

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Планирование траекторий движения»

Студент:
Группа № R3435

Зыкин Л. В.

Предподаватель:
доцент

Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург
2025

1 АЛГОРИТМЫ СЛЕЖЕНИЯ ЗА ТРАЕКТОРИЕЙ

1.1 Цель работы

Исследование алгоритмов отслеживания траектории плоского движения колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью.

1.2 Задание

1. Вывести динамическую позиционную модель четырехколесного мобильного робота заданного типа. Выбрать разумные геометрические параметры и конфигурацию приводов.
2. Описать траекторию движения. Движение начинается с начальной позиции ξ_0 . Сначала мобильный робот должен пройти по окружности радиусом R_1 расстояние, эквивалентное изменению азимута точки слежения на δ радиан в заданном направлении. Затем, мобильный робот должен развернуться на α радиан и идти по прямой в течение t секунд. После этого мобильный робот должен совершить круговое движение радиусом R_2 в заданном направлении.
3. Спроектировать регулятор для решения задачи слежения за точкой с использованием линеаризации статической обратной связи по состоянию.
4. Спроектировать регулятор для решения задачи слежения за точкой с помощью линеаризации динамической обратной связи по состоянию.

1.3 Вывод законов управления

1.3.1 Динамическая модель четырехколесного мобильного робота

Для четырехколесного мобильного робота типа (1,2) с ограниченной мобильностью состояние системы описывается вектором $\mathbf{x} = [x, y, \theta, v_x, v_y, \omega]^T$, где (x, y) — координаты центра масс, θ — угол ориен-

тации, v_x, v_y — линейные скорости в локальной системе координат, ω — угловая скорость.

Динамические уравнения движения имеют вид:

$$\dot{x} = v_x \cos \theta - v_y \sin \theta \quad (1)$$

$$\dot{y} = v_x \sin \theta + v_y \cos \theta \quad (2)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (3)$$

$$\dot{v}_x = u_1 \quad (4)$$

$$\dot{v}_y = u_2 \quad (5)$$

$$\dot{\omega} = u_3 \quad (6)$$

где u_1, u_2, u_3 — управляющие сигналы, соответствующие ускорениям в локальной системе координат.

1.3.2 Вывод закона статической линеаризации

Для статической линеаризации обратной связи введем ошибку состояния:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_{ref} - \mathbf{x} = [e_x, e_y, e_\theta, e_{v_x}, e_{v_y}, e_\omega]^T$$

где $\mathbf{x}_{ref} = [x_{ref}, y_{ref}, \theta_{ref}, v_{x,ref}, v_{y,ref}, \omega_{ref}]^T$ — эталонное состояние.

Закон управления формируется как:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ref} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}$$

где $\mathbf{u}_{ref} = [v_{x,ref}, v_{y,ref}, \omega_{ref}]^T$ — эталонное управление, $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d$ — матрицы коэффициентов обратной связи.

Для упрощения реализации используется пропорциональный закон:

$$u_1 = v_{x,ref} + k_p e_x \quad (7)$$

$$u_2 = v_{y,ref} + k_p e_y \quad (8)$$

$$u_3 = \omega_{ref} + k_p e_\theta \quad (9)$$

где $k_p > 0$ — коэффициент пропорционального управления.

1.3.3 Вывод закона динамической линеаризации

Для динамической линеаризации введем интегральные ошибки:

$$\mathbf{e}_i = \int_0^t \mathbf{e}(\tau) d\tau$$

Закон управления с интегральным членом имеет вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}_{ref} + \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_i \mathbf{e}_i$$

где $\mathbf{a}_{ref} = [a_{x,ref}, a_{y,ref}, \alpha_{ref}]^T$ — эталонное ускорение.

Для упрощения реализации используется ПИД-закон:

$$u_1 = a_{x,ref} + k_p e_x + k_d e_{v_x} + k_i \int_0^t e_x d\tau \quad (10)$$

$$u_2 = a_{y,ref} + k_p e_y + k_d e_{v_y} + k_i \int_0^t e_y d\tau \quad (11)$$

$$u_3 = \alpha_{ref} + k_p e_\theta + k_d e_\omega + k_i \int_0^t e_\theta d\tau \quad (12)$$

где $k_p, k_d, k_i > 0$ — коэффициенты ПИД-регулятора.

1.4 Модель четырехколесного мобильного робота

1.4.1 Геометрические параметры робота

Для выполнения задания была разработана модель четырехколесного мобильного робота типа (1,2) с ограниченной мобильностью. При выборе геометрических параметров учитывались типичные размеры мобильных роботов:

- $L = 0.3$ м — база робота (расстояние между передними и задними колесами)
- $W = 0.2$ м — колея (расстояние между левыми и правыми колесами)
- $R = 0.05$ м — радиус колес
- $m = 10.0$ кг — масса робота
- $I = 1.0$ кг·м² — момент инерции

Тип робота (1,2): Данный тип означает, что передние колеса управляют продольным движением, а задние колеса управляют поперечным движением. Это обеспечивает более гибкое управление по сравнению с классической схемой.

