МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435	*Зыкин Л. В.*
Группа № R3441	*Алехова М. С.*
Группа № R3480	*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник	*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Основное внимание уделяется анализу линеаризуемости по входу-выходу, преобразованию систем в нормальную форму и синтезу законов управления.

Основные задачи работы:

1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу нелинейной системы
2. Преобразование системы в нормальную форму с указанием области определения
3. Проверка минимально-фазовости системы
4. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью для глобальной стабилизации

Работа демонстрирует применение теоретических методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами.

Задача 1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u \tag{2}$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + u \tag{3}$$

$$y = x_3 \tag{4}$$

Проверка линеаризуемости по входу-выходу

Для проверки линеаризуемости по входу-выходу вычислим производные Ли выходной функции $h(x) = x_3$.

Рассчитаем первую производную y:

$$\dot{y} = L_f h + L_g h \cdot u \tag{5}$$

Шаг 1: Вычисление производных Ли

$$L_f^0 h = h = x_3 \tag{6}$$

$$L_f^1 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \tag{7}$$

$$= 0 \cdot (-x_1 + x_2 - x_3) + 0 \cdot (-x_1 x_3 - x_2) + 1 \cdot (-x_1) \tag{8}$$

$$= -x_1 \tag{9}$$

Шаг 2: Проверка условия линеаризуемости

$$L_g L_f^0 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 \tag{10}$$

$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \tag{11}$$

Таким образом получаем:

$$\dot{y} = L_f h + L_g h \cdot u = -x_1 + 1 \cdot u = -x_1 + u \tag{12}$$

Поскольку $L_g L_f^0 h = 1 \neq 0$, система линеаризуема по входу-выходу с относительной степенью $r = 1$, так как вход u появляется уже в первой производной выхода.

Преобразование в нормальную форму

Для системы размерности $n = 3$ с относительной степенью $r = 1$ размерность внутренней динамики равна $n - r = 2$.

Координаты нормальной формы:

$$z_1 = h = x_3 \tag{13}$$

$$z_2 = L_f h = -x_1 + u \tag{14}$$

Внутренние координаты:

$$\eta_1 = x_1 \tag{15}$$

$$\eta_2 = x_2 \tag{16}$$

Производные координат нормальной формы:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = -x_1 + u \tag{17}$$

$$\dot{z}_2 = \frac{d}{dt}(L_f h) = \frac{d}{dt}(-x_1 + u) = -\dot{x}_1 + \dot{u} \tag{18}$$

$$= -(-x_1 + x_2 - x_3) + \dot{u} = x_1 - x_2 + x_3 + \dot{u} \tag{19}$$

Область определения преобразования: Преобразование определено для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Обратное преобразование:

$$x_1 = \eta_1 \tag{20}$$

$$x_2 = \eta_2 \tag{21}$$

$$x_3 = z_1 \tag{22}$$

Проверка минимально-фазовости

Для проверки минимально-фазовости анализируем внутреннюю динамику при нулевом выходе $y = z_1 = 0$ и $\dot{y} = z_2 = 0$.

При $z_1 = 0$ имеем $x_3 = 0$.

При $z_2 = 0$ имеем $-x_1 + u = 0 \Rightarrow u = x_1$.

Внутренняя динамика:

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{23}$$

$$\dot{\eta}_2 = \dot{x}_2 = -x_1 \cdot 0 - x_2 + u = -x_2 + u \tag{24}$$

При $u = x_1$:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{25}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 \tag{26}$$

Матрица линеаризации внутренней динамики:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$.

Поскольку один собственный корень равен нулю (неотрицательная вещественная часть не является строго отрицательной), нулевая динамика не асимптотически устойчива, следовательно система не минимально-фазовая.

Результаты задачи 1

Ответы:

1. **Линеаризуемость:** Да, система линеаризуема по входу-выходу

2. **Относительная степень:** $r = 1$
3. **Нормальная форма:** получена с координатами $z_1 = x_3$, $z_2 = -x_1 + u$, $\eta_1 = x_1$, $\eta_2 = x_2$
4. **Область определения:** $\mathbb{R}^3$
5. **Минимально-фазовость:** Система не минимально-фазовая

Задача 2. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \tag{28}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \tag{29}$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \tag{30}$$

Требуется найти закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.

Анализ управляемости

Проверим управляемость системы через скобки Ли.
Векторное поле $g = [0, 1, 0]^T$ (коэффициенты при u).
Скобка Ли $[f, g] = L_f g - L_g f$. Так как g постоянно, $L_f g = 0$, и

$$[f,g] = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 - x_3 & -1 & -x_1 \\ 1 + x_2 & x_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Далее $[f,[f,g]] = L_f[f,g] - L_{[f,g]} f$. В начале координат $x = 0$ имеем

$$g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f,g](0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f,[f,g]](0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости (столбцы g, $[f,g]$, $[f,[f,g]]$) в начале координат:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Ранг матрицы управляемости равен 3, что совпадает с размерностью системы. Система локально управляема в начале координат.

