

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1  
по дисциплине  
*«Дискретные системы управления»*

по теме:  
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Студент:  
*Группа № R3435*  
Вариант №8

*Зыкин Л. В.*

Предподаватель:  
*доцент*

*Краснов А. Ю.*

Санкт-Петербург  
2025

# 1 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИСКРЕТНОГО ЭЛЕМЕНТА НА НЕПРЕРЫВНУЮ СИСТЕМУ

## 1.1 Постановка задачи

Вариант: 8. Для схемы на рис. 1 заданы параметры: период дискретизации  $T = 0,2$  с, усиление непрерывной части  $K_{CO} = 3,4$ . Требуется:

- (a) Реализовать схему в среде моделирования (Python/NumPy/Matplotlib). Для дискретного звена использовать экстраполятор нулевого порядка (ZOH).
- (b) Подбором коэффициента обратной связи  $K_{FB}$  найти границы устойчивости (нейтральная и колебательная) замкнутой системы. Построить переходные характеристики выхода.
- (c) Сделать вывод о влиянии ZOH на устойчивость замкнутой системы.
- (d) Исследовать влияние  $K_{FB}$  на колебательность процесса: найти значения, соответствующие максимальной колебательности и отсутствию колебаний; построить переходные процессы.
- (e) Найти значение  $K_{FB}$ , обеспечивающее оптимальный по быстродействию процесс; представить переходные характеристики.

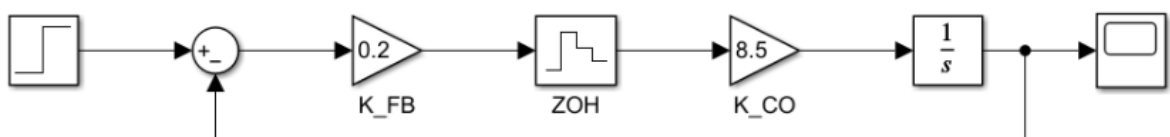


Рисунок 1 — Структурная схема моделирования задания 1 (иллюстрация из методички).

## 1.2 Математическая модель

Непрерывная часть имеет передаточную функцию вида

$$W_c(s) = \frac{K_{CO}}{s}, \quad K_{CO} = 3,4.$$

При ZOH-дискретизации интегратора получаем дискретную модель состояния:

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot K_{CO} \cdot u_k, \quad y_k = x_k.$$

При замыкании системы по коэффициенту обратной связи  $K_{FB}$  управление принимает вид:

$$u_k = r_k - K_{FB} \cdot y_k = 1 - K_{FB} \cdot x_k.$$

Подставляя управление в уравнение состояния, получаем замкнутую систему:

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot K_{CO} \cdot (1 - K_{FB} \cdot x_k) = (1 - TK_{CO}K_{FB}) \cdot x_k + TK_{CO}.$$

Собственное число замкнутой системы:

$$a = 1 - TK_{CO}K_{FB} = 1 - 0,2 \cdot 3,4 \cdot K_{FB} = 1 - 0,68K_{FB}.$$

### 1.3 Ход моделирования

Реализация выполнена в скрипте `python/task1.py`. Скрипт формирует переходные процессы для различных значений  $K_{FB}$  и сохраняет рисунки в папку `images/task1/`.

#### (b) Границы устойчивости

Границы устойчивости определяются условием  $|a| = 1$ :

$$a = 1 \Rightarrow K_{FB} = 0 \quad (\text{нейтральная граница}), \quad (1)$$

$$a = -1 \Rightarrow 1 - 0,68K_{FB} = -1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow K_{FB} = \frac{2}{0,68} = 2,941 \quad (\text{колебательная граница}). \quad (3)$$

