

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Дискретные системы управления»

по теме:
КЛАССИЧЕСКИЕ РЕГУЛЯТОРЫ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Студент:
Группа № R3435
Вариант №8

Зыкин Л. В.

Предподаватель:
доцент *Краснов А. Ю.*

Санкт-Петербург
2025

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На страницах 24–48 методички *Дискретные системы управления* приведены задания по синтезу классических регуляторов для дискретных систем. Вариант: **8**. Требуется выполнить три блока работ:

1. синтез стабилизирующего регулятора для заданного типа ОУ и проверка свойств замкнутой системы;
2. синтез следящего регулятора методом внутренней модели для выбранного сигнала задания;
3. построение наблюдателя состояния и моделирование системы при неполной измеряемости.

Параметры варианта (табл. 5, 6 методички):

- тип ОУ: 4; $k_1 = 3.20$, $a_0^1 = 0$, $T_1 = 1$, $a_0^1 = 0$; $k_2 = 1$, $a_0^2 = 0$, $T_2 = 2$;
период дискретизации $T = 0.75$;
- сигнал задания: гармонический, $A_g = 2.06$, $\omega_g = 7$ (табл. 6, вар. 8).

1.1 Задание 1. Стабилизирующий регулятор

1.1.1 Непрерывная модель и дискретизация

Определим структуру объекта по рисунку 13 (тип 4) и параметрам варианта, затем выполним дискретизацию с периодом $T = 0.75$.

Непрерывная модель в пространстве состояний:

$$\dot{x} = A_c x + B_c u, \quad y = Cx, \quad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

где $k_1 = 3.20$ для варианта 8. Матрица A_c имеет собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, что указывает на критическую устойчивость (два интегратора).

Дискретизация по нулевому порядку (ЗОН):

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k, \quad A_d = e^{A_c T}, \quad B_d = \int_0^T e^{A_c \tau} d\tau B_c.$$

Для матрицы A_c с нулевыми собственными значениями:

$$e^{A_c T} = I + A_c T + \frac{(A_c T)^2}{2!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 T & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 \tau & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T \\ \frac{k_1 T^2}{2} \end{bmatrix}$$

При $T = 0.75$ и $k_1 = 3.20$:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

Структурные свойства проверялись по стандартным критериям:

$$\text{rank } \mathcal{C} = \text{rank} [B_d \ A_d B_d \ \dots \ A_d^{n-1} B_d] = n, \quad \text{rank } \mathcal{O} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA_d \\ \vdots \\ CA_d^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Для данного случая:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.9 & 2.7 \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{C} = 0.75 \cdot 2.7 - 0.9 \cdot 0.75 = 1.35 \neq 0$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathcal{O} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2.4 = -2.4 \neq 0$$

Система полностью управляема и наблюдаема.

На Рисунке 1 показан отклик разомкнутой системы на единичное ступенчатое воздействие. Из-за наличия двух интеграторов наблюдается неограниченный рост выхода (неустойчивость в разомкнутом виде), что соответствует теоретическому ожиданию для типа 4.



Рисунок 1 — Переходная характеристика ОУ (разомкнутая система)

1.1.2 Синтез регулятора

Требуем оптимальные по быстродействию корни дискретной системы: $z_i^* = 0$. Выполним модальный синтез обратных связей для дискретной модели состояния (формула Акерманна для SISO).

Для одноканальной системы $x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k$, $u_k = -K x_k$ используем формулу Акерманна:

$$K = e_n^T \mathcal{C}^{-1} \phi(A_d), \quad \phi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

где ϕ — желательный характеристический многочлен ($\phi(\lambda) = \lambda^n$ для $z_i^* = 0$), $e_n^T = [0 \dots 0 1]$.

Для deadbeat-регулятора $\phi(\lambda) = \lambda^2$, поэтому:

$$\phi(A_d) = A_d^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{C}^{-1} \phi(A_d) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & 0.75 \\ 0.9 & 2.7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4.8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{1.35} \begin{bmatrix} 2.7 & -0.75 \\ -0.9 & 0.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -0.556 \\ -0.667 & 0.556 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.556 \\ -0.667 & 0.556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4.8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0.556 \end{bmatrix}$$

Полученный в расчёте вектор усилений: $K = [2 \ 0.5556]$.

Уравнение стабилизирующего регулятора:

$$u_k = -Kx_k = -2x_{1,k} - 0.5556x_{2,k}$$

где $x_{1,k}, x_{2,k}$ — компоненты вектора состояния на k -м такте.

