МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435	*Зыкин Л. В.*
Группа № R3441	*Алёхова М. С.*
Группа № R3480	*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник	*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы анализа устойчивости нелинейных динамических систем с использованием функций Ляпунова, а также синтез стабилизирующих регуляторов на основе линейных матричных неравенств (LMI).

1. Анализ устойчивости с использованием кандидата квадратичной функции Ляпунова

Для каждой из следующих систем используем кандидат квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x_1^2+x_2^2$ (для скалярной системы $V(x) = x^2$).

Система 1

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_1 + x_1x_2) + 2x_2(-2x_2) \\ &= -2x_1^2 + 2x_1^2x_2 - 4x_2^2 \\ &= -2x_1^2(1 - x_2) - 4x_2^2 \end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $x_2 < 1$: $\dot{V} < 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива в окрестности начала координат, но не является глобально устойчивой.

Система 2

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
&= 2x_1\left(-x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\right) + 2x_2\left(x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\right) \\
&= -2x_1x_2 - 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2 - 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\
&= -2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)
\end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $x_1^2 + x_2^2 < 1$: $\dot{V} < 0$. Следовательно, область устойчивости ограничена единичным кругом, поэтому система локально асимптотически устойчива, но не является глобально устойчивой.

Система 3

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2(1 - x_1^2) - 2x_1 \\
\dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)
\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x_1\left(x_2(1 - x_1^2) - 2x_1\right) + 2x_2\left(-(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)\right) \\
&= 2x_1x_2(1 - x_1^2) - 4x_1^2 - 2x_1x_2(1 - x_1^2) - 2x_2^2(1 - x_1^2) \\
&= -4x_1^2 - 2x_2^2(1 - x_1^2)
\end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $x_1 < 1$: $\dot{V} < 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива в окрестности начала координат, но не является глобально устойчивой.

Система 4

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2^3
\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1(-3x_1 - x_2) + 2x_2(2x_1 - x_2^3) \\ &= -6x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_2 - 2x_2^4 \\ &= -6x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^4\end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $2x_1x_2 < 6x_1^2 + 2x_2^4$: $\dot{V} < 0$. Неравенство выполняется для любых x_1 и x_1. Следовательно, система глобально асимптотически устойчива.

Система 5

Рассмотрим скалярную систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x)$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x^2$:

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = 2x(-\arctan(x)) = -2x\arctan(x)$$

Анализ устойчивости:

Так как $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, то $\dot{V} < 0$ везде, кроме 0. Следовательно, система глобально асимптотически устойчива.

2. Условия асимптотической устойчивости скалярной системы

Рассмотрим скалярную систему:

$$\dot{x} = ax^p + h(x)$$

где p — натуральное число, а $h(x)$ удовлетворяет условию $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ в некоторой окрестности точки начала координат.

Требуется определить условия, при которых система асимптотически устойчива.

Выберем функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}x^2$. Возьмем производную:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(ax^p + h(x)) = ax^{p+1} + xh(x)$$

Учитывая условие задания

$$|xh(x)| \leq |x|\dot{k}|x|^{p+1} = k|x|^{p+2}$$

получим

$$\dot{V} = ax^{p+1} + xh(x) \leq ax^{p+1} + k|x|^{p+2}$$
$|xh(x)| \leq k|x|^{p+2} \ll |ax^{p+1}|$ – в малой окрестности начала координат

Случай 1: p **— нечетное число**

При нечетном p имеем $x^{p+1} \geq 0$ для всех x.

- Если $a < 0$, то $ax^{p+1} \leq 0$ для всех x. Тогда $\dot{V} < 0 \Rightarrow$ система асимптотически устойчива.
- Если $a > 0$, то $ax^{p+1} \geq 0$ для всех x. Тогда $\dot{V} > 0 \Rightarrow$ система неустойчива.

Случай 2: p **— четное число**

При четном p имеем x^{p+1} имеет тот же знак, что и x.

