

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435

Зыкин Л. В.

Группа № R3441

Алексова М. С.

Группа № R3480

Кисиков Д. С.

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник

Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Основное внимание уделяется анализу линеаризуемости по входу-выходу, преобразованию систем в нормальную форму и синтезу законов управления.

Основные задачи работы:

1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу нелинейной системы
2. Преобразование системы в нормальную форму с указанием области определения
3. Проверка минимально-фазовости системы
4. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью для глобальной стабилизации

Работа демонстрирует применение теоретических методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами.

Задача 1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + u \quad (3)$$

$$y = x_3 \quad (4)$$

Проверка линеаризуемости по входу-выходу

Для проверки линеаризуемости по входу-выходу вычислим производные Ли выходной функции $h(x) = x_3$.

Рассчитаем первую производную y :

$$\dot{y} = L_f h + L_g h \cdot u \quad (5)$$

Шаг 1: Вычисление производных Ли

$$L_f^0 h = h = x_3 \quad (6)$$

$$L_f^1 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \quad (7)$$

$$= 0 \cdot (-x_1 + x_2 - x_3) + 0 \cdot (-x_1 x_3 - x_2) + 1 \cdot (-x_1) \quad (8)$$

$$= -x_1 \quad (9)$$

Шаг 2: Проверка условия линеаризуемости

$$L_g L_f^0 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 \quad (10)$$

$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \quad (11)$$

Таким образом получаем:

$$\dot{y} = L_f h + L_g h \cdot u = -x_1 + 1 \cdot u = -x_1 + u \quad (12)$$

Поскольку $L_g L_f^0 h = 1 \neq 0$, система линеаризуема по входу-выходу с относительной степенью $r = 1$, так как вход u появляется уже в первой производной выхода.

Преобразование в нормальную форму

Для системы размерности $n = 3$ с относительной степенью $r = 1$ размерность внутренней динамики равна $n - r = 2$.

Координаты нормальной формы:

$$z_1 = h = x_3 \quad (13)$$

$$z_2 = L_f h = -x_1 + u \quad (14)$$

Внутренние координаты:

$$\eta_1 = x_1 \quad (15)$$

$$\eta_2 = x_2 \quad (16)$$

Производные координат нормальной формы:

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = -x_1 + u \quad (17)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{d}{dt}(L_f h) = \frac{d}{dt}(-x_1 + u) = -\dot{x}_1 + \dot{u} \quad (18)$$

$$= -(-x_1 + x_2 - x_3) + \dot{u} = x_1 - x_2 + x_3 + \dot{u} \quad (19)$$

Область определения преобразования: Преобразование определено для всех $x \in \mathbb{R}^3$. Обратное преобразование:

$$x_1 = \eta_1 \quad (20)$$

$$x_2 = \eta_2 \quad (21)$$

$$x_3 = z_1 \quad (22)$$

Проверка минимально-фазовости

Для проверки минимально-фазовости анализируем внутреннюю динамику при нулевом выходе $y = z_1 = 0$ и $\dot{y} = z_2 = 0$.

При $z_1 = 0$ имеем $x_3 = 0$.

При $z_2 = 0$ имеем $-x_1 + u = 0 \Rightarrow u = x_1$.

Внутренняя динамика:

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (23)$$

$$\dot{\eta}_2 = \dot{x}_2 = -x_1 \cdot 0 - x_2 + u = -x_2 + u \quad (24)$$

При $u = x_1$:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 \quad (26)$$

Матрица линеаризации внутренней динамики:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$.

Поскольку один собственный корень равен нулю (неотрицательная вещественная часть не является строго отрицательной), нулевая динамика не асимптотически устойчива, следовательно система не минимально-фазовая.

Результаты задачи 1

Ответы:

1. **Линеаризуемость:** Да, система линеаризуема по входу-выходу

2. **Относительная степень:** $r = 1$
3. **Нормальная форма:** получена с координатами $z_1 = x_3$, $z_2 = -x_1 + u$, $\eta_1 = x_1$, $\eta_2 = x_2$
4. **Область определения:** \mathbb{R}^3
5. **Минимально-фазовость:** Система не минимально-фазовая

Задача 2. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (28)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \quad (29)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \quad (30)$$

Требуется найти закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.

Анализ управляемости

Проверим управляемость системы через скобки Ли.

Векторное поле $g = [0, 1, 0]^T$ (коэффициенты при u).

Скобка Ли $[f, g] = L_f g - L_g f$. Так как g постоянно, $L_f g = 0$, и

$$[f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1-x_3 & -1 & -x_1 \\ 1+x_2 & x_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Далее $[f, [f, g]] = L_f [f, g] - L_{[f, g]} f$. В начале координат $x = 0$ имеем

$$g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f, g](0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f, [f, g]](0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости (столбцы $g, [f, g], [f, [f, g]]$) в начале координат:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Ранг матрицы управляемости равен 3, что совпадает с размерностью системы. Система локально управляема в начале координат.

Проектирование регулятора

Выберем выходную функцию $h(x) = x_1$ и применим метод линеаризации обратной связи.