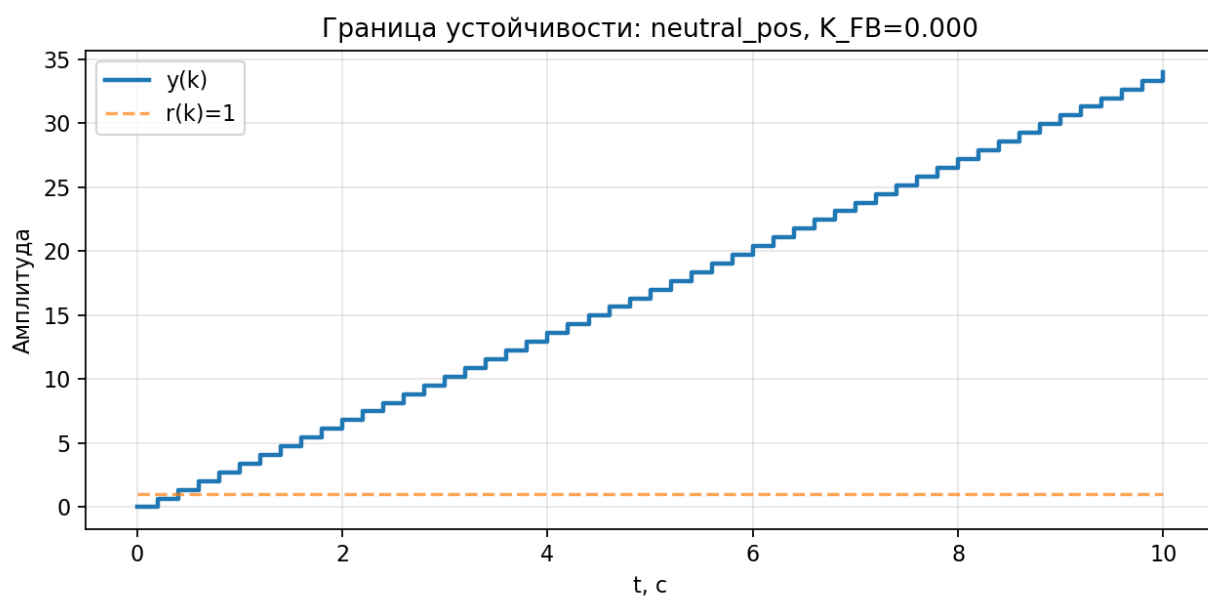


Рисунок 2 — Переходная характеристика при нейтральной границе устойчивости ( $K_{FB} = 0$ ).

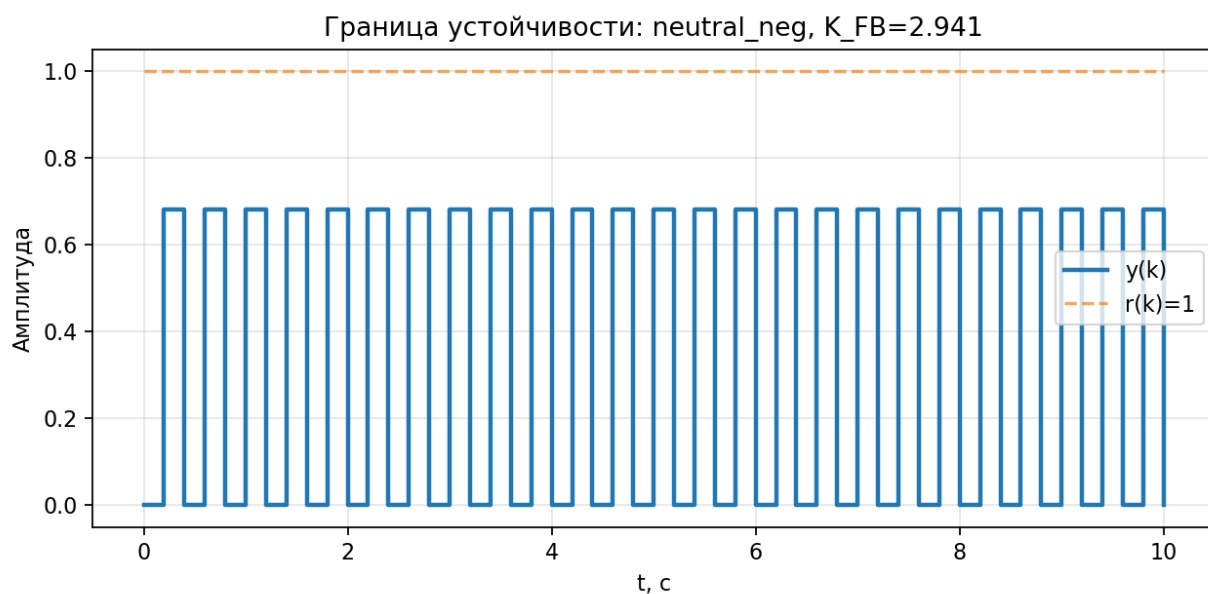


Рисунок 3 — Переходная характеристика при колебательной границе устойчивости ( $a = -1$ ,  $K_{FB} \approx 2,941$ ).

### (с) Влияние ЗОН

ЗОН фиксирует управляющее воздействие на интервале дискретизации, что эквивалентно появлению дискретного собственного числа  $a = 1 - TK_{CO}K_{FB}$ . В результате устойчивость определяется положением  $a$  внутри единичного круга; чем ближе  $a$  к границе  $-1$ , тем больше колебательность.

