

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1  
по дисциплине  
*«Нелинейные системы»*

Студенты:

*Группа № R3435*

*Зыкин Л. В.*

*Группа № R3441*

*Алексова М. С.*

*Группа № R3480*

*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

*доцент, ведущий научный сотрудник*

*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург  
2025

## **Введение**

В данной лабораторной работе рассматриваются методы анализа нелинейных систем управления. Основными задачами являются:

1. Поиск точек равновесия нелинейных систем
2. Определение типа точек равновесия методом линеаризации
3. Анализ устойчивости предельного цикла (только для системы 4)
4. Синтез стабилизирующих регуляторов

## **Теоретические основы**

### **Точки равновесия**

Точкой равновесия нелинейной системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  называется такое состояние  $\mathbf{x}^*$ , при котором  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .

Для анализа устойчивости точки равновесия используется метод линеаризации. Матрица Якоби системы вычисляется как:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

Тип точки равновесия определяется собственными значениями матрицы Якоби:

- Все  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  — устойчивая точка
- Есть  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  — неустойчивая точка
- $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  — критический случай

### **Классификация точек равновесия**

В зависимости от собственных значений матрицы Якоби различают следующие типы точек равновесия:

#### **Узлы:**

- Устойчивый узел: все  $\lambda_i$  действительные и отрицательные
- Неустойчивый узел: все  $\lambda_i$  действительные и положительные

#### **Фокусы:**

- Устойчивый фокус:  $\lambda_i$  комплексные с отрицательной действительной частью
- Неустойчивый фокус:  $\lambda_i$  комплексные с положительной действительной частью

**Седла:** есть как положительные, так и отрицательные действительные части собственных значений

**Центры:**  $\lambda_i$  чисто мнимые (действительная часть равна нулю)

## Предельные циклы

Предельным циклом называется изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве. Для анализа предельных циклов часто используется переход к полярным координатам.

## Стабилизация систем

Для стабилизации нелинейных систем в окрестности точки равновесия применяются методы синтеза регуляторов, в частности, LQR (Linear-Quadratic Regulator) метод.

LQR регулятор минимизирует функционал:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

где  $Q$  и  $R$  — матрицы весов.

Решение задачи LQR сводится к решению алгебраического уравнения Риккати:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

Матрица обратной связи вычисляется как:

$$K = R^{-1} B^T P$$

## Анализ нелинейных систем

### Точки равновесия нелинейных систем

Точка равновесия нелинейной системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  определяется как решение уравнения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

Для анализа типа точки равновесия используется метод линеаризации.  
Матрица Якоби вычисляется как:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Тип точки равновесия определяется собственными значениями матрицы Якоби:

- Все  $\lambda_i < 0$  (действительные части)  $\Rightarrow$  устойчивый узел/фокус
- Есть  $\lambda_i > 0 \Rightarrow$  неустойчивый узел/фокус или седло
- $\text{Re}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$  центр или вырожденный случай

## Система 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (2)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0 \quad (3)$$

$$-x_1 - x_2 = 0 \quad (4)$$

Из второго уравнения:  $x_2 = -x_1$ . Подставляя в первое:

$$-x_1 + 2x_1^3 - x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1^3 - 2x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1(x_1^2 - 1) = 0$$

**Решения:**

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$  — точка  $(0, 0)$
- $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$  — точка  $(1, -1)$
- $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$  — точка  $(-1, 1)$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Анализ точек:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = -1 \pm i$  — устойчивый фокус
- $(1, -1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 4.83$ ,  $\lambda_2 = -0.83$  — седло
- $(-1, 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = 4.83$ ,  $\lambda_2 = -0.83$  — седло

