

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Дисциплина "Нелинейные системы управления"

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №1

Студенты:

Группа № R3435

Зыкин Л. В.

Группа № R3441

Алёхова М. С.

Группа № R3480

Кисиков Д. С.

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник

Зименко К. А.

Санкт-Петербург, 2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы анализа нелинейных систем управления. Основными задачами являются:

1. Поиск точек равновесия нелинейных систем
2. Определение типа точек равновесия методом линеаризации
3. Анализ устойчивости предельного цикла (только для системы 4)
4. Синтез стабилизирующих регуляторов

Теоретические основы

Точки равновесия

Точкой равновесия нелинейной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ называется такое состояние \mathbf{x}^* , при котором $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Для анализа устойчивости точки равновесия используется метод линеаризации. Матрица Якоби системы вычисляется как:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

Тип точки равновесия определяется собственными значениями матрицы Якоби:

- $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$ устойчивый узел
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$ устойчивый фокус
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$ неустойчивый узел
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$ неустойчивый фокус
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0, \operatorname{Im}(\lambda_i) \neq 0 \Rightarrow$ центр
- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \Rightarrow$ седло

Предельные циклы

Предельным циклом называется изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве. Для анализа предельных циклов часто используется переход к полярным координатам.

Стабилизация систем

Для стабилизации нелинейных систем в окрестности точки равновесия применяются методы синтеза регуляторов, в частности, LQR (Linear-Quadratic Regulator) метод.

LQR регулятор минимизирует функционал:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

где Q и R — матрицы весов.

Решение задачи LQR сводится к решению алгебраического уравнения Риккати:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Матрица обратной связи вычисляется как:

$$K = R^{-1}B^T P$$

Система 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (2)$$

Точки равновесия:

$$-x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0 \quad (3)$$

$$-x_1 - x_2 = 0 \quad (4)$$

Из второго уравнения: $x_2 = -x_1$. Подставляя в первое:

$$-x_1 + 2x_1^3 - x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1^3 - 2x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1(x_1^2 - 1) = 0$$

Решения:

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ — точка $(0, 0)$
- $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$ — точка $(1, -1)$
- $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$ — точка $(-1, 1)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1 \pm i$ — устойчивый фокус
- $(1, -1)$: $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4.83$, $\lambda_2 = -0.83$ — седло
- $(-1, 1)$: $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4.83$, $\lambda_2 = -0.83$ — седло

