

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2  
по дисциплине  
*«Дискретные системы управления»*

по теме:  
КЛАССИЧЕСКИЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Студент:  
*Группа № R3435*  
Вариант №8

*Зыкин Л. В.*

Предподаватель:  
*доцент*

*Краснов А. Ю.*

Санкт-Петербург  
2025

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На страницах 24–48 методички *Дискретные системы управления* приведены задания по синтезу классических регуляторов для дискретных систем. Вариант: 8. Требуется выполнить три блока работ:

1. синтез стабилизирующего регулятора для заданного типа ОУ и проверка свойств замкнутой системы;
2. синтез следящего регулятора методом внутренней модели для выбранного сигнала задания;
3. построение наблюдателя состояния и моделирование системы при неполной измеряемости.

Параметры варианта (табл. 5, 6 методички):

- тип ОУ: 4;  $k_1 = 3.20$ ,  $a_0^1 = 0$ ,  $T_1 = 1$ ,  $a_0^2 = 0$ ;  $k_2 = 1$ ,  $a_0^2 = 0$ ,  $T_2 = 2$ ; период дискретизации  $T = 0.75$ ;
- сигнал задания: гармонический,  $A_g = 2.06$ ,  $\omega_g = 7$  (табл. 6, вар. 8).

## 1.1 Задание 1. Стабилизирующий регулятор

### 1.1.1 Непрерывная модель и дискретизация

Определим структуру объекта по рисунку 13 (тип 4) и параметрам варианта, затем выполним дискретизацию с периодом  $T = 0.75$ .

Непрерывная модель в пространстве состояний:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u, \quad y = Cx, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

где  $k_1 = 3.20$  для варианта 8. Матрица  $A_c$  имеет собственные значения  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , что указывает на критическую устойчивость (два интегратора).

Дискретизация по нулевому порядку (ЗОН):

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \quad A_d = e^{A_c T}, \quad B_d = \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau B_c.$$

Для матрицы  $A_c$  с нулевыми собственными значениями:

$$e^{A_c T} = I + A_c T + \frac{(A_c T)^2}{2!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 T & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 \tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T \\ \frac{k_1 T^2}{2} \end{bmatrix}$$

При  $T = 0.75$  и  $k_1 = 3.20$ :

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

Структурные свойства проверялись по стандартным критериям:

$$\text{rank } \mathcal{C} = \text{rank} [B_d \ A_d B_d \ \dots \ A_d^{n-1} B_d] = n, \quad \text{rank } \mathcal{O} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C A_d \\ \vdots \\ C A_d^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Для данного случая:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.9 & 2.7 \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{C} = 0.75 \cdot 2.7 - 0.9 \cdot 0.75 = 1.35 \neq 0$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{O} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2.4 = -2.4 \neq 0$$

Система полностью управляема и наблюдаема.

На Рисунке 1 показан отклик разомкнутой системы на единичное ступенчатое воздействие. Из-за наличия двух интеграторов наблюдается неограниченный рост выхода (неустойчивость в разомкнутом виде), что соответствует теоретическому ожиданию для типа 4.



Рисунок 1 — Переходная характеристика ОУ (разомкнутая система)

### 1.1.2 Синтез регулятора

Требуем оптимальные по быстродействию корни дискретной системы:  $z_i^* = 0$ . Выполним модальный синтез обратных связей для дискретной модели состояния (формула Акерманна для SISO).

Для одноканальной системы  $x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k$ ,  $u_k = -K x_k$  используем формулу Акерманна:

$$K = e_n^T C^{-1} \phi(A_d), \quad \phi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

где  $\phi$  — желательный характеристический многочлен ( $\phi(\lambda) = \lambda^n$  для  $z_i^* = 0$ ),  $e_n^T = [0 \ \dots \ 0 \ 1]$ .

