

Данный раздел посвящен моделированию и управлению колесными мобильными роботами. Колесный мобильный робот является колесным транспортным средством, которое способно к автономному движению (без внешнего водителя), потому что оно оборудовано приводами, которые приводятся в действие бортовым компьютером.

Цель этого раздела - дать общее и унифицированное описание проблем моделирования колесных мобильных роботов. В литературе имеются некоторые примеры вывода кинематических и / или динамических моделей для передвижных мобильных роботов для конкретных прототипов мобильных роботов. Здесь принимается более общая точка зрения и рассматривается общий класс колесных мобильных роботов с произвольным числом колес разных типов и конструкций приводов. Цель состоит в том, чтобы указать структурные свойства кинематической и динамической моделей с учетом ограничения подвижности роботов, вызванного ограничениями. Введя понятия степени мобильности и степени управляемости, мы покажем, что, несмотря на множество возможных конструкций роботов и конфигурации колес, набор колесных мобильных роботов можно разделить на пять классов.

Рассматриваются четыре различных типа моделей вход-состояние-выход, которые представляют интерес для понимания поведения мобильных мобильных роботов:

- Кинематическая модель положения представляет собой простейшую модель пространства состояний, способную дать глобальное описание колесных мобильных роботов. Показано, что в каждом из пяти классов эта модель имеет определенную общую структуру, которая позволяет понять свойства маневренности робота. Также анализируется приводимость, управляемость и стабилизируемость этой модели.
- Конфигурационная кинематическая модель позволяет анализировать поведение колесных мобильных роботов в рамках теории неголономных систем.
- Конфигурационная динамическая модель является более общей моделью пространства состояний колесного робота. Она дает полное описание динамики системы, включая обобщенные силы, обеспечиваемые приводами. В частности, рассматривается вопрос о конфигурации исполнительного механизма, и предлагается критерий для проверки достаточности моторизации, чтобы полностью использовать кинематическую подвижность.
- Динамическая модель положения представляет собой обратную связь, эквивалентную конфигурационной динамической модели, и полезно при анализе её приводимости, управляемости и стабилизируемости.

1. ОПИСАНИЕ РОБОТА

Без реальной потери общности и с целью максимального упрощения математических выкладок мы будем предполагать, что изучаемые мобильные роботы состоят из жесткой тележки, снабженной недеформируемыми колесами и движущейся в горизонтальной плоскости. Положение робота в плоскости описывается следующим образом (рис

1). Произвольная инерциальная опорная система координат b фиксируется в плоскости движения, а система координат m прикрепляется к мобильному роботу. Положение ро-

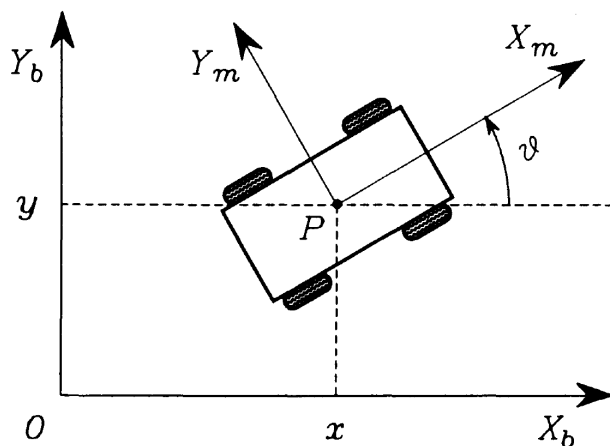


Рис. 1. Координаты положения.

бота может быть описано в терминах двух координат x, y начала P подвижной системы координат и угла ориентации ϑ подвижной системы координат относительно опорной системы координат с началом в точке O . Отсюда, положение робота задается при помощи (3×1) вектора

$$(1) \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

и поворотной матрицы, характеризующей ориентацию опорной системы координат относительно подвижной системы координат вида

$$(2) \quad R(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что во время движения плоскость каждого колеса остается вертикальной, а колесо вращается вокруг своей (горизонтальной) оси, ориентация которой по отношению к тележке может быть фиксированной или переменной. Будем различать два основных класса идеализированных колес, а именно обычные колеса и шведские колеса. В каждом случае предполагается, что контакт между колесом и землей сводится к одной точке плоскости.

Для обычного колеса контакт между колесом и землей должен удовлетворять как условиям чистой прокатки, так и нескользким движением. Это означает, что скорость точки контакта равна нулю и что две компоненты, параллельные плоскости колеса и ортогональные этой плоскости, равны нулю.

Для шведского колеса только одна составляющая скорости точки контакта колеса с землей должна быть равна нулю вдоль движения. Направление этой нулевой компоненты скорости априорно произвольно, но фиксировано относительно ориентации колеса.

Теперь получим в явном виде выражения ограничений для обычных и шведских колес.

1.1. Обычные колёса.

Фиксированные колёса. Центр зафиксированного колеса A является фиксированной точкой на тележке (рис. 2). Положение точки A в подвижной системе координат характеризуется при помощи полярных координат, т.е. расстояния l от точки A до точки P и угла α . Ориентация плоскости колеса относительно l описывается постоянным углом β . Угол поворота колеса вокруг своей (горизонтальной) оси обозначен как φ , а радиус колеса обозначен как r . Положение колеса, таким образом, характеризуется четырьмя константами

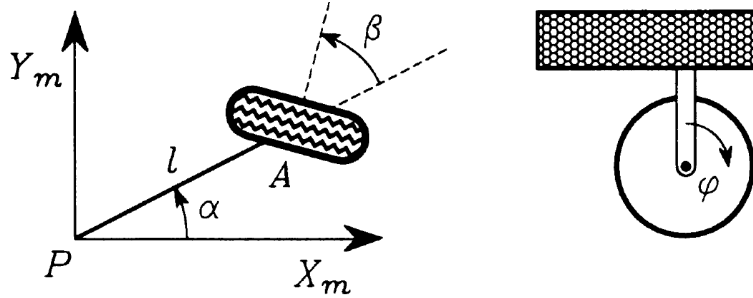


Рис. 2. Зафиксированное или рулевое колесо.

α , β , l , r , а его движение - переменным углом $\varphi(t)$. При таком описании компоненты скорости точки контакта колеса легко рассчитывается и могут быть выведены следующие два ограничения:

- в плоскости колеса

$$(3) \quad [-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l\cos\beta] R(\vartheta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0,$$

- ортогональное плоскости колеса

$$(4) \quad [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin\beta] R(\vartheta)\dot{\xi} = 0.$$

Рулевые колёса. Рулевое колесо таково, что движение плоскости колеса относительно тележки - это поворот вокруг вертикальной оси, проходящей через центр колеса (рис. 2). Описание такое же, как и для неподвижного колеса, за исключением того, что теперь угол β не является постоянным, а изменяется с течением времени. Положение колеса характеризуется тремя константами: l , α , r , а его движение относительно тележки - двумя переменными углами $\beta(t)$ и $\varphi(t)$. Ограничения имеют тот же вид, что и выше, т.е.

$$(5) \quad [-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l\cos\beta] R(\vartheta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0,$$

$$(6) \quad [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l\sin\beta] R(\vartheta)\dot{\xi} = 0.$$

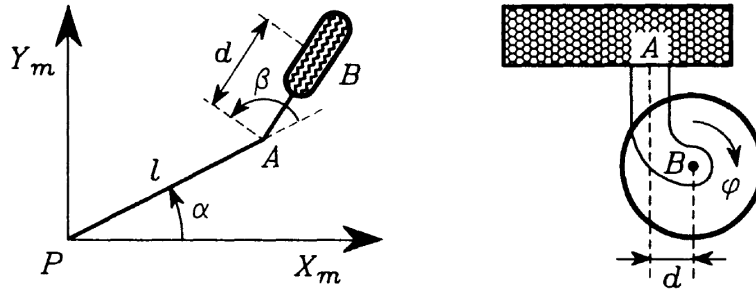


Рис. 3. Направляющее колесо.

Направляющие колёса. Направляющее колесо - это колесо, которое может менять ориентацию относительно тележки, но вращение плоскости колеса происходит вокруг вертикальной оси, которая не проходит через центр колеса (рис. 3). В этом случае описание конфигурации колеса требует больше параметров. Центр колеса обозначен B и соединён с тележкой твёрдым стержнем от точки A к точке B постоянной длины d , который может вращаться вокруг фиксированной вертикальной оси, проходящей через точку A . Сама точка A зафиксирована на тележке, её положение характеризуется двумя полярными координатами l и α . Вращение стержня по отношению к тележке представлено углом β и плоскость колеса выровнена с d .

Положение колеса описывается четырьмя константами α , l , r , d , а его движение - двумя переменными углами $\beta(t)$ и $\varphi(t)$. При таких обозначениях ограничения имеют следующий вид:

$$(7) \quad [-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R(\vartheta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0,$$

$$(8) \quad [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin \beta] R(\vartheta) \dot{\xi} + d \dot{\beta} = 0.$$

Шведские колёса. Положение шведского колеса относительно тележки описывается, как и в случае фиксированного колеса, тремя постоянными параметрами α , β , l . Дополнительный параметр, необходимый чтобы охарактеризовать направление нулевого компонента скорости точки контакта относительно плоскости колеса, представлен углом γ (рис. 4). Выражение для ограничений на движение имеет следующий вид:

$$(9) \quad [-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)] R(\vartheta) \dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0.$$

2. ОГРАНИЧЕНИЯ НА МОБИЛЬНОСТЬ РОБОТА

Рассмотрим теперь обобщённого мобильного робота, оснащённого N колёсами четырёх описанных выше классов. Будем использовать следующие 4 индекса для определения количественных соотношений этих 4 классов: f для фиксированных колёс, s для рулевых колёс, c для направляющих колёс и sw для шведских колёс. Количество колёс каждого типа обозначим N_f , N_s , N_c , N_{sw} , тогда общее число колёс $N = N_f + N_s + N_c + N_{sw}$.

