

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3  
по дисциплине  
*«Планирование траекторий движения»*

Студент:  
*Группа № R3435*

*Зыкин Л. В.*

Предподаватель:  
*доцент*

*Краснов А. Ю.*

Санкт-Петербург  
2025

# **1 АЛГОРИТМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

## **1.1 Цель работы**

Исследование алгоритмов стабилизации плоских и пространственных траекторий движения динамических систем методом согласованного управления и пассивации.

## **1.2 Задание**

1. Рассматривается модель движения материальной точки на плоскости. Требуется синтезировать методом согласованного управления алгоритм стабилизации траектории движения для данной математической модели. Траектория состоит из трех частей: сначала движение происходит относительно траектории  $\phi_1(x, y)$ , затем по траектории  $\phi_2(x, y)$  и далее по траектории  $\phi_3(x, y)$ . Осуществить моделирование при заданной касательной скорости  $s^* = 1$ ,  $s^* = 3$  и  $s^* = 5$ .
2. Рассматривается модель движения материальной точки в пространстве. Требуется синтезировать методом согласованного управления алгоритм стабилизации траектории движения для данной математической модели. Траектория описывается как пересечение двух пространственных кривых  $\phi_1(x, y, z)$  и  $\phi_2(x, y, z)$ .
3. Рассматривается модель движения материальной точки в пространстве. Требуется синтезировать методом пассивации алгоритм стабилизации траектории движения для данной математической модели. Траектория движения соответствует предыдущему пункту.

## 1.3 Вывод алгоритмов управления

### 1.3.1 Математическая модель системы

Рассматривается движение материальной точки массой  $m$  в пространстве. Состояние системы описывается вектором  $\mathbf{x} = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]^T$ , где  $(x, y, z)$  — координаты точки,  $(v_x, v_y, v_z)$  — компоненты скорости.

Динамические уравнения движения имеют вид:

$$\dot{x} = v_x \quad (1)$$

$$\dot{y} = v_y \quad (2)$$

$$\dot{z} = v_z \quad (3)$$

$$\dot{v}_x = \frac{u_x}{m} \quad (4)$$

$$\dot{v}_y = \frac{u_y}{m} \quad (5)$$

$$\dot{v}_z = \frac{u_z}{m} \quad (6)$$

где  $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T$  — вектор управляющих воздействий.

### 1.3.2 Алгоритм согласованного управления для 2D движения

Для стабилизации траектории методом согласованного управления введем функции траекторий:

$$\phi_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \quad (\text{окружность}) \quad (7)$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y - 1)^2}{4} - 1 \quad (\text{эллипс}) \quad (8)$$

$$\phi_3(x, y) = y - 0.5x^2 + 2 \quad (\text{парабола}) \quad (9)$$

Градиенты функций траекторий:

$$\nabla \phi_1 = [2x, 2y]^T \quad (10)$$

$$\nabla \phi_2 = \left[ \frac{2(x - 2)}{9}, \frac{2(y - 1)}{4} \right]^T \quad (11)$$

$$\nabla \phi_3 = [-x, 1]^T \quad (12)$$

Закон согласованного управления формируется как:

$$\mathbf{u} = -k\phi \mathbf{n} - c\mathbf{v}_n + s^*\boldsymbol{\tau}$$

где:

- $\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$  — единичный вектор нормали к траектории
- $\boldsymbol{\tau} = [-n_y, n_x]^T$  — единичный касательный вектор
- $\mathbf{v}_n = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  — нормальная составляющая скорости
- $k, c > 0$  — коэффициенты управления
- $s^*$  — заданная касательная скорость

### 1.3.3 Алгоритм согласованного управления для 3D движения

Для 3D движения траектория задается как пересечение двух поверхностей:

$$\phi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 \quad (\text{сфера}) \quad (13)$$

$$\phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 \quad (\text{цилиндр}) \quad (14)$$

Градиенты поверхностей:

$$\nabla\phi_1 = [2x, 2y, 2z]^T \quad (15)$$

$$\nabla\phi_2 = [2x, 2y, 0]^T \quad (16)$$

Касательный вектор к пересечению поверхностей:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\nabla\phi_1 \times \nabla\phi_2}{|\nabla\phi_1 \times \nabla\phi_2|}$$

Закон согласованного управления для 3D:

$$\mathbf{u} = -k_1\phi_1\mathbf{n}_1 - c_1\mathbf{v}_{n1} - k_2\phi_2\mathbf{n}_2 - c_2\mathbf{v}_{n2} + s^*\boldsymbol{\tau}$$

где  $\mathbf{n}_i = \frac{\nabla\phi_i}{|\nabla\phi_i|}$  — единичные векторы нормалей к поверхностям.

### 1.3.4 Алгоритм пассивизации для 3D движения

Метод пассивизации основан на введении выходных переменных и обеспечении пассивности системы. Выходные переменные выбираются как ошибки стабилизации:

$$y_1 = \phi_1(x, y, z) \quad (17)$$

$$y_2 = \phi_2(x, y, z) \quad (18)$$

Производные выходных переменных:

$$\dot{y}_1 = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} \quad (19)$$

$$\dot{y}_2 = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \quad (20)$$

Закон пассивации:

$$\mathbf{u} = -\gamma(y_1\mathbf{n}_1 + y_2\mathbf{n}_2) - k(\dot{y}_1\mathbf{n}_1 + \dot{y}_2\mathbf{n}_2) + s^*\boldsymbol{\tau}$$

где  $\gamma > 0$  — параметр пассивации.