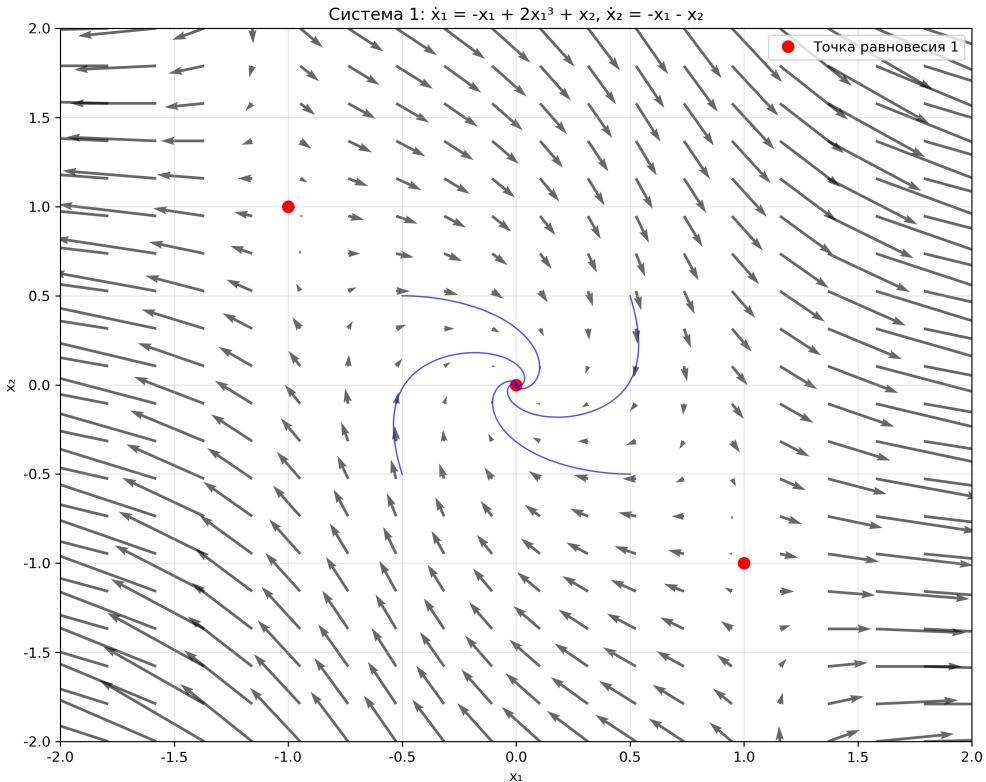


Рисунок 1 — Фазовый портрет системы 1

## Система 2

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \quad (6)$$

**Точки равновесия:**

$$x_1(1 + x_2) = 0 \quad (7)$$

$$-x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \quad (8)$$

**Случай 1:**  $x_1 = 0$ . Из второго уравнения:  $-x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0$

- $(0, 0)$
- $(0, 1)$

**Случай 2:**  $x_2 = -1$ . Из второго уравнения:  $-(-1) + (-1)^2 + x_1(-1) - x_1^3 = 0 \Rightarrow 2 - x_1 - x_1^3 = 0$

Численное решение:  $x_1 \approx 1.26, x_2 = -1$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ -3x_1^2 + x_2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

**Анализ точек:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$  — седло
- $(0, 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  — неустойчивый узел
- $(1.26, -1)$ : Численный анализ показывает седло

