

广义相对论笔记

Leonhard Hsiao

2025 年 11 月 19 日

目录

| | | |
|----------|---------------------------|-----------|
| 1 | 张量分析与微分几何基础 | 2 |
| 1.1 | 流形和张量 | 3 |
| 1.1.1 | 流形的基本概念 | 3 |
| 1.1.2 | 流形上的张量 | 4 |
| 1.2 | 仿射联络流形 | 6 |
| 1.2.1 | 张量的平移和仿射联络 | 6 |
| 1.2.2 | 协变导数 | 10 |
| 1.2.3 | 平行移动与自平行线 | 11 |
| 1.3 | 度规流形 | 12 |
| 1.3.1 | 度规的定义及其基本性质 | 12 |
| 1.3.2 | 短程线 | 13 |
| 1.4 | 黎曼流形 | 13 |
| 1.4.1 | 度规与联络的相容条件 | 14 |
| 1.4.2 | 曲率张量与 Bianchi 恒等式 | 14 |
| 1.5 | 微分同胚映射与李导数 | 16 |
| 1.6 | 等度规映射与 Killing 矢量场 | 18 |
| 1.7 | 黎曼空间中的常用计算 | 20 |
| 2 | 爱因斯坦场方程和广义相对论的实验检验 | 21 |
| 2.1 | 引力几何化与弱场近似 | 21 |

| | |
|------------------------------|----|
| 2.2 检验粒子在引力场中的运动 | 23 |
| 2.2.1 时空对称性与守恒量 | 23 |
| 2.2.2 史瓦西时空中点粒子的运动 | 24 |
| 2.3 广义相对论的实验验证 | 28 |
| 2.3.1 行星轨道的近日点进动 | 28 |
| 2.3.2 光线的引力偏折 | 30 |
| 2.3.3 掠日光线的偏折角 | 32 |

1 张量分析与微分几何基础

广义相对论刻画弯曲时空中的物理规律，其数学语言是微分几何。本章的知识结构如图 1 所示。

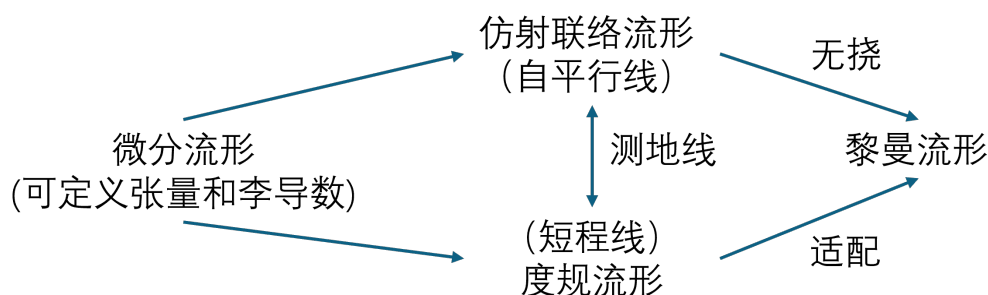


图 1: 本章数学结构及其关系示意图。

流形自身不具备距离、角度等结构，但在其上可以定义各种张量场。给定一个矢量场，其流（flow）会生成一族微分同胚，李导数用于衡量张量在该流作用下的变化。

流形的弯曲性质可以通过两种方式刻画：

1. **引入联络（connection）** 有了联络，就可以定义矢量场在流形上的平行移动，从而比较不同点的切空间中的矢量。若一条曲线的切矢量 v^μ 沿着曲线平行移动，并满足

$$v^\nu \nabla_\nu v^\mu = 0,$$

则称该曲线为**自平行线**（autoparallel curve）。

2. **引入度规（metric）** 度规定义了流形上两点之间的距离以及矢量之间的夹角。使两点间距离取得极值（通常为极小）的一类曲线称为**短程线**（geodesic）。

当流形同时具有度规与联络，并且联络满足

- 无挠条件 (torsion-free): $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$
- 度规兼容条件 (metric compatibility): $\nabla g = 0$ ，即平行移动保持长度与角度，

则该联络由度规唯一决定，称为 **Levi-Civita 联络**。在坐标系中，Levi-Civita 联络的系数可以用 Christoffel 符号表示。

1.1 流形和张量

1.1.1 流形的基本概念

定义 1.1 (光滑流形). 一个 N 维光滑 (C^∞ 可微) 流形 M 由以下条件定义:

- (1) M 是一个拓扑流形
- (2) 存在一族坐标卡 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 满足:
 - U_i 是开集且 $\bigcup_i U_i = M$ (覆盖条件)
 - 对每个 U_i , $\varphi_i: U_i \rightarrow U'_i \subset \mathbb{R}^n$ 是同胚映射
- (3) 对任意非空交集 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, 坐标变换映射

$$\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \quad (1)$$

及其逆映射都是光滑的 (C^∞)

大致可以看出流形满足两点,

- (1) 局部与 n 维欧几里得空间等价
- (2) 由这些局域的欧几里得空间缝起来

坐标卡族 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 称为 M 的**图册** (Atlas), 每个 U_i 称为**坐标邻域**, φ_i 称为**坐标函数**。

例 1.2 (二维球面 S^2). 拿地球表面做例子, S^2 是一个二维流形, 因为:

- 没有一张地图能覆盖地球上所有地方, 世界地图也有地方被剪开。
- 给每个地区造一个地图, 拼起来可以覆盖全球, 且局部看起来都像平面。
- 地图与地图之间同一个位置可以转换坐标。

这样看起来, 取的名字坐标卡和图册还是挺形象的。

坐标变换: 设点 p 在坐标卡 (U, x^μ) 下的坐标为 x^μ , 在另一坐标卡 (V, \tilde{x}^μ) 下的坐标为 \tilde{x}^μ 。则在交集 $U \cap V$ 上, $\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x)$, 可以给出,

$$\tilde{\partial}_\mu := \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (2)$$

$$d\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (3)$$

1.1.2 流形上的张量

这个定义，就是说

$T^\mu{}_\nu A_\mu B^\nu$ 是个实数，张量 $T^\mu{}_\nu$ 把矢量和对偶矢量映射到 \mathbb{R} 中。

定义 1.3 (标量场). 标量场是流形到实数的映射 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 。它是一个零阶张量场，即在任何坐标变换下，其值不变：

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x) \quad (4)$$

定义 1.4 (张量场). 一个 (p, q) 型张量场 T 是一个多重线性映射，它将 p 个对偶空间元素（协变矢量）和 q 个矢量空间元素（逆变矢量）映射到实数：

$$T : (T_p^* M)^{\otimes p} \times (T_p M)^{\otimes q} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5)$$

课程中的张量定义其实是满足张量变换性质的量而不是这个映射的定义，不同教科书也有不同的定义，我还是采用是否满足坐标变换判断张量。

在坐标变换下，张量场的分量变换遵循以下规则：

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}(x) = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_p}} \frac{\partial \tilde{x}^{\beta_1}}{\partial x^{\nu_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\beta_q}}{\partial x^{\nu_q}} \tilde{T}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q}(\tilde{x}), \quad (6)$$

其中 \tilde{x} 是新的坐标系下的坐标， x 是旧坐标系下的坐标，变换矩阵（雅可比矩阵）对应了坐标变换规则。

张量的运算

- **加减：** $C^\mu{}_\nu(x) = A^\mu{}_\nu(x) + B^\mu{}_\nu(x)$
同类型（即同阶且指标特性相同）的张量可以相加减。
- **乘法（直乘）：** $C^\mu{}_\nu = A^\mu B_\nu$
两个张量可以相乘，结果是一个新张量，其阶数为原张量阶数之和。
- **缩并：** $T^\mu{}_{\nu\lambda}$
对一个张量的一个上指标和一个下指标进行求和，从而降低张量的阶数，张量缩并之后仍然是张量。
- **商定理：** 设在某坐标系中有张量关系

$$A^\mu(x) = B^\mu{}_\alpha(x) C^\alpha(x), \quad (7)$$

其中 A^μ 为 $(1, 0)$ 张量、 $B^\mu{}_\alpha$ 为 $(1, 1)$ 张量，则 C^α 为 $(1, 0)$ 张量，即在坐标变换 $x \mapsto x'$ 下满足

$$C'^\alpha(x') = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} C^\beta(x) \quad (8)$$

张量的对称性

- **对称张量：** 对于二阶张量 $T_{\mu\nu}$ ，若 $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ ，则称其为对称张量。

