

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина "Нелинейные системы управления"

ОТЧЕТ  
по лабораторной работе №1

Студенты:

*Группа № R3435*

*Зыкин Л. В.*

*Группа № R3441*

*Алёхова М. С.*

*Группа № R3480*

*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

*доцент, ведущий научный сотрудник*

*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург, 2025

## Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы анализа нелинейных систем управления. Основными задачами являются:

1. Поиск точек равновесия нелинейных систем
2. Определение типа точек равновесия методом линеаризации
3. Анализ устойчивости предельного цикла (только для системы 4)
4. Синтез стабилизирующих регуляторов

## Теоретические основы

### Точки равновесия

Точкой равновесия нелинейной системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  называется такое состояние  $\mathbf{x}^*$ , при котором  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .

Для анализа устойчивости точки равновесия используется метод линеаризации. Матрица Якоби системы вычисляется как:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

Тип точки равновесия определяется собственными значениями матрицы Якоби:

- $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$  устойчивый узел
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$  устойчивый фокус
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$  неустойчивый узел
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$  неустойчивый фокус
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$  центр
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow$  седло

### Предельные циклы

Предельным циклом называется изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве. Для анализа предельных циклов часто используется переход к полярным координатам.

## Стабилизация систем

Для стабилизации нелинейных систем в окрестности точки равновесия применяются методы синтеза регуляторов, в частности, LQR (Linear-Quadratic Regulator) метод.

LQR регулятор минимизирует функционал:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

где  $Q$  и  $R$  — матрицы весов.

Решение задачи LQR сводится к решению алгебраического уравнения Риккати:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Матрица обратной связи вычисляется как:

$$K = R^{-1}B^T P$$

## Система 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (2)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0 \quad (3)$$

$$-x_1 - x_2 = 0 \quad (4)$$

Из второго уравнения:  $x_2 = -x_1$ . Подставляя в первое:

$$-x_1 + 2x_1^3 - x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1^3 - 2x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1(x_1^2 - 1) = 0$$

**Решения:**

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$  — точка  $(0, 0)$
- $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$  — точка  $(1, -1)$
- $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$  — точка  $(-1, 1)$

**Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:**

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (5)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (6)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (7)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (8)$$

Вычисляем производную  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (9)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (10)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (11)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (12)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (13)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (14)$$

**Анализ устойчивости предельного цикла:**

Уравнение  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  имеет решения:

- $r = 0$  — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$  — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака  $\dot{r}$ :

- При  $r < 1$ :  $\dot{r} > 0 \Rightarrow$  траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0 \Rightarrow$  траектории движутся к циклу

**Вывод:**

- Точка  $(0,0)$  — неустойчивый узел
- Окружность  $r = 1$  — устойчивый предельный цикл

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Анализ точек:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = -1 \pm i$  — устойчивый фокус
- $(1, -1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 4.83$ ,  $\lambda_2 = -0.83$  — седло
- $(-1, 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 4.83$ ,  $\lambda_2 = -0.83$  — седло

**Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:**

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (15)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (16)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (17)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (18)$$

Вычисляем производную  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (19)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (20)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (21)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (22)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (23)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (24)$$

## Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  имеет решения:

- $r = 0$  — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$  — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака  $\dot{r}$ :

- При  $r < 1$ :  $\dot{r} > 0 \Rightarrow$  траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0 \Rightarrow$  траектории движутся к циклу

**Вывод:**

- Точка  $(0,0)$  — неустойчивый узел
- Окружность  $r = 1$  — устойчивый предельный цикл