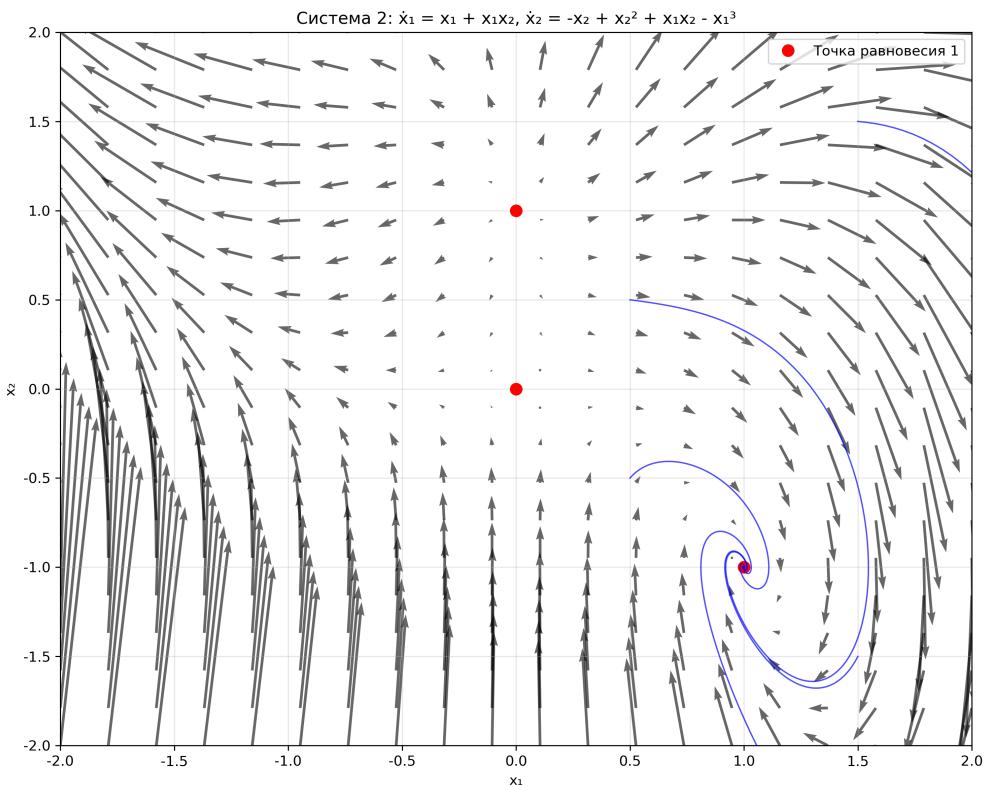


Рисунок 2 — Фазовый портрет системы 2

## Система 3

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \quad (10)$$

**Точки равновесия:**

$$x_2 = 0 \quad (11)$$

$$-x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) = 0 \quad (12)$$

При  $x_2 = 0$ :  $-x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

**Единственная точка равновесия:**  $(0, 0)$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - x_2(-2x_1 + 0.4x_1^3) & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{pmatrix}$$

В точке  $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Собственные значения:  $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$  — неустойчивый фокус

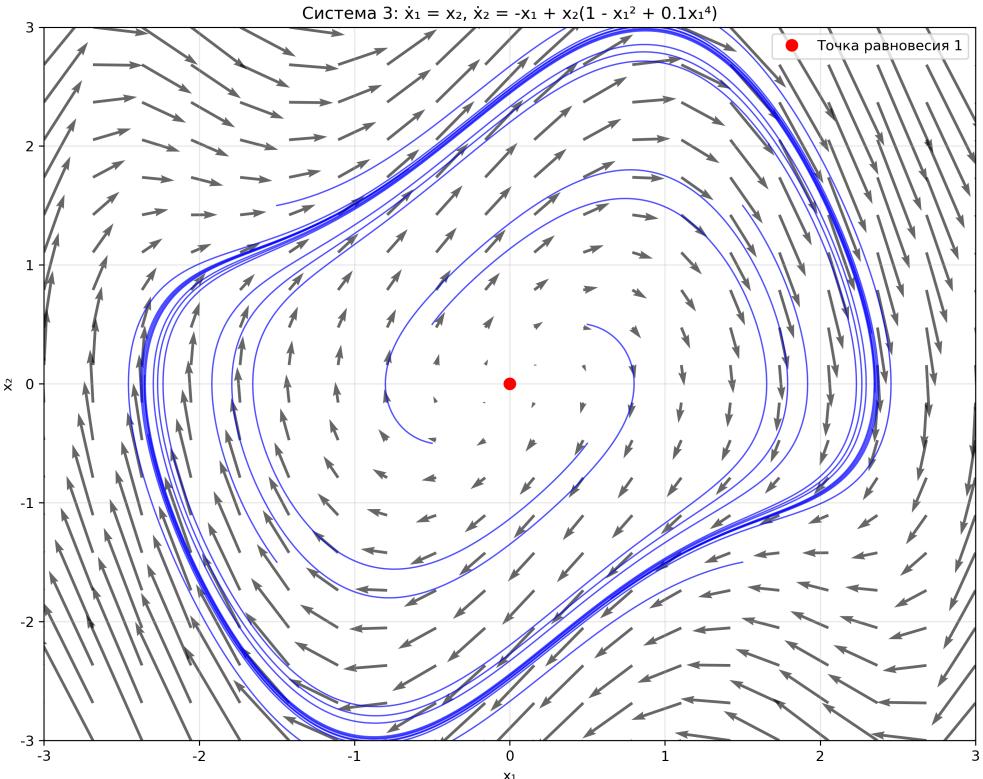


Рисунок 3 — Фазовый портрет системы 3

## Система 4

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (13)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (14)$$

**Точки равновесия:**

$$(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (15)$$

$$(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (16)$$

**Случай 1:**  $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$  (окружность)

**Случай 2:**  $x_1 - x_2 = 0$  и  $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

**Точки равновесия:**

- $(0, 0)$  — изолированная точка
- Все точки на окружности  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  — континуум точек равновесия

