aligned} m_\eta^2 &= m_1^2 \sin^2 \theta + m_8^2 \cos^2 \theta - 2m_{18}^2 \sin \theta \cos \theta \\ m_{\eta'}^2 &= m_1^2 \cos^2 \theta + m_8^2 \sin^2 \theta + 2m_{18}^2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 &= (m_8^2 - m_1^2) \cos \theta \sin \theta + m_{18}^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \tag{A}$$

由此得到，

$$\tan^2 \theta = \frac{m_\eta^2 - m_{\eta'}^2}{m_8^2 - m_1^2}$$

$$3m_8^2 = 4m_K^2 - m_\pi^2$$

$$\tan^2 \theta = \frac{3m_\eta^2 - 4m_K^2 + m_\pi^2}{4m_K^2 - m_\pi^2 - 3m_{\eta'}^2}$$

赝标量 (0^{-+}) 粒子 η, η' 的混合角: $\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$

将 (π, K, η, η') 质量的实验值代入混合角公式, 得到 ($m_{\eta'} > m_\eta$)

$$\tan^2 \theta = \frac{3m_\eta^2 - 4m_K^2 + m_\pi^2}{4m_K^2 - m_\pi^2 - 3m_{\eta'}^2} \approx 0.0352 \quad \Rightarrow \theta \approx -11^\circ$$

这说明, η_1 和 η_8 的混合比较小。关于角度为负的说明如下:

一般认为, 味道 $SU(3)$ 的破坏的根源是 $m_u \approx m_d = m_l \leq m_s$ 。在 (u, d, s) 的基下, 夸克质量矩阵可以表示为

$$H_m = \begin{pmatrix} m_l & 0 & 0 \\ 0 & m_l & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2m_l + m_s) - \frac{1}{\sqrt{3}}(m_s - m_l)\lambda_8$$

即质量破缺项中的 $\delta > 0$, 即 $m_{18}^2 = -2\sqrt{2}\delta < 0$ 。由前一页公式 (A) 有

$$m_{18}^2 = \frac{1}{2}(m_1^2 - m_8^2) \tan 2\theta < 0$$

$m_1 > m_8$ ($m_{\eta'} > m_\eta$) 要求 $\theta < 0$

4. ω 和 ϕ 的衰变和OZI规则

60年代在研究短寿命介子时遇到了一个不好理解的问题：

a) ω 和 ϕ 具有相同的量子数： $I^G J^{PC} = 0^- 1^{--}$

b) 它们的质量和宽度分别为

$$m_\omega = 782.65 \pm 0.12 \text{ MeV}, \quad \Gamma_\omega = 8.49 \pm 0.08 \text{ MeV},$$

$$m_\phi = 1019.46 \pm 0.02 \text{ MeV}, \quad \Gamma_\phi = 4.26 \pm 0.05 \text{ MeV},$$

c) 它们的主衰变道分别为：

ω : $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0, \quad \Gamma_i/\Gamma = (89.1 \pm 0.7)\%$

ϕ : $\phi \rightarrow K^+ K^-, \quad \Gamma_i/\Gamma = (49.2 \pm 0.6)\%$

$\phi \rightarrow K_L^0 K_S^0, \quad \Gamma_i/\Gamma = (34.0 \pm 0.5)\%$

$\phi \rightarrow \rho\pi, \pi^+ \pi^- \pi^0, \quad \Gamma_i/\Gamma = (15.3 \pm 0.4)\%$

理论上的困难：从理论上讲，

- a) ω 和 ϕ 的量子数相同，因此它们的强相互作用性质应该相似；
- b) 根据强相互作用的守恒定律，他们应该主要衰变到 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态；
- c) ϕ 的质量大于 ω 的质量，因此应该有较大的宽度，因为前者比后者相空间大；
- d) 而且 ϕ 在 $K\bar{K}$ 的阈上 ($m_\phi > 2m_K$)，因此可以衰变到 $K\bar{K}$ ，这个衰变道对 ϕ 的宽度有贡献。