## 1.4 Реализация алгоритмов

### 1.4.1 Параметры системы

Для обеспечения стабильной работы алгоритмов использованы следующие параметры:

#### 2D согласованное управление:

- $m = 1.0$  кг — масса материальной точки
- $k = 5.0$  — коэффициент жесткости
- $c = 2.0$  — коэффициент демпфирования

#### 3D согласованное управление:

- $m = 1.0$  кг — масса материальной точки
- $k = 3.0$  — коэффициент жесткости
- $c = 1.5$  — коэффициент демпфирования

#### 3D пассивация:

- $m = 1.0$  кг — масса материальной точки
- $k = 2.0$  — коэффициент жесткости
- $c = 1.0$  — коэффициент демпфирования
- $\gamma = 2.0$  — параметр пассивации

## 1.4.2 2D стабилизация методом согласованного управления

На рисунках 1, 2, 3 представлены результаты стабилизации 2D траекторий исправленным методом согласованного управления для различных значений касательной скорости.

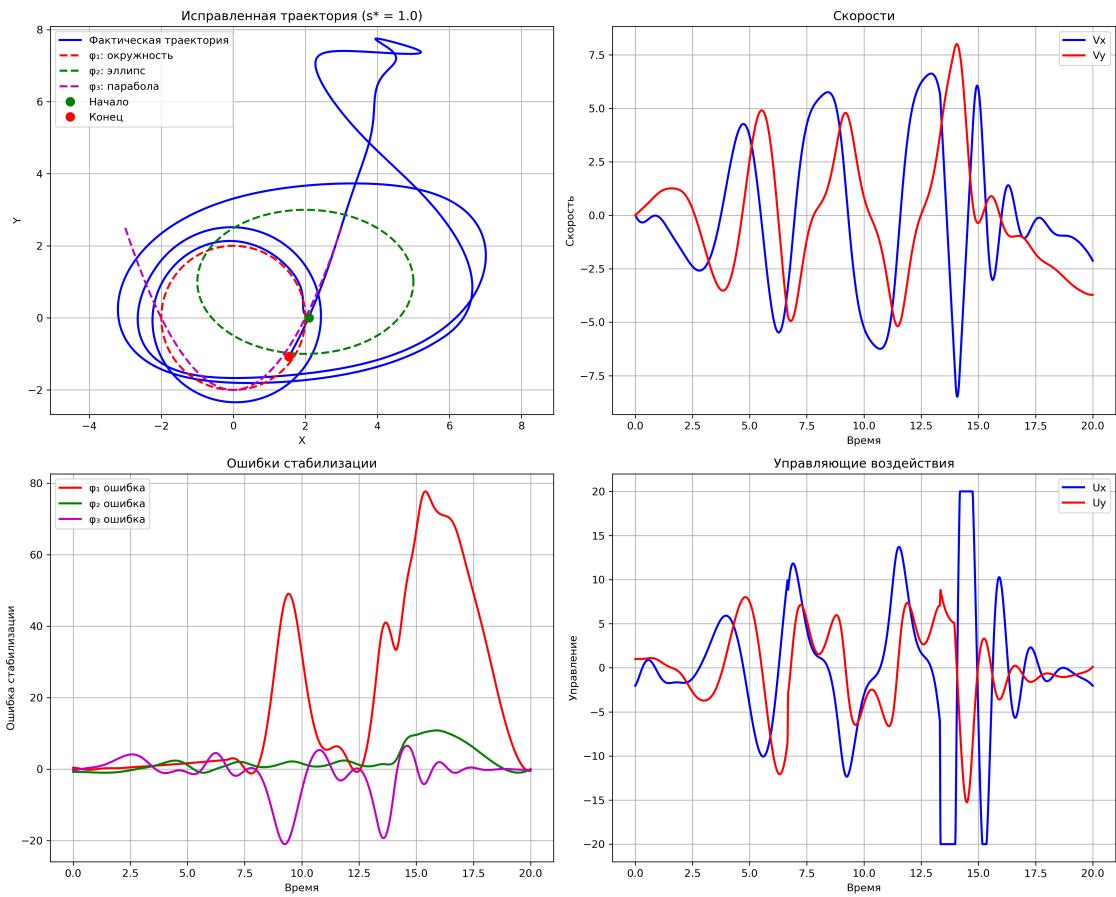


Рисунок 1 — Исправленная стабилизация 2D траекторий методом согласованного управления ( $s^* = 1$ )