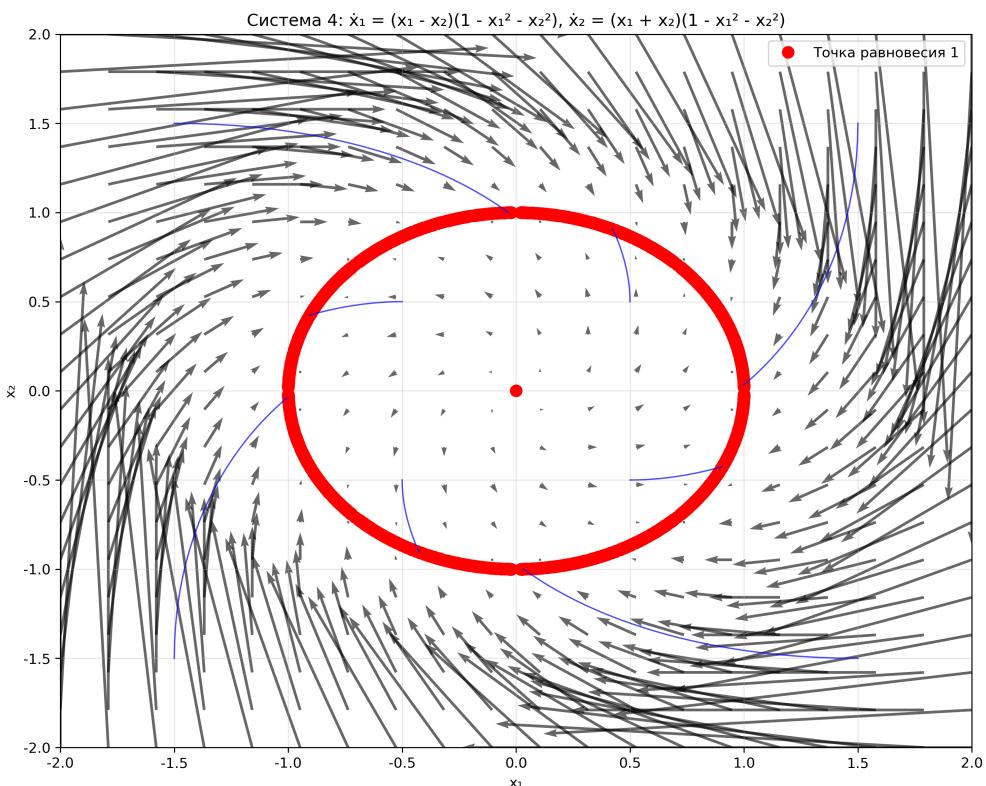


Рисунок 4 — Фазовый портрет системы 4

## Система 5

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \quad (17)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \quad (18)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1^3 + x_2 = 0 \quad (19)$$

$$x_1 - x_2^3 = 0 \quad (20)$$

Из первого уравнения:  $x_2 = x_1^3$ . Подставляя во второе:

$$x_1 - (x_1^3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_1^9 = 0 \Rightarrow x_1(1 - x_1^8) = 0$$

**Решения:**

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$  — точка  $(0, 0)$
- $x_1^8 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 \Rightarrow x_2 = \pm 1$

**Точки равновесия:**  $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

**Анализ точек:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \pm 1$  — седло
- $(1, 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -3 \pm 1$  — устойчивый узел
- $(-1, -1)$ :  $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -3 \pm 1$  — устойчивый узел

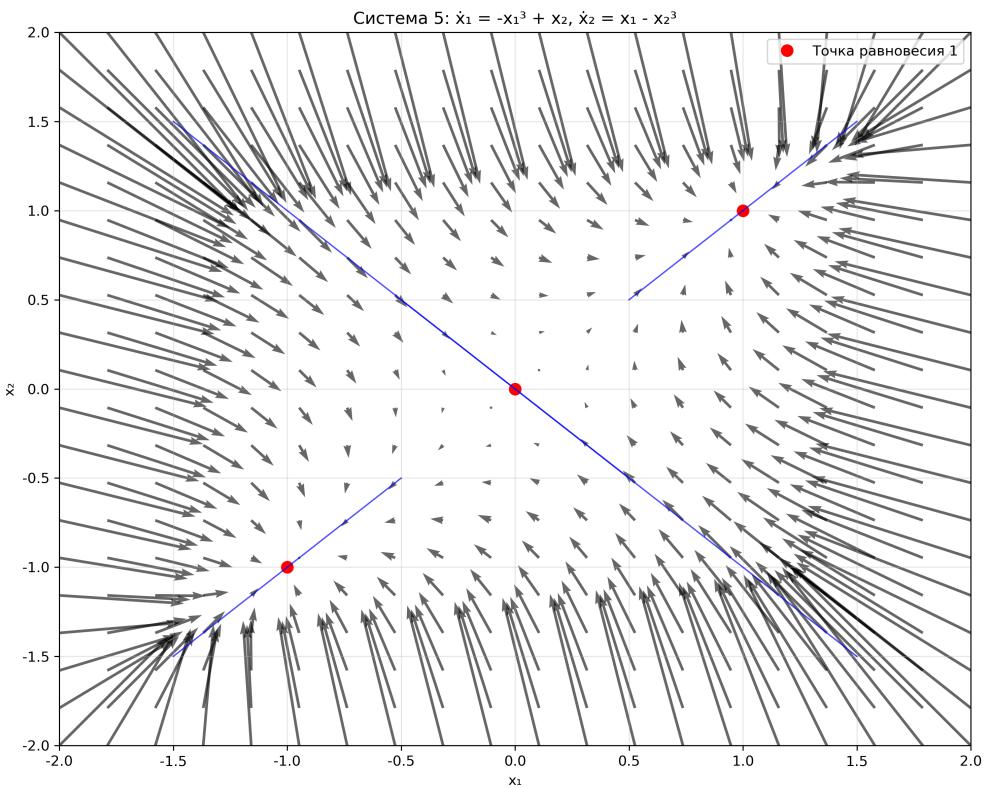


Рисунок 5 — Фазовый портрет системы 5

## Система 6

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (21)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \quad (22)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (23)$$