- **反对称张量**：若 $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ ，则称其为反对称张量。
- **对称分解**：任何二阶张量 $T^{\mu\nu}$ 都可以唯一地分解为对称部分 $S^{\mu\nu}$ 和反对称部分 $A^{\mu\nu}$ 之和：

$$T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} \quad (9)$$

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) =: T^{(\mu\nu)} \quad (10)$$

$$A^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) =: T^{[\mu\nu]} \quad (11)$$

反对称张量的常用性质

- (1) 反对称指标取值相同时，该分量为零。反对称指标与对称指标的缩并为零。

证明. 设 $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$ ，则当 $\mu = \nu$ 时：

$$T_{\mu\mu} = -T_{\mu\mu} \Rightarrow 2T_{\mu\mu} = 0 \Rightarrow T_{\mu\mu} = 0 \quad (12)$$

设 $S^{\mu\nu}$ 对称，则：

$$T_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}S^{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}S^{\nu\mu} = -T_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \Rightarrow T_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0 \quad (13)$$

□

- (2) n 维流形上最高阶的反对称张量为 n 阶，且该张量只有一个独立分量。

证明. 反对称张量要求指标各不相同， n 阶反对称张量的独立分量数为组合数：

$$C_n^n = \frac{n!}{n!0!} = 1 \quad (14)$$

可表示为 $T_{[\mu_1 \dots \mu_n]} = c\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ ，其中 c 为常数。

□

- (3) n 维流形上的 $n-1$ 阶反对称张量有 n 个独立分量。

证明. 独立分量数为组合数：

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n \quad (15)$$

□

- (4) 一般地， n 维流形上的 m 阶反对称张量有 C_n^m 个独立分量。

证明. 反对称性要求指标互不相同，独立分量数等于从 n 个指标中选 m 个的组合数：

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (16)$$

□

1.2 仿射联络流形

1.2.1 张量的平移和仿射联络

其实这里平行移动的直觉不太严谨，因为夹角需要度规来定义，而仿射联络的定义并不需要度规。

注意 $A_\mu(P \rightarrow Q)$ 是 Q 点上的矢量，要满足 Q 点的坐标变换规则

在平直时空中，矢量平移很简单——只需保持分量不变，所以虽然矢量是逐点定义的，仍然可以直接把相邻两点的矢量相减取导数。但一个在球表面的矢量，如果它保持与切面的夹角不变，沿着某路径平移（这就是平行移动的直观），得到的矢量分量与原来的矢量发生了变换，这就不能直接取矢量 $A^\mu(P)$ 和 $A^\mu(Q)$ 的差了，必须讨论矢量 $A^\mu(P)$ 和矢量 $A^\mu(P \rightarrow Q)$ （这个符号表示把 P 处的矢量平移到 Q 点）之间的关系，后者表示把 P 处的矢量平移到 Q 处。为了解决这个问题，引入了仿射联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ，它定义了如何在流形上“平移”矢量。

定义 1.5 (协变矢量的平移). 协变矢量 A_μ 从点 P 沿无穷小位移 dx^ν 平移到 Q 点的规则为：

$$A_\mu(P \rightarrow Q) = A_\mu(P) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) A_\lambda(P) dx^\nu \quad (17)$$

定义 1.6 (逆变矢量的平移). 逆变矢量 B^μ 的平移规则为：

$$B^\mu(P \rightarrow Q) = B^\mu(P) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(P) B^\nu(P) dx^\lambda \quad (18)$$

这里也可以看出两种张量定义的区别，按那个繁杂数学定义的话，联络就是张量，但是这里采用坐标变换的定义，联络不是张量。

定理 1.7 (仿射联络变换性质). 仿射联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 的坐标变换规则为：

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \quad (19)$$

仿射联络不是张量，但是不难验证仿射联络的差是张量。

证明. 要求 $A_\mu(P \rightarrow Q)$ 是 Q 点的协变矢量，即在新坐标系 $\{\tilde{x}^\mu\}$ 下，它应满足张量变换规则：

$$\tilde{A}_\mu(P \rightarrow Q) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right)_Q A_\alpha(P \rightarrow Q) \quad (20)$$

在新坐标系中，平移规则同样定义为：

$$\tilde{A}_\mu(P \rightarrow Q) - \tilde{A}_\mu(P) = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(P) \tilde{A}_\lambda(P) d\tilde{x}^\nu \quad (21)$$

将定义式 (6) 和 (21) 代入要求条件 (20)，得到关系式：

$$\tilde{A}_\mu(P) + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(P) \tilde{A}_\lambda(P) d\tilde{x}^\nu = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \right)_Q [A_\alpha(P) + \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}(P) A_\lambda(P) dx^\nu] \quad (22)$$

这个一阶展开是把 $\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)$ 当作 \tilde{x} 的函数，然后进行泰勒展开取一阶近似。

坐标变换矩阵在 P 和 Q 点存在微小差异，其一阶展开为：

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_Q = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu}\right)_P d\tilde{x}^\nu \quad (23)$$

同时， P 点矢量的变换规则及坐标微分的变换规则为：

$$\tilde{A}_\mu(P) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_P A_\alpha(P) \quad (24)$$

$$dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} d\tilde{x}^\beta \quad (25)$$

将式 (23) 和 (25) 代入(22)右侧，并利用(24)，可得：

$$\begin{aligned} LHS &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_P A_\alpha(P) \\ RHS &= \left[\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu}\right)_P d\tilde{x}^\nu \right] A_\alpha(P) + \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_P \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}(P) A_\lambda(P) \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} d\tilde{x}^\nu \end{aligned} \quad A_\alpha(P)$$

等式两边同时减去公共项 $\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_P A_\alpha(P)$ ，并略去二级无穷小量，整理后比较 $d\tilde{x}^\nu$ 和 $A_\alpha(P)$ 的系数（利用其任意性），可得：

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(P) \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\lambda} = \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} + \Gamma^\gamma_{\rho\beta}(P) \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \quad (26)$$

为解出 $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ ，将式 (26) 两边同时乘以 $\frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\gamma}$ 并对 γ 求和，利用关系式 $\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\gamma} = \delta^\gamma_\gamma$ ，最终得到仿射联络的坐标变换公式：

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\rho\beta}(x) \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} \quad (27)$$

反过来，只要仿射联络按式 (27) 的规则变换，就可以保证 $A_\mu(P \rightarrow Q)$ 是 Q 点的协变矢量。因此，仿射联络的此变换性质是保证平移后矢量仍具协变性的充要条件。 \square

普通导数不是张量

在曲率时空或非线性坐标系中，普通偏导数 ∂_μ 对张量的作用不再保持协变性，这是引入协变导数的根本原因。

设 A^μ 为逆变矢量场，其在坐标变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ 下的变换律为

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu. \quad (28)$$

我们希望考察 $\partial_\lambda A^\mu$ 是否也是张量。对上式两边求偏导：

$$\partial'_\sigma A'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\sigma} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \right) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \right). \quad (29)$$

展开导数：

$$\partial'_\sigma A'^\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} \left[\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} A^\nu + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial_\lambda A^\nu \right]. \quad (30)$$

若 $\partial_\lambda A^\mu$ 真是张量，应满足：

$$\partial'_\sigma A'^\mu \stackrel{?}{=} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} \partial_\lambda A^\rho. \quad (31)$$

然而比较可见，真实结果多出一项：

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} A^\nu, \quad (32)$$

该项一般不为零，因此，普通偏导数 $\partial_\lambda A^\mu$ 在一般坐标变换下并不满足张量变换律：

$$\boxed{\partial_\lambda A^\mu \text{ 不是张量。}} \quad (33)$$

定理 1.8 (零联络坐标定理). 在流形 M 上，任取一点 $P \in M$ ，总存在一组局部坐标系 $\{x^\mu\}$ ，使得在 P 点联络系数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) = 0$ 。

证明. 设坐标变换为

$$x^\mu - x_P^\mu = \bar{x}^\mu + \frac{1}{2} C^\mu_{\alpha\beta} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta, \quad (34)$$

其中

$$C^\mu_{\alpha\beta} = C^\mu_{\beta\alpha}. \quad (35)$$

在点 P 处求导，同时保证新坐标系下 P 点为原点，即 $\bar{x}_P^\mu = 0$ 。

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \right)_P = \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2} C^\mu_{\alpha\beta} (\delta^\alpha_\nu \bar{x}^\beta + \bar{x}^\alpha \delta^\beta_\nu)_P \quad (36)$$

$$= \delta^\mu_\nu. \quad (37)$$

上式的逆矩阵在 P 点也满足

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right)_P = \delta^\mu_\nu. \quad (38)$$

同时，二阶导数为

$$\left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \right)_P = C^\mu_{\alpha\beta}. \quad (39)$$

根据联络系数的坐标变换公式：

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(P) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho_{\alpha\beta}(P) + \frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu}. \quad (40)$$