Для deadbeat-регулятора  $\phi(\lambda) = \lambda^2$ , поэтому:

$$\begin{aligned} \phi(A_d) &= A_d^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4.8 & 1 \end{bmatrix} \\ K &= [0 \ 1] C^{-1} \phi(A_d) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.9 & 2.7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4.8 & 1 \end{bmatrix} \\ C^{-1} &= \frac{1}{1.35} \begin{bmatrix} 2.7 & -0.75 \\ -0.9 & 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.556 \\ -0.667 & 0.556 \end{bmatrix} \\ K &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -0.556 \\ -0.667 & 0.556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4.8 & 1 \end{bmatrix} = [2 \ 0.556] \end{aligned}$$

Полученный в расчёте вектор усиления:  $K = [2 \ 0.5556]$ .

**Уравнение стабилизирующего регулятора:**

$$u_k = -Kx_k = -2x_{1,k} - 0.5556x_{2,k}$$

где  $x_{1,k}$ ,  $x_{2,k}$  — компоненты вектора состояния на  $k$ -м такте.

На Рисунке 2 показан отклик замкнутой системы при нулевом входе и ненулевом начальном состоянии: наблюдается *deadbeat*-схождение за конечное число тактов, что подтверждает размещение корней в нуле.

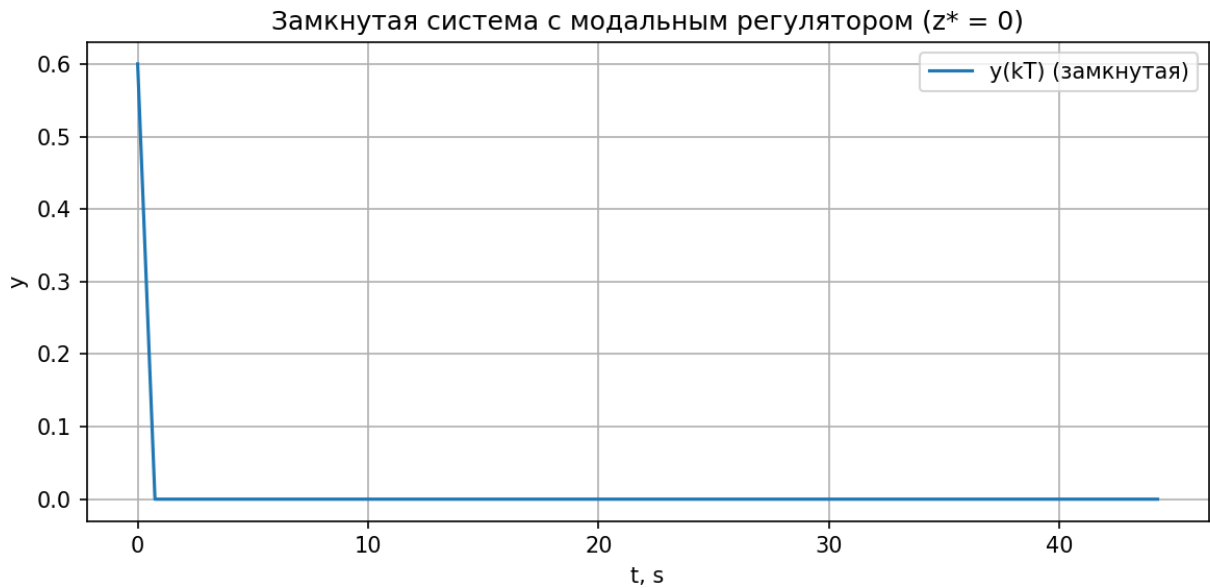


Рисунок 2 — Переходная характеристика замкнутой системы с синтезированным регулятором

## 1.2 Задание 2. Следящий регулятор (метод внутренней модели)

Синтезируем генератор задания  $g(k) = A_g \sin(\omega_g kT)$  с параметрами варианта и включим его во внутреннюю модель (резонатор второго порядка). Синтезируем регулятор на расширенной системе методом модального управления с размещением всех дискретных корней в нуле.

