Условие неисчезающего возбуждения: матричное неравенство

Рассматривается регрессионная модель

$$y(t) = \varphi^\top(t)\,\theta^\star + v(t),$$

где $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор регрессора, $\theta^\star \in \mathbb{R}^n$ — истинный вектор параметров, $v(t)$ — помеха. В алгоритмах адаптивной идентификации ключевую роль играет условие *неисчезающего возбуждения* (persistent excitation)

$$\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\,d\tau \;\geq\; \alpha I, \qquad \forall t, \quad T > 0,\ \alpha > 0, \tag{1}$$

где I — единичная матрица размера $n \times n$.

Почему левая часть (1) — это матрица

Вектор регрессора имеет вид

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда произведение $\varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)$ — это *внешнее произведение* вектора на себя:

$$\varphi(\tau)\varphi^\top(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \vdots \\ \varphi_n(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) & \dots & \varphi_n(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_i(\tau)\varphi_j(\tau) \end{bmatrix}_{i,j=1}^n.$$

Каждый элемент этой матрицы есть скаляр $\varphi_i(\tau)\varphi_j(\tau)$, поэтому

$$\varphi(\tau)\varphi^\top(\tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Интегрирование по времени в (1) выполняется *покомпонентно*:

$$\left(\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\,d\tau\right)_{ij} = \int_t^{t+T} \varphi_i(\tau)\varphi_j(\tau)\,d\tau.$$

То есть мы интегрируем каждый элемент матрицы по отдельности и снова получаем матрицу размера $n \times n$. Таким образом,

$$\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\,d\tau \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

поэтому сравнение в (1) является именно *матричным* неравенством.

Отметим также, что для любого фиксированного τ матрица $\varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)$ является симметричной и неотрицательно определённой (positive semi-definite), так как

$$x^\top\varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)x = \big(\varphi^\top(\tau)x\big)^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Интеграл суммы таких матриц также остаётся симметричной неотрицательно определённой матрицей.

Смысл неравенства матриц в (1)

Запись

$$A \ \geq \ B$$

для симметричных матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ понимается в смысле *положительной полуопределённости* разности:

$$A \geq B \quad \Longleftrightarrow \quad A - B \text{ неотрицательно определена} \quad \Longleftrightarrow \quad x^\top (A-B)x \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Если же дополнительно выполняется $x^\top(A-B)x > 0$ для всех ненулевых $x \neq 0$, то матрица $A - B$ *положительно определена* и пишут $A > B$.

Применяя это к условию (1), получаем

$$\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\, d\tau \ \geq \ \alpha I \quad \Longleftrightarrow \quad \int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\, d\tau - \alpha I \text{ неотрицательно определена.}$$

Эквивалентная запись через квадратичную форму:

$$x^\top \left(\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\, d\tau - \alpha I \right) x \ \geq \ 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t. \tag{2}$$

Вынесем x из интеграла:

$$x^\top \left(\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\, d\tau \right) x = \int_t^{t+T} x^\top \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau) x\, d\tau = \int_t^{t+T} \big(\varphi^\top(\tau)x\big)^2 d\tau.$$

Тогда неравенство (2) можно переписать как

$$\int_t^{t+T} \big(\varphi^\top(\tau)x\big)^2 d\tau \ \geq \ \alpha \, \|x\|^2 \qquad \forall x, \ \forall t.$$

То есть для любого ненулевого направления x энергия скалярного сигнала $\varphi^\top(\tau)x$ на любом окне длины T ограничена снизу положительной постоянной, пропорциональной $\|x\|^2$. Именно это интерпретируется как *неисчезающее возбуждение*: регрессор $\varphi(t)$ не "забывает" ни одно направление в пространстве параметров.

Связь с положительной определённостью

Из линейной алгебры известно, что для симметричной матрицы M следующие условия эквивалентны:

1. M положительно определена;
2. все собственные значения M положительны;
3. $x^\top M x > 0$ для всех $x \neq 0$.

Если переписать (1) как

$$\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\, d\tau - \alpha I \ \geq 0,$$

то требование "$\geq$" означает именно неотрицательную (а в усиленной форме — положительную) определённость этой разности. Говоря словами преподавателя: *"матрица слева $\geq$ матрицы справа" эквивалентно утверждению, что матрица $\int_t^{t+T} \varphi(\tau)\varphi^\top(\tau)\, d\tau - \alpha I$ положительно (или по крайней мере неотрицательно) определена.*

Такое условие гарантирует, что информация, содержащаяся в регрессоре $\varphi(t)$, "достаточно богата", и алгоритмы оценивания параметров действительно сходятся к истинному значению $\theta^\star$, а не просто обеспечивают исчезновение ошибки по выходу.