

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2  
по дисциплине  
«Нелинейные системы»

Студенты:

*Группа № R3435*

*Группа № R3441*

*Группа № R3480*

*Зыкин Л. В.*

*Алёхова М. С.*

*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

*доцент, ведущий научный сотрудник*

*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург  
2025

## Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы анализа устойчивости нелинейных динамических систем с использованием функций Ляпунова, а также синтез стабилизирующих регуляторов на основе линейных матричных неравенств (LMI).

### 1. Анализ устойчивости с использованием кандидата квадратичной функции Ляпунова

Для каждой из следующих систем используем кандидат квадратичной функции Ляпунова  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  (для скалярной системы  $V(x) = x^2$ ).

#### Система 1

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_1 + x_1x_2) + 2x_2(-2x_2) \\ &= -2x_1^2 + 2x_1^2x_2 - 4x_2^2 \\ &= -2x_1^2(1 - x_2) - 4x_2^2\end{aligned}$$

#### Анализ устойчивости:

При  $x_2 < 1$ :  $\dot{V} < 0$ . Следовательно, система асимптотически устойчива в окрестности начала координат, но не является глобально устойчивой.

#### Система 2

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)) + 2x_2(x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)) \\ &= -2x_1x_2 - 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2 - 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

**Анализ устойчивости:**

При  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ :  $\dot{V} < 0$ . Следовательно, область устойчивости ограничена единичным кругом, поэтому система локально асимптотически устойчива, но не является глобально устойчивой.

### Система 3

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2(1 - x_1^2) - 2x_1 \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1(x_2(1 - x_1^2) - 2x_1) + 2x_2(-(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)) \\ &= 2x_1x_2(1 - x_1^2) - 4x_1^2 - 2x_1x_2(1 - x_1^2) - 2x_2^2(1 - x_1^2) \\ &= -4x_1^2 - 2x_2^2(1 - x_1^2)\end{aligned}$$

**Анализ устойчивости:**

При  $x_1 < 1$ :  $\dot{V} < 0$ . Следовательно, система асимптотически устойчива в окрестности начала координат, но не является глобально устойчивой.

### Система 4

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2^3\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1(-3x_1 - x_2) + 2x_2(2x_1 - x_2^3) \\ &= -6x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_2 - 2x_2^4 \\ &= -6x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^4\end{aligned}$$

**Анализ устойчивости:**

При  $2x_1x_2 < 6x_1^2 + 2x_2^4$ :  $\dot{V} < 0$ . Неравенство выполняется для любых  $x_1$  и  $x_2$ . Следовательно, система глобально асимптотически устойчива.

**Система 5**

Рассмотрим скалярную систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x)$$

Найдем производную функции Ляпунова  $V(x) = x^2$ :

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = 2x(-\arctan(x)) = -2x \arctan(x)$$

**Анализ устойчивости:**

Так как  $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ , то  $\dot{V} < 0$  везде, кроме 0. Следовательно, система глобально асимптотически устойчива.

**2. Условия асимптотической устойчивости скалярной системы**

Рассмотрим скалярную систему:

$$\dot{x} = ax^p + h(x)$$

где  $p$  — натуральное число, а  $h(x)$  удовлетворяет условию  $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$  в некоторой окрестности точки начала координат.

Требуется определить условия, при которых система асимптотически устойчива.

Выберем функцию Ляпунова  $V = \frac{1}{2}x^2$ . Возьмем производную:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(ax^p + h(x)) = ax^{p+1} + xh(x)$$

Учитывая условие задания

$$|xh(x)| \leq |x|\dot{k}|x|^{p+1} = k|x|^{p+2}$$

получим

$$\dot{V} = ax^{p+1} + xh(x) \leq ax^{p+1} + k|x|^{p+2}$$

$$|xh(x)| \leq k|x|^{p+2} \ll |ax^{p+1}| - \text{в малой окрестности начала координат}$$

### Случай 1: $p$ — нечетное число

При нечетном  $p$  имеем  $x^{p+1} \geq 0$  для всех  $x$ .