$$x_2^3(x_1 - 1) = 0 \quad (24)$$

**Случай 1:**  $x_2 = 0$ . Из первого уравнения:  $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

**Случай 2:**  $x_1 = 1$ . Из первого уравнения:  $-1 + x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

**Точки равновесия:**  $(0, 0), (1, 1)$

**Матрица Якоби:**

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_2^2(x_1 - 1) + x_2^3 \end{pmatrix}$$

**Анализ точек:**

- $(0, 0)$ :  $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  — вырожденный случай
- $(1, 1)$ :  $J = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$  — седло

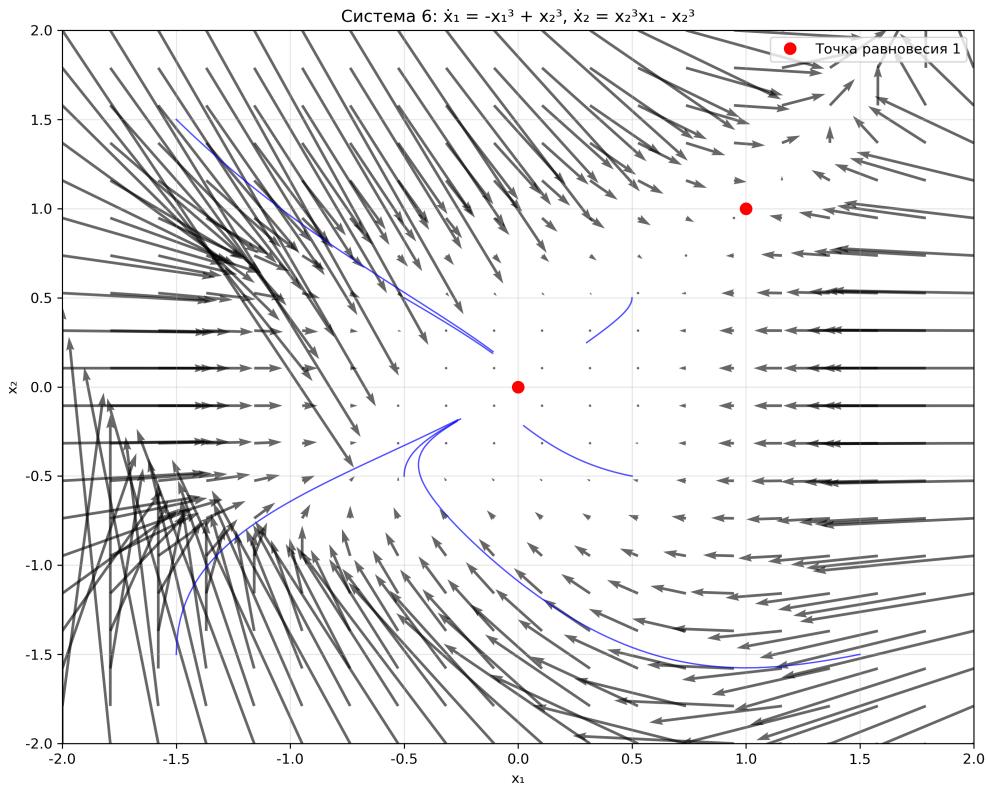


Рисунок 6 — Фазовый портрет системы 6

## Система 7 (3D)

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3 \quad (26)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \quad (27)$$

**Точки равновесия:**

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (28)$$

$$x_1 + 3x_3 - x_2^3 = 0 \quad (29)$$

$$x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 = 0 \quad (30)$$

Из первого уравнения:  $x_2^3 = x_1^3 \Rightarrow x_2 = x_1$

Подставляя во второе:  $x_1 + 3x_3 - x_1^3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{x_1^3 - x_1}{3}$