Конфигурация робота полностью описывается следующими векторами координат:

- координаты положения $\xi(t) = [x(t) \quad y(t) \quad \vartheta(t)]^T$, характеризующие положение на плоскости;

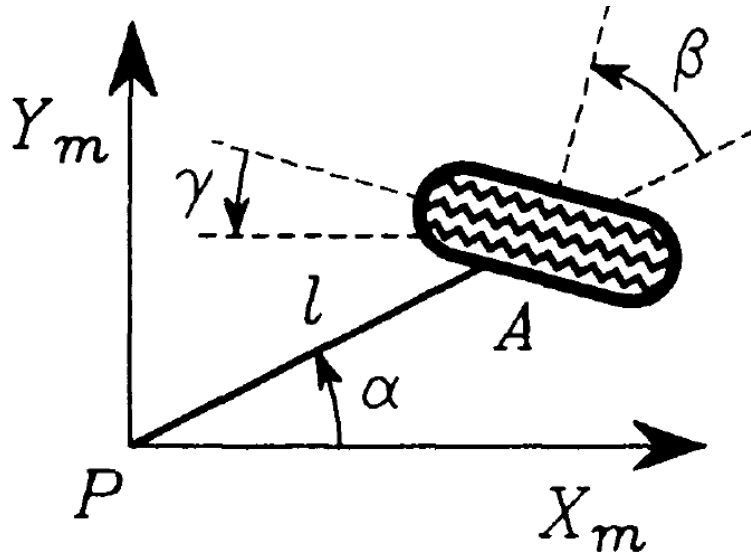


Рис. 4. Шведское колесо.

- ориентационные координаты $\beta(t) = [\beta_s^T(t) \ \beta_c^T(t)]^T$, характеризующие ориентацию рулевых и направляющих колёс соответственно;
- вращательные координаты $\varphi(t) = [\varphi_f(t) \ \varphi_s(t) \ \varphi_c(t) \ \varphi_{sw}(t)]^T$, характеризующие вращение колёс вокруг своих горизонтальных осей.

Полный набор координат положения, ориентационных и вращательных координат ξ , β_s , β_c , φ в дальнейшем будем называть конфигурационными координатами. Очевидно, что общее число конфигурационных координат равно $N_f + 2N_s + 2N_c + N_{sw} + 3$.

При данных обозначениях ограничения могут быть записаны в общем матричном виде

$$(10) \quad J_1(\beta_s, \beta_c)R(\vartheta)\dot{\xi} + J_2\dot{\varphi} = 0,$$

$$(11) \quad C_1(\beta_s, \beta_c)R(\vartheta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_c = 0.$$

В выражении (10) матрица $J_1(\beta_s, \beta_c)$ имеет вид

$$J_1(\beta_s, \beta_c) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta_s) \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1sw} \end{bmatrix},$$

где J_{1f} , J_{1s} , J_{1c} и J_{1sw} - матрицы размерности $(N_f \times 3)$, $(N_s \times 3)$, $(N_c \times 3)$ и $(N_{sw} \times 3)$ соответственно, форма которых выводится напрямую из ограничений (3), (5), (7) и (9) соответственно. В частности, J_{1f} и J_{1sw} - константы, в то время как J_{1s} и J_{1c} зависят от времени через $\beta_s(t)$ и $\beta_c(t)$ соответственно. Далее, J_2 - постоянная матрица размерности $(N \times N)$, диагональными элементами которой являются радиусы колёс, за исключением радиусов шведских колёс, которые домножаются на $\cos\gamma$.

В выражении (11) матрицы $C_1(\beta_s, \beta_c)$ и C_2 имеют вид

$$C_1(\beta_s, \beta_c) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2c} \end{bmatrix},$$

где C_{1f} , C_{1s} и C_{1c} - матрицы размерности $(N_f \times 3)$, $(N_s \times 3)$ и $(N_c \times 3)$ соответственно, форма которых выводится напрямую из ограничений (4), (6 и (8) соответственно. В частности, C_{1f} - константа, в то время как C_{1s} и C_{1c} зависят от времени. Далее, C_{2c} - диагональная матрица, диагональные элементы которой равны $d \sin \gamma$ для N_c направляющих колёс.

Введём следующее допущение о конфигурации шведских колёс.

Assumption 1. Для каждого шведского колеса выполняется $\gamma \neq \pi/2$.

Значение $\gamma = \pi/2$ соответствует направлению нулевого компонента скорости, перпендикулярному к плоскости колеса. На такое колесо накладываются ограничения, аналогичные нескользящему ограничению для обычных колёс, следовательно, теряется преимущество при применении шведских колёс.

Рассмотрим теперь первые $(N_f + N_s)$ нескользящих ограничений из (11) в явном виде:

$$(12) \quad C_{1f} R(\vartheta) \dot{\xi} = 0,$$

$$(13) \quad C_{1s}(\beta_s) R(\vartheta) \dot{\xi} = 0.$$

Эти ограничения требуют, чтобы вектор $R(\vartheta) \dot{\xi} \in \mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))$, где

$$(14) \quad C_1^*(\beta_s) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $\text{rank}(C_1^*(\beta_s)) \leq 3$. Если $\text{rank}(C_1^*(\beta_s)) = 3$, то $R(\vartheta) \dot{\xi} = 0$ и любое движение на плоскости невозможно. Обобщая, ограничения на мобильность робота связаны с рангом матрицы C_1^* . Этот вопрос будет подробно рассмотрен ниже.

Но прежде стоит заметить, что условия (12) и (13) имеют интересную геометрическую интерпретацию. В каждый момент времени движение робота можно рассматривать как мгновенное вращение вокруг мгновенного центра вращения (МЦВ), положение которого относительно тележки может изменяться во времени. Следовательно, в каждый момент времени вектор скорости любой точки тележки ортогонален прямой линии, соединяющей эту точку и МЦВ. В частности, это относится к центрам фиксированных и рулевых колёс. Это означает, что в каждый момент времени горизонтальные оси вращения всех неподвижных и рулевых колёс пересекаются в ICR. Этот факт иллюстрируется на рис. 7.5 и эквивалентен условию $\text{rank}(C_1^*(\beta_s)) \leq 2$. Очевидно, что ранг матрицы $C_1^*(\beta_s)$ зависит от конструкции мобильного робота. Определим степень мобильности δ_m мобильного робота как

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = 3 - \text{rank}(C_1^*(\beta_s)).$$

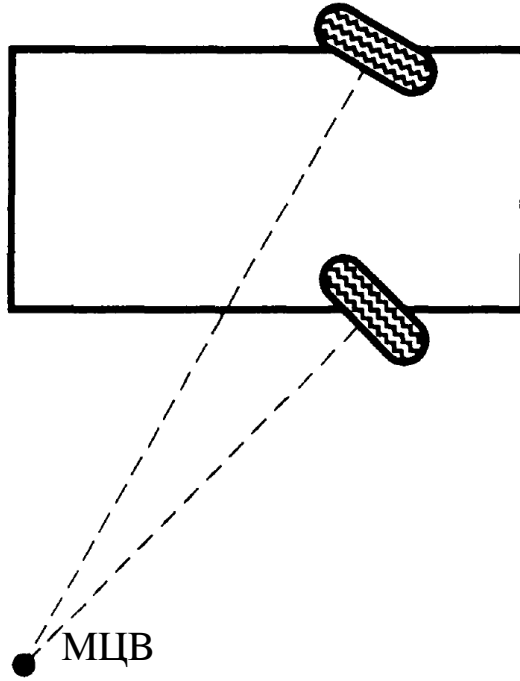


Рис. 5. Мгновенный центр вращения.

Изучим случай, когда $rank(C_{1f}) = 2$, что предполагает, что робот оснащён как минимум 2 фиксированными колёсами и, если их больше 2, то их оси пересекаются в МЦВ, положение которого относительно тележки фиксировано. В таком случае ясно, что единственное возможное движение - это вращение робота вокруг фиксированного МЦВ. Очевидно, что такое ограничение на практике неприемлемо, а значит, мы предполагаем, что $rank(C_{1f}) \leq 1$. Более того, предположим, что структура робота невырождена в следующем смысле.

Assumption 2. *Мобильный робот является невырожденным, если*

$$rank(C_{1f}) \leq 1 \quad rank(C_1^*(\beta_s)) = rank(C_{1f}) + rank(C_{1s}(\beta_s)) \leq 2.$$

Это предположение эквивалентно следующим условиям.

- Если робот оснащён более чем одним фиксированным колесом ($N_f > 1$), тогда все они расположены на одной общей оси.
- Центры рулевых колёс не лежат на общей оси фиксированных колёс.
- Число $rank(C_1^*(\beta_s)) \leq 2$ - это число рулевых колёс, которые могут быть ориентированы независимо с целью направить робота. Назовём это число степерью управляемости

$$\delta_s = rank(C_1^*(\beta_s)).$$

Число рулевых колёс N_s и их тип, очевидно, определяются разработчиком робота. Если мобильный робот оснащён более чем δ_s рулевыми колёсами ($N_s > \delta_s$), движение дополнительных колёс должно быть скоординировано, чтобы гарантировать наличие МЦВ в каждый момент времени.

ТАБЛИЦА 1. Степени мобильности и управляемости для реализуемых колёсных мобильных роботов.

δ_m	3	2	2	1	1
δ_s	0	0	1	1	2

Следовательно, только пять неособых структур представляют практический интерес, что вытекает из следующих условий.