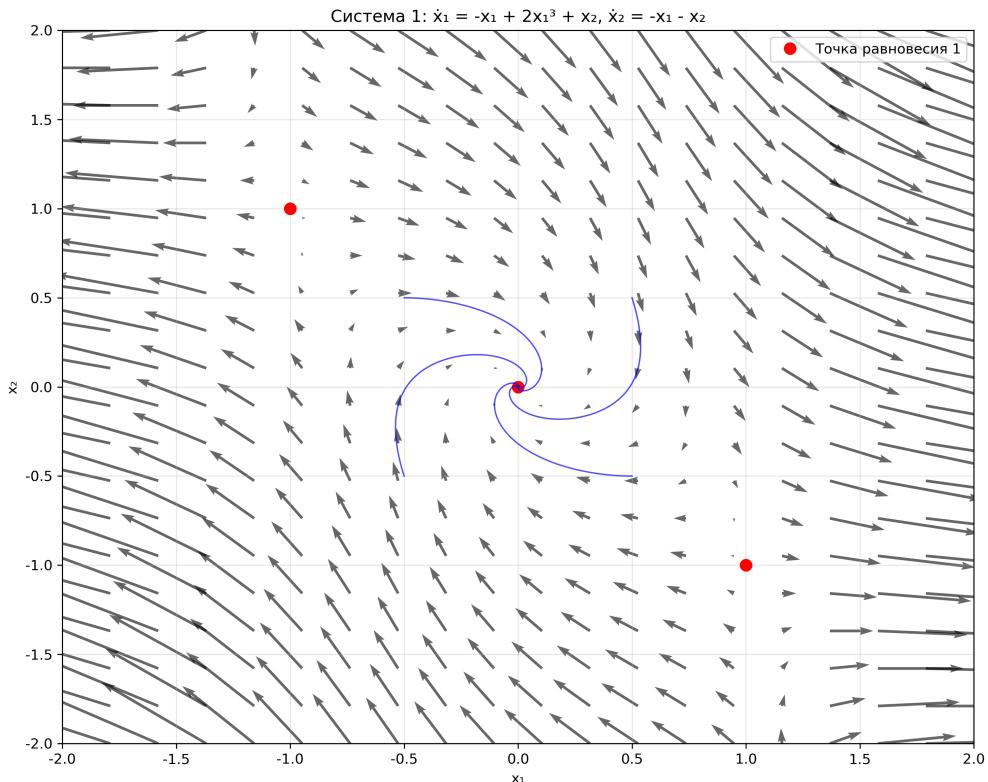


Рисунок 1 — Фазовый портрет системы 1

Система 2

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \quad (6)$$

Точки равновесия:

$$x_1(1 + x_2) = 0 \quad (7)$$

$$-x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1^3 = 0 \quad (8)$$

Случай 1: $x_1 = 0$. Из второго уравнения: $-x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0$

- $(0, 0)$
- $(0, 1)$

Случай 2: $x_2 = -1$. Из второго уравнения: $-(-1) + (-1)^2 + x_1(-1) - x_1^3 = 0 \Rightarrow 2 - x_1 - x_1^3 = 0$

- $(1, -1)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ -3x_1^2 + x_2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ — седло
- $(0, 1)$: $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ — неустойчивый узел
- $(1, -1)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ — устойчивый фокус

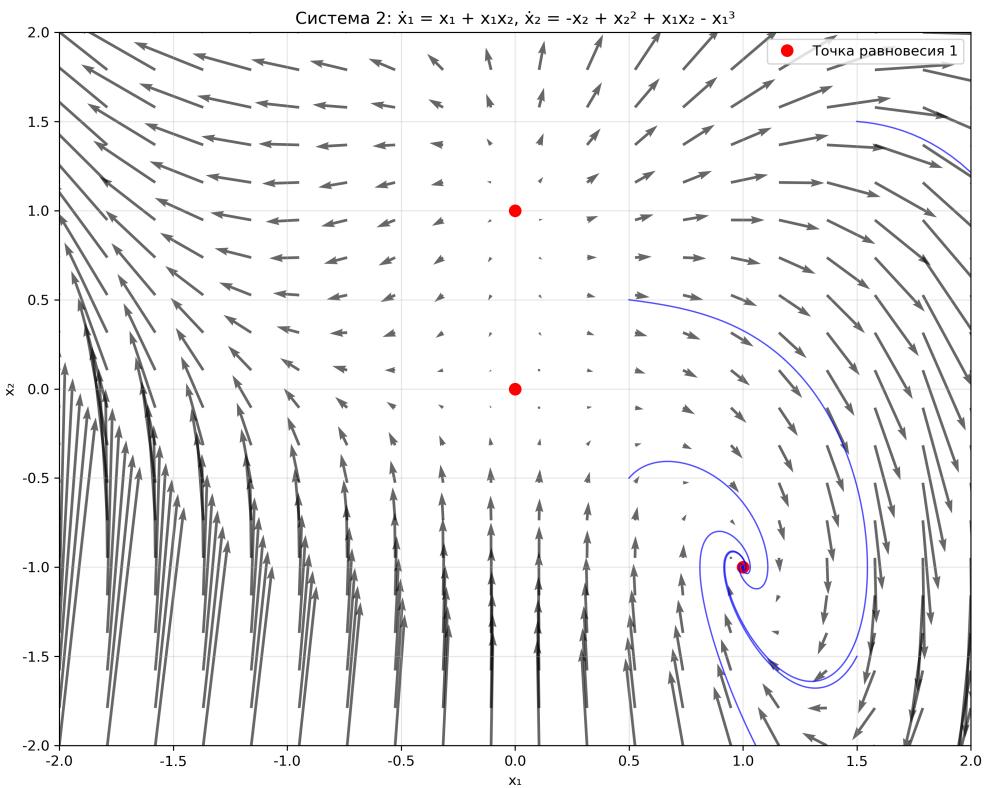


Рисунок 2 — Фазовый портрет системы 2

Система 3

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (9)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \quad (10)$$

