

Данный раздел посвящен решению задачи управления колесным мобильным роботом при помощи обратной связи по состоянию. Наиболее сложной задачей с теоретической точки зрения является поиск законов управления с обратной связью, которые могут стабилизировать робота относительно точки равновесия. Причина в том, что, как было показано в предыдущем разделе, неголономный колесный мобильный робот не может быть стабилизирован с помощью гладкой обратной связи по состоянию. Поэтому необходимо найти более умные решения, включающие нестационарные (изменяющиеся во времени) и / или сингулярные управления с обратной связью. Этот вопрос будет более подробно рассмотрен в следующем разделе.

В данном разделе не будет рассматриваться задача стабилизации в окрестности точки равновесия (которая является задачей регулирования), внимание будет уделено другой задаче управления, возможно, более важной с практической точки зрения, а именно стабильному слежению за опорной траекторией (это также называется стабилизацией относительно траектории). Интересно, что для колесных мобильных роботов задачу слежения решить проще, чем задачу регулирования. Задача настоящего раздела состоит в исследовании разрешимости задачи слежения для колесных мобильных роботов с помощью гладкой статической и динамической линеаризации обратной связью. В частности, будет рассмотрена связь между внутренней структурной мобильностью роботов и их линеаризуемостью обратной связью.

Будут рассмотрены две основные постановки задачи слежения, а именно слежение за точкой и слежение за положением. Посредством линеаризации статической обратной связью показано, как решать задачи слежения за точкой и положением для всенаправленных колесных мобильных роботов и задачу слежения только за точкой для колесных мобильных роботов с ограниченной подвижностью. Далее в разделе показано, как задача слежения за положением может быть решена для всех типов колесных мобильных роботов с помощью линеаризации динамической обратной связью, хотя и с небольшими особенностями. Рассмотрены также особенности синтеза, гарантирующие отсутствие сингулярностей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Ниже сформулированы две основные задачи управления через обратную связь, которые будут рассмотрены в данном разделе, а именно слежение за положением и слежение за точкой.

1.1. Задача слежения за положением. Задача состоит в отыскании такого закона управления через обратную связь по состоянию, который бы обеспечивал устойчивое слежение за заданным движущимся положением $\xi_r(t)$, которое предполагается дважды дифференцируемым. Иными словами, цель состоит в отыскании закона управления через обратную связь по состоянию v такого, что

- ошибка слежения $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \xi_r(t)$ и управление v ограничены для всех моментов времени t ;

- ошибка слежения асимптотически стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\xi(t) - \xi_r(t)) = 0;$$

- если $\xi(0) = \xi_r(0)$, то $\xi(t) = \xi_r(t)$ для всех моментов времени t .

Можно сказать, что задача может быть интерпретирована как задача слежения за положением $\xi_r(t)$ виртуального опорного колесного мобильного робота того же типа, что и объект управления.

Как было показано в предыдущем разделе, для омнидирекционных колесных мобильных роботов такая задача может быть решена при помощи гладкой статической линеаризующей обратной связи по состоянию. В данном разделе будет показано, что для колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью такая задача может быть решена при помощи гладкой динамической линеаризующей обратной связи по состоянию, если робот движется, т. е. $\dot{\xi}(t) \neq 0$ для всех моментов времени t .

1.2. Задача слежения за точкой. В ряде случаев полный контроль положения колесного мобильного робота не требуется, в то время как достаточно управлять только положением фиксированной точки P' на тележке мобильного робота (см. рисунок 1). Полярные координаты этой точки в подвижном базисе обозначаются как (e, δ) . Декартовы координаты точки P' в опорном базисе тогда описываются выражением

$$(1) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + e \cos(\vartheta + \delta) \\ y + e \sin(\vartheta + \delta) \end{bmatrix}.$$

Задача слежения за точкой состоит в отыскании такого закона управления через обратную связь по состоянию, который бы обеспечивал стабильное слежение за заданными опорными координатами $x'_r(t)$ и $y'_r(t)$, которые предполагаются дважды дифференцируемыми. Иными словами, цель состоит в отыскании закона управления через обратную связь по состоянию v такого, что

- ошибки слежения $\tilde{x}'(t) = x'(t) - x'_r(t)$, $\tilde{y}'(t) = y'(t) - y'_r(t)$ и управление v ограничены для всех моментов времени t ;
- ошибки слежения асимптотически стремятся к нулю, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x'(t) - x'_r(t)) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y'(t) - y'_r(t)) = 0;$$

- если $x'(0) = x'_r(0)$ и $y'(0) = y'_r(0)$, то $x'(t) = x'_r(t)$ и $y'(t) = y'_r(t)$ для всех моментов времени t .

Хотя и будет показано, что колесные мобильные роботы с ограниченной мобильностью не полностью линеаризуемы статической обратной связью по состоянию, частичная линеаризация обратной связью может помочь решить задачу слежения за точкой.

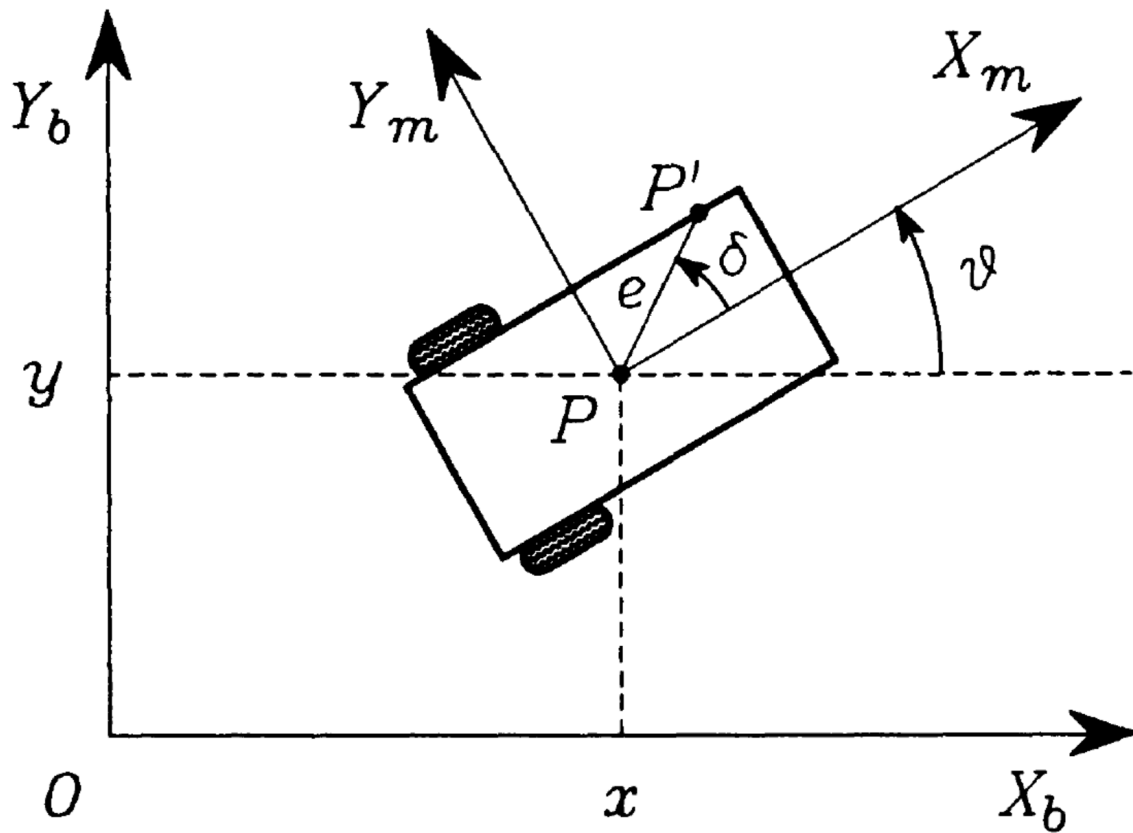


РИС. 1. Координаты точки P' .

