МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Теория идентификации»

по теме:
ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Студенты:
Группа № R3435 *Зыкин Л. В.*
Группа № R3441 *Алёхова М. С.*
Группа № R3443 *Шилова Д. Р.*
Вариант №25

Предподаватель:
доцент *Ведяков А. А.*

Санкт-Петербург
2025

1 ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

1.1 Цель работы и исходные данные

Целью работы является изучение динамических методов идентификации параметров систем, включая градиентные алгоритмы с постоянным коэффициентом усиления и рекуррентный метод наименьших квадратов.

1.2 Краткие теоретические сведения

Рассматривается модель линейной регрессии

$$y(k) = \Phi^{\mathsf{T}}(k)\theta^*, \tag{1}$$

где $y(k) \in \mathbb{R}^1$ — выходной сигнал, $\Phi(k) \in \mathbb{R}^m$ — вектор регрессоров, $\theta^* \in \mathbb{R}^m$ — вектор неизвестных параметров.

В отличие от статических методов, динамические методы идентификации обновляют оценки параметров по мере поступления новых измерений. Для дискретного времени рекуррентный алгоритм имеет вид:

$$\hat{\theta}(k) = A\{\hat{\theta}(k-1), \Phi(k), y(k)\}, \tag{2}$$

где A — алгоритм обновления оценки параметров.

1.2.1 Градиентные методы с постоянным коэффициентом усиления

Квадратичный критерий качества:

$$J_{\mathrm{SE}}(k) = \frac{1}{2}(y(k) - \Phi^{\mathsf{T}}(k)\hat{\theta}(k))^2. \tag{3}$$

Градиентный алгоритм идентификации в дискретном времени:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma\frac{\Phi(k)e^0(k)}{1 + \gamma\Phi^{\mathsf{T}}(k)\Phi(k)}, \tag{4}$$

где $e^0(k) = y(k) - \Phi^{\mathsf{T}}(k)\hat{\theta}(k-1)$, $\gamma > 0$ — коэффициент усиления.

Упрощенный градиентный алгоритм:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma\Phi(k)e^0(k), \tag{5}$$

который обеспечивает устойчивость только для достаточно малых значений γ.

1.2.2 Идентификация динамических систем в дискретном времени

Модель ARX (AutoRegressive eXogenous):

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \eta(k), \tag{6}$$

где $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}$, $B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m}$, q^{-1} — оператор сдвига назад ($q^{-1}y(k) = y(k-1)$).

В форме линейной регрессии:

$$y(k) = \Phi^{\mathsf{T}}(k)\theta^* + \eta(k), \tag{7}$$

где $\Phi(k) = [-y(k-1), \ldots, -y(k-n), u(k), \ldots, u(k-m)]^{\mathsf{T}}$, $\theta^* = [a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m]^{\mathsf{T}}$.

1.2.3 Идентификация динамических систем в непрерывном времени

Для непрерывной системы вида $y(t) = \frac{b_0}{p+a_0}u(t) + \eta(t)$, где p — оператор дифференцирования, при пренебрежимо малой помехе $\eta(t) = 0$ и доступности производной $\dot{y}(t)$ модель может быть представлена в виде линейной регрессии:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -y(t) & u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

1.3 Задание 1

1.3.1 Постановка

Требуется идентифицировать параметры дискретной линейной системы с передаточной функцией $W(z) = \frac{b}{z+a}$ методом градиентного алгоритма. Параметры системы: $a = 0.96$, $b = 2.5$, частота входного сигнала $\omega = 3.14$ рад/с. Интервал дискретизации $T_d = 0.1$ с. Время симуляции составляет 30 с для обеспечения достаточной сходимости оценок параметров.

1.3.2 Методика

Дискретная модель системы в форме линейной регрессии:

$$y(k) = -ay(k-1) + bu(k-1) + \eta(k), \tag{9}$$

где вектор регрессоров $\Phi(k) = [-y(k-1), u(k-1)]^\mathsf{T}$, вектор параметров $\theta^* = [a, b]^\mathsf{T}$.

Градиентный алгоритм (3):

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma \frac{\Phi(k)e^0(k)}{1 + \gamma\Phi^\mathsf{T}(k)\Phi(k)}, \tag{10}$$

где $e^0(k) = y(k) - \Phi^\mathsf{T}(k)\hat{\theta}(k-1)$.

Упрощенный градиентный алгоритм (4):

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \gamma\Phi(k)e^0(k). \tag{11}$$