在点 P 处，代入 $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu}\right)_P = \delta^\mu_\nu$ ，有

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(P) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) + \left(\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu \partial \bar{x}^\nu}\right)_P. \quad (41)$$

因此

$$\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(P) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) + C^\lambda_{\mu\nu}. \quad (42)$$

若取

$$C^\lambda_{\mu\nu} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P), \quad (43)$$

则可得

$$\boxed{\bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(P) = 0.} \quad (44)$$

□

零联络坐标定理和等效原理

在局部坐标系中，若联络系数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P) = 0$ ，则在 P 点的切空间中，任意两个切矢量的平行移动不受曲率影响，具有良好的物理意义，而度规张量总可以做一个合同变换使其变为 *Minkowski* 度规，这与等效原理相符，即在小范围内，任何引力场都可以被视为局部的惯性参考系。

例 1.9 (极坐标). 考虑平面上的矢量场 $\mathbf{A} = A^r \mathbf{e}_r + A^\theta \mathbf{e}_\theta$ ，其中极坐标基矢 \mathbf{e}_r 与 \mathbf{e}_θ 均随角度 θ 变化：

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r. \quad (45)$$

若取普通偏导：

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} = \frac{\partial A^r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + A^r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + A^\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta}. \quad (46)$$

代入上式得：

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial A^r}{\partial \theta} - A^\theta\right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A^\theta}{\partial \theta} + A^r\right) \mathbf{e}_\theta. \quad (47)$$

若我们只取分量的偏导 $\partial_\theta A^r$ 、 $\partial_\theta A^\theta$ ，则忽略了基底旋转的贡献，结果无法表示真实的几何变化，也就是说此时 $\partial_\theta A^\mu$ 的组合不再变换为一个真正的张量。

1.2.2 协变导数

解决平移的问题之后就可以定义导数，利用 Q 点的逆变矢量 $A^\mu(Q)$ 和平移后的矢量 $A^\mu(P \rightarrow Q)$ 做差，再除以位移 dx^ν ，取极限 $dx^\nu \rightarrow 0$ 就可以得到协变导数 (Covariant Derivative)，也就是：

$$\lim_{Q \rightarrow P} \frac{A^\mu(Q) - A^\mu(P \rightarrow Q)}{dx^\nu} \quad (48)$$

协变导数衡量的是，矢量场从点 P 平移到附近点 Q 后的矢量，与原本就在 Q 点的矢量的差异

定义 1.10 (协变导数的定义). 设 A^μ 为逆变矢量，则协变导数定义为

$$\nabla_\nu A^\mu \equiv \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda, \quad (49)$$

对于协变矢量 B_μ ，有

$$\nabla_\nu B_\mu = \partial_\nu B_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} B_\lambda. \quad (50)$$

其中 $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$ 为联络系数。

若 $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ 为 (1,2) 阶张量，则其协变导数为

$$\nabla_\lambda T^\mu_{\nu} = \partial_\lambda T^\mu_{\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} T^\sigma_{\nu} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} T^\mu_{\sigma}. \quad (51)$$

推广到高阶张量场

对任意 (r, s) 型张量 $T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$ ，协变导数为

$$\nabla_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} = \partial_\lambda T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} \quad (52)$$

$$+ \sum_{i=1}^r \Gamma^{\mu_i}_{\sigma\lambda} T^{\mu_1 \cdots \sigma \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \nu_s} - \sum_{j=1}^s \Gamma^\sigma_{\nu_j\lambda} T^{\mu_1 \cdots \mu_r}_{\nu_1 \cdots \sigma \cdots \nu_s}. \quad (53)$$

该公式简记为：对每个上标加一个 Γ 项缩并，对每个下标减一个 Γ 项缩并。

注意协变导数和平移对应的逆变/协变矢量符号不一样：

$$\nabla_\nu B^\mu = \partial_\nu B^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} B^\lambda$$

$$B^\nu(P \rightarrow Q) = B^\nu(P) - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} B^\lambda dx^\rho$$

基本性质 协变导数满足以下性质：

1. 线性性：

$$\nabla_\nu(A + B) = \nabla_\nu A + \nabla_\nu B. \quad (54)$$

2. Leibniz 法则：对任意张量积有

$$\nabla_\nu(A \otimes B) = (\nabla_\nu A) \otimes B + A \otimes (\nabla_\nu B). \quad (55)$$

3. 与坐标变换相容性：若 T 为张量，则 $\nabla_\nu T$ 亦为张量。

4. 对标量场作用等同于普通导数：若 f 为标量场，则

$$\nabla_\mu f = \partial_\mu f. \quad (56)$$

1.2.3 平行移动与自平行线

协变导数描述了矢量场中，矢量从点 P 平移到点 Q 后与 Q 处矢量的差异。如果协变导数为零，这意味着在 Q 处的矢量恰好是通过仿射联络将 P 处的矢量平移到 Q 处后得到的。

在流形上选择一条曲线，如果矢量沿着该曲线的协变导数始终为零，这表明该曲线上的矢量是平行的。反过来，通过计算矢量在曲线上的协变导数，我们可以得到矢量沿着该曲线的平移情况。沿着曲线的协变导数，只要将协变导数往曲线方向上投影就可以得到。

定义 1.11 (内禀导数). 设曲线参数为 λ ，曲线为 $x^\mu(\lambda)$ ，切矢量

$$v^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (57)$$

展开协变导数后，偏导和 v^μ 缩并得到全导数。

沿曲线的任意矢量场 $A^\nu(\lambda)$ 的内禀导数定义为

$$\frac{DA^\nu}{d\lambda} := v^\mu \nabla_\mu A^\nu = \frac{dA^\nu}{d\lambda} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} v^\alpha A^\beta. \quad (58)$$

前文给定的平行移动只在点附近成立，而这个方程给定了矢量沿着一整条曲线的平行移动状况。

定义 1.12 (平行移动). 若 $\frac{DA^\nu}{d\lambda} = 0$ ，称 A^ν 沿曲线平行移动。

定义 1.13 (自平行线). 若取被平行移动的矢量为曲线的切矢量自身 $A^\nu = v^\nu$ ，有：

$$\frac{Dv^\nu}{d\lambda} = v^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0, \quad (59)$$

即

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (60)$$

这个方程称为自平行线方程，方程的解称为自平行线。

给定流形上一个点的切矢量，就可以定出一条自平行线方程。自平行线是定义了联络的流形中，沿着某方向平行移动的路线。

对号差的理解：

坐标变换对度规矩阵来说是一次合同变换，根据 *Sylvester* 惯性定理，合同变换不会改变矩阵的正负特征值个数。因此度规的符号型 (*signature*) 在坐标变换下保持不变。

不同教材对号差的定义略有不同，有的定义为“负特征值的个数”，有的定义为“正负数差”，但物理意义相同。

1.3 度规流形

1.3.1 度规的定义及其基本性质

定义 1.14 (度规张量). 满足以下性质的二阶协变张量称为**度规张量** $g_{\mu\nu}$ ：

(1) 对称性：

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (61)$$

(2) 非退化性：

$$\det(g_{\mu\nu}) \neq 0, \quad (62)$$

因此存在逆度规 $g^{\mu\nu}$ ，满足

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (63)$$

(3) **Lorentz 号差**：在广义相对论中度规符号取 $(-, +, +, +)$ ，即具有一个负特征值与三个正特征值。

度规与因果结构 在流形上，度规 $g_{\mu\nu}$ 定义了时空间隔：

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (64)$$

不同于欧几里得空间，洛伦兹度规并非正定，因此可以定义“时间类”、“光类”、“空间类”三类矢量。

对任意矢量 U^μ ，

$$g(U, U) = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \begin{cases} > 0, & \text{时类 (timelike)}, \\ = 0, & \text{光类 (null / lightlike)}, \\ < 0, & \text{空类 (spacelike)}. \end{cases} \quad (65)$$

这一定义在每个切空间上确定了局域的**因果结构**：时类方向对应有质量粒子的世界线，光类方向定义光锥，空类方向代表纯空间位移。

定义 1.15 (正交归一标架). 若存在一组基矢 $\{e_a\}$ 使得

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}, \quad (66)$$

其中 $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ，则称 $\{e_a\}$ 为 $g_{\mu\nu}$ 的正交归一标架 (orthonormal frame)。

例 1.16 (球面). 单位球面的度规是 $ds^2 = d^2\theta + \sin^2\theta d^2\phi$, 写成矩阵形式是:

$$(d\theta, d\phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix} \quad (67)$$