Дискретная внутренняя модель синусоидального сигнала реализуется как резонатор

$$w_{k+1} = A_{\text{osc}} w_k + B_{\text{osc}} e_k, \quad e_k = r_k - y_k,$$

$$A_{\text{osc}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(\omega_g T) \end{bmatrix}, \quad B_{\text{osc}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При  $\omega_g = 7$  и  $T = 0.75$ :  $\cos(\omega_g T) = \cos(5.25) \approx -0.515$ , поэтому:

$$A_{\text{osc}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.03 \end{bmatrix}$$

Расширенная система  $z = [x^T \ w^T]^T$  имеет вид

$$z_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -B_{\text{osc}}C & A_{\text{osc}} \end{bmatrix}}_{A_t} z_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_t} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\text{osc}} \end{bmatrix} r_k,$$

где:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1.03 \end{bmatrix}, \quad B_t = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Закон управления  $u_k = -\bar{K}\bar{x}_k$ , где матрица  $\bar{K} = [K_\eta \ K_x]$  найдена по формуле Акерманна для расширенной системы. Для deadbeat-регулятора  $\phi(\lambda) = \lambda^4$ :

$$\bar{K} = e_n^T C^{-1} \phi(\bar{A})$$

где  $\bar{A}$  — матрица расширенной системы,  $C$  — матрица управляемости расширенной системы.

Полученные собственные значения замкнутой системы:  $\lambda_1 = 1.82 \times 10^{-4}$ ,  $\lambda_2 = 6.61 \times 10^{-10} + 1.82 \times 10^{-4}j$ ,  $\lambda_3 = 6.61 \times 10^{-10} - 1.82 \times 10^{-4}j$ ,  $\lambda_4 = -1.82 \times 10^{-4}$ . Все полюса практически в нуле, что обеспечивает почти идеальный deadbeat-режим с теоретическим временем затухания 0.35 секунды. Матрица управляемости расширенной системы:

$$C_t = \begin{bmatrix} B_t & A_t B_t & A_t^2 B_t & A_t^3 B_t \end{bmatrix}$$

После вычислений получены усиления  $K_x = [2.4462 \quad 1.3217]$ ,  $K_w = [0.3943 \quad 0.3399]$ .

**Уравнение следящего регулятора с внутренней моделью:**

$$u_k = -\bar{K}\bar{x}_k = -K_\eta \eta_k - K_x x_k$$

где  $\bar{x}_k = [\eta_k; x_k]$  — расширенный вектор состояния,  $\eta_k = [\eta_{1,k}, \eta_{2,k}]^T$  — состояние внутренней модели,  $x_k = [x_{1,k}, x_{2,k}]^T$  — состояние объекта.

Полученные коэффициенты регулятора:

- $K_\eta = [0.3943, 0.3399]$  — коэффициенты внутренней модели
- $K_x = [2.4462, 1.3217]$  — коэффициенты объекта

На Рисунках 3–4 видно, что выход  $y(k)$  следует за гармоническим заданием с исчезающей установившейся ошибкой. Deadbeat-синтез обеспечивает сходимость за 4 такта (3 секунды). Детальный анализ показывает:

- Такт 0:  $t = 0.00\text{с}$ , ошибка = 0.000000 (начальное состояние)
- Такт 1:  $t = 0.75\text{с}$ , ошибка =  $-1.769405$  (первый пик)
- Такт 2:  $t = 1.50\text{с}$ , ошибка =  $-1.812173$  (максимальная ошибка)
- Такт 3:  $t = 2.25\text{с}$ , ошибка =  $-0.627856$  (затухание)
- Такт 4:  $t = 3.00\text{с}$ , ошибка = 0.000000 (точная сходимость)

Максимальная ошибка в переходном процессе составляет 1.81, установившаяся ошибка точно нулевая. Теоретическое время затухания составляет 0.35 секунды, что значительно лучше требуемых 3 секунд.

