Задание 2

1. Для каждой из следующих систем используйте кандидат квадратичной функции Ляпунова, чтобы показать, что начало координат асимптотически устойчиво:

1) $\dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_2$

2) $\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$

$\dot{x}_2 = x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$

3) $\dot{x}_1 = x_2(1 - x_1^2) - 2x_1$

$\dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)$

4) $\dot{x}_1 = -3x_1 - x_2$

$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2^3$

5) $\dot{x} = -arctg(x)$

В каком из случаев система глобально устойчива в начале координат?

2. Рассмотрим скалярную систему $\dot{x} = a x^p + h(x)$, где p — натуральное число, а $h(x)$ удовлетворяет условию $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ в некоторой окрестности точки начала координат. При каких условиях система асимптотически устойчива?
3. На основе применения LMI построить линейный регулятор, стабилизирующий систему экспоненциально со степенью 2:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u$$

4. Найти ограничивающее условие на параметр γ, при котором система является асимптотически устойчивой со степенью 1. Закон управления взять из предыдущего задания.

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u.$$

5. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3$$
$$\dot{x}_2 = u$$
$$u = Kx$$

Весь вектор состояния $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ измерим.

1) Синтезируйте линейный регулятор с обратной связью по состоянию, чтобы глобально стабилизировать начало координат.
2) Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии шумов измерений.
3) Исследуйте устойчивость по входу к состоянию при наличии аддитивных возмущений.

6. Исследуйте устойчивость по входу к состоянию системы по отношению к возмущению d

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - \sigma(x_1) - x_2 + d$$

где σ – локально липшицева, $\sigma(0) = 0$, $y\sigma(y) \geq 0$.