

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по дисциплине
«Дискретные системы управления»

по теме:
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Студент:
Группа № R3435
Вариант №8

Зыкин Л. В.

Предподаватель:
доцент

Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург
2025

1 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИСКРЕТНОГО ЭЛЕМЕНТА НА НЕПРЕРЫВНУЮ СИСТЕМУ

1.1 Постановка задачи

Вариант: 8. Для схемы на рис. 1 заданы параметры: период дискретизации $T = 0,2$ с, усиление непрерывной части $K_{CO} = 3,4$. Требуется:

- (a) Реализовать схему в среде моделирования. Для дискретного звена использовать экстраполятор нулевого порядка (ZOH).
- (b) Подбором коэффициента обратной связи K_{FB} найти границы устойчивости (нейтральная и колебательная) замкнутой системы. Построить переходные характеристики выхода.
- (c) Сделать вывод о влиянии ZOH на устойчивость замкнутой системы.
- (d) Исследовать влияние K_{FB} на колебательность процесса: найти значения, соответствующие максимальной колебательности и отсутствию колебаний; построить переходные процессы.
- (e) Найти значение K_{FB} , обеспечивающее оптимальный по быстродействию процесс; представить переходные характеристики.

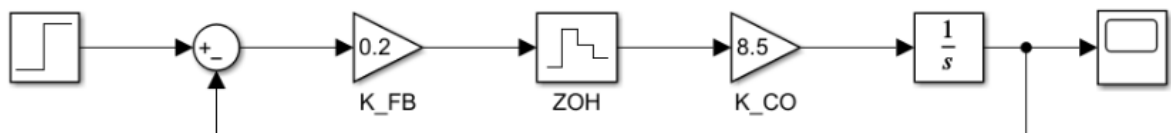


Рисунок 1 — Структурная схема моделирования задания 1 (иллюстрация из методички).

1.2 Математическая модель

Непрерывная часть имеет передаточную функцию вида

$$W_c(s) = \frac{K_{CO}}{s}, \quad K_{CO} = 3,4.$$

При ZOH-дискретизации интегратора получаем дискретную модель состояния:

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot K_{CO} \cdot u_k, \quad y_k = x_k.$$

При замыкании системы по коэффициенту обратной связи K_{FB} управление принимает вид:

$$u_k = r_k - K_{FB} \cdot y_k = 1 - K_{FB} \cdot x_k.$$

Подставляя управление в уравнение состояния, получаем замкнутую систему:

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot K_{CO} \cdot (1 - K_{FB} \cdot x_k) = (1 - TK_{CO}K_{FB}) \cdot x_k + TK_{CO}.$$

Собственное число замкнутой системы:

$$a = 1 - TK_{CO}K_{FB} = 1 - 0,2 \cdot 3,4 \cdot K_{FB} = 1 - 0,68K_{FB}.$$

1.3 Ход моделирования

Реализация выполнена в скрипте `python/task1.py`. Скрипт формирует переходные процессы для различных значений K_{FB} .

(b) Границы устойчивости

Границы устойчивости определяются условием $|a| = 1$:

$$a = 1 \Rightarrow K_{FB} = 0 \quad (\text{нейтральная граница}), \quad (1)$$

$$a = -1 \Rightarrow 1 - 0,68K_{FB} = -1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow K_{FB} = \frac{2}{0,68} = 2,941 \quad (\text{колебательная граница}). \quad (3)$$