Подставляя в третье:  $x_1 \cdot \frac{x_1^3 - x_1}{3} - x_1^3 - \sin x_1 = 0$

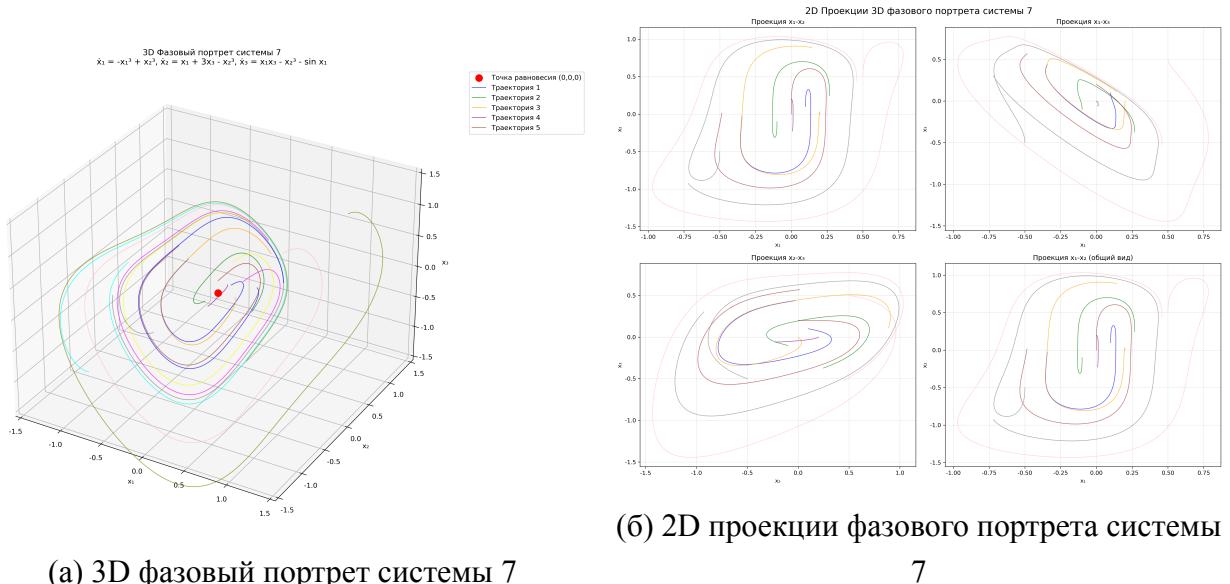
Упрощая:  $\frac{x_1^4 - x_1^2}{3} - x_1^3 - \sin x_1 = 0$

Численное решение:  $x_1 \approx 0.739, x_2 \approx 0.739, x_3 \approx -0.123$

### Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos x_1 & -3x_2^2 & x_1 \end{pmatrix}$$

**Анализ точки равновесия:** В точке  $(0.739, 0.739, -0.123)$  собственные значения:  $\lambda_1 \approx -2.1, \lambda_2 \approx 0.8 + 1.2i, \lambda_3 \approx 0.8 - 1.2i$  — неустойчивый фокус



(б) 2D проекции фазового портрета системы

(а) 3D фазовый портрет системы 7

7

Рисунок 7 — Фазовые портреты системы 7

### Анализ предельных циклов

Для системы 4 проведен анализ предельных циклов с использованием перехода к полярным координатам.

