МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435	*Зыкин Л. В.*
Группа № R3441	*Алехова М. С.*
Группа № R3480	*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:
доцент, ведущий научный сотрудник *Зименко К. А.*

Санкт-Петербург
2025

0.1 Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Основное внимание уделяется анализу линеаризуемости по входу-выходу, преобразованию систем в нормальную форму и синтезу законов управления.

Основные задачи работы:

1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу нелинейной системы
2. Преобразование системы в нормальную форму с указанием области определения
3. Проверка минимально-фазовости системы
4. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью для глобальной стабилизации

Работа демонстрирует применение теоретических методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами.

0.2 Задача 1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u \tag{2}$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + u \tag{3}$$

$$y = x_3 \tag{4}$$

0.2.1 Проверка линеаризуемости по входу-выходу

Для проверки линеаризуемости по входу-выходу вычислим производные Ли выходной функции $h(x) = x_3$.

Шаг 1: Вычисление производных Ли

$$L_f^0 h = h = x_3 \tag{5}$$

$$L_f^1 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \tag{6}$$

$$= 0 \cdot (-x_1 + x_2 - x_3) + 0 \cdot (-x_1 x_3 - x_2) + 1 \cdot (-x_1 + u) \tag{7}$$

$$= -x_1 + u \tag{8}$$

Шаг 2: Проверка условия линеаризуемости

$$L_g L_f^0 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 \tag{9}$$

$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \tag{10}$$

Поскольку $L_g L_f^0 h = 1 \neq 0$, система линеаризуема по входу-выходу с относительной степенью $r = 1$.

0.2.2 Преобразование в нормальную форму

Для системы размерности $n = 3$ с относительной степенью $r = 1$ размерность внутренней динамики равна $n - r = 2$.

Координаты нормальной формы:

$$z_1 = h = x_3 \tag{11}$$

$$z_2 = L_f h = -x_1 + u \tag{12}$$

Внутренние координаты:

$$\eta_1 = x_1 \tag{13}$$

$$\eta_2 = x_2 \tag{14}$$

Производные координат нормальной формы:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = -x_1 + u \tag{15}$$

$$\dot{z}_2 = \frac{d}{dt}(L_f h) = \frac{d}{dt}(-x_1 + u) = -\dot{x}_1 + \dot{u} \tag{16}$$

$$= -(-x_1 + x_2 - x_3) + \dot{u} = x_1 - x_2 + x_3 + \dot{u} \tag{17}$$

Область определения преобразования: Преобразование определено для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Обратное преобразование:

$$x_1 = \eta_1 \tag{18}$$

$$x_2 = \eta_2 \tag{19}$$

$$x_3 = z_1 \tag{20}$$

0.2.3 Проверка минимально-фазовости

Для проверки минимально-фазовости анализируем внутреннюю динамику при нулевом выходе $y = z_1 = 0$.

При $y = 0$ имеем $x_3 = 0$. Внутренняя динамика при $x_3 = 0$:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{21}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 \cdot 0 - x_2 + u = -x_2 + u \tag{22}$$

При $u = 0$:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{23}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 \tag{24}$$

Матрица линеаризации внутренней динамики:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$.

Поскольку все собственные значения имеют отрицательную вещественную часть, система минимально-фазовая.