Точки равновесия:

$$x_2 = 0 \quad (11)$$

$$-x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) = 0 \quad (12)$$

При $x_2 = 0$: $-x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Единственная точка равновесия: $(0, 0)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + x_2(-2x_1 + 0.4x_1^3) & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{pmatrix}$$

$$\text{В точке } (0, 0): J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения: $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ — неустойчивый фокус

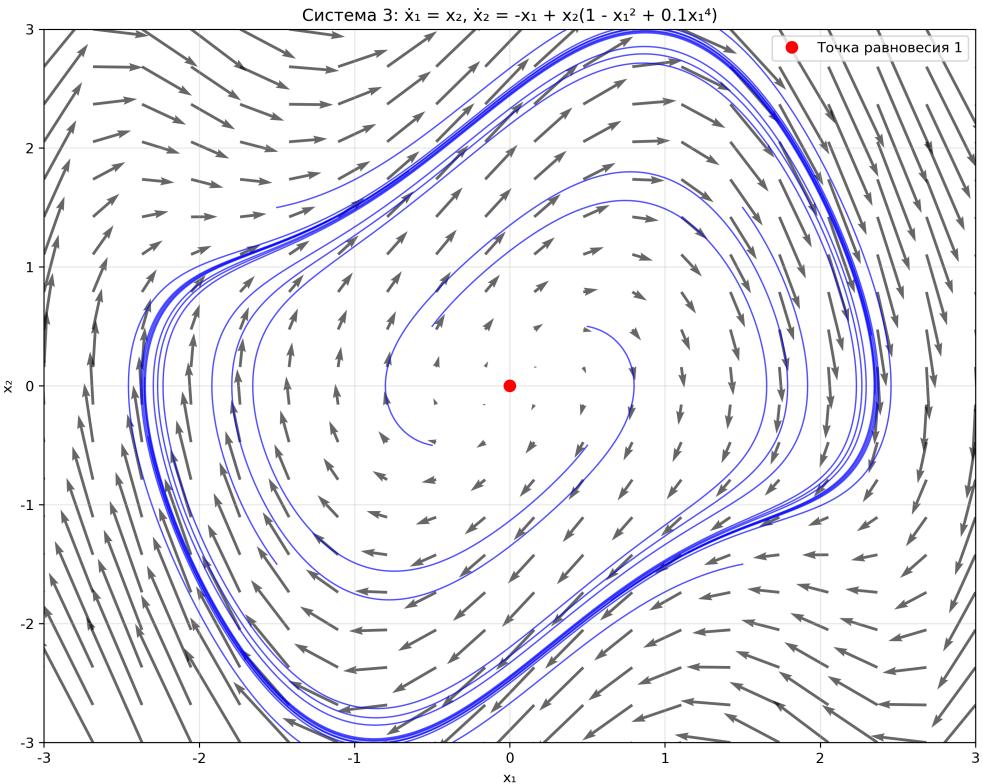


Рисунок 3 — Фазовый портрет системы 3

Система 4

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (13)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (14)$$

Точки равновесия:

$$(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (15)$$

$$(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (16)$$

Случай 1: $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$ (окружность)

Случай 2: $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 & -2x_1x_2 - 1 + x_1^2 + 3x_2^2 \\ 1 - 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 & -2x_1x_2 + 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Анализ точек равновесия:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ — неустойчивый фокус
- Все точки на окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$ — континуум точек равновесия

Перейдем к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (17)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (18)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (19)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (20)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (21)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (22)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (23)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (24)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (25)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (26)$$

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу.

При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу.

