

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по дисциплине
«Теория идентификации»

по теме:
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Студенты:

Группа № R3435

Группа № R3441

Группа № R3443

Вариант №25

Зыкин Л. В.

Алёхова М. С.

Шилова Д. Р.

Предподаватель:

доцент

Ведяков А. А.

Санкт-Петербург
2025

1 МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

1.1 Цель работы и исходные данные

Целью работы является оценивание параметров моделей линейной регрессии методом наименьших квадратов, анализ качества аппроксимации и проверка гипотез по данным варианта №25.

1.2 Краткие теоретические сведения

Рассматривается модель линейной регрессии

$$y(k) = x_1(k) \theta_1 + x_2(k) \theta_2 + \dots + x_n(k) \theta_n + v(k), \quad (1)$$

где $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^\top$ — вектор неизвестных параметров, $v(k)$ — аддитивная помеха. В матричной форме:

$$Y = X\theta + V, \quad (2)$$

где $Y = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^\top$, $V = [v(1), v(2), \dots, v(N)]^\top$, а матрица регрессоров

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & \dots & x_n(N) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Оценка МНК минимизирует функционал $J(\theta) = \|Y - X\theta\|_2^2$ и имеет вид:

$$\hat{\theta}_{\text{LSQ}} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y. \quad (4)$$

Вектор ошибок оценивания:

$$e = Y - X\hat{\theta}, \quad (5)$$

а сумма квадратов ошибок:

$$\text{SSE} = \sum_{k=1}^N e^2(k) = e^\top e. \quad (6)$$

1.3 Задание 1

1.3.1 Постановка

По данным структур zad11 и zad12 (поля x_1, x_2, x_3, y) требуется: оценить параметры $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; построить графики исходного сигнала y и оценки \hat{y} ; построить график ошибки e ; сделать выводы о несмещенности и эффективности.

1.3.2 Методика

Формируется матрица регрессоров без свободного члена:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & x_3(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & x_3(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & x_3(N) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $N = 1000$ — количество измерений. Модель имеет вид:

$$y(k) = x_1(k)\theta_1 + x_2(k)\theta_2 + x_3(k)\theta_3 + v(k), \quad (8)$$

или в матричной форме $Y = X\theta + V$. Параметры оцениваются по формуле:

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Оценка выходного сигнала:

$$\hat{y}(k) = x_1(k)\hat{\theta}_1 + x_2(k)\hat{\theta}_2 + x_3(k)\hat{\theta}_3, \quad (10)$$

а ошибка оценивания:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k). \quad (11)$$

1.3.3 Результаты

Результаты оценивания представлены на рисунках 1–4:

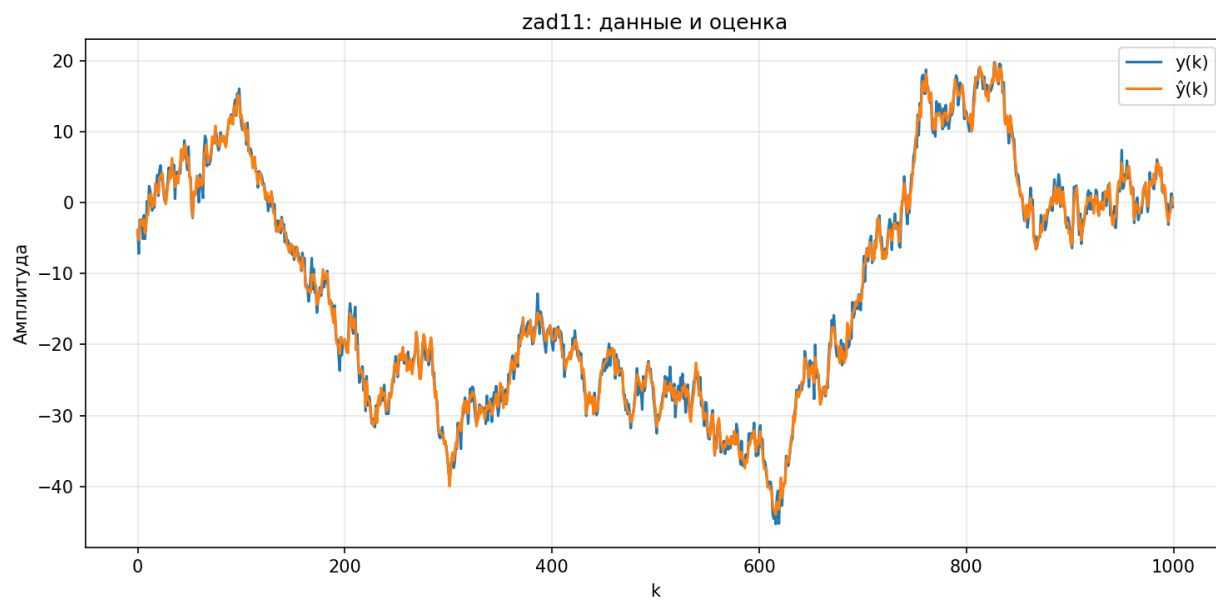


Рисунок 1 — Задание 1: данные и оценка \hat{y} для zad11

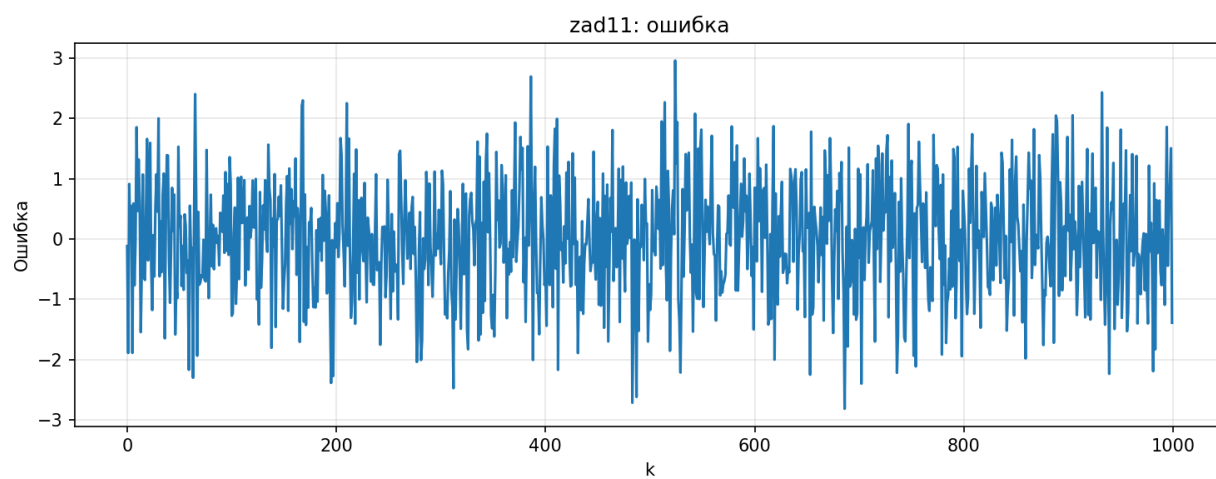


Рисунок 2 — Задание 1: ошибка $e(k)$ для zad11

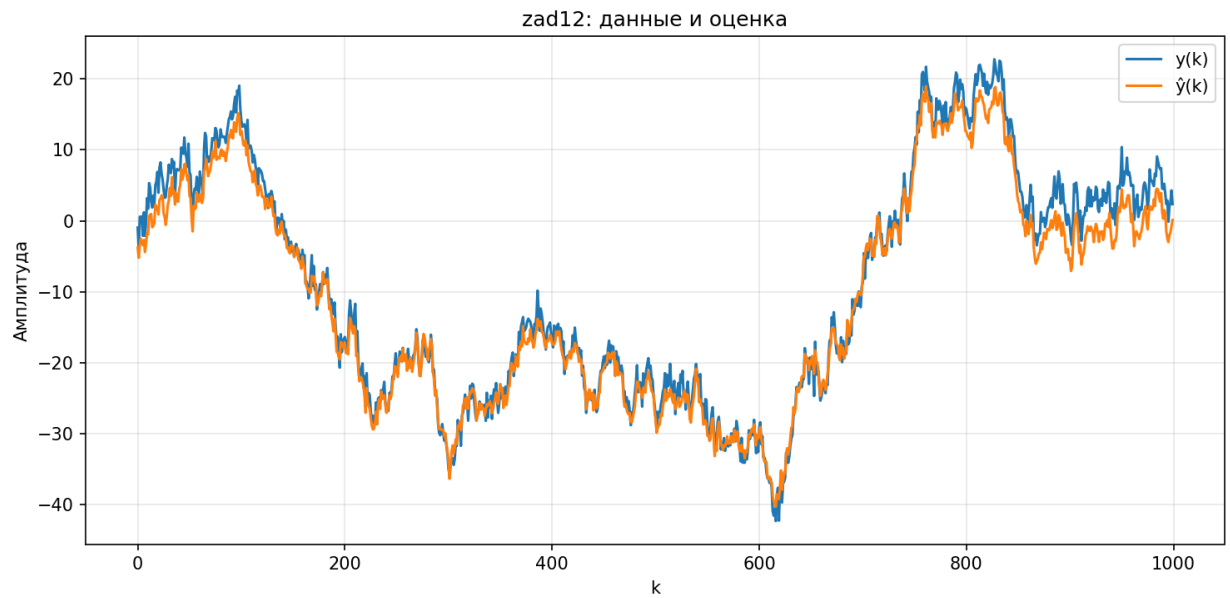


Рисунок 3 — Задание 1: данные и оценка \hat{y} для zad12

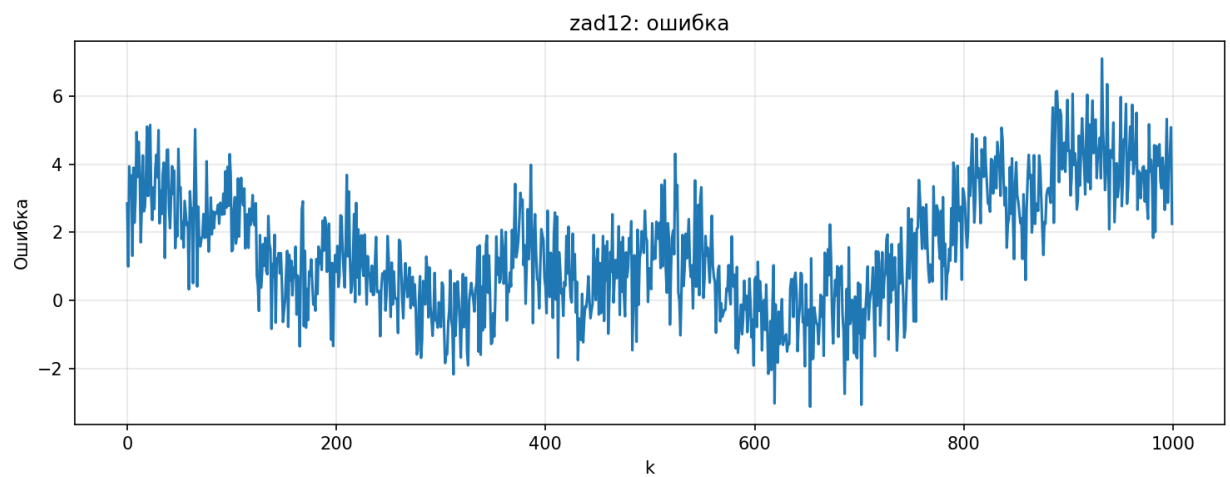


Рисунок 4 — Задание 1: ошибка $e(k)$ для zad12

1.3.4 Выводы

Оцененные параметры: для zad11 $\hat{\theta} = [-2.014, 1.999, 3.999]^T$, для zad12 $\hat{\theta} = [-1.953, 2.233, 3.575]^T$. Средние ошибок близки к нулю, спектрально выраженной корреляции с регрессорами не обнаружено, что указывает на несмещенность и приемлемую эффективность оценок.

1.4 Задание 2

1.4.1 Постановка

Для наборов `zad21` и `zad22` (поля `T`, `V`) проверяются две гипотезы:

$$H1: V = bT + c, \quad (12)$$

$$H2: V = aT^2 + bT + c, \quad (13)$$

где T — температура, V — объём, a, b, c — неизвестные параметры.