На Рисунке 2 показан отклик замкнутой системы при нулевом входе и ненулевом начальном состоянии: наблюдается *deadbeat*-схождение за конечное число тактов, что подтверждает размещение корней в нуле.

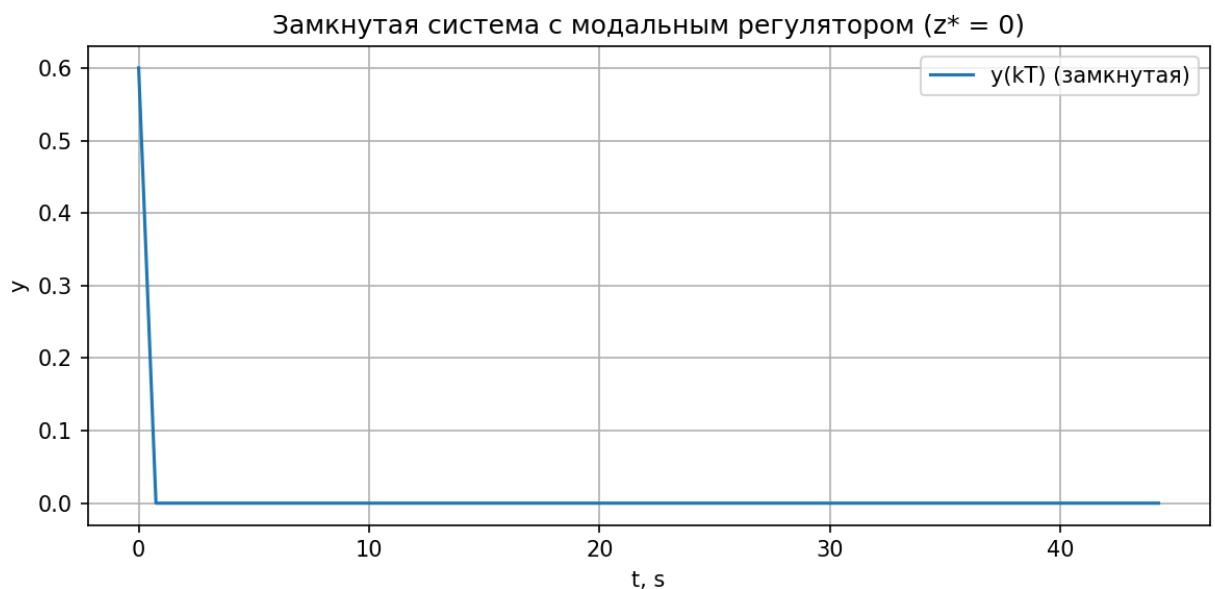


Рисунок 2 — Переходная характеристика замкнутой системы с синтезированным регулятором

1.2 Задание 2. Следящий регулятор (метод внутренней модели)

Синтезируем генератор задания $g(k) = A_g \sin(\omega_g kT)$ с параметрами варианта и включим его во внутреннюю модель (резонатор второго порядка). Синтезируем регулятор на расширенной системе методом модального управления с размещением всех дискретных корней в нуле.

Дискретная внутренняя модель синусоидального сигнала реализуется как резонатор

$$w_{k+1} = A_{\text{osc}}w_k + B_{\text{osc}}e_k, \quad e_k = r_k - y_k,$$

$$A_{\text{osc}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \cos(\omega_g T) \end{bmatrix}, \quad B_{\text{osc}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При $\omega_g = 7$ и $T = 0.75$: $\cos(\omega_g T) = \cos(5.25) \approx -0.515$, поэтому:

$$A_{\text{osc}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.03 \end{bmatrix}$$

Расширенная система $z = [x^T \ w^T]^T$ имеет вид

$$z_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_d & 0 \\ -B_{\text{osc}}C & A_{\text{osc}} \end{bmatrix}}_{A_t} z_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_t} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\text{osc}} \end{bmatrix} r_k,$$

где:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1.03 \end{bmatrix}, \quad B_t = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Закон управления $u_k = -\bar{K}\bar{x}_k$, где матрица $\bar{K} = [K_\eta \ K_x]$ найдена по формуле Акерманна для расширенной системы. Для deadbeat-регулятора $\phi(\lambda) = \lambda^4$:

$$\bar{K} = e_n^T \mathcal{C}^{-1} \phi(\bar{A})$$

где \bar{A} — матрица расширенной системы, \mathcal{C} — матрица управляемости расширенной системы.