- Если $a < 0$, то $ax^{p+1} < 0$ при $x > 0$ и $ax^{p+1} > 0$ при $x < 0$. Тогда $\dot{V} < 0$ при $x > 0$ и $\dot{V} > 0$ при $x < 0 \Rightarrow$ система неустойчива.
- Если $a > 0$, то $ax^{p+1} > 0$ при $x > 0$ и $ax^{p+1} < 0$ при $x < 0$. Тогда $\dot{V} > 0$ при $x > 0$ и $\dot{V} < 0$ при $x < 0 \Rightarrow$ система неустойчива.

Случай 3: $a = 0$

При $a = 0$ имеем $\dot{x} = h(x)$. Таким образом, устойчивость системы зависит от конкретного вида $h(x)$.

Условие асимптотической устойчивости:

- $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ - в малой окрестности начала координат;
- p - нечетное число;
- $a < 0$.

Задача 3. Синтез линейного регулятора через LMI

На основе применения LMI построим линейный регулятор, стабилизирующий систему экспоненциально со степенью 2:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u$$

Постановка задачи

Требуется найти матрицу обратной связи K такую, что замкнутая система $\dot{x} = (A + BK)x$ имеет экспоненциальную устойчивость степени α=2, то есть:

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\alpha t}\|x(0)\| \tag{1}$$

для некоторого $c > 0$ и всех $t \geq 0$.

Матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Анализ управляемости

Матрица управляемости:

$$U = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$rank(U) = 2$$

Ранг матрицы управляемости равен порядку системы (n=2), следовательно система полностью управляема.

Собственные значения разомкнутой системы $\lambda = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.414$, что означает неустойчивость.

Синтез регулятора

Синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства Ляпунова:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0 \tag{2}$$

$$K = YP^{-1} \tag{3}$$

Получим матрицу регулятора:

$$K = \begin{pmatrix} -7.2383 & -4 \end{pmatrix}$$

Определим собственные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$:

$$\sigma(A + BK) = \begin{pmatrix} -2 + 1.1128i \\ -2 - 1.1128i \end{pmatrix}$$

Как видно, регулятор обеспечивает требуемую степень устойчивость.

Выполним моделирование замкнутой системы и построим графики управления $u(t)$ и вектора состояния $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