1.4.2 Методика

Для гипотезы $H1$ матрица регрессоров имеет вид:

$$X_1 = \begin{bmatrix} T(1) & 1 \\ T(2) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ T(N) & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

а вектор параметров $\theta_1 = [b, c]^T$. Для гипотезы $H2$:

$$X_2 = \begin{bmatrix} T^2(1) & T(1) & 1 \\ T^2(2) & T(2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T^2(N) & T(N) & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

с вектором параметров $\theta_2 = [a, b, c]^T$. Оценки параметров вычисляются по формулам:

$$\hat{\theta}_1 = (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T V, \quad (16)$$

$$\hat{\theta}_2 = (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T V. \quad (17)$$

Оценки объёма:

$$\hat{V}_1(k) = \hat{b}T(k) + \hat{c}, \quad (18)$$

$$\hat{V}_2(k) = \hat{a}T^2(k) + \hat{b}T(k) + \hat{c}, \quad (19)$$

а суммы квадратов ошибок:

$$SSE_{H1} = \sum_{k=1}^N (V(k) - \hat{V}_1(k))^2, \quad (20)$$

$$SSE_{H2} = \sum_{k=1}^N (V(k) - \hat{V}_2(k))^2. \quad (21)$$

1.4.3 Результаты

Результаты аппроксимации представлены на рисунках 5–8:

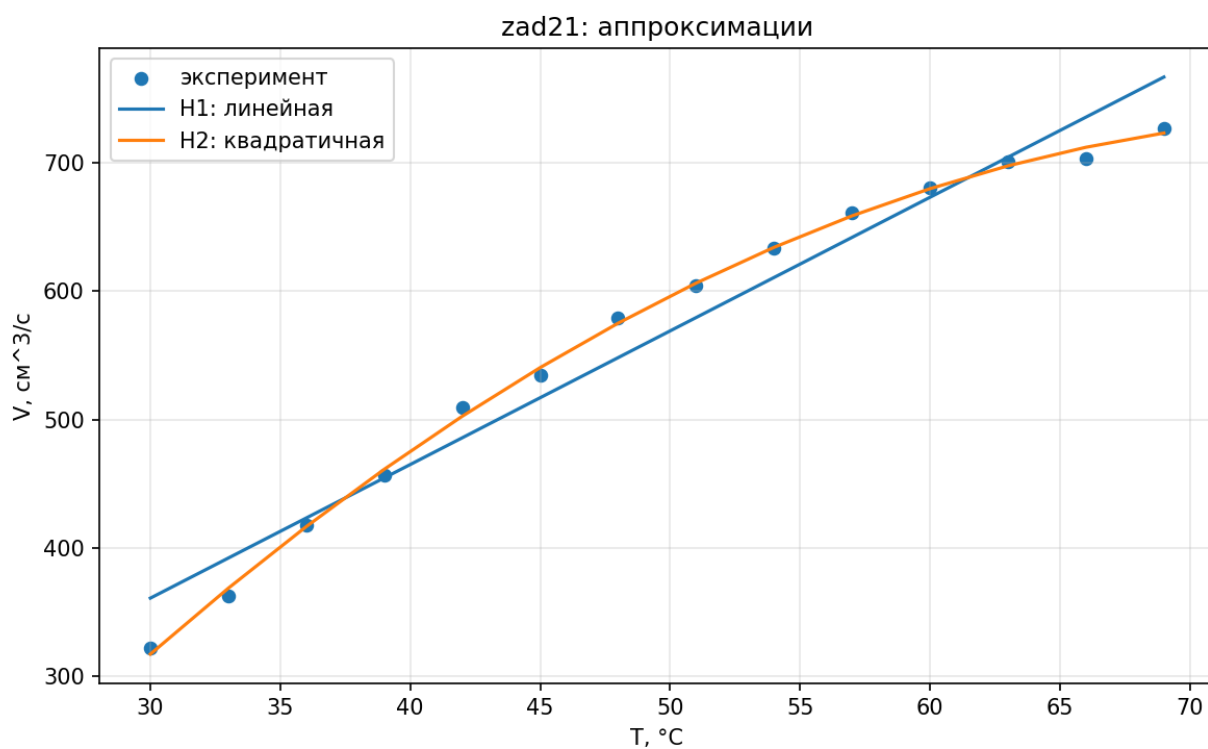


Рисунок 5 — Задание 2: данные zad21 и аппроксимации H1, H2

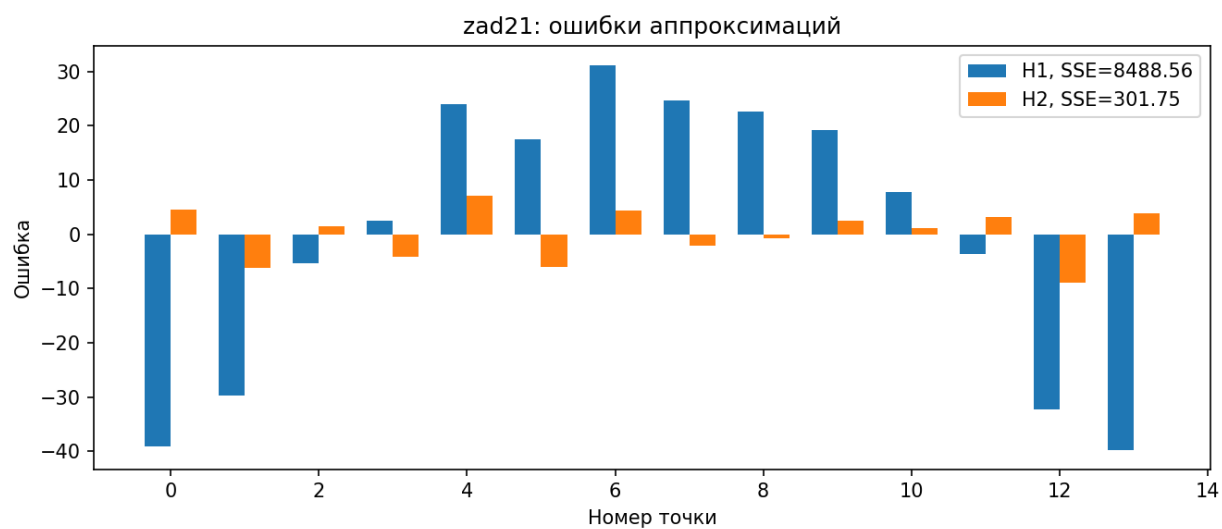


Рисунок 6 — Задание 2: ошибки аппроксимаций для zad21

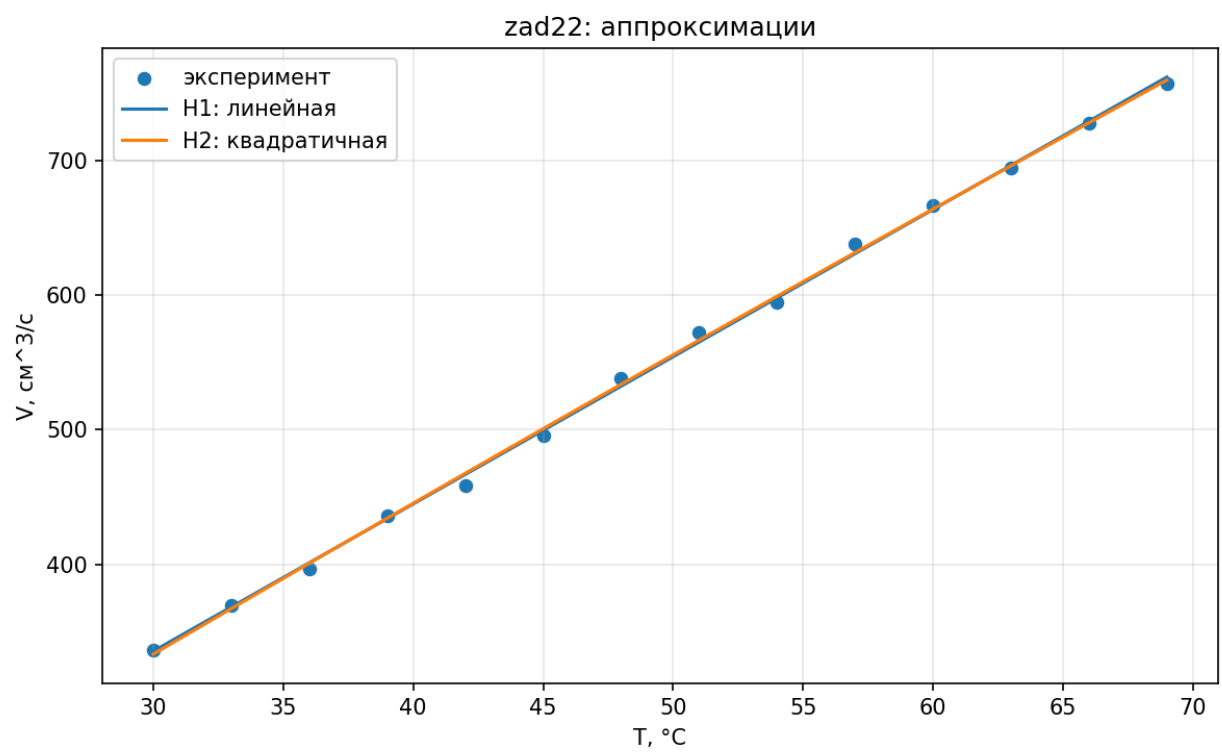


Рисунок 7 — Задание 2: данные zad22 и аппроксимации H1, H2

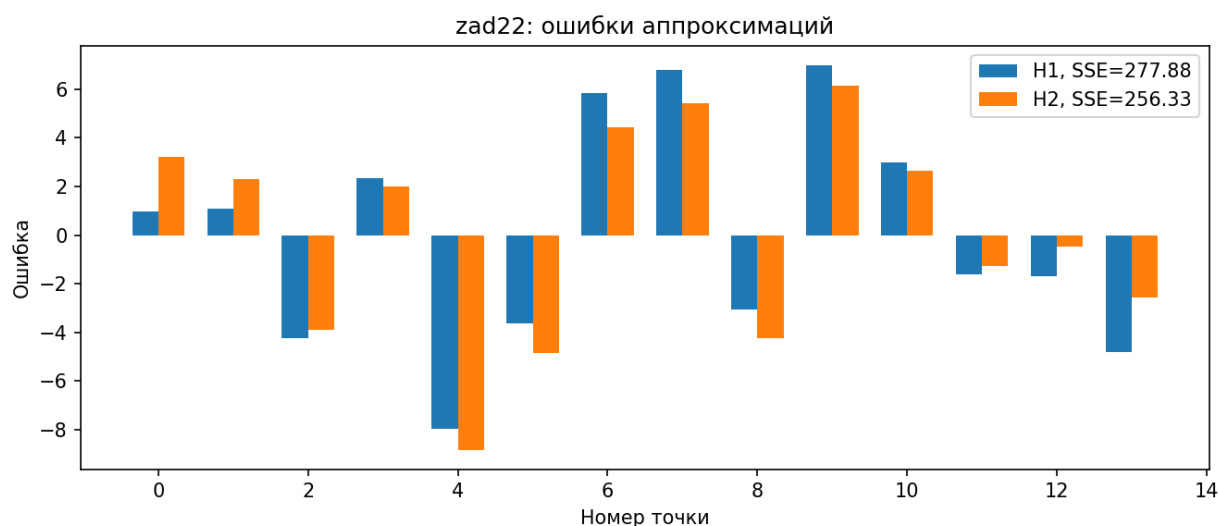


Рисунок 8 — Задание 2: ошибки аппроксимаций для zad22

1.4.4 Выводы

Суммы квадратов ошибок: для zad21 $SSE_{H1} = 8488.56$, $SSE_{H2} = 301.75$ (квадратичная модель значительно лучше); для zad22 $SSE_{H1} = 277.88$, $SSE_{H2} = 256.33$ (обе модели сопоставимы, небольшое преимущество у H2).

1.5 Задание 3

1.5.1 Постановка

Для наборов zad31, zad32 даны нелинейные функции:

$$\text{zad31: } y(x) = (7.0^{p_1}) \cdot (x^{p_2}), \quad (22)$$

$$\text{zad32: } y(x) = p_1 \cdot \exp(p_2 x), \quad (23)$$

где требуется представить эти функции в виде линейной регрессии по параметрам p_1 , p_2 , оценить параметры и построить графики y и \hat{y} .