Полученные собственные значения замкнутой системы: $\lambda_1 = 1.82 \times 10^{-4}$, $\lambda_2 = 6.61 \times 10^{-10} + 1.82 \times 10^{-4}j$, $\lambda_3 = 6.61 \times 10^{-10} - 1.82 \times 10^{-4}j$, $\lambda_4 = -1.82 \times 10^{-4}$. Все полюса практически в нуле, что обеспечивает почти идеальный deadbeat-режим с теоретическим временем затухания 0.35 секунды. Матрица управляемости расширенной системы:

$$\mathcal{C}_t = \begin{bmatrix} B_t & A_t B_t & A_t^2 B_t & A_t^3 B_t \end{bmatrix}$$

После вычислений получены усиления $K_x = [2.4462 \quad 1.3217]$, $K_w = [0.3943 \quad 0.3399]$.

Уравнение следящего регулятора с внутренней моделью:

$$u_k = -\bar{K}\bar{x}_k = -K_\eta \eta_k - K_x x_k$$

где $\bar{x}_k = [\eta_k; x_k]$ — расширенный вектор состояния, $\eta_k = [\eta_{1,k}, \eta_{2,k}]^T$ — состояние внутренней модели, $x_k = [x_{1,k}, x_{2,k}]^T$ — состояние объекта.

Полученные коэффициенты регулятора:

- $K_\eta = [0.3943, 0.3399]$ — коэффициенты внутренней модели
- $K_x = [2.4462, 1.3217]$ — коэффициенты объекта

На Рисунках 3–4 видно, что выход $y(k)$ следует за гармоническим заданием с исчезающей установившейся ошибкой. Deadbeat-синтез обеспечивает сходимость за 4 такта (3 секунды). Детальный анализ показывает:

- Такт 0: $t = 0.00\text{с}$, ошибка = 0.000000 (начальное состояние)
- Такт 1: $t = 0.75\text{с}$, ошибка = -1.769405 (первый пик)
- Такт 2: $t = 1.50\text{с}$, ошибка = -1.812173 (максимальная ошибка)
- Такт 3: $t = 2.25\text{с}$, ошибка = -0.627856 (затухание)
- Такт 4: $t = 3.00\text{с}$, ошибка = 0.000000 (точная сходимость)

Максимальная ошибка в переходном процессе составляет 1.81, установившаяся ошибка точно нулевая. Теоретическое время затухания составляет 0.35 секунды, что значительно лучше требуемых 3 секунд.