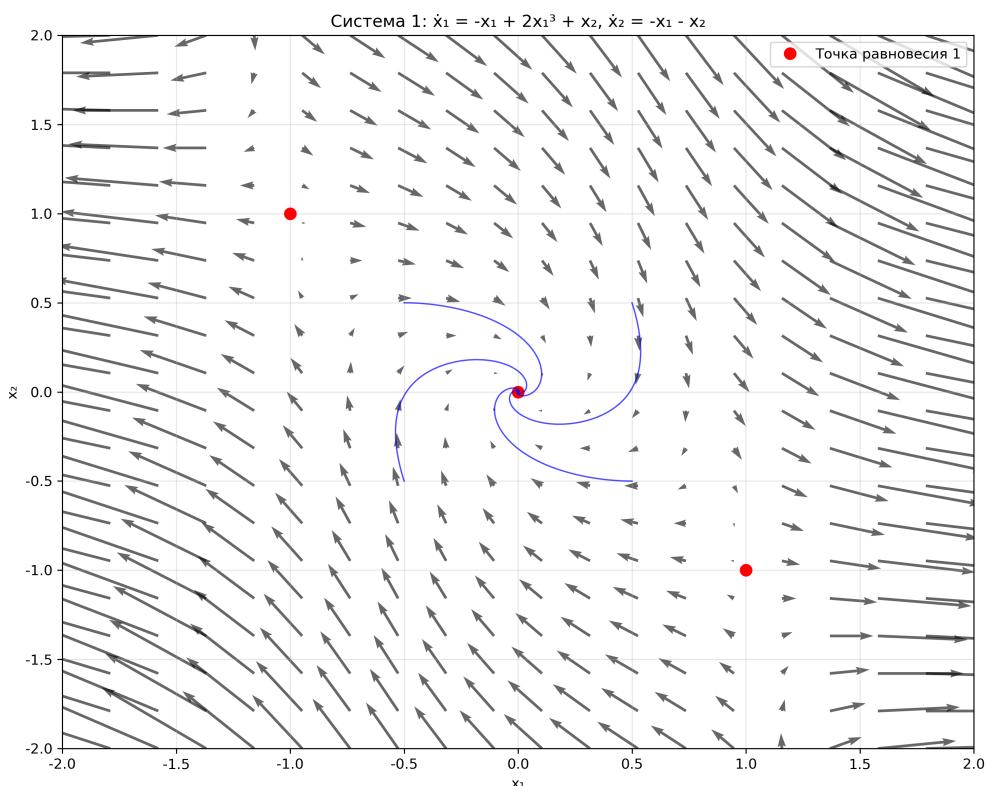


Рисунок 1 — Фазовый портрет системы 1

## Система 2

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \quad (26)$$

**Точки равновесия:**

$$x_1(1 + x_2) = 0 \quad (27)$$

$$-x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \quad (28)$$

**Случай 1:**  $x_1 = 0$ . Из второго уравнения:  $-x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0$

- $(0, 0)$
- $(0, 1)$

**Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:**

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (29)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (30)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (31)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (32)$$

Вычисляем производную  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (33)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (34)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (35)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (36)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (37)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (38)$$

### **Анализ устойчивости предельного цикла:**

Уравнение  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  имеет решения:

- $r = 0$  — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$  — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака  $\dot{r}$ :

- При  $r < 1$ :  $\dot{r} > 0 \Rightarrow$  траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0 \Rightarrow$  траектории движутся к циклу

### **Вывод:**

- Точка  $(0,0)$  — неустойчивый узел
- Окружность  $r = 1$  — устойчивый предельный цикл

**Случай 2:**  $x_2 = -1$ . Из второго уравнения:  $-(-1) + (-1)^2 + x_1(-1) - x_1^3 = 0 \Rightarrow 2 - x_1 - x_1^3 = 0$

- $(1, -1)$

### **Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ -3x_1^2 + x_2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

### **Анализ точек:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  — седло
- $(0, 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$  — неустойчивый узел
- $(1, -1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$  — устойчивый фокус