1.3. Управление скоростями и моментами сил. Сформулированные выше задачи управления состоят в отыскании закона управления через обратную связь с целью слежения за опорной траекторией для позиционной динамической модели

$$(2) \quad \dot{z} = B(z)u,$$

$$(3) \quad \dot{i} = v,$$

где $z = [\xi^T \ \beta_s^T]^T$ и $u = [\eta^T \ \zeta^T]^T$. Это называется моментным управлением через обратную связь, поскольку управляющие воздействия v эквивалентны моментам сил.

Аналогичные задачи слежения за положением и точкой могут быть также поставлены для позиционной кинематической модели, т. е.

$$(4) \quad \dot{z} = B(z)u.$$

Это называется скоростным управлением через обратную связь, поскольку управляющие воздействия u эквивалентны скоростям.

2. СТАТИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО СОСТОЯНИЮ

Для начала сформулируем свойство о наибольшей подсистеме, которая может быть линеаризована статической обратной связью по состоянию.

Свойство 1. Наибольшая подсистема позиционной кинематической модели (4), линеаризуемая при помощи гладкой статической обратной связи по состоянию, имеет размерность $\delta_m + \delta_s$. Наибольшая линеаризуемая подсистема позиционной динамической модели (2)-(3) имеет размерность $2(\delta_m + \delta_s)$.

В самом деле, можно удостовериться, что наибольшая линеаризуемая подсистема позиционной кинематической модели (4) получается выбором $\delta_m + \delta_s$ линеаризующих функций выхода, зависящих от z . При этом вектор из $3 - \delta_m$ координат остается не линеаризованным. Более того, наибольшая линеаризуемая подсистема позиционной динамической модели (2)-(3) имеет размерность $2(\delta_m + \delta_s)$ с точно такими же линеаризующими функциями выходов, что будет показано далее.

Для омнидирекционных мобильных роботов ($\delta_m = 3$ и $\delta_s = 0$) свойство 1 демонстрирует, что позиционная кинематическая (динамическая) модель полностью линеаризуема статической обратной связью по состоянию. В отличие от них, колесные мобильные роботы с ограниченной мобильностью лишь частично линеаризуемы обратной связью. Следовательно, с использованием гладкой статической обратной связи по состоянию для омнидирекционных мобильных роботов может быть решена задача слежения за положением, в то время как для мобильных роботов с ограниченной мобильностью может быть решена лишь задача слежения за точкой.

2.1. Омнидирекционные колесные мобильные роботы. Из предыдущего раздела известно, что позиционная динамическая модель омнидирекционного колесного мобильного робота имеет вид

$$(5) \quad \dot{\xi} = R^T(\vartheta) \eta,$$

$$(6) \quad \dot{\eta} = v.$$

Продифференцируем по времени выражение (5):

$$(7) \quad \ddot{\xi} = R^T(\vartheta) \dot{\eta} + \dot{R}^T(\vartheta) \eta.$$

Поскольку матрица $R(\vartheta)$ обратима для любых ϑ , очевидно, что можно использовать управление $v = \dot{\eta}$ для назначения произвольной динамики положения $\xi(t)$. Сформулируем данное положение в виде леммы.

Лемма 1. Для омнидирекционных колесных мобильных роботов задача слежения за положением может быть решена при помощи моментного закона управления через обратную связь по состоянию вида

$$(8) \quad v = R^{-T}(\vartheta) \left(-\dot{R}^T(\vartheta) \eta + \ddot{\xi}_r - (\Lambda_1 + \Lambda_2) \dot{\tilde{\xi}} - \Lambda_1 \Lambda_2 \tilde{\xi} \right),$$

где $\tilde{\xi} = \xi - \xi_r$ – ошибка слежения, а Λ_1 и Λ_2 – положительные диагональные матрицы размерности (3×3) .

Доказательство. Подставим выражение (8) в (6), а затем в (7) и получим, что динамика ошибки слежения описывается устойчивым линейным дифференциальным уравнением

$$(9) \quad \ddot{\xi} + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \dot{\xi} + \Lambda_1 \Lambda_2 \xi = 0,$$

где Λ_1 и Λ_2 – положительные диагональные матрицы размерности (3×3) . \square

Стоит отметить, что выражение (9) можно интерпретировать как опорную модель для ошибки слежения, то есть модель, которая описывает желаемый характер уменьшения ошибки слежения. Заметим также, что этот закон управления практически не отличается от классического управления обратной динамикой твердого звена манипулятора.

Кроме того, имеет смысл рассмотреть опорную модель (9) в пространстве состояний

$$\dot{\xi} = -\Lambda_1 \tilde{\xi} + \tilde{\sigma},$$

$$\dot{\tilde{\sigma}} = -\Lambda_2 \tilde{\sigma},$$

где введено новое состояние $\tilde{\sigma} = \Lambda_1 \tilde{\xi} - \dot{\xi}_r + R^T(\vartheta) \eta$. Нетрудно удостовериться, что новое состояние $\tilde{\sigma}$ может быть также записано как

$$\tilde{\sigma} = R^T(\vartheta) (\eta - \eta_r),$$

где $\eta_r = R(\vartheta) (\dot{\xi}_r - \Lambda_1 \tilde{\xi})$ представляет собой линеаризующее скоростное управление позиционной кинематической модели. Следовательно, можно интерпретировать (8) как моментный закон управления, который обеспечивает слежение за опорным линеаризующим скоростным управляющим воздействием $\eta_r(t)$ совместно с опорным положением $\xi_r(t)$.

2.2. Колесные мобильные роботы с ограниченной мобильностью. Как было показано в предыдущем разделе, позиционная динамическая модель (5)-(6) для колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью может быть записана в виде

$$(10) \quad \dot{\xi} = R^T(\vartheta) \Sigma(\beta_s) \eta,$$

$$(11) \quad \dot{\beta}_s = \zeta,$$

$$(12) \quad \dot{\eta} = v_1,$$

$$(13) \quad \dot{\zeta} = v_2.$$

Из свойства 1 известно, что модель (10)-(13) полностью не линеаризуема гладкой статической не зависящей от времени обратной связью по состоянию и что наибольшая линеаризуемая ее подсистема имеет размерность $2(\delta_m + \delta_s)$. В данном разделе будет показано, как это свойство может быть использовано при решении задачи слежения за точкой при

помощи линеаризации статической обратной связью по состоянию. Однако, прежде стоит обсудить более детально частичную линеаризуемость динамической модели (10)-(13).

Лемма 2. Обобщенная динамическая модель (10)-(13) при помощи обратной связи по состоянию и диффеоморфизма может быть в общем виде преобразована в управляемую линейную подсистему размерности $2(\delta_m + \delta_s)$ и нелинейную подсистему размерности $3 - \delta_m$ вида

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= w, \\ \dot{z}_3 &= \bar{Q}(z_1, z_2) z_2, \end{aligned}$$

где z_1 и z_2 имеют размерность $\delta_m + \delta_s$, z_3 имеет размерность $3 - \delta_m$, а w – вспомогательный моментный управляющий сигнал.