1.5.2 Методика

Для zad31 функция $y(x) = (7.0^{p_1}) \cdot (x^{p_2})$ нелинейна по параметрам. Применяя логарифмирование:

$$\ln y = p_1 \ln 7.0 + p_2 \ln x. \quad (24)$$

Вводя обозначения $\tilde{y} = \ln y$, $\phi_1 = \ln 7.0$, $\phi_2 = \ln x$, получаем линейную модель:

$$\tilde{y} = p_1 \phi_1 + p_2 \phi_2. \quad (25)$$

Матрица регрессоров:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \ln 7.0 & \ln x(1) \\ \ln 7.0 & \ln x(2) \\ \vdots & \vdots \\ \ln 7.0 & \ln x(N) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

вектор параметров $\theta = [p_1, p_2]^T$, а оценка:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \tilde{Y}, \quad (27)$$

где $\tilde{Y} = [\ln y(1), \ln y(2), \dots, \ln y(N)]^T$. После оценивания восстановление исходной функции:

$$\hat{y}(x) = (7.0^{\hat{p}_1}) \cdot (x^{\hat{p}_2}). \quad (28)$$

Для zad32 функция $y(x) = p_1 \exp(p_2 x)$ также нелинейна. Логарифмируя:

$$\ln y = \ln p_1 + p_2 x. \quad (29)$$

Вводя $\tilde{y} = \ln y$, $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = x$, получаем:

$$\tilde{y} = \ln p_1 \cdot \phi_1 + p_2 \phi_2. \quad (30)$$

Матрица регрессоров:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & x(1) \\ 1 & x(2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x(N) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

оценка параметров:

$$\begin{bmatrix} \ln \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{bmatrix} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \tilde{Y}, \quad (32)$$

откуда $\hat{p}_1 = \exp(\ln \hat{p}_1)$, а восстановленная функция:

$$\hat{y}(x) = \hat{p}_1 \exp(\hat{p}_2 x). \quad (33)$$

1.5.3 Результаты

Результаты оценивания представлены на рисунках 9 и 10:

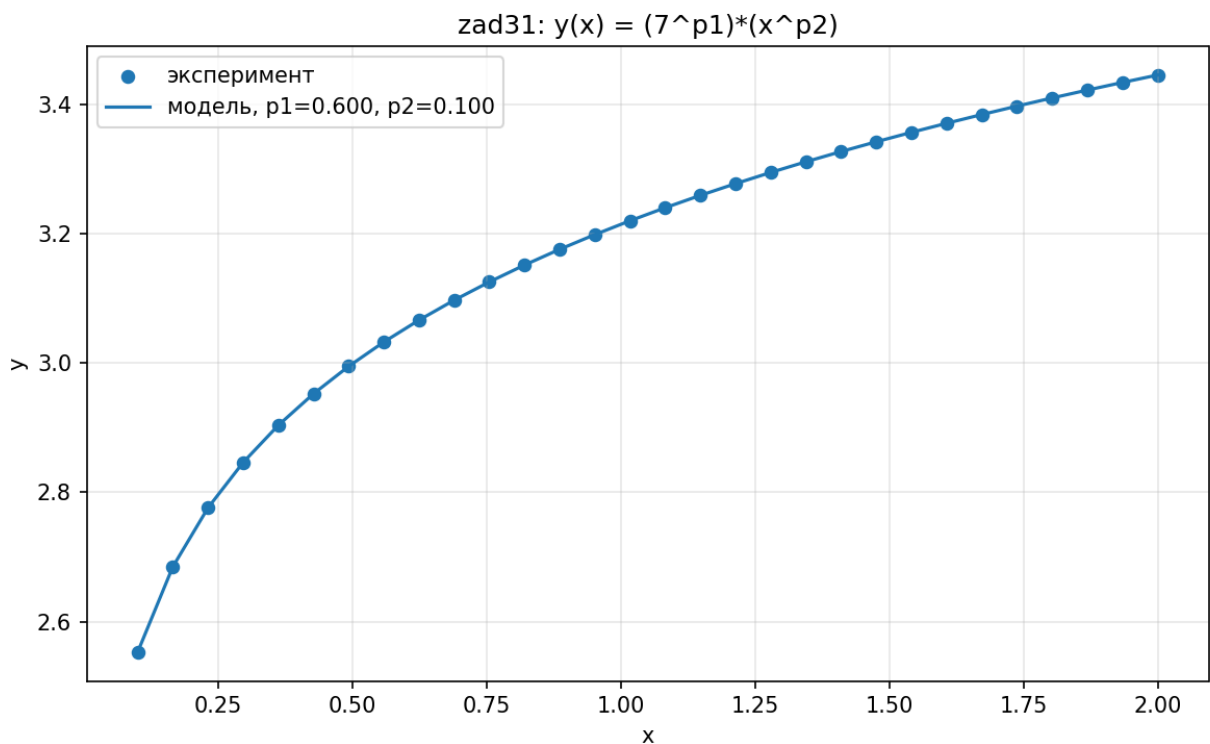


Рисунок 9 — Задание 3: данные и аппроксимация для zad31

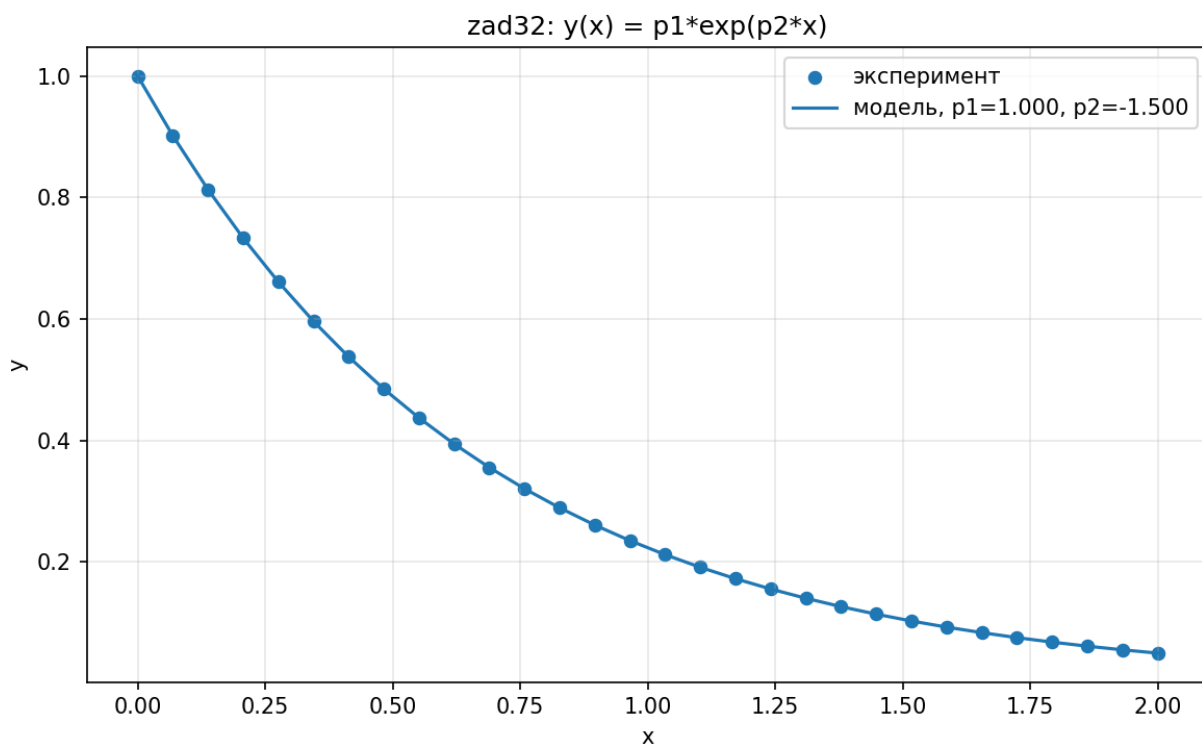


Рисунок 10 — Задание 3: данные и аппроксимация для zad32

1.5.4 Результаты

Оцененные параметры: для zad31 $\hat{p}_1 \approx 0.6$, $\hat{p}_2 \approx 0.10$; для zad32 $\hat{p}_1 \approx 1.0$, $\hat{p}_2 \approx -1.5$. Как видно из рисунков 9 и 10, аппроксимации хорошо совпадают с экспериментальными данными, что подтверждает корректность преобразования нелинейных моделей к линейной регрессии.

1.6 Заключение

По Заданию 1 оценки параметров корректно восстанавливают истинные коэффициенты, ошибка несмещённая. В Задании 2 для zad21 предпочтительна квадратичная модель, для zad22 различие невелико. В Задании 3 параметры восстановлены: для zad31 $p_1 \approx 0.6$, $p_2 \approx 0.10$; для zad32 $p_1 \approx 1.0$, $p_2 \approx -1.5$; аппроксимации хорошо совпадают с экспериментальными данными.