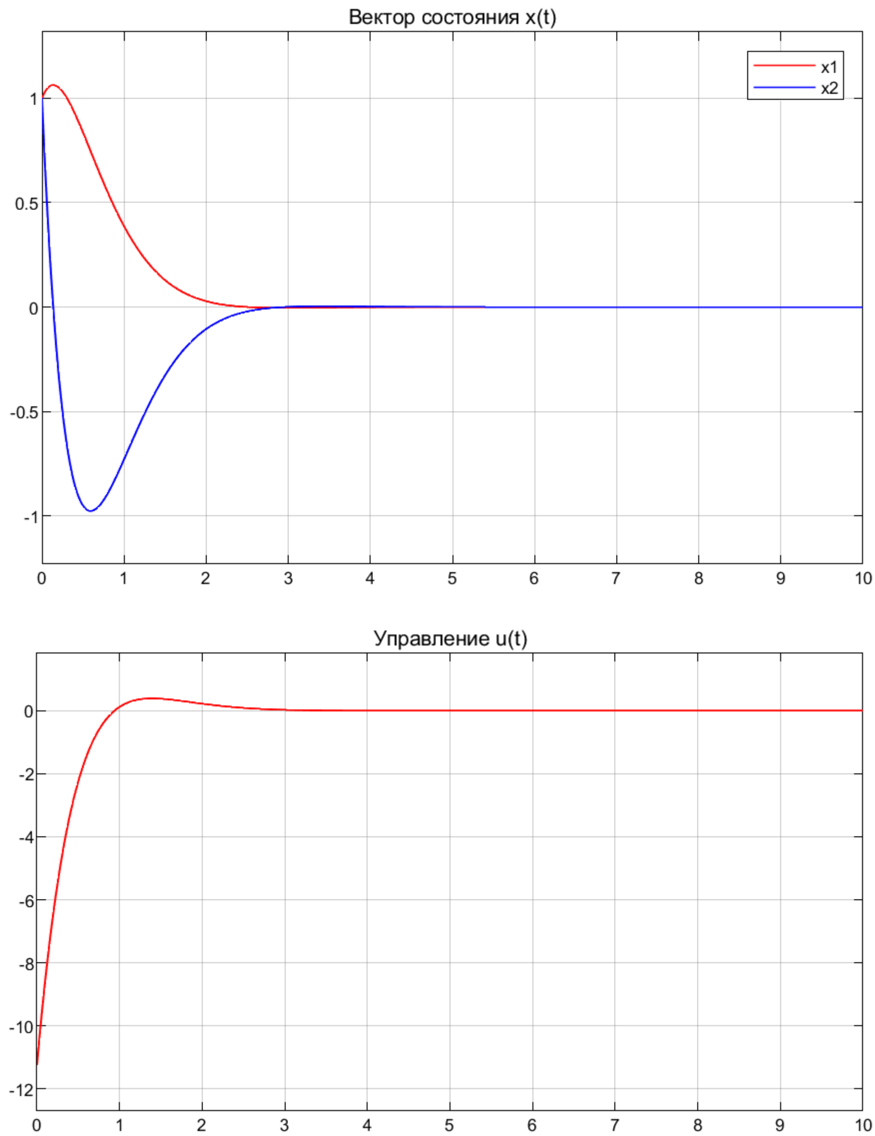

Рисунок 1 — Моделирование замкнутой системы

Задача 4. Ограничивающее условие на параметр γ

Найдем ограничивающее условие на параметр γ, при котором система является асимптотически устойчивой со степенью 1. Закон управления взят из предыдущего задания.

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u$$

где $u = Kx$ и $K = \begin{pmatrix} -7.2383 & -4 \end{pmatrix}$ (из задачи 3).

С учетом закона управления получаем:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + (-7.2383x_1 - 4x_2) = -5.2383x_1 - 4x_2$$

Линеаризуем систему в точке равновесия (0,0):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \gamma \cos(0) \\ -5.2383 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \gamma \\ -5.2383 & -4 \end{pmatrix}$$

Характеристический полином линеаризованной системы:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -(1+\gamma) \\ 5.2383 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 4) - 5.2383 \cdot (-(1+\gamma)) \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 5.2383(1+\gamma) \end{aligned}$$

Для асимптотической устойчивости степени 1 требуется, чтобы все собственные значения имели вещественную часть меньше -1.

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20.9532(1+\gamma)}}{2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{-4.9532 - 20.9532\gamma}}{2} < -1 \\ -4 \pm \sqrt{-4.9532 - 20.9532\gamma} &< -2 \\ \sqrt{-4.9532 - 20.9532\gamma} &< 2 \\ -4.9532 - 20.9532\gamma &< 4 \\ -20.9532\gamma &< 8.9532 \\ \gamma &< -\frac{8.9532}{20.9532} \\ \gamma &< -0.4273 \end{aligned}$$

Таким образом, при $\gamma < -0.4273$ с выбранным регулятором система является асимптотически устойчивой со степенью 1.

Задача 5. Анализ системы с управлением $\mathbf{u} = \mathbf{Kx}$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2 - 0.5x_1^3 \\ \dot{x}_2 & = u \end{cases}$$

где $u = Kx$ — линейное управление по состоянию.

1. Синтезируем линейный регулятор с обратной связью по состоянию, чтобы глобально стабилизировать начало координат. Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = x_1\dot{x_1} + x_2\dot{x_2} = \\ = x_1(x_2 - 0.5x_1^3) + x_2(k_1x_1 + k_2x_2) = \\ = (1 + k_1)x_1x_2 + k_2x_2^2 - 0.5x_1^4 \end{aligned}$$

Таким образом, глобальная асимптотическая устойчивость достигается при $k_1 = -1$ и $k_2 \leq 0$.

Пусть $K = [-1 - 1]$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. Исследуем устойчивость по входу к состоянию (ISS) при наличии шумов измерений.