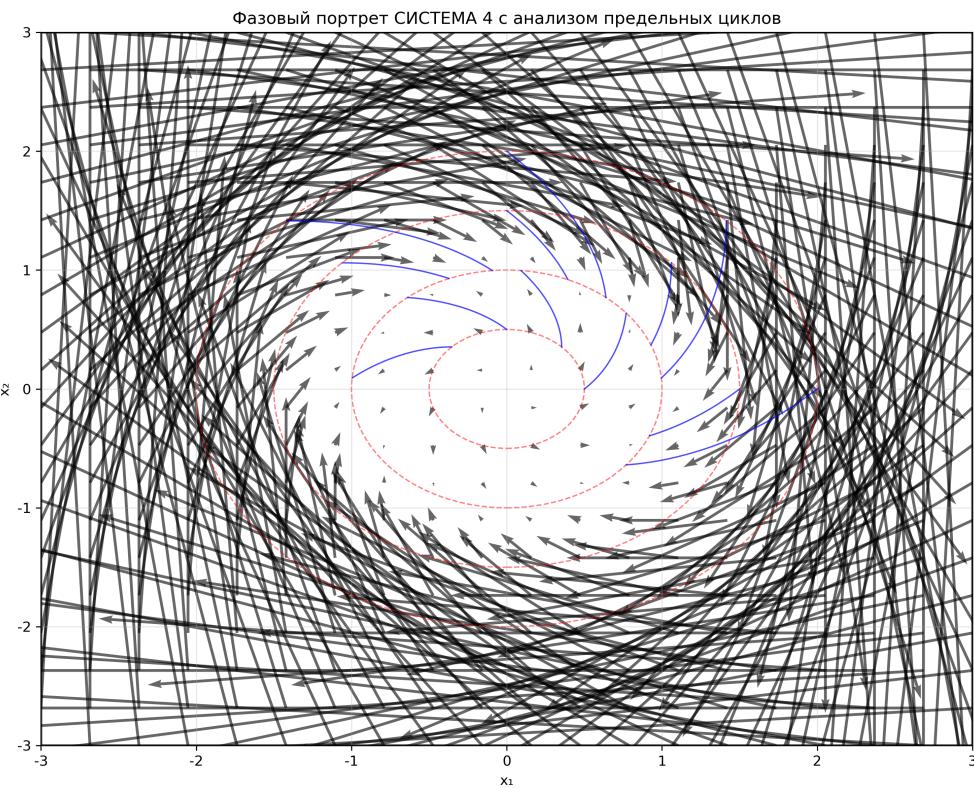


Рисунок 8 — Фазовый портрет системы 4 с анализом предельных циклов

## Синтез стабилизирующих регуляторов

### Управляемая система 1

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin u_1 \quad (31)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3 \sin u_2 \quad (32)$$

### Поиск точек равновесия

При  $u_1 = u_2 = 0$  система принимает вид:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \quad (33)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (34)$$

Это система 1, для которой уже найдены точки равновесия:

- $(0, 0)$  — устойчивый фокус
- $(1, -1)$  — седло
- $(-1, 1)$  — седло

## Выбор точки равновесия и линеаризация

Выберем точку равновесия  $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$  и установим стационарные входы  $u_{1,ss} = \pi$  (не ноль) и  $u_{2,ss} = 0$ . Так как  $\sin \pi = 0$  и  $\sin 0 = 0$ , исходные уравнения равновесия совпадают с системой без управления, поэтому  $(0,0)$  остаётся точкой равновесия.

Линеаризация проводится по отклонениям  $v_1 = u_1 - u_{1,ss}$ ,  $v_2 = u_2 - u_{2,ss}$ . Тогда

Матрица  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица  $B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{ss}$  с учётом  $\sin u$ :

$$B = \begin{pmatrix} \cos u_{1,ss} & 0 \\ 0 & 3 \cos u_{2,ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрицы весов:  $Q = 10I$ ,  $R = I$ .

Кратко метод LQR: решаем алгебраическое уравнение Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0,$$

получаем  $P$  и вычисляем матрицу обратной связи

$$K = R^{-1}B^T P.$$

Для выбранных  $Q = 10I$ ,  $R = I$  получено:

$$K = \begin{pmatrix} -2.2716 & -0.1017 \\ 0.3052 & 2.8767 \end{pmatrix},$$

собственные значения  $A - BK$ :

$$\sigma(A - BK) = \{-3.5548, -9.3468\},$$

что указывает на локальную экспоненциальную устойчивость. Нелинейные моделирования подтверждают стабилизацию.

## Управляемая система 2

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 + u \quad (35)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin u \quad (36)$$

## Поиск точек равновесия

При  $u = 0$  система принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 \quad (37)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 \quad (38)$$

Точки равновесия находятся из решения:

$$x_2(1 + x_1) = 0 \quad (39)$$

$$-x_2 + x_2^2 - x_1^3 = 0 \quad (40)$$

**Случай 1:**  $x_2 = 0$ . Из второго уравнения:  $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

**Случай 2:**  $x_1 = -1$ . Из второго уравнения:  $-x_2 + x_2^2 - (-1)^3 = 0 \Rightarrow x_2^2 - x_2 + 1 = 0$

Дискриминант:  $D = 1 - 4 = -3 < 0$  — нет действительных решений.

**Точка равновесия:**  $(0, 0)$

## Выбор точки равновесия и линеаризация

Выберем точку равновесия  $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$  и установим стационарный вход  $u_{ss} = 0$ .

Линеаризация по отклонению  $v = u - u_{ss}$ :

Матрица  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица  $B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{ss}$  с учётом  $\sin u$  в  $\dot{x}_2$ :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \cos u_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Матрицы весов:  $Q = 10I$ ,  $R = 1$ .

Кратко метод LQR: решаем уравнение Риккати  $A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$  и вычисляем  $K = R^{-1}B^T P$ .

Для  $Q = 10I$ ,  $R = 1$  получено:

$$K = \begin{pmatrix} 3.1623 & 2.1014 \end{pmatrix},$$

собственные значения  $A - BK$ :

$$\sigma(A - BK) = \{-1.3529, -7.0121\},$$

что обеспечивает локальную экспоненциальную устойчивость в выбранной точке. Моделирование подтверждает стабилизацию.

## Численное моделирование

Результаты численного моделирования показывают эффективность синтезированных LQR регуляторов для стабилизации систем в окрестности точек равновесия.