1.3.3 Результаты

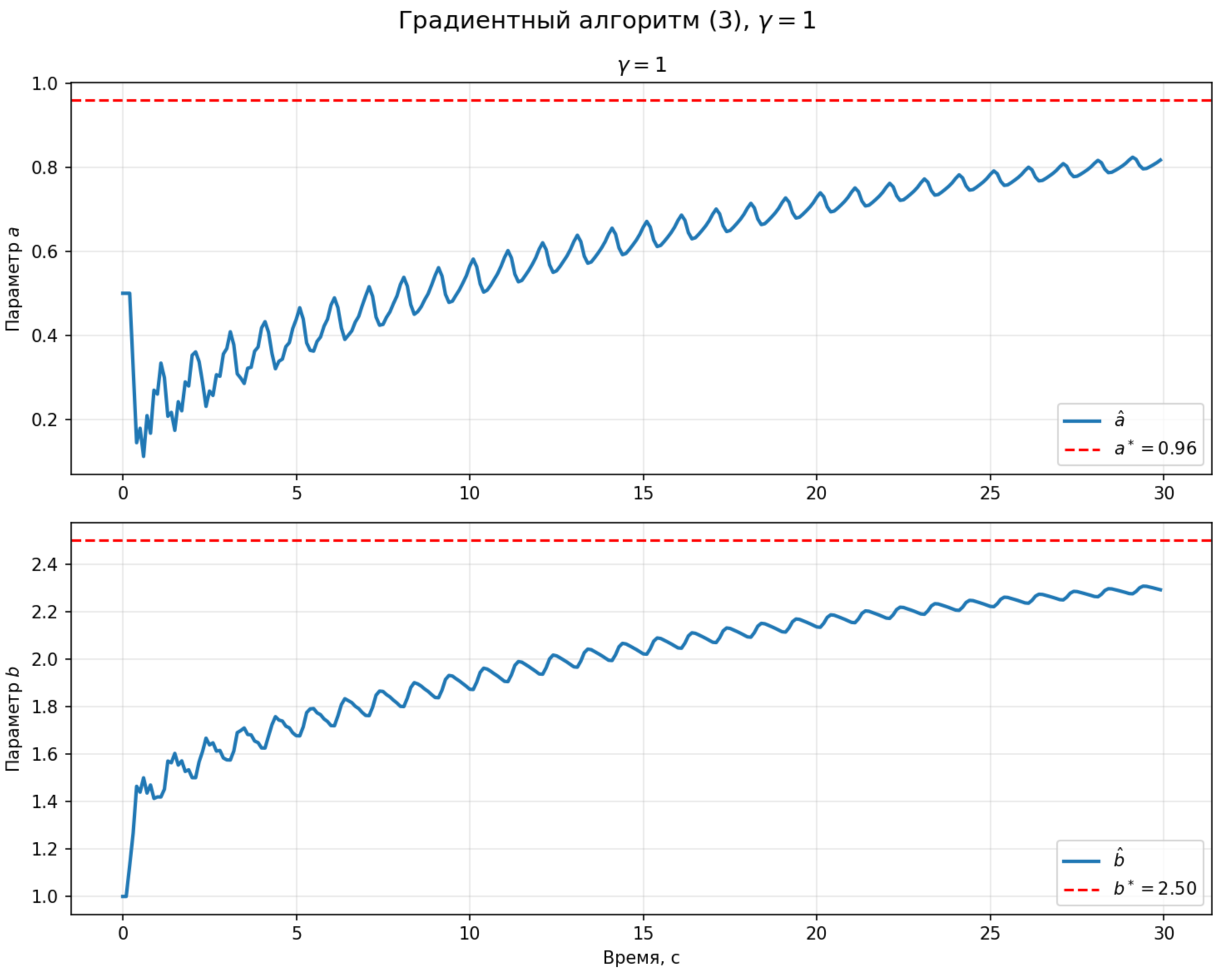

Рисунок 1 — Задание 1: градиентный алгоритм (3) с $\gamma = 1$

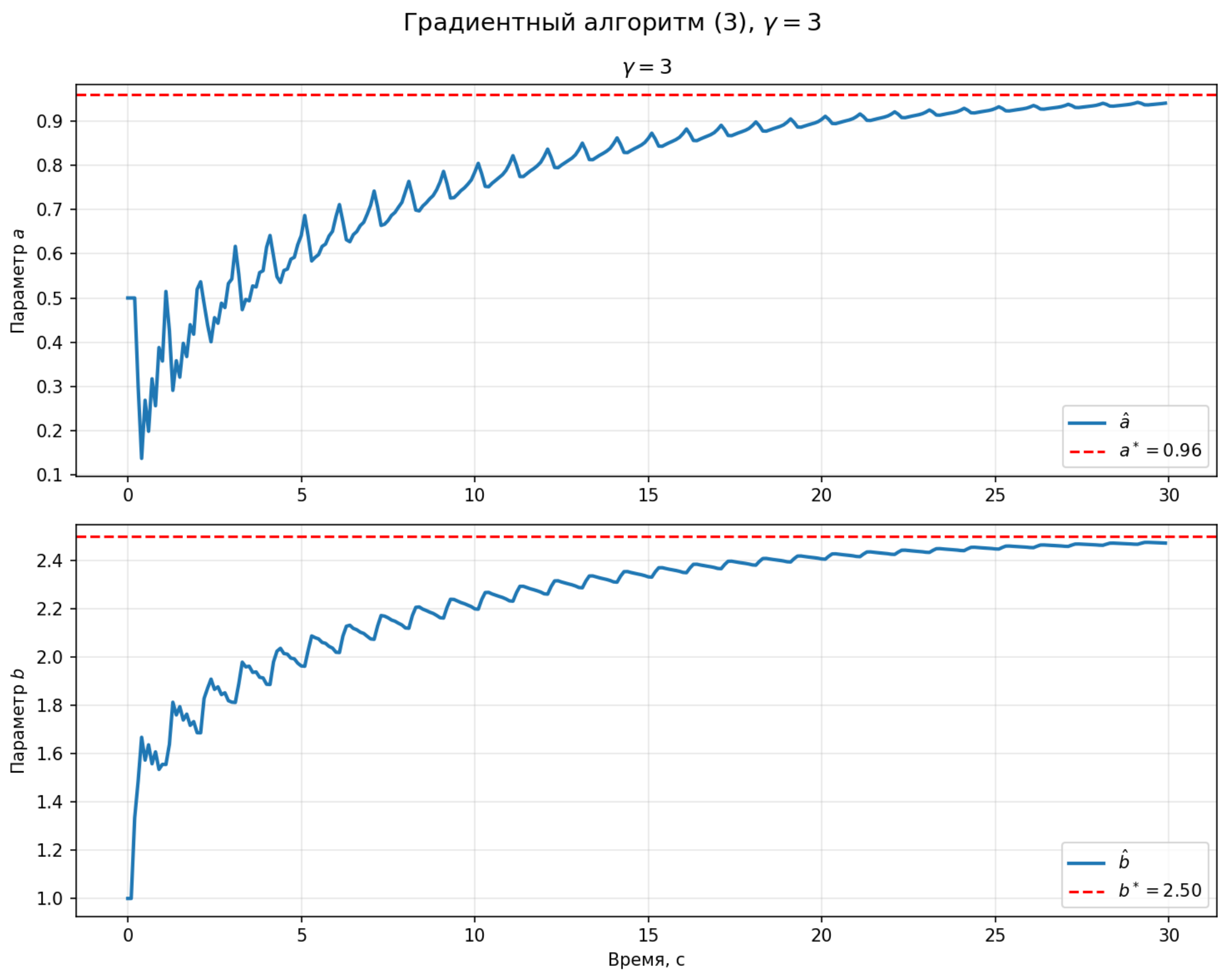

Рисунок 2 — Задание 1: градиентный алгоритм (3) с $\gamma = 3$

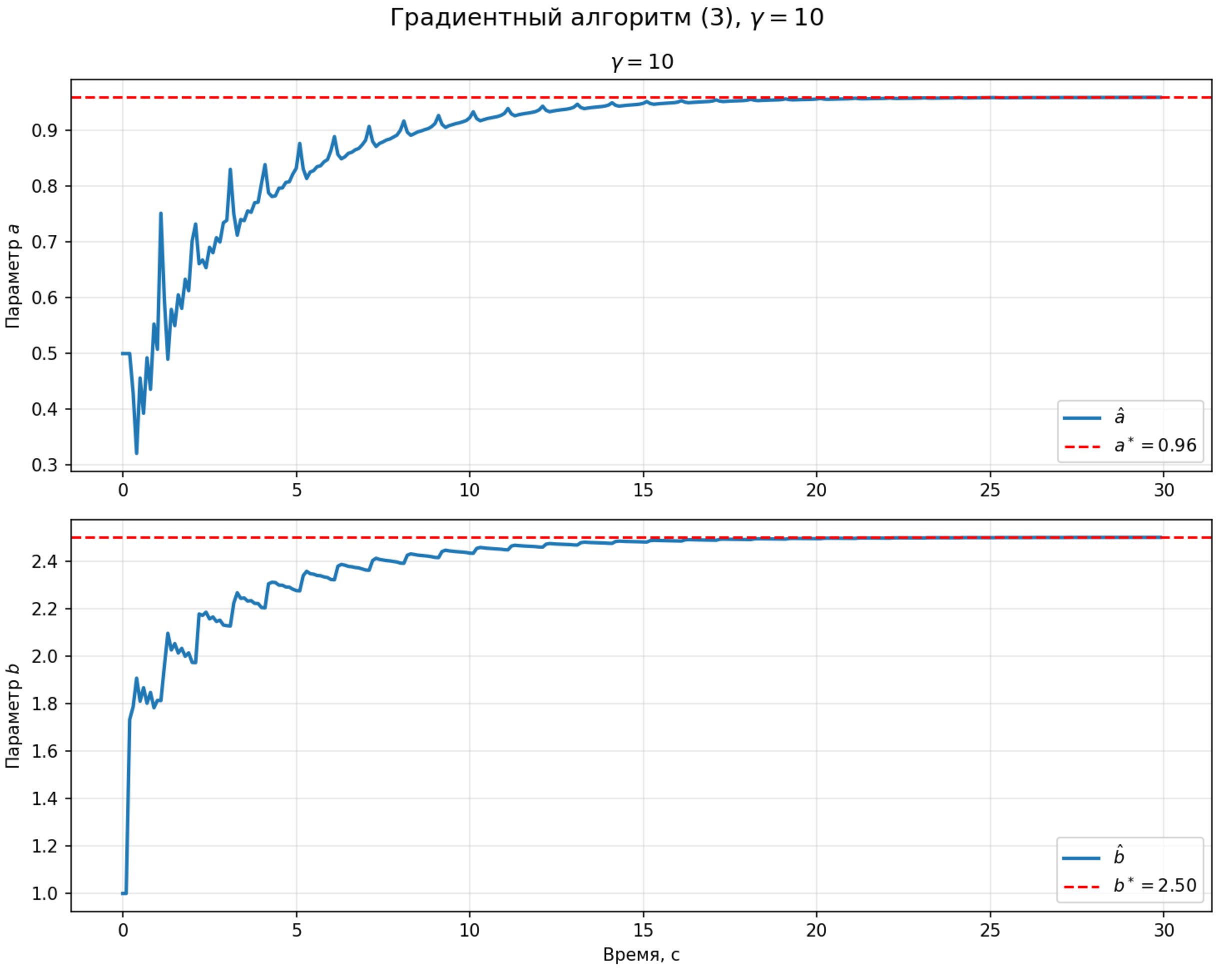

Рисунок 3 — Задание 1: градиентный алгоритм (3) с $\gamma = 10$

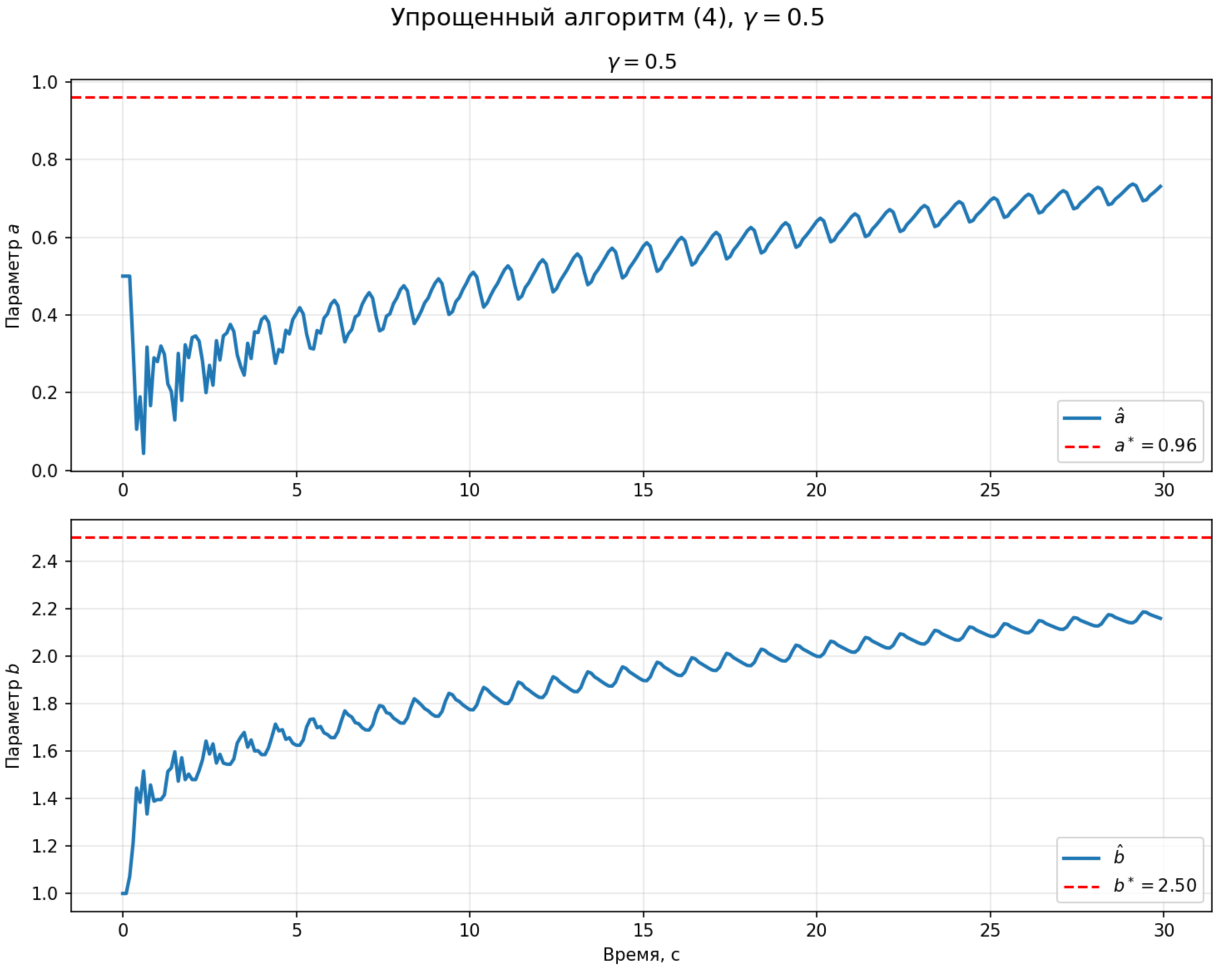