#### (d) Влияние коэффициента обратной связи

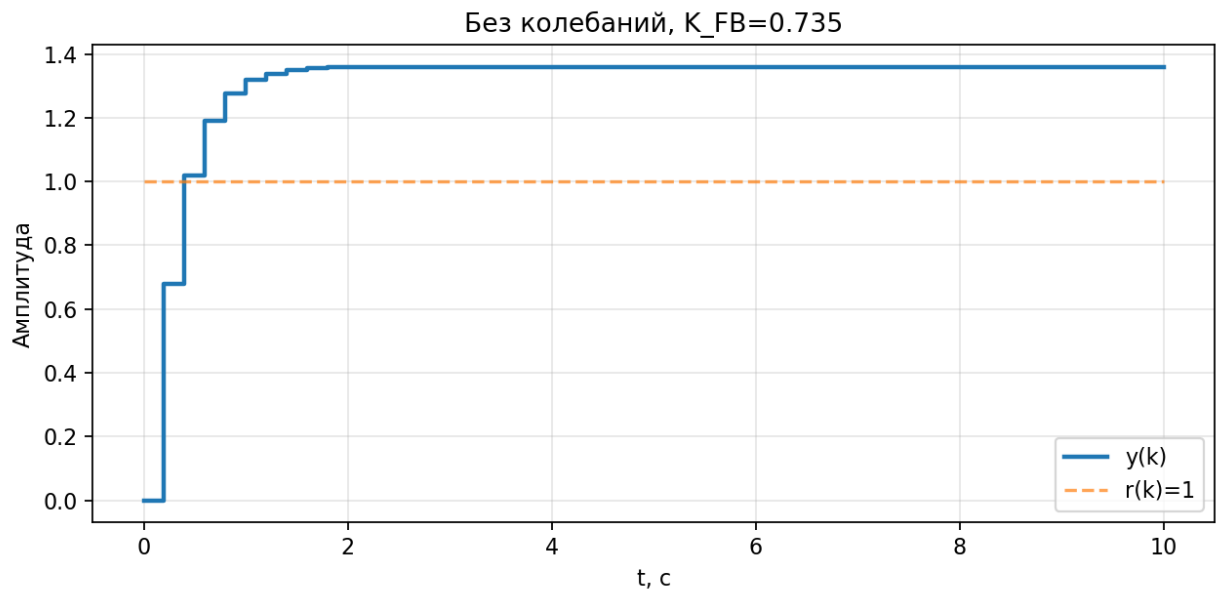


Рисунок 4 — Переходная характеристика без колебаний ( $0 < a < 1$ ).

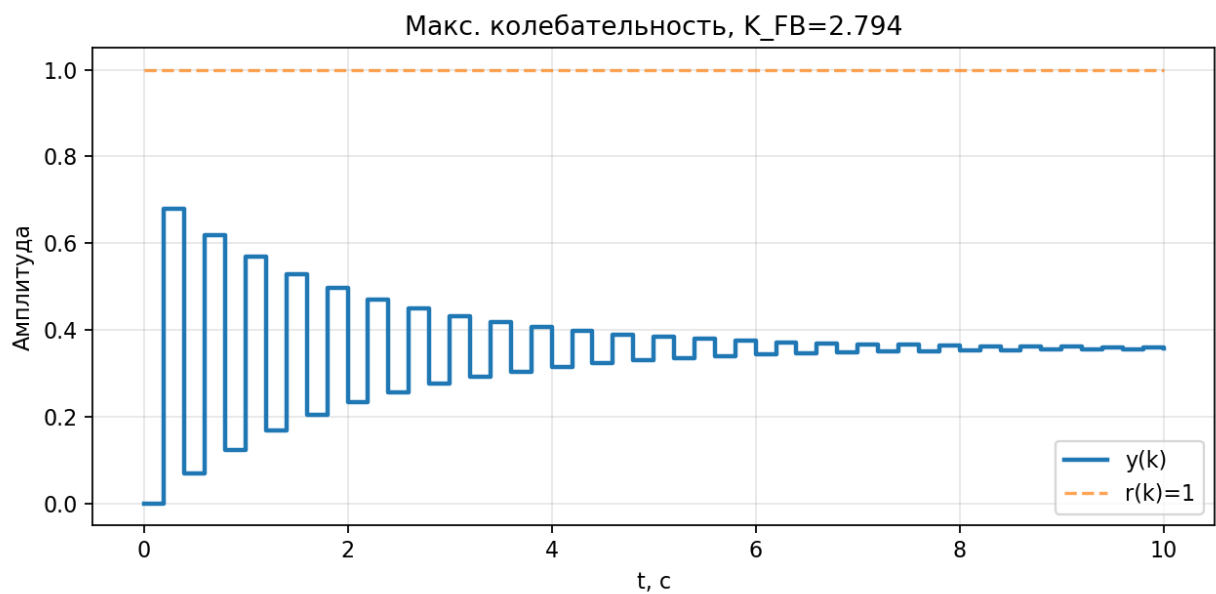


Рисунок 5 — Переходная характеристика при максимальной колебательности ( $a \approx -0,9$ ).

Тенденции: при уменьшении  $a$  в диапазоне  $(0,1)$  процесс становится быстрее и апериодичнее; при отрицательных  $a$  появляется колебательность, её амплитуда растёт по мере приближения  $a$  к  $-1$ .