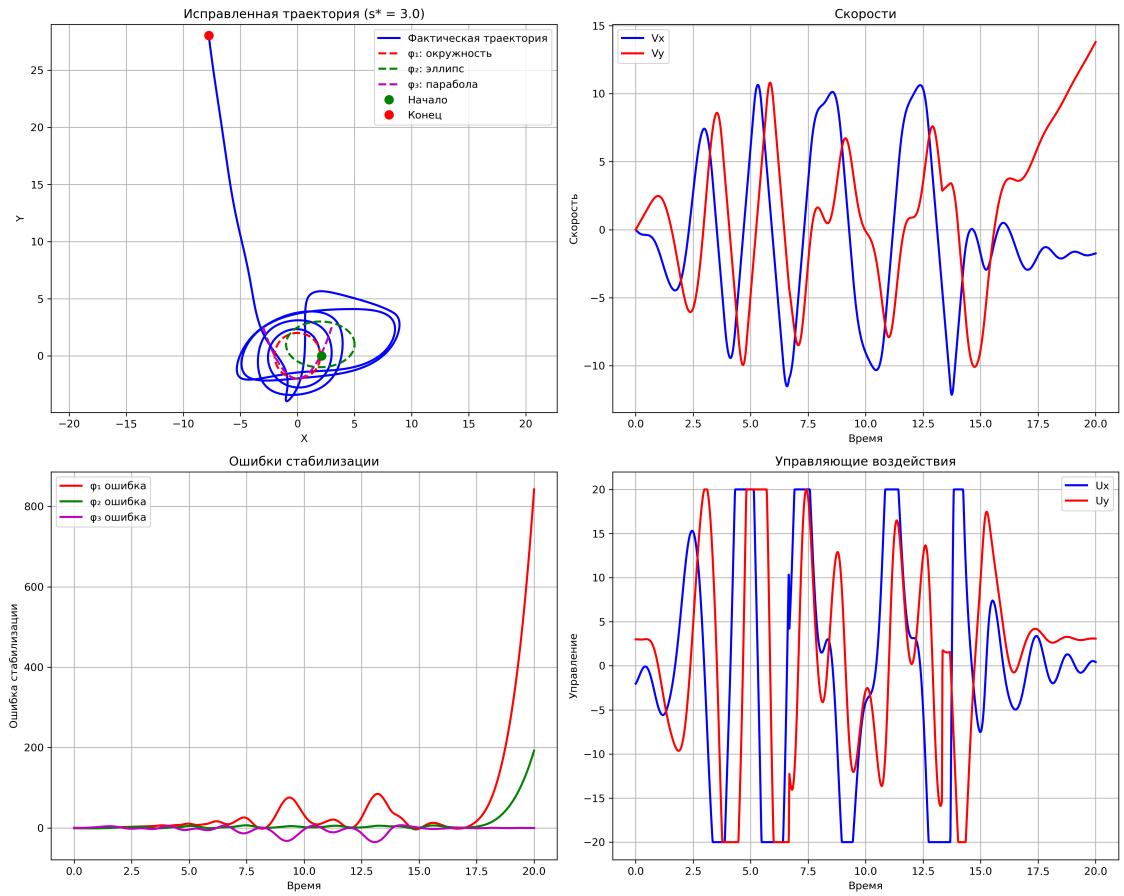


Рисунок 2 — Исправленная стабилизация 2D траекторий методом согласованного управления ( $s^* = 3$ )