- Степень мобильности δ_m удовлетворяет неравенству

$$(15) \quad 1 \leq \delta_m \leq 3.$$

Верхняя граница очевидна, в то время как нижняя граница означает, что рассматриваются только случаи, когда движение возможно, т.е. $\delta_m \neq 0$.

- Степень управляемости δ_s удовлетворяет неравенству

$$(16) \quad 0 \leq \delta_s \leq 2.$$

Верхняя граница может быть достигнута только для роботов, не имеющих фиксированных колёс ($N_f = 0$), в то время как нижняя граница соответствует роботам без рулевых колёс ($N_s = 0$).

- Выполняется следующее неравенство:

$$(17) \quad 2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3.$$

Случай $\delta_m + \delta_s = 1$ неприемлем, так как соответствует вращению робота вокруг фиксированного МЦВ, как было показано выше. Случаи $\delta_m \geq 2$ и $\delta_s = 2$ исключены, потому что, в соответствии с предположением 2, $\delta_s = 2$ предполагает $\delta_m = 1$.

Таким образом, существует только пять типов колёсных мобильных роботов, соответствующих пяти первым значениям δ_m и δ_s , которые удовлетворяют неравенствам (15), (16) и (17), в соответствии с таблицей 1.

В дальнейшем каждый тип структуры будет обозначаться с использованием наименования вида "робот типа δ_m, δ_s ". Ниже кратко представлены основные конструктивные характеристики для каждого типа мобильного робота.

Робот типа (3,0). В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = 3 \quad \delta_s = 0.$$

Такие роботы не имеют фиксированных ($N_f = 0$) и рулевых колёс ($N_s = 0$). Они оснащены только направляющими и/или шведскими колёсами. Такие роботы называются

омнидирекционными, потому что они обладают полной мобильностью на плоскости, что означает, что они могут двигаться в каждый момент времени в любом направлении без переориентации. Напротив, остальные четыре типа роботов обладают ограниченной мобильностью (степень мобильности меньше, чем 3).

Робот типа (2,0). В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = \dim(\mathcal{N}(C_{1f})) = 2 \quad \delta_s = 0.$$

Такие роботы не имеют рулевых колёс ($N_s = 0$). Они оснащены одним или несколькими фиксированными колёсами, расположенными на одной общей оси, иначе $\text{rank}(C_{1f})$ будет больше 1. Мобильность робота ограничена в том смысле, что для любой допустимой траектории $\xi(t)$ скорость $\dot{\xi}(t)$ ограничена принадлежностью к двумерному распределению, натянутому на векторные поля $R^T(\vartheta)s_1$ и $R^T(\vartheta)s_2$, где s_1 и s_2 - два постоянных вектора, охватывающих $\mathcal{N}(C_{1f})$.

Робот типа (2,1). В этом случае

$$\delta_m = \dim(C_1^*(\beta_s)) = \dim(\mathcal{N}(C_{1s}(\beta_s))) = 2 \quad \delta_s = 1.$$

Такие роботы не имеют фиксированных колёс ($N_f = 0$) и оснащены как минимум одним рулевым колесом ($N_s \geq 1$). Если имеется более одного рулевого колеса, их ориентация должна быть скоординирована так, чтобы $\text{rank}(C_{1s}^*(\beta_s)) = \delta_s = 1$. Скорость $\dot{\xi}(t)$ ограничена принадлежностью к двумерному распределению, натянутому на векторные поля $R^T(\vartheta)s_1(\beta_s)$ и $R^T(\vartheta)s_2(\beta_s)$, где $s_1(\beta_s)$ и $s_2(\beta_s)$ - два вектора, охватывающих $\mathcal{N}(C_{1f})$ и параметризованных углом β_s одного произвольно выбранного рулевого колеса.

Робот типа (1,1). В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = 1 \quad \delta_s = 1.$$

Такие роботы оснащены одним или несколькими фиксированными колёсами, расположенными на одной общей оси, а также одним или несколькими рулевыми колёсами с условием, что центр одного из них не лежит на оси фиксированных колёс - иначе, согласно допущению 2, структура станет особой - и что их ориентация скоординирована так, чтобы $\text{rank}(C_{1s}^*(\beta_s)) = \delta_s = 1$. Скорость $\dot{\xi}(t)$ ограничена принадлежностью к одномерному распределению, параметризованному углом ориентации одного произвольно выбранного рулевого колеса. Мобильные роботы, сконструированные на основе модели обычного автомобиля (часто называемые автомобилеподобными роботами) относятся к данному классу.

Робот типа (1,2). В этом случае

$$\delta_m = \dim(\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))) = \dim \mathcal{N}(C_{1s}(\beta_s)) = 1 \quad \delta_s = 2.$$

Такие роботы не имеют фиксированных колёс ($N_f = 0$) и оснащены как минимум двумя рулевыми колесами ($N_s \geq 2$). Если имеется более двух рулевых колёс, их ориентация

должна быть скоординирована так, чтобы $\text{rank}(C_{1s}^*(\beta_s)) = \delta_s = 2$. Скорость $\dot{\xi}(t)$ ограничена принадлежностью к одномерному распределению, параметризованному углами ориентации двух произвольно выбранных рулевых колёс.

Чтобы избежать бесполезных нотационных осложнений, с этого момента мы будем предполагать, что степень управляемости точно равна числу рулевых колес, т.е.

$$\delta_s = N_s.$$

Это, безусловно, большое ограничение с точки зрения проектирования робота. Однако для математического анализа поведения мобильных роботов в этом предположении нет потери общности, зато это значительно упрощает технический вывод. Действительно, для роботов, имеющих избыток рулевых колес ($\delta_s < N_s$), всегда можно с помощью соответствующих (но, возможно, утомительных) манипуляций свести ограничения (13) до минимального подмножества δ_s независимых ограничений, соответствующих δ_s колесам, которые были выбраны в качестве главных рулевых колес робота (см. комментарий после допущения 2) и игнорировать другие рулевые колеса при анализе.

3. ТРЁХКОЛЁСНЫЕ РОБОТЫ

В этом разделе представлены шесть практических примеров мобильных роботов, иллюстрирующие пять типов компоновки, представленных выше. Мы сосредоточим своё внимание на мобильных роботах с тремя колёсами.

Как было показано в разделе 1, колёса мобильного робота описываются, по крайней мере, шестью характеристическими константами, а именно тремя углами α, β, γ и тремя длинами l, r, d . Для каждого примера последовательно приведём таблицу с численными значениями этих характеристических констант и представления различных матриц J и C , входящих в математические выражения ограничений (10) и (11). Однако, мы предположим, что радиусы r и расстояния d одинаковы для всех колёс во всех примерах. Следовательно, будем определять только параметры α, β, γ, l .

3.1. Робот типа (3, 0) со шведскими колёсами. Робот оснащён тремя шведскими колёсами, расположенными на вершинах треугольной тележки (см. рис. 6). Характери-

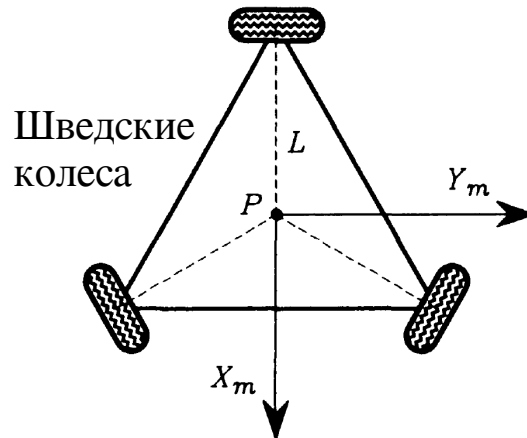


Рис. 6. Мобильный робот типа (3,0) со шведскими колёсами.

ТАБЛИЦА 2. Характеристические константы мобильного робота типа (3,0) со шведскими колёсами.

Колёса	α	β	γ	l
1_{sw}	$\pi/3$	0	0	L
2_{sw}	π	0	0	L
3_{sw}	$5\pi/3$	0	0	L

стические константы представлены в таблице 2. Ограничения имеют вид (10), где

$$J_1 = J_{1sw} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 & L \\ 0 & -1 & L \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & L \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}.$$

3.2. Робот типа (3, 0) с направляющими колёсами. Робот оснащён тремя направляющими колёсами (см. рис. 7). Характеристические константы представлены в таблице

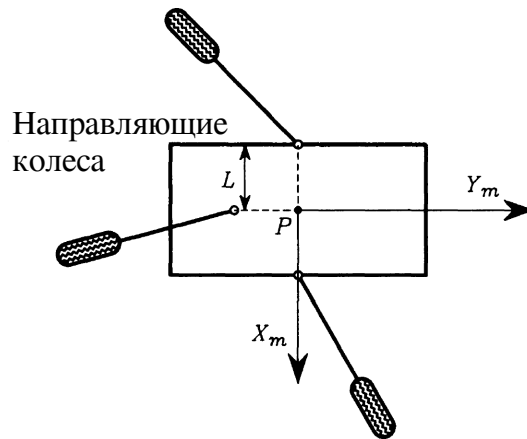


РИС. 7. Мобильный робот типа (3,0) со направляющими колёсами.

3. Ограничения имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = J_c(\beta_c) = \begin{bmatrix} -\sin\beta_{c1} & \cos\beta_{c1} & L\cos\beta_{c1} \\ \sin\beta_{c2} & -\cos\beta_{c2} & L\cos\beta_{c2} \\ \cos\beta_{c3} & \sin\beta_{c3} & L\cos\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix},$$

ТАБЛИЦА 3. Характеристические константы мобильного робота типа (3,0) с направляющими колёсами.

Колёса	α	β	l
1_c	0	-	L
2_c	π	-	L
3_c	$3\pi/2$	-	L

ТАБЛИЦА 4. Характеристические константы мобильного робота типа (2,0).