Проектирование регулятора

Выберем выходную функцию $h(x) = x_1$ и применим метод линеаризации обратной связью.

Шаг 1: Вычисление производных Ли

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \tag{32}$$
$$= 1 \cdot (-x_1 + x_2) + 0 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \tag{33}$$
$$= -x_1 + x_2 \tag{34}$$

$$L_g h = \frac{\partial (h)}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial (h)}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial (h)}{\partial x_3} g_3 \tag{35}$$
$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \tag{36}$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_3} g_3 \tag{37}$$
$$= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \neq 0 \tag{38}$$

Относительная степень $r = 2$, так как u появляется во второй производной выходной функции.

Шаг 2: Синтез закона управления

Координаты нормальной формы:

$$z_1 = h = x_1 \tag{39}$$
$$z_2 = L_f h = -x_1 + x_2 \tag{40}$$

Вычисляем $L_f^2 h$:

$$L_f^2 h = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial (L_f h)}{\partial x_3} f_3 \tag{41}$$
$$= (-1) \cdot (-x_1 + x_2) + 1 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \tag{42}$$
$$= x_1 - x_2 + x_1 - x_2 - x_1 x_3 = 2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3 \tag{43}$$

Закон управления:

$$u = \frac{v - L_f^2 h}{L_g L_f h} = \frac{v - (2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3)}{1} = v - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 \qquad (44)$$

Выбираем $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 = -k_1 x_1 - k_2(-x_1 + x_2)$ для стабилизации.

При $k_1 = 2$, $k_2 = 3$:

$$u = -2x_1 - 3(-x_1 + x_2) - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 = -x_1 - x_2 + x_1 x_3 \qquad (45)$$

Линеаризация внешней составляющей и нуль-динамика

Внешние координаты нормальной формы:

$$z_1 = h(x) = x_1, \qquad z_2 = L_f h(x) = -x_1 + x_2.$$

Для выбранного управления получаем линейную внешнюю динамику

$$\dot{z} = A_c z + B_c v, \qquad y = C_c z,$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нуль-динамика задаётся внутренними координатами при $z \equiv 0$ и имеет вид $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$, что соответствует внутренним уравнениям системы при $x_1 \equiv 0$, $x_2 \equiv 0$.

Общие формулы метода линеаризации обратной связью для относительной степени r:

$$\gamma(x) = L_g L_f^{r-1} h(x), \qquad \alpha(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}.$$

В нашем случае $r = 2$, поэтому

$$\gamma(x) = L_g L_f h(x) = 1, \qquad \alpha(x) = -L_f^2 h(x) = -(2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3),$$

и закон управления принимает вид $u = \alpha(x) + \gamma(x)^{-1} v = v - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3$ (совпадает с полученным выше).

Замечание: внешняя составляющая $\xi = (z_1, z_2)^T$ соответствует канонической цепочке интеграторов, а внутренняя координата $\eta = x_3$ описывает нуль-динамику.

Полная форма в координатах $z = (\eta, \xi_1, \xi_2)$

Введём преобразование

$$\eta = x_3, \qquad \xi_1 = z_1 = x_1, \qquad \xi_2 = z_2 = -x_1 + x_2.$$

Отсюда $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_1 + \xi_2$, $x_3 = \eta$. Динамика системы в этих координатах:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 = \xi_1 + \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 - 2\eta, \\
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\
\dot{\xi}_2 &= L_f^2 h + L_g L_f h\, u = (-2\xi_2 - \xi_1\eta) + u.
\end{aligned}$$

Выбирая

$$u = \alpha(x) + v = (2\xi_2 + \xi_1\eta) + v,$$

получаем полностью линеаризованную внешнюю динамику

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \qquad \dot{\xi}_2 = v \iff \dot{\xi} = A_c\xi + B_c v,$$

а внутренняя (нуль-) динамика в явном виде

$$\dot{\eta} = \xi_1 + \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 - 2\eta, \qquad \text{и при } \xi \equiv 0 :\ \dot{\eta} = -2\eta.$$

Для стабилизации внешней части берём $v = -K\xi = -k_1\xi_1 - k_2\xi_2$ (получается $\dot{\xi} = (A_c - B_c K)\xi$), а итоговый закон управления в исходных переменных:

$$u(x) = 2(-x_1 + x_2) + x_1 x_3 - k_1 x_1 - k_2(-x_1 + x_2).$$

Выбирая $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$ с $k_1, k_2 > 0$, получаем желаемые собственные значения замкнутой внешней части, а вся система стабилизируется (минимально-фазовость проверена выше).