Рисунок 4 — Задание 1: упрощенный алгоритм (4) с $\gamma = 0.5$

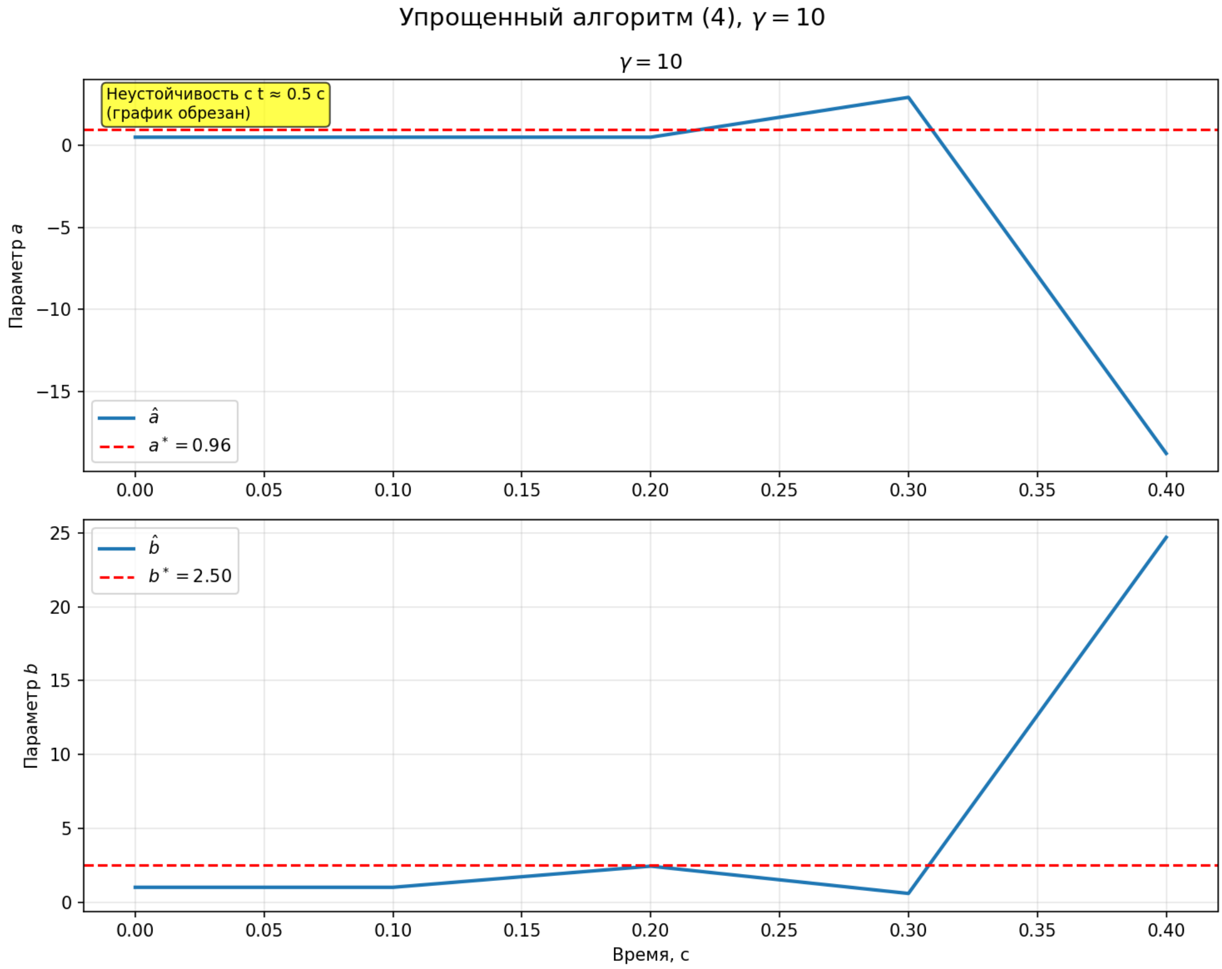

Рисунок 5 — Задание 1: упрощенный алгоритм (4) с $\gamma = 10$

1.3.4 Выводы

Анализ результатов показывает влияние коэффициента усиления γ на процесс идентификации.

Для градиентного алгоритма (3) увеличение γ ускоряет сходимость оценок параметров к истинным значениям. При $\gamma = 1$ получены оценки $\hat{a} = 0.818$, $\hat{b} = 2.292$ (истинные: $a^* = 0.96$, $b^* = 2.5$), что показывает неполную сходимость за время симуляции. При $\gamma = 3$ оценки улучшаются до $\hat{a} = 0.941$, $\hat{b} = 2.471$, а при $\gamma = 10$ практически достигают истинных значений: $\hat{a} = 0.960$, $\hat{b} = 2.500$. Алгоритм остаётся стабильным при всех значениях γ благодаря нормализации в знаменателе формулы алгоритма.