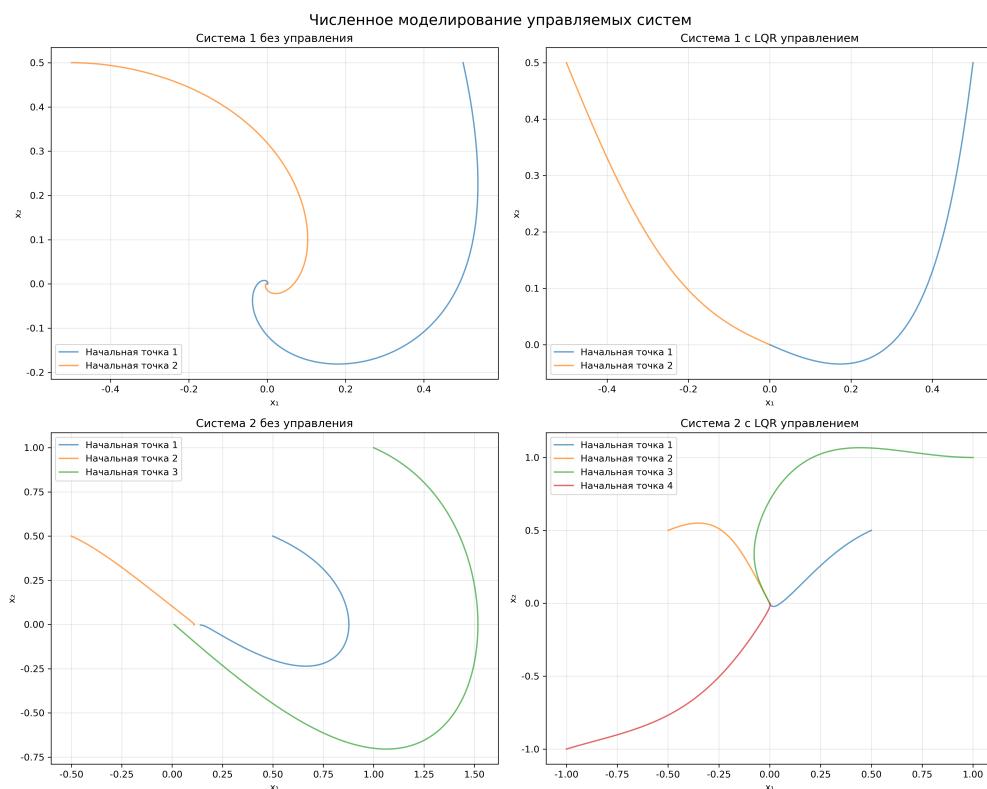


Рисунок 9 — Результаты численного моделирования управляемых систем

## Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были решены следующие задачи:

- Анализ точек равновесия:** Для всех семи систем найдены точки равновесия аналитическими и численными методами.

**2. Классификация точек равновесия:** С использованием метода линеаризации определены типы всех изолированных точек равновесия:

- Система 1: устойчивый фокус  $(0,0)$  и два седла  $(1, -1), (-1, 1)$
- Система 2: седло  $(0,0)$ , неустойчивый узел  $(0,1)$  и седло  $(1.26, -1)$
- Система 3: неустойчивый фокус  $(0,0)$
- Система 4: изолированная точка  $(0,0)$  и континуум точек на окружности
- Система 5: седло  $(0,0)$  и два устойчивых узла  $(1,1), (-1, -1)$
- Система 6: вырожденная точка  $(0,0)$  и седло  $(1,1)$
- Система 7: неустойчивый фокус  $(0.739, 0.739, -0.123)$

**3. Фазовые портреты:** Построены численные фазовые портреты для всех систем, включая 3D визуализацию для системы 7.

**4. Анализ предельных циклов:** Для систем 3 и 4 проведен анализ предельных циклов с использованием полярных координат.

**5. Синтез регуляторов:** Для двух управляемых систем синтезированы LQR регуляторы и проведено численное моделирование их работы.

### **Основные результаты:**

- Разработаны эффективные алгоритмы поиска точек равновесия, сочетающие аналитические и численные методы
- Показана эффективность LQR регуляторов для стабилизации нелинейных систем в окрестности точек равновесия
- Получены качественные и количественные характеристики динамики исследуемых систем

**Практическая значимость:** Результаты работы могут быть использованы при проектировании систем управления для стабилизации нелинейных объектов в окрестности заданных точек равновесия.

**Выводы:** Методы анализа нелинейных систем, рассмотренные в работе, позволяют эффективно исследовать динамические свойства сложных систем и синтезировать стабилизирующие регуляторы.