



Алгоритмы стабилизации траекторий
мобильных роботов

А. Ю. Краснов, С. А. Чепинский

Факультет Систем Управления и Робототехники

1 ноября 2023 г.

Contents

Введение

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Алгоритмы траекторного управления

Движение на плоскости

Движение на плоскости в динамическом окружении

Движение в пространстве

Движение в пространстве (пассивность)

Движение в пространстве в динамическом окружении

Эксперименты

Мобильный робот “Robotino”

Результаты экспериментов

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Мобильные роботы

Мобильные роботы



Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

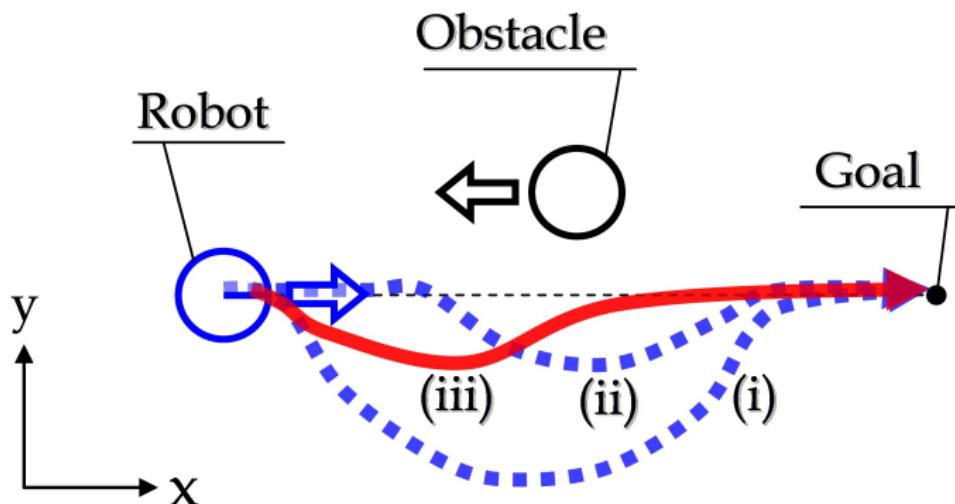
Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Избегание столкновений

Избегание столкновений



Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

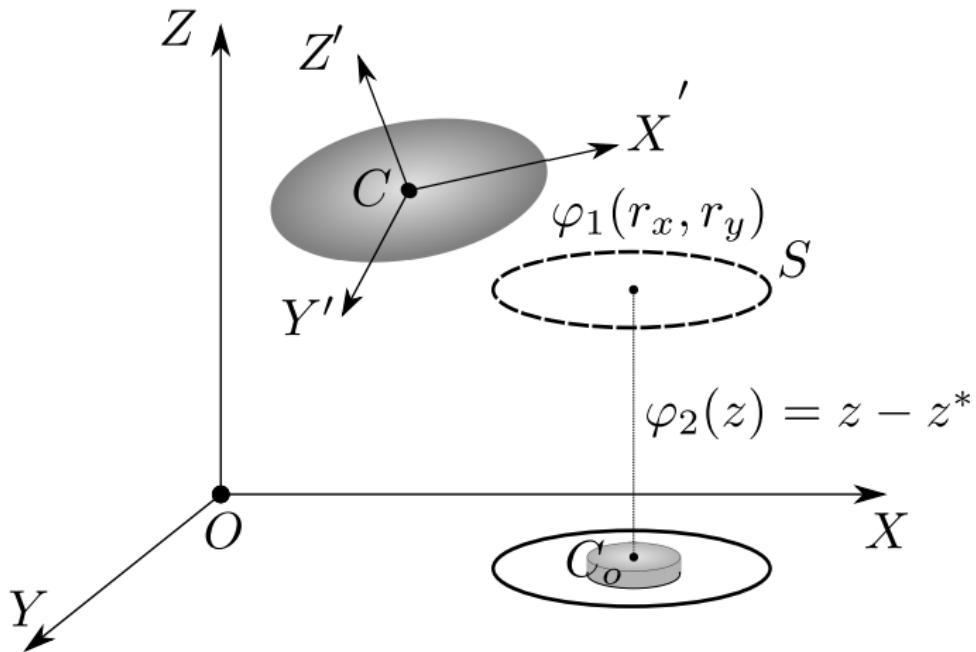
Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Следование за подвижным объектом

Следование за подвижным объектом



Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Управление подводными мобильными роботами

Управление подводными мобильными роботами



Проблема: робот не может остановиться по достижении цели.
Потенциальное решение: движение по замкнутой траектории в
окрестности цели.

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

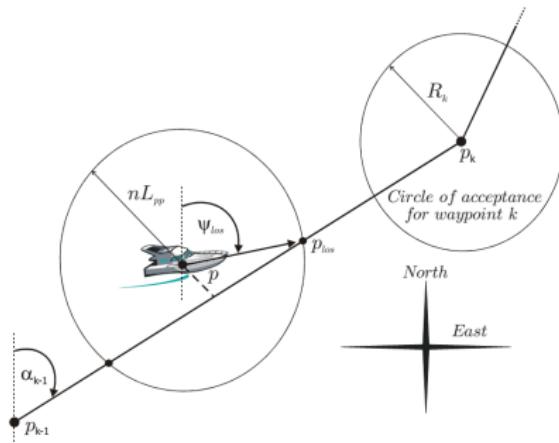
Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Слежение за траекторией

Слежение за траекторией

- ▶ Слежение за виртуальной целью
- ▶ На основе бэкстеппинга
- ▶ Метод прямой видимости (LOS, Line-of-Sight)



Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Стабилизация траектории

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Стабилизация траектории

- ▶ Скользящие режимы

Стабилизация траектории

- ▶ Скользящие режимы
- ▶ Пассивификация

Стабилизация траектории

- ▶ Скользящие режимы
- ▶ Пассивификация
- ▶ Линеаризация обратной связью

Стабилизация траектории

- ▶ Скользящие режимы
- ▶ Пассивификация
- ▶ Линеаризация обратной связью
 - ▶ Трансверсальная линеаризация

Стабилизация траектории

- ▶ Скользящие режимы
- ▶ Пассивификация
- ▶ Линеаризация обратной связью
 - ▶ Трансверсальная линеаризация
 - ▶ Управление на основе векторных полей

Стабилизация траектории

- ▶ Скользящие режимы
- ▶ Пассивификация
- ▶ Линеаризация обратной связью
 - ▶ Трансверсальная линеаризация
 - ▶ Управление на основе векторных полей
 - ▶ Согласованное управление (И.В. Мирошник)

Основные особенности методов стабилизации многообразий

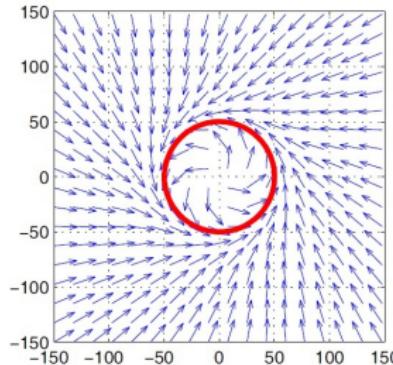
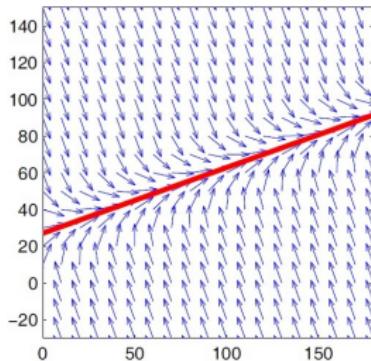
- ▶ Задание траектории в неявной форме

Основные особенности методов стабилизации многообразий

- ▶ Задание траектории в неявной форме
- ▶ Зависимость от текущего положения

Основные особенности методов стабилизации многообразий

- ▶ Задание траектории в неявной форме
- ▶ Зависимость от текущего положения
- ▶ Возможность обеспечения аттрактивности заданной траектории



Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Положение и траектория

Положение и траектория

Математическое описание кривых

- ▶ в явном виде

$$y = f(x);$$

Положение и траектория

Математическое описание кривых

- ▶ в явном виде

$$y = f(x);$$

- ▶ в неявном виде

$$f(x, y) = 0;$$

Положение и траектория

Математическое описание кривых

- ▶ в явном виде

$$y = f(x);$$

- ▶ в неявном виде

$$f(x, y) = 0;$$

- ▶ параметризованное

$$x = f(t),$$

$$y = g(t).$$

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Формальная постановка задачи траекторного управления

Формальная постановка задачи траекторного управления

- ▶ Геометрическая подзадача:

$$\text{dist}(q - f(q)) = 0,$$

где $f(q)$ – заданная траектория, q – текущее положение мобильного робота.

Формальная постановка задачи траекторного управления

- ▶ Геометрическая подзадача:

$$dist(q - f(q)) = 0,$$

где $f(q)$ – заданная траектория, q – текущее положение мобильного робота.

- ▶ Кинематическая подзадача:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta v = \lim_{t \rightarrow \infty} (v - v^*) = 0,$$

где v – текущая скорость,
 v^* – заданная скорость.

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Задачи траекторного управления

Возможные решения

Постановка задачи траекторного управления

Дополнительные задачи управления

Дополнительные задачи управления

- ▶ Стабилизация ориентации

Дополнительные задачи управления

- ▶ Стабилизация ориентации
- ▶ Оценивание переменных вектора состояния

Дополнительные задачи управления

- ▶ Стабилизация ориентации
- ▶ Оценивание переменных вектора состояния
- ▶ Параметрическая идентификация

Дополнительные задачи управления

- ▶ Стабилизация ориентации
- ▶ Оценивание переменных вектора состояния
- ▶ Параметрическая идентификация
- ▶ Компенсация возмущений

Используемые преобразования координат

Используемые преобразования координат

Прямое преобразование

$$(x_b, y_b) \xrightarrow{T(\alpha)} (x_m, y_m) \xrightarrow{\Upsilon(q)} (s, e).$$

Используемые преобразования координат

Прямое преобразование

$$(x_b, y_b) \xrightarrow{T(\alpha)} (x_m, y_m) \xrightarrow{\Upsilon(q)} (s, e).$$

Обратное преобразование

$$(s, e) \xrightarrow{\Upsilon^{-1}(q)} (x_m, y_m) \xrightarrow{T^{-1}(\alpha)} (x_b, y_b).$$

Движение на плоскости

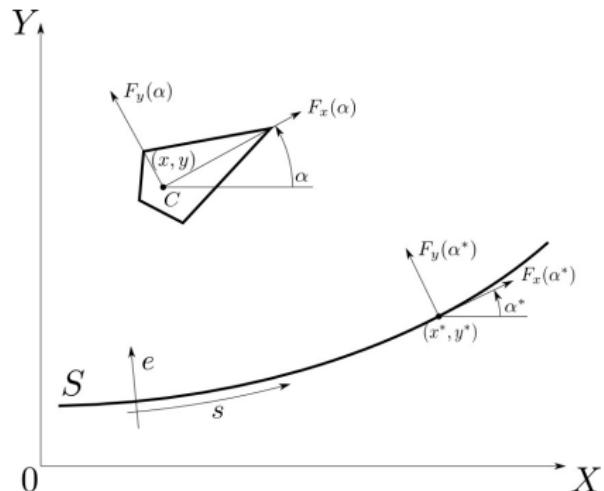
Движение на плоскости

Динамическая модель
движения центра масс
робота

$$\dot{v}_x = v_y \omega + \frac{1}{m} F_x, \quad (1)$$

$$\dot{v}_y = -v_x \omega + \frac{1}{m} F_y, \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} M_c, \quad (3)$$



Движение на плоскости

Движение на плоскости

Линейные скорости в опорном и подвижном базисах

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T^T(\alpha) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $T^T(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ – поворотная матрица.

Движение на плоскости

Линейные скорости в опорном и подвижном базисах

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T^T(\alpha) \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $T^T(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ – поворотная матрица.

Линейные ускорения в опорном базисе

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} T^T(\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Движение на плоскости

Движение на плоскости

Заданная траектория как неявно заданная гладкая кривая S :

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (6)$$

Движение на плоскости

Заданная траектория как неявно заданная гладкая кривая S :

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (6)$$

локальная координата s

$$s = \psi(x, y) \quad (7)$$

Движение на плоскости

Заданная траектория как неявно заданная гладкая кривая S :

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (6)$$

локальная координата s

$$s = \psi(x, y) \quad (7)$$

Выбор функций (6) и (7) ограничен условием регулярности, подразумевающим, что матрица Якоби

$$\Upsilon(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8)$$

невырождена для всех (x, y) , принадлежащих кривой S , т.е.

$$\det \Upsilon(x, y) \neq 0$$

Регулярные геометрические объекты

Регулярные геометрические объекты

Для регулярных геометрических объектов существует нормализованное описание с ортогональной матрицей Якоби

$$\Upsilon(x, y) = T(\alpha^*(s)) = \begin{bmatrix} \cos \alpha^*(s) & \sin \alpha^*(s) \\ -\sin \alpha^*(s) & \cos \alpha^*(s) \end{bmatrix} \in SO(2)$$

где $T(\alpha^*(s))$ – матрица поворота подвижного базиса Френе,
 $\alpha^*(s)$ – зависящий от s угол ориентации базиса Френе.

Регулярные геометрические объекты

Для регулярных геометрических объектов существует нормализованное описание с ортогональной матрицей Якоби

$$\Upsilon(x, y) = T(\alpha^*(s)) = \begin{bmatrix} \cos \alpha^*(s) & \sin \alpha^*(s) \\ -\sin \alpha^*(s) & \cos \alpha^*(s) \end{bmatrix} \in SO(2)$$

где $T(\alpha^*(s))$ – матрица поворота подвижного базиса Френе,
 $\alpha^*(s)$ – зависящий от s угол ориентации базиса Френе.

Матрица $T(\alpha^*(s))$ является решением уравнения

$$\dot{T}^*(\alpha^*) = \dot{s}\xi(s)ET^*(\alpha^*), \quad (9)$$

где $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\xi(s)$ – кривизна траектории.

Регулярные геометрические объекты

Для регулярных геометрических объектов существует нормализованное описание с ортогональной матрицей Якоби

$$\Upsilon(x, y) = T(\alpha^*(s)) = \begin{bmatrix} \cos \alpha^*(s) & \sin \alpha^*(s) \\ -\sin \alpha^*(s) & \cos \alpha^*(s) \end{bmatrix} \in SO(2)$$

где $T(\alpha^*(s))$ – матрица поворота подвижного базиса Френе,
 $\alpha^*(s)$ – зависящий от s угол ориентации базиса Френе.

Матрица $T(\alpha^*(s))$ является решением уравнения

$$\dot{T}^*(\alpha^*) = \dot{s}\xi(s)ET^*(\alpha^*), \quad (9)$$

где $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\xi(s)$ – кривизна траектории.

Из выражения (9) также следует

$$\dot{\alpha^*} = \dot{s}\xi(s). \quad (10)$$

Угловая ориентация

Угловая ориентация

Ориентация относительно кривой S

$$\alpha = \alpha^*(s) + \Delta\alpha, \quad (11)$$

где $\Delta\alpha = const$ – желаемая ориентация робота относительно траектории.

Угловая ориентация

Ориентация относительно кривой S

$$\alpha = \alpha^*(s) + \Delta\alpha, \quad (11)$$

где $\Delta\alpha = \text{const}$ – желаемая ориентация робота относительно траектории.