Упрощенный алгоритм (4) демонстрирует принципиально иное поведение: при малых значениях $\gamma = 0.5$ алгоритм работает стабильно, но сходится значительно медленнее, чем алгоритм (3). За время симуляции 30 с получены оценки $\hat{a} = 0.731$, $\hat{b} = 2.159$, которые ещё не достигли истинных значений, но показывают устойчивую тенденцию к сходимости (см. рисунок 4). При увеличении времени симуляции до 120 с оценки приближаются к истинным значениям: $\hat{a} \approx 0.952$, $\hat{b} \approx 2.488$, что подтверждает сходимость алгоритма, хотя и с меньшей скоростью по сравнению с алгоритмом (3). Однако при $\gamma = 10$ система становится неустойчивой уже через несколько шагов (примерно 0.5 с), и оценки параметров экспоненциально расходятся до бесконечно больших значений. Это подтверждает теоретическое утверждение о том, что упрощенный алгоритм (4) обеспечивает устойчивость только для достаточно малых значений параметра γ, в отличие от алгоритма (3), который остаётся стабильным при любых $\gamma > 0$.

1.4 Задание 2

1.4.1 Постановка

Требуется идентифицировать параметры дискретной линейной системы с передаточной функцией $W(z) = \frac{b}{z^2+a_1z+a_2}$ методом градиентного алгоритма. Параметры системы: $a_1 = -1.92$, $a_2 = 0.9215$, $b = 2.1$, частота входного сигнала $\omega = 46.49$ рад/с. Интервал дискретизации $T_d = 0.1$ с.

1.4.2 Методика

Дискретная модель системы в форме линейной регрессии:

$$y(k) = -a_1y(k-1) - a_2y(k-2) + bu(k-1) + \eta(k), \tag{12}$$

где вектор регрессоров $\Phi(k) = [-y(k-1), -y(k-2), u(k-1)]^{\mathsf{T}}$, вектор параметров $\theta^* = [a_1, a_2, b]^{\mathsf{T}}$.

Используется градиентный алгоритм (3) с $\gamma = 1$ для двух различных входных сигналов:

$$u_1(t) = \sin(\omega t), \tag{13}$$

$$u_2(t) = \sin(\omega t) + 0.2\sin(0.5\omega t). \tag{14}$$

1.4.3 Результаты

Результаты идентификации представлены на рисунках 6 и 7.

