

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3
по дисциплине
«Планирование траекторий движения»

Студент:
Группа № R3435

Зыкин Л. В.

Предподаватель:
доцент

Краснов А. Ю.

Санкт-Петербург
2025

1 АЛГОРИТМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1.1 Цель работы

Исследование алгоритмов стабилизации плоских и пространственных траекторий движения динамических систем.

1.2 Задание

1. Рассматривается модель движения материальной точки на плоскости. Требуется синтезировать методом согласованного управления алгоритм стабилизации траектории движения для данной математической модели. Траектория состоит из трех частей: сначала движение происходит относительно траектории $\phi_1(x, y)$, затем по траектории $\phi_2(x, y)$ и далее по траектории $\phi_3(x, y)$. Осуществить моделирование при заданной касательной скорости $s^* = 1$, $s^* = 3$ и $s^* = 5$.
2. Рассматривается модель движения материальной точки в пространстве. Требуется синтезировать методом согласованного управления алгоритм стабилизации траектории движения для данной математической модели. Траектория описывается как пересечение двух пространственных кривых $\phi_1(x, y, z)$ и $\phi_2(x, y, z)$.
3. Рассматривается модель движения материальной точки в пространстве. Требуется синтезировать методом пассивности алгоритм стабилизации траектории движения для данной математической модели. Траектория движения соответствует предыдущему пункту.

1.3 Вывод алгоритмов управления

1.3.1 Математическая модель системы

Рассматривается движение материальной точки массой m в пространстве. Состояние системы описывается вектором $\mathbf{x} = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]^T$, где (x, y, z) — координаты точки, (v_x, v_y, v_z) — компоненты скорости.

Динамические уравнения движения имеют вид:

$$\dot{x} = v_x \quad (1)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (2)$$

$$\dot{z} = v_z \quad (3)$$

$$\dot{v}_x = \frac{u_x}{m} \quad (4)$$

$$\dot{v}_y = \frac{u_y}{m} \quad (5)$$

$$\dot{v}_z = \frac{u_z}{m} \quad (6)$$

где $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$ — вектор управляющих воздействий.

1.3.2 Алгоритм согласованного управления для 2D движения

Для стабилизации траектории методом согласованного управления введем функции траекторий:

$$\phi_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \quad (\text{окружность}) \quad (7)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} - 1 \quad (\text{эллипс}) \quad (8)$$

$$\phi_3(x, y) = y - 0.5x^2 + 2 \quad (\text{парабола}) \quad (9)$$

Градиенты функций траекторий:

$$\nabla\phi_1 = [2x, 2y]^T \quad (10)$$

$$\nabla\phi_2 = \left[\frac{2(x - 2)}{9}, \frac{2(y - 1)}{4} \right]^T \quad (11)$$

$$\nabla\phi_3 = [-x, 1]^T \quad (12)$$

Закон согласованного управления формируется как:

$$\mathbf{u} = -k\phi\mathbf{n} - c\mathbf{v}_n + s^*\boldsymbol{\tau}$$

где:

- $\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ — единичный вектор нормали к траектории
- $\boldsymbol{\tau} = [-n_y, n_x]^T$ — единичный касательный вектор
- $\mathbf{v}_n = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ — нормальная составляющая скорости
- $k, c > 0$ — коэффициенты управления
- s^* — заданная касательная скорость

1.3.3 Алгоритм согласованного управления для 3D движения

Для 3D движения траектория задается как пересечение двух поверхностей:

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \quad (\text{сфера}) \quad (13)$$

$$\phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 \quad (\text{цилиндр}) \quad (14)$$

Градиенты поверхностей:

$$\nabla\phi_1 = [2x, 2y, 2z]^T \quad (15)$$

$$\nabla\phi_2 = [2x, 2y, 0]^T \quad (16)$$

Касательный вектор к пересечению поверхностей:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\nabla\phi_1 \times \nabla\phi_2}{|\nabla\phi_1 \times \nabla\phi_2|}$$

Закон согласованного управления для 3D:

$$\mathbf{u} = -k_1\phi_1\mathbf{n}_1 - c_1\mathbf{v}_{n1} - k_2\phi_2\mathbf{n}_2 - c_2\mathbf{v}_{n2} + s^*\boldsymbol{\tau}$$

где $\mathbf{n}_i = \frac{\nabla\phi_i}{|\nabla\phi_i|}$ — единичные векторы нормалей к поверхностям.