Колёса	α	β	l
1_f	0	0	L
2_f	π	0	L
3_c	$3\pi/2$	-	L

$$C_1 = C_{1c}(\beta_c) = \begin{bmatrix} \cos\beta_{c1} & \sin\beta_{c1} & d + L\sin\beta_{c1} \\ -\cos\beta_{c2} & -\sin\beta_{c2} & d + L\sin\beta_{c2} \\ \sin\beta_{c3} & -\cos\beta_{c3} & d + L\sin\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = C_{2c} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

3.3. Робот типа (2, 0). Робот оснащён двумя фиксированными колёсами, расположенными на одной оси, и одним направляющим колесом (см. рис. 8), и его обычно называют одноколёсным роботом. Характеристические константы представлены в таблице 4. Огра-

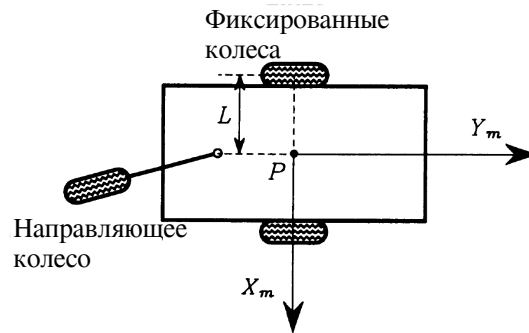


РИС. 8. Мобильный робот типа (2,0).

ничения имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_{c3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos\beta_{c3} & \sin\beta_{c3} & L\cos\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

ТАБЛИЦА 5. Характеристические константы мобильного робота типа (2,1).

Колёса	α	β	l
1_s	0	-	0
2_c	$\pi/2$	-	$L\sqrt{2}$
3_c	π	-	$L\sqrt{2}$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta c3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_{c3} & -\cos\beta_{c3} & d + L\sin\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2c}(\beta c3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}.$$

3.4. **Робот типа (2, 1).** Робот оснащён одним рулевым и двумя направляющими колёсами (см. рис. 9). Характеристические константы представлены в таблице 5.

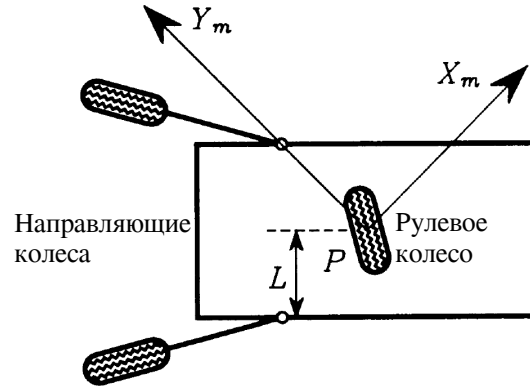


РИС. 9. Мобильный робот типа (2,1).

Ограничения имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1s}(\beta_{s1}) \\ J_{1c}(\beta_{c2}, \beta_{c3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\beta_{s1} & \cos\beta_{s1} & 0 \\ -\cos\beta_{c2} & -\sin\beta_{c2} & \sqrt{2}L\cos\beta_{c2} \\ \sin\beta_{c3} & \cos\beta_{c3} & \sqrt{2}L\cos\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix},$$

ТАБЛИЦА 6. Характеристические константы мобильного робота типа (1,1).

Колёса	α	β	l
1_f	0	0	L
2_f	π	0	L
3_s	$3\pi/2$	-	L

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1s}(\beta_{s1}) \\ C_{1c}(\beta_{c2}, \beta_{c3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_{s1} & \sin\beta_{s1} & 0 \\ -\sin\beta_{c2} & \cos\beta_{c2} & d + \sqrt{2}L\sin\beta_{c2} \\ -\cos\beta_{c3} & -\sin\beta_{c3} & d + \sqrt{2}L\sin\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2c}(\beta_{c3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

3.5. Робот типа (1, 1). Робот оснащён двумя фиксированными колёсами, расположенными на одной оси, и одним рулевым колесом (см. рис. 10). Характеристические кон-

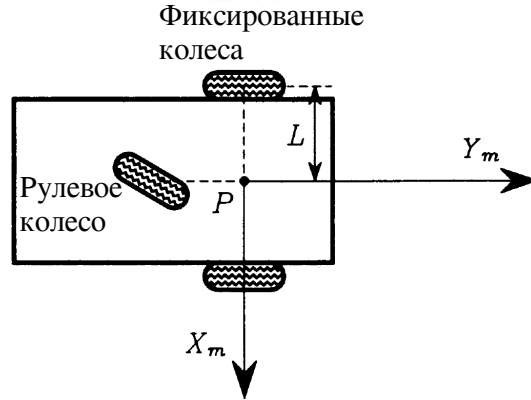


РИС. 10. Мобильный робот типа (1,1).

станты представлены в таблице 6.

Ограничения имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta_{s3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos\beta_{s3} & \sin\beta_{s3} & L\cos\beta_{s3} \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_{s3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_{s3} & -\cos\beta_{s3} & L\sin\beta_{s3} \end{bmatrix},$$

ТАБЛИЦА 7. Характеристические константы мобильного робота типа (1,2).

Колёса	α	β	l
1_s	0	-	L
2_s	π	-	L
3_c	$3\pi/2$	-	L

$$C_2 = 0.$$

3.6. **Робот типа (1, 2).** Робот оснащён двумя двумя рулевыми и одним направляющим колёсами (см. рис. 11). Характеристические константы представлены в таблице 7.

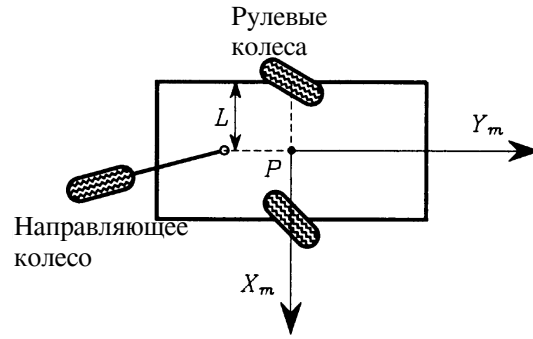


РИС. 11. Мобильный робот типа (1,2).

Ограничения имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1s}(\beta_{s1}, \beta_{s2}) \\ J_{1c}(\beta_{c3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\beta_{s1} & \cos\beta_{s1} & L\cos\beta_{s1} \\ \sin\beta_{s1} & -\cos\beta_{s2} & L\cos\beta_{s2} \\ \cos\beta_{c3} & \sin\beta_{c3} & L\cos\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{1s}(\beta_{s1}, \beta_{s2}) \\ C_{1c}(\beta_{c3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_{s1} & \sin\beta_{s1} & L\sin\beta_{s1} \\ -\cos\beta_{s2} & -\sin\beta_{s2} & L\sin\beta_{s2} \\ \sin\beta_{c3} & -\cos\beta_{c3} & d + L\sin\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2c}(\beta_{c3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}.$$

4. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛОЖЕНИЯ

В данном разделе анализ мобильности, как описано в разделе 2, переформулируется в терминах пространства состояний, что будет полезно для дальнейших рассуждений.

Выше было показано, что, вне зависимости от типа мобильного робота, скорость $\dot{\xi}(t)$ ограничена принадлежностью к распределению Δ_c , определяемому как

$$\dot{\xi}(t) \in \Delta_c = \text{span}\{\text{col}(R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s))\} \forall t,$$

где столбцы матрицы $\Sigma(\beta_s)$ формируют базис $\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s))$, т.е.

$$\mathcal{N}(C_1^*(\beta_s)) = \text{span}\{\text{col}(R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s))\}.$$

Это эквивалентно следующей формулировке: для любых t существует переменный вектор $\eta(t)$ такой, что

$$(18) \quad \dot{\xi} = R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s)\eta.$$

Размерность распределения Δ_c и, следовательно, вектора $\eta(t)$ - это степерь мобильности δ_m мобильного робота. Очевидно, что в случае, когда робот не имеет рулевых колёс ($\delta_s = 0$), матрица Σ является постоянной и выражение (18) сводится к

$$(19) \quad \dot{\xi} = R^T(\vartheta)\Sigma\eta.$$

В противном случае ($\delta_s \geq 1$), матрица Σ явно зависит от ориентационных координат β_s и выражение (18) может быть дополнено следующим образом:

$$(20) \quad \dot{\xi} = R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s)\eta,$$

$$(21) \quad \dot{\beta}_s = \zeta.$$

Представление (19) (или (20) и (21)) можно рассматривать как представление пространства состояний системы, называемое кинематической моделью положения, с координатами положения ξ и (возможно) координатами ориентации β_s в качестве переменных состояния, в то время как η и ζ - которые соответствуют скоростям - могут быть интерпретированы как управляющие входы, входящие в модель линейно. Тем не менее, эта интерпретация должна приниматься с некоторой осторожностью, поскольку истинными физическими управляющими входами мобильного робота являются крутящие моменты, обеспечиваемые приводами, а кинематическая модель пространства состояний на самом деле является только подсистемой общей динамической модели, которая будет рассмотрена ниже.

4.1. Общие модели колёсных мобильных роботов. В разделе 2 мы ввели классификацию всех невырожденных колесных мобильных роботов в соответствии со значениями степени мобильности δ_m и степенью управляемости δ_s . Легко определить, к какому классу принадлежит конкретный мобильный робот, просто проверяя количество и конфигурацию фиксированных и рулевых колес. Различные примеры были приведены выше. В этом разделе мы хотим подчеркнуть, что для любого конкретного колёсного мобильного робота, независимо от его конструктивных особенностей, всегда можно выбрать

начало и ориентацию подвижной системы координат (см. рисунок 1), так что кинематическая модель положения робота принимает общую форму, которая уникальна для каждого класса и полностью определяется двумя характеристическими числами δ_m и δ_s . Другими словами, все роботы определённого типа могут быть описаны одной и той же кинематической моделью положения. Ниже представлены пять общих кинематических моделей положения.