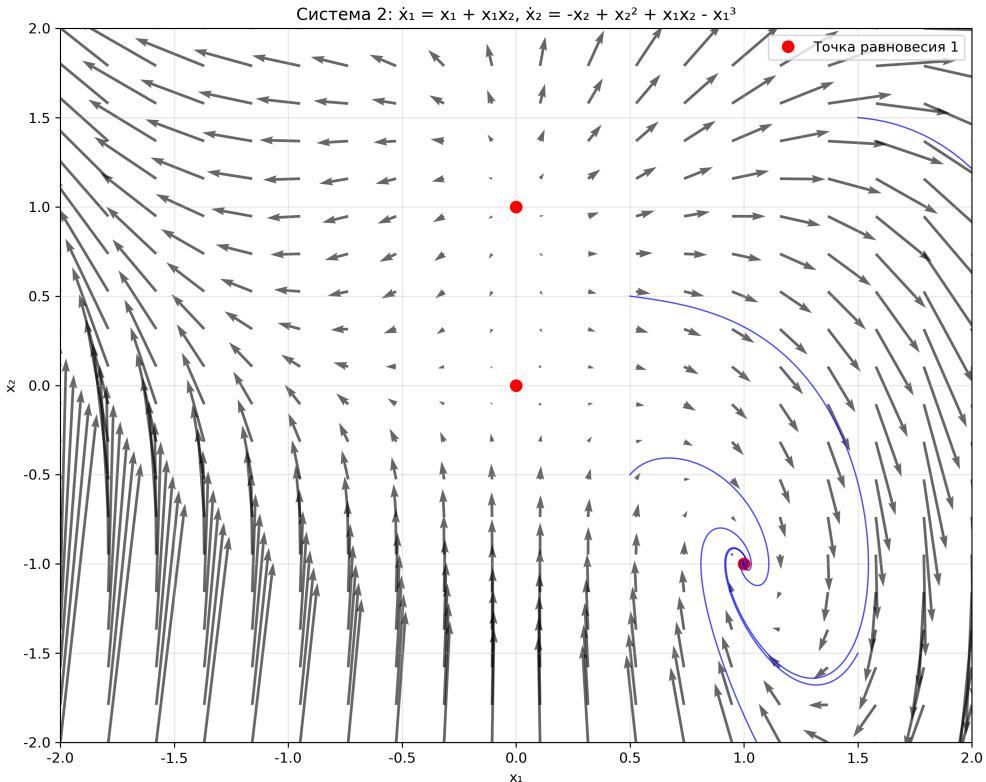


Рисунок 2 — Фазовый портрет системы 2

### Система 3

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{39}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \tag{40}$$

**Точки равновесия:**

$$x_2 = 0 \tag{41}$$

$$-x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) = 0 \tag{42}$$

При  $x_2 = 0$ :  $-x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

**Единственная точка равновесия:**  $(0, 0)$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + x_2(-2x_1 + 0.4x_1^3) & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{pmatrix}$$

В точке  $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Собственные значения:  $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$  — неустойчивый фокус