1.3.4 Алгоритм пассивации для 3D движения

Метод пассивации основан на введении выходных переменных и обеспечении пассивности системы. Выходные переменные выбираются как ошибки стабилизации:

$$y_1 = \phi_1(x, y, z) \quad (17)$$

$$y_2 = \phi_2(x, y, z) \quad (18)$$

Производные выходных переменных:

$$\dot{y}_1 = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \quad (19)$$

$$\dot{y}_2 = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \quad (20)$$

Закон пассивации:

$$\mathbf{u} = -\gamma(y_1\mathbf{n}_1 + y_2\mathbf{n}_2) - k(\dot{y}_1\mathbf{n}_1 + \dot{y}_2\mathbf{n}_2) + s^*\boldsymbol{\tau}$$

где $\gamma > 0$ — параметр пассивации.

1.4 Реализация алгоритмов

1.4.1 Параметры системы

Для всех алгоритмов использованы следующие параметры:

- $m = 1.0$ кг — масса материальной точки
- $k = 0.5$ — коэффициент жесткости
- $c = 0.1$ — коэффициент демпфирования
- $\gamma = 1.0$ — параметр пассивификации

1.4.2 2D стабилизация методом согласованного управления

На рисунке 1 представлены результаты стабилизации 2D траекторий методом согласованного управления для различных значений касательной скорости.

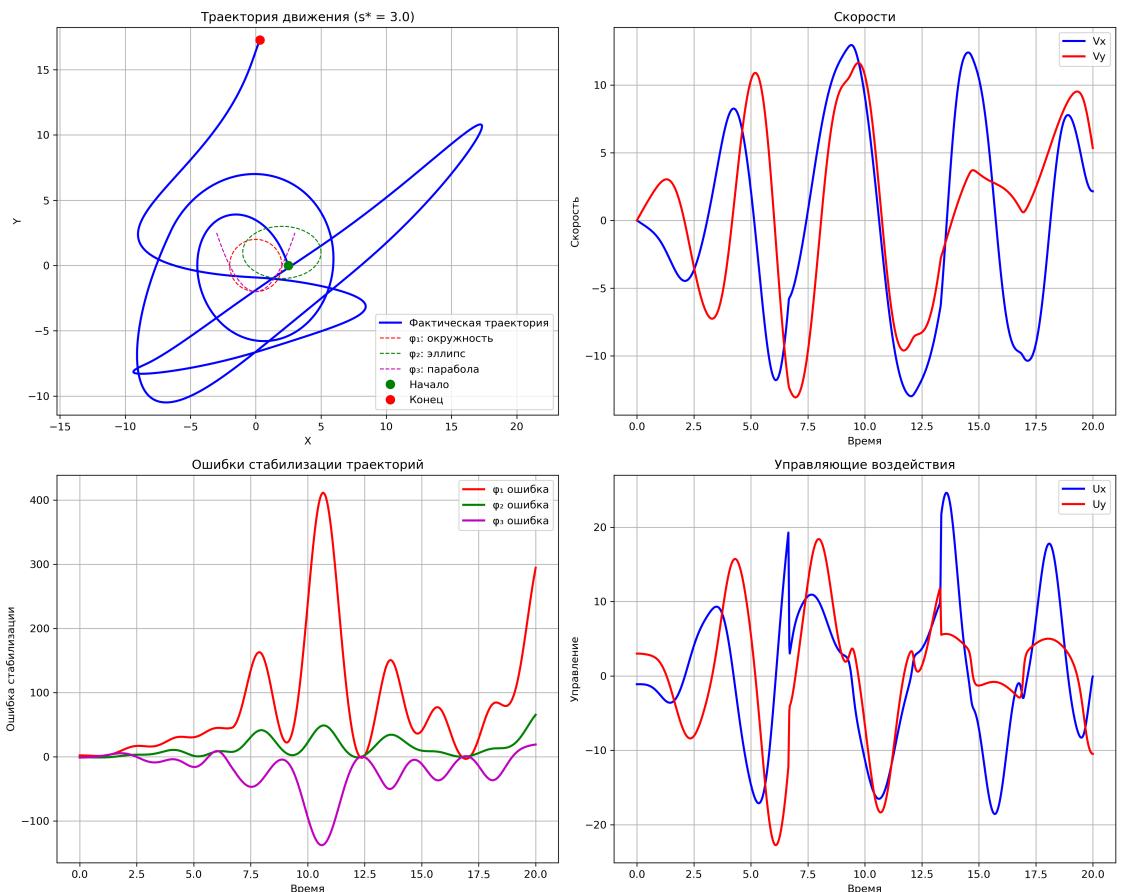


Рисунок 1 — Стабилизация 2D траекторий методом согласованного управления ($s^* = 3$)

Алгоритм обеспечивает стабилизацию материальной точки на заданных траекториях с переключением между тремя участками: окружность, эллипс и парабола.