Робот типа (3,0). Точка P и оси X_m и Y_m могут быть выбраны произвольно. Матрица Σ всегда может быть выбрана как 3×3 единичная матрица. Кинематическая модель положения сводится к

$$(22) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix},$$

где η_1 и η_2 - компоненты скорости мобильного робота вдоль осей X_m и Y_m соответственно, а η_3 - угловая скорость мобильного робота.

Робот типа (2,0). Точка P может быть выбрана произвольным образом на оси фиксированных колёс, в то время как ось X_m сонаправлена этой оси (см. рисунок 8). Матрица Σ выбирается как

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (19) сводится к

$$(23) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

где η_1 - компонента скорости мобильного робота вдоль оси Y_m , а η_2 - угловая скорость мобильного робота.

Робот типа (2,1). Точка P является центром рулевого колеса мобильного робота. Ориентация подвижной системы координат может быть выбрана произвольно; обратимся к выбору на рисунке 9. Матрица $\Sigma(\beta_s)$ выбирается как

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -\sin\beta_{s1} & 0 \\ \cos\beta_{s1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (20) и (21) сводится к

$$(24) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\vartheta + \beta_{s2}) & 0 \\ \cos(\vartheta + \beta_{s1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix},$$

$$(25) \quad \dot{\beta}_{s3} = \zeta_1.$$

где η_1 - компонента скорости мобильного робота вдоль оси Y_m , а η_2 - угловая скорость мобильного робота.

Робот типа (1,1). Точка P должна быть расположена на оси фиксированных колёс на пересечении с нормалью, проходящей через центр рулевого колеса; ось X_m сонаправлена этой нормали (см. рисунок 10. Матрица $\Sigma(\beta_s)$ выбирается как

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ L \sin \beta_{s3} \\ \cos \beta_{s3} \end{bmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (20) и (21) сводится к

$$(26) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} \\ L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} \\ \cos \beta_{s3} \end{bmatrix} \eta_1,$$

$$(27) \quad \dot{\beta}_{s3} = \zeta_1.$$

Робот типа (1,2). Точка P расположена в середине отрезка, соединяющего центры рулевых колёс; Ось X_m сонаправлена с этим отрезком (см. рисунок 11. Матрица $\Sigma(\beta_s)$ выбирается как

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -2L \sin \beta_{s1} \sin \beta_{s2} \\ L \sin(\beta_{s1} + \beta_{s2}) \\ c \sin(\beta_{s2} - \beta_{s1}) \end{bmatrix}.$$

Кинематическая модель положения (20) и (21) сводится к

$$(28) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L(\sin \beta_{s1} \sin(\vartheta + \beta_{s2}) + \sin \beta_{s2} \sin(\vartheta + \beta_{s1})) \\ L(\sin \beta_{s1} \sin(\vartheta + \beta_{s2}) + \sin \beta_{s2} \sin(\vartheta + \beta_{s1})) \\ \sin(\beta_{s2} - \beta_{s1}) \end{bmatrix} \eta_1,$$

$$(29) \quad \dot{\beta}_{s1} = \zeta_1.$$

$$(30) \quad \dot{\beta}_{s2} = \zeta_2.$$

4.2. Мобильность, управляемость и маневренность. С этого момента удобно переписать кинематическую модель положения мобильного робота в компактной форме:

$$(31) \quad \dot{z} = B(z)u,$$

где либо (при $\delta_s = 0$)

$$z = \xi \quad B(z)R^T(\vartheta)\Sigma \quad u = \eta,$$

либо (при $\delta_s > 0$)

$$z = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_s \end{bmatrix} \quad B(z) = \begin{bmatrix} R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

Эта кинематическая модель позволяет нам далее обсудить маневренность колесных мобильных роботов. Степень мобильности δ_m является первым показателем маневренности. Он равен числу степеней свободы, которые можно напрямую манипулировать с входов η , без переориентации рулевых колес. Интуитивно это соответствует тому, сколько "степеней свободы" мобильный робот мог мгновенно получить из своей текущей конфигурации, не управляя никакими его колесами. Это число δ_m не равно общему числу степеней свободы мобильного робота, которыми можно манипулировать с входов η и ζ . На самом деле это число равно сумме $\delta_M = \delta_m + \delta_s$, которую мы могли бы назвать степенью маневренности. Он включает в себя δ_s дополнительных степеней свободы, доступных из входов ζ . Но действие ζ на координаты ξ косвенно, поскольку оно достигается только через координаты β_s . Это отражает тот факт, что изменение ориентации рулевого колеса не может быть достигнуто мгновенно.

Маневренность колесного мобильного робота зависит не только от δ_M , но и от того, как эти δ_M степеней свободы распределены на δ_m и δ_s . Поэтому для характеристики маневренности необходимы два индекса: δ_M и δ_m или, что то же самое, δ_m и δ_s , которые являются двумя индексами, идентифицирующими тип мобильного робота, как показано выше.

Два робота с одинаковым значением δ_M , но разные δ_m , не эквивалентны. Для роботов с $\delta_M = 3$ можно свободно назначать положение МЦВ непосредственно из η для мобильных роботов типа (3,0) или по ориентации одного либо двух рулевых колёс для мобильных роботов типов (2,1) и (1,2). Для роботов с $\delta_M = 2$ МЦВ ограничивается принадлежностью к прямой линии (оси фиксированного колеса). Его положение на этой линии назначается либо непосредственно для мобильных роботов типа (2,0), либо путем ориентации рулевого колеса для мобильных роботов типа (1,1).

Аналогично, два колёсных мобильных робота с одинаковым значением δ_m , но разными значениями δ_M , не эквивалентны; мобильный робот с большим значением δ_M является более маневренным. Сравним, к примеру, мобильного робота типа (1,1) и мобильного робота типа (1,2) с $\delta_m = 1$ и, соответственно, $\delta_M = 2$ и $\delta_M = 3$. Положение МЦВ для мобильного робота типа (1,2) может быть свободно выбран на плоскости просто при помощи ориентации двух рулевых колёс, в то время как для мобильного робота типа (1,1) МЦВ ограничен принадлежностью к оси фиксированных колёс, а его положение на этой оси определяется ориентацией рулевого колеса. Поскольку угол поворота рулевых колёс обычно может изменяться очень быстро, особенно для небольших мобильных роботов, то, с практической точки зрения, мобильный робот типа (1,2) более маневренный, чем мобильный робот типа (1,1).

Очевидно, что идеальным в этом плане является омнидирекционный (всенаправленный) мобильный робот, у которого $\delta_m = \delta_M = 3$.

4.3. **Неприводимость.** В данном разделе обратимся к вопросу неприводимости кинематической модели пространства состояний (31). Модель пространства состояний приводима, если существует такое преобразование координат, что некоторые из новых координат тождественно равны нулю вдоль движения системы. Для нелинейных динамических систем без смещения как (31) приводимость зависит от инволютивной окрестности $\bar{\Delta}$ распределения Δ , выражающегося в локальных координатах как

$$\Delta(z) = \text{span}\{\text{col}(B(z))\}.$$

Известное следствие теоремы Фробениуса гласит, что система приводима только если $\dim(\bar{\Delta}) < \dim(z)$.

Ниже будет доказано, что кинематическая модель положения невырожденного мобильного робота всегда неприводима. Для достижения этого результата, проанализируем сначала частный случай мобильного робота типа (1,1), кинематическая модель положения которого имеет вид

$$(32) \quad \dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\beta}_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} & 0 \\ L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} & 0 \\ \cos \beta_{s3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} = B(z)u.$$

В этом конкретном случае базис $\bar{\Delta}(z)$ имеет вид

$$\bar{\Delta}(z) = \text{span}\{b_1(z), b_2(z), b_3(z), b_4(z)\},$$

где столбцы $b_1(z)$ и $b_2(z)$ матрицы $B(z)$ имеют вид

$$b_1(z) = \begin{bmatrix} -L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} \\ L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} \\ \cos \beta_{s3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

и

$$b_3(z) = \begin{bmatrix} L \sin \vartheta \sin \beta_{s3} \\ -L \cos \vartheta \sin \beta_{s3} \\ \sin \beta_{s3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_4(z) = \begin{bmatrix} L \cos \vartheta \\ L \sin \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Мы можем заметить, что $\text{rank}(B(z)) = \delta_m + \delta_s = 2$ и $\dim(\bar{\Delta}(z)) = \dim(z) = 4$ на всём пространстве состояний. Отсюда следует, что кинематическая модель пространства состояний мобильного робота типа (1,1) неприводима.

Аналогичные рассуждения могут легко быть приведены и для других описанных выше типов мобильных роботов. Таким образом, можно заключить, что каждая кинематическая модель положения неприводима. Сформулируем это свойство формально.

Для кинематической модели положения (31) колёсного мобильного робота матрица входов $B(z)$ обладает полным рангом, т.е.

$$\text{rank}(B(z)) = \delta_m + \delta_s \quad \forall z,$$

и инволютивное распределение $\bar{\Delta}(z)$ имеет постоянную максимальную размерность, т.е.

$$\dim(\bar{\Delta}(z)) = 3 + \delta_s \quad \forall z.$$

Как следствие, кинематическая модель положения колёсного мобильного робота неприводима. Это не зависящее от координат свойство.