В матричном выражении (11) принимает вид

$$T(\alpha) = T(\Delta\alpha)T(\alpha^*). \quad (12)$$

Введение
Алгоритмы траекторного управления
Эксперименты
Контакты

Движение на плоскости
Движение на плоскости в динамическом окружении
Движение в пространстве
Движение в пространстве (пассивность)
Движение в пространстве в динамическом окружении

Отклонения

Отклонения

Нарушение условия (6) характеризуется ортогональным отклонением

$$e = \varphi(x, y). \quad (13)$$

Отклонения

Нарушение условия (6) характеризуется ортогональным отклонением

$$e = \varphi(x, y). \quad (13)$$

Нарушение условия (10) характеризуется угловым отклонением

$$\delta = \alpha - \alpha^* + \Delta\alpha. \quad (14)$$

Отклонения

Нарушение условия (6) характеризуется ортогональным отклонением

$$e = \varphi(x, y). \quad (13)$$

Нарушение условия (10) характеризуется угловым отклонением

$$\delta = \alpha - \alpha^* + \Delta\alpha. \quad (14)$$

Задача траекторного управления

Задача траекторного управления

Необходимо отыскать такие управляющие воздействия F_x , F_y и M , которые бы в замкнутой системе обеспечили

Задача траекторного управления

Необходимо отыскать такие управляющие воздействия F_x , F_y и M , которые бы в замкнутой системе обеспечили

- ▶ стабилизацию положения робота относительно кривой S ;

Задача траекторного управления

Необходимо отыскать такие управляющие воздействия F_x , F_y и M , которые бы в замкнутой системе обеспечили

- ▶ стабилизацию положения робота относительно кривой S ;
- ▶ стабилизацию ориентации робота относительно кривой S ;

Задача траекторного управления

Необходимо отыскать такие управляющие воздействия F_x , F_y и M , которые бы в замкнутой системе обеспечили

- ▶ стабилизацию положения робота относительно кривой S ;
- ▶ стабилизацию ориентации робота относительно кривой S ;
- ▶ поддержание заданной касательной скорости движения

$$\Delta s = \dot{s}^* - \dot{s}. \quad (15)$$

Преобразование координат

Преобразование координат

Преобразуем модель (1)-(3) к задачно-ориентированному базису с выходами s , e и δ . Для этого продифференцируем (7), (13) и (14):

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \Upsilon(x, y) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T(\alpha^*) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\dot{\delta} = -\xi(s)\dot{s} + \omega. \quad (17)$$

Преобразование координат

Преобразуем модель (1)-(3) к задачно-ориентированному базису с выходами s , e и δ . Для этого продифференцируем (7), (13) и (14):

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \Upsilon(x, y) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T(\alpha^*) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\dot{\delta} = -\xi(s)\dot{s} + \omega. \quad (17)$$

Определим обратное преобразование:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = T^T(\alpha^*) \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix},$$

$$\omega = \dot{\delta} + \xi(s)\dot{s}.$$

Введение
Алгоритмы траекторного управления
Эксперименты
Контакты

Движение на плоскости
Движение на плоскости в динамическом окружении
Движение в пространстве
Движение в пространстве (пассивность)
Движение в пространстве в динамическом окружении

Синтез управления

Синтез управления

Вновь продифференцируем (16) и (17) с учетом (5), (9) и (12):

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \xi(s)\dot{s}E^T \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} T^T(\Delta\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\ddot{\delta} + \xi(s)\ddot{s} + \dot{\xi}(s)\dot{s} = \frac{1}{J}M. \quad (19)$$

Синтез управления

Вновь продифференцируем (16) и (17) с учетом (5), (9) и (12):

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \xi(s) \dot{s} E^T \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} T^T(\Delta\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\ddot{\delta} + \xi(s) \ddot{s} + \dot{\xi}(s) \dot{s} = \frac{1}{J} M. \quad (19)$$

Введем виртуальные регуляторы:

$$\begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix} = \frac{1}{m} T^T(\Delta\alpha) \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$u_\delta = \frac{1}{J} M - \xi(s) u_s \quad (21)$$

Введение
Алгоритмы траекторного управления
Эксперименты
Контакты

Движение на плоскости
Движение на плоскости в динамическом окружении
Движение в пространстве
Движение в пространстве (пассивность)
Движение в пространстве в динамическом окружении

Синтез управления

Синтез управления

Подставим (20) и (21) в (18) и (19):

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \xi(s)\dot{s}E^T \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\ddot{\delta} + \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} = u_\delta. \quad (23)$$

Синтез управления

Подставим (20) и (21) в (18) и (19):

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e} \end{bmatrix} + \xi(s)\dot{s}E^T \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\ddot{\delta} + \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} = u_\delta. \quad (23)$$

Перепишем (22) и (23) с учетом (15):

$$\Delta \dot{V} + \xi(s)\dot{s}\dot{e} = -u_s,$$

$$\ddot{e} + \xi(s)\dot{s}^2 = u_e,$$

$$\ddot{\delta} + \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} = u_\delta.$$

Введение
Алгоритмы траекторного управления
Эксперименты
Контакты

Движение на плоскости
Движение на плоскости в динамическом окружении
Движение в пространстве
Движение в пространстве (пассивность)
Движение в пространстве в динамическом окружении

Синтез управления

Синтез управления

Выберем регуляторы:

$$u_s = -\xi(s)\dot{s}\dot{e} + k_s \Delta V, \quad (24)$$

$$u_e = \xi(s)\dot{s}^2 - k_{e1}\dot{e} - k_{e2}e, \quad (25)$$

$$u_\delta = \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} - k_{\delta1}\dot{\delta} - k_{\delta2}\delta, \quad (26)$$

где $k_s, k_{e1}, k_{e2}, k_{\delta1}, k_{\delta2}$ – постоянные положительные коэффициенты.

Синтез управления

Выберем регуляторы:

$$u_s = -\xi(s)\dot{s}\dot{e} + k_s \Delta V, \quad (24)$$

$$u_e = \xi(s)\dot{s}^2 - k_{e1}\dot{e} - k_{e2}e, \quad (25)$$

$$u_\delta = \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} - k_{\delta1}\dot{\delta} - k_{\delta2}\delta, \quad (26)$$

где $k_s, k_{e1}, k_{e2}, k_{\delta1}, k_{\delta2}$ – постоянные положительные коэффициенты.

Определим F_x , F_y и M

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = mT(\Delta\alpha) \begin{bmatrix} -\xi(s)\dot{s}\dot{e} + k_s \Delta V \\ \xi(s)\dot{s}^2 - k_{e1}\dot{e} - k_{e2}e \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$M = J(\xi(s)u_s + \dot{\xi}(s)\dot{s} + \xi^2(s)\dot{s}\dot{e} - k_{\delta1}\dot{\delta} - k_{\delta2}\delta). \quad (28)$$

Пример. Прямолинейная траектория

Пример. Прямолинейная траектория

Нормализованное уравнение прямой

$$\varphi(q) = -\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi_0 = 0,$$

$$\psi(q) = \cos \alpha^* x + \sin \alpha^* y + \psi_0,$$

где α^* – угол наклона прямой, $\varphi_0 = \text{const}$, $\psi_0 = \text{const}$.

Пример. Прямолинейная траектория

Нормализованное уравнение прямой

$$\varphi(q) = -\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi_0 = 0,$$

$$\psi(q) = \cos \alpha^* x + \sin \alpha^* y + \psi_0,$$

где α^* – угол наклона прямой, $\varphi_0 = \text{const}$, $\psi_0 = \text{const}$.

Матрица Якоби

$$\Upsilon(q) = \begin{bmatrix} \cos \alpha^* & \sin \alpha^* \\ -\sin \alpha^* & \cos \alpha^* \end{bmatrix} \in SO(2).$$

Пример. Прямолинейная траектория

Нормализованное уравнение прямой

$$\varphi(q) = -\sin \alpha^* x + \cos \alpha^* y + \varphi_0 = 0,$$

$$\psi(q) = \cos \alpha^* x + \sin \alpha^* y + \psi_0,$$

где α^* – угол наклона прямой, $\varphi_0 = \text{const}$, $\psi_0 = \text{const}$.

Матрица Якоби

$$\Upsilon(q) = \begin{bmatrix} \cos \alpha^* & \sin \alpha^* \\ -\sin \alpha^* & \cos \alpha^* \end{bmatrix} \in SO(2).$$

Кривизна траектории равна 0.

Пример. Прямолинейная траектория

Пример. Прямолинейная траектория

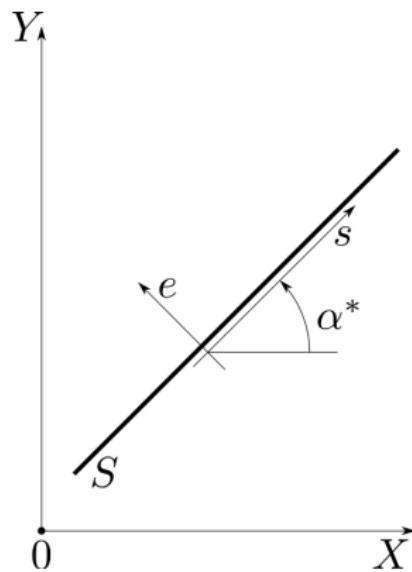


Figure: Прямолинейная траектория.

Пример. Движение по прямой

Пример. Движение по прямой

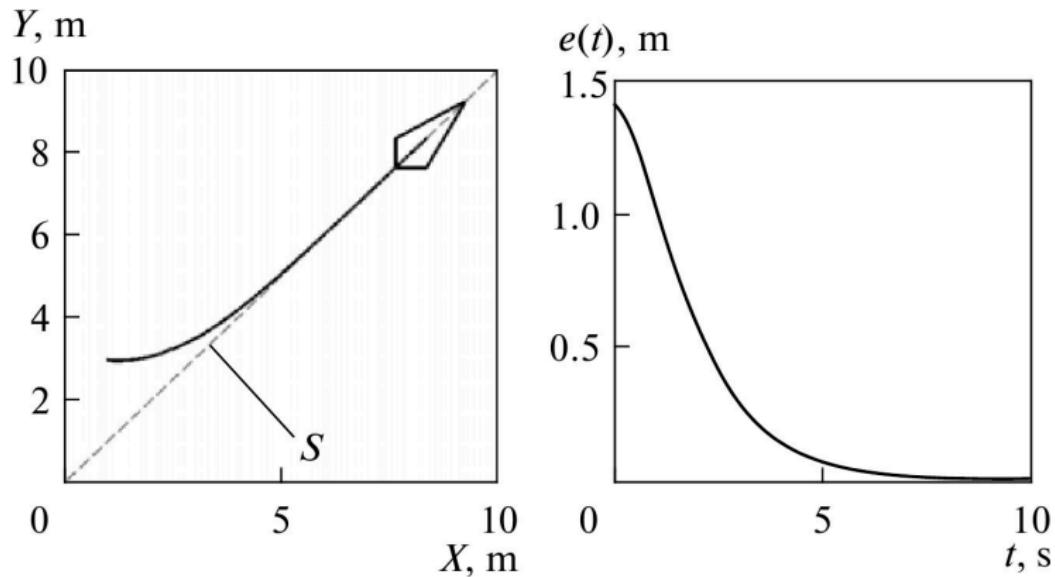


Figure: Результат моделирования движения по прямолинейной траектории.

Пример. Дуга окружности

Пример. Дуга окружности

Нормализованное уравнение

$$\varphi(q) = \frac{1}{2R}(R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) = 0,$$

$$\psi(q) = R \arctan \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}.$$

Пример. Дуга окружности

Нормализованное уравнение

$$\varphi(q) = \frac{1}{2R}(R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) = 0,$$

$$\psi(q) = R \arctan \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}.$$

Матрица Якоби

$$\Upsilon(q) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -(y - y_0) & (x - x_0) \\ -(x - x_0) & -(y - y_0) \end{bmatrix} \in SO(2).$$

Пример. Дуга окружности

Нормализованное уравнение

$$\varphi(q) = \frac{1}{2R}(R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) = 0,$$

$$\psi(q) = R \arctan \frac{(y - y_0)}{(x - x_0)}.$$

Матрица Якоби

$$\Upsilon(q) = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} -(y - y_0) & (x - x_0) \\ -(x - x_0) & -(y - y_0) \end{bmatrix} \in SO(2).$$

Кривизна траектории

$$\xi(s) = \frac{1}{R}.$$

Пример. Дуга окружности

Пример. Дуга окружности

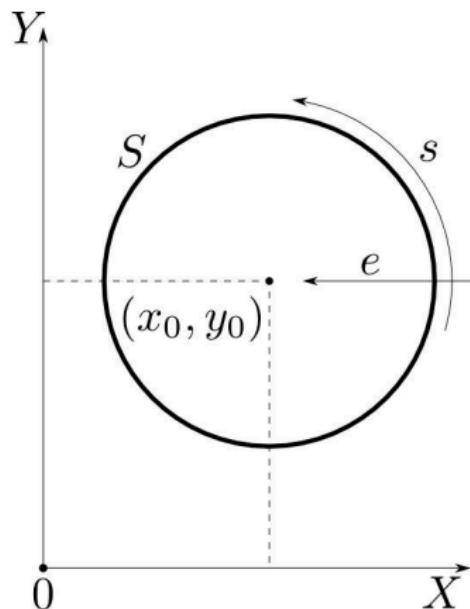


Figure: Траектория в виде окружности.

Пример. Движение по окружности

Пример. Движение по окружности

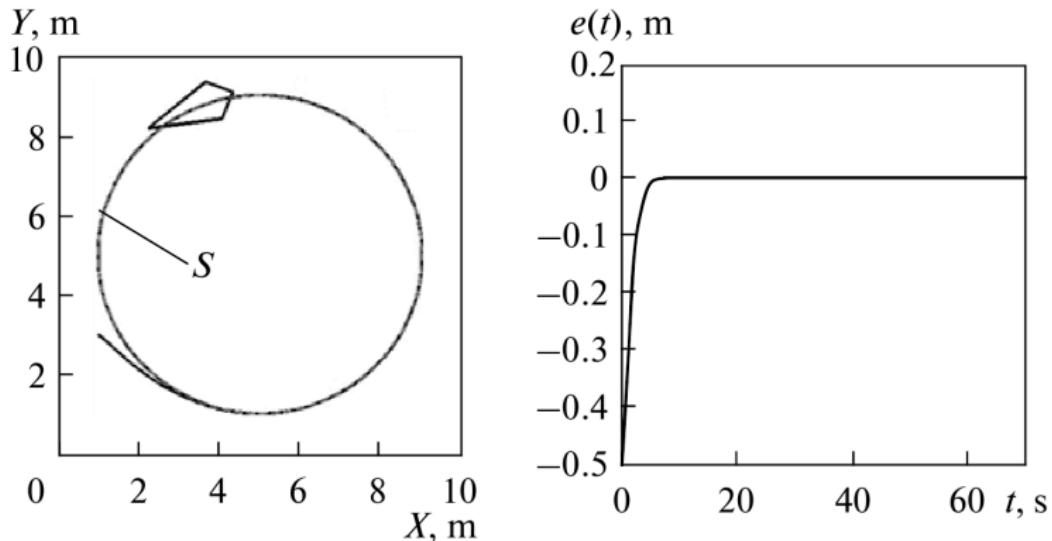


Figure: Результат моделирования движения по окружности.