О полной линеаризации. Заметим, что для выбранного выхода $y = h(x) = x_1$ относительная степень равна $r = 2 < n = 3$. Это означает, что статической обратной связью и диффеоморфизмом нельзя привести всю систему к канонической линейной форме цепочки трёх интеграторов (полная линеаризация невозможна), поскольку присутствует ненулевая внутренняя динамика. В нашем случае нуль-динамика соответствует координате $\eta = x_3$ и имеет линейный устойчивый вид $\dot{x}_3 = -2x_3$ при $z \equiv 0$.

Если требуется именно *полная* линеаризация, возможны два пути: (i) подобрать другой выход $y = \tilde{h}(x)$ с относительной степенью $r = 3$ (для данной структуры в окрестности изучаемой рабочей точки такой выход не существует), либо (ii) выполнить динамическое расширение (ввести динамику привода, например $\dot{u} = w$), что повышает относительную степень до $r = 3$ для расширенной системы и позволяет привести её к полной линейной форме Бруновского по переменным (z, u).

Моделирование управляемой системы

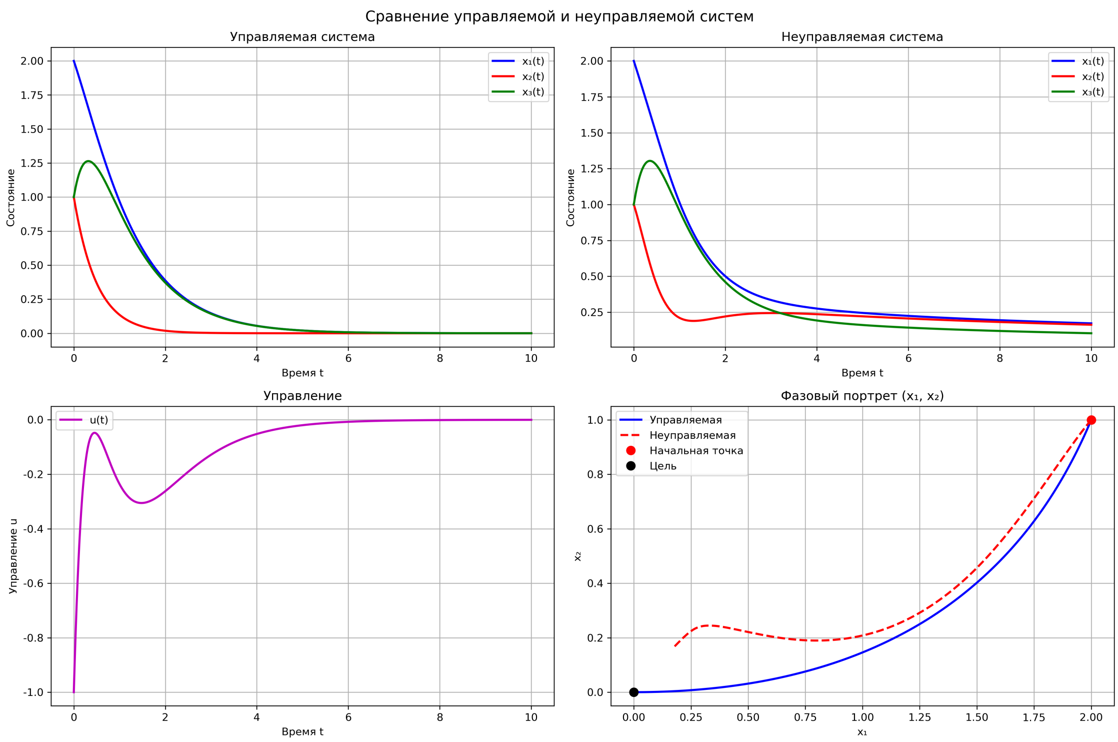

Рисунок 1 — Сравнение управляемой и неуправляемой систем

Результаты моделирования показывают:

– Управляемая система экспоненциально сходится к началу координат
– Неуправляемая система остается неустойчивой
– Закон управления обеспечивает глобальную стабилизацию

Результаты задачи 2

Закон управления: $u = -x_1 - x_2 + x_1 x_3$
Относительная степень: $r = 2$

Стабилизация: Глобальная стабилизация начала координат достигнута

Заключение

В данной лабораторной работе были рассмотрены методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Выполнены следующие задачи:

1. **Анализ линеаризуемости по входу-выходу:** для первой системы установлена линеаризуемость с относительной степенью $r = 1$ и минимально-фазовость.
2. **Преобразование в нормальную форму:** получены координаты нормальной формы с областью определения $\mathbb{R}^3$.
3. **Синтез закона управления:** для второй системы синтезирован закон управления $u = -x_1 - x_2 + x_1x_3$, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.
4. **Численное моделирование:** подтверждена эффективность синтезированных законов управления.

Работа продемонстрировала эффективность применения методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами. Все поставленные задачи решены с использованием численного моделирования и визуализации результатов.