但从实验数据来看，

- a) ω 的宽度反而比 ϕ 大很多；
- b) ω 的衰变以 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态为主，这和理论预期一致；但 ϕ 主要衰变到 $K\bar{K}$ 末态， $\pi^+\pi^-\pi^0$ 末态被严重压低。

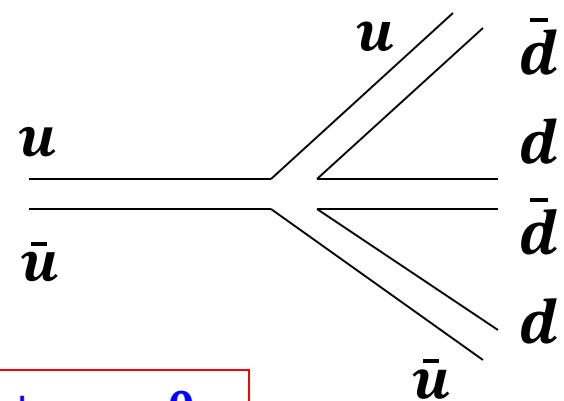
为了解释这个问题及类似的现象，Okubo (1963), Zweig (1964), Iizuka (1966) 分别独立地提出了一个机制——**Okubo-Zweig-Iizuka 规则 (OZI rule)**：

强过程中，只能通过夸克湮灭得到末态的过程将被压低。

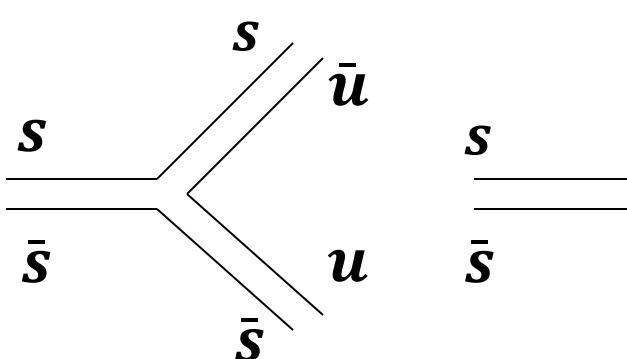
具体到 ω 和 ϕ 的衰变，我们已经知道它们是味道 **SU(3)** 对称性的单态和八重态混合后的质量本征态，而这种混合接近理想混合，混合的结果是， ϕ （几乎）只有奇异夸克成分，而 ω （几乎）只有 u, d 夸克成分：

$$\phi = -s\bar{s}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

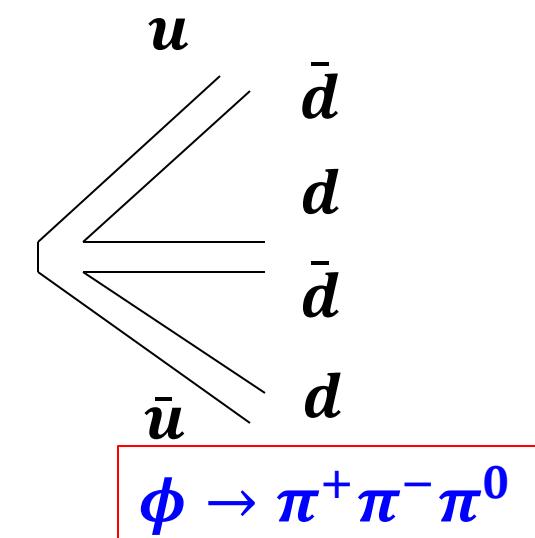
它们的衰变的夸克图（费曼图）可以定性地表为：



$$\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$$



$$\phi \rightarrow K^+ K^- \text{ (} K^0 \bar{K}^0 \text{)}$$



$$\phi \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$$

OZI 规则又可以形象地表述为：在强子衰变或反应过程中，如果价夸克的 Feynman 图断成互不相连的两部分，则过程的概率被大大压低。这种被压低的过程称为 OZI 禁戒过程。OZI 规则在解释重夸克偶素的窄宽度性质上起了很大的作用。