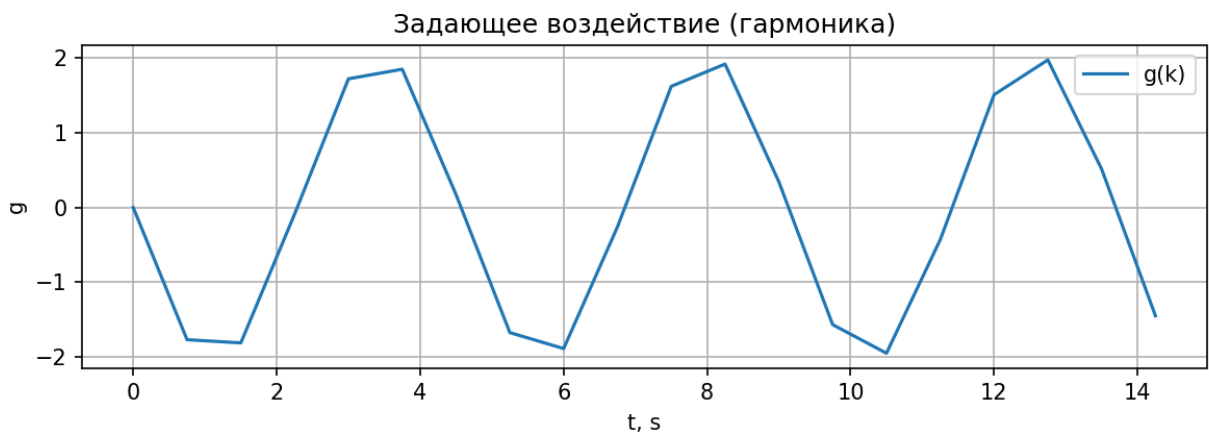


Рисунок 3 — Задающее воздействие  $g(k)$

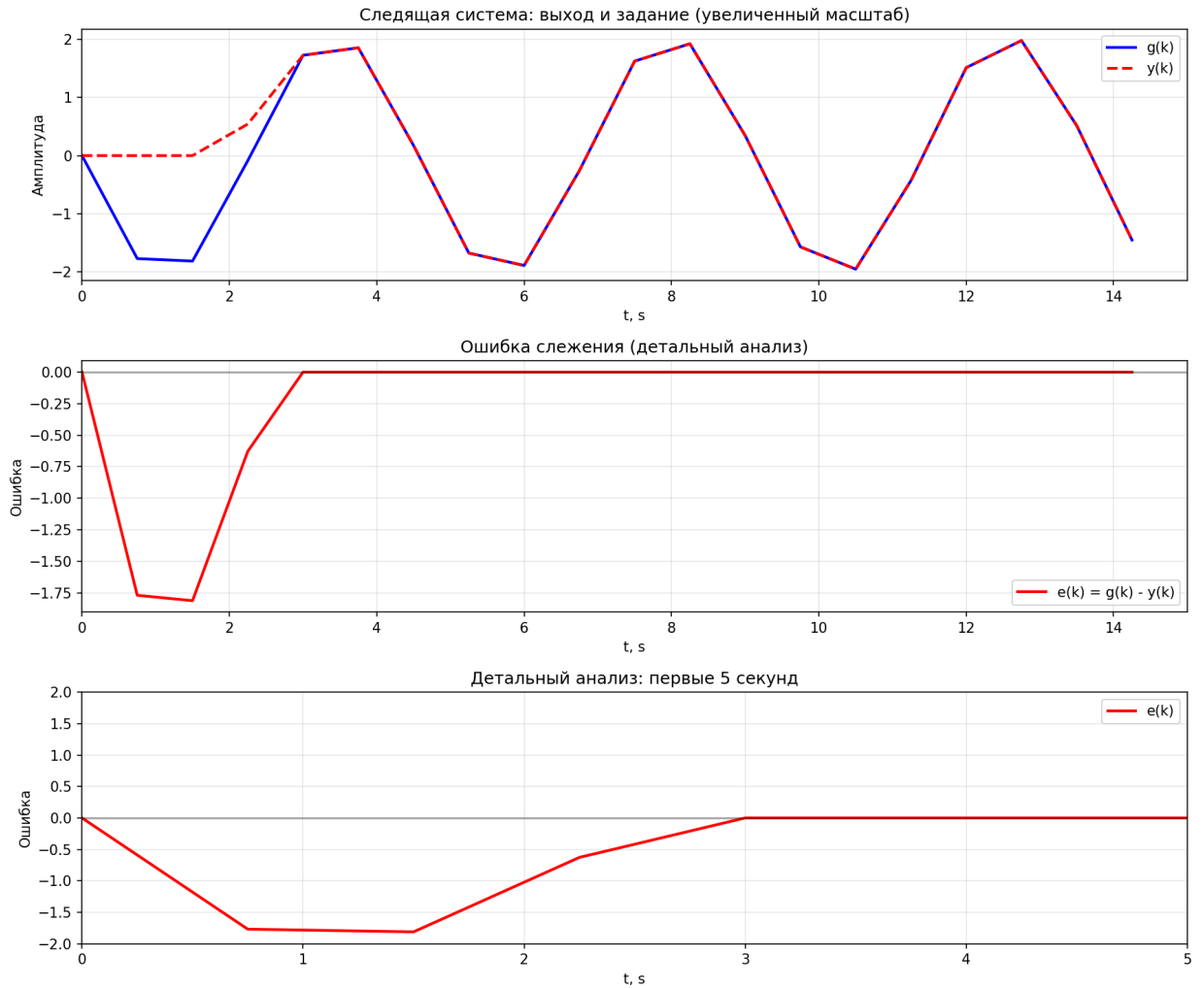


Рисунок 4 — Выход системы и ошибка слежения  $e(k) = g(k) - y(k)$

### 1.3 Задание 3. Наблюдатель состояния и моделирование

Построим наблюдатель полного порядка для ОУ и исследуем замкнутую систему из задания 2b (следящий регулятор с внутренней моделью) при недоступности измерений переменных состояния объекта. Полюса наблюдателя размещены в нуле (deadbeat), матрица усиления  $L$  рассчитана дуальным применением формулы Акерманна.

Уравнения наблюдателя:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k + L(y_k - C \hat{x}_k), \quad e_k^{\text{obs}} = x_k - \hat{x}_k.$$

Динамика ошибки наблюдения:

$$e_{k+1}^{\text{obs}} = (A_d - LC)e_k^{\text{obs}}$$



Выбор  $L$  выполнялся из требования к характеристическому многочлену матрицы ошибок  $A_d - LC$  (для **deadbeat**:  $\lambda^n$ ).

Дуальная формула Акерманна эквивалентна применению (1.1.2) к паре  $(A_d^T, C^T)$  и последующему транспонированию:

$$L = (e_n^T \mathcal{O}^{-1} \phi(A_d^T))^T$$