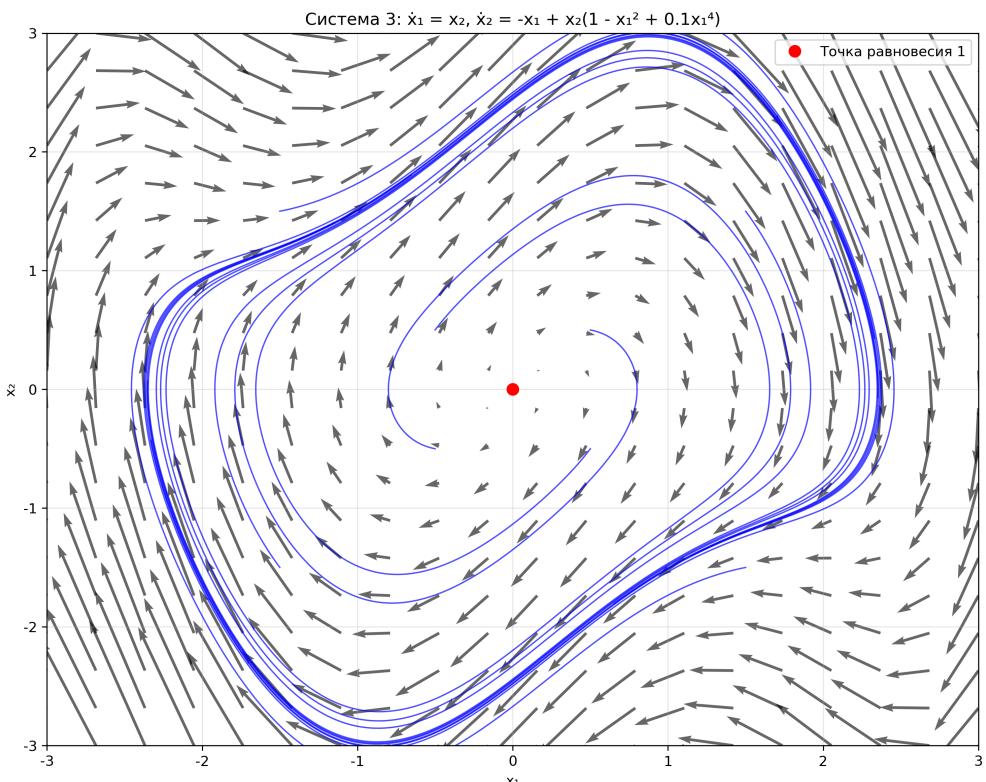


Рисунок 3 — Фазовый портрет системы 3

#### Система 4

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (43)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (44)$$

**Точки равновесия:**

$$(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (45)$$

$$(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (46)$$

**Случай 1:**  $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$  (окружность)

**Случай 2:**  $x_1 - x_2 = 0$  и  $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 & -2x_1x_2 - 1 + x_1^2 + 3x_2^2 \\ 1 - 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 & -2x_1x_2 + 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

**Анализ точек равновесия:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$  — неустойчивый фокус
- Все точки на окружности  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  — континуум точек равновесия

Перейдем к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (47)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (48)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (49)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (50)$$

Вычисляем производную  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (51)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (52)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 + x_2^2]}{r} \quad (53)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (54)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (55)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (56)$$

Уравнение  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  имеет решения:

- $r = 0$  — точка равновесия
- $r = 1$  — предельный цикл (окружность радиуса 1)

При  $r < 1$ :  $\dot{r} > 0 \Rightarrow$  траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу.

При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0 \Rightarrow$  траектории движутся к циклу.

### Вывод:

- Точка  $(0,0)$  — неустойчивый узел
- Окружность  $r = 1$  — устойчивый предельный цикл

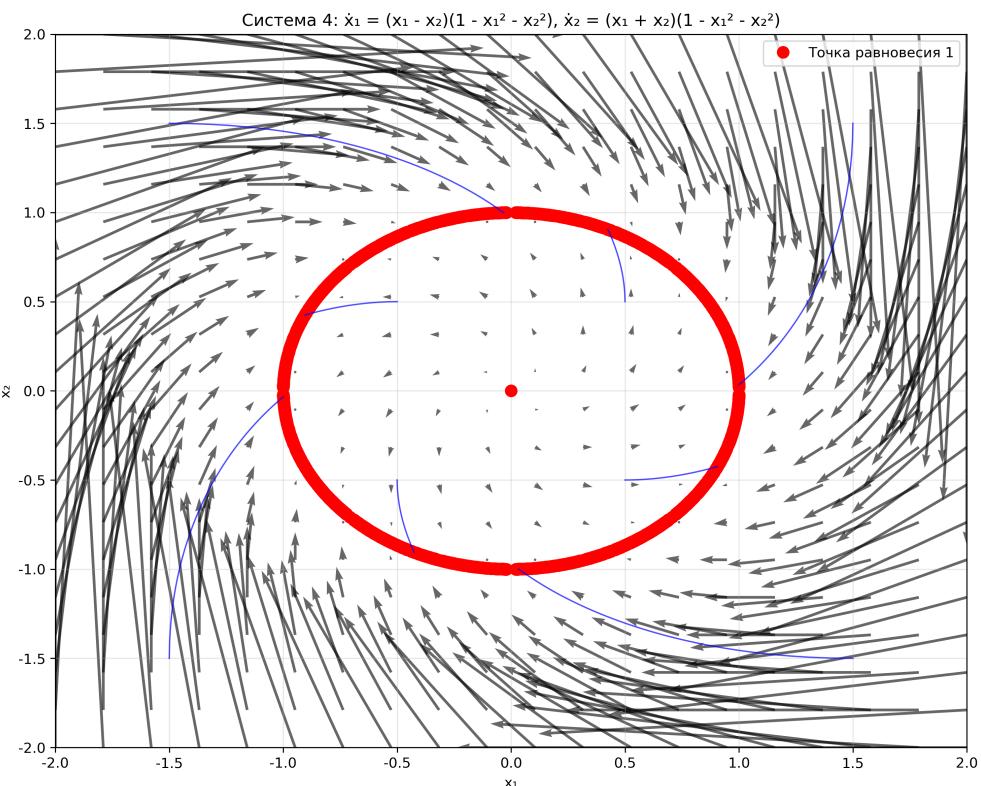


Рисунок 4 — Фазовый портрет системы 4

## Система 5

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \quad (57)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \quad (58)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1^3 + x_2 = 0 \quad (59)$$

$$x_1 - x_2^3 = 0 \quad (60)$$

Из первого уравнения:  $x_2 = x_1^3$ . Подставляя во второе:

$$x_1 - (x_1^3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_1^9 = 0 \Rightarrow x_1(1 - x_1^8) = 0$$

