МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435	*Зыкин Л. В.*
Группа № R3441	*Алехова М. С.*
Группа № R3480	*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник *Зименко К. А.*

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматривается синтез стабилизирующих регуляторов на основе скользящих режимов для нелинейных систем управления. Метод скользящих режимов обеспечивает робастность к неопределенностям параметров и внешним возмущениям за счет использования разрывных или непрерывных законов управления с насыщением.

Основные задачи работы:

1. Синтез разрывного и непрерывного регуляторов для системы с параметрическими неопределенностями
2. Синтез стабилизирующего регулятора для системы с неизвестными параметрами
3. Разработка непрерывного регулятора для стабилизации маятника

Для каждой системы предполагается, что весь вектор состояния измерим, и необходимо провести анализ устойчивости и математическое моделирование синтезированных регуляторов.

Задача 1. Синтез разрывного и непрерывного регуляторов

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1 \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2)u \tag{2}$$

где параметры θ_1 и θ_2 неизвестны, но ограничены: $|\theta_1| \leq 1$, $|\theta_2| \leq 1$.

Выбор поверхности скольжения

Выбираем поверхность скольжения в виде:

$$s = c_1 x_1 + x_2 = 0 \tag{3}$$

где $c_1 > 0$ — параметр настройки. На поверхности скольжения система имеет динамику:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + \sin x_1 \tag{4}$$

При малых x_1 и выборе $c_1 > 1$ эта динамика асимптотически устойчива.

Производная поверхности скольжения

Вычисляем производную поверхности скольжения:

$$\dot{s} = c_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = c_1(x_2 + \sin x_1) + \theta_1 x_1^2 + (2 + \theta_2)u \tag{5}$$

Для обеспечения условия притяжения к поверхности скольжения $\dot{s} = -ks$ (где $k > 0$) получаем:

$$(2 + \theta_2)u = -ks - c_1(x_2 + \sin x_1) - \theta_1 x_1^2 \tag{6}$$

Разрывный регулятор

Разрывный регулятор имеет вид:

$$u = u_{eq} - M \cdot \text{sign}(s) \tag{7}$$

где u_{eq} — эквивалентное управление (номинальное, при $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$):

$$u_{eq} = -\frac{ks + c_1(x_2 + \sin x_1)}{2} \tag{8}$$

где $k > 0$ — коэффициент, обеспечивающий $\dot{s} = -ks$ на поверхности скольжения.

а $M > 0$ выбирается достаточно большим для компенсации неопределенностей:

$$M \geq \frac{|\theta_1|x_1^2 + |\theta_2||u_{eq}| + \delta}{2 - |\theta_2|} \tag{9}$$

где $\delta > 0$ — запас робастности.

Условие притяжения к поверхности скольжения:

$$s\dot{s} = s(-ks - \Delta) = -ks^2 - s\Delta < 0 \tag{10}$$

где Δ — неопределенность, компенсируемая разрывной частью управления.

Непрерывный регулятор

Для устранения явления “дрожания” (chattering) используется непрерывный регулятор с функцией насыщения:

$$u = u_{eq} - M \cdot \tanh\left(\frac{s}{\phi}\right) \tag{11}$$

где $\phi > 0$ — ширина граничного слоя. Функция $\tanh(s/\phi)$ аппроксимирует $\text{sign}(s)$ и обеспечивает непрерывность управления.

В граничном слое $|s| < \phi$ система находится в режиме "квазискольжения", а вне граничного слоя поведение близко к разрывному регулятору.

Анализ устойчивости

Рассмотрим функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}s^2 \tag{12}$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(-ks - \Delta + (2 + \theta_2)u_{sw}) \tag{13}$$

где $u_{sw} = -M \cdot \tanh(s/\phi)$ — разрывная часть управления.

При правильном выборе M обеспечивается $\dot{V} < 0$ вне малой окрестности $s = 0$, что гарантирует притяжение к поверхности скольжения и последующую стабилизацию в начало координат.