Движение в динамическом окружении

Движение в динамическом окружении

Динамическая модель движения

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = R^T(\alpha) \begin{bmatrix} V_z \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$A \begin{bmatrix} \dot{V}_z \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = R^T(\alpha) \begin{bmatrix} F_z \\ M \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} T(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix},$$

Движение в динамическом окружении

Движение в динамическом окружении

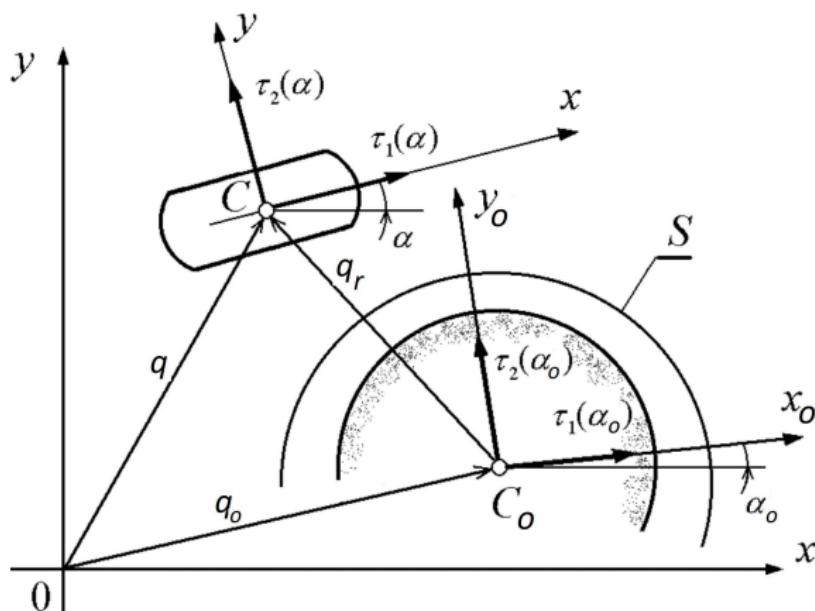


Figure: Движение в динамическом окружении

Подвижный объект (препятствие)

Подвижный объект (препятствие)

Динамическая модель движения подвижного препятствия

$$\dot{q}_o = v_o, \quad (31)$$

$$\dot{T}(\alpha_o) = \omega_o ET(\alpha_o). \quad (32)$$

Относительные координаты

Относительные координаты

Относительные положение, скорость и ускорение

$$q_r = T(\alpha_o)(q - q_o), \quad (33)$$

$$\alpha_r = \alpha - \alpha_o. \quad (34)$$

Относительные координаты

Относительные положение, скорость и ускорение

$$q_r = T(\alpha_o)(q - q_o), \quad (33)$$

$$\alpha_r = \alpha - \alpha_o. \quad (34)$$

$$\dot{q}_r = \omega^o E q_r + T(\alpha_o) (\dot{q} - \dot{q}_o), \quad (35)$$

$$\dot{\alpha}_r = \omega - \omega_o, \quad (36)$$

Относительные координаты

Относительные положение, скорость и ускорение

$$q_r = T(\alpha_o)(q - q_o), \quad (33)$$

$$\alpha_r = \alpha - \alpha_o. \quad (34)$$

$$\dot{q}_r = \omega^o E q_r + T(\alpha_o) (\dot{q} - \dot{q}_o), \quad (35)$$

$$\dot{\alpha}_r = \omega - \omega_o, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r &= (\omega_o)^2 q_r + 2\omega_o E T(\alpha_o) (\dot{q} - \dot{q}_o) + \\ &+ \frac{1}{m} T(\alpha_o) T^T(\alpha) F_z, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\ddot{\alpha}_r = \frac{1}{J} M. \quad (38)$$

Задачно-ориентированные координаты

Задачно-ориентированные координаты

Ортогональное отклонение

$$e(q_r) = \varphi(q_r). \quad (39)$$

Задачно-ориентированные координаты

Ортогональное отклонение

$$e(q_r) = \varphi(q_r). \quad (39)$$

Локальная координата s

$$s = \psi(q_r). \quad (40)$$

Задачно-ориентированные координаты

Ортогональное отклонение

$$e(q_r) = \varphi(q_r). \quad (39)$$

Локальная координата s

$$s = \psi(q_r). \quad (40)$$

Выбор функций (39) и (40) ограничен условием регулярности, подразумевающим, что матрица Якоби

$$\Upsilon(q_r) = \begin{bmatrix} \partial\psi/\partial q_r \\ \partial\varphi/\partial q_r \end{bmatrix} \quad (41)$$

невырождена для всех q_r , принадлежащих кривой S , т.е.

$$\det \Upsilon(q_r) \neq 0.$$

Синтез управления

Синтез управления

Преобразуем модель (29)-(30) к задачно-ориентированным координатам

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = T(\alpha_r^*) \left(T^T(\alpha_r) v_z + \omega_o E x - T(\alpha_o) v_o \right), \quad (42)$$

$$\dot{\delta} = -\dot{s}\xi(s) + \omega - \omega_o. \quad (43)$$

Синтез управления

Преобразуем модель (29)-(30) к задачно-ориентированным координатам

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = T(\alpha_r^*) \left(T^T(\alpha_r) v_z + \omega_o E x - T(\alpha_o) v_o \right), \quad (42)$$

$$\dot{\delta} = -\dot{s}\xi(s) + \omega - \omega_o. \quad (43)$$

Выберем локальные регуляторы в виде

$$u_s = K_s \Delta v - \dot{s}\xi(s)\dot{e} - 2\omega_o \dot{e}, \quad (44)$$

$$u_e = K_{e1} e + K_{e2} \dot{e} + \dot{s}^2 \xi(s) \dot{e} + 2\omega_o \dot{s}, \quad (45)$$

$$u_\delta = K_{\delta 1} \delta + K_{\delta 2} \dot{\delta} + \frac{\partial \xi}{\partial s} \dot{s} + \ddot{s}\xi(s). \quad (46)$$

Синтез управления

Преобразуем модель (29)-(30) к задачно-ориентированным координатам

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = T(\alpha_r^*) \left(T^T(\alpha_r) v_z + \omega_o E x - T(\alpha_o) v_o \right), \quad (42)$$

$$\dot{\delta} = -\dot{s}\xi(s) + \omega - \omega_o. \quad (43)$$

Выберем локальные регуляторы в виде

$$u_s = K_s \Delta v - \dot{s}\xi(s)\dot{e} - 2\omega_o \dot{e}, \quad (44)$$

$$u_e = K_{e1} e + K_{e2} \dot{e} + \dot{s}^2 \xi(s) \dot{e} + 2\omega_o \dot{s}, \quad (45)$$

$$u_\delta = K_{\delta 1} \delta + K_{\delta 2} \dot{\delta} + \frac{\partial \xi}{\partial s} \dot{s} + \ddot{s}\xi(s). \quad (46)$$

Закон управления в опорном базисе

$$F_z = m T(\alpha_r) T^T(\alpha_r^*) \left(\begin{bmatrix} u_s \\ u_e \end{bmatrix} - (\omega_o)^2 T(\alpha^*) q_r \right), \quad (47)$$

$$M = Ju_\delta. \quad (48)$$

Стратегии избегания столкновений

Стратегии избегания столкновений

Некоторые виды стратегий избегания столкновений

- ▶ Объезд
- ▶ Отъезд

Стратегии избегания столкновений

Некоторые виды стратегий избегания столкновений

- ▶ Объезд
- ▶ Отъезд

Эквидистанта подвижного препятствия

$$\varphi^*(q_r) = x_r^2 + y_r^2 - R^2 = 0, \quad (49)$$

Управление движением в динамическом окружении

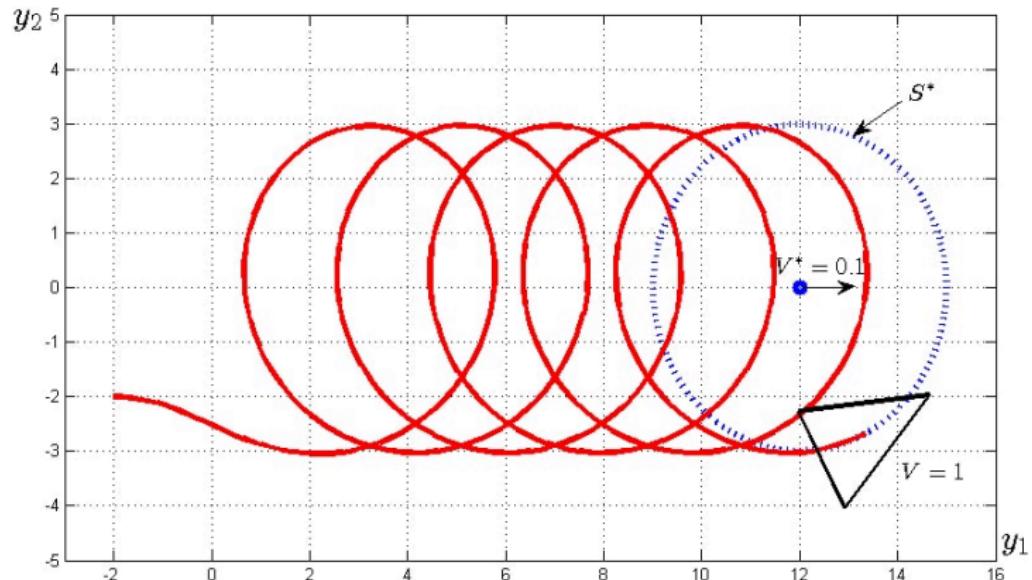


Figure: Результат моделирования движения относительно подвижного объекта

Управление движением в динамическом окружении

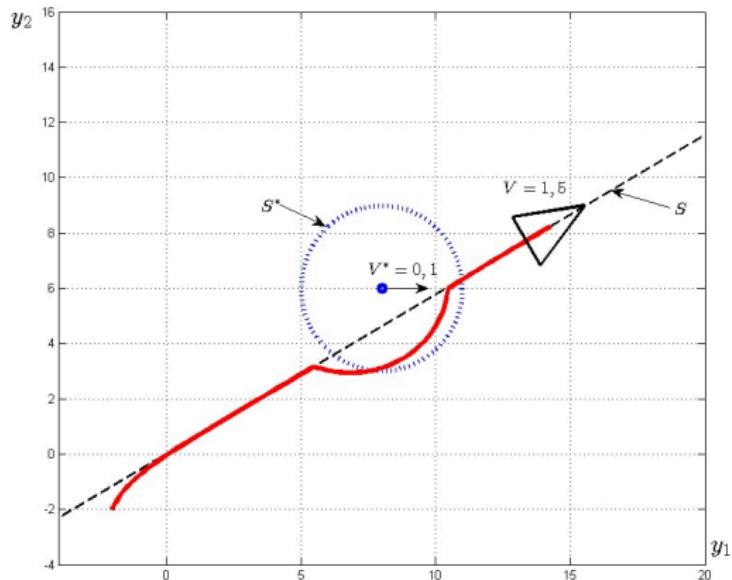


Figure: Результат моделирования избежания столкновения с подвижным препятствием

Движение в динамическом окружении

Движение в динамическом окружении

$$\dot{z} = B(z)v + \delta, \quad (50)$$

$$\dot{v} = u, \quad (51)$$

где $z = [x \ y \ \vartheta \ \beta_s^T]^T \in R^{3+\delta_s}$ – вектор состояния колесного мобильного робота,

$$v = [v^T \ v_s^T]^T \in R^{\delta_m+\delta_s},$$

$u \in R^{\delta_m+\delta_s}$ – вектор управляющих воздействий,

$$B(z) = \begin{bmatrix} T(\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Sigma(\beta_s),$$

$T(\vartheta)$ – поворотная матрица,

$\Sigma(\beta_s)$ – матрица конфигурации мобильного робота,

δ – ограниченное возмущение.

Движение в динамическом окружении

Движение в динамическом окружении

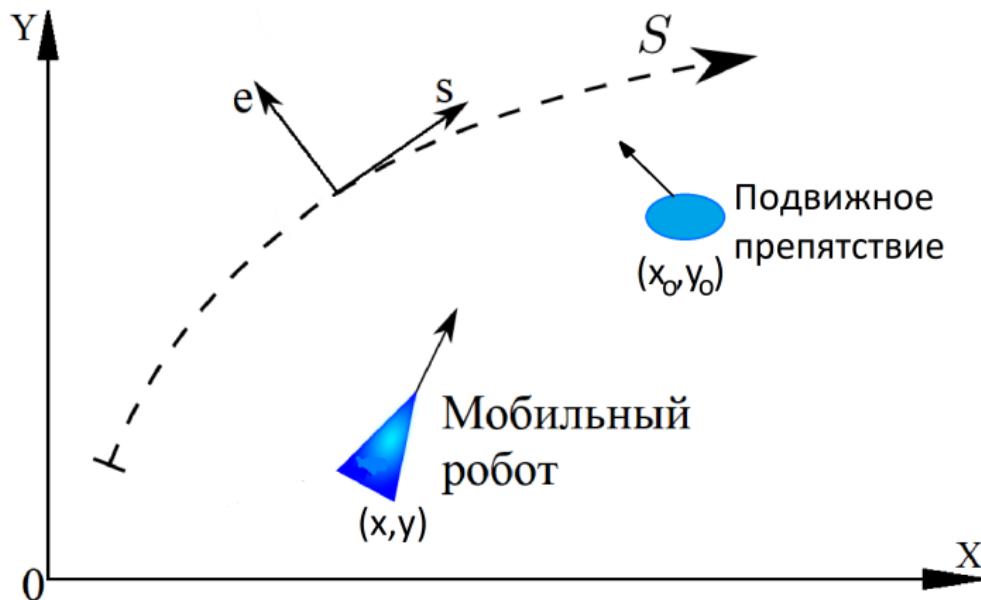


Figure: Движение на плоскости в динамическом окружении

Описание подвижного объекта

Модель движения подвижного объекта

$$\dot{z}_o = v_o, \quad (52)$$

$$\dot{T}(\vartheta_o) = \omega_o ET(\vartheta_o), \quad (53)$$

где $z_o = [x_o \quad y_o]^T$ – координаты подвижного объекта,

v_o – вектор линейных скоростей подвижного объекта,

ϑ_o – ориентация подвижного объекта,

$T(\vartheta_o)$ – поворотная матрица,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Относительные координаты

Относительное положение

$$z_r = T(\vartheta_o)(z - z_o). \quad (54)$$

Относительная скорость

$$\dot{z}_r = -S(\omega_o)z_r + T(\vartheta_o)(\dot{z} - \dot{z}_o), \quad (55)$$

где ω_o – угловая скорость подвижного объекта.

Относительное ускорение

$$\ddot{z}_r = B(z)u + \dot{B}(z)v - S^2(\omega_o)z_r - \dot{S}(\omega_o)z_r - 2S(\omega_o)\dot{z}_r. \quad (56)$$

Траектория движения задается в относительных координатах z_r :

$$\varphi(x_r, y_r) = 0. \quad (57)$$

Задачно-ориентированные координаты

Ортогональное отклонение

$$e(x_r, y_r) = \varphi(x_r, y_r). \quad (58)$$

Матрица Якоби

$$\Upsilon(x_r, y_r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi(x_r, y_r)}{\partial y_r} & -\frac{\partial \varphi(x_r, y_r)}{\partial x_r} \\ \frac{\partial \varphi(x_r, y_r)}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi(x_r, y_r)}{\partial y_r} \end{bmatrix}, \quad (59)$$

невырожденная для всех $x_r, y_r \in S$, т.е. $\det \Upsilon(x_r, y_r) \neq 0$.

Синтез управления

Замыкание внутреннего контура по скоростям с целевым условием

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{z}_r - \bar{v}) = 0. \quad (60)$$

Дополнительное целевое условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{p} = \dot{z}_r, \quad (61)$$

где \dot{p} – вектор оценок линейных скоростей.