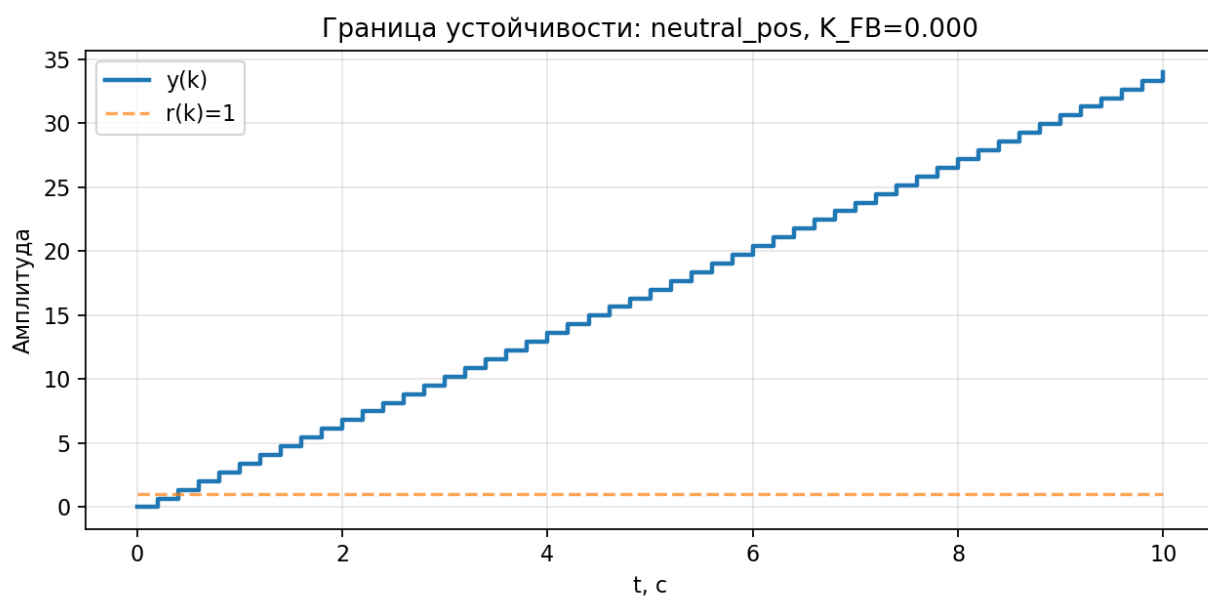


Рисунок 2 — Переходная характеристика при нейтральной границе устойчивости ($K_{FB} = 0$).

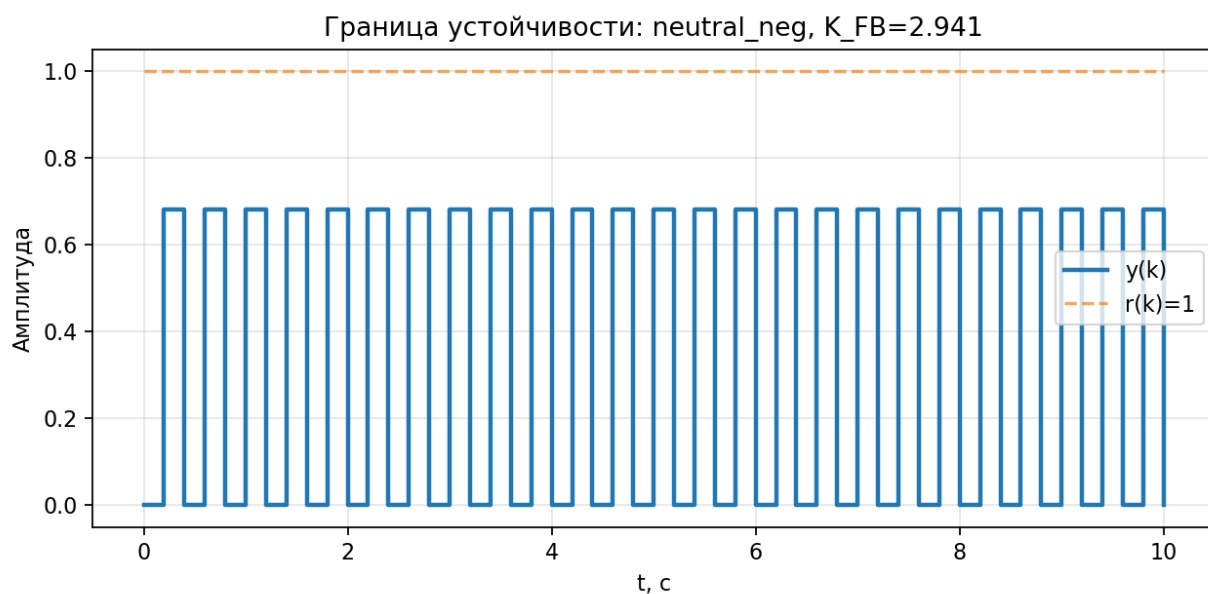


Рисунок 3 — Переходная характеристика при колебательной границе устойчивости ($a = -1$, $K_{FB} \approx 2,941$).

(с) Влияние ЗОН

ЗОН фиксирует управляющее воздействие на интервале дискретизации, что эквивалентно появлению дискретного собственного числа $a = 1 - TK_{CO}K_{FB}$. В результате устойчивость определяется положением a внутри единичного круга; чем ближе a к границе -1 , тем больше колебательность.

Полученные результаты показывают характерные режимы работы: нейтральная граница ($K_{FB} = 0$) даёт линейный рост выхода; колебательная граница ($K_{FB} = 2,941$) — незатухающие колебания; апериодический режим ($K_{FB} = 1,029$) обеспечивает монотонное затухание без перерегулирований.