寻找所谓的正交归一框架也就是做一个合同变化, 即

$$(d\theta, \sin\theta d\phi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ \sin\theta d\phi \end{pmatrix} \quad (68)$$

1.3.2 短程线

有了度规之后便可以衡量距离, 三维欧几里得空间中, 两点间的距离就是两点间直线的距离, 类似的, 可以定义流形中的“直线”为, 满足两点间距离最短的那一条线。

定义 1.17. 短程线 在带有度规 $g_{\mu\nu}$ 的流形中, 两点之间一条曲线的长度为

$$S = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}.$$

若一条曲线使得该长度泛函的变分为零, 即

$$\delta S = 0,$$

则称此曲线为一条短程线。

由变分为零, 取欧拉拉格朗日方程可以得到测地线满足的方程为:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (69)$$

这就是自平行线满足的方程(60), 自平行线和短程线指的是同一个东西, 统称为测地线 (geodesic)。

1.4 黎曼流形

此前我们分别讨论了流形上的度规或联络。若在同一流形上同时赋予度规 $g_{\mu\nu}$ 与联络 ∇ , 便得到描述广义相对论时空结构的基本对象——黎曼流形。为了使两者共同刻画同一几何结构, 需要规定它们之间的关系。

1.4.1 度规与联络的相容条件

在广义相对论中选用的联络是 **Levi-Civita 联络**。它由下述两条条件唯一确定：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{度规相容性}), \quad (70)$$

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}, \quad (\text{无挠性}). \quad (71)$$

度规相容性条件保证平行移动不会改变向量的长度和夹角，使得度规具有明确的物理意义（自由落体测量的距离与时间在平行移动下保持不变）。

无挠性则要求联络的 Christoffel 符号在下标 μ, ν 上对称，意味着微观平移操作彼此可交换，不会出现路径顺序导致的位置错位。对于时空，这排除了“扭曲型”的几何结构，使得自由落体仅由时空弯曲（曲率）决定，而非由额外的“扭转”效应决定。

在这两个条件下，联络被唯一确定，从而形成广义相对论所使用的标准黎曼几何框架。

定理 1.18 (Riemannian 几何基本定理). *Levi-Civita 联络的无挠 Christoffel 符号由度规唯一确定：*

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (72)$$

公式 (72) 表明联络完全由度规决定，因此一旦选定度规，空间的几何性质也就被确定。

证明. 由度规相容条件 (70) 展开得：

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} g_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} g_{\mu\sigma} = 0. \quad (73)$$

对指标 (λ, μ, ν) 进行循环排列并线性组合三式，解出 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ，即可得到 (72)。

□

1.4.2 曲率张量与 Bianchi 恒等式

定义 1.19. 曲率张量 在无挠、度规相容的 Levi-Civita 联络下，协变导数的对易子作用在逆变矢量 V^ρ 上定义**曲率张量**：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma. \quad (74)$$

相应地，对协变矢量 ω_ρ 有

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \omega_\rho = -R^\sigma_{\rho\mu\nu} \omega_\sigma. \quad (75)$$

对一般 (r, s) 张量， R 对每个指标线性作用（逆变指标为 $+R$ ，协变指标为 $-R$ ）。

若存在挠率 $T^\lambda_{\mu\nu}$ ，
则对易子还会出现 T
的附加项；在
Levi-Civita 情形
($T=0$) 才简化为
(74)。

定理 1.20. 曲率张量 由 (74) 可得标准分量式

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (76)$$

Riemann 张量的基本性质 用度规降第一指标

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} := g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\sigma\mu\nu}.$$

则有基本对称性：

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad (77)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (78)$$

曲率张量的独立分量个数

由基本对称性和第一 *bianchi* 恒等式可得到 *Riemann* 张量的独立分量个数为 $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ 。反对称性告诉我们前后两组坐标，一组的独立个数是 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ ，块对称性，可以把 R 理解为一个 $M \times M$ 的矩阵，其中 $M = \frac{n(n-1)}{2}$ ，块对称性说明这个矩阵是对称的，因此只有上三角部分的元素是独立的，独立分量个数是 $\frac{M(M+1)}{2} = \frac{n^2(n^2-1)}{8}$ ，再用第一 *Bianchi* 恒等式可以把独立分量个数减少到 $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ 。

定理 1.21. *Bianchi* 恒等式

(1) 第一 *Bianchi* 恒等式

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0 \iff R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\nu\sigma\mu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0. \quad (79)$$

(2) 第二 *Bianchi* 恒等式

$$\nabla_{[\lambda} R_{\mu\nu]\rho\sigma} = 0. \quad (80)$$

证明. 给一个简短的说明，曲率张量逐点定义，可以由零联络坐标定理取坐标消去联络。这样协变导数就变成了普通导数，而在这种坐标系下，曲率张量的表达式只含有联络的偏导数项，因此对曲率张量的循环求偏导之和为零。由于该等式在任意坐标系下成立，因此协变形式也成立。 \square

定理 1.22. 爱因斯坦张量的协变散度为零

$$\nabla_\rho G^\rho_\mu = 0 \quad (81)$$

将第二 Bianchi 恒等式中的 ρ 和 σ 缩并可得：

$$\nabla_\rho R^\rho_{\lambda\mu\nu} - \nabla_\mu R_{\lambda\nu} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu} = 0$$

再利用度规张量将 λ 和 ν 缩并可得：

$$\nabla_\rho R^\rho_\mu - \nabla_\mu R + \nabla_\lambda R^\lambda_\mu = 0$$

整理上式可得（将哑指标 λ 和 ν 统一换为 ρ ）：

$$\nabla_\rho R^\rho_\mu - \nabla_\mu R + \nabla_\rho R^\rho_\mu = 2\nabla_\rho R^\rho_\mu - \nabla_\mu R = 0$$

即：

$$\nabla_\rho \left(R^\rho_\mu - \frac{1}{2} \delta^\rho_\mu R \right) = 0$$

这正是爱因斯坦张量 $G^\rho_\mu = R^\rho_\mu - \frac{1}{2} \delta^\rho_\mu R$ 的协变散度恒为零：

$$\nabla_\rho G^\rho_\mu = 0$$

这正是爱因斯坦在构造引力场方程时需要的性质。

1.5 微分同胚映射与李导数

设 $f: M \rightarrow M'$ 为微分同胚 (diffeomorphism)，若 f 是一一对应且 f 与 f^{-1} 均为 C^∞ 映射，则称 M 与 M' 互为微分同胚。

在流形上，若一族这样的微分同胚依参数连续变化，可视为描述点沿着流形“流动”的流形上的流。由此，微分同胚可以理解为流形自映射的一类光滑变换。

考虑从流形 M 到自身的微分同胚映射（或称变换）。由于我们关注的是无穷小的连续变换，因此可以选取流形上一点 P 及其变换后的点 Q ，在相同的坐标片中分别记为 x^μ 与 x'^μ 。此时变换的一般形式写作：

$$x'^\mu = x'^\mu(x)$$

两种等价的理解。 对于这样的微分同胚变换，可以从两种角度理解：

- (1) 主动观点：坐标系固定，点随变换而移动；
- (2) 被动观点：点保持不动，而坐标系被重新标定。

两者在无穷小时刻等价。

采用被动观点时，无穷小的微分同胚变换可表示为：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x)$$

其中 ϵ 为无穷小参数， $\xi^{\mu}(x)$ 为定义在流形上的 C^{∞} 矢量场。该矢量场描述了点在变换下的平移方向与幅度。

由此，流形上所有此类无穷小变换（即 ξ 的集合）在数学上构成一个**李群**（Lie 群）的无穷小生成元，而这些生成元的集合构成相应的**李代数**。在微分几何的语境下，称 ξ 为流形上微分同胚群的生成矢量场。

定义 1.23 (流与生成矢量场). 在流形 M 上取一族微分同胚 $\{\phi_{\epsilon}\}$ ，在局部坐标 x^{μ} 中，其无穷小作用可写成

$$x'^{\mu} = \phi_{\epsilon}^{\mu}(x) = x^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

其中 $\xi^{\mu}(x)$ 为任意 C^{∞} 矢量场，称为该流的生成矢量场。把点 P 送到 $Q = \phi_{\epsilon}(P)$ 的同时，也可视为一次被动坐标变换；在 $\epsilon \Rightarrow 0$ 的极限下两种观点等价。

为比较同一点的张量值，引入记号 $T(P \Rightarrow Q)$ ：先在变换下把 T 拖到 Q ，再把其值回比较到 P 。沿矢量场 ξ 的李导数定义为

$$\mathcal{L}_{\xi}T \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{T(Q) - T(P \Rightarrow Q)}{\epsilon}$$