Замыкание внутреннего контура

Существуют такие положительные константы $k_z, k_\sigma, k_\gamma, k_p, k_1, k_2$ и k_η что регулятор вида

$$B(z)u = (S^2(\omega_o)z_r + \dot{S}(\omega_o)z_r + 2S(\omega_o)\dot{z}_r + \dot{\bar{v}} - \dot{B}(z)v - k_z(2(\dot{p} - \bar{v}) - \gamma - \sigma)), \quad (62)$$

where

$$\ddot{\sigma} = k_\sigma ((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma), \quad (63)$$

$$\dot{\gamma} = k_\gamma ((\dot{p} - \bar{v}) - \gamma), \quad (64)$$

$$\ddot{p} = \dot{\bar{v}} - k_p(\dot{p} - \bar{v}) + k_1\xi + k_2(\xi - \eta), \quad (65)$$

$$\dot{\eta} = k_\eta (\xi - \eta). \quad (66)$$

где $\xi = q - p$, обеспечивает выполнение целевых условий (60) и (61).

Синтез траекторного управления

Редуцированная система

$$\dot{p} = \bar{v}. \quad (67)$$

Управление \bar{v} будем строить в виде

$$\bar{v} = u_e + u_s. \quad (68)$$

где u_e обеспечивает стабилизацию положения, а u_s обеспечивает заданную касательную скорость.

Синтез траекторного управления

Преобразование к задачно-ориентированному базису с выходами
 s и e

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \Upsilon(p)\dot{p} = \Upsilon(p)T(\vartheta)v. \quad (69)$$

Регулятор u_s выберем в виде

$$u_s = T^T(\vartheta)\Upsilon^{-1}(p) \begin{bmatrix} v^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

Регулятор u_e выберем в виде

$$u_e = -k_e\varphi(p) \frac{\partial}{\partial p} \varphi(p), \quad (71)$$

где k_e – положительная константа.

Примеры с геометрическими примитивами

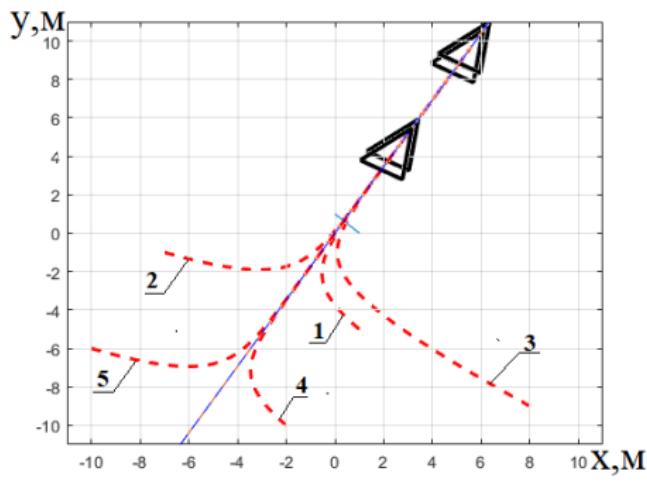


Figure: Движение по линии.

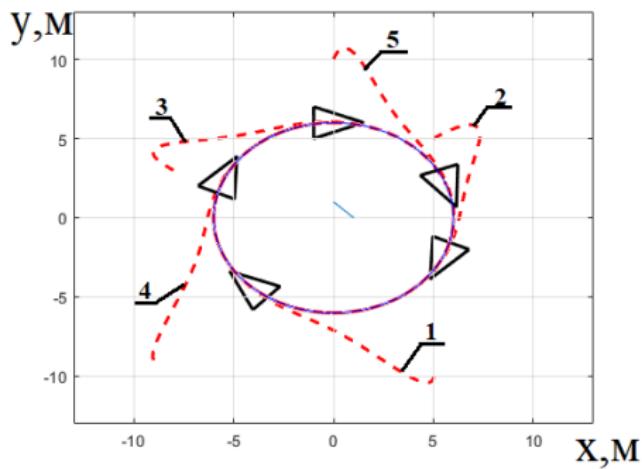


Figure: Движение по окружности.

Пример с подвижным объектом

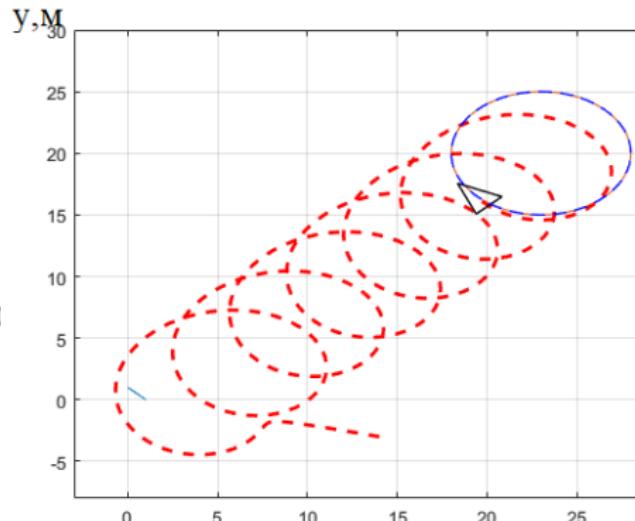
Заданная траектория S

$$\varphi(x_r, y_r) = x_r^2 + y_r^2 - R^2 = 0,$$

где $R = 5$. Внешний объект движется вдоль прямой линии S_o

$$\varphi_o(x_o, y_o) = -\sin \vartheta^* x_o + \cos \vartheta^* y_o + \varphi_0$$

где $\vartheta^* = \pi/4$ и $\varphi_0 = 3$, со скоростью $\dot{z}_o^* = 0.1(\text{m/s})$.
Параметры регулятора $k_z = 10, k_\sigma = 2, k_\gamma = 3, k_p = 10, k_1 = 0.1, k_2 = 10, k_\eta = 3, k_e = 5$.



Пространственное движение

Пространственное движение

Модель динамики движения в пространстве

$$\dot{x} = v, \quad (72)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m} F_c, \quad (73)$$

$$\dot{R}(\alpha) = S(\omega)R(\alpha), \quad (74)$$

$$J\dot{\omega} + \omega \times J\omega = M_c, \quad (75)$$

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пространственное движение

Пространственное движение

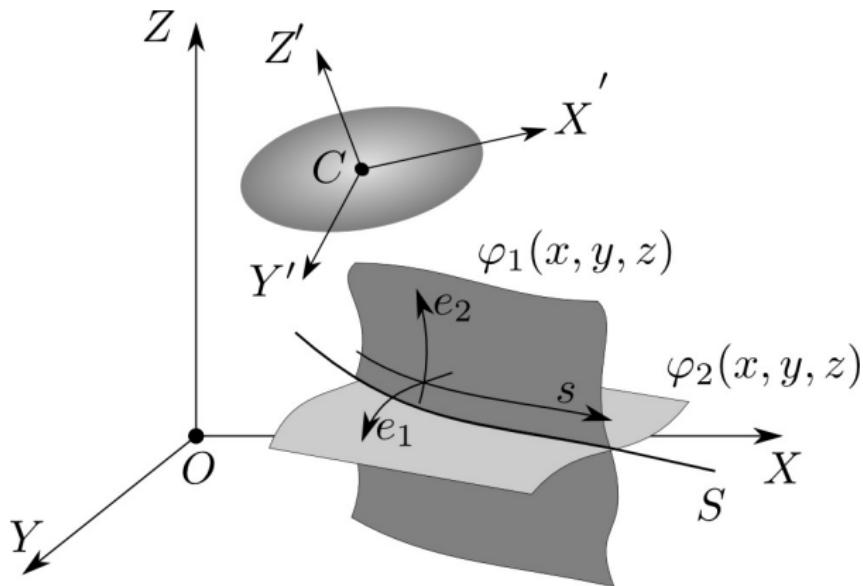


Figure: Движение в трехмерном пространстве

Поворотная матрица

Поворотная матрица

Поворотная матрицы $R(\alpha)$ может быть представлена как

$$R(\alpha) = R_3(\psi)R_2(\theta)R_1(\phi), \quad (76)$$

где

$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Заданная траектория

Заданная траектория

Заданная траектория S описывается как пересечение двух неявно заданных поверхностей:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \cap \varphi_2(x, y, z) = 0. \quad (77)$$

Заданная траектория

Заданная траектория S описывается как пересечение двух неявно заданных поверхностей:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \cap \varphi_2(x, y, z) = 0. \quad (77)$$

Касательная скорость относительно кривой S

$$\dot{s} = \frac{\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2}{\|\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2\|} v. \quad (78)$$

Заданная траектория

Заданная траектория S описывается как пересечение двух неявно заданных поверхностей:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \cap \varphi_2(x, y, z) = 0. \quad (77)$$

Касательная скорость относительно кривой S

$$\dot{s} = \frac{\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2}{\|\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2\|} v. \quad (78)$$

Матрица Якоби

$$\Upsilon(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2}{\|\nabla \varphi_1 \times \nabla \varphi_2\|} \\ \frac{\nabla \varphi_1}{\|\nabla \varphi_1\|} \\ \frac{\nabla \varphi_2}{\|\nabla \varphi_2\|} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Отклонения и цели управления

Отклонения и цели управления

Нарушение условия (77) характеризуется ортогональными отклонениями

$$e_1 = \varphi_1(x, y, z). \quad (80)$$

$$e_2 = \varphi_2(x, y, z). \quad (81)$$

Отклонения и цели управления

Нарушение условия (77) характеризуется ортогональными отклонениями

$$e_1 = \varphi_1(x, y, z). \quad (80)$$

$$e_2 = \varphi_2(x, y, z). \quad (81)$$

Необходимо определить управления $F_c = [F_x \ F_y \ F_z]$ и M_c такие, чтобы в замкнутой системе обеспечить:

Отклонения и цели управления

Нарушение условия (77) характеризуется ортогональными отклонениями

$$e_1 = \varphi_1(x, y, z). \quad (80)$$

$$e_2 = \varphi_2(x, y, z). \quad (81)$$

Необходимо определить управление $F_c = [F_x \ F_y \ F_z]$ и M_c такие, чтобы в замкнутой системе обеспечить:

- ▶ стабилизацию положения относительно кривой S ;

Отклонения и цели управления

Нарушение условия (77) характеризуется ортогональными отклонениями

$$e_1 = \varphi_1(x, y, z). \quad (80)$$

$$e_2 = \varphi_2(x, y, z). \quad (81)$$

Необходимо определить управление $F_c = [F_x \ F_y \ F_z]$ и M_c такие, чтобы в замкнутой системе обеспечить:

- ▶ стабилизацию положения относительно кривой S ;
- ▶ обеспечение заданной касательной скорости движения

$$\Delta V_s = V_s^* - \dot{s}; \quad (82)$$

Отклонения и цели управления

Нарушение условия (77) характеризуется ортогональными отклонениями

$$e_1 = \varphi_1(x, y, z). \quad (80)$$

$$e_2 = \varphi_2(x, y, z). \quad (81)$$

Необходимо определить управление $F_c = [F_x \ F_y \ F_z]$ и M_c такие, чтобы в замкнутой системе обеспечить:

- ▶ стабилизацию положения относительно кривой S ;
- ▶ обеспечение заданной касательной скорости движения

$$\Delta V_s = V_s^* - \dot{s}; \quad (82)$$

- ▶ стабилизация ориентации робота относительно кривой S .

Управление поступательным движением

Управление поступательным движением

Преобразуем модель (72)-(75) к задачно-ориентированным координатам с выходами s , e_1 и e_2 . Для этого продифференцируем (78), (80) и (81):

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(x, y, z)v. \quad (83)$$

Управление поступательным движением

Преобразуем модель (72)-(75) к задачно-ориентированным координатам с выходами s , e_1 и e_2 . Для этого продифференцируем (78), (80) и (81):

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(x, y, z)v. \quad (83)$$

Вновь продифференцируем (83) с учетом (73):

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \end{bmatrix} = \dot{\Upsilon}(x, y, z)v + \Upsilon(x, y, z)\frac{F_c}{m}. \quad (84)$$

Управление поступательным движением

Управление поступательным движением

Введем виртуальные регуляторы

$$\dot{\Upsilon}(x, y, z)v + \Upsilon(x, y, z) \frac{F_c}{m} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Управление поступательным движением

Введем виртуальные регуляторы

$$\dot{\Upsilon}(x, y, z)v + \Upsilon(x, y, z) \frac{F_c}{m} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Подставим (85) в (84)

$$\begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{e}_1 \\ \ddot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Управление поступательным движением

Управление поступательным движением

Выберем регуляторы

$$u_s = K_s \Delta \dot{s}, \quad (87)$$

$$u_{e1} = -K_{1e1} \dot{e}_1 - K_{2e1} e_1, \quad (88)$$

$$u_{e2} = -K_{1e2} \dot{e}_2 - K_{2e2} e_2, \quad (89)$$

где $K_s, K_{1e1}, K_{2e1}, K_{1e2}, K_{2e2}$ – положительные коэффициенты.

Управление поступательным движением

Выберем регуляторы

$$u_s = K_s \Delta \dot{s}, \quad (87)$$

$$u_{e1} = -K_{1e1} \dot{e}_1 - K_{2e1} e_1, \quad (88)$$

$$u_{e2} = -K_{1e2} \dot{e}_2 - K_{2e2} e_2, \quad (89)$$

где $K_s, K_{1e1}, K_{2e1}, K_{1e2}, K_{2e2}$ – положительные коэффициенты.

Результирующее управление F_c

$$F_c = m \Upsilon(x, y, z)^{-1} \left(\begin{bmatrix} u_s \\ u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix} - \dot{\Upsilon}(x, y, z) v \right). \quad (90)$$

Управление вращательным движением

Управление вращательным движением

Введем вектор угловых отклонений $\delta = [\delta_\phi \quad \delta_\theta \quad \delta_\psi]^T \in R^3$ и матрицу угловых отклонений

$$R(\delta) = R(\alpha)R^T(\alpha^*)R^T(\Delta), \quad (91)$$

где $R(\alpha^*) \in SO(3)$ – поворотная матрица, характеризующая ориентацию подвижного базиса относительно кривой S ,
 $R(\Delta) \in SO(3)$ – желаемая поворотная матрица.

Управление вращательным движением

Введем вектор угловых отклонений $\delta = [\delta_\phi \quad \delta_\theta \quad \delta_\psi]^T \in R^3$ и матрицу угловых отклонений

$$R(\delta) = R(\alpha)R^T(\alpha^*)R^T(\Delta), \quad (91)$$

где $R(\alpha^*) \in SO(3)$ – поворотная матрица, характеризующая ориентацию подвижного базиса относительно кривой S ,
 $R(\Delta) \in SO(3)$ – желаемая поворотная матрица.

Определим функцию углового отклонения

$$e_r = \frac{1}{2}(R(\delta) - R(\delta)^T)^\vee, \quad (92)$$

где \vee – это преобразование $SO(3) \rightarrow R^3$.

Управление вращательным движением

Управление вращательным движением

Обозначим отклонение угловой скорости как e_ω . Продифференцируем (91) с учетом (74)

$$\frac{d}{dt} R(\delta) = S(\dot{\delta})R(\delta) = e_\omega R(\delta), \quad (93)$$

$$\frac{d}{dt} R(\delta) = S(\omega)R(\delta) - R(\alpha)R^T(\alpha^*)S(\omega^*)R^T(\Delta), \quad (94)$$

Управление вращательным движением

Обозначим отклонение угловой скорости как e_ω . Продифференцируем (91) с учетом (74)

$$\frac{d}{dt} R(\delta) = S(\dot{\delta})R(\delta) = e_\omega R(\delta), \quad (93)$$

$$\frac{d}{dt} R(\delta) = S(\omega)R(\delta) - R(\alpha)R^T(\alpha^*)S(\omega^*)R^T(\Delta), \quad (94)$$

Воспользуемся свойством косо-симметрических матриц $RS(\omega)R^T = S(R\omega)$

$$\frac{d}{dt} R(\delta) = (S(\omega) - S(R(\alpha)R^T(\alpha^*)\omega^*))R(\delta), \quad (95)$$

и

$$e_\omega = \omega - R(\alpha)R^T(\alpha^*)\omega^*. \quad (96)$$

Управление вращательным движением

Управление вращательным движением

Продифференцируем (96) с учетом (74)

$$\dot{e}_\omega = \frac{1}{J}(M - \omega \times J\omega) + a_d, \quad (97)$$

где $a_d = -S(\omega)R(\alpha)R^T(\alpha^*)\omega^* + R(\alpha)R^T(\alpha^*)\dot{\omega}^*$.