### (е) Оптимальный по быстродействию процесс

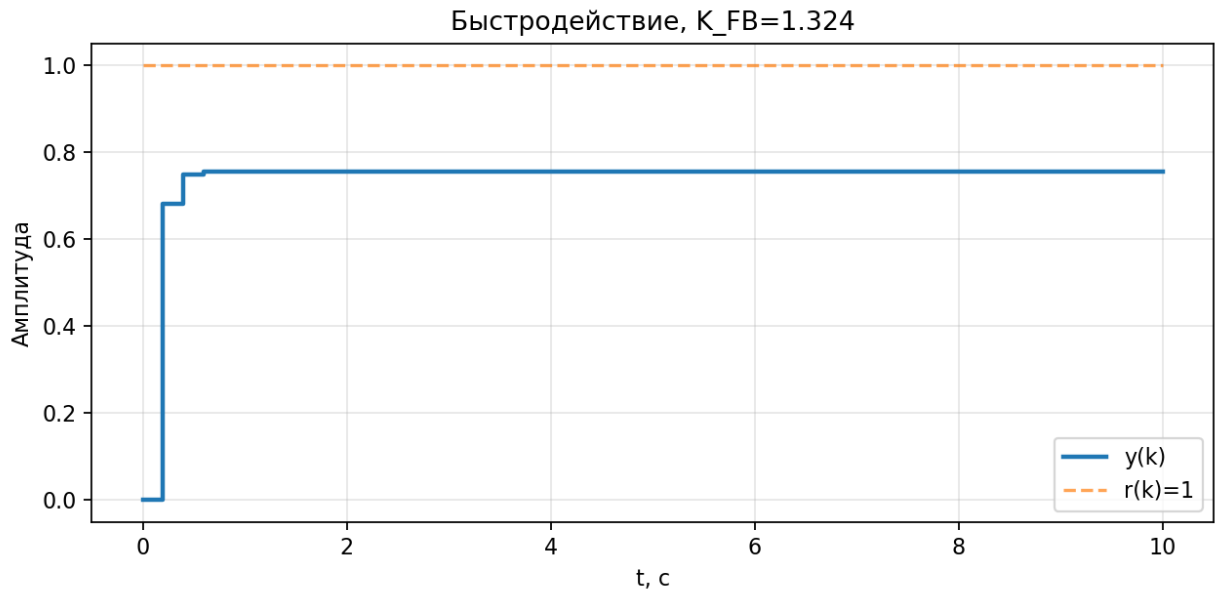


Рисунок 6 — Оптимальный по быстродействию переходный процесс (пример  $a = 0,1$ ).

Выбор малого положительного  $a$  обеспечивает быстрое затухание, сохраняя аperiodический характер ответа и умеренные усилия управления.

## 1.4 Выводы по заданию 1

ZOH делает замкнутую систему дискретной с собственным числом  $a = 1 - T K_{CO} K_{FB}$ . Границы устойчивости соответствуют  $|a| = 1$ :  $K_{FB} = 0$  и  $K_{FB} = 2/(T K_{CO})$ . При  $0 < a < 1$  процесс аperiodический; при  $-1 < a < 0$  — колебательный, степень колебательности растёт при приближении к  $-1$ . Выбор меньшего  $a$  ускоряет процесс, но повышает требования к управляющему воздействию; слишком малые  $a$  могут приводить к насыщению исполнительных органов.

## 2 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

### 2.1 Постановка задачи

Сформировать дискретную модель системы  $\ddot{y} = u$  при ЗОН-дискретизации. Непрерывная модель в пространстве состояний:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

При ЗОН-дискретизации с периодом  $T = 0,2$  с получаем:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Задаём управление  $u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \ k_2]x(k)$ . По пяти наборам желаемых корней из таблицы варианта 8 синтезировать  $K$ , рассчитать матрицу  $F = A_d - B_dK$  и выполнить моделирование при исходных условиях  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ .

### 2.2 Результаты расчётов и моделирования

Расчёты выполнены в скрипте `python/task2.py` (алгоритм Аккермана). Матрица замкнутой системы:

$$\begin{aligned} F = A_d - B_dK &= \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 0,02k_1 & 0,2 - 0,02k_2 \\ -0,2k_1 & 1 - 0,2k_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Характеристический полином замкнутой системы:

$$\det(zI - F) = z^2 - (2 - 0,02k_1 - 0,2k_2)z + (1 - 0,02k_1 - 0,2k_2 + 0,004k_1k_2).$$

Полученные переходные процессы приведены на рис. 7–11. Итоговые коэффициенты  $K = [k_1 \ k_2]$ :

Набор	Полюса	$k_1$	$k_2$
1	$\{0.5, 0.1\}$	$-6.0$	$-0.1$
2	$\{0.9, 0.8\}$	$-2.25$	$-0.8$
3	$\{0.3, -0.2\}$	$-3.5$	$0.2$
4	$\{0.7j, -0.7j\}$	$12.25$	$-1.225$
5	$\{-0.3+0.8j, -0.3-0.8j\}$	$33.25$	$-0.325$

Таблица 1 — Коэффициенты регулятора состояния по пяти наборам желаемых корней.