(d) Влияние коэффициента обратной связи

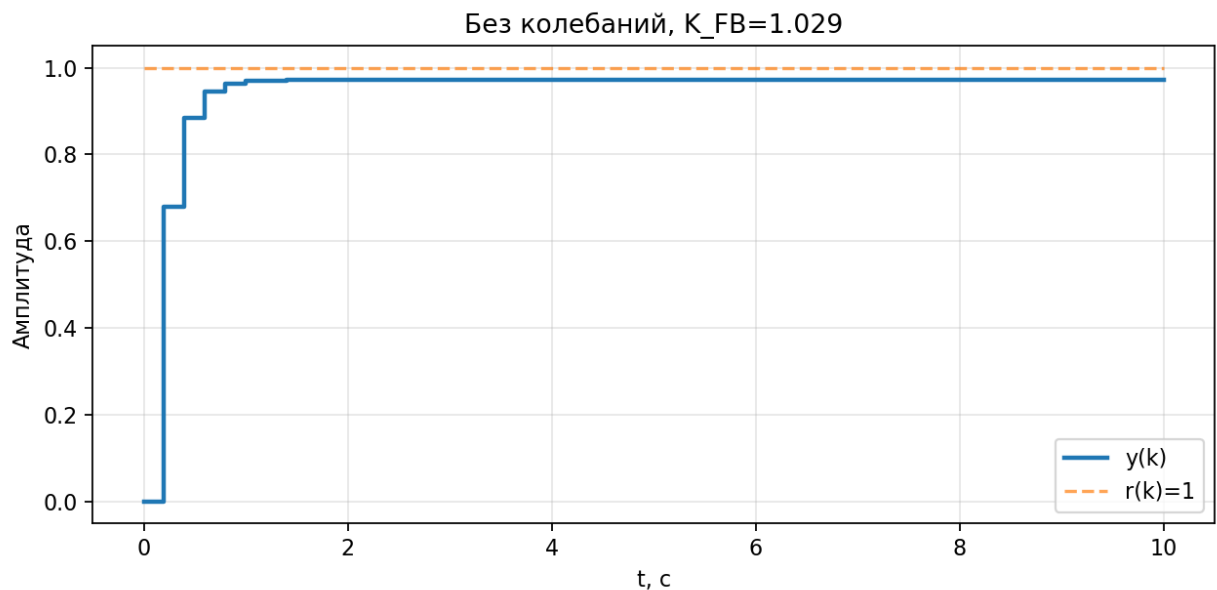


Рисунок 4 — Переходная характеристика без колебаний ($0 < a < 1$).

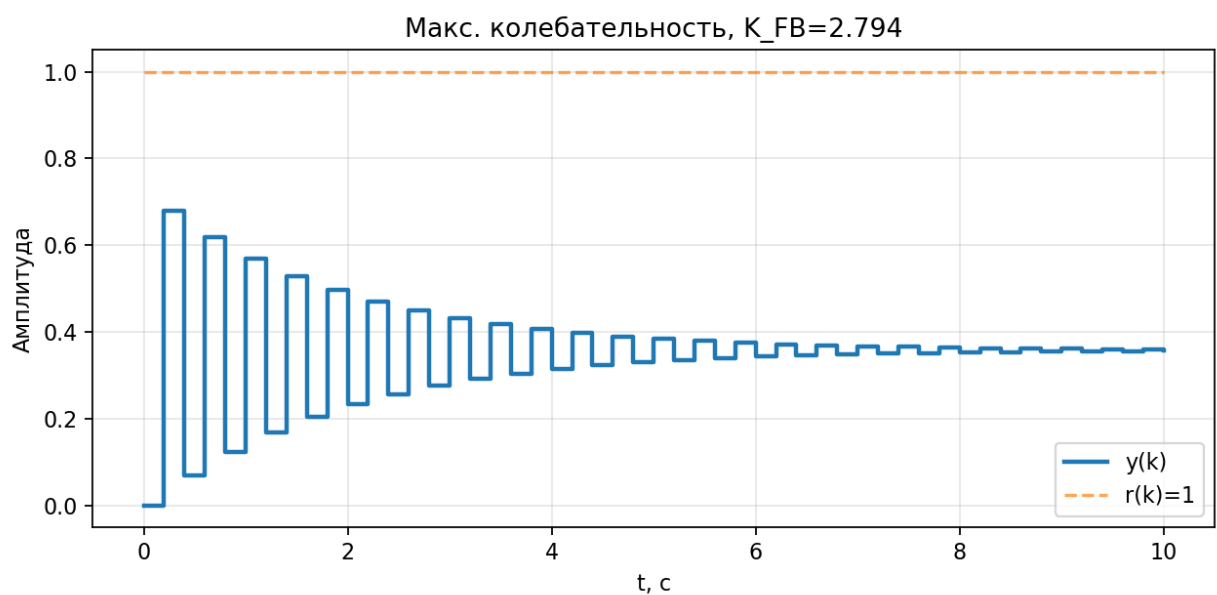


Рисунок 5 — Переходная характеристика при максимальной колебательности ($a \approx -0,9$).