4.4. Управляемость и стабилизируемость. В данном разделе мы проанализируем основные свойства управляемости и стабилизируемости обратной связью кинематической модели положения колёсных мобильных роботов. Для начала изучим линейное приближение вокруг произвольной равновесной конфигурации $\bar{z} = [\bar{\xi}^T \quad \bar{\beta}_s^T]^T$. Равновесие означает, что мобильный робот в состоянии покоя с заданным постоянным положением $\bar{\xi}$ и заданной постоянной ориентацией $\bar{\beta}_s$ рулевых колёс. Очевидно, что скорости равны нулю, т.е. $\bar{u} = 0$.

Ранг управляемости линейного приближения кинематической модели положения (31) вокруг равновесной конфигурации равен $\delta_s + \delta_m$.

Это свойство следует из факта, что линейное приближение вокруг $(\bar{z} = 0, \bar{u} = 0)$ может быть записано как

$$\frac{d}{dt}(z - \bar{z}) = B(\bar{z})u.$$

Отсюда следует, что матрица управляемости сводится к $B(\bar{z})$, чей ранг, как показано выше, равен $\delta_s + \delta_m$ для всех \bar{z} .

Из этого следует, что линейное приближение кинематической модели положения омнидирекционных мобильных роботов (тип (3,0) с $\delta_m = 3$ и $\delta_s = 0$) полностью управляемо, поскольку δ_m является размерностью вектора состояния в данном случае, в то время как для мобильных роботов с ограниченной мобильностью (типы (2,1), (2,0), (1,1) и (1,2) с $\delta_m \leq 2$) оно таковым не является, поскольку $\delta_m + \delta_s < 3 + \delta_s = \dim(z)$.

Это свойство, тем не менее, как подсказывает физическая интуиция, не препятствует мобильным роботам с ограниченной мобильностью быть управляемыми. Можно сформулировать, что кинематическая модель положения (31) колёсного мобильного робота управляема.

Действительно, для нелинейных динамических систем без смещения вида (31) сильная алгебра доступности совпадает с инволютивным распределением, которое мы ввели в разделе 4.3. Из изложенного выше следует, что условие ранга сильной доступности выполняется для всех z в пространстве конфигураций и, следовательно, система сильно доступна из любой конфигурации. Для системы без смещения сильная доступность подразумевает управляемость.

Практически это свойство означает, что мобильный робот всегда может быть выведен из любого начального положения ξ_0 до любого конечного положения ξ_f за конечное время с использованием управляющих входных скоростей $u = [\eta^T \quad \zeta^T]^T$.

Рассмотрим теперь вопрос существования такой обратной связи $u(z)$, которая могла бы стабилизировать мобильного робота в конкретной конфигурации z^* . Для омнидирекционных мобильных роботов ответ на данный вопрос очевиден. К примеру,

$$u(z) = B^{-1}(z)A(z - z^*),$$

где A - произвольная гурвицева матрица - это, очевидно, гладкий линеаризующий закон управления через обратную связь, который экспоненциально приводит мобильного робота к конфигурации z^* . Действительно, замкнутая система описывается свободно назначаемой линейной динамикой

$$\frac{d}{dt}(z - z^*) = A(z - z^*).$$

Следовательно, омнидирекционные мобильные роботы полностью линеаризуемы по состоянию и, тем самым, очень близки к полноприводным роботам-манипуляторам.

Для мобильных роботов с ограниченной мобильностью ситуация не столь радужна, поскольку, исходя из приведённого выше анализа, они определённо не полностью линеаризуемы по состоянию, ведь для этого необходима полная управляемость линейного приближения. однако, для мобильных роботов с ограниченной мобильностью кинематическая модель положения (31) не стабилизируема непрерывной не зависящей от времени обратной связью по состоянию $u(z)$, но стабилизируема непрерывной зависящей от времени статической обратной связью по состоянию $u(z, t)$.

В самом деле, так называемое необходимое условие Брокетта не удовлетворяется непрерывной статической не зависящей от времени обратной связью по состоянию, поскольку отображение $(z, u) \rightarrow B(z)u$ не находится в окрестности равновесия $\bar{z} = [\bar{\xi}^T \ \bar{\beta}_s^T]^T, u = 0$. Стабилизируемость непрерывной зависящей от времени статической обратной связью по состоянию является специальным случаем общего случая стабилизируемости для систем без смещения. Систематическая процедура для синтеза таких стабилизирующих зависящих от времени регуляторов обратной связью может быть адаптирована, что применимо ко всем кинематическим моделям положения, потому что в каждом случае один столбец матрицы $B(z)$ имеет вид $[0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$.

5. КОНФИГУРАЦИОННАЯ КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

До сих пор мы использовали только подмножество ограничений (10) и (11), а именно той частью ограничений, которая связана с фиксированными и рулевым колесами, выраженная в (12) и (13). Теперь используем оставшиеся ограничения для вывода уравнений эволюции скоростей ориентации и вращения $\dot{\beta}_c$ и $\dot{\varphi}$, не входящих в кинематическую модель положения (20) и (21).

Из (10) и (11) напрямую следует, что

$$(33) \quad \dot{\beta}_c = -C_{2c}^{-1}C_{1c}(\beta_c)R(\vartheta)\dot{\xi},$$

$$(34) \quad \dot{\varphi} = -J_2^{-1}J_1(\beta_s, \beta_c)R(\vartheta)\dot{\xi}.$$

Объединив эти выражения с кинематической моделью положения (20), получим уравнения состояния для β_c и φ в виде

$$(35) \quad \dot{\beta}_c = D(\beta_c)\Sigma(\beta_s)\eta,$$

$$(36) \quad \dot{\varphi} = E(\beta_s, \beta_c)\Sigma(\beta_s)\eta,$$

где $D(\beta_c)$ и $E(\beta_s, \beta_c)$ имеют вид

$$D(\beta_c) = -C_{2c}^{-1}C_{1c}(\beta_c),$$

$$E(\beta_s, \beta_c) = -J_2^{-1}J_1(\beta_s, \beta_c).$$

Отметим также, что эти матрицы удовлетворяют выражениям

$$(37) \quad J_1(\beta_s, \beta_c) + J_2E(\beta_s, \beta_c) = 0,$$

$$(38) \quad C_{1c}(\beta_c) + C_{2c}D(\beta_c) = 0.$$

Определив q как вектор конфигурационных координат, т.е.

$$(39) \quad q = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_s \\ \beta_c \\ \varphi \end{bmatrix},$$

эволюцию конфигурационных координат можно описать следующим компактным выражением, полученным из (20), (21), (35) и (36), называемым конфигурационной кинематической моделью

$$(40) \quad \dot{q} = S(q)u,$$

где

$$(41) \quad S(q) = \begin{bmatrix} R(\vartheta)\Sigma(\beta_s) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_c)\Sigma(\beta_s) & 0 \\ E(\beta_s, \beta_c)\Sigma(\beta_s) & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}.$$

Выражение (40) имеет стандартную форму кинематической модели стандартный вид кинематической модели системы с независимыми ограничениями скорости. Сопоставим эту формулировку со стандартной теорией неголономных механических систем.

Приводимость (40) напрямую зависит от размерности инволютивной окрестности распределения Δ_1 , натянутого в локальных координатах q при помощи столбцов матрицы $S(q)$, т.е.

$$\Delta_1(q) = \text{span}\{\text{col}(S(q))\}.$$

Из этого незамедлительно следует, что

$$\delta_m + N_s = \dim(\Delta_1) \leq \dim(\text{inv}(\Delta_1)) \leq \dim(q) = 3 + N + N_c + N_s.$$

Определим степень неголономности M мобильного робота как

$$M = \dim(\text{inv}(\Delta_1)) - (\delta_m + N_s).$$

Число M представляет количество неинтегрируемых скоростных ограничений, которые не могут быть устранены независимо от выбора обобщённых координат. Стоит отметить, что это число зависит от конкретной структуры мобильного робота и, следовательно, одинаково для всех роботов, принадлежащих к данному классу.

Свойство 7.5 Конфигурационная кинематическая модель (40) всех типов мобильных роботов неголономна, т.е. $M > 0$, но приводима, т.е. $\dim(q) > \dim(\text{inv}(\Delta_1))$.

Это свойство не противоречит неприводимости кинематической модели положения (20) и (21), показанной ранее. Приводимость модели (40) означает, что существует, по крайней мере, одна гладкая функция конфигурационных координат $\xi, \beta_c, \varphi, \beta_s$, содержащая в явном виде как минимум одну из переменных β_c, φ , постоянную вдоль траекторий системы, удовлетворяющую всем ограничениям (10) и (11). Проиллюстрируем сказанное двумя примерами.

Робот типа (3,0) со шведскими колёсами. Для такого мобильного робота (см. рисунок 6) $\delta_m = 3$ и конфигурационные координаты имеют вид

$$q = [x \ y \ \vartheta \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T.$$

Матрица конфигурационной модели имеет вид

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & -\frac{1}{2r} & -\frac{L}{r} \\ 0 & \frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & -\frac{1}{2r} & -\frac{L}{r} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно удостовериться, что

$$\dim(\Delta_1) = 3 \quad \dim(\text{inv}(\Delta_1)) = 5.$$

Из этого следует, что степень неголономности равна $5 - 3 = 2$, в то время как количество координат, которые могут быть сокращены, равно $6 - 5 = 1$. Фактически, структура конфигурационной модели предполагает, что

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 = -\frac{3L}{r}\dot{\vartheta}.$$

Это означает, что выражение $(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + 3L\vartheta/r)$ является постоянным вдоль любой траектории, удовлетворяющей ограничениям. Тогда имеется возможность сократить одну из четырёх переменных $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \vartheta$.