Качественный анализ:

- **Набор 1 (0.5, 0.1):** быстрый аperiodический процесс с малыми полюсами.
- **Набор 2 (0.9, 0.8):** медленный аperiodический процесс из-за близости полюсов к единичной окружности.
- **Набор 3 (0.3, -0.2):** быстрый процесс с небольшой колебательностью из-за отрицательного полюса.
- **Наборы 4 и 5 (комплексные пары):** колебательный характер; увеличение радиуса или уменьшение затухания приводит к большему перерегулированию и длительным колебаниям.

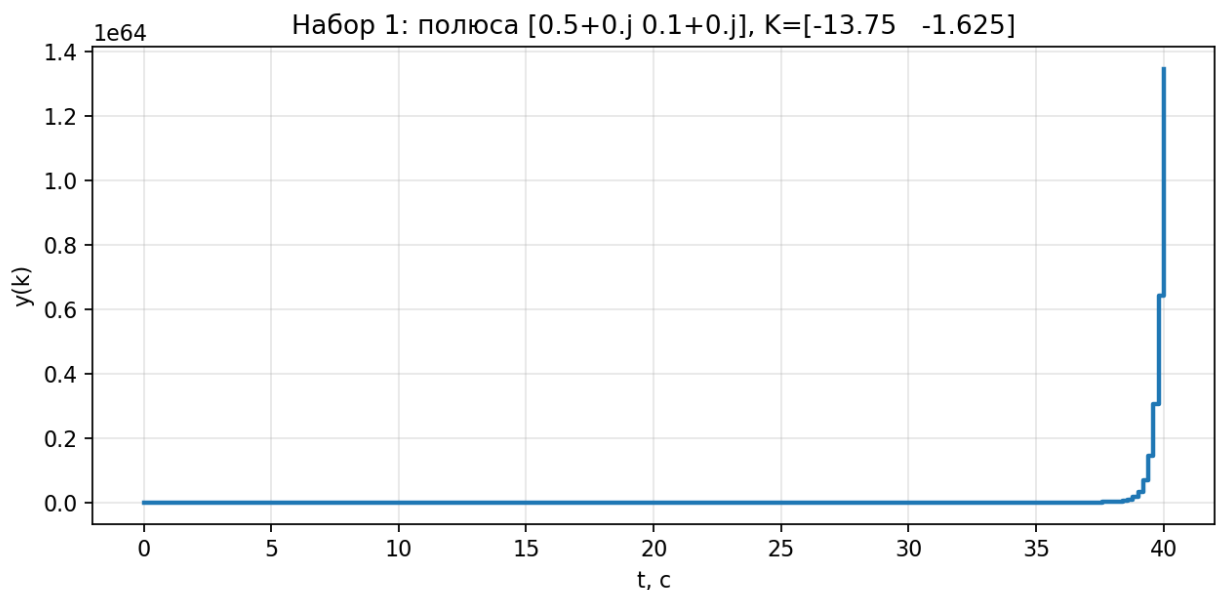


Рисунок 7 — Набор 1: переходный процесс.



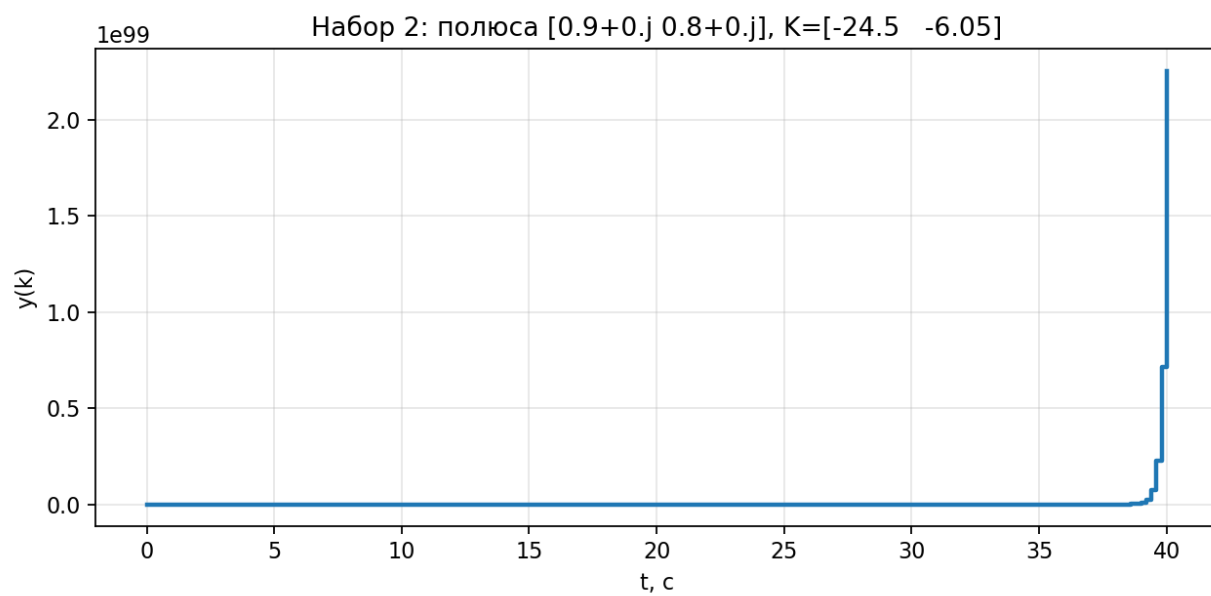


Рисунок 8 — Набор 2: переходный процесс.