Управление вращательным движением

Продифференцируем (96) с учетом (74)

$$\dot{e}_\omega = \frac{1}{J}(M - \omega \times J\omega) + a_d, \quad (97)$$

где $a_d = -S(\omega)R(\alpha)R^T(\alpha^*)\omega^* + R(\alpha)R^T(\alpha^*)\dot{\omega}^*$.

Результирующий закон управления

$$M_c = \omega \times J\omega - Ja_d - K_R e_r - K_\omega e_\omega. \quad (98)$$

где K_R, K_ω – положительные коэффициенты.

Пример

Пример

Движение объекта управления описывается моделью (72)-(75), где $m = 1$, $J = 1$.

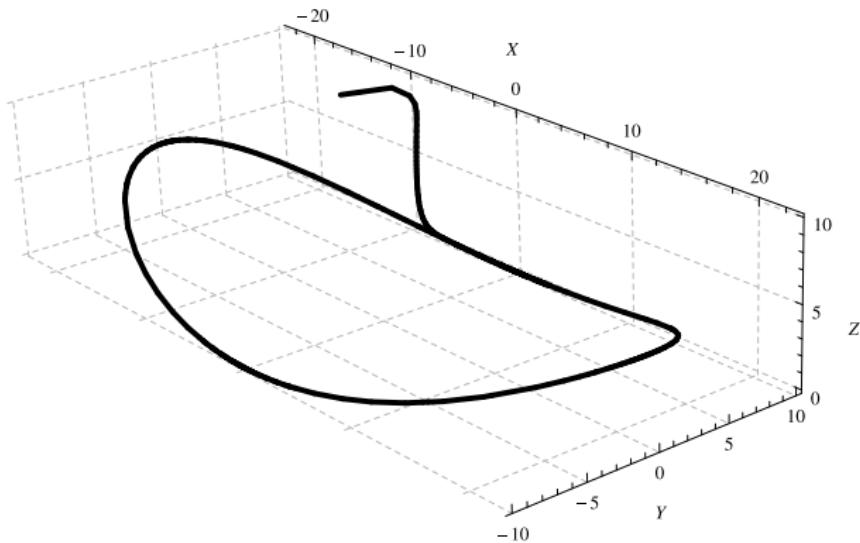
Начальное положение $x_0 = [-10 \quad 5 \quad 10]^T$, начальная ориентация $\alpha_0 = [3 \quad 2 \quad 1]^T$.

Параметры регуляторов $K_{1e1} = 1$, $K_{2e1} = 10$, $K_{1e2} = 1$, $K_{2e2} = 10$, $K_R = 20$, $K_\omega = 50$.

Желаемая касательная скорость $\dot{s} = 1$.

Пример

Пример

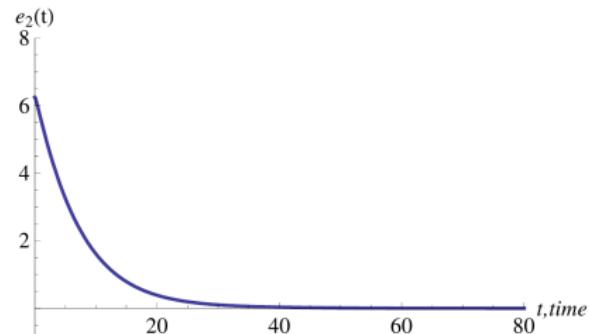
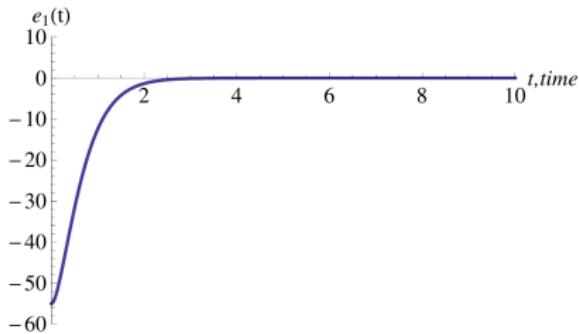


Движение по заданной траектории:

$$\varphi_1(x, y, z) = 0.2x^2 + y^2 - R^2 = 0 \cap \varphi_2(x, y, z) = z + 0.05y^2 - 5 = 0$$

Пример

Пример

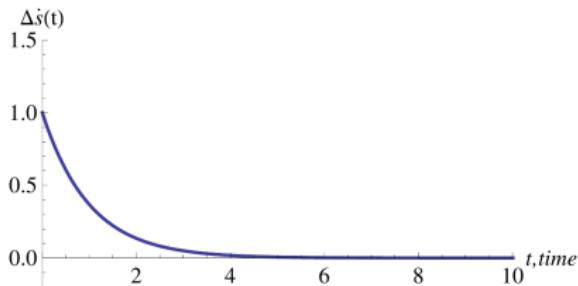


Ортогональное отклонение
 $e_1 = \varphi_1(x, y, z)$

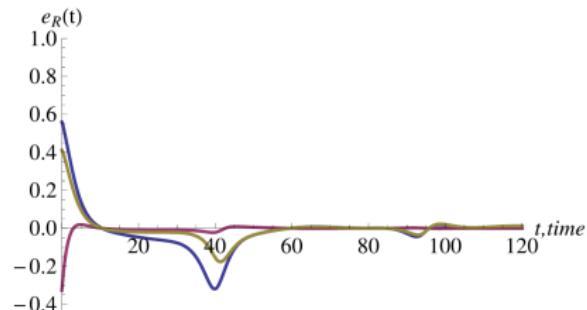
Ортогональное отклонение
 $e_2 = \varphi_2(x, y, z)$

Пример

Пример



Отклонение касательной
скорости $\Delta V = \dot{s}^* - \dot{s}$



Угловые отклонения e_r

Пассивность статических систем

Пассивность статических систем

Система $h(t, u)$ называется

- ▶ пассивной, если $u^T y \geq 0$;

Пассивность статических систем

Система $h(t, u)$ называется

- ▶ пассивной, если $u^T y \geq 0$;
- ▶ системой без потерь, если $u^T y = 0$;

Пассивность статических систем

Система $h(t, u)$ называется

- ▶ пассивной, если $u^T y \geq 0$;
- ▶ системой без потерь, если $u^T y = 0$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;

Пассивность статических систем

Система $h(t, u)$ называется

- ▶ пассивной, если $u^T y \geq 0$;
- ▶ системой без потерь, если $u^T y = 0$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по входу, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$;

Пассивность статических систем

Система $h(t, u)$ называется

- ▶ пассивной, если $u^T y \geq 0$;
- ▶ системой без потерь, если $u^T y = 0$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по входу, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$;
- ▶ пассивной при обратной связи по выходу, если $u^T y \geq y^T \rho(y)$ для некоторой функции $\rho(\cdot)$;

Пассивность статических систем

Система $h(t, u)$ называется

- ▶ пассивной, если $u^T y \geq 0$;
- ▶ системой без потерь, если $u^T y = 0$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по входу, если $u^T y \geq u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$;
- ▶ пассивной при обратной связи по выходу, если $u^T y \geq y^T \rho(y)$ для некоторой функции $\rho(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по выходу, если $u^T y \geq y^T \rho(y)$ и $y^T \rho(y) > 0$ для всех $y \neq 0$.

Пассивность статических систем

Пассивность статических систем

Скалярная функция $y = h(t, u)$, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha u^2 \leq uh(t, u) \leq \beta u^2, \quad (99)$$

где $\beta \geq \alpha$ – вещественные числа, принадлежит сектору $[\alpha, \beta]$, границами которого служат линии $y = \alpha u$ и $y = \beta u$.

Пассивность статических систем

Скалярная функция $y = h(t, u)$, удовлетворяющая неравенству

$$\alpha u^2 \leq uh(t, u) \leq \beta u^2, \quad (99)$$

где $\beta \geq \alpha$ – вещественные числа, принадлежит сектору $[\alpha, \beta]$, границами которого служат линии $y = \alpha u$ и $y = \beta u$.

Неравенства (99) для всех (t, u) эквивалентны неравенству

$$(h(t, u) - \alpha u)(h(t, u) - \beta u) \leq 0. \quad (100)$$

Пассивность статических систем

Пассивность статических систем

Если компоненты векторной функции $h(t, u)$ развязаны, т. е. можно записать

$$h(t, u) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \dots \\ h_p(t) \end{bmatrix}, \quad (101)$$

и каждый компонент h_i удовлетворяет условию (99 с константами α_i и β_i , то, с учетом обозначений $K_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ и $K_2 = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$, можно показать, что

$$(h(t, u) - K_1 u)^T (h(t, u) - K_2 u) \leq 0. \quad (102)$$

Матрица $K = K_2 - K_1$ – симметрическая и положительно определенная.

Пассивность статических систем

Пассивность статических систем

Если функция $y = h(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$\|h(t, u) - Lu\| \leq \gamma \|u\|$$

для всех (t, u) , то, с учетом $K_1 = L - \gamma I$ и $K_2 = L + \gamma I$, можно записать

$$(h(t, u) - K_1 u)^T (h(t, u) - K_2 u) - \|h(t, u) - Lu\|^2 - \gamma^2 \|u\|^2 \leq 0. \quad (103)$$

Пассивность статических систем

Пассивность статических систем

Статическая система ("функция без памяти") $h : [0, \infty) \times R^p \rightarrow R^p$ принадлежит сектору

- ▶ $[0, \infty]$, если $u^T h(t, u) \geq 0$;

Пассивность статических систем

Статическая система ("функция без памяти") $h : [0, \infty) \times R^p \rightarrow R^p$ принадлежит сектору

- ▶ $[0, \infty]$, если $u^T h(t, u) \geq 0$;
- ▶ $[K_1, \infty]$, если $u^T (h(t, u) - K_1 u) \geq 0$;

Пассивность статических систем

Статическая система ("функция без памяти") $h : [0, \infty) \times R^p \rightarrow R^p$ принадлежит сектору

- ▶ $[0, \infty]$, если $u^T h(t, u) \geq 0$;
- ▶ $[K_1, \infty]$, если $u^T (h(t, u) - K_1 u) \geq 0$;
- ▶ $[0, K_2]$ с $K_2 = K_2^T > 0$, если $h^T(t, u)(h(t, u) - K_2 u) \geq 0$;

Пассивность статических систем

Статическая система ("функция без памяти") $h : [0, \infty) \times R^p \rightarrow R^p$ принадлежит сектору

- ▶ $[0, \infty]$, если $u^T h(t, u) \geq 0$;
- ▶ $[K_1, \infty]$, если $u^T (h(t, u) - K_1 u) \geq 0$;
- ▶ $[0, K_2] \subset K_2 = K_2^T > 0$, если $h^T(t, u) (h(t, u) - K_2 u) \geq 0$;
- ▶ $[K_1, K_2] \subset K = K_2 - K_1 = K^T > 0$, если

$$(h(t, u) - K_1 u)^T (h(t, u) - K_2 u) \leq 0.$$

Пассивность статических систем

Пассивность статических систем

- ▶ Сектор $[0, \infty]$ соответствует наличию в системе пассивности;

Пассивность статических систем

- ▶ Сектор $[0, \infty]$ соответствует наличию в системе пассивности;
- ▶ Сектор $[K_1, \infty]$ соответствует пассивности с прямой связью по входу с $\varphi(u) = K_1 u$;

Пассивность статических систем

- ▶ Сектор $[0, \infty]$ соответствует наличию в системе пассивности;
- ▶ Сектор $[K_1, \infty]$ соответствует пассивности с прямой связью по входу с $\varphi(u) = K_1 u$;
- ▶ Сектор $[0, K_2]$ с $K_2 = \frac{1}{\delta} I > 0$ соответствует строгой пассивности по выходу с $\rho(y) = \delta y$;

Пассивность статических систем

- ▶ Сектор $[0, \infty]$ соответствует наличию в системе пассивности;
- ▶ Сектор $[K_1, \infty]$ соответствует пассивности с прямой связью по входу с $\varphi(u) = K_1 u$;
- ▶ Сектор $[0, K_2]$ с $K_2 = \frac{1}{\delta} I > 0$ соответствует строгой пассивности по выходу с $\rho(y) = \delta y$;
- ▶ Функция из сектора $[K_1, K_2]$ может быть преобразована в функцию из сектора $[0, \infty]$.

Пассивность динамических систем

Пассивность динамических систем

Уравнения состояния динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (104)$$

$$y = h(x, u), \quad (105)$$

где $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локально липшицева функция,
 $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ – непрерывная функция,
 $f(0, 0) = 0, h(0, 0) = 0$.

Пассивность динамических систем

Пассивность динамических систем

Система (104)-(105) называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция $W(x)$ (называемая функцией запаса) такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \quad (106)$$

Пассивность динамических систем

Система (104)-(105) называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция $W(x)$ (называемая функцией запаса) такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \quad (106)$$

Такая система вида (104)-(105) называется

- ▶ системой без потерь, если $u^T y = \dot{W}$;

Пассивность динамических систем

Система (104)-(105) называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция $W(x)$ (называемая функцией запаса) такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \quad (106)$$

Такая система вида (104)-(105) называется

- ▶ системой без потерь, если $u^T y = \dot{W}$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;

Пассивность динамических систем

Система (104)-(105) называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция $W(x)$ (называемая функцией запаса) такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \quad (106)$$

Такая система вида (104)-(105) называется

- ▶ системой без потерь, если $u^T y = \dot{W}$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$;

Пассивность динамических систем

Система (104)-(105) называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция $W(x)$ (называемая функцией запаса) такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \quad (106)$$

Такая система вида (104)-(105) называется

- ▶ системой без потерь, если $u^T y = \dot{W}$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$;
- ▶ пассивной при обратной связи по выходу, если $u^T y \geq \dot{W} + y^T \rho(y)$ для некоторой функции $\rho(\cdot)$;

Пассивность динамических систем

Система (104)-(105) называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция $W(x)$ (называемая функцией запаса) такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \quad (106)$$

Такая система вида (104)-(105) называется

- ▶ системой без потерь, если $u^T y = \dot{W}$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$;
- ▶ пассивной при обратной связи по выходу, если $u^T y \geq \dot{W} + y^T \rho(y)$ для некоторой функции $\rho(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по выходу, если $u^T y \geq \dot{W} + y^T \rho(y)$ и $y^T \rho(y) > 0$ для всех $y \neq 0$;

Пассивность динамических систем

Система (104)-(105) называется пассивной, если существует непрерывно дифференцируемая положительно-полуопределенная функция $W(x)$ (называемая функцией запаса) такая, что

$$u^T y \geq \dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x} f(x, u) \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p. \quad (106)$$

Такая система вида (104)-(105) называется

- ▶ системой без потерь, если $u^T y = \dot{W}$;
- ▶ пассивной при прямой связи по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ для некоторой функции $\varphi(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по входу, если $u^T y \geq \dot{W} + u^T \varphi(u)$ и $u^T \varphi(u) > 0$ для всех $u \neq 0$;
- ▶ пассивной при обратной связи по выходу, если $u^T y \geq \dot{W} + y^T \rho(y)$ для некоторой функции $\rho(\cdot)$;
- ▶ строго пассивной по выходу, если $u^T y \geq \dot{W} + y^T \rho(y)$ и $y^T \rho(y) > 0$ для всех $y \neq 0$;
- ▶ строго пассивной, если $u^T y \geq \dot{W} + \psi(x)$ для некоторой положительно определенной функции $\psi(x)$.