它描述了张量场在 ξ 生成的流下的一阶变化率。

标量场： 对标量 f ，有 $F(P \Rightarrow Q) = F(P) = f(P)$ ，因此

$$\mathcal{L}_{\xi}f = \xi^{\mu} \partial_{\mu} f.$$

逆变矢量（切矢）： 取曲线 $x^{\mu}(\lambda)$ 的切矢 $k^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$ 。在 $x^{\mu} \mapsto x^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x)$ 下，

$$\begin{aligned} k^{\mu}(P \Rightarrow Q) &= \frac{d}{d\lambda} [x^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x)]_P \\ &= k^{\mu}(P) + \epsilon k^{\nu} \partial_{\nu} \xi^{\mu} \Big|_P. \end{aligned}$$

将 $k^\mu(Q)$ 在 P 处展开:

$$k^\mu(Q) = k^\mu(P) + \epsilon \xi^\nu \partial_\nu k^\mu|_P.$$

于是

$$(\mathcal{L}_\xi k)^\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k^\mu(Q) - k^\mu(P \Rightarrow Q)}{\epsilon} = \xi^\nu \partial_\nu k^\mu - k^\nu \partial_\nu \xi^\mu. \quad (1)$$

协变矢量: 由 Leibniz 相容性 (见下) 与 $\mathcal{L}_\xi(p_\mu k^\mu) = \xi^\nu \partial_\nu(p_\mu k^\mu)$, 结合式 (1) 得

$$(\mathcal{L}_\xi p)_\mu = \xi^\nu \partial_\nu p_\mu + p_\nu \partial_\mu \xi^\nu. \quad (2)$$

一般张量的李导数

李导数与张量运算 (张量积、缩并、指标置换) 相容, 并在标量上退化为方向导数。据此从式 (1)(2) 推广到任意 (r, s) 型张量 T :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi T)^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} &= \xi^\rho \partial_\rho T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} \\ &\quad - \sum_{i=1}^r T^{\alpha_1 \cdots \rho \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s} \partial_\rho \xi^{\alpha_i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^s T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \rho \cdots \beta_s} \partial_{\beta_j} \xi^\rho. \end{aligned} \quad (3)$$

要点与常用形式。

- 李导数不仅与张量本身有关, 也取决于生成矢量场 $\xi(x)$ 。
- 该定义对任意可微流形都成立, 不依赖度规或联络。
- 在需要时, 可把分量公式中的普通导数以协变导数替换并自动补偿联络项; 典型计算如

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} &= \xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu \xi^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho \\ &= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu. \end{aligned} \quad (82)$$

1.6 等度规映射与 Killing 矢量场

定义 1.24 (等度规映射). 对于黎曼空间 $(M, g_{\mu\nu})$, 保持度规张量不变的微分同胚变换称为等度规映射 (isometry)。由于微分同胚变化与张量运算的相容性, 可得:

$$g_{\mu\nu}(P \Rightarrow Q) = g_{\mu\nu}(Q) \quad (83)$$

Killing 方程是超定的，方程给出的约束条件个数大于未知函数个数，因此一般解不存在，只有在高度对称的空间中才可能存在非平凡解。

这其实就是说度规的李导数为 0，根据82可得 *Killing* 方程：

定理 1.25 (*Killing* 方程). 等度规映射的无穷小形式由 *Killing* 方程描述：

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (84)$$

满足 *Killing* 方程的微分矢量场 $\xi^\mu(x)$ 称为 *Killing* 矢量场，是等度规变换的生成元。

例 1.26 (欧式平面的 *Killing* 矢量场). 对于欧式平面度规 $g_{ij} = \delta_{ij}$ ，求解 *Killing* 方程可得 3 个线性独立的 *Killing* 矢量场：

$$\xi_{(1)}^\mu = (1, 0) \quad (\text{x 方向平移}) \quad (85)$$

$$\xi_{(2)}^\mu = (0, 1) \quad (\text{y 方向平移}) \quad (86)$$

$$\xi_{(3)}^\mu = (-y, x) \quad (\text{绕原点转动}) \quad (87)$$

这对应于欧式平面的 3 个独立几何对称性。

例 1.27 (闵可夫斯基时空的 *Killing* 矢量场). 对于闵氏度规 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ，存在 10 个线性独立的 *Killing* 矢量场，分别对应于：

- 4 个平移变换（时空平移对称性）
- 6 个 Lorentz 变换（3 个空间转动和 3 个 boost 变换）

时间平移对应的 *Killing* 矢量为：

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (88)$$

定义 1.28 (稳定时空). 如果时空区域存在类时 *Killing* 矢量场 ξ^μ ，即满足：

$$g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu < 0 \quad (89)$$

则称该时空区域是稳定的 (stationary)。

定理 1.29 (适配坐标系与时间平移不变性). 对于类时 *Killing* 矢量场 ξ^μ ，可以构造适配坐标系，使得：

$$\xi^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (90)$$

在适配坐标系下，度规不显含时间坐标：

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \quad (91)$$

从而时间平移变换 $x^0 \rightarrow x^0 + b$ 是等度规变换。

适配坐标系的构造细节

定义 1.30 (循环坐标与守恒量). 不显含于度规场中的坐标称为循环坐标, 从而度规对这个坐标的偏导数为 0 对应一种守恒量。

时间平移不变性 (由类时 Killing 矢量场描述) 将导致能量守恒, 这是广义相对论框架下的诺特定理的具体体现。

定义 1.31 (最大对称空间). 具有最大数目独立 Killing 矢量场的空间称为最大对称空间。n 维黎曼空间最多有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个独立 Killing 矢量场。

1.7 黎曼空间中的常用计算

在黎曼几何中, 度规张量 $g_{\mu\nu}$ 的行列式通常简记为 g , 即:

$$g \equiv \det(g_{\mu\nu}) \quad (92)$$

由于在物理应用中度规通常具有负号约定, 实际计算中常用的是 g 。

度规行列式 g 包含了度规张量的全部信息, 在坐标变换下按特定规律变换。

定理 1.32 (度规行列式的导数). 度规行列式 g 对度规分量的偏导数为:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu} \quad (93)$$

其中 $\Delta^{\mu\nu}$ 是 $g_{\mu\nu}$ 的代数余子式。由此可得行列式对坐标的偏导数:

$$\partial_\rho g = gg^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu} \partial_\rho g^{\mu\nu} \quad (94)$$

一般度规的行列式是负的, 因此 $-g$ 是正值。

定理 1.33 (Christoffel 联络的缩并). Christoffel 联络 $\Gamma_{\rho\mu}^\mu$ 的缩并形式为:

$$\Gamma_{\rho\mu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{1}{2g} \partial_\rho g = \partial_\rho \ln \sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho \sqrt{-g} \quad (95)$$

这个结果在协变散度的计算中具有核心重要性。

定义 1.34 (协变散度). 对于任意张量场, 其协变散度定义为该张量的协变导数在某个指标上的缩并。以逆变矢量场 $J^\mu(x)$ 为例, 其协变散度为:

$$\nabla_\rho J^\rho = \partial_\rho J^\rho + \Gamma_{\rho\mu}^\mu J^\rho \quad (96)$$

定理 1.35 (矢量场的协变散度简化). 利用 Christoffel 联络的缩并关系, 逆变矢量场的协变散度可简化为:

$$\nabla_\rho J^\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} J^\rho) \quad (97)$$

当 $\nabla_\rho J^\rho = 0$ 时, 称 J^μ 为守恒流。

这个简化形式极大方便了实际计算，将复杂的张量运算转化为普通导数运算。

在广义相对论中，能量-动量张量的协变散度为零对应着局域能量-动量守恒定律。对于电磁场，四电流密度的协变散度为零对应着电荷守恒。

定理 1.36 (二阶张量场的协变散度). 对于二阶逆变张量场 $T^{\mu\nu}(x)$ ，其协变散度为：

$$\nabla_\rho T^{\rho\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} T^{\rho\nu}) + \Gamma^\nu_{\mu\rho} T^{\rho\mu} \quad (98)$$

特别地，当 $T^{\mu\nu}$ 是反对称张量时，第二项为零，简化为：

$$\nabla_\rho T^{\rho\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} T^{\rho\nu}) \quad (99)$$

定理 1.37 (全反称张量场的协变散度). 对于任意阶的全反称逆变张量场 $H^{\mu\nu\cdots\sigma}(x)$ ，其协变散度满足：

$$\nabla_\rho H^{\rho\nu\cdots\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\rho (\sqrt{-g} H^{\rho\nu\cdots\sigma}) \quad (100)$$