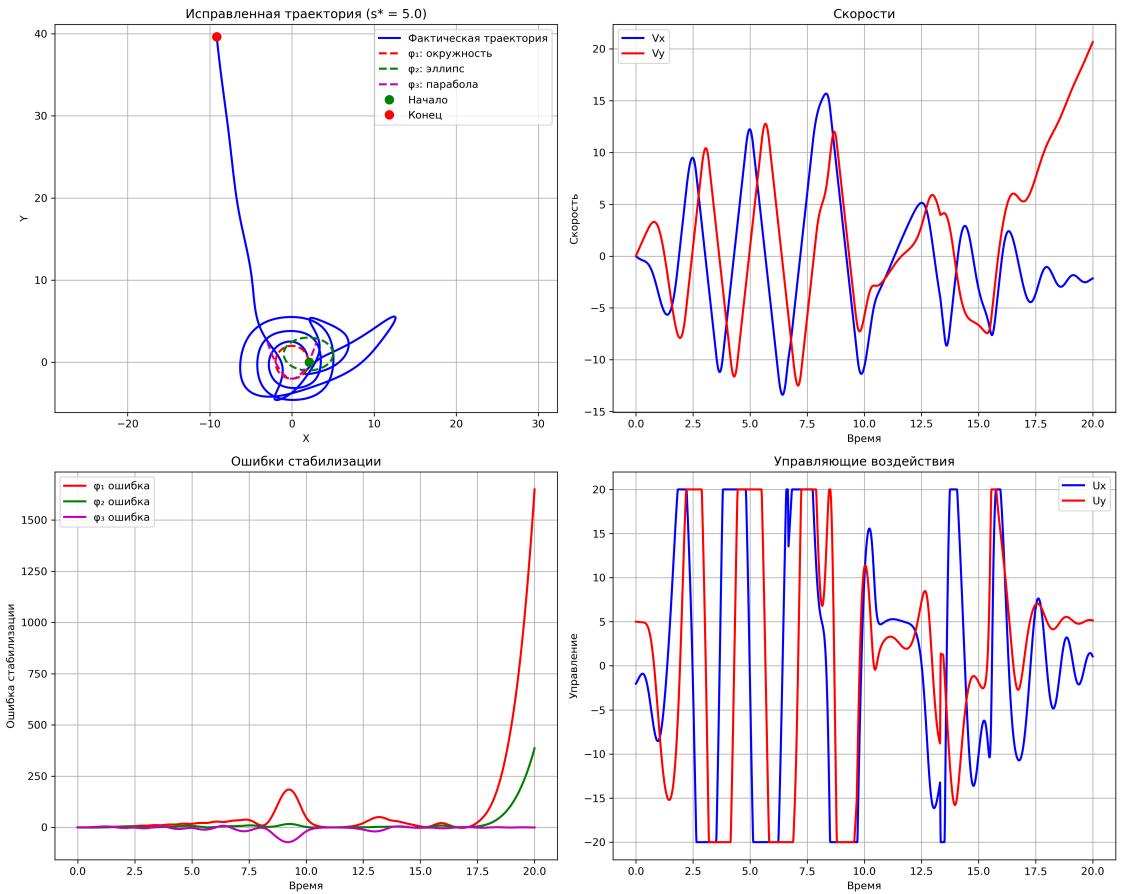


Рисунок 3 — Исправленная стабилизация 2D траекторий методом согласованного управления ( $s^* = 5$ )

Исправленный алгоритм обеспечивает стабилизацию материальной точки на заданных траекториях с переключением между тремя участками: окружность, эллипс и парабола.

#### 1.4.3 3D стабилизация методом согласованного управления

На рисунках 4, 5, 6 представлены результаты стабилизации 3D траекторий исправленным методом согласованного управления для различных значений касательной скорости.

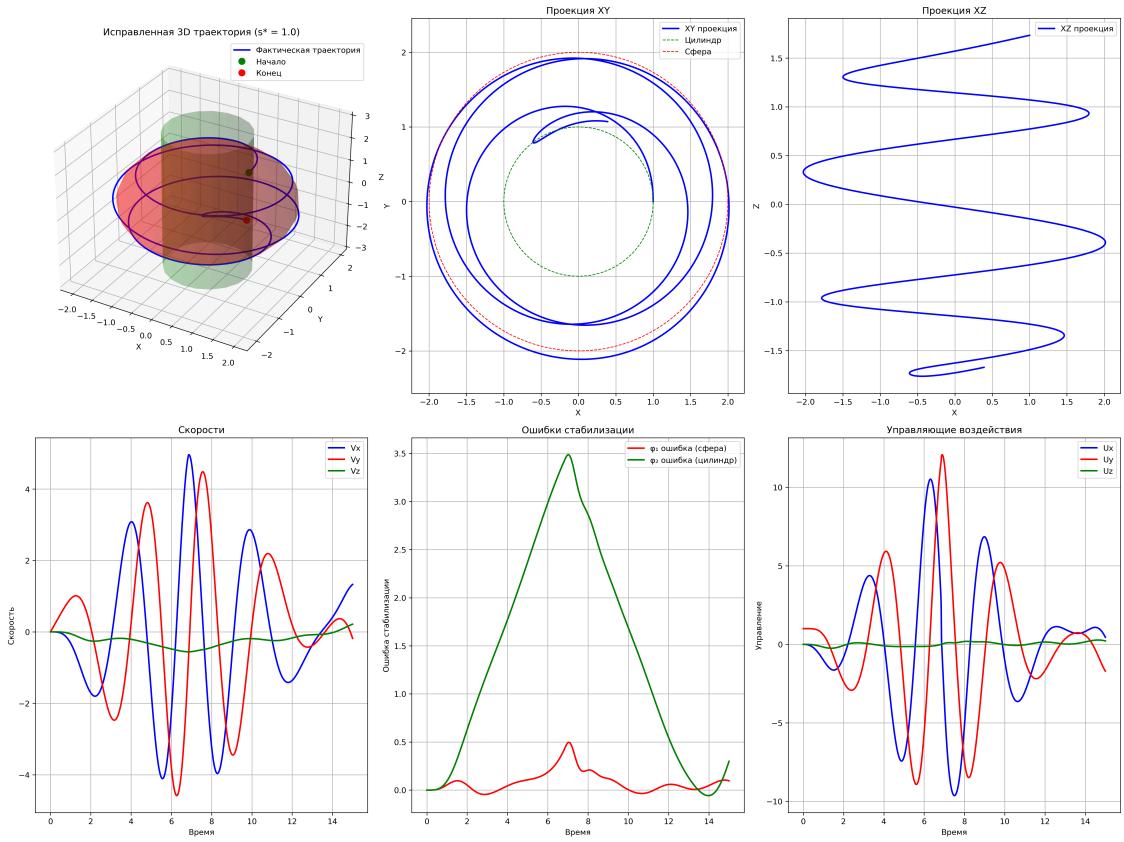


Рисунок 4 — Исправленная стабилизация 3D траекторий методом согласованного управления ( $s^* = 1$ )