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

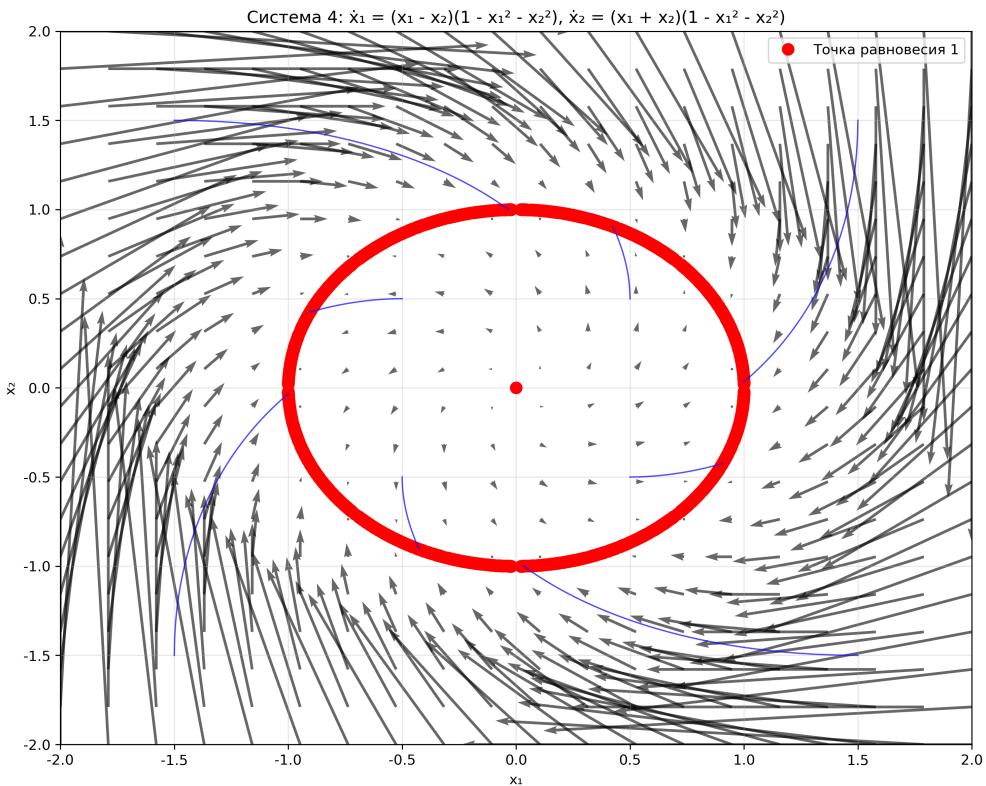


Рисунок 4 — Фазовый портрет системы 4

Система 5

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \quad (27)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \quad (28)$$

Точки равновесия:

$$-x_1^3 + x_2 = 0 \quad (29)$$

$$x_1 - x_2^3 = 0 \quad (30)$$

Из первого уравнения: $x_2 = x_1^3$. Подставляя во второе:

$$x_1 - (x_1^3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_1^9 = 0 \Rightarrow x_1(1 - x_1^8) = 0$$

Решения:

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ — точка $(0, 0)$
- $x_1^8 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 \Rightarrow x_2 = \pm 1$

Точки равновесия: $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \pm 1$ — седло
- $(1, 1)$: $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -2$ — устойчивый узел
- $(-1, -1)$: $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -4$ — устойчивый узел