0.2.4 Моделирование системы

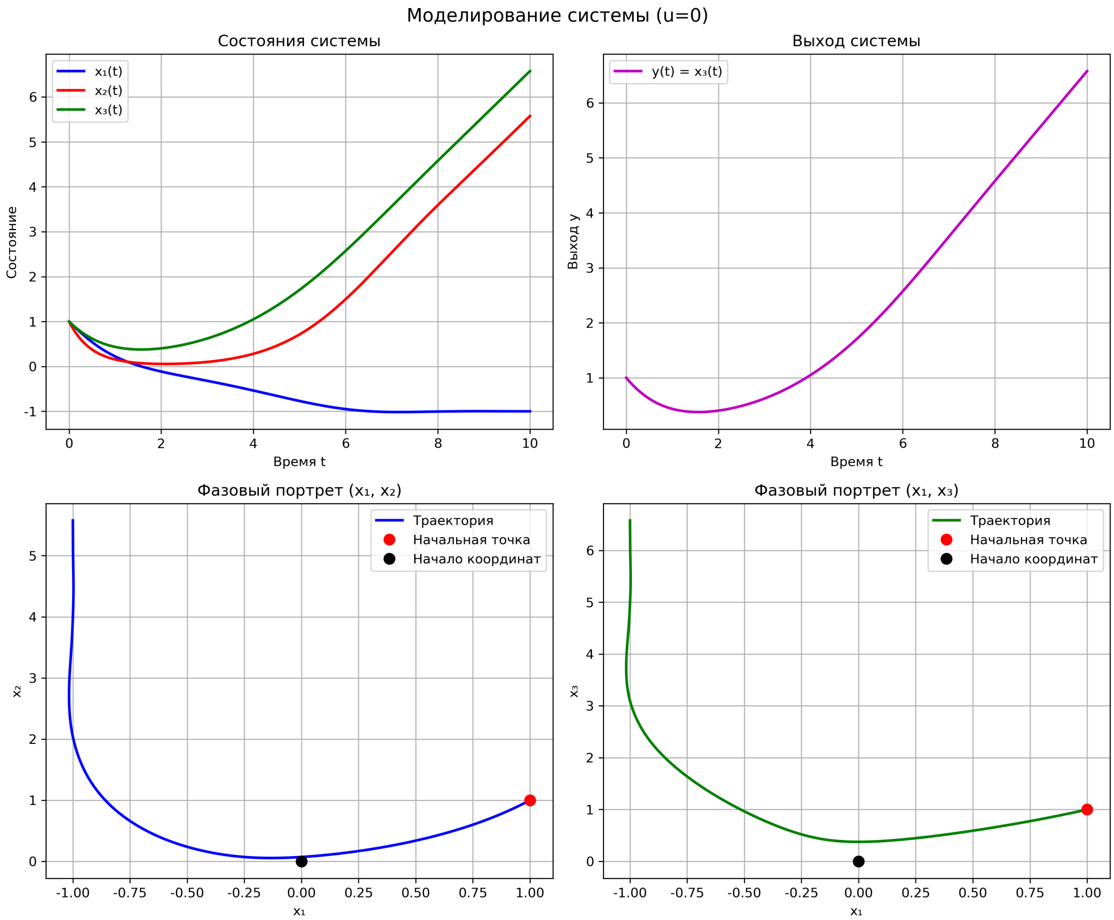

Рисунок 1 — Моделирование системы при нулевом управлении

Результаты моделирования показывают поведение системы при нулевом управлении, демонстрируя внутреннюю динамику.

0.2.5 Результаты задачи 1

Ответы:

1. **Линеаризуемость:** Да, система линеаризуема по входу-выходу
2. **Относительная степень:** $r = 1$
3. **Нормальная форма:** получена с координатами $z_1 = x_3$, $z_2 = -x_1 + u$, $\eta_1 = x_1$, $\eta_2 = x_2$
4. **Область определения:** $\mathbb{R}^3$
5. **Минимально-фазовость:** Да, система минимально-фазовая

0.3 Задача 2. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{26}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \tag{27}$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \tag{28}$$

Требуется найти закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.

0.3.1 Анализ управляемости

Проверим управляемость системы через скобки Ли.
Векторное поле $g = [0, 1, 0]^T$ (коэффициенты при u).
Скобка Ли $[f, g] = \mathrm{ad}_f g$:

$$[f, g]_1 = L_f g_1 - L_g f_1 = 0 - 0 = 0 \tag{29}$$

$$[f, g]_2 = L_f g_2 - L_g f_2 = 0 - 1 = -1 \tag{30}$$

$$[f, g]_3 = L_f g_3 - L_g f_3 = 0 - 0 = 0 \tag{31}$$

Матрица управляемости в начале координат:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Ранг матрицы управляемости равен 2, что меньше размерности системы (3). Система не полностью управляема в начале координат.

0.3.2 Проектирование регулятора

Выберем выходную функцию $h(x) = x_1$ и применим метод линеаризации обратной связью.

Шаг 1: Вычисление производных Ли

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \tag{33}$$

$$= 1 \cdot (-x_1 + x_2) + 0 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \tag{34}$$

$$= -x_1 + x_2 \tag{35}$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} g_3 \tag{36}$$

$$= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \neq 0 \tag{37}$$

Относительная степень $r = 2$.