Доказательство. Как следствие из свойства 1, существует линеаризующая вектор-функция выходов

$$(15) \quad z_1 = h(\xi, \beta_s) = h(z)$$

размерности $\delta_m + \delta_s$, зависящая только от позиционных координат ξ и угловых координат β_s , но не от состояний η и ζ , такая, что наибольшая линеаризуемая подсистема может быть получена путем двойного дифференцирования z_1 :

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{\partial h}{\partial z} B(z) u = K(z) u, \\ \ddot{z}_1 &= K(z) v + g(z, u), \end{aligned}$$

где $K(z)$ – развязывающая матрица вида

$$(17) \quad K(z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial \xi} R^T(\vartheta) \Sigma(\beta_s) & \frac{\partial h}{\partial \beta_s} \end{bmatrix},$$

а $g(z, u)$ имеет вид

$$(18) \quad g(z, u) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K \begin{bmatrix} \xi^T & \beta_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \right) R^T(\vartheta) \Sigma(\beta_s) \eta + \frac{\partial}{\partial \beta_s} \left(K \begin{bmatrix} \xi^T & \beta_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \right).$$

Определим преобразование координат в виде

$$\begin{aligned} z_1 &= h(z), \\ z_2 &= K(z), \\ z_3 &= k(z), \end{aligned}$$

где $k(z)$ выбирается так, чтобы отображение

$$(19) \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \beta_s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} h(z) \\ k(z) \end{bmatrix}$$

являлось диффеоморфизмом на R^{δ_s+3} . В новых координатах динамика системы имеет вид

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= \bar{g}(z_1, z_2, z_3) + \bar{K}(z_1, z_3) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \\ \dot{z}_3 &= \bar{Q}(z_1, z_3) z_2, \end{aligned}$$

где \bar{g} , \bar{K} и \bar{Q} – представления g , K и Q , соответственно, выраженные в новых координатах, где

$$(21) \quad Q(z) = \left[\frac{\partial k}{\partial \xi} R^T(\vartheta) \Sigma(\beta_s) \quad \frac{\partial k}{\partial \beta_s} \right] K^{-1}(z).$$

Поскольку развязывающая матрица $K(z)$ в общем обратима, применив управляющее воздействие вида

$$(22) \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \bar{K}^{-1}(z_1, z_3) (w - \bar{g}(z_1, z_2, z_3))$$

к системе (20), можно получить ожидаемую частично линеаризованную систему (14). \square

Теперь, после получения частично линеаризованной модели (20), можно использовать вспомогательный вход w для свободного назначения динамики z_1 как динамики устойчивой линейной системы второго порядка. Однако, чтобы обеспечить устойчивое слежение за опорной траекторией, необходимо обеспечить, по крайней мере, ограниченность нелинейной части z_3 .

Лемма 3. Пусть $(z_{1d}, \dot{z}_{1d}, \ddot{z}_{1d})$ представляет собой гладкую опорную траекторию такую, что $\|z_{1d}(t)\|$, $\|\dot{z}_{1d}(t)\|$, $\|\ddot{z}_{1d}(t)\|$ ограничены для всех моментов времени t и такую, что $\dot{z}_{1d}(t)$ принадлежит пространству L_1 . Если матрица $\bar{Q}(z_1, z_3)$, определенная в (20), ограничена для всех z_1 и z_3 , то вспомогательный закон управления

$$(23) \quad w = \ddot{z}_{1d}(t) - (\Lambda_1 + \Lambda_2) \dot{\tilde{z}}_1 - \Lambda_1 \Lambda_2 \tilde{z}_1,$$

где $\tilde{z}_1 = z_1 - z_{1d}$, Λ_1 и Λ_2 – произвольные положительные диагональные матрицы размерности $(\delta_m + \delta_s) \times (\delta_m + \delta_s)$, в общем обеспечивает экспоненциальную сходимость \tilde{z}_1 и $\dot{\tilde{z}}_1$ к нулю и ограниченность $z_3(t)$ для всех моментов времени t .

Доказательство. Подстановка выражения (23) в (14) приводит к следующему устойчивому линейному развязанному уравнению второго порядка относительно \tilde{z}_1 :

$$\ddot{\tilde{z}}_1 + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \dot{\tilde{z}}_1 + \Lambda_1 \Lambda_2 \tilde{z}_1 = 0,$$

откуда следует, что существуют такие положительные константы c и α , что

$$(24) \quad \|\tilde{z}_2(t)\| \leq ce^{-\alpha t} \|\tilde{z}_2(0)\|.$$

ТАБЛИЦА 1. Линеаризующие выходы, нелинейные координаты и условия регулярности для различных типов колесных мобильных роботов

(δ_m, δ_s)	$z_1 = h(\xi, \beta_s)$	$z_3 = k(\xi, \beta_s)$	$\det(K(\xi, \beta_s)) \neq 0$
(2, 0)	$\begin{bmatrix} x + e \cos(\vartheta + \delta) \\ y + e \sin(\vartheta + \delta) \end{bmatrix}$	ϑ	$e \neq 0$ $\delta \neq 2k\pi$
(2, 1)	$\begin{bmatrix} x + e \cos(\vartheta + \delta) \\ y + e \sin(\vartheta + \delta) \\ \beta_s \end{bmatrix}$	ϑ	$e \neq 0$ $\delta \neq \beta_s + 2k\pi$
(1, 1)	$\begin{bmatrix} x + L \sin \vartheta + e \cos(\vartheta + \beta_s) \\ y - L \cos \vartheta + e \sin(\vartheta + \beta_s) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \vartheta \\ \beta_s \end{bmatrix}$	$e \neq 0$
(1, 2)	$\begin{bmatrix} x + L \sin \vartheta - e \cos(\vartheta + \beta_s) \\ y + L \cos \vartheta + e \sin(\vartheta + \beta_s) \\ \beta_{s2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \vartheta \\ \beta_{s1} \end{bmatrix}$	$e \sin \beta_{s2} \neq 0$

Более того, поскольку предполагается, что $\bar{Q}(z_1, z_3)$, определенная в (20), ограничена для всех z_1 и z_3 , скажем, положительной константой K_1 , имеем

$$\|z_3(t)\| \leq \|z_3(0)\| + K_1 \left(\int_0^t \|z_{2d}(\tau)\| d\tau + \frac{C}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t \|\bar{z}_2(0)\|} \right) \right).$$

Поскольку опорная траектория полагается такой, что $\dot{z}_{1d}(t) = z_{2d}(t)$ принадлежит пространству L_1 , можно заключить, что z_3 остается ограниченным для всех моментов времени t . \square

Теперь рассмотрим возможность использования описанного выше подхода для решения задачи слежения за точкой для колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью. Для каждого типа роботов применим леммы 2 и 3 и предложим допустимые варианты выходных функций z_1 , содержащих декартовы координаты точки P' на тележке робота, и не линеаризованных координат z_3 . Результаты сведены в таблицу 1. В последнем столбце этой таблицы также для каждого случая приведены условия невырожденности развязывающей матрицы $K(\xi, \beta_s)$, заданной выражением (17).

Из таблицы 1 видно, что задача слежения за точкой имеет решение при помощи линеаризации статической обратной связью для колесных мобильных роботов типа (2, 0) и типа (2, 1), поскольку декартовы координаты x' и y' фиксированной отслеживаемой точки P' на тележке являются компонентами вектора $z_1 = h(z)$ линеаризующих функций выходов в обоих случаях. Однако условия регулярности могут означать, что некоторые конкретные выборы отслеживаемой точки P' должны быть исключены. Разберем этот вопрос на двух конкретных примерах.