**Решения:**

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$  — точка  $(0, 0)$
- $x_1^8 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 \Rightarrow x_2 = \pm 1$

**Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:**

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (61)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (62)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (63)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (64)$$

Вычисляем производную  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (65)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (66)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (67)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (68)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (69)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (70)$$

**Анализ устойчивости предельного цикла:**

Уравнение  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  имеет решения:

- $r = 0$  — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$  — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака  $\dot{r}$ :

- При  $r < 1$ :  $\dot{r} > 0 \Rightarrow$  траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0 \Rightarrow$  траектории движутся к циклу

**Вывод:**

- Точка  $(0,0)$  — неустойчивый узел
- Окружность  $r = 1$  — устойчивый предельный цикл

**Точки равновесия:**  $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

**Анализ точек:**

- $(0,0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \pm 1$  — седло
- $(1,1)$ :  $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -2$  — устойчивый узел
- $(-1,-1)$ :  $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -4$  — устойчивый узел

**Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:**

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (71)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (72)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (73)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (74)$$

Вычисляем производную  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (75)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (76)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 + x_2^2]}{r} \quad (77)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (78)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (79)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (80)$$

### **Анализ устойчивости предельного цикла:**

Уравнение  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  имеет решения:

- $r = 0$  — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$  — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака  $\dot{r}$ :

- При  $r < 1$ :  $\dot{r} > 0 \Rightarrow$  траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0 \Rightarrow$  траектории движутся к циклу

### **Вывод:**

- Точка  $(0,0)$  — неустойчивый узел
- Окружность  $r = 1$  — устойчивый предельный цикл