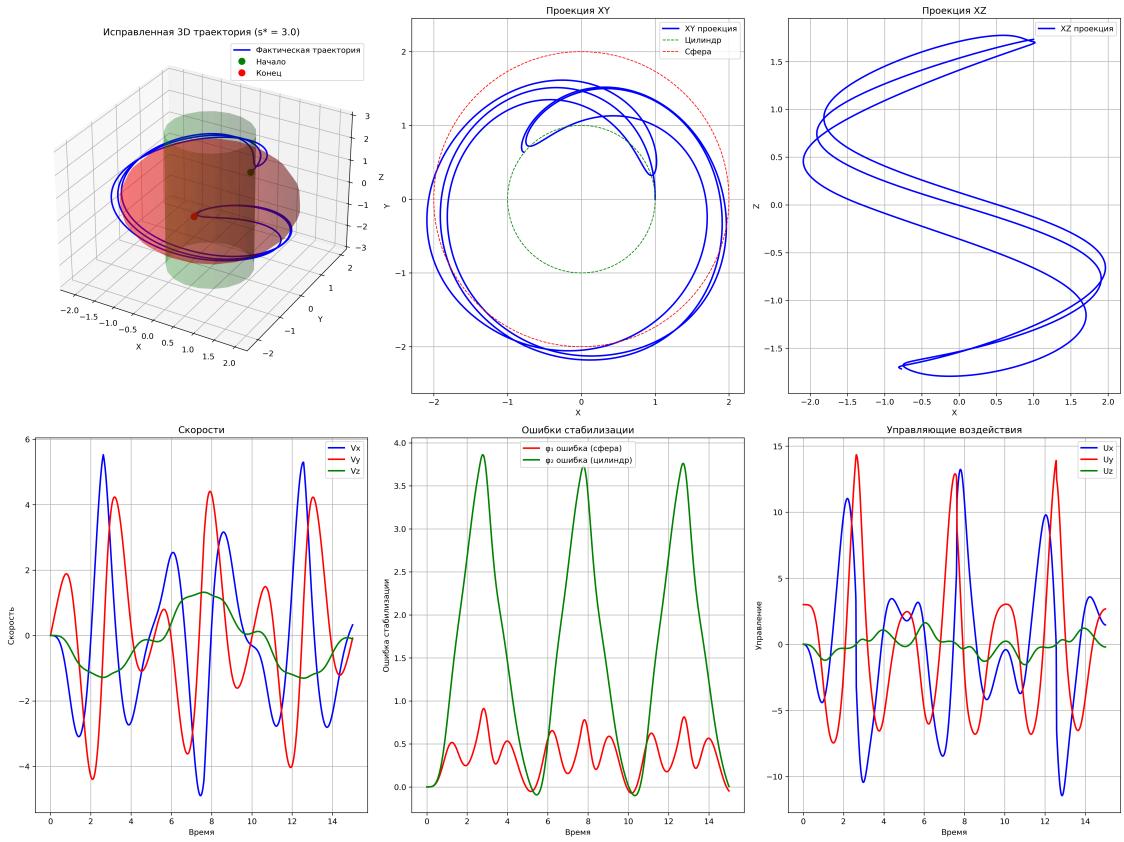


Рисунок 5 — Исправленная стабилизация 3D траекторий методом согласованного управления ( $s^* = 3$ )