Робот типа (2, 0). Робот на рисунке 2 имеет два фиксированных колеса и два роликовых колеса. Условие регулярности означает, что отслеживаемая точка P' не должна располагаться на оси фиксированных колес. Фактически, любой робот типа (2, 0) не

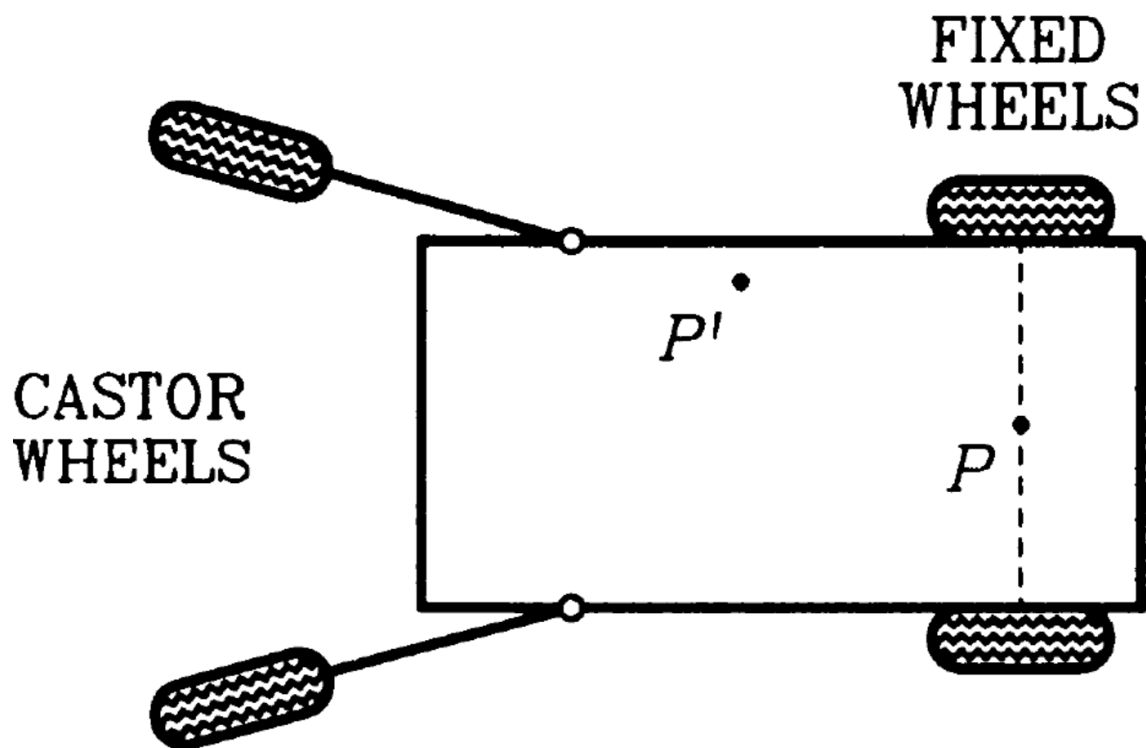


РИС. 2. Робот типа $(2,0)$ с двумя фиксированными и двумя роликовыми колесами.

имеет рулевых колес и оснащен одним или несколькими фиксированными колесами, расположенными на одной общей оси. Следовательно, условие регулярности всегда будет означать, что точка P' не должна находиться на этой оси.

Робот типа $(2,1)$. Робот на рисунке 3 имеет одно рулевое колесо и два роликовых

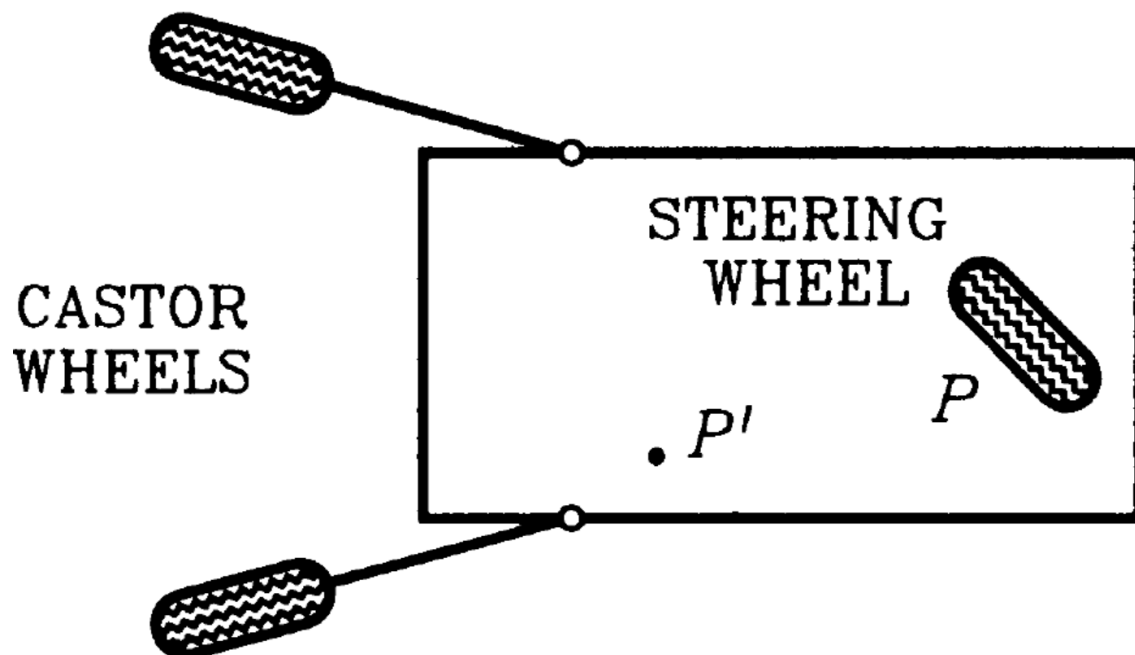


РИС. 3. Колесный мобильный робот типа $(2,1)$.

колеса. Точка P должна быть расположена в центре рулевого колеса. Фактически, любой робот типа $(2, 1)$ имеет только одно рулевое колесо. Условия регулярности всегда означают, что отслеживаемая точка P' не должна совпадать с центром рулевого колеса (e не должно быть равным нулю) и что $\sin(\delta - \beta_s)$ не должен быть нулевым. Благодаря блочно-треугольной форме соответствующей развязывающей матрицы $K(\vartheta, \beta_s)$, этой особой конфигурации, характеризующейся $\delta = \beta_s + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), можно избежать в каждый момент времени путем правильного выбора управляющего входа v_2 , тогда как v_1 обеспечивает линеаризацию динамики вектора ошибки слежения \tilde{z}_1 .

В отличие от описанных выше, для колесных мобильных роботов типа $(1, 1)$ и $(1, 2)$ задача слежения за фиксированной точкой P' на тележке мобильного робота не может быть решена линеаризацией обратной связью, поскольку развязывающая матрица для них всегда особая. Тем не менее, для таких роботов существуют линеаризующие выходы, которые могут быть интерпретированы с "физической" точки зрения.