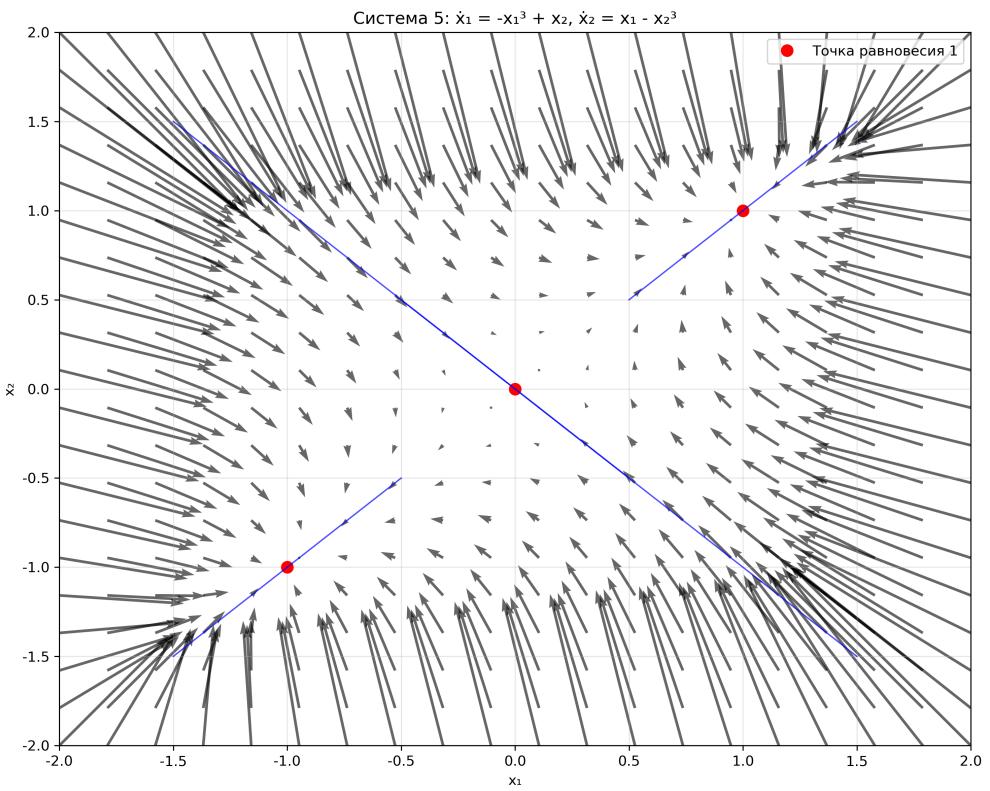


Рисунок 5 — Фазовый портрет системы 5

## Система 6

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (81)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \quad (82)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (83)$$

$$x_2^3(x_1 - 1) = 0 \quad (84)$$

**Случай 1:**  $x_2 = 0$ . Из первого уравнения:  $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

**Случай 2:**  $x_1 = 1$ . Из первого уравнения:  $-1 + x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

**Точки равновесия:**  $(0, 0), (1, 1)$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_2^2(x_1 - 1) \end{pmatrix}$$

**Анализ точек:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  — вырожденный случай
- $(1, 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$  — седло

**Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:**

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (85)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (86)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (87)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (88)$$

Вычисляем производную  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (89)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (90)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (91)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (92)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (93)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (94)$$

**Анализ устойчивости предельного цикла:**

Уравнение  $\dot{r} = r(1 - r^2)$  имеет решения:

- $r = 0$  — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$  — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака  $\dot{r}$ :

- При  $r < 1$ :  $\dot{r} > 0 \Rightarrow$  траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При  $r > 1$ :  $\dot{r} < 0 \Rightarrow$  траектории движутся к циклу

**Вывод:**

- Точка  $(0,0)$  — неустойчивый узел
- Окружность  $r = 1$  — устойчивый предельный цикл

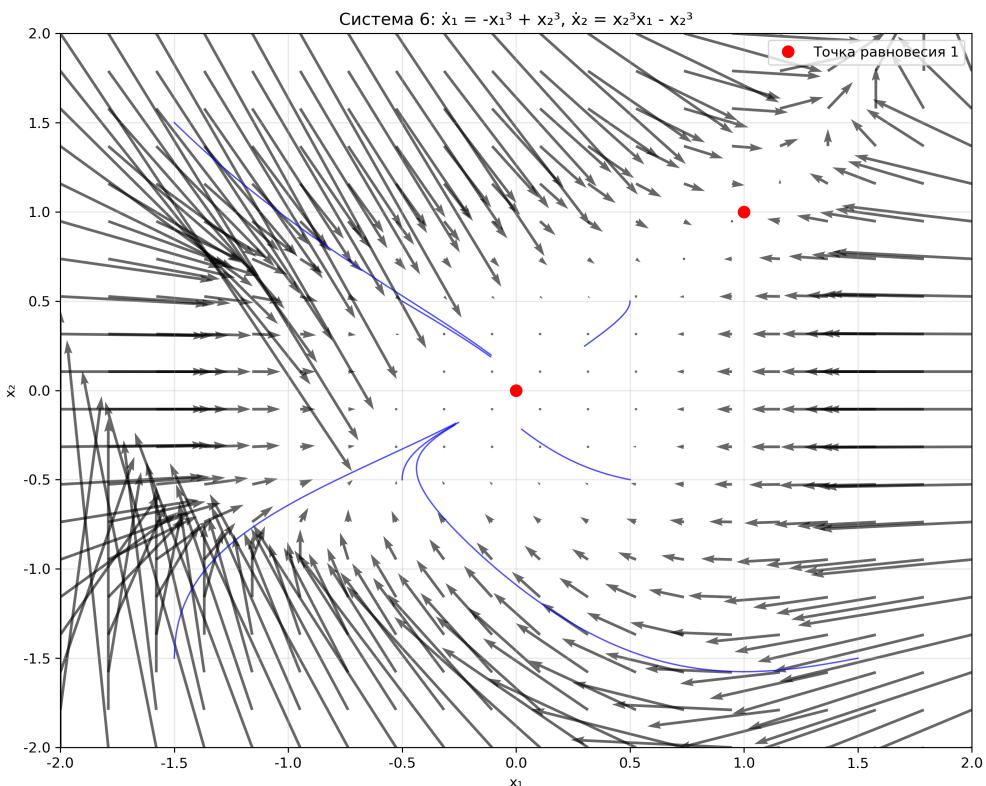


Рисунок 6 — Фазовый портрет системы 6

### Система 7

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (95)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3 \quad (96)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \quad (97)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (98)$$