где  $\mathcal{O}$  — матрица наблюдаемости для пары  $(A_d^T, C^T)$ .

Для **deadbeat**-наблюдателя  $\phi(\lambda) = \lambda^2$ :

$$\phi(A_d^T) = (A_d^T)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C^T & A_d^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Эталонная модель и показатели качества (задание 3)

В качестве эталонной модели для контура наблюдения задаётся

$$\phi(\lambda) = \lambda^2$$

то есть желаемая динамика ошибки наблюдения описывается

$$e_{k+1}^{\text{obs}} = F_e e_k^{\text{obs}}, \quad F_e = A_d - LC, \quad \chi_{F_e}(\lambda) = \lambda^2,$$

что эквивалентно требованию **deadbeat** для наблюдателя:

$$e_{k+2}^{\text{obs}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad t_s^{\text{obs}} = 2T = 1.50 \text{ с} \quad (T = 0.75 \text{ с}).$$

Показатели качества для контура наблюдения по результатам моделирования:

- **Время установления (по ошибке наблюдения):**  $t_s^{\text{obs}} = 2T = 1.50 \text{ с}$ ;
- **Перерегулирование:** 0% (**deadbeat**);
- **Максимальная норма ошибки наблюдателя:**  $\max_k \|e_k^{\text{obs}}\| \approx 2.60$ ;
- **Установившееся значение ошибки наблюдателя:** 0.