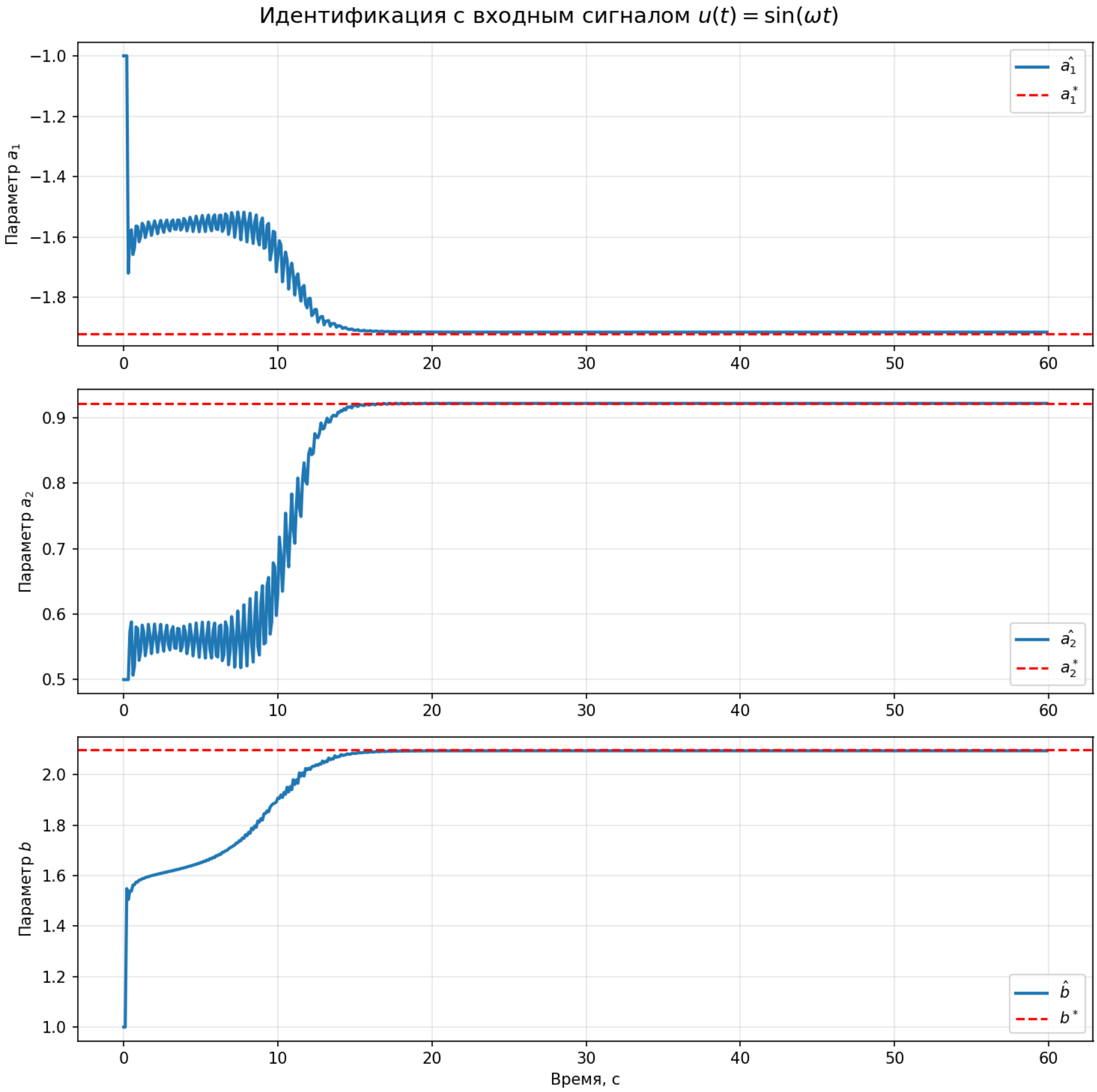

Рисунок 6 — Задание 2: идентификация с входным сигналом $u(t) = \sin(\omega t)$

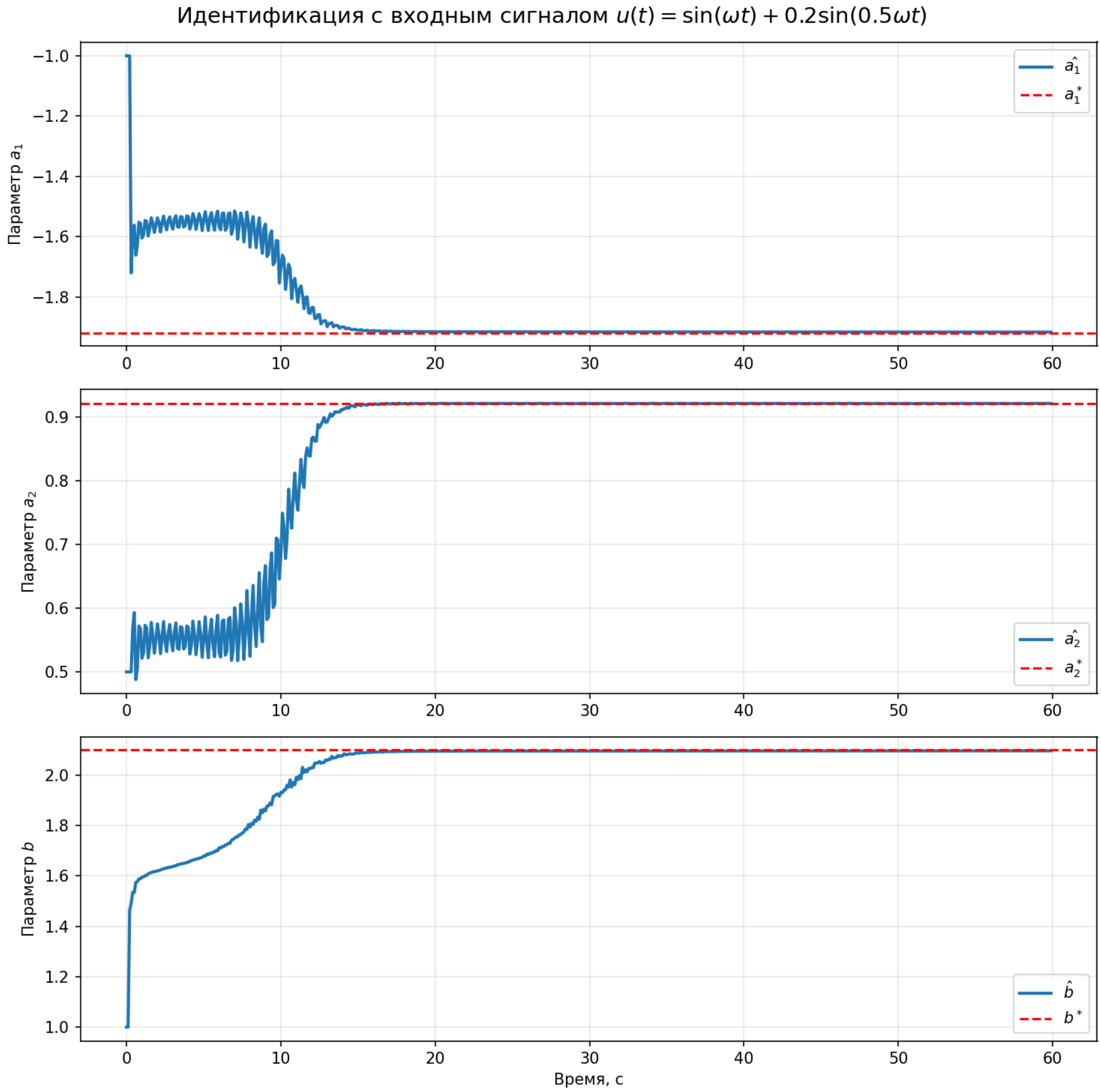

Рисунок 7 — Задание 2: идентификация с входным сигналом $u(t) = \sin(\omega t) + 0.2\sin(0.5\omega t)$

1.4.4 Выводы

Сравнение результатов идентификации показывает влияние состава входного сигнала на качество оценивания параметров.

При входном сигнале $u(t) = \sin(\omega t)$ получены оценки: $\hat{a}_1 = -1.915$, $\hat{a}_2 = 0.922$, $\hat{b} = 2.095$ (истинные значения: $a_1^* = -1.92$, $a_2^* = 0.9215$, $b^* = 2.1$). Ошибки оценивания не превышают 0.005 для всех параметров.

При смешанном входном сигнале $u(t) = \sin(\omega t) + 0.2\sin(0.5\omega t)$ получены оценки: $\hat{a}_1 = -1.916$, $\hat{a}_2 = 0.922$, $\hat{b} = 2.096$, что показывает незначительное улучшение точности идентификации. Смешанный входной сигнал обеспечивает более богатое возбуждение системы за счёт наличия двух частотных составляющих, что способствует более точной идентификации параметров.

1.5 Задание 3

1.5.1 Постановка

Требуется идентифицировать параметры непрерывной линейной системы $y(t) = \frac{b}{p+a}u(t)$ методом градиентного алгоритма в непрерывном времени. Параметры системы: $a = 0.9$, $b = 3.2$, частота входного сигнала $\omega = 7.53$ рад/с. Время симуляции составляет 30 с, шаг интегрирования $dt = 0.01$ с.

1.5.2 Методика

При пренебрежимо малой помехе $\eta(t) = 0$ и доступности производной $\dot{y}(t)$ модель представляется в виде линейной регрессии:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} -y(t) & u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Градиентный алгоритм в непрерывном времени (2):

$$\frac{d}{dt}\hat{\theta}(t) = \gamma\Phi(t)e(t), \tag{16}$$

где $e(t) = y(t) - \Phi^{\mathsf{T}}(t)\hat{\theta}(t)$, $\Phi(t) = [-y(t), u(t)]^{\mathsf{T}}$.

1.5.3 Результаты

Результаты идентификации представлены на рисунках 8–10.