这一结果可以视为前述定理在高阶反对称张量情形的推广。

2 爱因斯坦场方程和广义相对论的实验检验

2.1 引力几何化与弱场近似

等效原理告诉我们，引力和惯性里局域不可区分，所以我们可以把引力效应等价于坐标变换的效应，最终归纳于时空的几何效应。考虑自由粒子在惯性系中的运动方程：

$$\frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (101)$$

其中 X^μ 是闵可夫斯基坐标。通过一般坐标变换 $x^\mu = x^\mu(X^\nu)$ 引入非惯性系后，运动方程变为

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (102)$$

把这个方程与牛顿方程对比，可得联络在此处的作用类似于惯性力的场强，由等效原理，引力效应也可以通过联络来描述，联络蕴含了时空的几何结构，因此这种思想就是引力的几何化。粒子物理无论是在惯性力场还是引力场中，其运动方程都是测地线方程，力的效应在联络中称为时空本身的性质。联络是引力场强，度规的导数，对比电势和电场，度规就是相对论框架下的引力势。

弱场近似下的运动方程

在弱场近似中，引入以下条件：

1. 引力场弱： $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ，且 $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ 。
2. 引力场稳态： $h_{\mu\nu,0} = 0$ 。
3. 引力场空间缓变： $|h_{\mu\nu,i}| \ll 1$ ，其中拉丁指标 i, j, k 表示空间坐标。
4. 粒子低速运动： $\left| \frac{dx^i}{dx^0} \right| \ll 1$ 。

在这些条件下，联络可近似为：

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\rho} (\partial_\lambda h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\lambda} - \partial_\rho h_{\nu\lambda}). \quad (103)$$

测地线方程可简化为：

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0, \quad (104)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2. \quad (105)$$

利用 $x^0 = t$ （时间坐标）和低速条件，得到：

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \varphi, \quad (106)$$

其中牛顿引力势 φ 与度规扰动的关系为（自然单位制）：

$$\varphi = -\frac{1}{2} h_{00}, \quad g_{00} = -1 - 2\varphi = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \quad (107)$$

还原光速， g_{00} 等于 0 时， $R_g = \frac{2GM}{c^2}$ 称为施瓦西半径，当距离远大于施瓦西半径时，度规退化为 Minkovski 度规。这表明在弱场低速近似下，广义相对论还原为牛顿引力理论。

例 2.1 (太阳的引力半径). 对于质量为 M 的球对称引力源，牛顿引力势为 $\varphi = -GM/r$ 。弱场条件要求 $r \gg R_g$ ，其中引力半径（史瓦西半径）为：

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (108)$$

太阳的质量 $M \approx 2 \times 10^{33} \text{ g}$ ，引力半径 $R_g \approx 3 \text{ km}$ ，而实际半径约 $7 \times 10^5 \text{ km}$ ，故弱场条件高度满足。

爱因斯坦场方程及其弱场极限

定理 2.2 (爱因斯坦场方程). 引力场方程的最一般形式为：

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (109)$$

其中 $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ 是爱因斯坦张量, Λ 是宇宙学常数, κ 是相对论引力常数, $T_{\mu\nu}$ 是能量动量张量。当 $\Lambda = 0$ 时, 方程为:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (110)$$

在真空区域 ($T_{\mu\nu} = 0$), 场方程简化为 $R_{\mu\nu} = 0$, 对应 *Ricci* 平坦时空。

流体四速度满足归一化条件 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ 。静止流体三矢量均为 0, 可得 $g_{00}u^0u^0 = -1$ 。可得其四速度为:

$$u^\mu = (-g_{00})^{-1/2}(1, 0, 0, 0). \quad (111)$$

由此可得对应的能量动量张量, 其非零分量为:

$$T^{00} = \rho(-g_{00})^{-1}, \quad T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = -\rho. \quad (112)$$

在弱场近似下, 爱因斯坦场方程的 00 分量化为:

$$R^{00} = \kappa \left(T^{00} - \frac{1}{2}g^{00}T \right) \quad (113)$$

带入可得,

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{2}\kappa\rho. \quad (114)$$

与牛顿引力场方程 $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$ 对比, 可得:

$$\kappa = 8\pi G. \quad (115)$$

恢复光速后, $\kappa = 8\pi G/c^4$ 。

宇宙学常数的影响

若保留宇宙学常数项, 弱场近似下牛顿方程修正为:

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho - \Lambda. \quad (116)$$

观测表明 Λ 极小, 在太阳系尺度可忽略。

2.2 检验粒子在引力场中的运动

2.2.1 时空对称性与守恒量

把待研究的物体看成质量远小于引力源的质量“检验粒子”, 可以忽略它对时空背景的反作用, 只需要在已知的度规上讨论其测地运动。

对称性可以简化计算, 在广义相对论中也不例外, 这里我们需要借助 Killing 矢量得到守恒量。考虑具有静质量的检验粒子, 其质量记为 m 。令 τ 为质点的固有时, $x^\mu(\tau)$ 为其世界线坐标, 则四速度和逆变四动分别为

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (117)$$

$$p^\mu = mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (118)$$

定理 2.3 (Killing 矢量与守恒量). 若质点沿测地线运动, 其四动量为 p^μ , 而 ξ^μ 是一个 Killing 矢量, 则量

$$C = p_\mu \xi^\mu \quad (119)$$

在质点的世界线上保持不变, 即

$$\frac{d}{d\tau} (p_\mu \xi^\mu) = 0. \quad (120)$$

证明. 沿世界线使用协变导数, 可以写成

$$\frac{d}{d\tau} (p_\mu \xi^\mu) = u^\nu \nabla_\nu (p_\mu \xi^\mu) \quad (121)$$

$$= u^\nu (\xi^\mu \nabla_\nu p_\mu + p_\mu \nabla_\nu \xi^\mu) \quad (122)$$

$$= m (u^\nu \xi^\mu \nabla_\nu u_\mu + u^\nu u_\mu \nabla_\nu \xi^\mu) \quad (123)$$

注意这里第一项其实就是测地线方程乘以 ξ^μ , 第二项又 killing 方程, 是反对称张量的收缩为 0。□

这一守恒量的物理意义是: 若时空在某个方向上具有对称性, 则检验粒子沿该方向对应的动量分量在运动中保持不变。

在具体问题中, 识别出哪些坐标是循环坐标, 就等价于找到了运动中的能量、角动量等守恒量。这在弯曲时空中求解测地线尤为重要。

现在考虑具有循环坐标的情形。设时空存在一组坐标 x^μ , 其中 x^k 只以其导数出现而不显含在度规中, 则 x^k 为循环坐标。这可以理解为对 x^k 方向做无穷小平移

$$x'^\mu = \begin{cases} x^\mu, & \mu \neq k, \\ x^k + \varepsilon, & \mu = k, \end{cases} \quad (124)$$

度规保持不变, 所以它导出的 Killing 矢量就是

$$\xi^\mu = \delta^{\mu k}, \quad (125)$$

此时守恒量

$$p_\mu \xi^\mu = p_k \quad (126)$$

正是四动量在循环坐标方向上的协变分量。

2.2.2 史瓦西时空中点粒子的运动

史瓦西时空中的守恒量与运动方程 考虑质量为 M 的球对称引力源, 其外部时空由史瓦西度规描述。度规与 t 与 φ 无显含关系, 这两个坐标是循

环坐标，对应的 Killing 矢量分别为 ∂_t 与 ∂_φ 。因此有两个守恒量：

$$p_t = g_{t\mu}p^\mu = g_{tt}p^t = -m \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (127)$$

$$p_\varphi = g_{\varphi\mu}p^\mu = g_{\varphi\varphi}p^\varphi = mr^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (128)$$

在非相对论极限 $r \rightarrow 0$ 且 $c \rightarrow \inf$ 时，可以验证 $-p_t$ 对应于质点的能量，而 p_φ 给出角动量的第三分量。

记为

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = E \quad (129)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = L \quad (130)$$

由于引力源球对称，我们可以选择质点的轨道位于赤道面 $\theta = \pi/2$ ，于是

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (131)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad (132)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} E \quad (133)$$

广义相对论中，引力会扭曲时空，所以很难在不同的时空点使用同一参考系描述时空坐标，这里能量和角动量以无穷远处（平坦时空）的静止观测者为参考，只对那个观测者有意义。

这里考察运动应该用测地线方程的，但是它用的四速度归一化条件，难道这两个方程有什么联系？

再加上四速度的归一化条件，

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 \quad (134)$$

在史瓦西度规中具体写为

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -1. \quad (135)$$

将 $dt/d\tau$ 与 $d\varphi/d\tau$ 代入得

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (136)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad (137)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (138)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} E \quad (139)$$