Шаг 2: Синтез закона управления

Координаты нормальной формы:

$$z_1 = h = x_1 \tag{38}$$

$$z_2 = L_f h = -x_1 + x_2 \tag{39}$$

Вычисляем $L_f^2 h$:

$$L_f^2 h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} f_3 \tag{40}$$

$$= (-1) \cdot (-x_1 + x_2) + 1 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \tag{41}$$

$$= x_1 - x_2 + x_1 - x_2 - x_1 x_3 = 2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3 \tag{42}$$

Закон управления:

$$u = \frac{v - L_f^2 h}{L_g L_f h} = \frac{v - (2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3)}{1} = v - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 \tag{43}$$

Выбираем $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 = -k_1 x_1 - k_2(-x_1 + x_2)$ для стабилизации.
При $k_1 = 2$, $k_2 = 3$:

$$u = -2x_1 - 3(-x_1 + x_2) - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 = -x_1 - x_2 + x_1 x_3 \tag{44}$$

0.3.3 Моделирование управляемой системы

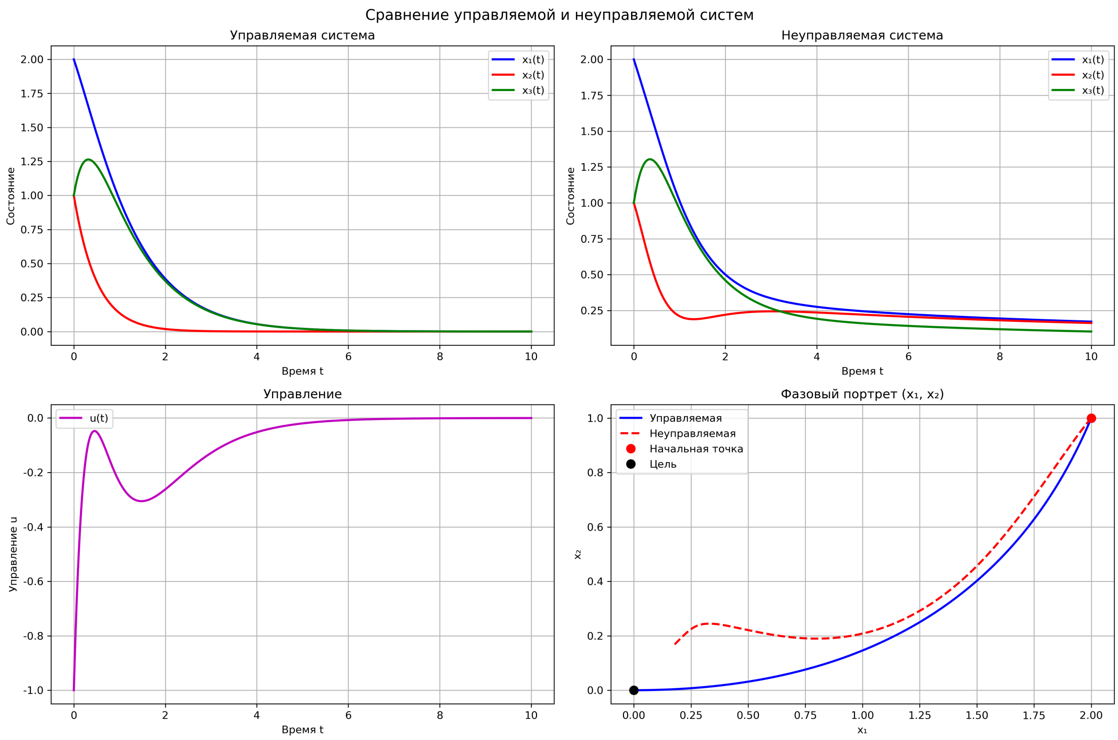

Рисунок 2 — Сравнение управляемой и неуправляемой систем

Результаты моделирования показывают:

- Управляемая система экспоненциально сходится к началу координат
- Неуправляемая система остается неустойчивой
- Закон управления обеспечивает глобальную стабилизацию

0.3.4 Результаты задачи 2

Закон управления: $u = -x_1 - x_2 + x_1 x_3$

Относительная степень: $r = 2$

Стабилизация: Глобальная стабилизация начала координат достигнута

0.4 Заключение

В данной лабораторной работе были рассмотрены методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Выполнены следующие задачи:

1. **Анализ линеаризуемости по входу-выходу:** для первой системы установлена линеаризуемость с относительной степенью $r = 1$ и минимально-фазовость.
2. **Преобразование в нормальную форму:** получены координаты нормальной формы с областью определения $\mathbb{R}^3$.
3. **Синтез закона управления:** для второй системы синтезирован закон управления $u = -x_1 - x_2 + x_1 x_3$, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.
4. **Численное моделирование:** подтверждена эффективность синтезированных законов управления.

Работа продемонстрировала эффективность применения методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами. Все поставленные задачи решены с использованием численного моделирования и визуализации результатов.