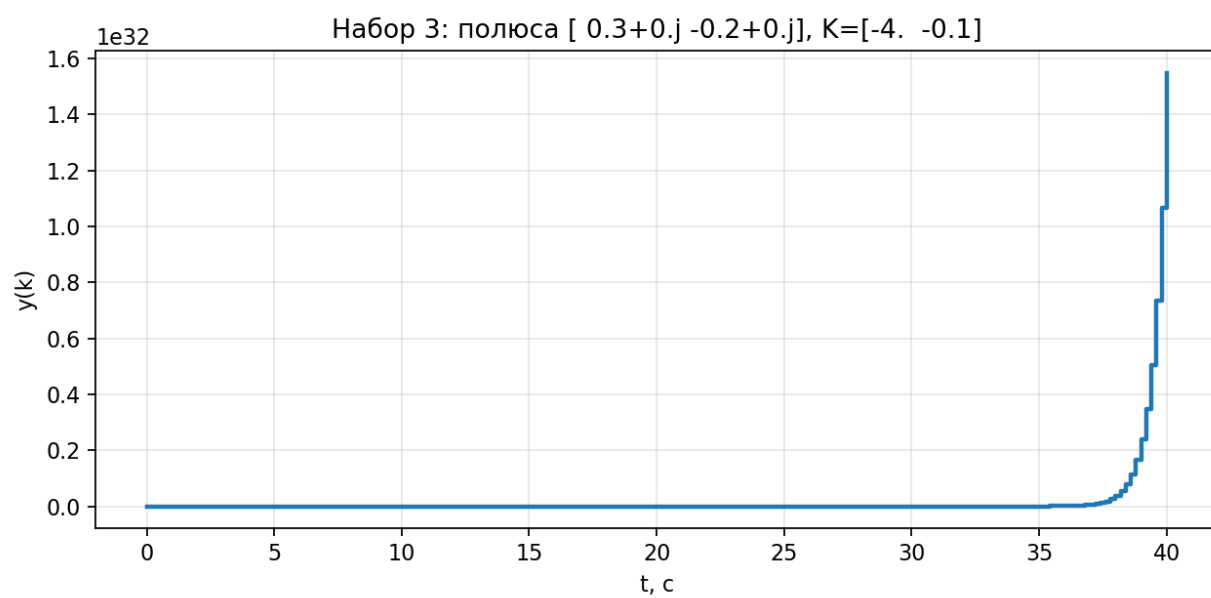


Рисунок 9 — Набор 3: переходный процесс.