Пассивность динамических систем

Пассивность динамических систем

Аффинная по управлению система

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u, \quad (107)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния,

$u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор входа,

$y = y(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор выхода,

$f(\cdot), h(\cdot)$ – гладкие вектор-функции аргумента x ,

$g(\cdot)$ – гладкая матрица-функция.

Пассивность динамических систем

Аффинная по управлению система

$$\dot{x} = f(x) + g(x) u, \quad (107)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния,

$u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор входа,

$y = y(t) \in \mathbb{R}^l$ – вектор выхода,

$f(\cdot), h(\cdot)$ – гладкие вектор-функции аргумента x ,

$g(\cdot)$ – гладкая матрица-функция.

Пусть G – заданная $(m \times l)$ -матрица. Тогда система (107) называется G -пассивной, если существует неотрицательная скалярная функция $W(x)$ (функция запаса) такая, что

$$W(x) \leq W(x_0) + \int_0^t u(t)^* G y(t) dt \quad (108)$$

для любого решения $x(t)$ системы (107) такого, что $x(0) = x_0, x(t) = x$.

Пассивность динамических систем

Пассивность динамических систем

Система (107) называется строго G -пассивной, если существует неотрицательная скалярная функция $W(x)$ и скалярная функция $\mu(x) > 0$ такие, что

$$W(x) \leq W(x_0) + \int_0^t (u(t)^* G y(t) - \mu(x(t))) dt \quad (109)$$

для любого решения $x(t)$ системы (107) такого, что $x(0) = x_0$, $x(t) = x$.

Пассивность динамических систем

Система (107) называется строго G -пассивной, если существует неотрицательная скалярная функция $W(x)$ и скалярная функция $\mu(x) > 0$ такие, что

$$W(x) \leq W(x_0) + \int_0^t (u(t)^* Gy(t) - \mu(x(t))) dt \quad (109)$$

для любого решения $x(t)$ системы (107) такого, что $x(0) = x_0$, $x(t) = x$.

Для нелинейных систем, если функция запаса $W(x)$ гладкая, интегральное неравенство диссипации (109) эквивалентно своей дифференциальной форме

$$\frac{\partial W}{\partial x} (f(x) + g(x) u) \leq u^* Gy - \mu(x). \quad (110)$$

Пассивность динамических систем

Пассивность динамических систем

Если функция запаса $W(x)$ положительно-определенная, то пассивная система (107)

- ▶ устойчива по Ляпунову при $u = 0$;

Пассивность динамических систем

Если функция запаса $W(x)$ положительно-определенная, то пассивная система (107)

- ▶ устойчива по Ляпунову при $u = 0$;
- ▶ асимптотически устойчива при $u = -Ku$ при любом скалярном или матричном $K > 0$).

Функция запаса

Функция запаса

Рассмотрим функцию запаса

$$W = \frac{1}{2} |\dot{x} - v_d|^2 + \frac{1}{2} |\omega - \omega_d|^2. \quad (111)$$

Функция запаса

Рассмотрим функцию запаса

$$W = \frac{1}{2} |\dot{x} - v_d|^2 + \frac{1}{2} |\omega - \omega_d|^2. \quad (111)$$

Продифференцируем (111) по времени

$$\begin{aligned} \dot{W} &= (\dot{x} - v_d)^T (\ddot{x} - \dot{v}_d) + (\omega - \omega_d)^T (\dot{\omega} - \dot{\omega}_d) = \\ &= (\dot{x} - v_d)^T \left(\frac{m}{F} - \dot{v}_d \right) + \\ &\quad + (\omega - \omega_d)^T (-J^{-1}\omega \times J\omega + J^{-1}M_c - \dot{\omega}_d). \end{aligned}$$

Управляющие входы

Управляющие входы

Выберем управляющие входы F и M_c

$$F = u_{pF} + u_F, \quad (112)$$

$$M_c = u_{pM} + u_M, \quad (113)$$

где $u_{pF} = \dot{v}_d$ и $u_{pM} = \omega \times J\omega + J\dot{\omega}_d$ – управляющие входы, делающие замкнутую систему пассивной.

Управляющие входы

Выберем управляющие входы F и M_c

$$F = u_{pF} + u_F, \quad (112)$$

$$M_c = u_{pM} + u_M, \quad (113)$$

где $u_{pF} = \dot{v}_d$ и $u_{pM} = \omega \times J\omega + J\dot{\omega}_d$ – управляющие входы, делающие замкнутую систему пассивной.

Тогда производная функции запаса примет вид

$$\dot{W} = (\dot{x} - v_d)^T u_F + (\omega - \omega_d)^T u_M = y^T u.$$

Управляющие входы

Выберем управляющие входы F и M_c

$$F = u_{pF} + u_F, \quad (112)$$

$$M_c = u_{pM} + u_M, \quad (113)$$

где $u_{pF} = \dot{v}_d$ и $u_{pM} = \omega \times J\omega + J\dot{\omega}_d$ – управляющие входы, делающие замкнутую систему пассивной.

Тогда производная функции запаса примет вид

$$\dot{W} = (\dot{x} - v_d)^T u_F + (\omega - \omega_d)^T u_M = y^T u.$$

Это означает, что система (72)-(75) пассивна от входов

$$u = [u_F^T \quad u_M^T]^T$$

к выходам

$$y = [(\dot{x} - v_d)^T \quad (\omega - \omega_d)^T]^T.$$

Синтез закона управления

Синтез закона управления

Закон управления для стабилизации пассивной системы

$$u = -Ky, \quad (114)$$

где K – диагональная матрица коэффициентов k_1, \dots, k_6 .

Синтез закона управления

Закон управления для стабилизации пассивной системы

$$u = -Ky, \quad (114)$$

где K – диагональная матрица коэффициентов k_1, \dots, k_6 .

Переменные v_d и ω_d могут быть использованы в качестве виртуальных входов и стабилизировать заданные многообразия для поступательного движения

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \cup \varphi_2(x, y, z) = 0$$

и для вращательного движения

$$1 - n^T n_d,$$

где n – вектор текущей ориентации,
 n_d – вектор желаемой ориентации.

Введение
Алгоритмы траекторного управления
Эксперименты
Контакты

Движение на плоскости
Движение на плоскости в динамическом окружении
Движение в пространстве
Движение в пространстве (пассивность)
Движение в пространстве в динамическом окружении

Синтез управления

Синтез управления

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - n^T n_d\right)^2. \quad (115)$$

Синтез управления

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\varphi_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - n^T n_d\right)^2. \quad (115)$$

Продифференцируем (115) по времени

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \varphi_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \varphi_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^T \dot{x} - \frac{d}{dt} n^T n_c - n^T \frac{d}{dt} n_d = \\ &= \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^T v_d + (1 + n^T n_c) (n^T S(\omega_d) n_c - n^T S(\omega_c) n_c) = \\ &= \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^T v_d + (1 + n^T n_c) n^T S(\omega_d - \omega_c) n_c = \\ &= \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^T v_d + (1 + n^T n_c) n^T S^T(n_c)(\omega_c - \omega_d). \end{aligned}$$

Введение
Алгоритмы траекторного управления
Эксперименты
Контакты

Движение на плоскости
Движение на плоскости в динамическом окружении
Движение в пространстве
Движение в пространстве (пассивность)
Движение в пространстве в динамическом окружении

Синтез управления

Синтез управления

Для $v_d = u_\tau + u_\varphi$ и $\omega_d = \omega_c + u_\omega$ получим

$$\dot{V} = \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^T \Upsilon^{-1} \begin{bmatrix} v^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^T u_\varphi + \\ + (1 + n^T n_c) n^T S^T (n_c) u_\omega.$$

Выберем управления u_φ и u_ω в виде

$$u_\varphi = -K_\varphi \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right), \quad (116)$$

$$u_\omega = -S(n_c) n k_\omega (1 - n^T n_c). \quad (117)$$

Введение
Алгоритмы траекторного управления
Эксперименты
Контакты

Движение на плоскости
Движение на плоскости в динамическом окружении
Движение в пространстве
Движение в пространстве (пассивность)
Движение в пространстве в динамическом окружении

Синтез управления

Синтез управления

Производная (115) с учетом (116) и (117)

$$\dot{V} = - \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^T K_\varphi \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) - k_\omega (1 - n^T n_c)^2 < 0,$$

что означает асимптотическую устойчивость системы с областью притяжения $(-\pi, \pi)$.

Пример

Пример

Желаемая касательная скорость $\dot{s}^* = 1$.

Вектор начальной ориентации $n = [1 \ 0 \ 0]$.

Вектор желаемой ориентации $n_c = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$.

Параметры регуляторов

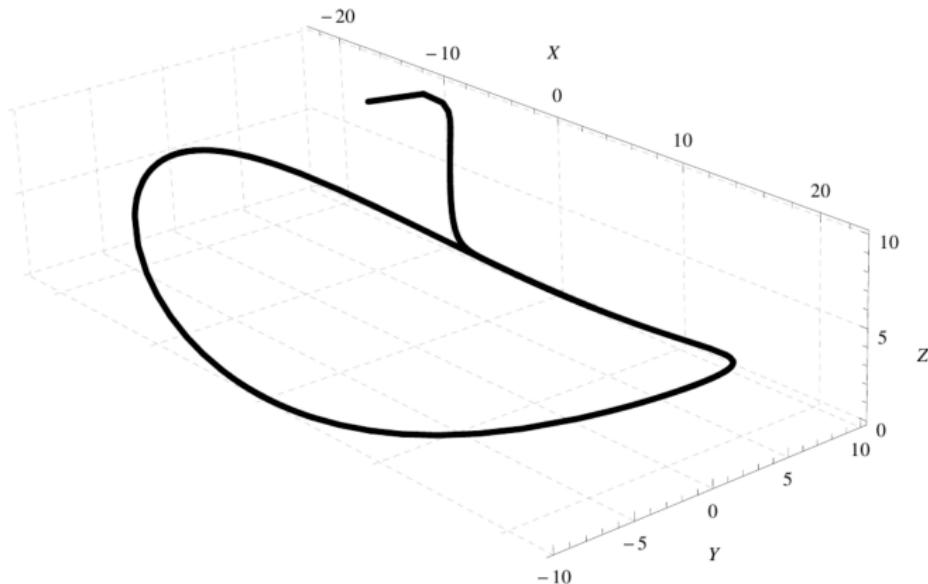
$$K = diag [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 10 \ 10 \ 10],$$

$$K_\varphi = diag [2 \ 2 \ 2],$$

$$k_\omega = 8.$$

Пример

Пример

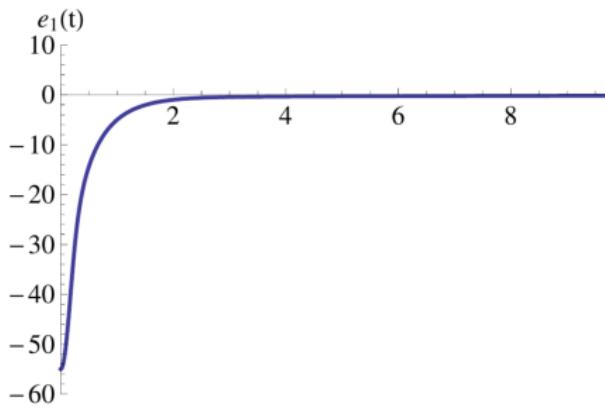


Движение вдоль кривой

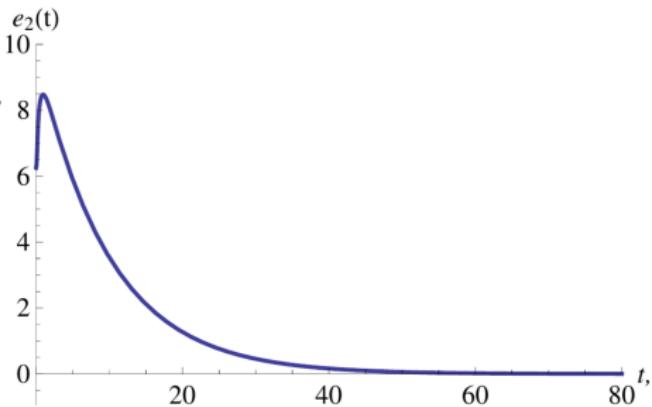
$$\varphi_1(x, y, z) = 0.2x^2 + y^2 - R^2 = 0 \cap \varphi_2(x, y, z) = z + 0.05y^2 - 5 = 0$$

Пример

Пример



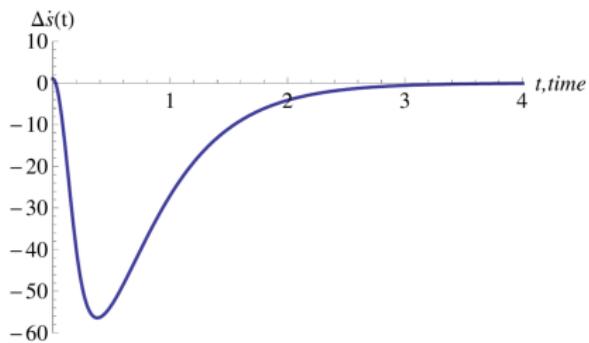
Ортогональное отклонение
 $e_1 = \varphi_1(x, y, z)$



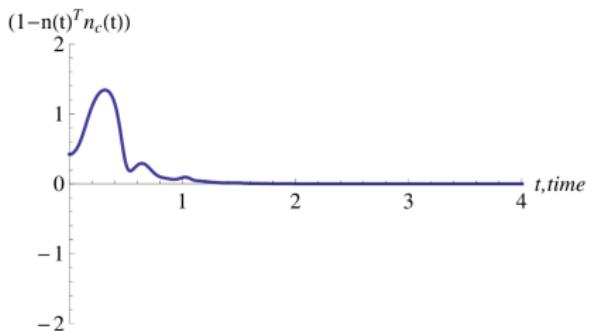
Ортогональное отклонение
 $e_2 = \varphi_2(x, y, z)$

Пример

Пример



Ошибка по скорости
 $\Delta v = \dot{s}^* - \dot{s}$



Ошибка ориентации $1 - n^T n_c$

Движение в динамическом окружении

Движение в динамическом окружении

Модель движения неполноприводного объекта

$$\ddot{q}(t) = g - \frac{f(t)}{m} \vec{n}(t), \quad (118)$$

$$\dot{R}(t) = R(t)S(\omega(t)), \quad (119)$$

$$M_c(t) = J\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times J\omega(t). \quad (120)$$