Система называется ISS, если существуют функции $\beta \in \mathcal{KL}$ и $\gamma \in \mathcal{K}$ такие, что для любых начальных условий $x(0)$ и любого ограниченного входа $u(t)$ выполняется:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma\left(\sup_{\tau\in[0,t]} \|u(\tau)\|\right)$$

для всех $t \geq 0$.

Пусть измерения зашумлены. Тогда

$$u = K(x + \delta) = Kx + K\delta = (-x_1 - x_2) + (-\delta_1 - \delta_2)$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - \delta_1 - \delta_2 \end{cases}$$

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x) = -0.5x_1^4 - x_2^2 - x_2(\delta_1 + \delta_2)$$

Оценим смешанный член с помощью неравенства

$$ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b_2^2\right)$$
$$-x_2(\delta_1 + \delta_2) \leq \frac{1}{2}\left(x_2^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2\right)$$

Получим

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)^2$$

Используя неравенство $(\delta_1 + \delta_2)^2 \leq 2(\delta_1^2 + \delta_2^2) = 2\|\delta\|^2$, получим

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{1}{2}x_2^2 + \|\delta\|^2$$

Следовательно, $\dot{V} < 0$ при $\frac{1}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 > \|\delta\|^2$.

3. Исследуем устойчивость по входу к состоянию при наличии аддитивных возмущений.

При наличии аддитивных возмущений система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 + d_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + d_2 \end{cases}$$

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x) = -0.5x_1^4 - x_2^2 + x_1 d_1 + x_2 d_2$$

Тогда

$$\dot{V}(x) \leq -0.5x_1^4 - x_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|d\|^2$$

Следовательно, $\dot{V} < 0$ при $0.5x_1^4 + x_2^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 > \frac{1}{2}\|d\|^2$.

Подводя итог, при выбранном регуляторе замкнутая система глоабльно асимптотически устойчива без возмущений и обладает ISS относительно шумов измерений и аддитивных возмущений.

Выполним моделирование системы без шумов и возмущений, с наличием шумов и с наличием аддитивных возмущений.