Робот типа $(1, 1)$. Робот на рисунке 4, классически называемый роботом с перед-

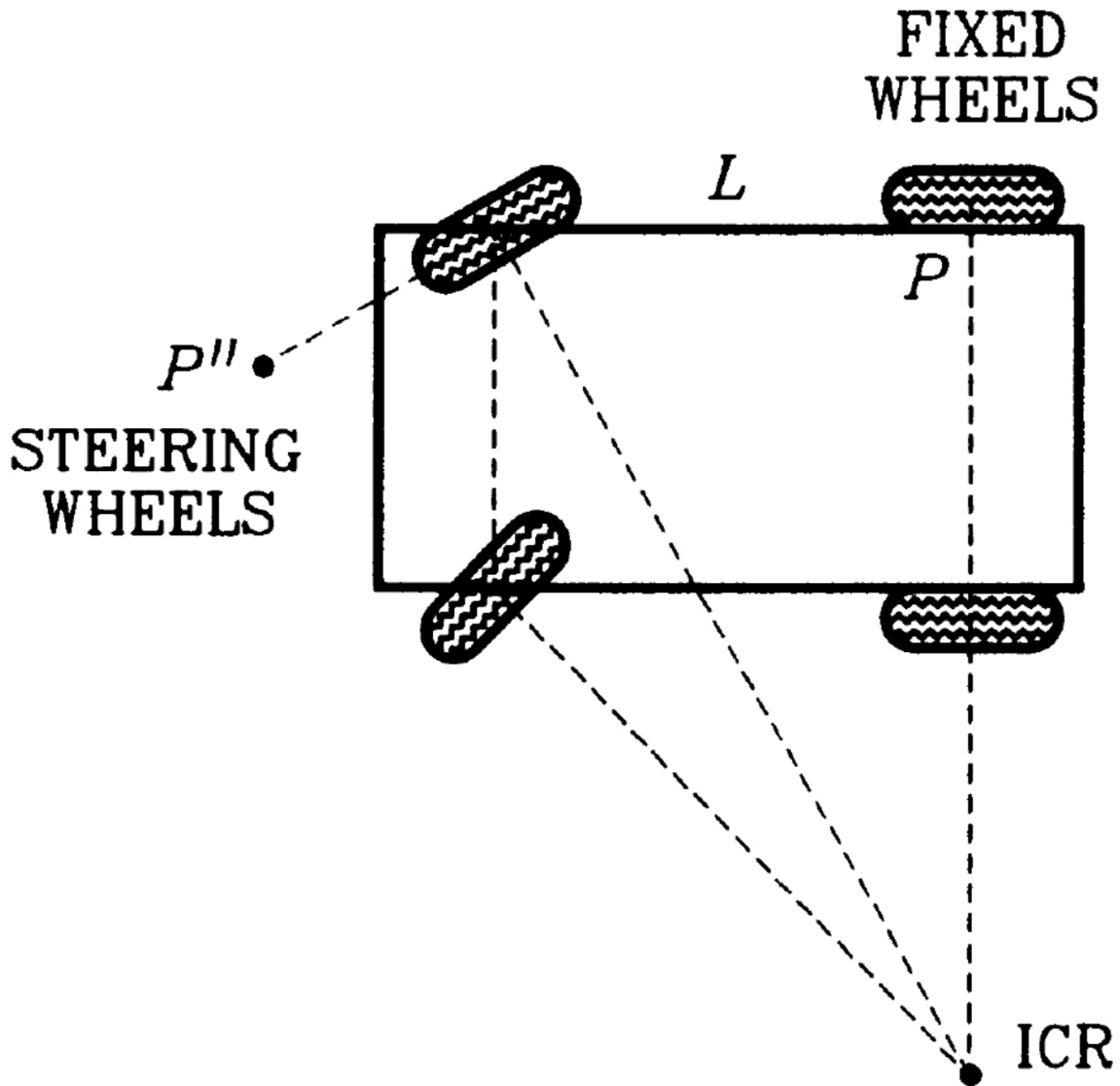


РИС. 4. Переднеприводный колесный мобильный робот типа $(1, 1)$.

ним приводом (также можно назвать его роботом с автомобильной компоновкой колес),

имеет два рулевых колеса с согласованными ориентациями и два фиксированных колеса. Оси двух рулевых колес сходятся к мгновенному центру вращения, расположенному на оси фиксированных колес. Одно из рулевых колес выбирается (произвольно) в качестве ведущего колеса с ориентацией, характеризующейся углом β_s , в то время как ориентация другого ограничивается таким образом, чтобы удовлетворять вышеуказанному условию. Начало подвижной системы координат P расположено на оси неподвижных колес на пересечении с нормалью, проходящей через центр ведущего рулевого колеса. Тогда постоянная L – это расстояние между P и центром ведущего колеса.

Линеаризующие выходы (см. таблицу 1) соответствуют декартовым координатам материальной точки P'' , прикрепленной к плоскости одного из рулевых колес, за исключением его центра (принадлежащего тележке), для которого $e = 0$. Фактически, роботы типа $(1, 1)$ имеют одно или несколько фиксированных колес с одной общей осью. У них также есть одно или несколько рулевых колес, но с одной независимой ориентацией рулевого управления ($\delta_s = 1$) и центр одного этих рулевых колес не находится на оси фиксированных колес. Следовательно, для любого робота типа $(1, 1)$ линеаризующие выходы могут быть выбраны как декартовы координаты точки P'' робота, прикрепленной к плоскости одного из рулевых колес, за исключением центра этого колеса.

Робот типа $(1, 2)$. Робот на рисунке 5 имеет два независимых рулевых колеса и два

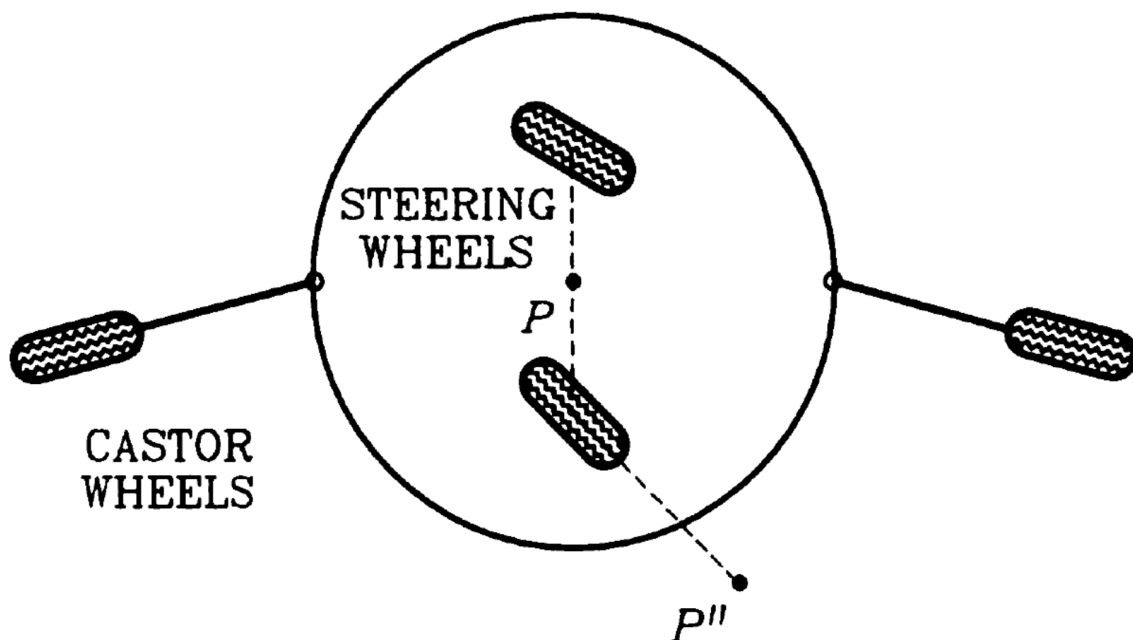


РИС. 5. Колесный мобильный робот типа $(1, 2)$.

роликовых колеса. Точка P – это центр оси, соединяющей центры двух рулевых колес. Причем постоянная L составляет половину длины этой оси. Снова существует «физический» выбор линеаризующих выходов (см. таблицу 1), который позволяет решить задачу слежения за точкой для материальной точки P'' , прикрепленной к плоскости одного из двух независимых рулевых колес, за исключением центра соответствующего колеса. Условия регулярности также означают, что $\beta_{s1} \neq 2k\pi$. Для колесного мобильного робота

типа $(1, 2)$, благодаря блочно-треугольной форме соответствующей развязывающей матрицы $K(\vartheta, \beta_s)$, сингулярные конфигурации можно избежать в каждый момент времени соответствующим выбором управляющего входа v_2 , тогда как v_1 обеспечивает линеаризацию динамики вектора ошибки слежения \tilde{z}_1 . Роботы типа $(1, 2)$ не имеют фиксированных колес и оснащены двумя или более рулевыми колесами, два из которых ориентируются независимо. Таким образом, для любого колесного мобильного робота типа $(1, 2)$ возможный выбор линеаризующих выходов – это декартовы координаты точки, привязанной к плоскости одного из рулевых колес, за исключением центра соответствующего колеса.