Моделирование системы 1

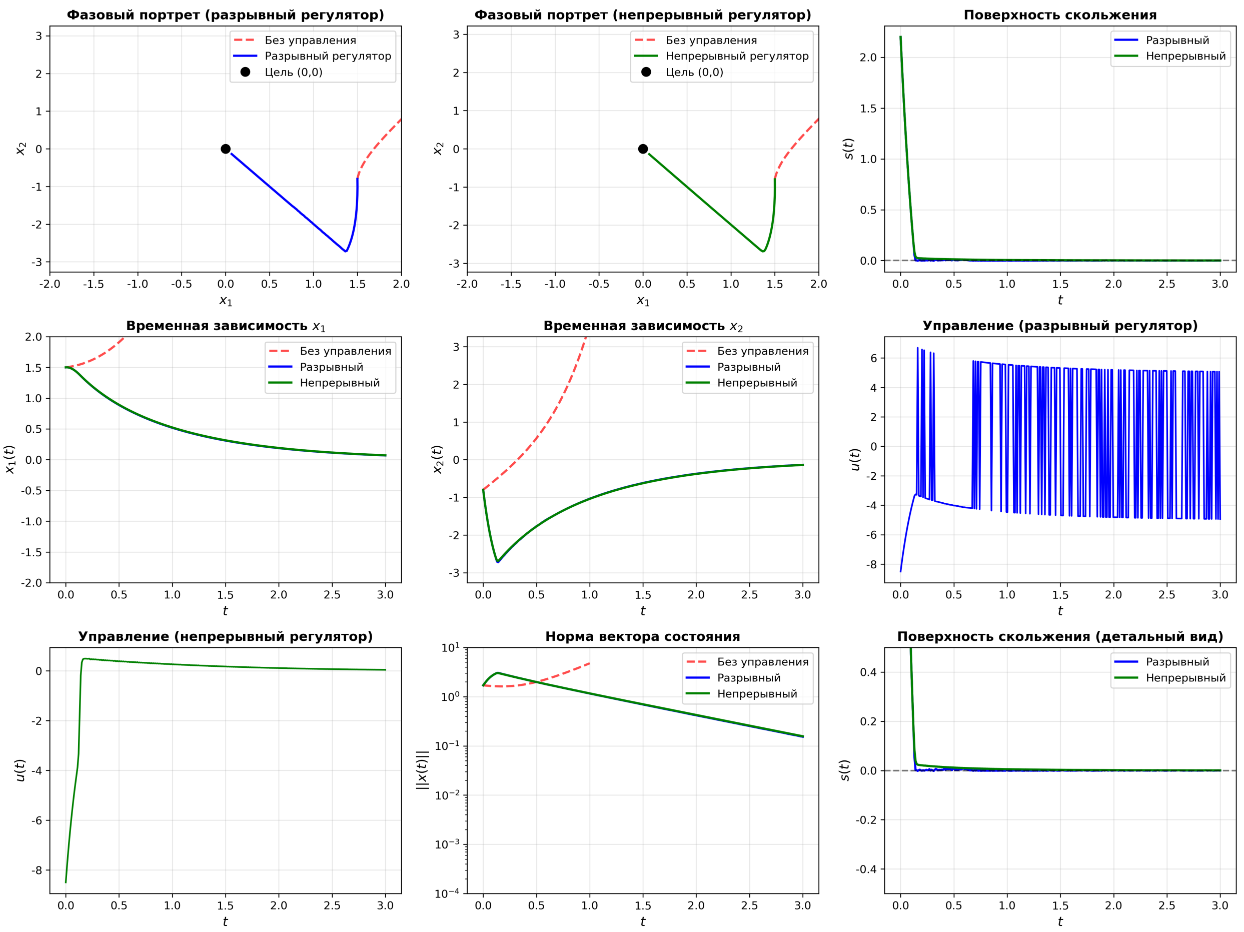

Рисунок 1 — Моделирование системы 1 с разрывным и непрерывным регуляторами

На рисунке 1 представлены результаты моделирования системы с разрывным и непрерывным регуляторами. Видно, что оба регулятора обеспечивают стабилизацию системы в начало координат. Непрерывный регулятор устраняет явление “дрожания”, характерное для разрывного регулятора, при сохранении робастных свойств.

Задача 2. Синтез регулятора для системы с неизвестными параметрами

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + a_1 x_1 \sin x_1 \tag{14}$$

$$\dot{x}_2 = a_2 x_1 x_2 + 3u \tag{15}$$

где параметры a_1 и a_2 неизвестны, но ограничены: $|a_1-1| \leq 1$, $|a_2-1| \leq 1$, то есть $a_1 \in [0,2]$, $a_2 \in [0,2]$.

Выбор поверхности скольжения

Выбираем поверхность скольжения:

$$s = c_1 x_1 + x_2 = 0 \tag{16}$$

где $c_1 > 0$ — параметр настройки.