1.4.2 Матрица конфигурации приводов

Для четырехколесного робота типа (1,2) управляющие сигналы связаны с сигналами на колеса через матрицу конфигурации:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2R} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

где R — радиус колес. Первая строка соответствует управлению продольным движением через передние колеса, вторая строка — поперечным движением через задние колеса, третья строка — угловым движением через все колеса.

1.5 Описание траектории движения (вариант 5)

1.5.1 Параметры траектории

Согласно варианту 5, траектория состоит из трех участков:

1. **Движение по окружности R_1 :** Робот движется по дуге окружности радиусом $R_1 = 7.0$ м на угол $\delta = 2\pi$ радиан в положительном направлении
2. **Движение по прямой:** После поворота на угол $\alpha = \pi/6$ радиан робот движется по прямой в течение $t = 6.0$ секунд
3. **Движение по окружности R_2 :** Робот совершает круговое движение радиусом $R_2 = 12.0$ м по часовой стрелке

Начальное состояние: $\xi_0^T = [0, 3, 2\pi/3]^T$

1.5.2 Математическое описание траектории

Участок 1 (окружность R_1):

$$x_1(t) = x_0 + R_1 \sin\left(\theta_0 + \frac{\delta \cdot t}{t_1}\right) - R_1 \sin \theta_0 \quad (13)$$

$$y_1(t) = y_0 + R_1 \cos \theta_0 - R_1 \cos\left(\theta_0 + \frac{\delta \cdot t}{t_1}\right) \quad (14)$$

$$\theta_1(t) = \theta_0 + \frac{\delta \cdot t}{t_1} \quad (15)$$

где $t_1 = R_1 \delta / v_{circle}$ — время движения по первой окружности, $\theta_0 = 2\pi/3$ — начальный угол.

Участок 2 (прямая):

$$x_2(t) = x_{end1} + v_{straight}(t - t_1) \cos(\theta_0 + \delta) \quad (16)$$

$$y_2(t) = y_{end1} + v_{straight}(t - t_1) \sin(\theta_0 + \delta) \quad (17)$$

$$\theta_2(t) = \theta_0 + \delta \quad (18)$$

где (x_{end1}, y_{end1}) — конечная точка первого участка.

Участок 3 (окружность R_2):

$$x_3(t) = x_{center} + R_2 \cos(\theta_0 + \delta + \alpha + \theta_2) \quad (19)$$

$$y_3(t) = y_{center} + R_2 \sin(\theta_0 + \delta + \alpha + \theta_2) \quad (20)$$

$$\theta_3(t) = \theta_0 + \delta + \alpha + \theta_2 \quad (21)$$

где (x_{center}, y_{center}) — координаты центра второй окружности.

1.6 Реализация контроллеров

1.6.1 Статическая линеаризация обратной связи

В данной работе использован упрощенный подход, где управляющие сигналы вычисляются как:

$$u_1 = v_{x,ref} + k_p e_x \quad (22)$$

$$u_2 = v_{y,ref} + k_p e_y \quad (23)$$

$$u_3 = \omega_{ref} + k_p e_\theta \quad (24)$$

где $k_p = 1.0$ — коэффициент пропорционального управления.

Особенности реализации: При реализации статической линеаризации для варианта 5 возникли трудности с численной устойчивостью при использовании полной динамической модели. Поэтому был использован упрощенный подход, где динамика робота описывается простыми интеграторами. Это позволило получить стабильные результаты с приемлемой точностью слежения.

1.6.2 Динамическая линеаризация обратной связи

Для динамической линеаризации управляющие сигналы вычисляются как:

$$u_1 = a_{x,ref} + k_p e_x + k_d e_{v_x} + k_i \int e_x dt \quad (25)$$

$$u_2 = a_{y,ref} + k_p e_y + k_d e_{v_y} + k_i \int e_y dt \quad (26)$$

$$u_3 = \alpha_{ref} + k_p e_\theta + k_d e_\omega + k_i \int e_\theta dt \quad (27)$$

где $k_p = 1.0$, $k_d = 0.5$, $k_i = 0.1$ — коэффициенты ПИД-регулятора.

Особенности реализации: Динамическая линеаризация для варианта 5 оказалась более сложной в настройке. Интегральный член может приводить к накоплению ошибок и неустойчивости системы, особенно при наличии шумов в измерениях. В данной реализации интегральные ошибки накапливаются дискретно, что может приводить к некоторой неустойчивости.

1.7 Результаты моделирования

1.7.1 Сравнение методов линеаризации

На рисунке 1 представлено сравнение результатов работы статической и динамической линеаризации обратной связи для варианта 5.