$$x_1 + 3x_3 - x_1^3 = 0 \quad (99)$$

$$x_1x_3 - x_1^3 - \sin x_1 = 0 \quad (100)$$

Единственная точка равновесия:  $(0, 0, 0)$

Подставляя во второе:  $x_1 + 3x_3 - x_1^3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{x_1^3 - x_1}{3}$

Подставляя в третье:  $x_1 \cdot \frac{x_1^3 - x_1}{3} - x_1^3 - \sin x_1 = 0$

Упрощая:  $\frac{x_1^4 - x_1^2}{3} - x_1^3 - \sin x_1 = 0$

Получим:  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos x_1 & -3x_2^2 & x_1 \end{pmatrix}$$

**Анализ точки равновесия:** В точке  $(0, 0, 0)$  собственные значения:

$\lambda_{1,2,3} = 0$  — неустойчивый фокус

## Синтез стабилизирующих регуляторов

### Управляемая система 1

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin u_1 \quad (101)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3 \sin u_2 \quad (102)$$

### Выбор целевой точки и линеаризация по отклонениям

Стабилизуем систему к точке вида  $(1, x^*)$ , где  $x^* \in [-2, 0]$  (это условие необходимо и достаточно для существования стационарных входов, см. ниже) и  $x^* \neq -1$ . Из условий равновесия  $f(1, x^*, u_{ss}) = 0$  получаем

$$\sin u_{1,ss} = -(1 + x^*), \quad \sin u_{2,ss} = \frac{1 + x^*}{3}.$$

Для конкретики берём  $x^* = -1.5$ , тогда  $u_{1,ss} = \arcsin(0.5) = \pi/6 \approx 0.524$ ,  $u_{2,ss} = \arcsin(-0.5) = -\pi/6 \approx -0.167$ . Линеаризуем систему по отклонениям  $\tilde{x} = x - x^*$  и  $v = u - u_{ss}$ .

Матрицы Якоби в точке  $(x^*, u_{ss})$  имеют вид:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, u_{ss})} = \begin{pmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{x^*} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x^*, u_{ss})} = \begin{pmatrix} \cos u_{1,ss} & 0 \\ 0 & 3 \cos u_{2,ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & 0 \\ 0 & 3 \cos(-\pi/6) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8660 & 0 \\ 0 & 2.9580 \end{pmatrix}.$$

## Синтез LQR

Выберем  $Q = 10I$ ,  $R = I$  и решим алгебраическое уравнение Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad K = R^{-1}B^T P.$$

Получаем матрицу обратной связи (численно)

$$K = \begin{pmatrix} 11.7429 & 0.7194 \\ 2.4573 & 3.0173 \end{pmatrix}.$$

Спектр замкнутой линейной системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-5.9547, -9.1401\}.$$

Цель  $(1, -1.5)$  локально экспоненциально устойчива; моделирование подтверждает сходимость траекторий к окрестности этой точки.

## Управляемая система 2

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 + u \tag{103}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin u \tag{104}$$

## Поиск точек равновесия

При  $u = 0$  система принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 \tag{105}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 \tag{106}$$

Точки равновесия находятся из решения:

$$x_2(1 + x_1) = 0 \quad (107)$$

$$-x_2 + x_2^2 - x_1^3 = 0 \quad (108)$$

**Случай 1:**  $x_2 = 0$ . Из второго уравнения:  $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

**Случай 2:**  $x_1 = -1$ . Из второго уравнения:  $-x_2 + x_2^2 - (-1)^3 = 0 \Rightarrow x_2^2 - x_2 + 1 = 0$ . Дискриминант:  $D = 1 - 4 = -3 < 0$  — нет действительных решений.