Производная поверхности скольжения

Вычисляем производную:

$$\dot{s} = c_1(x_2 + a_1 x_1 \sin x_1) + a_2 x_1 x_2 + 3u \tag{17}$$

Для обеспечения $\dot{s} = -ks$ получаем:

$$3u = -ks - c_1(x_2 + a_1 x_1 \sin x_1) - a_2 x_1 x_2 \tag{18}$$

Синтез регулятора

Эквивалентное управление (номинальное, при $a_1 = 1$, $a_2 = 1$):

$$u_{eq} = -\frac{c_1(x_2 + x_1 \sin x_1) + x_1 x_2}{3} \tag{19}$$

Непрерывный регулятор:

$$u = u_{eq} - M \cdot \tanh\left(\frac{s}{\phi}\right) \tag{20}$$

где $M > 0$ выбирается для компенсации неопределенностей параметров a_1 и a_2.

Анализ устойчивости

Рассмотрим функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}s^2$. Производная:

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(-ks - \Delta_{a_1} - \Delta_{a_2} + 3u_{sw}) \tag{21}$$

где Δ_{a_1} и Δ_{a_2} — неопределенности, связанные с параметрами a_1 и a_2.

При выборе M достаточного большого обеспечивается $\dot{V} < 0$, что гарантирует притяжение к поверхности скольжения и стабилизацию системы.

Моделирование системы 2

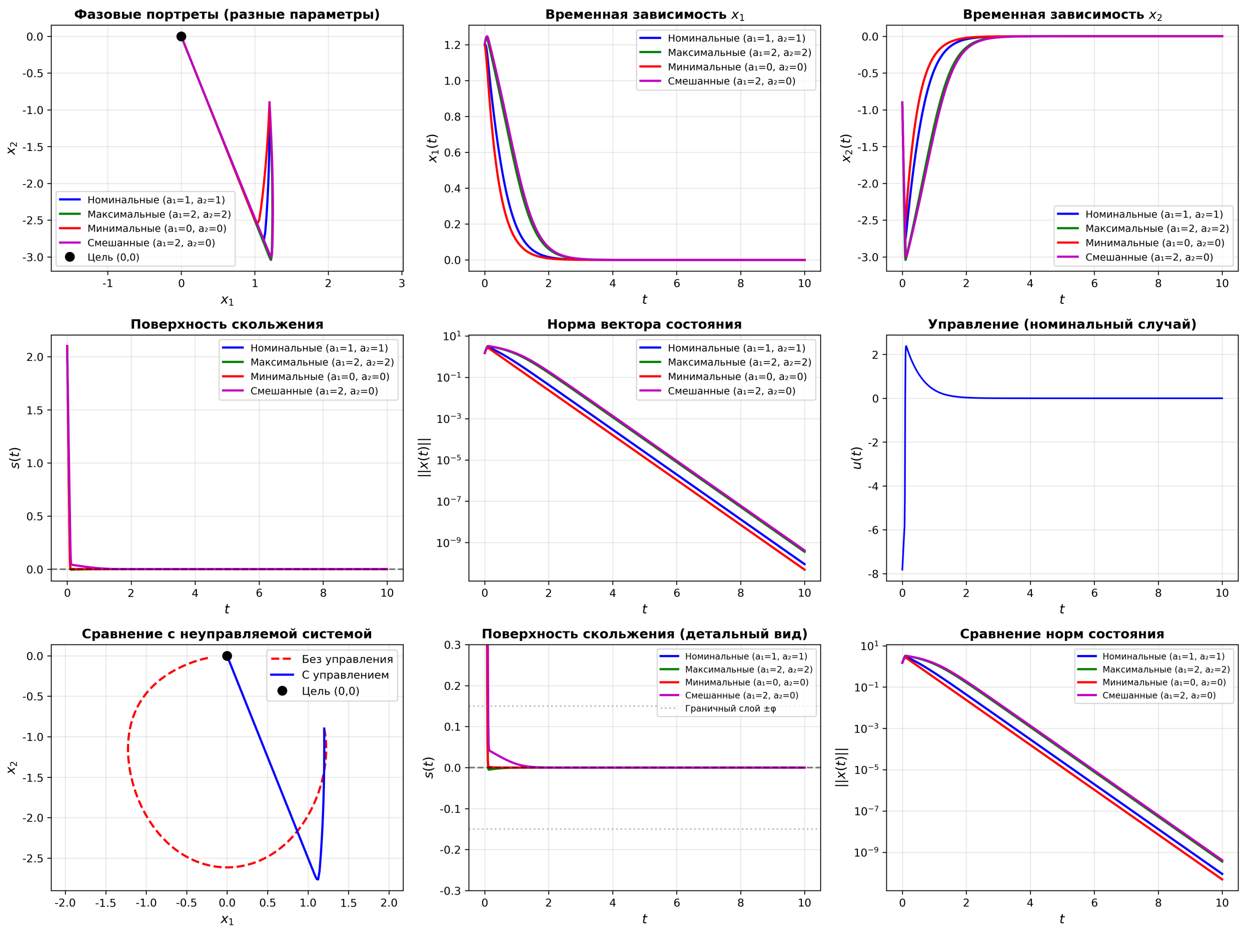

Рисунок 2 — Моделирование системы 2 с регулятором для различных значений параметров