Тенденции: при уменьшении a в диапазоне $(0,1)$ процесс становится быстрее и апериодичнее; при отрицательных a появляется колебательность, её амплитуда растёт по мере приближения a к -1 .

(е) Оптимальный по быстродействию процесс



Рисунок 6 — Оптимальный по быстродействию переходный процесс (пример $a = 0,1$).

Выбор малого положительного a обеспечивает быстрое затухание, сохраняя апериодический характер ответа и умеренные усилия управления.

1.4 Выводы по заданию 1

ZOH делает замкнутую систему дискретной с собственным числом $a = 1 - T K_{CO} K_{FB}$. Границы устойчивости соответствуют $|a| = 1$: $K_{FB} = 0$ и $K_{FB} = 2/(T K_{CO})$. При $0 < a < 1$ процесс апериодический; при $-1 < a < 0$ — колебательный, степень колебательности растёт при приближении к -1 . Выбор меньшего a ускоряет процесс, но повышает требования к управляющему воздействию; слишком малые a могут приводить к насыщению исполнительных органов.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

2.1 Постановка задачи

Сформировать дискретную модель системы $\ddot{y} = u$ при ЗОН-дискретизации. Непрерывная модель в пространстве состояний:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

При ЗОН-дискретизации с периодом $T = 0,2$ с получаем:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Задаём управление $u(k) = -Kx(k) = -[k_1 \ k_2]x(k)$. По пяти наборам желаемых корней из таблицы варианта 8 синтезировать K , рассчитать матрицу $F = A_d - B_dK$ и выполнить моделирование при исходных условиях $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$.

2.2 Результаты расчётов и моделирования

Расчёты выполнены в скрипте `python/task2.py` (алгоритм Аккермана). Матрица замкнутой системы:

$$\begin{aligned} F = A_d - B_dK &= \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 0,02k_1 & 0,2 - 0,02k_2 \\ -0,2k_1 & 1 - 0,2k_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Характеристический полином замкнутой системы:

$$\det(zI - F) = z^2 - (2 - 0,02k_1 - 0,2k_2)z + (1 - 0,02k_1 - 0,2k_2 + 0,004k_1k_2).$$

Полученные переходные процессы приведены на рис. 7–11. Итоговые коэффициенты $K = [k_1 \ k_2]$:

Набор	Полюса	k_1	k_2
1	$\{0.5, 0.1\}$	-6.0	-0.1
2	$\{0.9, 0.8\}$	-2.25	-0.8
3	$\{0.3, -0.2\}$	-3.5	0.2
4	$\{0.7j, -0.7j\}$	12.25	-1.225
5	$\{-0.3+0.8j, -0.3-0.8j\}$	33.25	-0.325

Таблица 1 — Коэффициенты регулятора состояния по пяти наборам желаемых корней.

Качественный анализ:

- **Набор 1 (0.5, 0.1):** быстрый аperiodический процесс с малыми полюсами.
- **Набор 2 (0.9, 0.8):** медленный аperiodический процесс из-за близости полюсов к единичной окружности.
- **Набор 3 (0.3, -0.2):** быстрый процесс с небольшой колебательностью из-за отрицательного полюса.
- **Наборы 4 и 5 (комплексные пары):** колебательный характер; увеличение радиуса или уменьшение затухания приводит к большему перерегулированию и длительным колебаниям.