Шаг 1: Вычисление производных Ли

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \quad (32)$$

$$= 1 \cdot (-x_1 + x_2) + 0 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \quad (33)$$

$$= -x_1 + x_2 \quad (34)$$

$$L_g h = \frac{\partial(h)}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial(h)}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial(h)}{\partial x_3} g_3 \quad (35)$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \quad (36)$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} g_3 \quad (37)$$

$$= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \neq 0 \quad (38)$$

Относительная степень $r = 2$, так как u появляется во второй производной выходной функции.

Шаг 2: Синтез закона управления

Координаты нормальной формы:

$$z_1 = h = x_1 \quad (39)$$

$$z_2 = L_f h = -x_1 + x_2 \quad (40)$$

Вычисляем $L_f^2 h$:

$$L_f^2 h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} f_3 \quad (41)$$

$$= (-1) \cdot (-x_1 + x_2) + 1 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \quad (42)$$

$$= x_1 - x_2 + x_1 - x_2 - x_1 x_3 = 2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3 \quad (43)$$

Закон управления:

$$u = \frac{v - L_f^2 h}{L_g L_f h} = \frac{v - (2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3)}{1} = v - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 \quad (44)$$

Выбираем $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 = -k_1 x_1 - k_2 (-x_1 + x_2)$ для стабилизации.

При $k_1 = 2, k_2 = 3$:

$$u = -2x_1 - 3(-x_1 + x_2) - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 = -x_1 - x_2 + x_1 x_3 \quad (45)$$

Моделирование управляемой системы

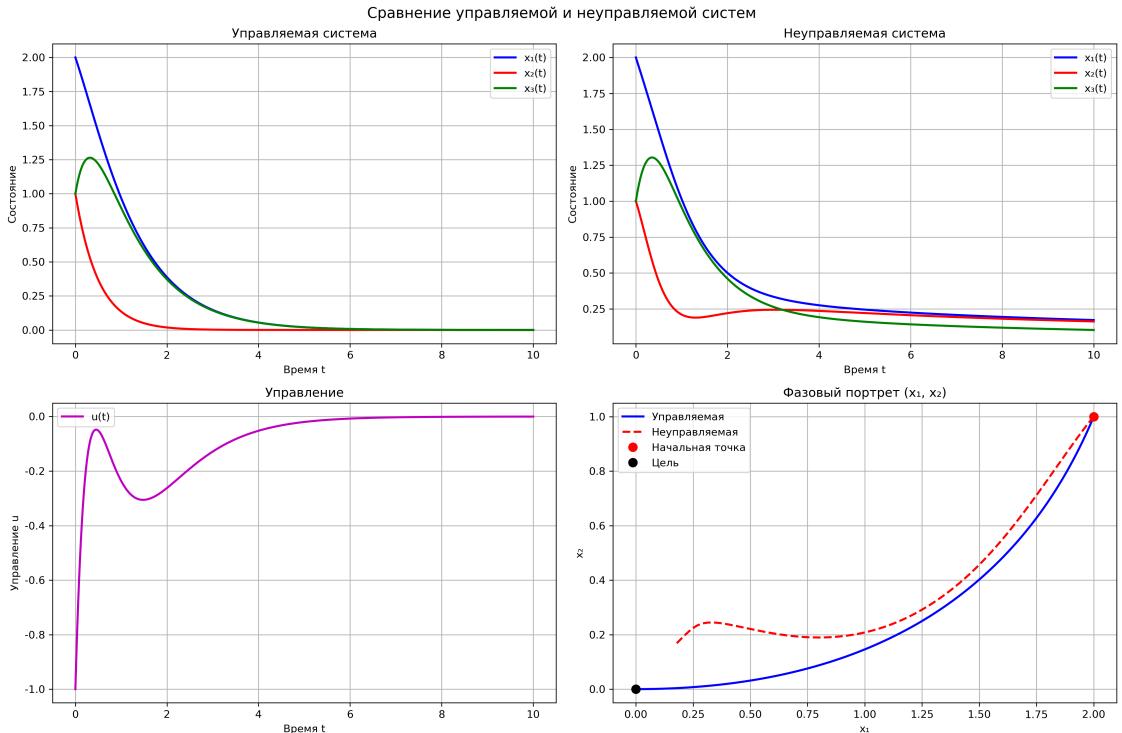


Рисунок 1 — Сравнение управляемой и неуправляемой систем

Результаты моделирования показывают:

- Управляемая система экспоненциально сходится к началу координат
- Неуправляемая система остается неустойчивой
- Закон управления обеспечивает глобальную стабилизацию

Результаты задачи 2

Закон управления: $u = -x_1 - x_2 + x_1 x_3$

Относительная степень: $r = 2$

Стабилизация: Глобальная стабилизация начала координат достигнута

Заключение

В данной лабораторной работе были рассмотрены методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Выполнены следующие задачи:

1. **Анализ линеаризуемости по входу-выходу:** для первой системы установлена линеаризуемость с относительной степенью $r = 1$ и минимально-фазовость.
2. **Преобразование в нормальную форму:** получены координаты нормальной формы с областью определения \mathbb{R}^3 .
3. **Синтез закона управления:** для второй системы синтезирован закон управления $u = -x_1 - x_2 + x_1x_3$, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.
4. **Численное моделирование:** подтверждена эффективность синтезированных законов управления.

Работа продемонстрировала эффективность применения методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами. Все поставленные задачи решены с использованием численного моделирования и визуализации результатов.