Движение в динамическом окружении

Модель движения неполноприводного объекта

$$\ddot{q}(t) = g - \frac{f(t)}{m} \vec{n}(t), \quad (118)$$

$$\dot{R}(t) = R(t)S(\omega(t)), \quad (119)$$

$$M_c(t) = J\dot{\omega}(t) + \omega(t) \times J\omega(t). \quad (120)$$

Модель движения подвижного препятствия

$$\dot{q}_o = R_T(\alpha^*)v_o, \quad (121)$$

$$\dot{\alpha}^* = \omega_o, \quad (122)$$

$$\dot{R}_T(\alpha^*) = R_TS(\omega_o). \quad (123)$$

Движение в пространстве в динамическом окружении

Движение в пространстве в динамическом окружении

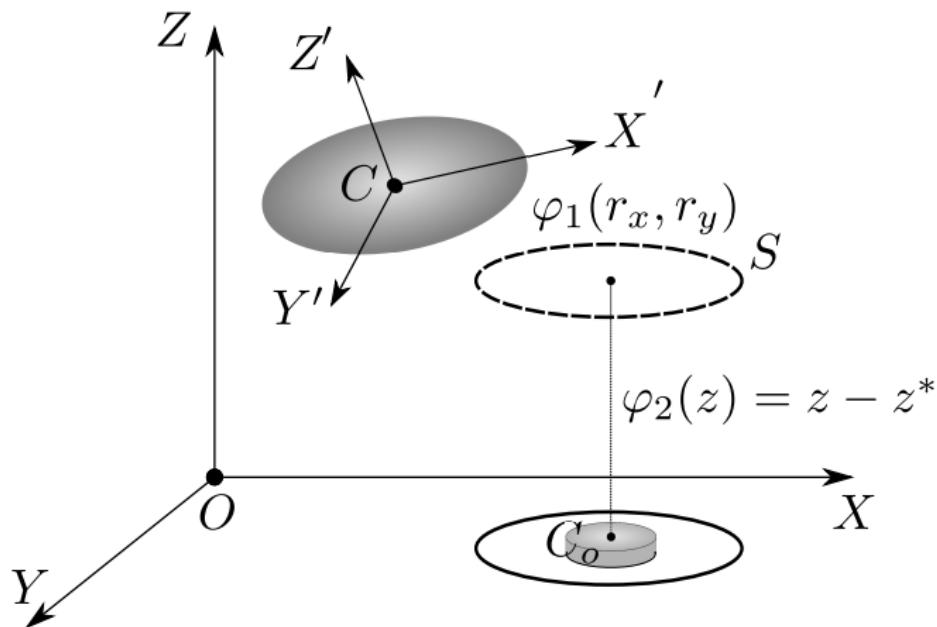


Figure: Движение в пространстве в динамическом окружении

Относительные координаты

Относительные координаты

Относительное положение

$$q_r = R_T^\top(\alpha^*)(q - q_o), \quad (124)$$

Относительные координаты

Относительное положение

$$q_r = R_T^\top(\alpha^*)(q - q_o), \quad (124)$$

Относительная скорость

$$\dot{q}_r = R_T^\top(\alpha^*)\dot{q} - S(\omega_o)q_r, \quad (125)$$

Относительные координаты

Относительное положение

$$q_r = R_T^\top(\alpha^*)(q - q_o), \quad (124)$$

Относительная скорость

$$\dot{q}_r = R_T^\top(\alpha^*)\dot{q} - S(\omega_o)q_r, \quad (125)$$

Относительное ускорение

$$\ddot{q}_r = R_T^\top(\alpha^*)\ddot{q} - 2S(\omega_o)\dot{q} - S^2(\omega_o)q_r. \quad (126)$$

Синтез управления

Синтез управления

Замыкание внутреннего контура по скоростям. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_r - \bar{v})^T(\dot{r}_x - \bar{v}) + k_d \ln(2 - (R^\top \bar{n})^\top(R^\top R_T \bar{n}_d)), \quad (127)$$

где \bar{v} – вектор желаемых линейных скоростей, \bar{n}_d – вектор желаемой ориентации, k_d – положительный коэффициент.

Синтез управления

Замыкание внутреннего контура по скоростям. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_r - \bar{v})^T(\dot{r}_x - \bar{v}) + k_d \ln(2 - (R^\top \bar{n})^\top(R^\top R_T \bar{n}_d)), \quad (127)$$

где \bar{v} – вектор желаемых линейных скоростей, \bar{n}_d – вектор желаемой ориентации, k_d – положительный коэффициент.

Найдем производную функции V_1 :

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= (\dot{q}_r - \bar{v})^\top(R_T^\top - \frac{f}{m}R_T^\top\bar{n} - 2S(\omega_o)\dot{q}_r - S^2(\omega_o)q_r - \dot{\bar{v}}) \\ &\quad + \gamma^\top \left(\omega - \omega_o - \frac{S(R^\top R_T \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^\top R_T \dot{\bar{n}}_d \right), \end{aligned} \quad (128)$$

где $\gamma^\top = \frac{k_d(R^\top \bar{n})^\top S^\top(R^\top R_T \bar{n}_d)}{(2 - (R^\top \bar{n})^\top(R^\top R_T \bar{n}_d))}$ и $|a|$ – евклидова норма вектора a .

Синтез управления

Синтез управления

Определим замену переменных:

$$\delta = R_T^\top g - 2S(\omega_o)\dot{q}_r - S^2(\omega_o)q_r - \dot{\bar{v}}, \delta = \frac{f_d}{m}\bar{n}_d,$$

где $f_d = |\delta|$ и $\bar{n}_d = \frac{\delta}{|\delta|}$.

Синтез управления

Определим замену переменных:

$$\delta = R_T^\top g - 2S(\omega_o)\dot{q}_r - S^2(\omega_o)q_r - \dot{\bar{v}}, \delta = \frac{f_d}{m}\bar{n}_d,$$

где $f_d = |\delta|$ и $\bar{n}_d = \frac{\delta}{|\delta|}$.

Выберем управления f и $\omega = \omega_i$ в виде

$$f = f_d \cdot ((R_T^\top \bar{n})^\top \bar{n}_d) - k_v(\dot{q}_r - \bar{v})^\top R_T^\top \bar{n}, \quad (129)$$

$$\omega_d = \omega_o + \frac{S(R^\top R_T \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^\top R_T \dot{\bar{n}}_d + \sigma - K_\gamma \gamma, \quad (130)$$

где k_v, k_γ – постоянные коэффициенты, а σ имеет вид

$$\sigma = \left(\frac{f_d(2 - (R^\top \bar{n})^\top (R^\top R_T \bar{n}_d))}{mk_d} (\dot{q}_r - \bar{v})^\top S(R_T^\top \bar{n}) R_T^\top R \right). \quad (131)$$

Синтез управления

Синтез управления

Тогда производная функции Ляпунова V_1

$$\dot{V}_1 = -k_v((\dot{r} - \bar{u})^\top R_T^\top \bar{n})^2 - k_\gamma \gamma^\top \gamma \leq 0, \quad (132)$$

что означает асимптотическую устойчивость положения равновесия $\dot{r} - \bar{u} = 0, \bar{n} - \bar{n}_d$.

Синтез управления

Тогда производная функции Ляпунова V_1

$$\dot{V}_1 = -k_v((\dot{r} - \bar{u})^\top R_T^\top \bar{n})^2 - k_\gamma \gamma^\top \gamma \leq 0, \quad (132)$$

что означает асимптотическую устойчивость положения равновесия $\dot{r} - \bar{u} = 0$, $\bar{n} - \bar{n}_d$.

Теперь можем записать модель движения объекта в редуцированном виде

$$\dot{r} = \bar{u}.$$

Синтез управления

Тогда производная функции Ляпунова V_1

$$\dot{V}_1 = -k_v((\dot{r} - \bar{u})^\top R_T^\top \bar{n})^2 - k_\gamma \gamma^\top \gamma \leq 0, \quad (132)$$

что означает асимптотическую устойчивость положения равновесия $\dot{r} - \bar{u} = 0$, $\bar{n} - \bar{n}_d$.

Теперь можем записать модель движения объекта в редуцированном виде

$$\dot{r} = \bar{u}.$$

Закон управления \bar{u} будем формировать в виде

$$\bar{u} = u_e + u_s,$$

где u_e обеспечивает стабилизацию положения, а u_s обеспечивает заданную касательную скорость.

Синтез управления

Синтез управления

Преобразуем модель (124)-(126) к задачно-ориентированному базису с выходами s , e_1 и e_2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(q_r)\dot{q}_r.$$

Синтез управления

Преобразуем модель (124)-(126) к задачно-ориентированному базису с выходами s , e_1 и e_2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(q_r)\dot{q}_r.$$

Управление u_s выберем в виде

$$u_s = \Upsilon^{-1}(q_r) \begin{bmatrix} \dot{s}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (133)$$

Синтез управления

Преобразуем модель (124)-(126) к задачно-ориентированному базису с выходами s , e_1 и e_2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \Upsilon(q_r)\dot{q}_r.$$

Управление u_s выберем в виде

$$u_s = \Upsilon^{-1}(q_r) \begin{bmatrix} \dot{s}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (133)$$

Для синтеза управления u_e рассмотрим функцию Ляпунова

$$V_2 = \frac{k_1}{2}\varphi_1^2(q_r) + \frac{k_2}{2}\varphi_2^2(q_r), \quad (134)$$

Синтез управления

Синтез управления

Найдем производную функции V_2 .

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T \dot{q}_r = \\ &\quad (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T u_s + \\ &+ (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T \Upsilon^{-1}(q_r) \begin{bmatrix} \dot{s}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &\quad (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T u_s.\end{aligned}$$

Синтез управления

Найдем производную функции V_2 .

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T \dot{q}_r = \\ &\quad (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T u_s + \\ &+ (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T \Upsilon^{-1}(q_r) \begin{bmatrix} \dot{s}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &\quad (k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r))^T u_s.\end{aligned}$$

Выберем u_e в виде

$$u_e = -(k_1\varphi_1(q_r)\nabla\varphi_1(q_r) + k_2\varphi_2(q_r)\nabla\varphi_2(q_r)), \quad (135)$$

где k_1 и k_2 – положительные коэффициенты.

Синтез управления

Синтез управления

Итоговый закон управления:

$$M_c = \omega \times J\omega + J\dot{\omega}_d + k_\omega J(\omega - \omega_d),$$

$$\omega_d = \omega_T + \frac{S(R^\top R_T \bar{n}_d)}{|\bar{n}_d|} R^\top R_T \dot{\bar{n}}_d + \sigma - k_\gamma \gamma,$$

$$\sigma^\top = \frac{f_d \cdot (2 - (R^\top \bar{n})^\top (R^\top R_T \bar{n}_d))}{mk_d} (\dot{q}_r - \bar{v})^\top S(R_T^\top \bar{n}) R_T^\top R$$

$$\gamma^\top = \frac{k_d (R^\top \bar{n})^\top S^\top (R^\top R_T \bar{n}_d)}{(2 - (R^\top \bar{n})^\top (R^\top R_T \bar{n}_d))},$$

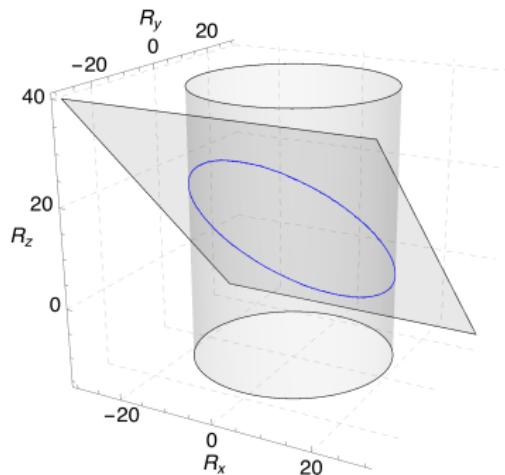
$$\delta = R_T^\top g - 2S(\omega_T) \dot{q}_r - S^2(\omega_T) q_r - \dot{\bar{v}},$$

$$f_d = |\delta|, \quad \bar{n}_d = \frac{\delta}{|\delta|},$$

$$f = f_d \cdot ((R_T^\top \bar{n})^\top \bar{n}_d) - k_v (\dot{q}_r - \bar{v})^\top R_T^\top \bar{n}.$$

Пример

Пример

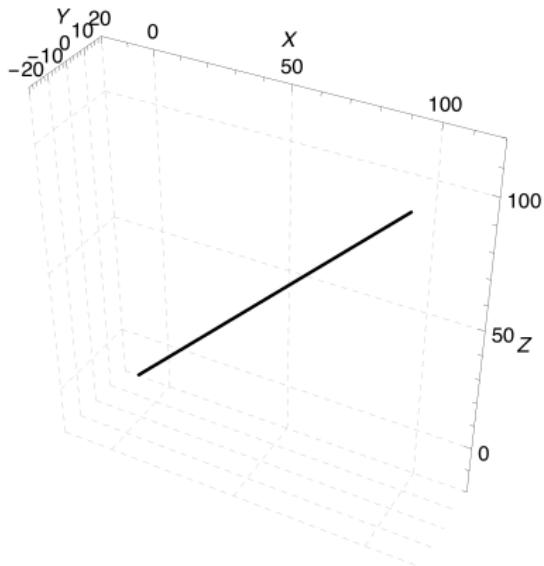


$$\varphi_1(r) = r_x^2 + r_y^2 - 400 = 0 \cap \varphi_2(r) = r_z + r_y - 10 = 0$$

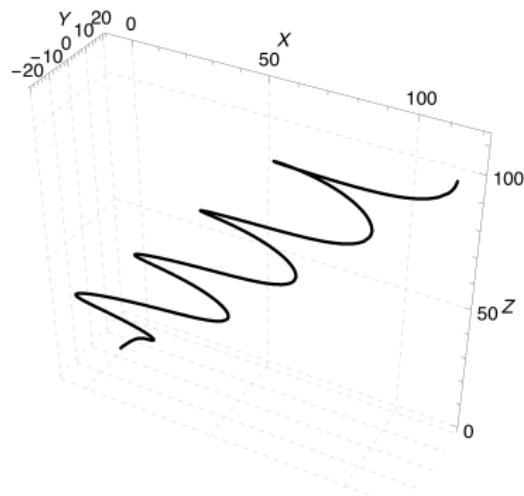
Желаемая касательная скорость $\dot{s}^* = 30$.