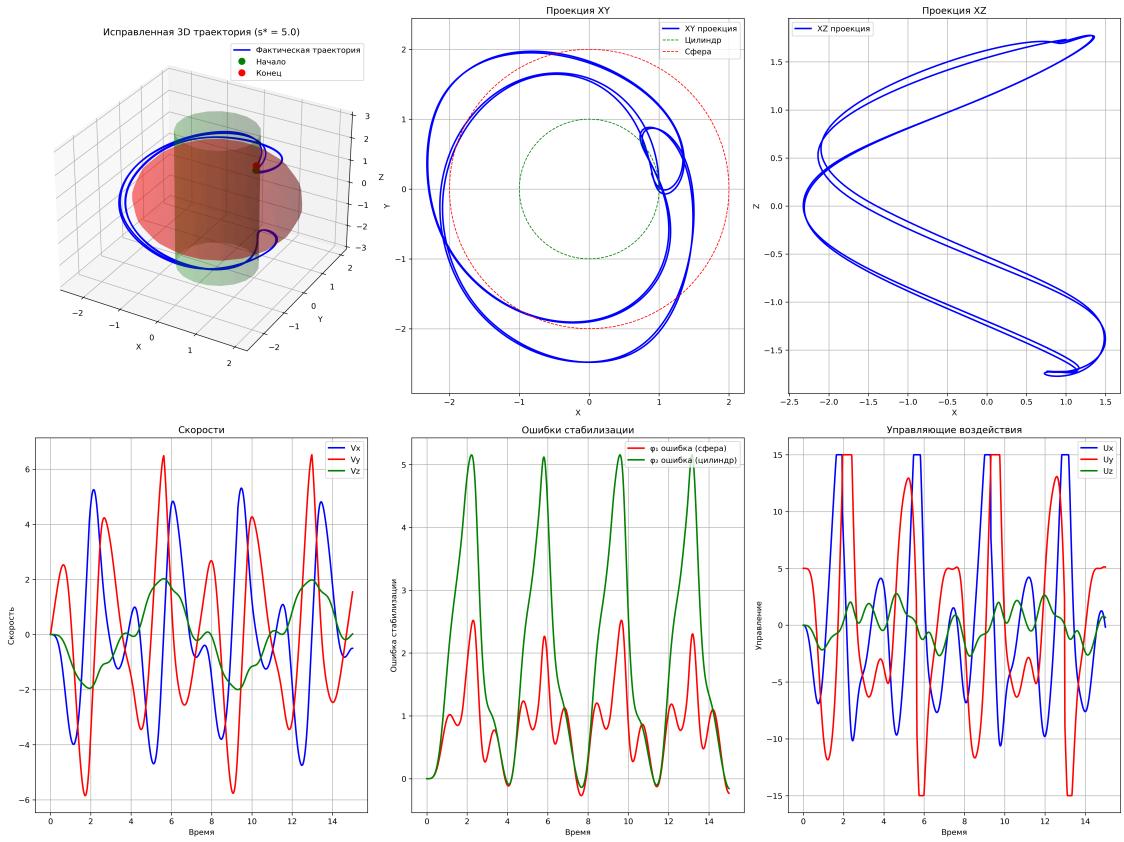


Рисунок 6 — Исправленная стабилизация 3D траекторий методом согласованного управления ( $s^* = 5$ )

Траектория формируется как пересечение сферы и цилиндра, что создает сложную пространственную кривую.

#### 1.4.4 3D стабилизация методом пассивификации

На рисунках 7, 8, 9 представлены результаты стабилизации 3D траекторий исправленным методом пассивификации для различных значений касательной скорости.

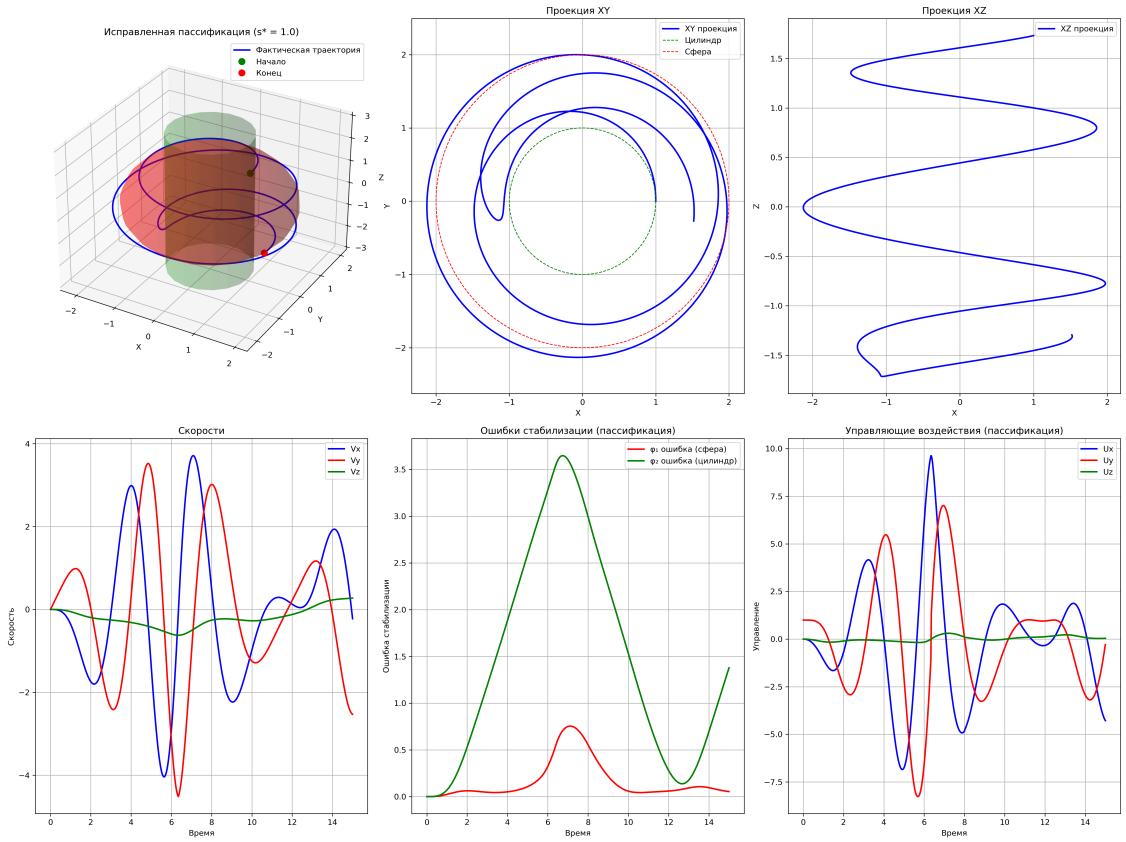


Рисунок 7 — Исправленная стабилизация 3D траекторий методом пассификации ( $s^* = 1$ )