这四个一阶方程给出了质点在史瓦西时空中的完整运动。

牛顿情形中的径向有效势 为了理解上式的物理含义，先回顾牛顿引力中质点在球对称场中的运动。设 E_n 为牛顿力学中的单位质量总能量， L 仍表示单位质量角动量，则在极平面上有

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (140)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{r^2} \quad (141)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2E_n + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{r^2} \quad (142)$$

引入牛顿情形下的径向有效势 $V_{eff}(r)$:

$$V(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2}. \quad (143)$$

则径向方程可化为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E_n - V_{eff}(r) \quad (144)$$

$$= -\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{L}^2}{2\tilde{r}^2} \quad (145)$$

其中最后一部作了无量纲化处理 $\tilde{r} = r/GM$, $\tilde{L} = L/GM$ 经典力学中，质点的径向运动只允许发生在 $E_n \geq V(r)$ 的区域内。

在牛顿情形下，有效势是引力吸引势与离心势的简单叠加，势垒的存在与否决定了粒子是被散射出去还是能够被捕获。

利用 $V(r)$ 的图像，可以总结出牛顿情形下径向运动的分类：

1. $L = 0$: 无角动量，仅有径向自由度。若 $E_n < 0$ ，粒子只能被吸向力心；若 $E_n \geq 0$ ，则可能逃向无穷远。
2. $L \neq 0, E_n < 0$: 束缚态，对应椭圆或类椭圆轨道。
3. $L \neq 0, E_n \geq 0$: 散射态，粒子自远处而来，经引力偏折后再次远离。

与牛顿情形相比，多出了 $-2GML^2/r^3$ 这一项。它在小 r 区域占主导，使有效势的深部结构发生改变，从而允许出现“直接坠入黑洞”的轨道。

广义相对论中的有效势与轨道类型 在史瓦西时空中，也可以将径向方程重写为类似“能量减去势能”的形式。定义广义相对论情形下的径向有效势 $U(r)$ 为

$$U^2(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (146)$$

$$= 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2GML^2}{r^3}. \quad (147)$$

于是径向方程可写成

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - U^2(r). \quad (148)$$

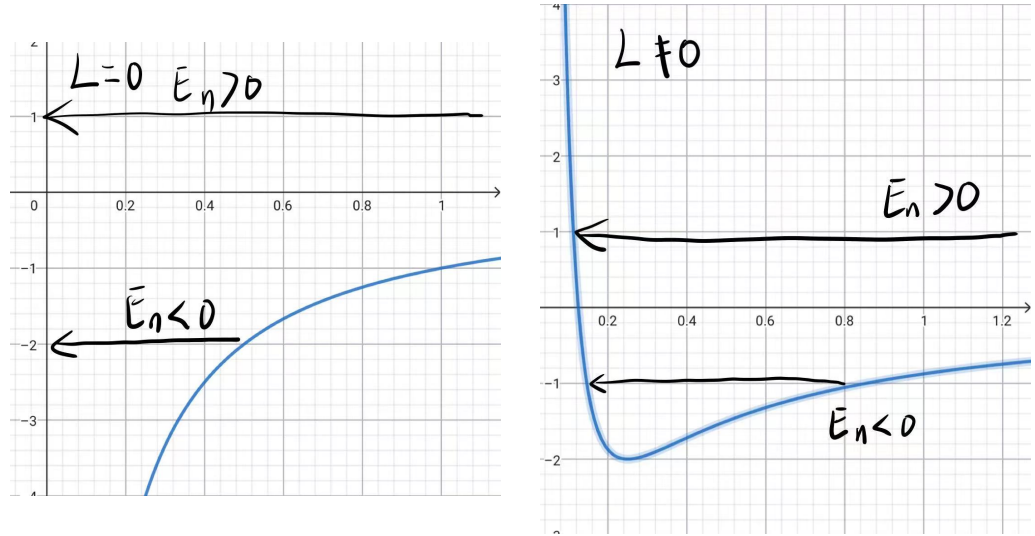


图 2: 牛顿引力散射

从形式上看, U^2 与牛顿有效势 V 的最大差别就在于 $-2GML^2/r^3$ 这一强场修正项; 常数项 1 反映了相对论静能量基准 (静止粒子的 $E^2 = 1$)。引入无量纲变量后, 有效势可写为

$$U^2(\tilde{r}) = 1 - \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{r}^2} - \frac{2\tilde{L}^2}{\tilde{r}^3}. \quad (149)$$

通过考察 $U^2(\tilde{r})$ 随 \tilde{r} 的曲线, 可以发现当 \tilde{L} 足够大时, 曲线具有一个峰值 U_m^2 , 形成势垒; 随着 \tilde{L} 变小, 势垒逐渐降低并最终消失。相应地, 轨道类型可分为:

1. $\tilde{L} > 4$: 有效势存在一个峰值 $U_m^2 > 1$ 的势垒。此时可能的运动分为三类:

$$E^2 < 1 \quad \text{束缚态;} \quad (150)$$

$$1 \leq E^2 < U_m^2 \quad \text{散射态;} \quad (151)$$

$$E^2 \geq U_m^2 \quad \text{吸收态。} \quad (152)$$

2. $2\sqrt{3} \leq \tilde{L} \leq 4$: 势垒仍存在, 但峰值满足 $U_m^2 \leq 1$ 。此时只有两种可能:

$$E^2 < U_m^2 \quad \text{束缚态;} \quad (153)$$

$$E^2 \geq U_m^2 \quad \text{吸收态 (若 } E^2 < 1 \text{ 则粒子必然撞向中心)。} \quad (154)$$

3. $\tilde{L} < 2\sqrt{3}$: 势垒完全消失, 只剩吸收态,

$$E^2 \geq 0, \quad \text{粒子最终都会落向引力中心 (若 } E^2 < 1 \text{ 则不可能逃离)。} \quad (155)$$

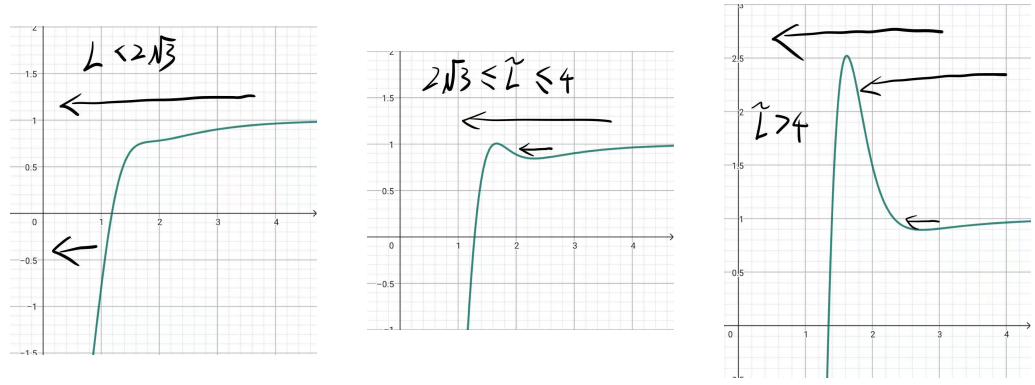


图 3: 爱因斯坦引力散射

与牛顿情形相比，广义相对论中势垒更低甚至可以完全消失，因而粒子被引力源“吞噬”的几率显著增加。这一事实是相对论天体物理中吸积盘和物质落入黑洞等现象的理论基础。

在 \tilde{L} 较大的情形下， $U^2(\tilde{r})$ 随 $\log r$ 的曲线呈现出明显的势垒结构；随着 \tilde{L} 减小，势垒的高度和宽度逐渐降低直至消失。图像上，曲线在远处都趋近于 $U^2 \rightarrow 1$ ，对应无穷远处静止粒子的能量基准。

2.3 广义相对论的实验验证

2.3.1 行星轨道的近日点进动

牛顿情形下的轨道方程 从牛顿径向能量方程出发，将角向方程代入，得到（ E_n 为牛顿能量， L 为单位质量角动量）

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 = \frac{2E_n}{L^2} + \frac{2GM}{rL^2} - \frac{1}{r^2}. \quad (156)$$

对 φ 再求导得

$$2 \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right) \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = \frac{2GM}{L^2} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right) - \frac{2}{r} \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right), \quad (157)$$

若 $\frac{d}{d\varphi}(1/r) \neq 0$ ，可写成标准 Binet 方程

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2}. \quad (158)$$

为了无量纲化，引入

$$u := \frac{GM}{r}. \quad (159)$$

则上式化为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \tilde{L}^{-2}, \quad \tilde{L} := \frac{L}{GM}. \quad (160)$$