Для каждого типа колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью нетрудно удостовериться из выражения (17), что развязывающая матрица $K(\xi, \beta_s)$ зависит только от функций синусов и косинусов углов ϑ и β_s , а из таблицы 1 можно увидеть, что $z_3 = k(\xi, \beta_s)$ зависит от ϑ и β_s только линейно. Отсюда легко выводится, что матрица \bar{Q} в (14), определенная с помощью (21), ограничена для любых ϑ и β_s таких, что $\det(K(\vartheta, \beta_s)) > \varepsilon > 0$. Следовательно, в силу леммы 3, если опорная траектория такова, что $z_{1d}(t)$, $\dot{z}_{1d}(t)$ и $\ddot{z}_{1d}(t)$ ограничены для всех моментов времени t и $\dot{z}_{1d}(t)$ принадлежит пространству L_1 , можно заключить, что задача слежения за точкой разрешима для любого колесного мобильного робота с ограниченной мобильностью с фиксированной точкой P' на тележке, когда $\delta_m = 2$, и фиксированной точкой P'' , расположенной на оси одного из рулевых колес (но не в его центре), когда $\delta_m = 1$.

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ ПО СОСТОЯНИЮ

Целью данного раздела является использование линеаризации динамической обратной связью для решения задачи слежения за положением колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью. Рассмотрены также особенности процедуры синтеза, гарантирующие отсутствие сингулярностей.

3.1. Алгоритм динамического расширения. Рассмотрим динамическую систему, заданную в общей форме пространства состояний

$$(25) \quad \dot{z} = f(z) + \sum_{i=1}^m g_i(z) u_i,$$

где состояние $z \in R^n$, вход $u \in R^m$ и векторные поля f и g_i являются гладкими.

В случаях, когда система не является полностью линеаризуемой с помощью диффеоморфизма и статической обратной связи по состоянию (как для роботов с ограниченной мобильностью, см. предыдущий раздел), полная линеаризация, тем не менее, может быть выполнена путем рассмотрения более общих законов динамической обратной связи вида

$$(26) \quad \begin{aligned} u &= \alpha(z, \chi, w), \\ \dot{\chi} &= a(z, \chi, w), \end{aligned}$$

где w – вспомогательный управляющий вход. Такая динамическая обратная связь получается путем выбора m подходящих линеаризующих функций выходов

$$(27) \quad y_i = h_i(z), \quad i = \overline{1, m}$$

что приводит к особой развязывающей матрице. Применим к системе (25) и (27) так называемый алгоритм динамического расширения. Идея этого алгоритма состоит в том, чтобы задержать некоторые «комбинации входов», одновременно влияющие на несколько выходов, путем добавления интеграторов, чтобы позволить другим входам действовать в то же время и, следовательно, можно надеяться получить расширенную развязанную систему вида

$$(28) \quad y_k^{(r_k)} = w_k, \quad k = \overline{1, m},$$

где $y_k^{(i)}$ обозначает i -ю производную y_k по времени, r_k – относительная степень y_k , а w_k – новые вспомогательные входы. Более того, чтобы осуществить полную линеаризацию, для расширенной системы размерности n_e должно выполняться

$$(29) \quad \sum_{i=1}^m r_i = n_e,$$

где n_e – размерность расширенного вектора состояния $z_e = [z^T \ \chi^T]^T$, и если условие (29) выполнено, то

$$(30) \quad \zeta = \Psi(z_e) = \left[y_1 \ \dots \ y_1^{(r_1-1)} \ \dots \ y_m \ \dots \ y_m^{(r_m-1)} \right]^T$$

является локальным диффеоморфизмом. Далее проиллюстрируем алгоритм динамического расширения примером.

Робот типа (2, 0). Чтобы применить алгоритм динамического расширения, мы должны выбрать линеаризирующие функции выходов, которые соответствуют сингулярной развязывающей матрице при рассмотрении статических законов обратной связи по состоянию. Из таблицы 1 возможный выбор состоит в том, чтобы взять в качестве выходных функций координаты точки P' , расположенной на оси фиксированных колес ($\delta = 2\pi k$), т. е.

$$(31) \quad \begin{aligned} h_1 &= x + e \cos \vartheta, \\ h_2 &= y + e \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Для начала рассмотрим позиционную кинематическую модель колесного мобильного робота типа (2, 0) в пространстве состояний

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\sin \vartheta \eta_1, \\ \dot{y} &= \cos \vartheta \eta_1, \\ \dot{\vartheta} &= \eta_2. \end{aligned}$$

Нетрудно удостовериться, что единственная комбинация входов, появляющаяся в \dot{h}_1 и \dot{h}_2 – это $\chi_1 = \eta_1 + e\eta_2$, где χ_1 – линейная скорость точки P' . Следовательно, применяя алгоритм динамического расширения, мы можем задержать χ_1 , введя новый вход w_1 такой, что

$$(33) \quad \dot{\chi}_1 = w_1.$$

Тогда, на основании расчета \ddot{h}_1 и \ddot{h}_2 , расширенная система с расширенным вектором состояния

$$z_e = [x \ y \ \vartheta \ \chi_1]^T$$

линеаризуема статической обратной связью по состоянию с новыми входами w_1 и η_2 и диффеоморфизмом

$$(34) \quad \Psi = [h_1 \ h_2 \ \dot{h}_1 \ \dot{h}_2].$$

Более того, поскольку

$$(35) \quad \begin{aligned} \ddot{h}_1 &= -\chi_1 \cos \vartheta \eta_2 - \sin \vartheta w_1, \\ \ddot{h}_2 &= -\chi_1 \sin \vartheta \eta_2 + \cos \vartheta w_1, \end{aligned}$$

можно заметить, что новая развязывающая матрица является особой только тогда, когда линейная скорость χ_1 точки P' равна нулю.

Рассмотрим теперь позиционную динамическую модель колесного мобильного робота типа $(2, 0)$ в пространстве состояний

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -\sin \vartheta \eta_1, \\ \dot{y} &= \cos \vartheta \eta_1, \\ \dot{\vartheta} &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_1 &= v_1, \\ \dot{\eta}_2 &= v_2. \end{aligned}$$

Нетрудно удостовериться, что единственная комбинация входов, появляющаяся в \ddot{h}_1 и \ddot{h}_2 – это $\chi_2 = v_1 + \epsilon v_2 = \dot{\chi}_1$. Следовательно, применяя алгоритм динамического расширения, мы можем задержать χ_2 , введя новый вход w_2 такой, что

$$(37) \quad \dot{\chi}_2 = w_2.$$

Тогда, на основании расчета $h_1^{(3)}$ и $h_2^{(3)}$, расширенная система с расширенным вектором состояния

$$z_e = [x \ y \ \vartheta \ \chi_1 \ \eta_2 \ \chi_2]^T$$

линеаризуема статической обратной связью по состоянию с новыми входами w_2 и v_2 и диффеоморфизмом

$$(38) \quad \Psi = [h_1 \ h_2 \ \dot{h}_1 \ \dot{h}_2 \ \ddot{h}_1 \ \ddot{h}_2].$$

Более того, поскольку

$$(39) \quad \begin{aligned} h_1^{(3)} &= -w_2 \sin \vartheta - v_2 \cos \vartheta \chi_1 - 2\eta_2 \cos \vartheta \chi_2 + \eta_2^2 \sin \vartheta \chi_1, \\ h_2^{(3)} &= w_2 \cos \vartheta - v_2 \sin \vartheta \chi_1 - 2\eta_2 \sin \vartheta \chi_2 - \eta_2^2 \cos \vartheta \chi_1, \end{aligned}$$

можно заметить, что новая развязывающая матрица также является особой тогда, когда линейная скорость χ_1 точки P' равна нулю. Резюмируем сказанное выше следующей леммой.