На рисунке 2 представлены результаты моделирования системы с регулятором для различных комбинаций параметров a_1 и a_2 в допустимых пределах. Видно, что регулятор обеспечивает стабилизацию системы независимо от конкретных значений параметров, демонстрируя робастность метода скользящих режимов.

Задача 3. Стабилизация маятника

Рассмотрим уравнение движения маятника:

$$ml\ddot{\theta} + mg\sin\theta + kl\dot{\theta} = \frac{T}{l} + mh(t)\cos\theta \tag{22}$$

где:

– l — длина маятника, $0.8 \leq l \leq 1$ м

– m — масса, $0.5 \le m \le 1$ кг
– k — коэффициент трения, $0.1 \le k \le 0.2$ Н·с/м
– $h(t)$ — горизонтальное возмущение, $|h(t)| \le 0.5$ м/с²
– T — управляющий момент
– $g = 9.81$ м/с² — ускорение свободного падения

Требуется стабилизировать маятник при $\theta = 0$ для произвольных начальных условий.

Приведение к нормальной форме

Вводя переменные состояния $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, получаем систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{23}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - kx_2 + \frac{T}{ml^2} + \frac{h(t)}{l}\cos x_1 \tag{24}$$

Выбор поверхности скольжения

Выбираем поверхность скольжения:

$$s = c_1 x_1 + x_2 = 0 \tag{25}$$

где $c_1 > 0$ — параметр настройки. На поверхности скольжения динамика угла:

$$\dot{x}_1 = -c_1 x_1 + \text{малые члены} \tag{26}$$

что обеспечивает асимптотическую стабилизацию при $c_1 > 0$.

Производная поверхности скольжения

Вычисляем производную:

$$\dot{s} = c_1 x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1 - kx_2 + \frac{T}{ml^2} + \frac{h(t)}{l}\cos x_1 \tag{27}$$

Для обеспечения $\dot{s} = -k_{sliding}s$ (где $k_{sliding} > 0$) получаем:

$$\frac{T}{ml^2} = -k_{sliding}s - c_1 x_2 + \frac{g}{l}\sin x_1 + kx_2 - \frac{h(t)}{l}\cos x_1 \tag{28}$$

Синтез непрерывного регулятора

Эквивалентное управление (номинальное, при средних значениях параметров):

$$T_{eq} = ml^2 \left(c_1 x_2 - \frac{g}{l} \sin x_1 + k x_2 \right) \tag{29}$$

Непрерывный регулятор:

$$T = T_{eq} - M \cdot \tanh\left(\frac{s}{\phi}\right) \tag{30}$$

где $M > 0$ выбирается для компенсации неопределенностей параметров l, m, k и возмущения $h(t)$.

Анализ устойчивости

Рассмотрим функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}s^2$. Производная:

$$\dot{V} = s\dot{s} = s(-k_{sliding}s - \Delta_{params} - \Delta_h + \frac{T_{sw}}{ml^2}) \tag{31}$$

где Δ_{params} — неопределенности параметров, Δ_h — возмущение от $h(t)$, $T_{sw} = -M \cdot \tanh(s/\phi)$ — разрывная часть управления.

При правильном выборе M обеспечивается $\dot{V} < 0$, что гарантирует притяжение к поверхности скольжения и стабилизацию маятника в вертикальное положение.