该线性方程的通解为

$$u = \tilde{L}^{-2} (1 + e \cos \varphi), \quad (161)$$

其中 e 为偏心率。当 $|e| < 1$ 时轨道为椭圆。

牛顿情形中, *Binet* 方程具有严格周期性, 因此轨道闭合; 而广义相对论修正破坏了这一周期性, 产生近日点进动。

广义相对论情形的轨道方程 将 Schwarzschild 有效势加入径向方程, 得到

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 = \frac{E^2 - 1}{L^2} + \frac{2GM}{rL^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r^3}. \quad (162)$$

与牛顿推导类似, 可得到修正后的 Binet 方程

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{GM}{L^2} + \frac{3GM}{r^2}. \quad (163)$$

以 $u = GM/r$ 表示, 则为

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \tilde{L}^{-2} + 3u^2. \quad (164)$$

最后一项 $3u^2$ 即为广义相对论修正。

水星近日点进动的计算 对太阳而言, 量级估算

$$GM = 1.5 \times 10^3 \text{ m}, \quad r \approx 5 \times 10^{10} \text{ m}, \quad (165)$$

故 $u = GM/r \sim 10^{-7}$, u^2 更小, 可采用微扰法。这里使用水星的原因其实是因为水星的轨道半径小, u 大, 那么水星的轨道进动应该更容易观测。取 \tilde{L}^{-2} 为展开系数, 则可设解展开为

$$u = \tilde{L}^{-2} u_1 + \tilde{L}^{-4} u_2 + \cdots, \quad (166)$$

其中 u_1 为牛顿引力的解 $1 + e \cos \varphi$, 代入修正方程得到二阶展开的方程

$$\tilde{L}^{-2} (d_\varphi^2 u_2 + u_2) = 3\tilde{L}^{-4} (1 + e \cos \varphi)^2 \approx 3\tilde{L}^{-4} (1 + 2e \cos \varphi). \quad (167)$$

这里假设了偏心率 $e \ll 1$

于是得到摄动后的轨道

$$u \approx \tilde{L}^{-2} (1 + e \cos \varphi) + 3\tilde{L}^{-4} \left[1 + e \cos \varphi - 3\tilde{L}^{-2} e \varphi \sin \varphi \right]. \quad (168)$$

注意到 φ 出现了线性增长项 $\varphi \sin \varphi$ ，说明周期略大于 2π ，导致轨道不再闭合。近日点条件是

$$\left. \frac{du}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad (169)$$

由此可得两次相邻近日点间的相位差

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 - 3\tilde{L}^{-2}\right)^{-1} \approx 2\pi + 6\pi \left(\frac{GM}{L}\right)^2. \quad (170)$$

于是近日点相对于牛顿轨道的进动量为

$$\delta\varphi = 6\pi \left(\frac{GM}{L}\right)^2. \quad (171)$$

在天文单位下，可写成常用公式

$$\delta\varphi = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2}, \quad (172)$$

其中 a 为轨道半长轴， e 为偏心率。将水星数据代入，每世纪进动约 $43''$ ，与观测高度一致。

2.3.2 光线的引力偏折

光子运动方程的构建 光子的静质量为零，其世界线为类光线，无法取用固有时 τ 作为参数，但可引入仿射参数 λ 。于是光子的逆变四动量定义为

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (173)$$

若时空存在 Killing 矢量场 ξ^μ ，则类似于有质量粒子的情形，可证明

$$\frac{d}{d\lambda}(p_\mu \xi^\mu) = 0, \quad (174)$$

即 $p_\mu \xi^\mu$ 在光子运动中保持不变。

在史瓦西时空中，由于度规与 t 和 φ 无显含关系，分别存在两个守恒量

$$p_t = -E, \quad (175)$$

$$p_\varphi = L, \quad (176)$$

它们对应于能量与角动量守恒。代入度规得

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} = E, \quad (177)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L. \quad (178)$$

广义相对论预言：光线在引力场中不会直线传播，而会发生弯曲。这是由于时空本身的弯曲导致光线的测地线不再是平直的。实验上，这一效应在太阳掠射的星光观测中得到验证。

这里 E 为光子能量常数, L 为角动量常数。引力势对光子的作用表现为时空几何对测地线的弯曲。

光线满足类光条件

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0. \quad (179)$$

代入史瓦西度规得

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (180)$$

将守恒量代入消去 t, φ 导数后化为

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}. \quad (181)$$

定义无量纲有效势

$$U^2(r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{L^2}{r^2}, \quad (182)$$

则方程形式与有质量粒子的相似:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - U^2(r). \quad (183)$$

例 2.4 (有效势的峰值). 对 $U^2(r)$ 求极值:

$$\frac{dU^2}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 3GM, \quad (184)$$

此处为不稳定圆轨道半径, $U_{\max}^2 = \frac{1}{27} \left(\frac{L}{GM}\right)^2$ 。若 $E^2 < U_{\max}^2$, 光线被散射; 若 $E^2 \geq U_{\max}^2$, 则被吸入黑洞。

由角动量守恒 $r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = L$, 可得

$$\frac{dr}{d\lambda} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (185)$$

代入前式得轨道方程

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\right)^2 = \frac{E^2}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r^3}. \quad (186)$$

令 $u = 1/r$, 得

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3GMu^2. \quad (187)$$

这就是光线在史瓦西时空中的轨道方程。其右端 $3GMu^2$ 项是广义相对论修正项, 反映出引力对光线传播方向的弯曲效应。

2.3.3 掠日光线的偏折角

考虑掠过太阳表面的星光，太阳半径 R 远大于 GM ，令 u 较小，可采用微扰法。设解为：

$$u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \cdot \quad (188)$$

代入可得零级近似：

$$u_0 = u_0 \cos \varphi, \quad u_0 = \frac{GM}{R}, \quad (189)$$

由零级近似可得一级微扰方程

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 3u_0^2 \cos^2 \varphi. \quad (190)$$

利用 $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ 得通解

$$u_1 = u_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right). \quad (191)$$

于是总解近似为

$$u \approx u_0 \cos \varphi + u_0^2 (1 + \sin^2 \varphi). \quad (192)$$

光线在远离引力源时，
轨迹趋近直线。引力
导致的弯曲使入射与
出射方向不再共线，
从而产生可观测的偏
折角。

在无穷远处 $u \rightarrow 0$ ，设 $\phi = \frac{\pi}{2} + \delta$ ，代入可得

$$\delta \approx 2u_0. \quad (193)$$

故光线偏折角为

$$\Delta\theta = 2\delta = \frac{4GM}{R}. \quad (194)$$

将太阳参数代入：

$$\Delta\theta \approx 1.75'', \quad (195)$$

与观测结果符合良好。

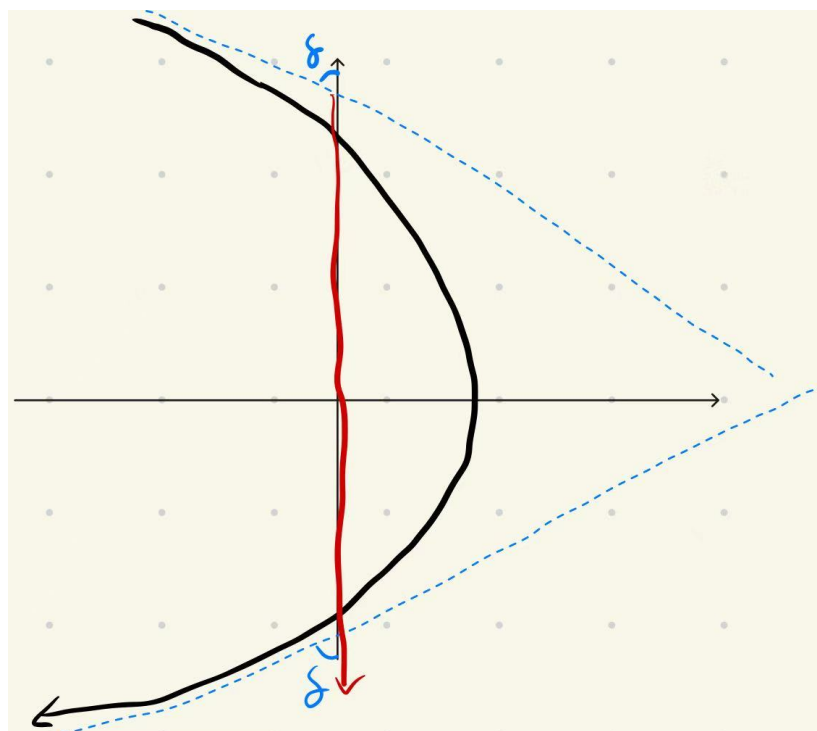


图 4: 光子引力偏折