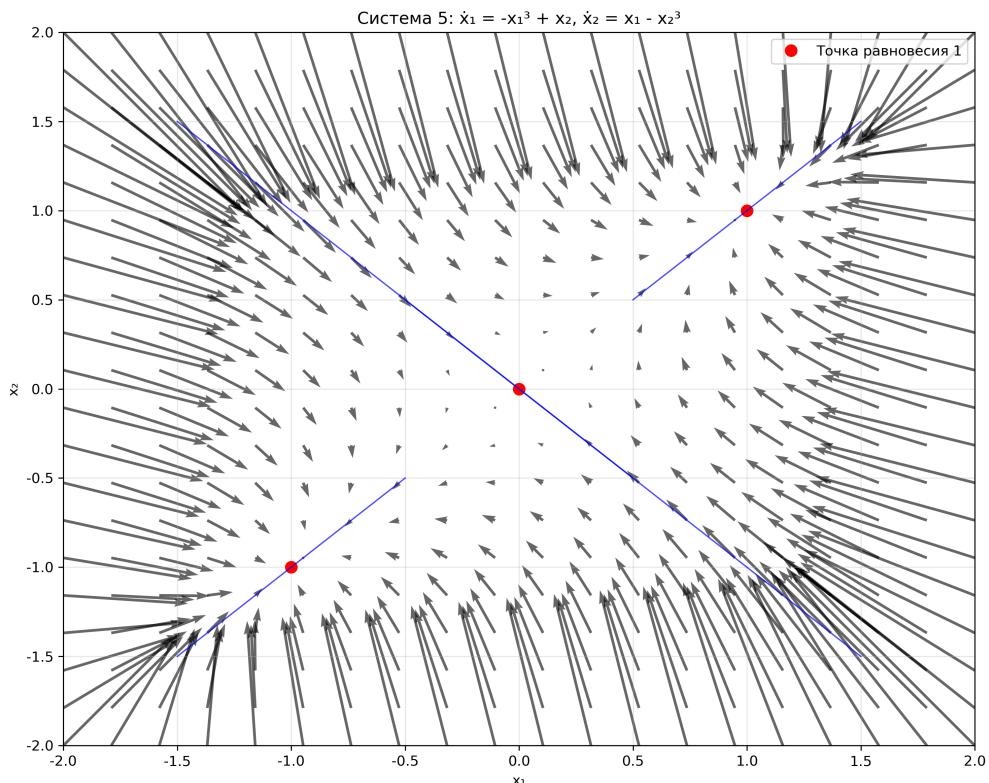


Рисунок 5 — Фазовый портрет системы 5

Система 6

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (31)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \quad (32)$$

Точки равновесия:

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (33)$$

$$x_2^3(x_1 - 1) = 0 \quad (34)$$

Случай 1: $x_2 = 0$. Из первого уравнения: $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Случай 2: $x_1 = 1$. Из первого уравнения: $-1 + x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

Точки равновесия: $(0, 0), (1, 1)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_2^2(x_1 - 1) \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — вырожденный случай
- $(1, 1)$: $J = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$ — седло