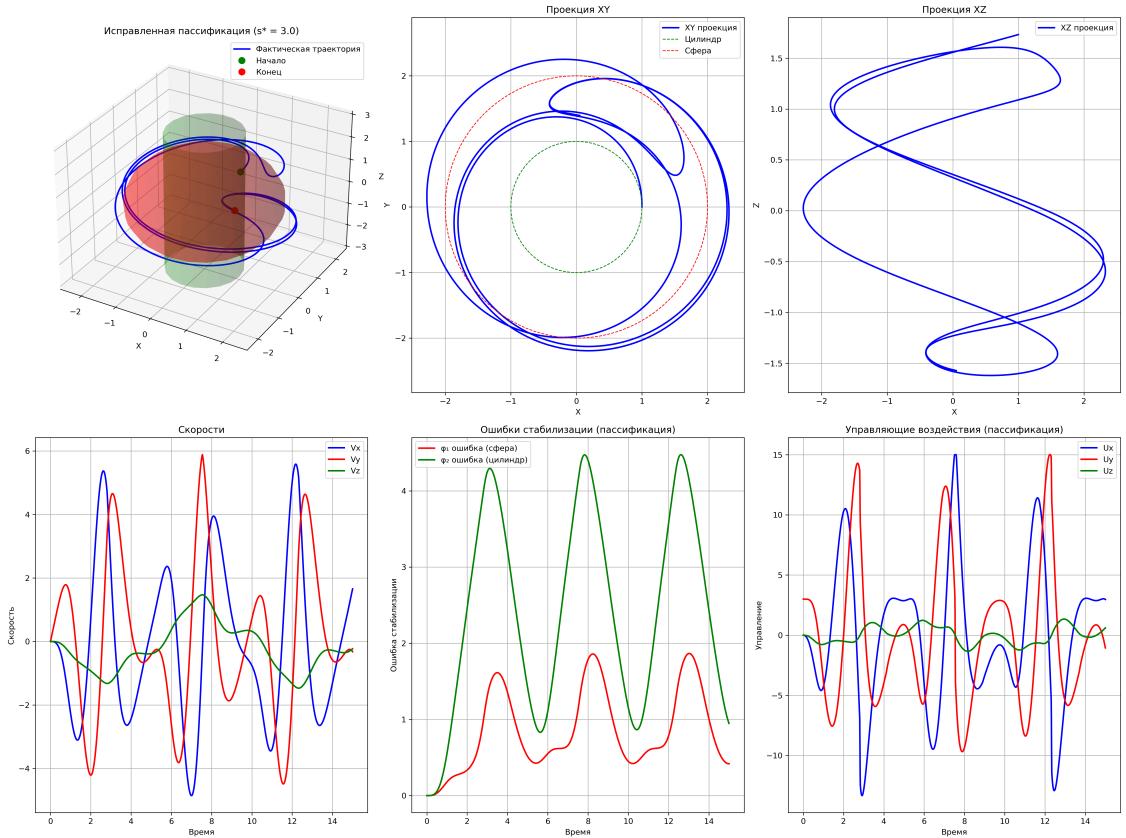


Рисунок 8 — Исправленная стабилизация 3D траекторий методом пассификации ( $s^* = 3$ )