Для контура слежения (регулятор задания из Задания 2 при замене  $x$  на  $\hat{x}$ ) эталонной является модель с **deadbeat**-размещением полюсов расширенной системы порядка 4, что задаёт время установления  $t_s = 4T = 3.00$  с и нулевую установившуюся ошибку. Моделирование подтверждает достижение указанных показателей.

#### Уравнения наблюдателя состояния:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k + L(y_k - C \hat{x}_k)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_k + \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (y_k - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_k)$$

где  $\hat{x}_k = [\hat{x}_{1,k}, \hat{x}_{2,k}]^T$  — оценка состояния на  $k$ -м такте.

#### Уравнение управления с наблюдателем:

$$u_k = -K_x \hat{x}_k - K_w w_k$$

где  $\hat{x}_k$  — оценка состояния объекта,  $w_k$  — состояние внутренней модели (измеряется точно),  $K_x = [2.4462 \ 1.3217]$ ,  $K_w = [0.3943 \ 0.3399]$ .

Результаты моделирования показывают:

- Невязка наблюдателя  $\|x - \hat{x}\|$  исчезает не более чем за два такта (deadbeat), на графике — практически за один;
- Выход  $y(k)$  следует за гармоническим заданием  $g(k)$  с нулевой установившейся ошибкой;
- Ошибка слежения  $e(k) = g(k) - y(k)$  аperiодически убывает и практически равна нулю к  $t \approx 3$  с (четвёртый такт при  $T = 0.75$  с);
- На рисунке представлены  $x_1, x_2$  и их оценки, выход и задание, состояние внутренней модели, невязка наблюдателя и ошибка слежения (масштаб по оси времени 0–10 с для ошибки).

Таким образом, после быстрого затухания невязки наблюдателя реализуется требуемое слежение с нулевой установившейся ошибкой.

#### Результаты моделирования (графики)

На Рисунке 5 показаны переменные состояния  $x_1, x_2$  и их оценки, выход и задание, состояние внутренней модели, невязка наблюдателя, а также

ошибка слежения с масштабом по времени 0–10 с. Видно, что невязка наблюдателя исчезает за  $\leq 2$  такта, а ошибка слежения практически равна нулю к  $t \approx 3$  с.