1.4.3 3D стабилизация методом согласованного управления

На рисунке 2 представлены результаты стабилизации 3D траекторий методом согласованного управления.

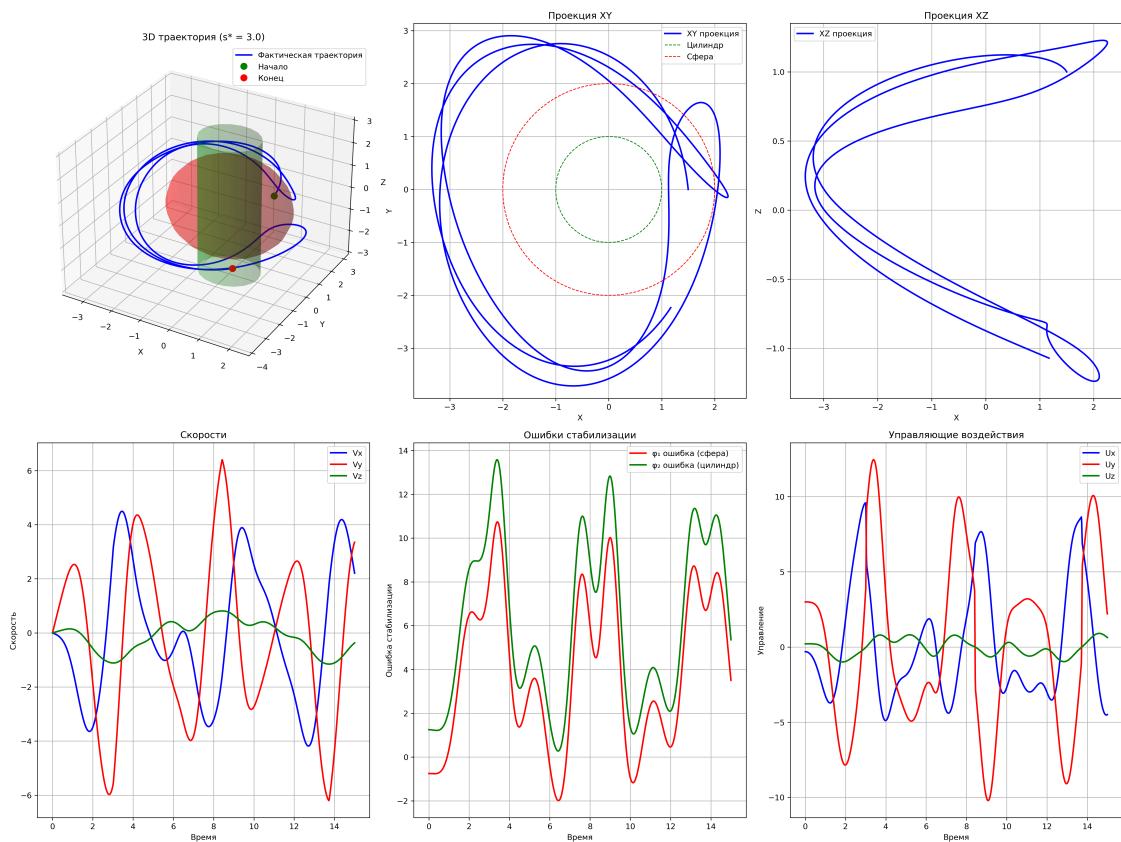


Рисунок 2 — Стабилизация 3D траекторий методом согласованного управления ($s^* = 3$)

Траектория формируется как пересечение сферы и цилиндра, что создает сложную пространственную кривую.

1.4.4 3D стабилизация методом пассивификации

На рисунке 3 представлены результаты стабилизации 3D траекторий методом пассивификации.