Лемма 4. Рассматривая в качестве функций выходов декартовы координаты (1) точки P' на оси фиксированных колес (что соответствует $\delta = 2\pi k$), колесные мобильные роботы типа $(2, 0)$ в общем случае являются полностью линеаризуемыми динамической обратной связью.

Можно увидеть, что кинематическая и динамическая модели пространства состояний роботов типа $(2, 0)$ являются полностью линеаризуемыми динамической обратной связью при помощи одних и тех же линеаризирующих функций выходов. В следующем разделе этот результат будет обобщен на все типы колесных мобильных роботов.

3.2. Дифференциальная плоскостность. Система, которая является линеаризуемой с помощью алгоритма динамического расширения, является примером так называемой дифференциально плоской системы. Линеаризирующие выходы $y_i = h_i(z)$ также называются дифференциально плоскими выходами. И наоборот, дифференциальная плоскостность по определению относится к системе, которая может быть полностью линеаризована с помощью динамической обратной связи по состоянию. В данном контексте представляют интерес два следующих свойства дифференциально плоских систем.

Свойство 2. Любая управляемая система без смещения с m входами и не более чем $m + 2$ состояниями является дифференциально плоской системой.

Свойство 3. Если нелинейная система $\dot{z} = f(z, u)$ является дифференциально плоской, то дополненная система $\dot{z} = f(z, u)$, $\dot{u} = v$ также является дифференциально плоской с теми же плоскими функциями выходов.

Утверждение о том, что любой колесный мобильный робот является дифференциально плоской системой, сформулируем в виде леммы.

Лемма 5. Позиционная кинематическая модель (4) и позиционная динамическая модель (2)-(3) являются дифференциально плоскими системами и поэтому в общем случае полностью линеаризуемы с помощью динамической обратной связи по состоянию.

Доказательство. Рассмотрим сперва позиционную кинематическую модель (4) колесных мобильных роботов. Очевидно, что это система без смещения. Из анализа в предыдущем разделе также известно, что позиционная кинематическая модель представляет собой модель пространства состояний с $\delta_m + \delta_s$ входами и $3 + \delta_s$ переменными состояниями, удовлетворяющими следующему неравенству:

$$3 + \delta_s \leq \delta_m + \delta_s + 2.$$

Тогда из свойства 2 следует, что позиционная кинематическая модель является дифференциально плоской системой и, в свою очередь, из свойства 3 следует, что позиционная динамическая модель также является дифференциально плоской системой. \square

Чтобы использовать линеаризацию обратной связью для решения задачи слежения за положением остается охарактеризовать линеаризирующие функции выходов для каждого типа робота. Однако, прежде стоит кратко рассмотреть вопрос об особенностях (сингулярностях).

3.3. Избегание особенностей. Развязывающая матрица $K(z_e)$ представляет собой квадратную матрицу с элементами вида

$$(40) \quad K_{ij}(z_e) = \frac{\partial y_i^{(r_i)}}{\partial u_j}.$$

Очевидно, что линеаризующий закон управления становится особым (сингулярным), когда определитель развязывающей матрицы $K(z_e)$ равен нулю. Обычно это соответствует $(n_e - 1)$ -мерному подмногообразию в расширенном пространстве состояний. Известно, что это подмногообразие содержит область, в которой диффеоморфизм $\Psi(z_e)$ является особым (сингулярным). Следовательно, в любой точке, где развязывающая матрица не является особой, существует диффеоморфизм $\Psi(z_e)$.

Задача состоит в том, чтобы использовать линеаризацию динамической обратной связью для достижения устойчивого слежения за опорной траекторией. Точнее, пусть $z_r(t)$ – эталонная гладкая траектория, тогда, согласно (27) имеем

$$(41) \quad y_{ri} = h_i(z_r), \quad i = \overline{1, m}$$

и, согласно (30), $\zeta_r(t)$ определяется как

$$(42) \quad \zeta_r = \begin{bmatrix} y_{r1} & \dots & y_{r1}^{(r_1-1)} & \dots & y_{rm} & \dots & y_{rm}^{(r_m-1)} \end{bmatrix}.$$

Это означает, что

$$(43) \quad z_{er} = \Psi^{-1}(\zeta_r).$$

Следующая лемма показывает, как выбрать вспомогательное управление w (см. выражение (28)), чтобы добиться устойчивого слежения за $\zeta_r(t)$ и, следовательно, $z_r(t)$.

Лемма 6. Вспомогательные законы управления w_i ($i = \overline{1, m}$) вида

$$(44) \quad w_i = y_{ri}^{(r_i)} + \sum_{j=0}^{r_i-1} \alpha_i^j \left(y_i^{(j)} - y_{ri}^{(j)} \right)$$

в общем гарантируют, что вектор траекторных ошибок $\tilde{\zeta} = \zeta - \zeta_r$ экспоненциально сходится к нулю, при условии, что произвольные константы α_i^j выбраны так, чтобы полюса линейной замкнутой системы находились в левой полуплоскости. Кроме того, $\tilde{z} = z - z_r$ также асимптотически сходится к нулю.

Доказательство. Экспоненциальная сходимость $\tilde{\zeta}$ к нулю очевидна. Более того, поскольку Ψ является диффеоморфизмом, это означает, что z_e стремится к z_{er} и, следовательно, z стремится к z_r . \square

Следующая лемма показывает, что если опорная траектория отделена от особенностей (не содержит особых точек), то то же самое будет справедливо и для замкнутой траектории при условии, что начальные условия выбраны надлежащим образом.

Лемма 7. Пусть система (25) в общем случае полностью линеаризуема динамической обратной связью по состоянию и диффеоморфизмом

$$(45) \quad \zeta = \Psi(z_e).$$

Тогда если

- существует открытая односвязная область D , входящая в

$$S = \{\zeta \in R^{n_e} : \det(K(\Psi^{-1}(\zeta))) \neq 0\};$$

- эталонная траектория $\zeta_r(t)$ принадлежит D для всех моментов времени t и, кроме того, существует положительная непрерывная функция $M_1(t)$ такая, что

$$(46) \quad \|\tilde{\zeta}(t)\| < M_1(t) \Rightarrow \zeta(t) \in D,$$

где $\tilde{\zeta} = \zeta - \zeta_r$;

- начальные условия удовлетворяют выражению

$$(47) \quad \|\tilde{\zeta}(0)\| \leq \min_t F(t), \quad F(t) = \left(\frac{M_1(t) - \epsilon}{K_2(t)} \right)$$

для некоторой положительной константы ϵ , где $K_2(t) = e^{-r_1 t} K_1 > 0$ характеризует экспоненциально устойчивую динамику замкнутой системы (при $K_1 > 0$ и $r_1 > 0$):

$$(48) \quad \|\tilde{\zeta}(t)\| \leq K_2(t) \|\tilde{\zeta}(0)\| \quad \forall t;$$

то выполняется

$$(49) \quad \zeta(t) \in D \quad \forall t.$$

Доказательство. Чтобы доказать справедливость (49) достаточно показать, что

$$(50) \quad \|\tilde{\zeta}(t)\| < M_1(t) \quad \forall t.$$

От противного предположим, что существует положительное время T такое, что

$$(51) \quad \begin{aligned} \|\tilde{\zeta}(T)\| &= M_1(T), \\ \|\tilde{\zeta}(t)\| &< M_1(t) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

На промежутке $[0, T)$ из выражений (48) и (47) имеем

$$(52) \quad \left\| \tilde{\zeta}(t) \right\| \leq M_1(t) - \epsilon.$$

По непрерывности $\tilde{\zeta}(t)$ и $M_1(t)$ уравнение (52) противоречит (50), что завершает доказательство. \square

Нетрудно показать, что следующий выбор $M_1(t)$ удовлетворяет (46):

$$(53) \quad M_1(t) = \min_{\zeta} \left\| \tilde{\zeta}(t) \right\|$$

когда $\det(K(\Psi^{-1}(\zeta))) = 0$.