**Точка равновесия:**  $(0, 0)$

### Выбор точки равновесия и линеаризация

Выберем точку равновесия  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  и установим стационарный вход  $u_{ss} = 0$ .

Матрицы линейной модели:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для  $Q = 10I$ ,  $R = 1$  получаем

$$K = \begin{pmatrix} 3.1623 & 2.1014 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A - BK) = \{-1.3529, -7.0121\}.$$

### Численное моделирование

Результаты численного моделирования показывают эффективность синтезированных LQR регуляторов: для системы 1 траектории сходятся к точке  $(1, -1.5)$ , для системы 2 — к  $(0, 0)$ .

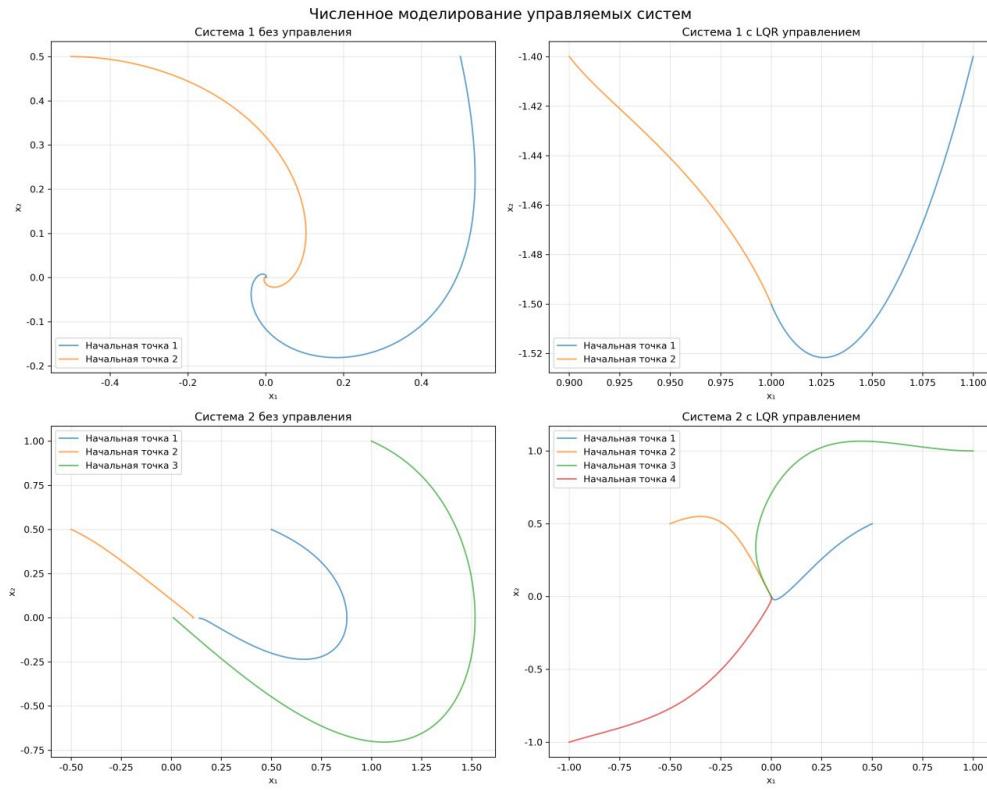


Рисунок 7 — Результаты численного моделирования управляемых систем

## Выводы

В данной лабораторной работе был проведен комплексный анализ семи нелинейных динамических систем. Работа включала в себя поиск точек равновесия, классификацию их типов, построение фазовых портретов и синтез стабилизирующих регуляторов.

- **Анализ точек равновесия:** Для всех семи систем найдены точки равновесия аналитическими и численными методами;
- **Классификация точек равновесия:** С использованием метода линеаризации определены типы всех изолированных точек равновесия;
- **Фазовые портреты:** Построены численные фазовые портреты;
- **Анализ предельных циклов:** Для систем 4 проведен анализ предельных циклов с использованием полярных координат;
- **Синтез регуляторов:** Для двух управляемых систем синтезированы LQR регуляторы и проведено численное моделирование их работы.

Таким образом, методы анализа нелинейных систем, рассмотренные в работе, позволяют эффективно исследовать динамические свойства сложных систем и синтезировать стабилизирующие регуляторы.