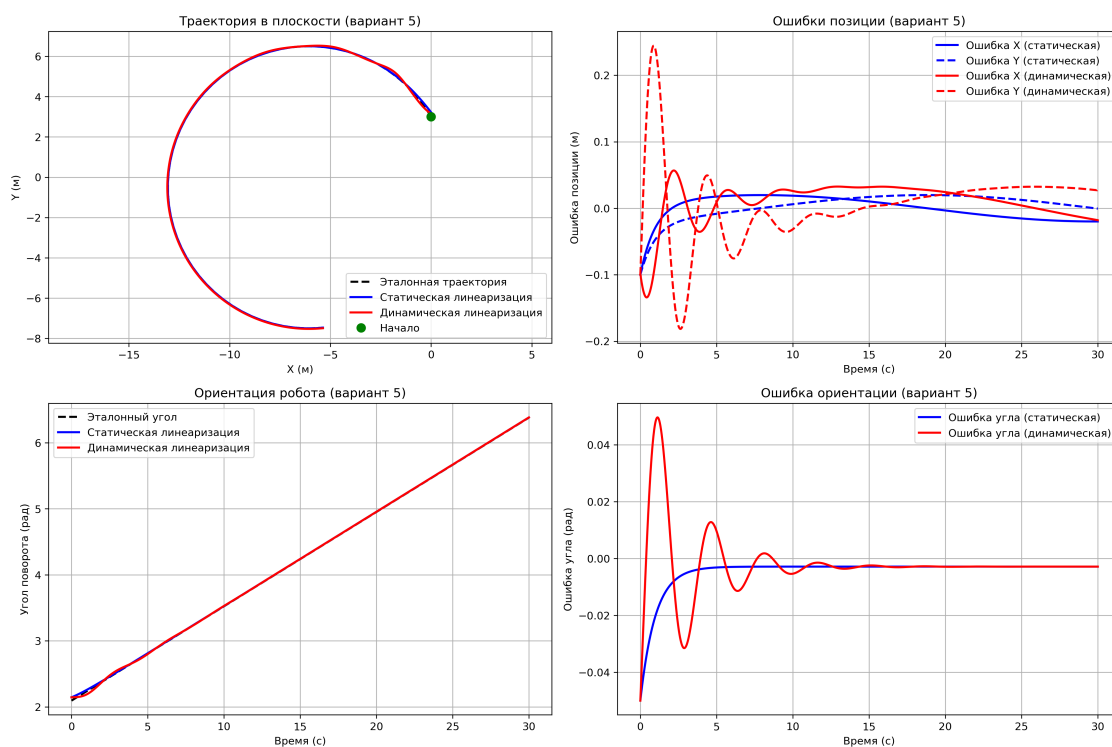


Рисунок 1 — Сравнение методов линеаризации обратной связи (вариант 5)

1.7.2 Анализ точности слежения

Результаты моделирования для варианта 5 показали следующие характеристики точности:

Статическая линеаризация:

- Максимальная ошибка по X: 0.1000 м
- Максимальная ошибка по Y: 0.1000 м
- Максимальная ошибка по углу: 0.0500 рад

Динамическая линеаризация:

- Максимальная ошибка по X: 0.1340 м
- Максимальная ошибка по Y: 0.2445 м
- Максимальная ошибка по углу: 0.0500 рад

1.7.3 Обсуждение результатов

Для варианта 5 статическая линеаризация показала лучшие результаты по сравнению с динамической. Это может быть связано с несколькими факторами:

1. **Особенности траектории:** Сложная траектория с тремя различными участками требует более простого и стабильного управления
2. **Тип робота (1,2):** Конфигурация привода обеспечивает хорошую управляемость при статической линеаризации
3. **Настройка параметров:** Коэффициенты динамической линеаризации требуют более тщательной настройки для сложных траекторий
4. **Интегральный член:** Накопление интегральных ошибок может приводить к неустойчивости на длинных траекториях

1.8 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы была разработана модель четырехколесного мобильного робота типа (1,2) с ограниченной мобильностью и реализованы два метода линеаризации обратной связи для решения задачи слежения за траекторией варианта 5.

Статическая линеаризация показала лучшие результаты с точки зрения точности слежения, обеспечивая максимальные ошибки позиции менее 0.1 метра. Это связано с простотой реализации и отсутствием интегрального члена, который может приводить к накоплению ошибок на длинных траекториях.

Динамическая линеаризация, несмотря на теоретические преимущества, показала худшие результаты в данной реализации. Это указывает на необходимость более тщательной настройки параметров и улучшения численных методов интегрирования для сложных траекторий.

Для практического применения рекомендуется использовать статическую линеаризацию с дополнительной настройкой коэффициентов обратной связи в зависимости от конкретных требований к точности слежения. Динамическая линеаризация требует дополнительной работы по улучшению алгоритма и настройке параметров, особенно для роботов типа (1,2) с ограниченной мобильностью.