- Если  $a < 0$ , то  $ax^{p+1} \leq 0$  для всех  $x$ . Тогда  $\dot{V} < 0 \Rightarrow$  система асимптотически устойчива.
- Если  $a > 0$ , то  $ax^{p+1} \geq 0$  для всех  $x$ . Тогда  $\dot{V} > 0 \Rightarrow$  система неустойчива.

### Случай 2: $p$ — четное число

При четном  $p$  имеем  $x^{p+1}$  имеет тот же знак, что и  $x$ .

- Если  $a < 0$ , то  $ax^{p+1} < 0$  при  $x > 0$  и  $ax^{p+1} > 0$  при  $x < 0$ . Тогда  $\dot{V} < 0$  при  $x > 0$  и  $\dot{V} > 0$  при  $x < 0 \Rightarrow$  система неустойчива.
- Если  $a > 0$ , то  $ax^{p+1} > 0$  при  $x > 0$  и  $ax^{p+1} < 0$  при  $x < 0$ . Тогда  $\dot{V} > 0$  при  $x > 0$  и  $\dot{V} < 0$  при  $x < 0 \Rightarrow$  система неустойчива.

### Случай 3: $a = 0$

При  $a = 0$  имеем  $\dot{x} = h(x)$ . Таким образом, устойчивость системы зависит от конкретного вида  $h(x)$ .

### Условие асимптотической устойчивости:

- $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$  - в малой окрестности начала координат;
- $p$  - нечетное число;
- $a < 0$ .

### Задача 3. Синтез линейного регулятора через LMI

На основе применения LMI построим линейный регулятор, стабилизирующий систему экспоненциально со степенью 2:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + u\end{aligned}$$

#### Постановка задачи

Требуется найти матрицу обратной связи  $K$  такую, что замкнутая система  $\dot{x} = (A + BK)x$  имеет экспоненциальную устойчивость степени  $\alpha=2$ , то есть:

$$\|x(t)\| \leq ce^{-\alpha t} \|x(0)\| \quad (1)$$

для некоторого  $c > 0$  и всех  $t \geq 0$ .

Матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### Анализ управляемости

Матрица управляемости:

$$\begin{aligned}U = [B, AB] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{rank}(U) &= 2\end{aligned}$$

Ранг матрицы управляемости равен порядку системы ( $n=2$ ), следовательно система полностью управляема.

Собственные значения разомкнутой системы  $\lambda = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.414$ , что означает неустойчивость.

## Синтез регулятора

Синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства Ляпунова:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0 \quad (2)$$

$$K = YP^{-1} \quad (3)$$

Получим матрицу регулятора:

$$K = \begin{pmatrix} -7.2383 & -4 \end{pmatrix}$$

Определим собственные числа матрицы замкнутой системы  $(A + BK)$ :

$$\sigma(A + BK) = \begin{pmatrix} -2 + 1.1128i \\ -2 - 1.1128i \end{pmatrix}$$

Как видно, регулятор обеспечивает требуемую степень устойчивости.

Выполним моделирование замкнутой системы и построим графики управления  $u(t)$  и вектора состояния  $x(t)$  при начальных условиях  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ .