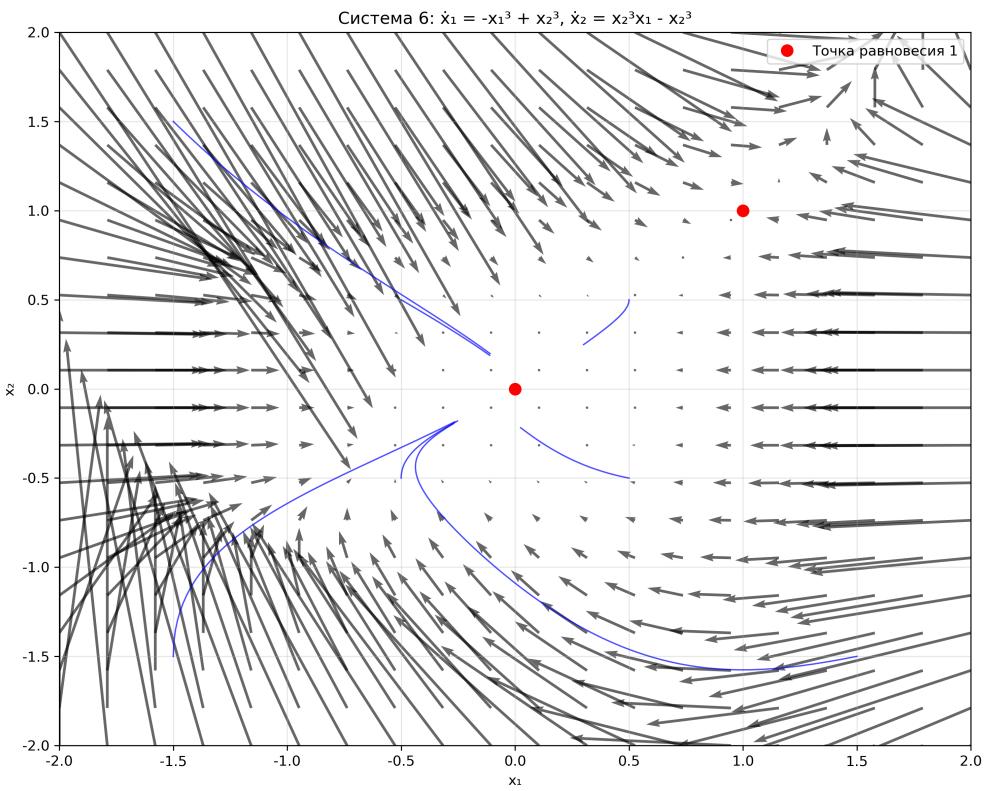


Рисунок 6 — Фазовый портрет системы 6

Система 7

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (35)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3 \quad (36)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \quad (37)$$

Точки равновесия:

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (38)$$

$$x_1 + 3x_3 - x_2^3 = 0 \quad (39)$$

$$x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 = 0 \quad (40)$$

Из первого уравнения: $x_2^3 = x_1^3 \Rightarrow x_2 = x_1$

Подставляя во второе: $x_1 + 3x_3 - x_1^3 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{x_1^3 - x_1}{3}$

Подставляя в третье: $x_1 \cdot \frac{x_1^3 - x_1}{3} - x_1^3 - \sin x_1 = 0$

Упрощая: $\frac{x_1^4 - x_1^2}{3} - x_1^3 - \sin x_1 = 0$

Получим: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos x_1 & -3x_2^2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Анализ точки равновесия: В точке $(0, 0, 0)$ собственные значения: $\lambda_{1,2,3} = 0$ — неустойчивый фокус

Синтез стабилизирующих регуляторов

Управляемая система 1

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin u_1 \quad (41)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3 \sin u_2 \quad (42)$$

Выбор целевой точки и линеаризация по отклонениям

Стабилизуем систему к точке вида $(1, x^*)$, где $x^* \in [-2, 0]$ (это условие необходимо и достаточно для существования стационарных входов, см. ниже) и $x^* \neq -1$. Из условий равновесия $f(1, x^*, u_{ss}) = 0$ получаем

$$\sin u_{1,ss} = -(1 + x^*), \quad \sin u_{2,ss} = \frac{1 + x^*}{3}.$$

Для конкретики берём $x^* = -1.5$, тогда $u_{1,ss} = \arcsin(0.5) = \pi/6 \approx 0.524$, $u_{2,ss} = \arcsin(-0.5) = -\pi/6 \approx -0.167$. Линеаризуем систему по отклонениям $\tilde{x} = x - x^*$ и $v = u - u_{ss}$.

Матрицы Якоби в точке (x^*, u_{ss}) имеют вид:

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, u_{ss})} = \begin{pmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{x^*} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ B &= \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x^*, u_{ss})} = \begin{pmatrix} \cos u_{1,ss} & 0 \\ 0 & 3 \cos u_{2,ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & 0 \\ 0 & 3 \cos(-\pi/6) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.8660 & 0 \\ 0 & 2.9580 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Синтез LQR

Выберем $Q = 10I$, $R = I$ и решим алгебраическое уравнение Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad K = R^{-1}B^T P.$$

Получаем матрицу обратной связи (численно)

$$K = \begin{pmatrix} 11.7429 & 0.7194 \\ 2.4573 & 3.0173 \end{pmatrix}.$$

Спектр замкнутой линейной системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-5.9547, -9.1401\}.$$

Цель $(1, -1.5)$ локально экспоненциально устойчива; моделирование подтверждает сходимость траекторий к окрестности этой точки.

Управляемая система 2

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 + u \tag{43}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin u \tag{44}$$

Поиск точек равновесия

При $u = 0$ система принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 \tag{45}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 \tag{46}$$

Точки равновесия находятся из решения:

$$x_2(1 + x_1) = 0 \tag{47}$$

$$-x_2 + x_2^2 - x_1^3 = 0 \tag{48}$$

Случай 1: $x_2 = 0$. Из второго уравнения: $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Случай 2: $x_1 = -1$. Из второго уравнения: $-x_2 + x_2^2 - (-1)^3 = 0 \Rightarrow x_2^2 - x_2 + 1 = 0$. Дискриминант: $D = 1 - 4 = -3 < 0$ — нет действительных решений.