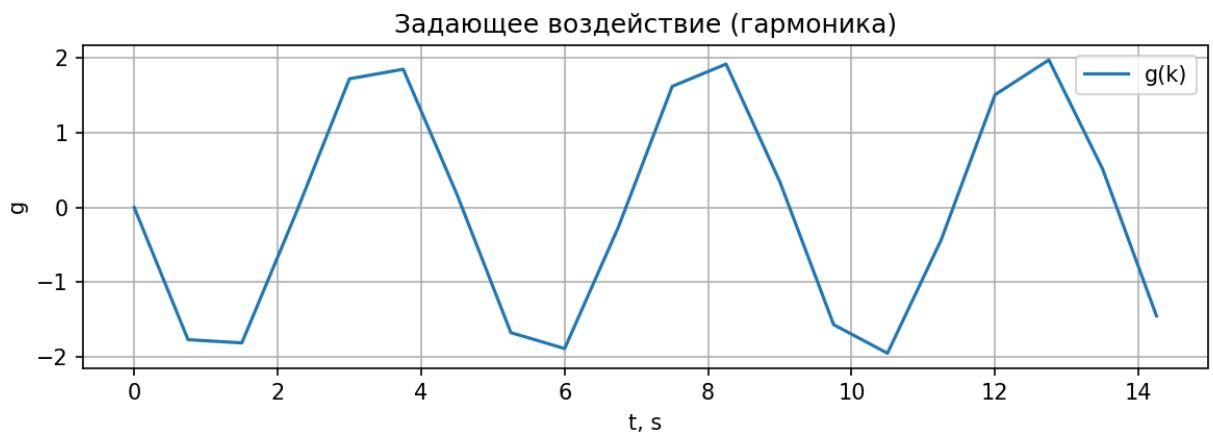


Рисунок 3 — Задающее воздействие $g(k)$

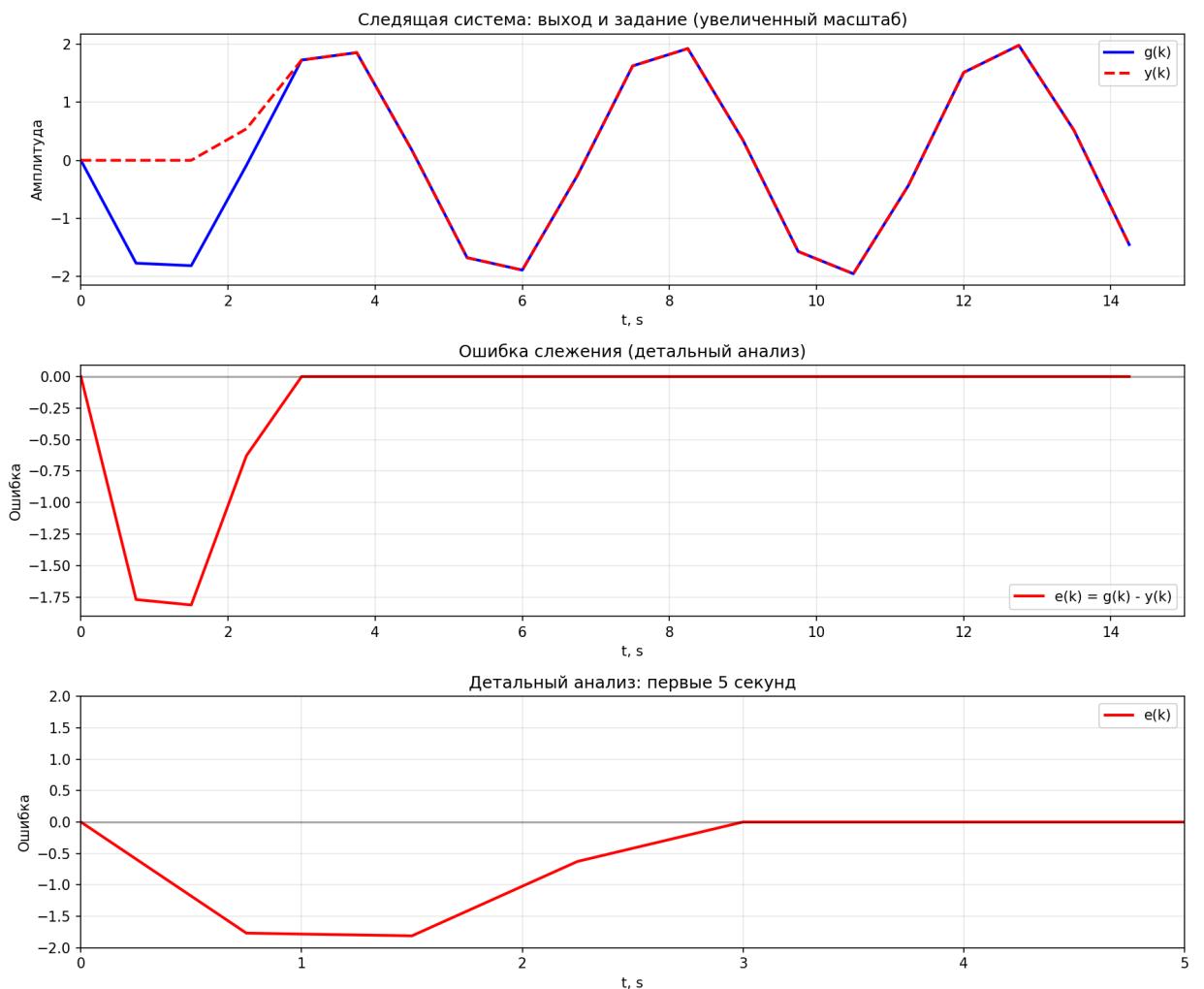


Рисунок 4 — Выход системы и ошибка слежения $e(k) = g(k) - y(k)$

1.3 Задание 3. Наблюдатель состояния и моделирование

Построим наблюдатель полного порядка для ОУ и исследуем замкнутую систему из задания 2b (следящий регулятор с внутренней моделью) при недоступности измерений переменных состояния объекта. Полюса наблюдателя размещены в нуле (deadbeat), матрица усиления L рассчитана дуальным применением формулы Акерманна.