3.4. Решение задачи слежения за положением. Результаты применения алгоритма динамического расширения к каждой из четырех позиционных кинематических моделей колесных мобильных роботов с ограниченной мобильностью сведены в таблицу 2, где для каждого случая представлены линеаризующие функции выходов $h_i(z)$, расширенный вектор состояния z_e , диффеоморфизм $\Psi(z_e)$ и условия регулярности, гарантирующие, что развязывающая матрица $K(z_e)$ расширенной системы не является особой.

В таблице 2 для колесных мобильных роботов типа $(2, 0)$ обозначение χ_1 означает

$$\chi_1 = \eta_1 + e\eta_2,$$

а для колесных мобильных роботов типа $(1, 1)$ обозначение χ_2 означает

$$\chi_2 = u_1(L \sin \beta_s + e \cos \beta_s) + \eta_1 \zeta_1(L \cos \beta_s - e \sin \beta_s).$$

Из таблицы 2 можно увидеть, что для любого типа колесного мобильного робота вектор координат положения $\xi = [x \ y \ \vartheta]^T$ является частью расширенного вектора состояния z_e . Тогда из леммы 6 следует, что задача слежения за положением в общем случае решается с помощью линеаризации динамической обратной связью.

Ранее было показано, что для колесных мобильных роботов типа $(2, 0)$ линеаризующие функции выходов представляют собой координаты точки P' , расположенной на оси фиксированных колес, и задача слежения за положением разрешима до тех пор, пока линейная скорость χ_1 точки P' не равна нулю.

Для колесных мобильных роботов типа $(2, 1)$ линеаризующие функции выходов представляют собой координаты центра P' рулевого колеса, дополненные ориентацией ϑ , и задача слежения за положением разрешима до тех пор, пока линейная скорость η_1 точки P' не равна нулю.

Для колесных мобильных роботов типа $(1, 1)$ линеаризующие функции выходов представляют собой декартовы координаты точки P' на оси фиксированных колес, и задача слежения за положением разрешима до тех пор, пока линейная скорость η_1 точки P' не равна нулю.

Для колесных мобильных роботов типа $(1, 2)$ линеаризующие функции выходов представляют собой декартовы координаты, заданные формулой (1) точки P' тележки, дополненные ориентацией ϑ , и задача слежения за положением разрешима до тех пор, пока η_1 , $\sin \beta_{s1}$ и $\sin \beta_{s2}$ не равны нулю.

ТАБЛИЦА 2. Линеаризующие выходы, расширенный вектор состояния, диффеоморфизм и условия регулярности для колесных мобильных роботов роботов различных типов

(δ_m, δ_s)	$y_i = h_i(z)$	z_e	$\zeta = \Psi(z_e)$	$\det(K(z_e)) \neq 0$
$(2, 0)$	$\begin{bmatrix} x + e \cos \vartheta \\ y + e \sin \vartheta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \\ \chi_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix}$	$\chi_1 \neq 0$
$(2, 1)$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \\ \beta_s \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix}$	$\eta_1 \neq 0$
$(1, 1)$	$\begin{bmatrix} x + e \cos \vartheta \\ y + e \sin \vartheta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \\ \beta_s \\ \eta_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \end{bmatrix}$	$\eta_1 \neq 0$
$(1, 2)$	$\begin{bmatrix} x + e \cos(\vartheta + \delta) \\ y + e \sin(\vartheta + \delta) \\ \vartheta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \\ \beta_{s1} \\ \beta_{s2} \\ \eta_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix}$	$L\eta_1 \sin \beta_{s1} \sin \beta_{s2} \neq 0$

3.5. Избегание особенностей для колесных мобильных роботов типа $(2, 0)$. Следующая лемма характеризует функцию $M_1(t)$ из леммы 7 для колесных мобильных роботов типа $(2, 0)$. Из таблицы 2 известно, что для этого типа роботов $z_e = [\xi^T \ \chi_1]^T$.

Лемма 8. Для колесных мобильных роботов типа $(2, 0)$ функция $M_1(t)$, удовлетворяющая условию (53), имеет вид

$$(54) \quad M_1(t) = |\chi_{1r}(t)|,$$

где $\chi_{1r}(t)$ – эталонная траектория линейной скорости точки P' , заданная выражением (31). Отсюда следует, что, если условие (47) выполняется с функцией вида (54), то робот будет следовать по эталонной траектории без особенностей.

Доказательство. Из выражений (53) и (34) нетрудно получить, что

$$M_1(t) = \min \left| h_1^2 + h_2^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2 \right|^{\frac{1}{2}}$$

при $\chi_1 = 0$, т. е.

$$M_1(t) = |\chi_{1r}(t)|.$$

Более того, диффеоморфизм Ψ , заданный выражением (45), является особым когда $\chi_1 = 0$.

Введем обозначение

$$S^+ = \{z_e : \chi_1 > 0\}$$

и, аналогичным образом,

$$S^- = \{z_e : \chi_1 < 0\}.$$

Тогда Ψ можно инвертировать соответственно на $\Psi(S^+)$ и $\Psi(S^-)$ следующим образом:

$$z_e = \Psi^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} h_1 - e \cos \left(-\arctan \left(\frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_2} \right) + f(\dot{h}_2) \pi \right) \\ h_2 - e \sin \left(-\arctan \left(\frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_2} \right) + f(\dot{h}_2) \pi \right) \\ -\arctan \left(\frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_2} \right) + f(\dot{h}_2) \pi \\ \sqrt{\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2} \end{bmatrix}$$

и

$$z_e = \Psi^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} h_1 - e \cos \left(-\arctan \left(\frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_2} \right) + \left(1 - f(\dot{h}_2) \right) \pi \right) \\ h_2 - e \sin \left(-\arctan \left(\frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_2} \right) + \left(1 - f(\dot{h}_2) \right) \pi \right) \\ -\arctan \left(\frac{\dot{h}_1}{\dot{h}_2} \right) + f(\dot{h}_2) \pi \\ -\sqrt{\dot{h}_1^2 + \dot{h}_2^2} \end{bmatrix},$$

где

$$(55) \quad f(a) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \geq 0 \\ 1 & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

и

$$(56) \quad \arctan \left(\frac{a}{b} \right) = \operatorname{sgn}(a) \frac{\pi}{2}$$

при $b = 0$. Следовательно, Ψ^{-1} хорошо определен, как только определен знак $\chi_1(0)$. Заключение справедливо после применения леммы 7. \square

Стоит отметить, что для того, чтобы эталонная траектория не была особой (сингулярной), $\chi_{1r}(t)$ всегда должна иметь один и тот же знак, и то же самое справедливо для фактической траектории с замкнутым контуром. Следовательно, $\chi_1(0)$ и $\chi_{1r}(0)$ должны иметь один и тот же знак. В случае выполнения условия (47), если $\chi_{1r}(0) > 0$ ($\chi_{1r}(0) < 0$), робот будет следовать по эталонной траектории роликовым колесом назад (вперед).