Пример

Пример



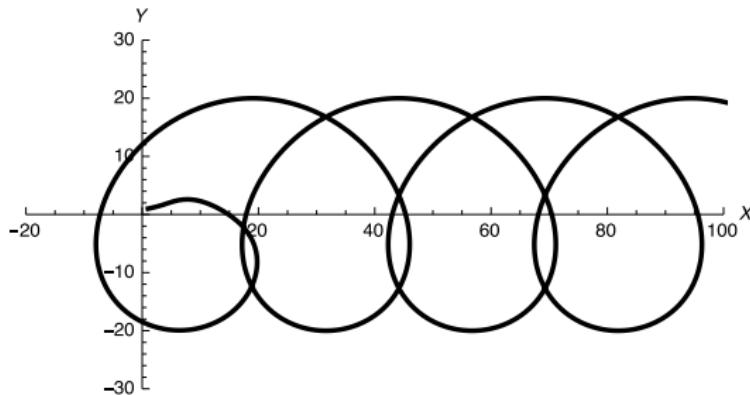
Движение подвижного
препятствия



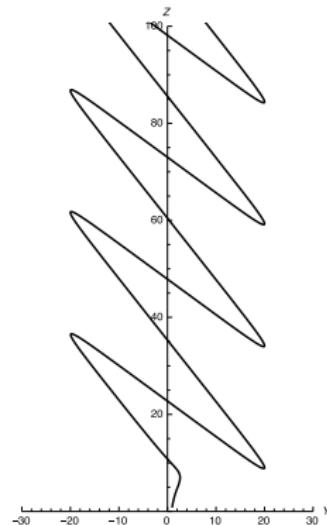
Движение объекта управления

Пример

Пример



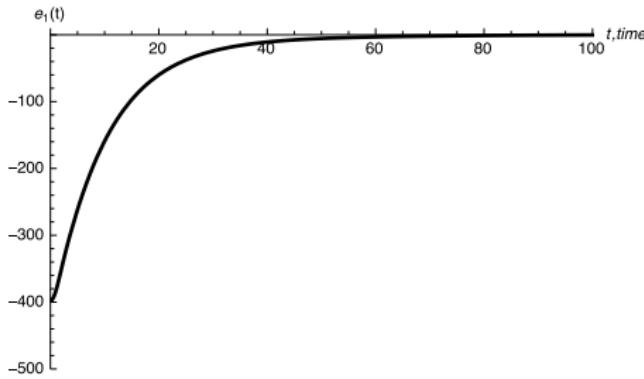
Проекция траектории движения
на плоскость XY



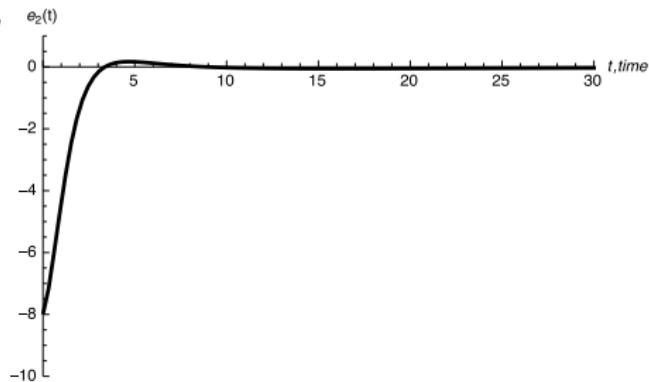
Проекция траектории движения
на плоскость YZ

Пример

Пример



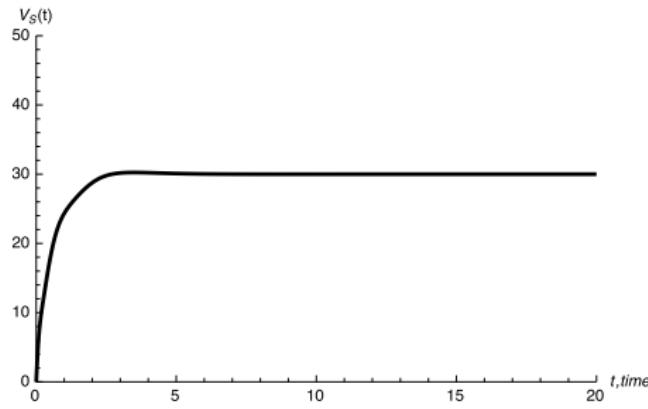
$$e_1 = \varphi_1(r)$$



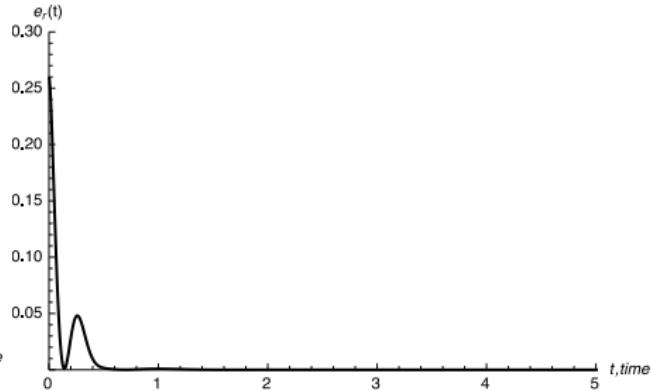
$$e_2 = \varphi_2(r)$$

Пример

Пример

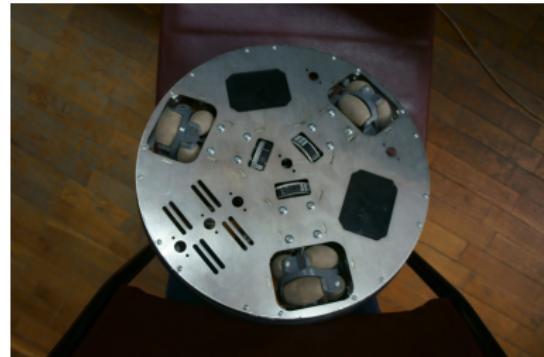


Касательная скорость,
 $\dot{s}^*(t) = 30$



Угловое отклонение
 $e_r = 1 - (R^\top \bar{n})^\top (R^\top R_T \bar{n}_d)$

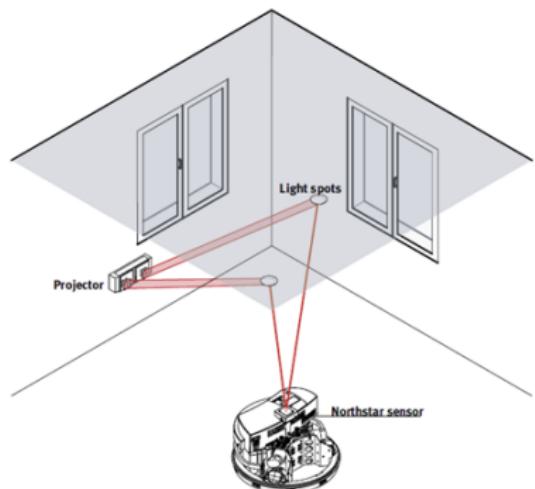
Омнидирекционный мобильный робот “Robotino”



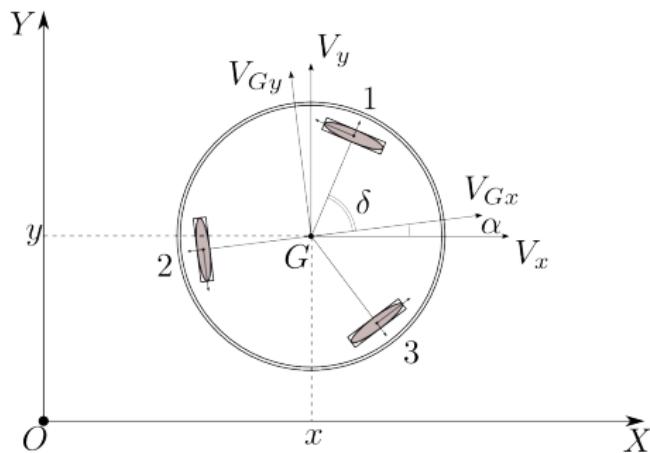
Geometric dimensions:

- ▶ Диаметр: 370 mm
- ▶ Высота: 210 mm
- ▶ Масса: 11 kg

Система локальной навигации “Northstar”



Математическая модель



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & L \\ 0 & -1 & L \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Gx} \\ V_{Gy} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

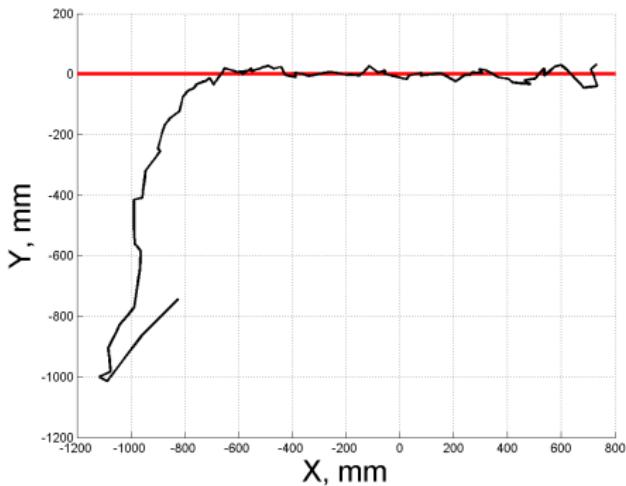
Контакты

Мобильный робот “Robotino”

Результаты экспериментов

Движение по линии

Движение по линии



$$\varphi(x, y) = -\sin \alpha x + \cos \alpha y = 0$$

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

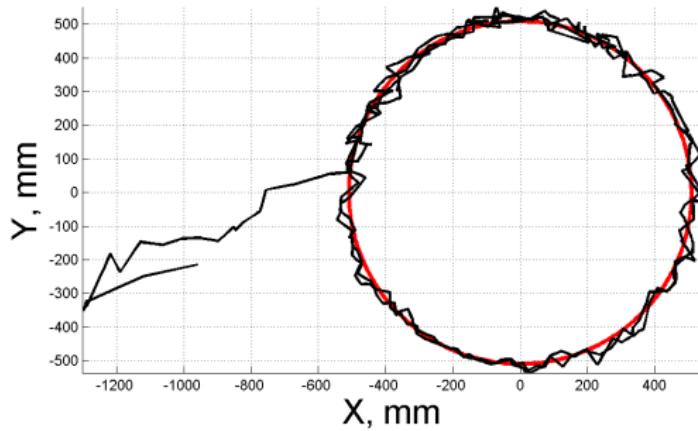
Контакты

Мобильный робот “Robotino”

Результаты экспериментов

Движение по окружности

Движение по окружности



$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 2500 = 0$$

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

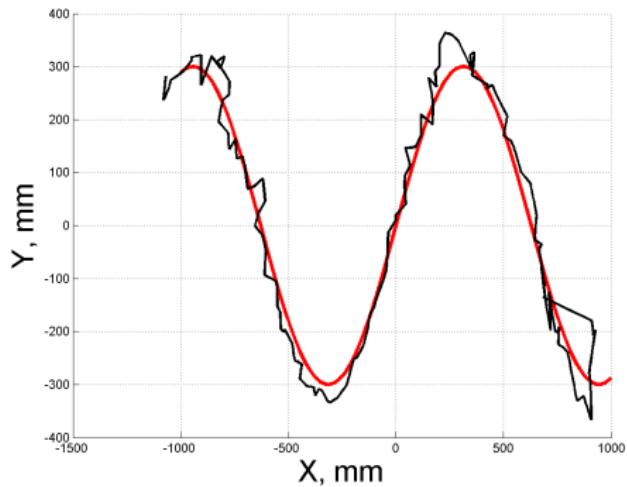
Контакты

Мобильный робот “Robotino”

Результаты экспериментов

Движение по синусоиде

Движение по синусоиде



$$\varphi(x, y) = -300 \sin 0.005x + y = 0$$

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

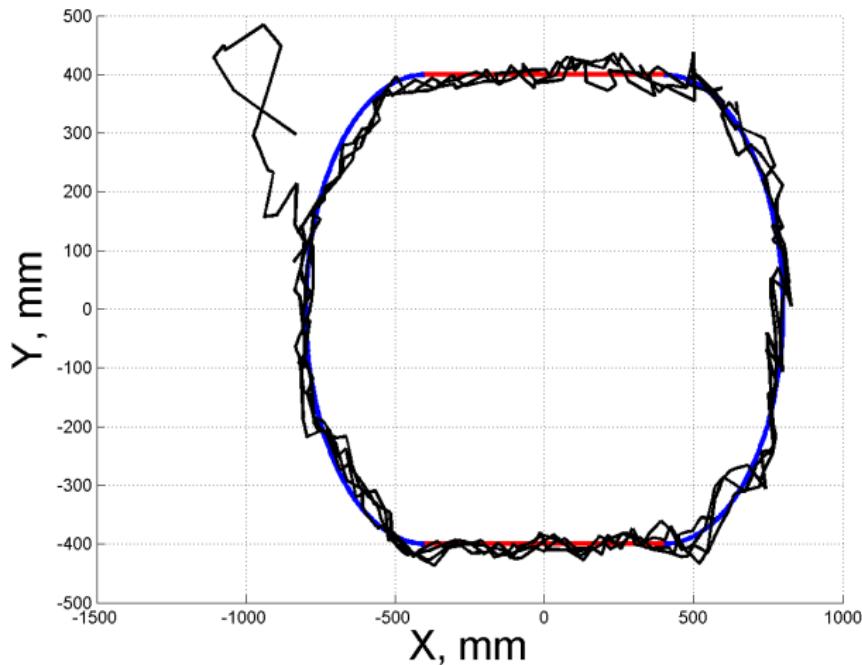
Контакты

Мобильный робот “Robotino”

Результаты экспериментов

Движение по составной кривой

Движение по составной кривой



Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Мобильный робот “Robotino”

Результаты экспериментов

Избегание столкновения

Избегание столкновения

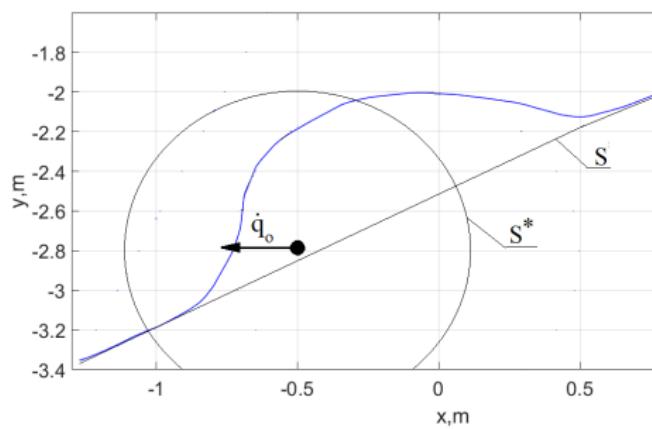


Figure: Избегание столкновения.

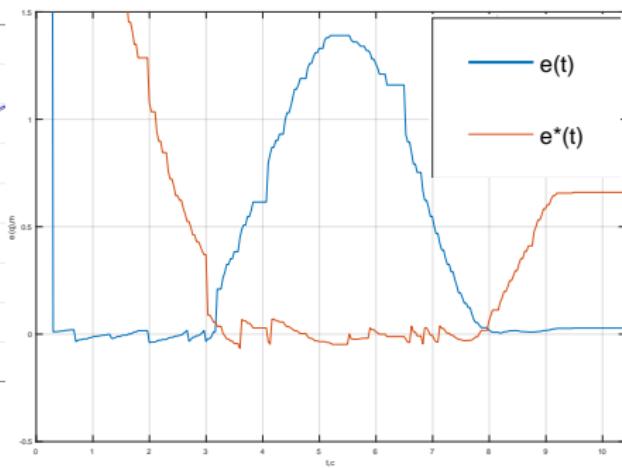


Figure: Ортогональные отклонения.

Введение

Алгоритмы траекторного управления

Эксперименты

Контакты

Мобильный робот “Robotino”

Результаты экспериментов

Движение относительно подвижного объекта

Движение относительно подвижного объекта

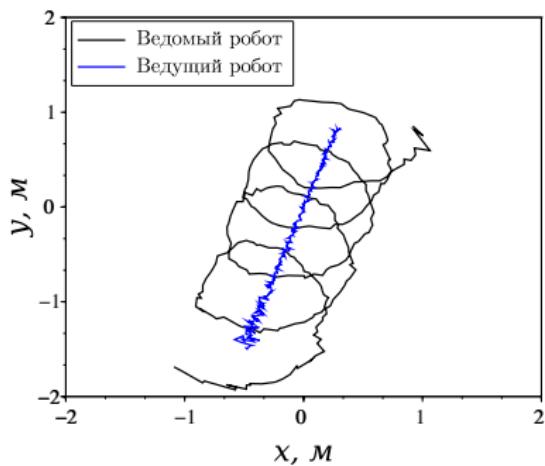


Figure: Полученные траектории.

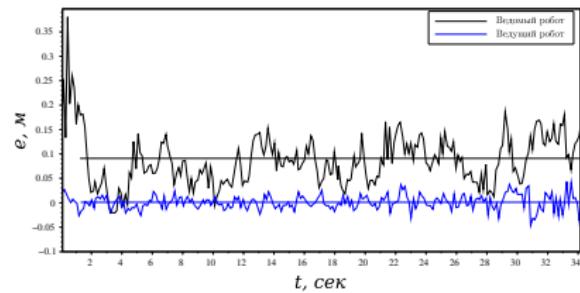


Figure: Ортогональные отклонения.

Спасибо за внимание!

Контактные данные

А.Ю. Краснов

aykrasnov@itmo.ru

С.А. Чепинский

schepinskiy@itmo.ru