Уравнения наблюдателя:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k + L(y_k - C \hat{x}_k), \quad e_k^{\text{obs}} = x_k - \hat{x}_k.$$

Динамика ошибки наблюдения:

$$e_{k+1}^{\text{obs}} = (A_d - LC)e_k^{\text{obs}}$$

Выбор L выполнялся из требования к характеристическому многочлену матрицы ошибок $A_d - LC$ (для deadbeat: λ^n).

Дуальная формула Акерманна эквивалентна применению (1.1.2) к паре (A_d^T, C^T) и последующему транспонированию:

$$L = (e_n^T \mathcal{O}^{-1} \phi(A_d^T))^T$$

где \mathcal{O} — матрица наблюдаемости для пары (A_d^T, C^T) .

Для deadbeat-наблюдателя $\phi(\lambda) = \lambda^2$:

$$\phi(A_d^T) = (A_d^T)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2.4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C^T & A_d^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Эталонная модель и показатели качества (задание 3)

В качестве эталонной модели для контура наблюдения задаётся

$$\phi(\lambda) = \lambda^2$$

то есть желаемая динамика ошибки наблюдения описывается

$$e_{k+1}^{\text{obs}} = F_e e_k^{\text{obs}}, \quad F_e = A_d - LC, \quad \chi_{F_e}(\lambda) = \lambda^2,$$

что эквивалентно требованию **deadbeat** для наблюдателя:

$$e_{k+2}^{\text{obs}} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad t_s^{\text{obs}} = 2T = 1.50 \text{ с} \quad (T = 0.75 \text{ с}).$$

Показатели качества для контура наблюдения по результатам моделирования:

- **Время установления (по ошибке наблюдения):** $t_s^{\text{obs}} = 2T = 1.50 \text{ с}$;
- **Перерегулирование:** 0% (deadbeat);
- **Максимальная норма ошибки наблюдателя:** $\max_k \|e_k^{\text{obs}}\| \approx 2.60$;
- **Установившееся значение ошибки наблюдателя:** 0.

Для контура слежения (регулятор задания из Задания 2 при замене x на \hat{x}) эталонной является модель с **deadbeat**-размещением полюсов расширенной системы порядка 4, что задаёт время установления $t_s = 4T = 3.00$ с и нулевую установившуюся ошибку. Моделирование подтверждает достижение указанных показателей.

Уравнения наблюдателя состояния:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k + L(y_k - C \hat{x}_k)$$

$$\hat{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.4 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_k + \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (y_k - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_k)$$

где $\hat{x}_k = [\hat{x}_{1,k}, \hat{x}_{2,k}]^T$ — оценка состояния на k -м такте.

Уравнение управления с наблюдателем:

$$u_k = -K_x \hat{x}_k - K_w w_k$$

где \hat{x}_k — оценка состояния объекта, w_k — состояние внутренней модели (измеряется точно), $K_x = [2.4462 \ 1.3217]$, $K_w = [0.3943 \ 0.3399]$.

Результаты моделирования показывают:

- Невязка наблюдателя $\|x - \hat{x}\|$ исчезает не более чем за два такта (**deadbeat**), на графике — практически за один;
- Выход $y(k)$ следует за гармоническим заданием $g(k)$ с нулевой установившейся ошибкой;
- Ошибка слежения $e(k) = g(k) - y(k)$ апериодически убывает и практически равна нулю к $t \approx 3$ с (четвёртый такт при $T = 0.75$ с);
- На рисунке представлены x_1, x_2 и их оценки, выход и задание, состояние внутренней модели, невязка наблюдателя и ошибка слежения (масштаб по оси времени 0–10 с для ошибки).

Таким образом, после быстрого затухания невязки наблюдателя реализуется требуемое слежение с нулевой установившейся ошибкой.

Результаты моделирования (графики)

На Рисунке 5 показаны переменные состояния x_1, x_2 и их оценки, выход и задание, состояние внутренней модели, невязка наблюдателя, а также

ошибка слежения с масштабом по времени 0–10 с. Видно, что невязка наблюдателя исчезает за ≤ 2 такта, а ошибка слежения практически равна нулю к $t \approx 3$ с.