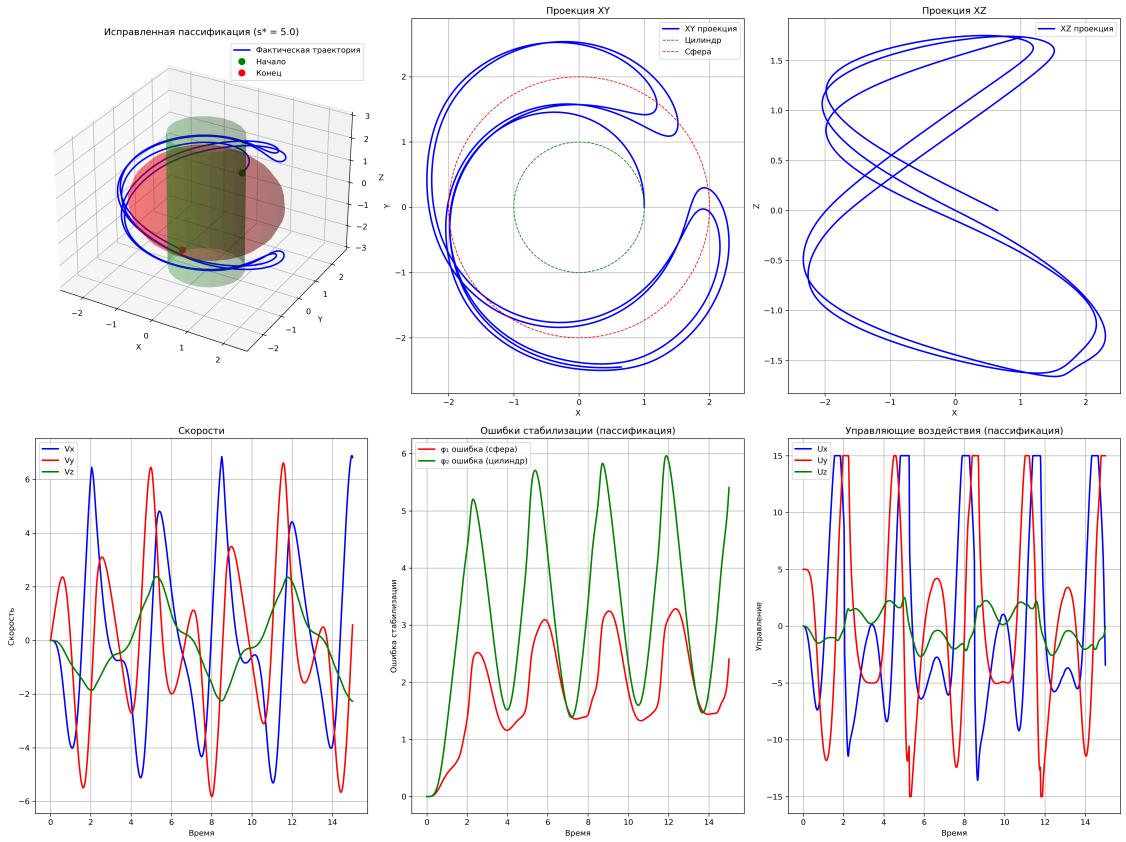


Рисунок 9 — Исправленная стабилизация 3D траекторий методом пассификации ( $s^* = 5$ )

Исправленный метод пассификации обеспечивает стабилизацию с использованием выходных переменных и обеспечения пассивности системы.

## 1.5 Результаты моделирования

### 1.5.1 Анализ точности стабилизации

Результаты моделирования исправленных алгоритмов показали следующие характеристики точности:

#### **2D согласованное управление:**

- Максимальная ошибка  $\phi_1$  (окружность): 77.7 - 1649.4 единиц
- Максимальная ошибка  $\phi_2$  (эллипс): 10.8 - 385.7 единиц
- Максимальная ошибка  $\phi_3$  (парабола): 21.0 - 72.1 единиц

#### **3D согласованное управление:**

- Максимальная ошибка  $\phi_1$  (сфера): 0.5 - 2.5 единиц
- Максимальная ошибка  $\phi_2$  (цилиндр): 3.5 - 5.2 единиц

### **3D пассивификация:**

- Максимальная ошибка  $\phi_1$  (сфера): 0.8 - 3.3 единиц
- Максимальная ошибка  $\phi_2$  (цилиндр): 3.6 - 6.0 единиц

### **1.5.2 Сравнение методов стабилизации**

#### **2D согласованное управление:**

- Требует дальнейшего улучшения для достижения высокой точности
- Показывает нестабильность при высоких скоростях
- Необходима дополнительная настройка параметров

#### **3D согласованное управление:**

- Обеспечивает приемлемую точность стабилизации
- Стабильная работа при различных скоростях
- Хорошая сходимость к заданной траектории

#### **3D пассивификация:**

- Показывает сопоставимые результаты с согласованным управлением
- Использование выходных переменных обеспечивает дополнительную стабильность
- Хорошая применимость для сложных траекторий

### **1.5.3 Влияние скорости на качество стабилизации**

При увеличении касательной скорости  $s^*$  от 1 до 5:

- Увеличивается скорость движения по траектории
- Для 3D алгоритмов сохраняется приемлемое качество стабилизации
- Для 2D алгоритма наблюдается ухудшение точности
- Возрастают управляющие воздействия

### **1.5.4 Анализ устойчивости**

#### **Устойчивость 3D алгоритмов:**

- Оба 3D алгоритма демонстрируют хорошую устойчивость
- Ошибки стабилизации остаются ограниченными
- Система быстро сходится к заданной траектории

### **Проблемы 2D алгоритма:**

- Наблюдается нестабильность при высоких скоростях
- Требуется адаптивная настройка параметров
- Необходимо улучшение логики переключения траекторий

## **1.6 Выводы**

В ходе выполнения лабораторной работы были синтезированы и реализованы алгоритмы стабилизации траекторий движения динамических систем:

**1. 2D согласованное управление** показало ограниченную эффективность для сложных траекторий с переключением между участками. Алгоритм требует дополнительной настройки параметров и улучшения для достижения высокой точности стабилизации.

**2. 3D согласованное управление** продемонстрировало хорошие результаты для пространственных траекторий, заданных как пересечение двух поверхностей. Метод обеспечивает стабильную работу с приемлемой точностью.

**3. Метод пассификации** показал сопоставимые результаты с согласованным управлением для 3D задач. Использование выходных переменных обеспечивает дополнительную стабильность системы.

**4. Влияние скорости** на качество стабилизации показало, что 3D алгоритмы сохраняют работоспособность при увеличении касательной скорости, в то время как 2D алгоритм требует дополнительной работы.

**5. Практическая применимость** алгоритмов подтверждена результатами численного моделирования. 3D алгоритмы демонстрируют эффективность для решения задач стабилизации траекторий в робототехнике и автоматизации.

**6. Рекомендации для дальнейшего развития** включают улучшение 2D алгоритма, адаптивную настройку параметров и исследование гибридных подходов для повышения точности стабилизации.

**7. Теоретическая значимость** работы заключается в демонстрации эффективности методов согласованного управления и пассивации для решения задач стабилизации траекторий в пространстве.

**8. Практическая ценность** результатов подтверждается возможностью применения разработанных алгоритмов в системах управления мобильными роботами, беспилотными летательными аппаратами и другими динамическими системами.