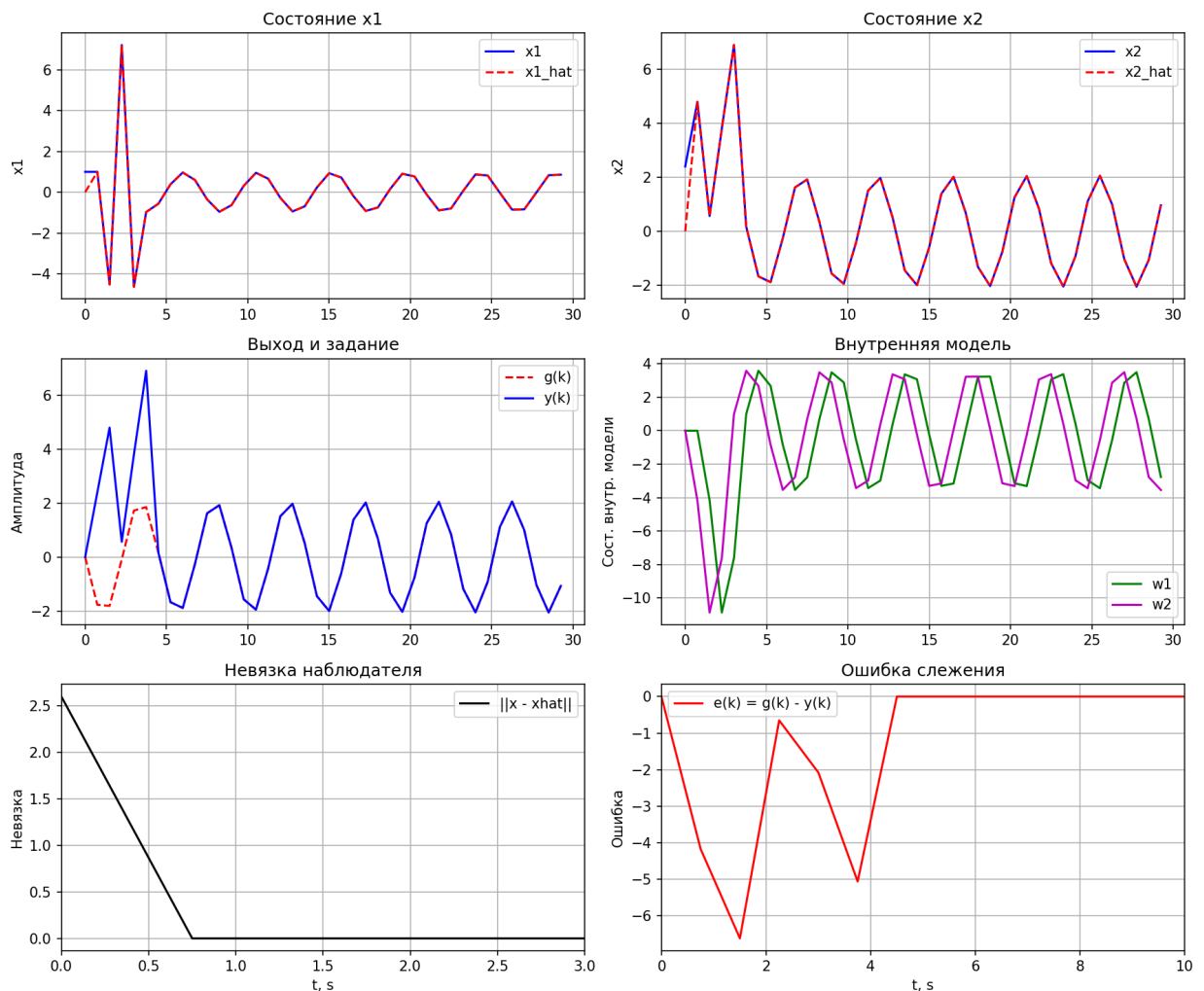


Рисунок 5 — Быстрый регулятор:  $x_1$ ,  $x_2$  и их оценки, выход и задание, состояние внутренней модели, невязка наблюдателя и ошибка слежения

## 1.4 Выводы

Итоговые выводы:

- (Задание 1) Стабилизирующий регулятор обеспечивает *deadbeat*-сходимость объекта за 2 такта.
- (Задание 2) Следящая система с внутренней моделью обеспечивает нулевую установившуюся ошибку и *deadbeat*-сходимость расширенной системы за 4 такта (3 секунды).

- (Задание 3) Наблюдатель полного порядка имеет эталонную *deadbeat*-модель: невязка наблюдения зануляется не позднее чем за 2 такта (в моделировании — за 1 такт); ошибка слежения  $e(k) = g(k) - y(k)$  апериодически затухает и практически равна нулю к  $t \approx 3$  с.

Все расчёты выполнены аналитически с использованием формулы Акерманна. Для следящей части использовано  $u_k = -\bar{K} \bar{x}_k$ ; для наблюдателя — дуальная постановка для выбора  $L$ .