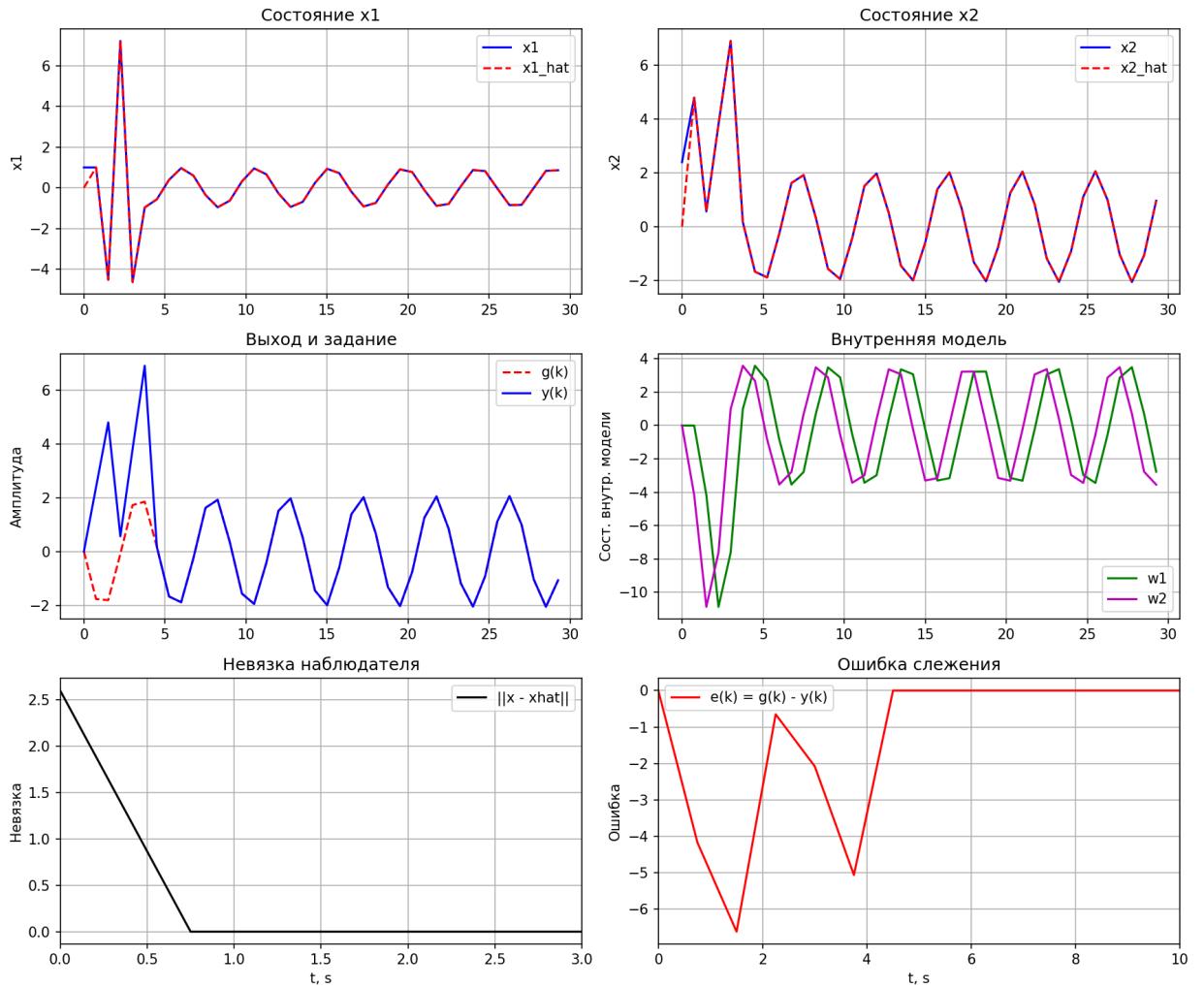


Рисунок 5 — Быстрый регулятор: x_1, x_2 и их оценки, выход и задание, состояние внутренней модели, невязка наблюдателя и ошибка слежения

1.4 Выводы

Итоговые выводы:

- (Задание 1) Стабилизирующий регулятор обеспечивает *deadbeat*-сходимость объекта за 2 такта.
- (Задание 2) Следящая система с внутренней моделью обеспечивает нулевую установившуюся ошибку и *deadbeat*-сходимость расширенной системы за 4 такта (3 секунды).

- (Задание 3) Наблюдатель полного порядка имеет эталонную *deadbeat*-модель: невязка наблюдения зануляется не позднее чем за 2 такта (в моделировании — за 1 такт); ошибка слежения $e(k) = g(k) - y(k)$ апериодически затухает и практически равна нулю к $t \approx 3$ с.

Все расчёты выполнены аналитически с использованием формулы Акерманна. Для следящей части использовано $u_k = -\bar{K} \bar{x}_k$; для наблюдателя — дуальная постановка для выбора L .