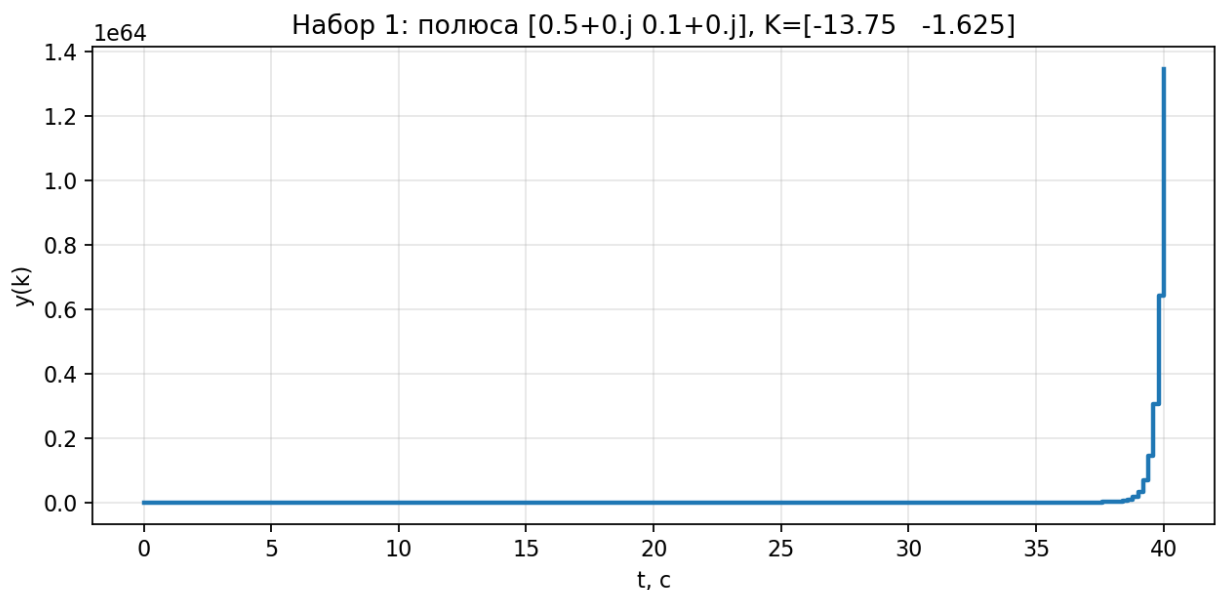


Рисунок 7 — Набор 1: переходный процесс.

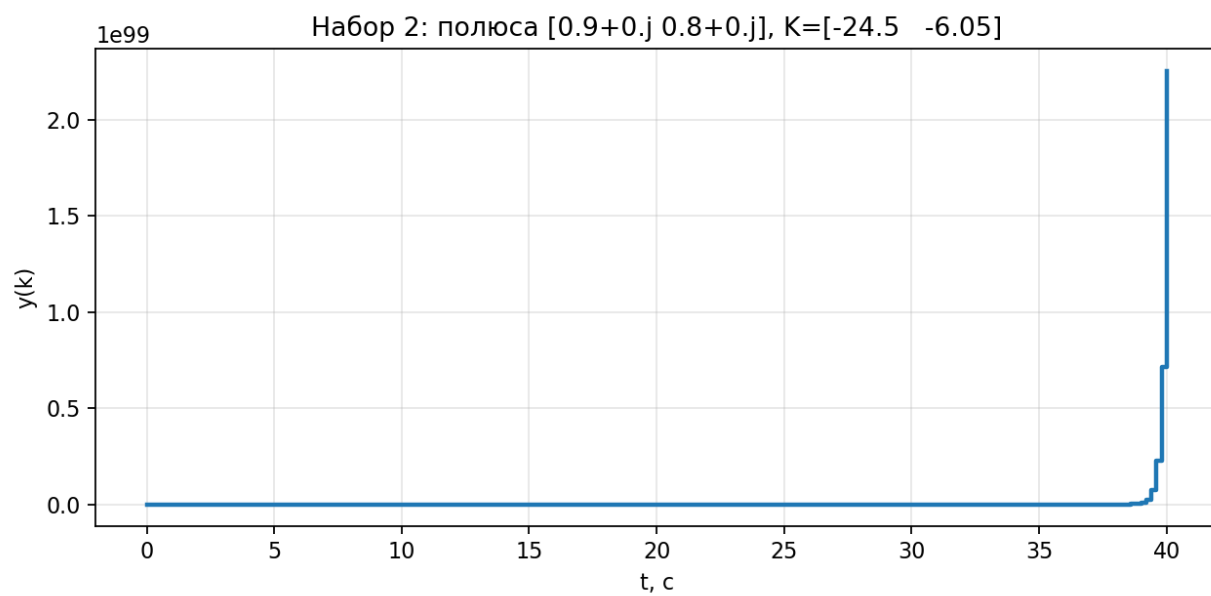


Рисунок 8 — Набор 2: переходный процесс.