Моделирование системы 3

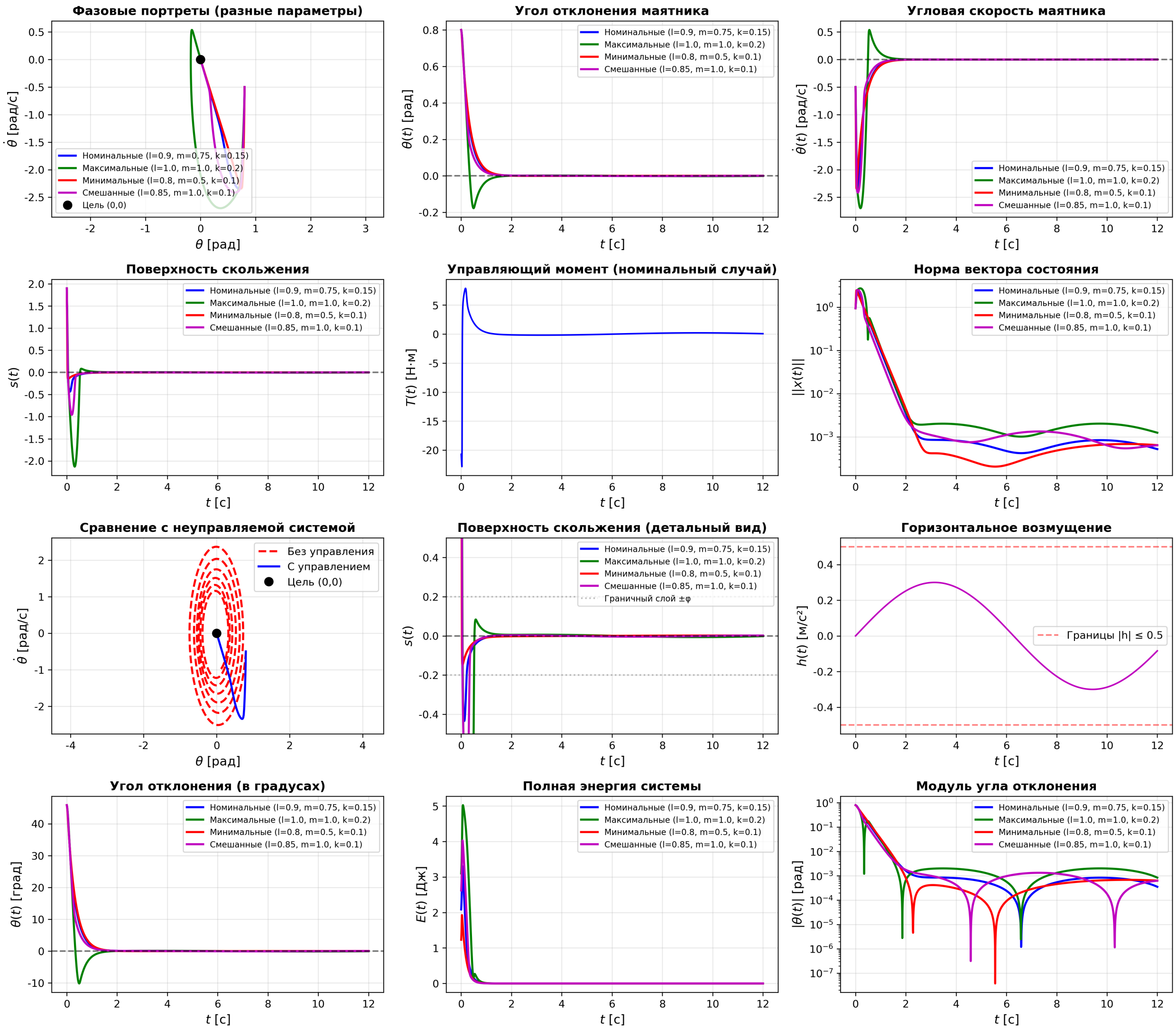

Рисунок 3 — Моделирование стабилизации маятника с регулятором для различных параметров

На рисунке 3 представлены результаты моделирования стабилизации маятника с регулятором для различных комбинаций параметров в допустимых пределах и различных возмущений $h(t)$. Видно, что регулятор обеспечивает стабилизацию маятника в вертикальное положение ($\theta = 0$) независимо от начальных условий, параметров системы и внешних возмущений.

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были синтезированы стабилизирующие регуляторы на основе скользящих режимов для трех различных нелинейных систем:

1. Для системы с параметрическими неопределенностями синтезированы разрывный и непрерывный регуляторы. Непрерывный регулятор устраняет явление “дрожания”, сохраняя робастные свойства метода.
2. Для системы с неизвестными параметрами синтезирован непрерывный регулятор, демонстрирующий робастность к вариациям параметров в заданных пределах.
3. Для маятника синтезирован непрерывный регулятор, обеспечивающий стабилизацию в вертикальное положение при наличии неопределенностей параметров и внешних возмущений.

Все синтезированные регуляторы продемонстрировали эффективность метода скользящих режимов для обеспечения робастной стабилизации нелинейных систем с неопределенностями.