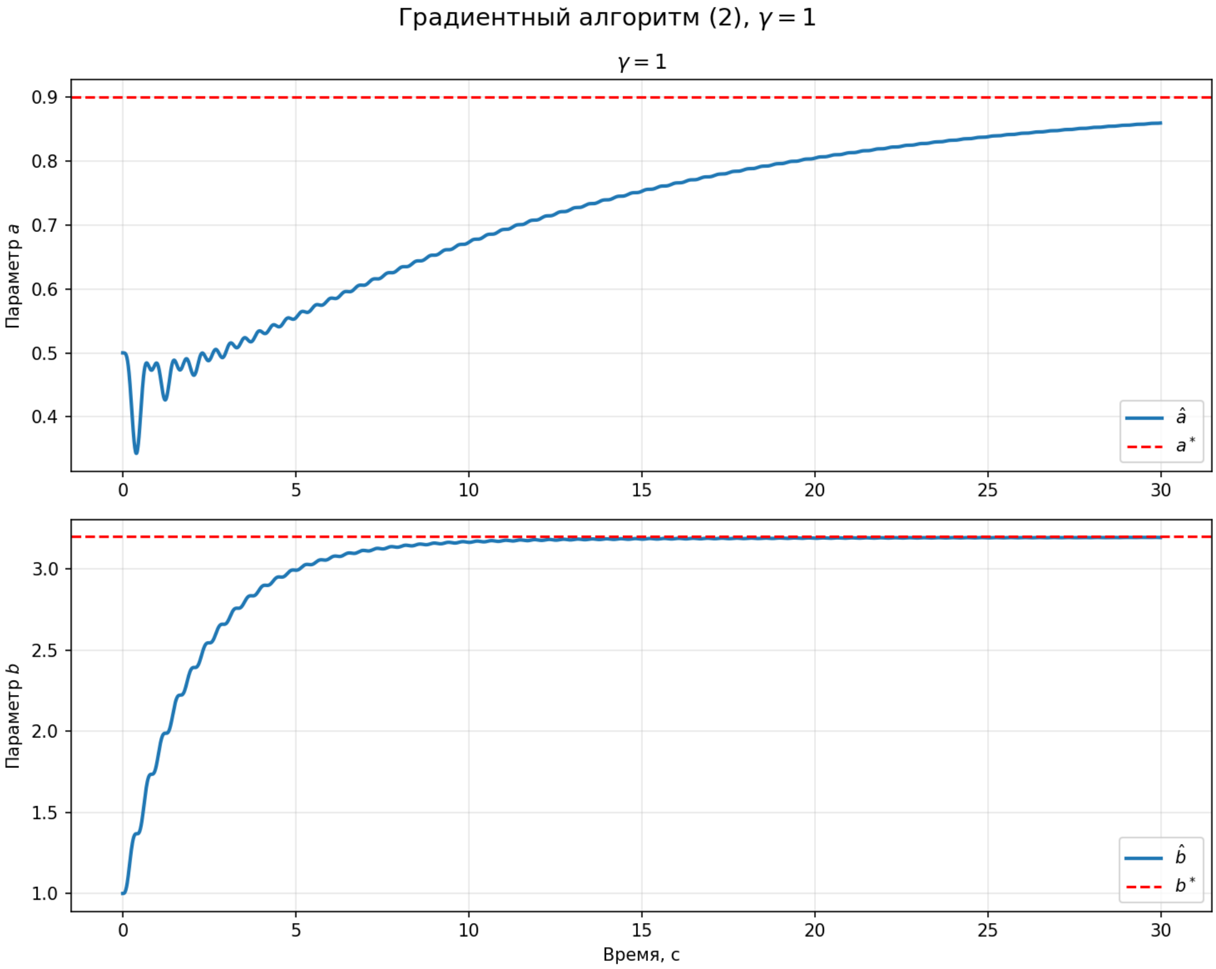

Рисунок 8 — Задание 3: градиентный алгоритм (2) с $\gamma = 1$

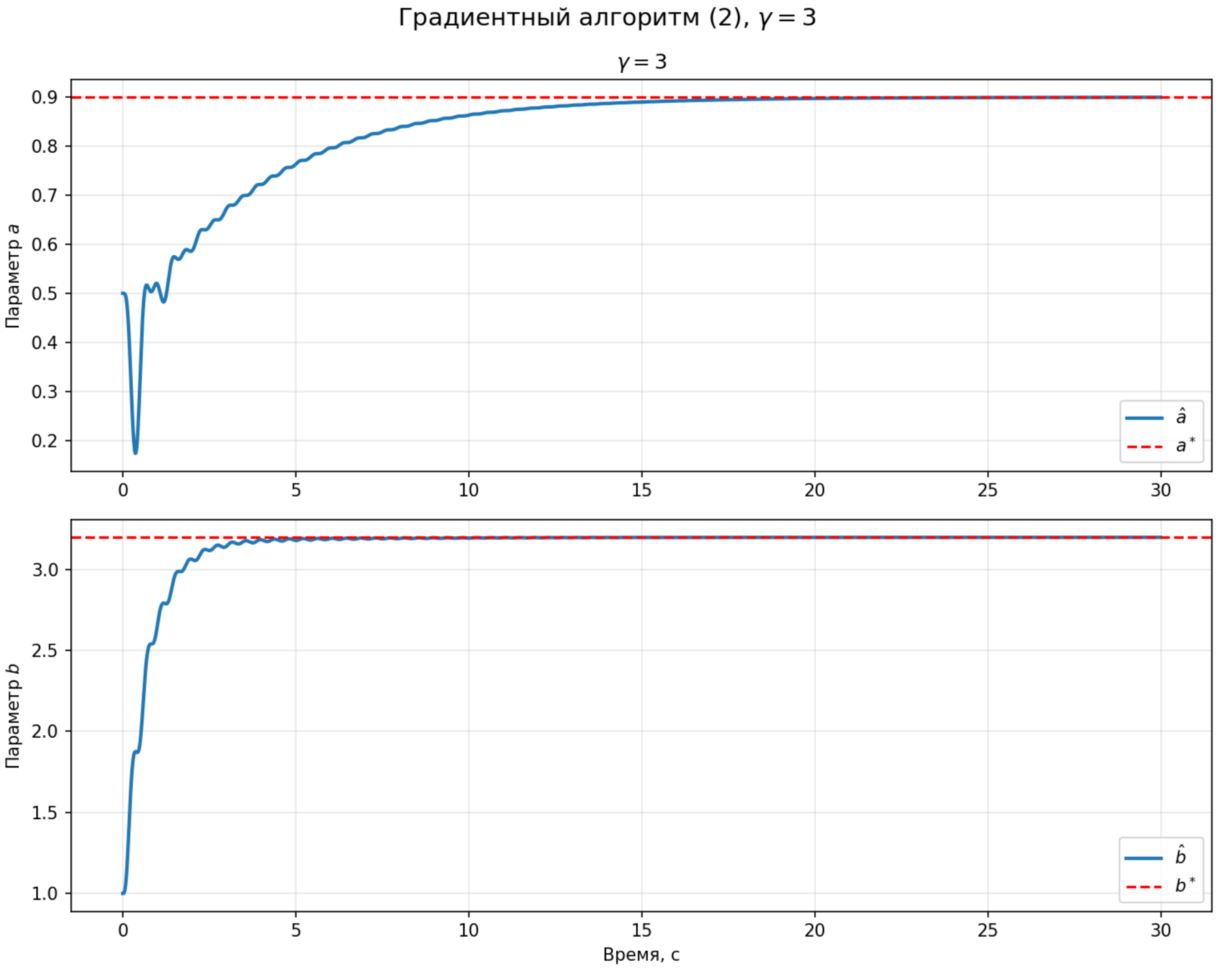

Рисунок 9 — Задание 3: градиентный алгоритм (2) с $\gamma = 3$

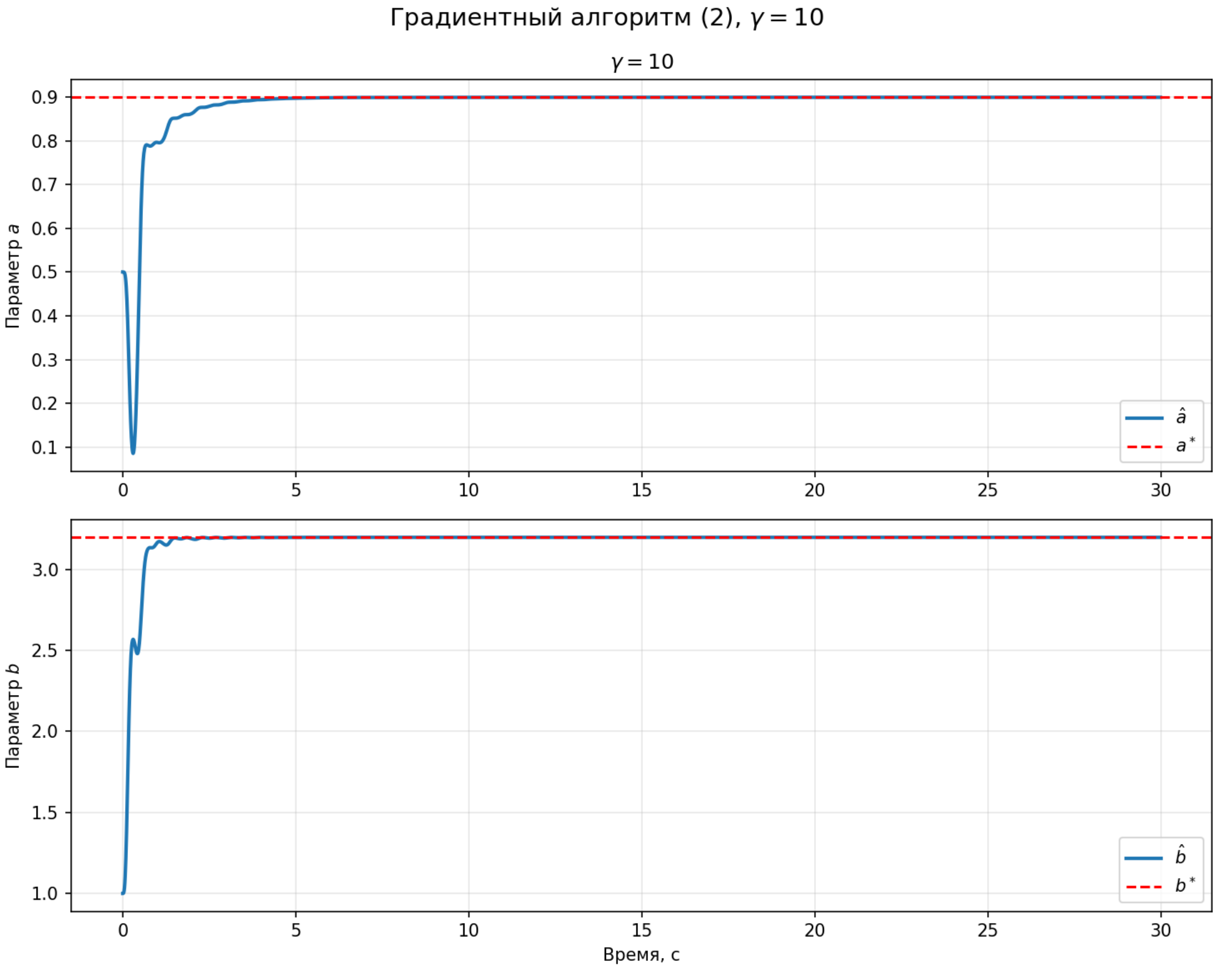

Рисунок 10 — Задание 3: градиентный алгоритм (2) с $\gamma = 10$

1.5.4 Выводы

Анализ результатов показывает влияние коэффициента усиления γ на скорость сходимости оценок параметров в непрерывном времени.

При $\gamma = 1$ получены оценки: $\hat{a} = 0.860$, $\hat{b} = 3.194$ (истинные значения: $a^* = 0.9$, $b^* = 3.2$). Ошибки оценивания составляют 0.040 и 0.006 соответственно.

При $\gamma = 3$ оценки улучшаются: $\hat{a} = 0.899$, $\hat{b} = 3.197$, ошибки снижаются до 0.001 и 0.003.

При $\gamma = 10$ оценки практически совпадают с истинными: $\hat{a} = 0.899$, $\hat{b} = 3.197$, что подтверждает эффективность увеличения коэффициента усиления для ускорения сходимости. Увеличение γ ускоряет процесс идентификации без потери устойчивости, в отличие от упрощенного алгоритма (4) в дискретном времени.

1.6 Заключение

В ходе работы изучены динамические методы идентификации параметров систем. Показано влияние коэффициента усиления γ на процесс идентификации, а также важность выбора входного сигнала для обеспечения достаточного возбуждения системы. Градиентные алгоритмы с постоянным коэффициентом усиления обеспечивают простую реализацию, но требуют тщательного выбора параметра γ для обеспечения устойчивости и быстрой сходимости.