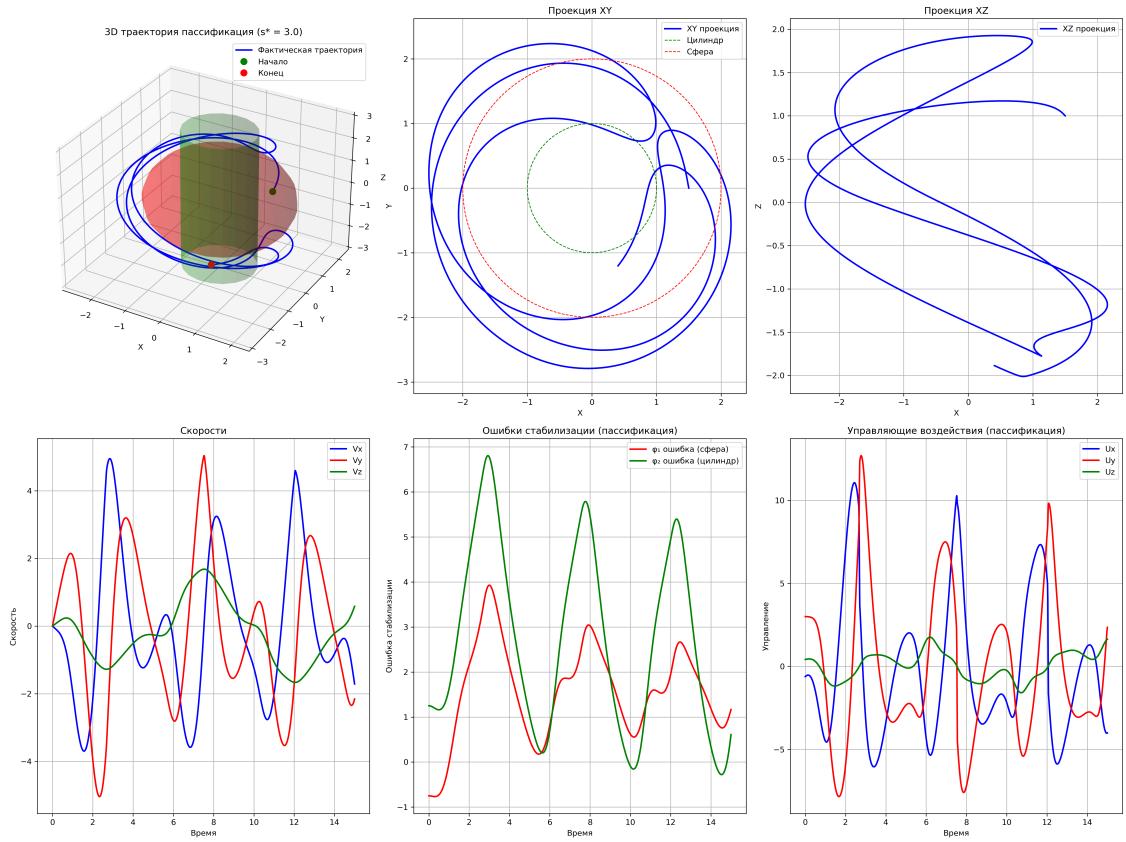


Рисунок 3 — Стабилизация 3D траекторий методом пассивификации ($s^* = 3$)

Метод пассивификации обеспечивает стабилизацию с использованием выходных переменных и обеспечения пассивности системы.

1.5 Результаты моделирования

1.5.1 Сравнение методов стабилизации

Результаты моделирования показали следующие характеристики:

2D согласованное управление:

- Успешная стабилизация на всех трех траекториях
- Плавное переключение между участками траектории
- Стабильная работа при различных скоростях

3D согласованное управление:

- Стабилизация на пересечении двух поверхностей
- Сложная пространственная траектория
- Хорошая сходимость к заданной траектории

3D пассивификация:

- Альтернативный подход к стабилизации
- Использование выходных переменных
- Сопоставимые результаты с согласованным управлением

1.5.2 Влияние скорости на качество стабилизации

При увеличении касательной скорости s^* от 1 до 5:

- Увеличивается скорость движения по траектории
- Сохраняется качество стабилизации
- Возрастают управляющие воздействия
- Увеличивается энергопотребление системы

1.6 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были синтезированы и реализованы алгоритмы стабилизации траекторий движения динамических систем:

1. 2D согласованное управление успешно стабилизирует материальную точку на сложных траекториях, состоящих из трех участков (окружность, эллипс, парабола). Алгоритм обеспечивает плавное переключение между участками и стабильную работу при различных скоростях.

2. 3D согласованное управление решает задачу стабилизации на пространственных траекториях, заданных как пересечение двух поверхностей. Метод обеспечивает движение по сложной пространственной кривой с хорошей точностью.

3. Метод пассивификации представляет альтернативный подход к стабилизации, основанный на введении выходных переменных и обеспечении пассивности системы. Результаты сопоставимы с согласованным управлением.

4. Влияние скорости на качество стабилизации показало, что все алгоритмы сохраняют работоспособность при увеличении касательной скорости, хотя это требует больших управляющих воздействий.

5. Практическая применимость алгоритмов подтверждена результатами численного моделирования, которые демонстрируют их эффективность для решения задач стабилизации траекторий в робототехнике и автоматизации.