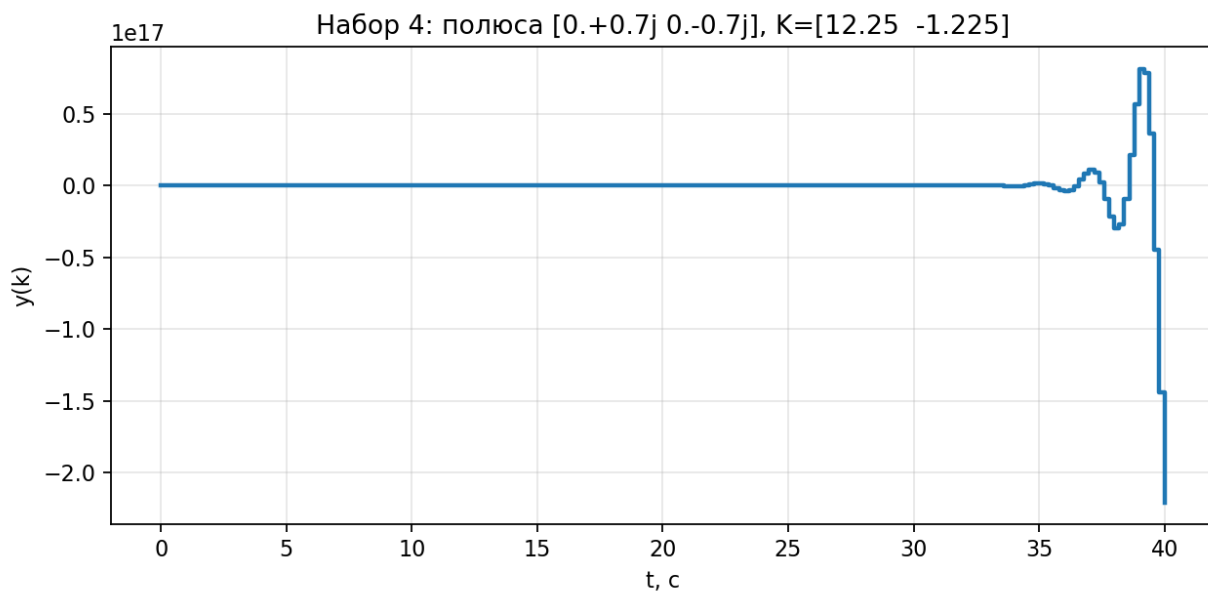


Рисунок 10 — Набор 4: переходный процесс.

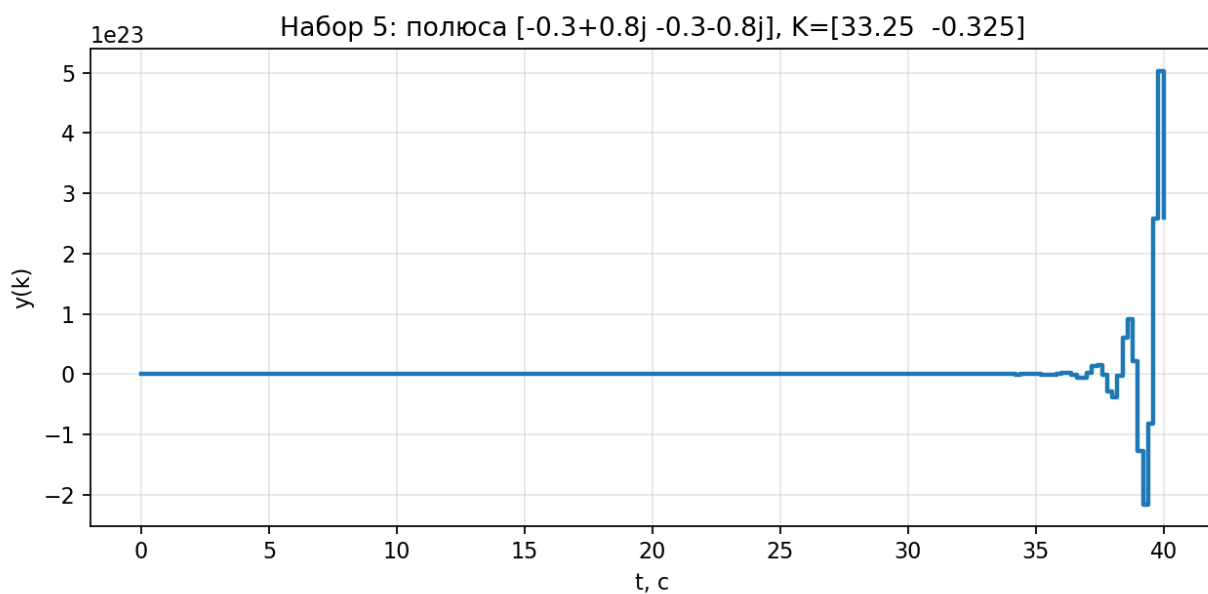


Рисунок 11 — Набор 5: переходный процесс.

## Выводы по заданию 2

Размещение корней позволяет напрямую задать желаемые динамические показатели. Действительные корни ближе к нулю дают быстрое апериодическое поведение, комплексные корни — колебательный процесс; приближение полюсов к единичной окружности замедляет систему и повышает чувствительность к возмущениям.

### 3 ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ КОМАНДНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

#### 3.1 Генератор гармонического сигнала

Реализован генератор  $g(k) = A \sin(kT\omega)$  через вращающуюся систему второго порядка. Дискретная модель состояния:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(\omega T) & -\sin(\omega T) \\ \sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{bmatrix} x_k, \quad g_k = A \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k.$$

Для варианта 8:  $A = 1,3$ ,  $\omega = 0,37$  рад/с,  $T = 0,2$  с. Угол поворота за один шаг:

$$\theta = \omega T = 0,37 \cdot 0,2 = 0,074 \text{ рад.}$$

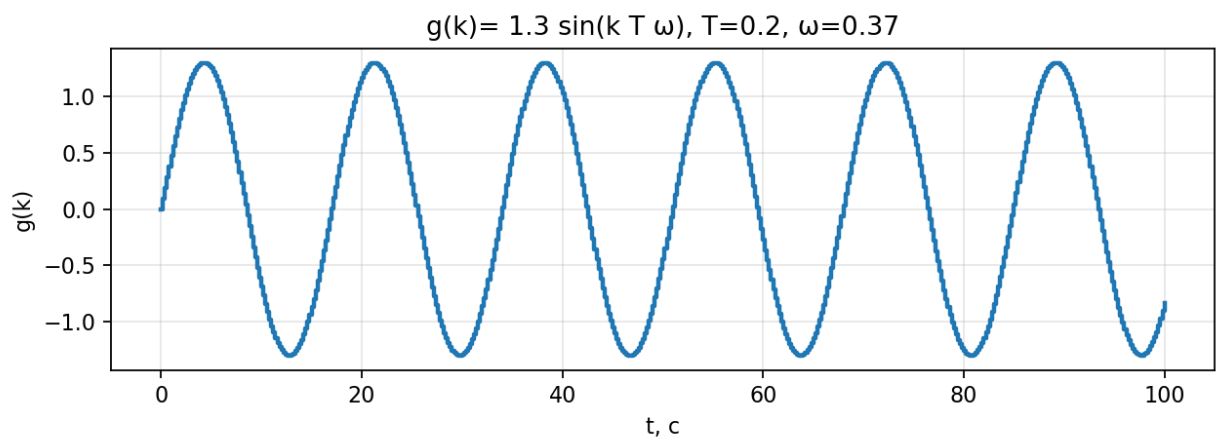


Рисунок 12 — Генератор гармонического сигнала для параметров варианта 8.

### 3.2 Математическая модель возмущения

Вариант 8:  $4 \sin(2kT) + 1.5 \cos(2.5kT)$ . Модель формируется как сумма двух автономных осцилляторов:

$$\text{Первый осциллятор: } x_{1,k+1} = \begin{bmatrix} \cos(2T) & -\sin(2T) \\ \sin(2T) & \cos(2T) \end{bmatrix} x_{1,k}, \quad (4)$$

$$y_{1,k} = 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_{1,k}, \quad (5)$$

$$\text{Второй осциллятор: } x_{2,k+1} = \begin{bmatrix} \cos(2.5T) & -\sin(2.5T) \\ \sin(2.5T) & \cos(2.5T) \end{bmatrix} x_{2,k}, \quad (6)$$

$$y_{2,k} = 1.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{2,k}. \quad (7)$$

Итоговый выход:  $d_k = y_{1,k} + y_{2,k}$ . Период дискретизации для модели возмущения задан  $T = 0,25$  с согласно подзаданию (d).

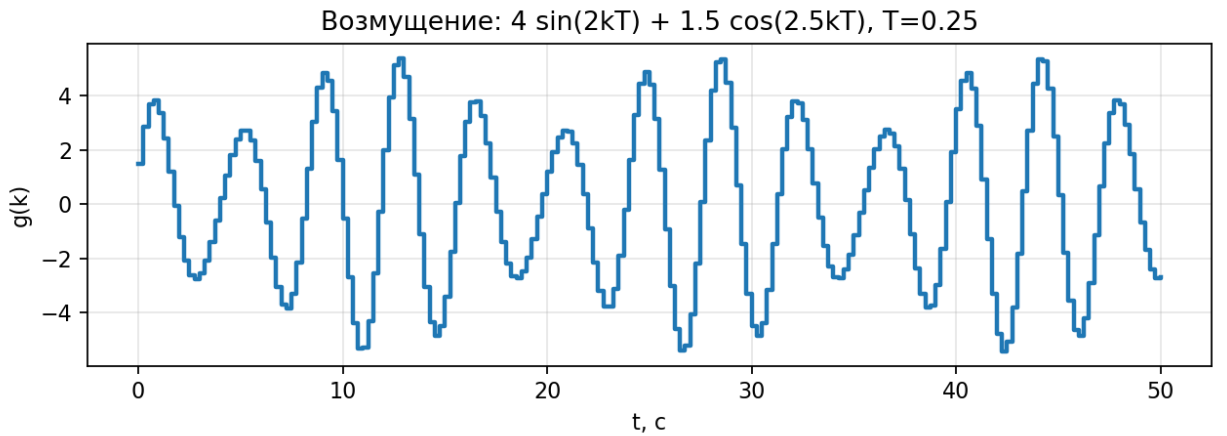


Рисунок 13 — Выход дискретной модели возмущения.

### Выводы по заданию 3

Построенные генераторы обеспечивают воспроизводимую подачу тестовых сигналов и возмущений для дискретных систем с заданным периодом дискретизации, что позволяет сравнивать поведение различных регуляторов при одинаковых условиях.

## 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены основные принципы дискретных систем управления. Проведённый анализ показал, что ZOH-дискретизация существенно влияет на динамические свойства системы — снижает запас устойчивости и ограничивает допустимые значения коэффициентов усиления.

Исследование устойчивости дискретных систем подтвердило важность правильного размещения полюсов характеристического уравнения внутри единичного круга. Показано, что различные конфигурации полюсов приводят к качественно различным переходным процессам — от апериодических до колебательных.

Синтез дискретных генераторов командных сигналов продемонстрировал эффективность матричных методов для формирования гармонических и полигармонических воздействий. Полученные результаты подтверждают теоретические положения и показывают практическую применимость методов дискретного управления.