Точка равновесия: $(0, 0)$

Выбор точки равновесия и линеаризация

Выберем точку равновесия $(x_1^*, x_2^*) = (0,0)$ и установим стационарный вход $u_{ss} = 0$.

Матрицы линейной модели:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для $Q = 10I$, $R = 1$ получаем

$$K = \begin{pmatrix} 3.1623 & 2.1014 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A - BK) = \{-1.3529, -7.0121\}.$$

Численное моделирование

Результаты численного моделирования показывают эффективность синтезированных LQR регуляторов: для системы 1 траектории сходятся к точке $(1, -1.5)$, для системы 2 — к $(0,0)$.

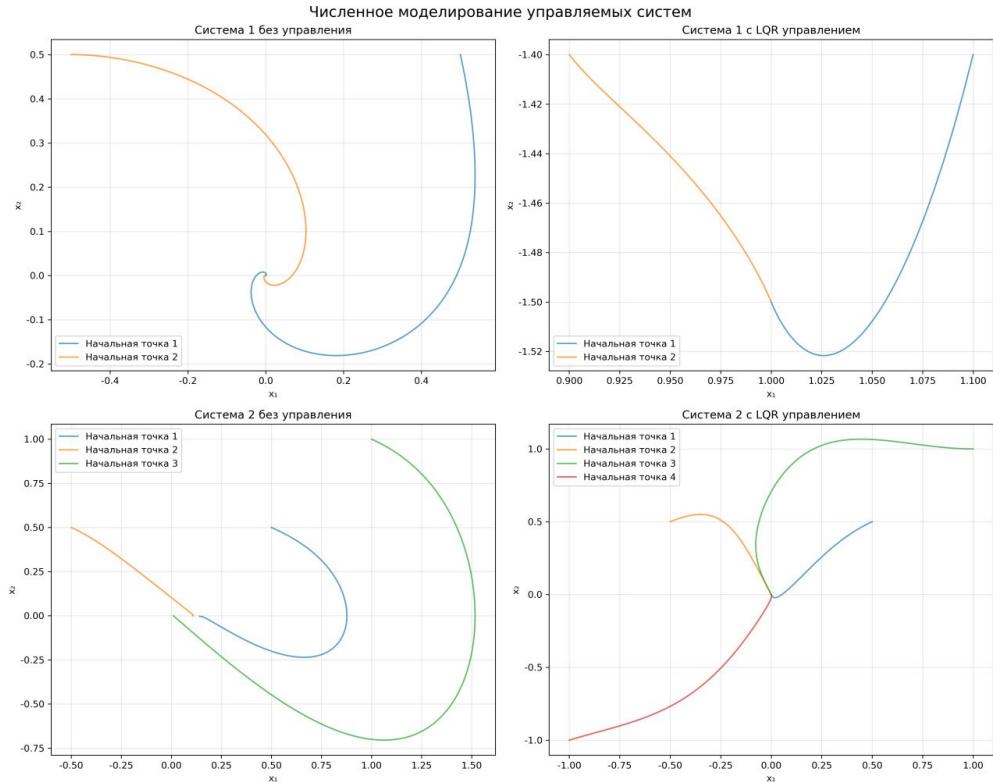


Рисунок 7 — Результаты численного моделирования управляемых систем

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были решены следующие задачи:

- **Анализ точек равновесия:** Для всех семи систем найдены точки равновесия аналитическими и численными методами;
- **Классификация точек равновесия:** С использованием метода линеаризации определены типы всех изолированных точек равновесия;
- **Фазовые портреты:** Построены численные фазовые портреты;
- **Анализ предельных циклов:** Для систем 4 проведен анализ предельных циклов с использованием полярных координат;
- **Синтез регуляторов:** Для двух управляемых систем синтезированы LQR регуляторы и проведено численное моделирование их работы.

Таким образом, методы анализа нелинейных систем, рассмотренные в работе, позволяют эффективно исследовать динамические свойства сложных систем и синтезировать стабилизирующие регуляторы.