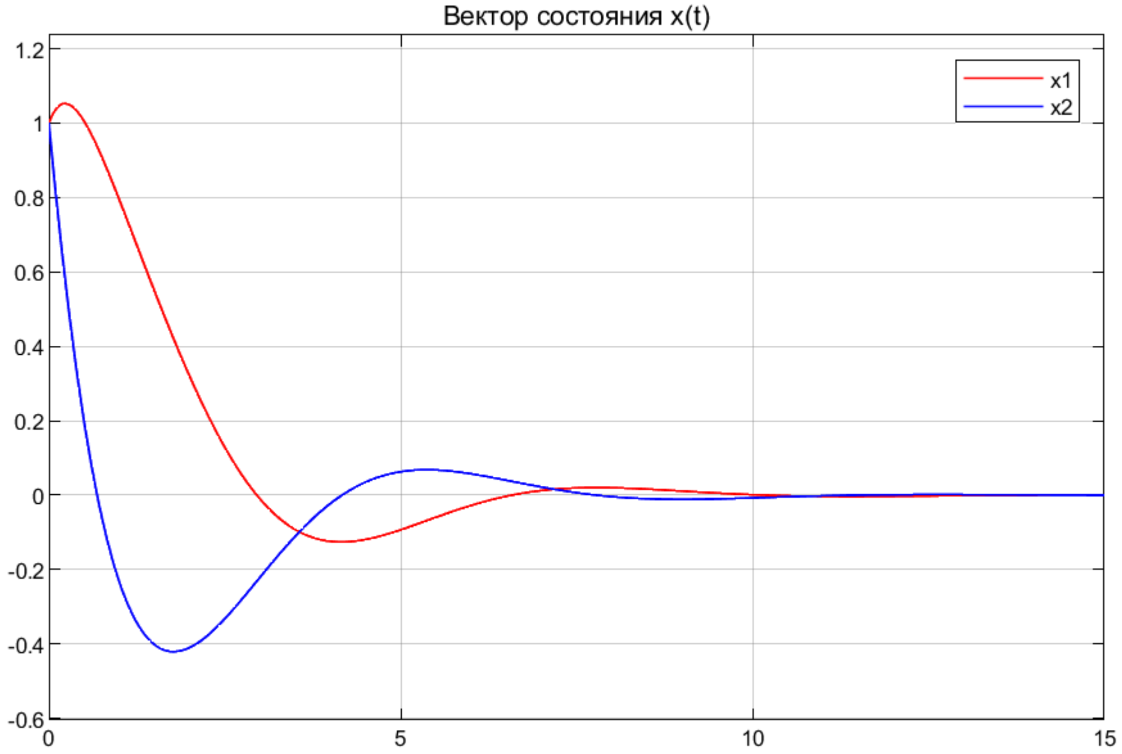

Рисунок 2 — Моделирование замкнутой системы

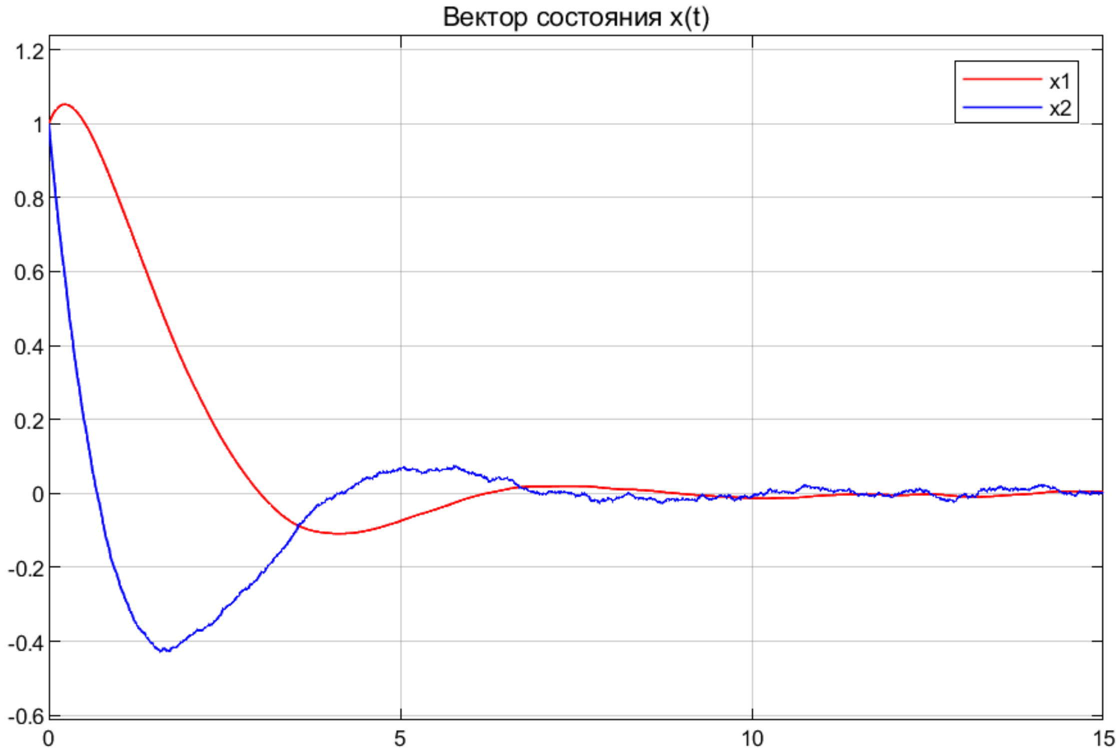

Рисунок 3 — Моделирование замкнутой системы

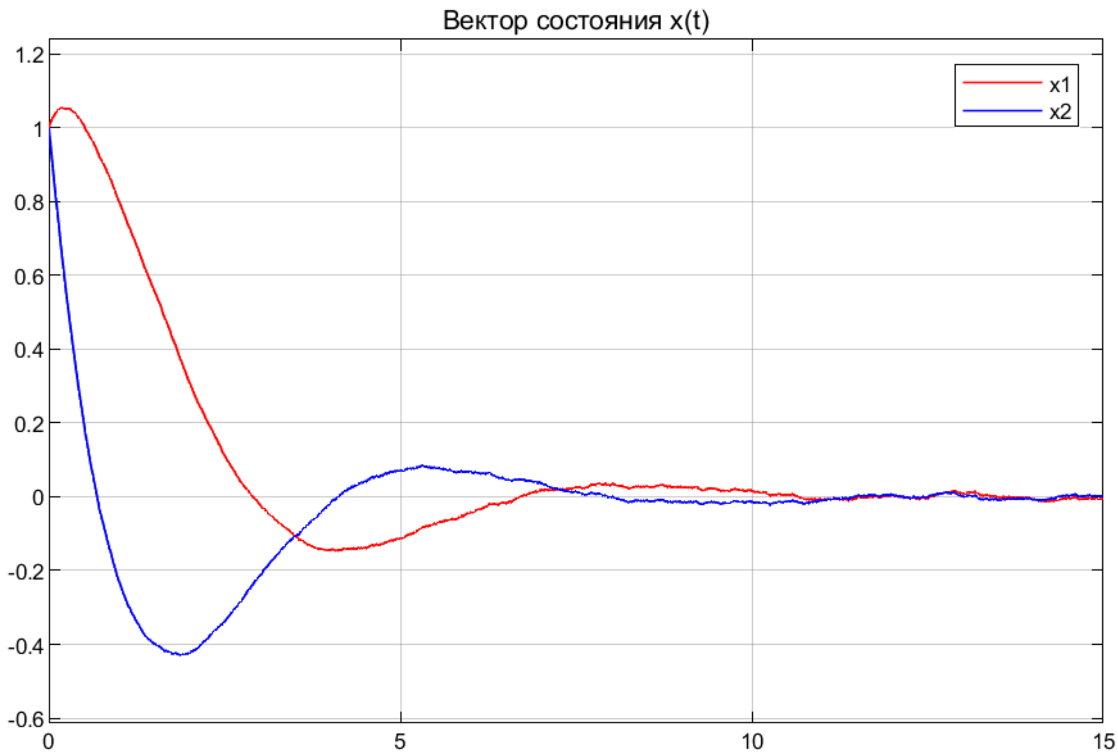

Рисунок 4 — Моделирование замкнутой системы

Задача 6. Анализ устойчивости по отношению к возмущению

Исследуем устойчивость по входу к состоянию системы по отношению к возмущению d.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + d, \end{cases}$$

где σ - локально липшицева, $\sigma(0) = 0$, $y\sigma(y) \leq 0$.

Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

Производная функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \\ &= x_1(-2x_1 + x_2) + x_2(-x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + d) = \\ &= -2x_1^2 - x_2\sigma(x_1) - x_2^2 + x_2 d \end{aligned}$$

Оценим неопредленные члены:

$$-x_2\sigma(x_1) \leq L|x_1||x_2| \leq \frac{L}{2}x_1^2 + \frac{L}{2}x_2^2$$

$$x_2 d \leq \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2$$

Получим:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -2x_1^2 - x_2^2 + \frac{L}{2}x_1^2 + \frac{L}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}d^2 = \\ &= \left(-2 + \frac{L}{2}\right)x_1^2 + \left(\frac{L}{2} - \frac{1}{2}\right)x_2^2 + \frac{1}{2}d^2 \end{aligned}$$

Для отрицательности квадратичной формы по x требуется:

$$-2 + \frac{L}{2} < 0, \quad -\frac{1}{2} + \frac{L}{2} < 0$$

При $L < 1$ существуют $a_1, a_2 > 0$ такие, что

$$-2 + \frac{L}{2} \leq a_1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{L}{2} \leq a_2$$

Пусть $a = min(a_1, a_2) > 0$, тогда

$$\dot{V}(x) \leq -a(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}d^2$$

Учитывая выбранную функцию Ляпунова:

$$\dot{V}(x) \leq -2aV + \frac{1}{2}d^2$$

Таким образом, система ISS относительно d при $\dot{V}(x) \leq -\alpha V + \gamma(d^2)$, где $\alpha = 2a > 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $L < 1$.