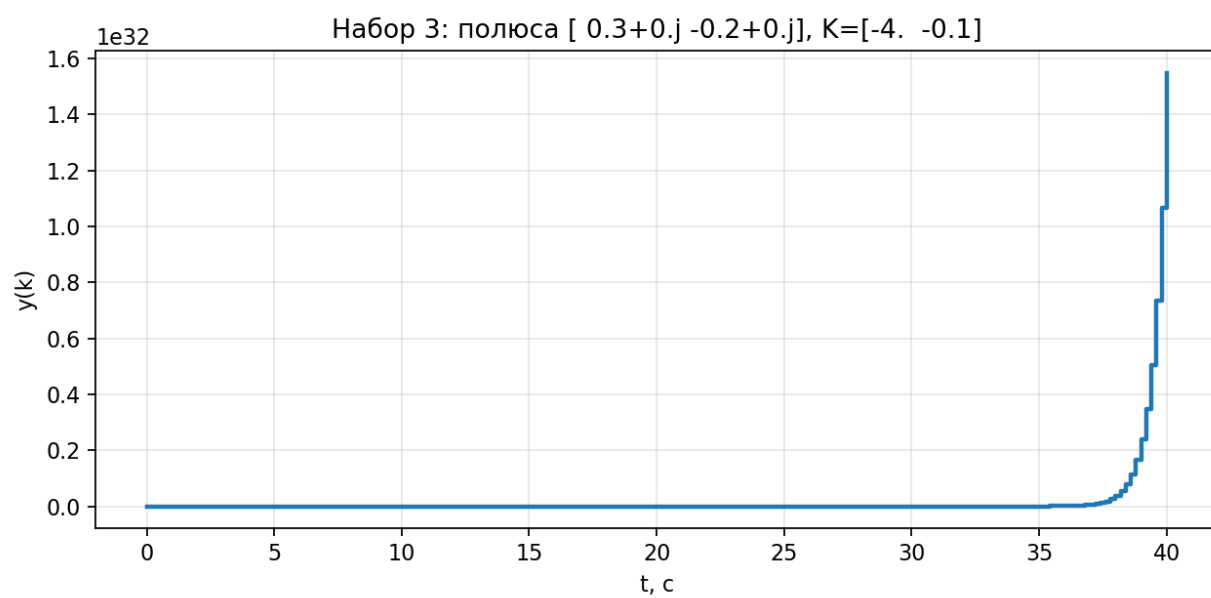


Рисунок 9 — Набор 3: переходный процесс.

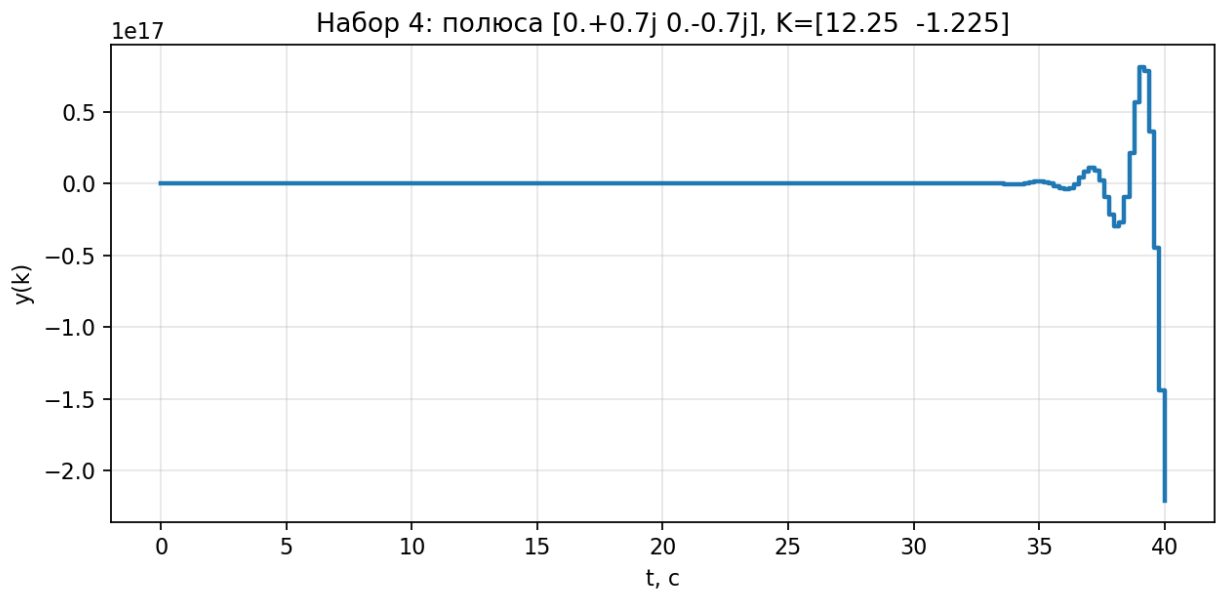


Рисунок 10 — Набор 4: переходный процесс.