Робот типа (2,0). Для такого мобильного робота (см. рисунок 8) $\delta_m = 2$ и конфигурационные координаты имеют вид

$$q = [x \ y \ \vartheta \ \beta_{c3} \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T.$$

Матрица конфигурационной модели имеет вид

$$S(q) = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{d}\cos\beta_{c3} & -\frac{1}{d}(d + L\sin\beta_{c3}) \\ -1/r & -L/r \\ 1/r & -L/r \\ -\frac{1}{r}\sin\beta_{c3} & -\frac{L}{r}\cos\beta_{c3} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно удостовериться, что

$$\dim(\Delta_1) = 2 \quad \dim(\text{inv}(\Delta_1)) = 6.$$

Из этого следует, что степень неголономности равна $6 - 2 = 4$, в то время как количество координат, которые могут быть сокращены, равно $7 - 6 = 1$. Из конфигурационной модели следует, что

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = -\frac{2L}{r}\dot{\vartheta}.$$

Это означает, что выражение $(\varphi_1 + \varphi_2 + 2L\vartheta/r)$ является постоянным вдоль любой траектории, удовлетворяющей ограничениям.

6. КОНФИГУРАЦИОННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Цель данного раздела состоит в выводе общей динамической модели пространства состояний колёсного мобильного робота, описывающей динамические отношения между конфигурационными координатами ξ , β , φ и крутящими моментами, производимых установленными исполнительными механизмами.

Такую общую модель пространства состояний будем называть конфигурационной динамической моделью. Она состоит из шести типов уравнений состояния, а именно, трёх типов для координат ξ , β , φ и трёх типов для внутренних координат η , ζ , которые были введены в разделе 4. Уравнения состояния для ξ , β , φ были выведены в разделе 5 в виде конфигурационной кинематической модели. Далее будет приведён вывод уравнений состояния для η и ζ с использованием формализма Лагранжа. Также будут рассмотрены конфигурации исполнительных механизмов.

6.1. Вывод модели. Предположим, что мобильный робот оснащён исполнительными механизмами, которые могут изменять либо ориентацию рулевых и направляющих колёс (ориентационные координаты β_s и β_c), либо вращением колёс (вращательные координаты φ). Крутящие моменты, создаваемые исполнительными механизмами, обозначим как

τ_φ для вращения колёс, τ_c для ориентации направляющих колёс и τ_s для ориентации рулевых колёс, соответственно.

Используя формализм Лагранжа, динамика колёсных мобильных роботов может быть описана следующими $(3 + N_c + N + N_s)$ уравнениями Лагранжа:

$$(42) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)^T = R^T(\vartheta) J_1^T(\beta_s, \beta_c) \lambda + R^T(\vartheta) C_1^T(\beta_s, \beta_c) \mu,$$

$$(43) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_c} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \beta_c} \right)^T = C_2^T \mu + \tau_c,$$

$$(44) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)^T = J_2^T \lambda + \tau_\varphi,$$

$$(45) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_s} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \beta_s} \right)^T = \tau_s,$$

где T обозначает кинетическую энергию, а λ, μ - множители Лагранжа, соотносящиеся с ограничениями (10) и (11) соответственно.

С целью избавиться от множителей Лагранжа, поступим следующим образом. Первые три уравнения Лагранжа (42), (43) и (44) домножим на матрицы $\Sigma^T(\beta_s)R(\vartheta)$, $\Sigma^T(\beta_s)D(\beta_c)$ и $\Sigma^T(\beta_s)E(\beta_s, \beta_c)$ соответственно и суммируем. Это приведёт к следующим двум уравнениям, из которых множители Лагранжа исключены благодаря выражениям (37) и (38):

$$(46) \quad \begin{aligned} \Sigma^T(\beta_s)R(\vartheta)[T]_\xi + D(\beta_c)[T]_{\beta_c} + E(\beta_s, \beta_c)[T]_\varphi = \\ = \Sigma^T(\beta_s)(D^T(\beta_c)\tau_c + E^T(\beta_s, \beta_c)\tau_\varphi), \end{aligned}$$

$$(47) \quad [T]_{\beta_s} = \tau_s,$$

где использована компактная запись

$$[T]_\psi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \psi} \right)^T.$$

Кинетическая энергия колёсного мобильного робота может быть описана в виде

$$T = \dot{\xi}^T R^T(\vartheta)(M(\beta_c)R(\vartheta)\dot{\xi} + 2V(\beta_c)\dot{\beta}_c + 2W\dot{\beta}_s) + \dot{\beta}_c^T I_c \dot{\beta}_c + \dot{\varphi}^T I_\varphi \dot{\varphi} + \dot{\beta}_s^T I_s \dot{\beta}_s$$

при соответствующем назначении матриц $M(\beta_c)$, $V(\beta_c)$, W , I_c , I_φ и I_s , которые зависят от распределения масс и моментов инерции различных твёрдых тел (тележки и колёс), из которых состоит мобильный робот. Уравнения состояния для η и ζ тогда могут быть

получены (после довольно длительных вычислений) подстановкой выражения для T в выражения (46) и (47) и устранением скоростей $\dot{\xi}$, $\dot{\beta}_c$, $\dot{\varphi}$ и $\dot{\beta}_s$ и ускорений $\ddot{\xi}$, $\ddot{\beta}_c$, $\ddot{\varphi}$ и $\ddot{\beta}_s$ при помощи выражений (20), (21), (35), (36) и их производных.

Следовательно, конфигурационная динамическая модель колёсных мобильных роботов в пространстве состояний имеет следующий общий вид:

$$(48) \quad \dot{\xi} = R^T(\vartheta)\Sigma(\beta_s)\eta,$$

$$(49) \quad \dot{\beta}_s = \zeta,$$

$$(50) \quad \dot{\beta}_c = D(\beta_c)\Sigma(\beta_s)\eta,$$

$$(51) \quad \begin{aligned} H_1(\beta_s, \beta_c)\dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_s)V(\beta_c)\dot{\zeta} + f_1(\beta_s, \beta_c, \eta, \zeta) = \\ = \Sigma^T(\beta_s)(D^T(\beta_c)\tau_c + E^T(\beta_s, \beta_c)\tau_\varphi), \end{aligned}$$

$$(52) \quad V^T(\beta_c)\Sigma(\beta_s)\dot{\eta} + I_s\dot{\zeta} + f_2(\beta_s, \beta_c, \eta, \zeta) = \tau_s,$$

$$(53) \quad \dot{\varphi} = E(\beta_c, \beta_s)\Sigma(\beta_s)\eta,$$

где

$$\begin{aligned} H_1(\beta_s, \beta_c) = \Sigma^T(\beta_s)(M(\beta_c) + D^T(\beta_c)V^T(\beta_c) + V(\beta_c)D(\beta_c) + \\ + D^T(\beta_c)I_cD(\beta_c) + E^T(\beta_s, \beta_c)I_\varphi E(\beta_s, \beta_c))\Sigma(\beta_s). \end{aligned}$$

6.2. Конфигурации исполнительных механизмов. В обобщённой конфигурационной динамической модели (48)-(53) вектора τ_φ , τ_c и τ_s обозначают все крутящие моменты, которые потенциально могут быть приложены для вращения и ориентации колёс мобильного робота. На практике, тем не менее, используется ограниченное число исполнительных механизмов, что означает, что многие компоненты этих векторов равны нулю.

Наша задача в этом разделе состоит в том, чтобы охарактеризовать конфигурации исполнительных механизмов, которые обеспечивают полную маневренность мобильного робота, требуя при этом как можно меньшего числа исполнительных механизмов.

Во-первых, ясно, что все рулевые колеса должны быть снабжены исполнительными механизмами для их ориентации, в противном случае эти колеса будут просто играть роль фиксированных колёс. Кроме того, для обеспечения полной мобильности роботов N_m дополнительные приводы (при $N_m \geq \delta_m$) должны быть применены либо для вращения некоторых колёс, либо для ориентации некоторых направляющих колёс. Вектор крутящих моментов, создаваемых этими приводами, обозначается через τ_m , и, следовательно, мы имеем

$$(54) \quad \begin{bmatrix} \tau_c \\ \tau_\varphi \end{bmatrix} = P\tau_m,$$

где $P - ((N_c + N) \times N_m)$ элементарная матрица, которая выбирает компоненты τ_c и τ_φ которые эффективно использовать в качестве управляющих входов.

Используя (54) можно определить, что выражение (51) обобщённой динамической модели принимает вид

$$(55) \quad H_1(\beta_s, \beta_c)\dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_s)V(\beta_c)\dot{\zeta} + f_1(\beta_s, \beta_c, \eta, \zeta) = B(\beta_s, \beta_c)P\tau_m,$$

где

$$B(\beta_s, \beta_c) = \Sigma^T(\beta_s) \begin{bmatrix} D^T(\beta_c) & E^T(\beta_s, \beta_c) \end{bmatrix}.$$

Введём следующее допущение. Конфигурация исполнительных механизмов такова, что матрица $B(\beta_s, \beta_c)P$ имеет полный ранг для всех $(\beta_s, \beta_c) \in R^{N_s+N_c}$. Далее представлены минимально допустимые конфигурации для различных типов мобильных роботов, описанных в разделе 3.

Робот типа (3,0) со шведскими колёсами. Для такого робота (см. рисунок 6) матрица B постоянна и сводится к виду

$$B = \Sigma^T E^T = -J_2^{-1}J_1 = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 & L \\ 0 & -1 & L \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & L \end{bmatrix}$$

и является неособой. Можно сделать вывод, что единственной приемлемой конфигурацией будет оснастить исполнительным механизмом каждое колесо.