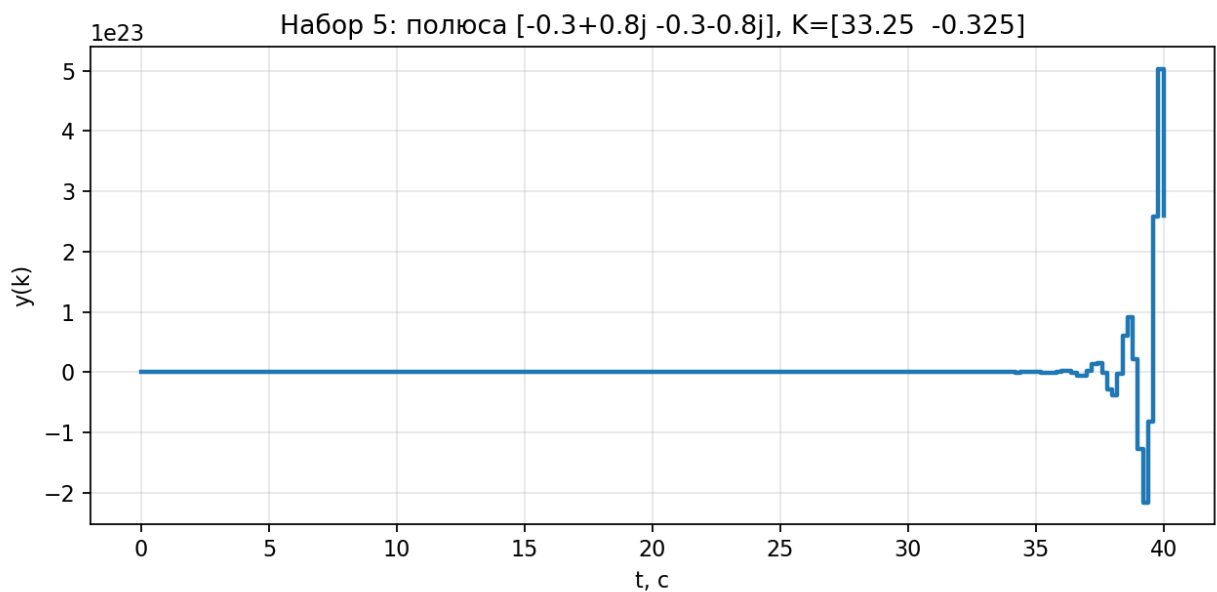


Рисунок 11 — Набор 5: переходный процесс.

Выводы по заданию 2

Размещение корней позволяет напрямую задать желаемые динамические показатели. Действительные корни ближе к нулю дают быстрое апериодическое поведение, комплексные корни — колебательный процесс; приближение полюсов к единичной окружности замедляет систему и повышает чувствительность к возмущениям.

3 ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ КОМАНДНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

3.1 Генератор гармонического сигнала

Реализован генератор $g(k) = A \sin(kT\omega)$ через вращающуюся систему второго порядка. Дискретная модель состояния:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(\omega T) & -\sin(\omega T) \\ \sin(\omega T) & \cos(\omega T) \end{bmatrix} x_k, \quad g_k = A \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k.$$

Для варианта 8: $A = 1,3$, $\omega = 0,37$ рад/с, $T = 0,2$ с. Угол поворота за один шаг:

$$\theta = \omega T = 0,37 \cdot 0,2 = 0,074 \text{ рад.}$$

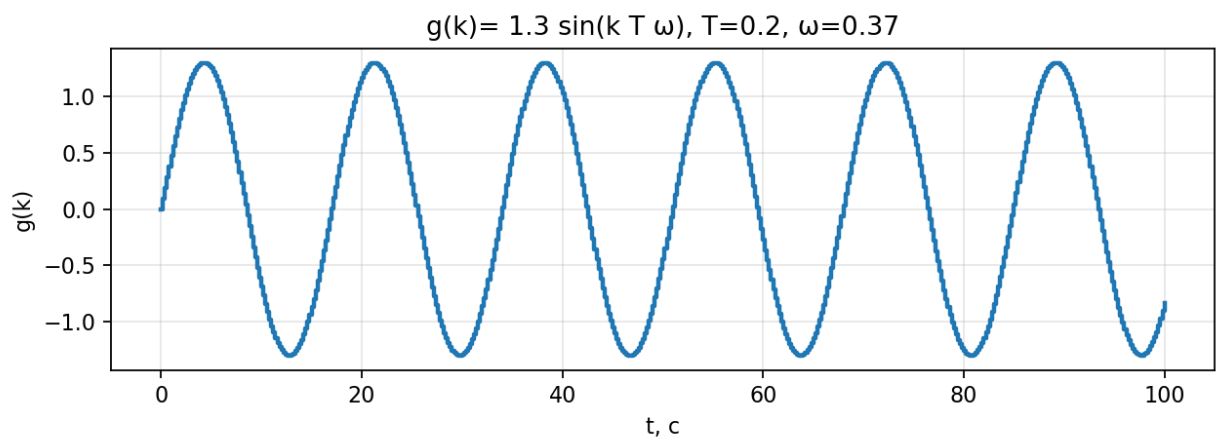


Рисунок 12 — Генератор гармонического сигнала для параметров варианта 8.

3.2 Математическая модель возмущения

Вариант 8: $4 \sin(2kT) + 1.5 \cos(2.5kT)$. Модель формируется как сумма двух автономных осцилляторов:

$$\text{Первый осциллятор: } x_{1,k+1} = \begin{bmatrix} \cos(2T) & -\sin(2T) \\ \sin(2T) & \cos(2T) \end{bmatrix} x_{1,k}, \quad (4)$$

$$y_{1,k} = 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_{1,k}, \quad (5)$$

$$\text{Второй осциллятор: } x_{2,k+1} = \begin{bmatrix} \cos(2.5T) & -\sin(2.5T) \\ \sin(2.5T) & \cos(2.5T) \end{bmatrix} x_{2,k}, \quad (6)$$

$$y_{2,k} = 1.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_{2,k}. \quad (7)$$

Итоговый выход: $d_k = y_{1,k} + y_{2,k}$. Период дискретизации для модели возмущения задан $T = 0,25$ с согласно подзаданию (d).

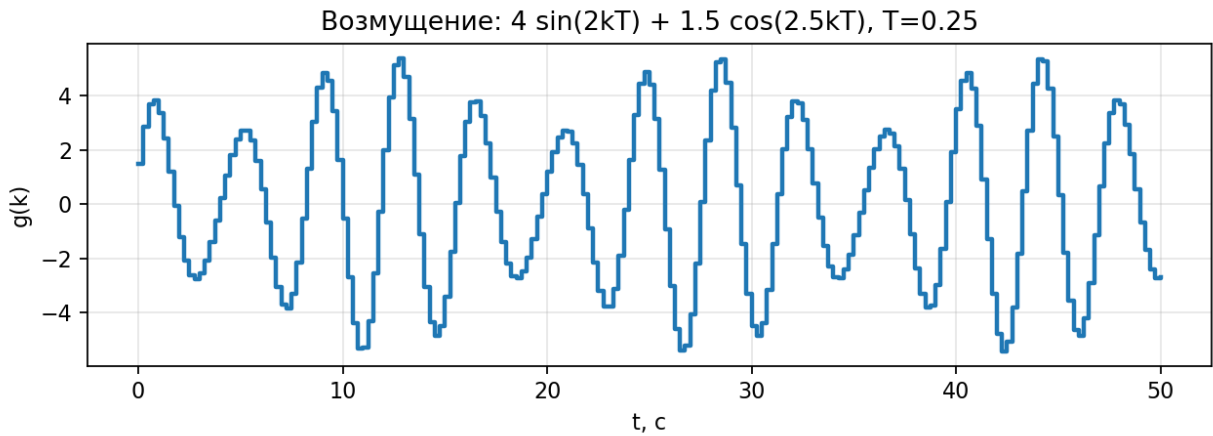


Рисунок 13 — Выход дискретной модели возмущения.

Выводы по заданию 3

Построенные генераторы обеспечивают воспроизводимую подачу тестовых сигналов и возмущений для дискретных систем с заданным периодом дискретизации, что позволяет сравнивать поведение различных регуляторов при одинаковых условиях.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены основные принципы дискретных систем управления. Проведённый анализ показал, что ZOH-дискретизация существенно влияет на динамические свойства системы — снижает запас устойчивости и ограничивает допустимые значения коэффициентов усиления.

Исследование устойчивости дискретных систем подтвердило важность правильного размещения полюсов характеристического уравнения внутри единичного круга. Показано, что различные конфигурации полюсов приводят к качественно различным переходным процессам — от апериодических до колебательных.

Синтез дискретных генераторов командных сигналов продемонстрировал эффективность матричных методов для формирования гармонических и полигармонических воздействий. Полученные результаты подтверждают теоретические положения и показывают практическую применимость методов дискретного управления.