Робот типа (3,0) с направляющими колёсами. Для такого робота (см. рисунок 7) матрица $B(\beta_c)$ имеет вид

$$B(\beta_c) = \Sigma^T \begin{bmatrix} D^T(\beta_c) & E^T(\beta_c) \end{bmatrix},$$

где

$$\Sigma^T D^T(\beta_c) = -\frac{1}{d} \begin{bmatrix} \cos\beta_{c1} & -\cos\beta_{c2} & \sin\beta_{c3} \\ \sin\beta_{c1} & -\sin\beta_{c2} & -\cos\beta_{c3} \\ d + L\sin\beta_{c1} & d + L\sin\beta_{c2} & d + L\sin\beta_{c3} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma^T E^T(\beta_c) = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin\beta_{c1} & \sin\beta_{c2} & \cos\beta_{c3} \\ \cos\beta_{c1} & -\cos\beta_{c2} & \sin\beta_{c3} \\ L\cos\beta_{c1} & L\cos\beta_{c2} & L\cos\beta_{c3} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что нет ни одного набора из 3 столбцов матрицы $B(\beta_c)$, которые независимы ни для каких $\beta_{c1}, \beta_{c2}, \beta_{c3}$. Поэтому необходимо использовать (по крайней мере) $N_m = 4$ приводов. Допустимая конфигурация выглядит следующим образом: 2 привода (один для ориентации и один для вращения) на 2 из 3 колес (третье из них не приводится в действие и, следовательно, самонастраивается). Например, если колеса 1 и 2 приводятся

таким образом, матрица P выбирается следующим образом:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и матрица $B(\beta_c)P$ имеет полный ранг ($= 3$) для любых конфигураций робота.

Робот типа (2,0). Для такого робота (см. рисунок 8) матрица $B(\beta_c)$ имеет вид

$$B(\beta_{c3}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{d}\cos\beta_{c3} & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r}\sin\beta_c \\ -\frac{1}{d}(d + L\sin\beta_{c3}) & -\frac{L}{r} & -\frac{L}{r} & -\frac{L}{r}\cos\beta_{c3} \end{bmatrix}.$$

Допустимы несколько конфигураций с двумя исполнительными механизмами.

- Два вращающих исполнительных механизма на колёса 1 и 2; в этом случае

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Один исполнительный механизм для ориентации колеса 3 и один исполнительный механизм для вращения колеса 2 (либо 3), обеспечив, что $d > L$; в этом случае

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Два исполнительных механизма (для вращения и ориентации) на направляющем колесе 3, обеспечив, что $d < L$; в этом случае

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Робот типа (2,1). Для такого робота (см. рисунок 9) матрица $B(\beta_s, \beta_c)$ имеет вид

$$B(\beta_s, \beta_c) = \Sigma^T(\beta_s) \begin{bmatrix} D^T(\beta_c) & E^T(\beta_s, \beta_c) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma^T(\beta_s) &= \begin{bmatrix} -\sin\beta_{s1} & \cos\beta_{s1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ D^T(\beta_c) &= -\frac{1}{d} \begin{bmatrix} -\sin\beta_{c2} & -\cos\beta_{c3} \\ \cos\beta_{c2} & -\sin\beta_{c3} \\ d + \sqrt{2}L\sin\beta_{c2} & d + \sqrt{2}L\sin\beta_{c3} \end{bmatrix}, \\ E^T(\beta_s, \beta_c) &= -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos\beta_{s1} & -\sin\beta_{c2} & -\cos\beta_{c3} \\ \sin\beta_{s1} & \cos\beta_{c2} & -\sin\beta_{c3} \\ 0 & d + \sqrt{2}L\sin\beta_{c2} & d + \sqrt{2}L\sin\beta_{c3} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Столбцы 1 и 3 (либо 1 и 2) матрицы $B(\beta_s, \beta_c)$ независимы, если $d > L\sqrt{2}$. Таким образом, имеются две приемлемые конфигурации исполнительных механизмов, получаемые использованием второго исполнительного механизма для вращения рулевого колеса (номер 1) и третьего исполнительного механизма для ориентации колеса 2 или колеса 3. Две соответствующие матрицы P имеют вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Робот типа (1,1). Для такого робота (см. рисунок 10) первый исполнительный механизм необходим для ориентации рулевого колеса. Матрица $B(\beta_s)$ сводится к вектору

$$B = -\frac{L}{r} \begin{bmatrix} \sin\beta_{s3} + \cos\beta_{s3} & -\sin\beta_{s3} + \cos\beta_{s3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\delta_m = 1$, допущение о полном ранге матрицы $B(\beta_s)P$ будет выполнено только если второй исполнительный механизм обеспечивает вращение третьего колеса. Матрица P тогда примет вид

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Робот типа (1,2). Для такого робота (см. рисунок 11) два исполнительных механизма требуются для ориентации двух рулевых колёс. Матрица $B(\beta_s, \beta_c)$ имеет вид

$$B(\beta_s, \beta_c) = \Sigma^T(\beta_s) \begin{bmatrix} D^T(\beta_c) & E^T(\beta_s, \beta_c) \end{bmatrix}$$

with

$$\begin{aligned}\Sigma^T(\beta_s) &= \begin{bmatrix} -2L\sin\beta_{s1}\sin\beta_{s2} & L\sin(\beta_{s1} + \beta_{s2}) & \sin(\beta_{s2} - \beta_{s1}) \end{bmatrix}, \\ D^T(\beta_c) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{d}\sin\beta_{c3} \\ \frac{1}{d}\cos\beta_{c3} \\ -\frac{1}{d}(d + L\sin\beta_{c3}) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 8. Количество исполнительных механизмов для различных типов колёсных мобильных роботов

Тип (δ_m, δ_s)	Количество исполнительных механизмов $N_m + N_s$
Тип (3,0)	3 или 4
Тип (2,0)	2
Тип (2,1)	3
Тип (1,1)	2
Тип (1,2)	4

$$E^T(\beta_s, \beta_c) = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -\sin\beta_{s1} & \sin\beta_{s2} & \cos\beta_{c3} \\ \cos\beta_{s1} & -\cos\beta_{s2} & \sin\beta_{c3} \\ L\cos\beta_{s1} & L\cos\beta_{s2} & L\cos\beta_{c3} \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\delta_m = 1$, достаточно будет иметь один столбец матрицы $B(\beta_s, \beta_c)$ ненулевым для всех возможных конфигураций. Однако, такого столбца нет. Таким образом, необходимо использовать два дополнительных исполнительных механизма, к примеру, для вращения колёс 1 и 2, для чего матрица P будет иметь вид

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, таблица 8 объединяет полученные результаты.

7. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОЛОЖЕНИЯ

Конфигурационная динамическая модель колёсных мобильных роботов может быть переписана в более компактной форме

$$(56) \quad \dot{q} = S(q)u,$$

$$(57) \quad H(\beta)\dot{u} + f(\beta, u) = F(\beta)\tau_0,$$

$$\text{где } \beta = \begin{bmatrix} \beta_s \\ \beta_c \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} \xi \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}, H(\beta) = \begin{bmatrix} H_1(\beta_s, \beta_c) & \Sigma^T(\beta_s)V(\beta_c) \\ V^T(\beta_{0c})\Sigma(\beta_s) & I_s \end{bmatrix}, f(\beta, u) =$$

$$\begin{bmatrix} f_1(\beta_s, \beta_c, \eta, \zeta) \\ f_2(\beta_s, \beta_c, \eta, \zeta) \end{bmatrix}, F(\beta) = \begin{bmatrix} B(\beta_s, \beta_c) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tau_0 = \begin{bmatrix} \tau_m \\ \tau_s \end{bmatrix}.$$

Из допущения о полном ранге матрицы $B(\beta_s)P$ следует, что матрица $F(\beta)$ имеет полный ранг для всех β . Это важное свойство для анализа поведения колёсных мобильных роботов и синтеза регуляторов через обратную связь.

Конфигурационная динамическая модель колёсного мобильного робота (56) и (57) эквивалентна обратной связью (посредством гладкой статической обратной связи, не зависящей от времени) следующей системе:

$$(58) \quad \dot{q} = S(q)u,$$

$$(59) \quad \dot{u} = v,$$

где v представляет собой набор из δ_m вспомогательных управляющих входов.

Действительно, следующая не зависящая от времени обратная связь по состоянию хорошо определена везде в пространстве состояний, т.е.

$$(60) \quad \tau_0 = F^\dagger(\beta)(H(\beta)\dot{u} - f(\beta, u)),$$

где F^\dagger обозначает произвольную левую инверсию $F(\beta, u)$.

Стоит подчеркнуть, что дальнейшее упрощение представляет интерес с точки зрения операционной деятельности. В контексте планирования траектории или синтеза управления с обратной связью ясно, что мы будем в основном заниматься управлением положением робота (а именно координат $\xi(t)$) с помощью управляющего входа v . Заметим, что это означает, что мы можем преднамеренно игнорировать координаты β_c и φ и ограничивать наше внимание следующей динамической моделью положения:

$$(61) \quad \dot{z} = B(z)u,$$

$$(62) \quad \dot{u} = v,$$

где $z = [\xi^T \ \beta_s^T]^T$ и $u = [\eta^T \ \zeta^T]^T$.

Эта динамическая модель положения полностью описывает динамику системы между управляющим входом v и положением ξ . Координаты β_c и φ , по-видимому, исчезли, но важно заметить, что они фактически скрыты в обратной связи (60).

Разница с кинематической моделью положения заключается в том, что теперь переменные u являются частью вектора состояния. Это подразумевает существование дрейфового члена и тот факт, что входные векторные поля постоянны.

Динамическая модель осанки наследует структурные свойства кинематической модели осанки, обсуждаемой в разделе 4.3: динамическая модель положения является общей и неприводимой и локально управляемой; кроме того, для мобильных роботов с ограниченной мобильностью она не стабилизируется непрерывной статической не зависящей от времени обратной связью, но стабилизируется изменяющейся во времени статической обратной связью по состоянию.