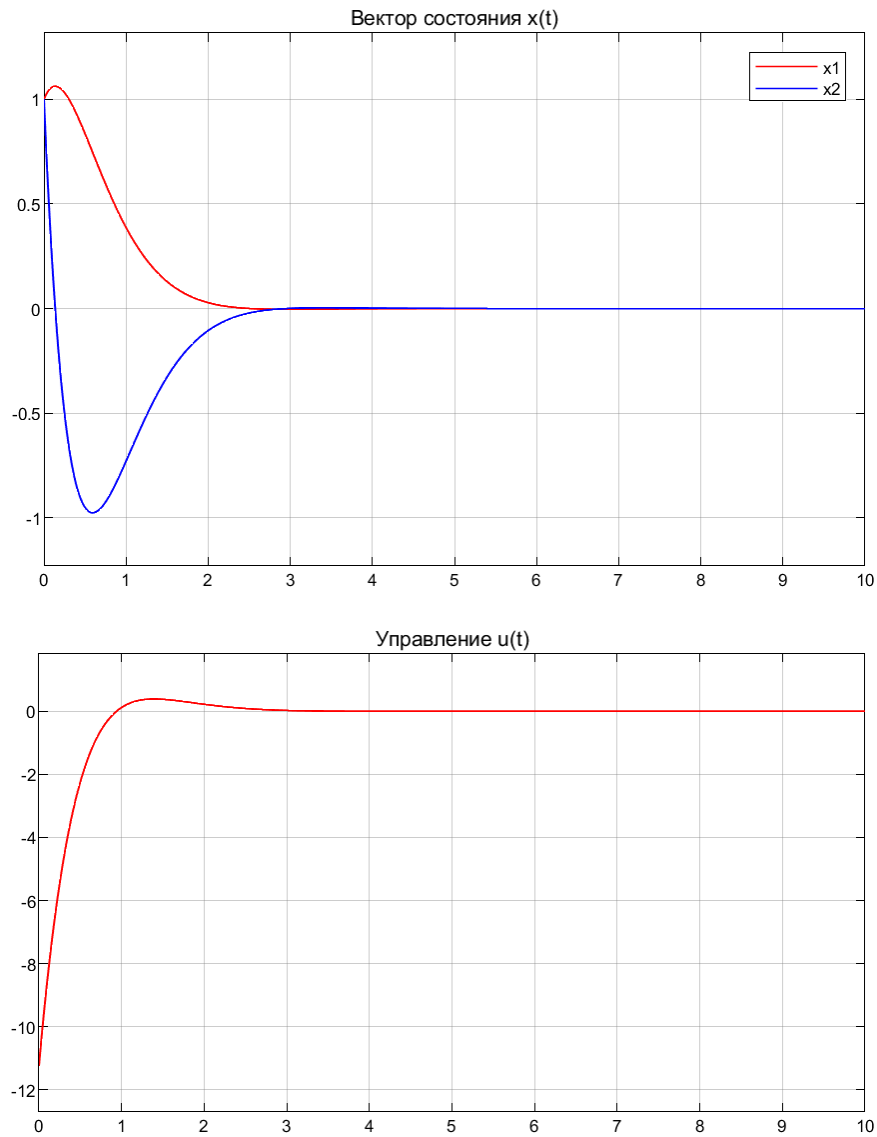


Рисунок 1 — Моделирование замкнутой системы

#### Задача 4. Ограничивающее условие на параметр $\gamma$

Найдем ограничивающее условие на параметр  $\gamma$ , при котором система является асимптотически устойчивой со степенью 1. Закон управления взят из предыдущего задания.

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u$$

где  $u = Kx$  и  $K = \begin{pmatrix} -7.2383 & -4 \end{pmatrix}$  (из задачи 3).



С учетом закона управления получаем:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + (-7.2383x_1 - 4x_2) = -5.2383x_1 - 4x_2$$

Линеаризуем систему в точке равновесия (0,0):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \gamma \cos(0) \\ -5.2383 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \gamma \\ -5.2383 & -4 \end{pmatrix}$$

Характеристический полином линеаризованной системы:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - J) &= \det \begin{pmatrix} \lambda & -(1 + \gamma) \\ 5.2383 & \lambda + 4 \end{pmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 4) - 5.2383 \cdot (-(1 + \gamma)) \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 5.2383(1 + \gamma) \end{aligned}$$

Для асимптотической устойчивости степени 1 требуется, чтобы все собственные значения имели вещественную часть меньше  $-1$ .

Корни характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20.9532(1 + \gamma)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4.9532 - 20.9532\gamma}}{2} < -1 \\ -4 \pm \sqrt{-4.9532 - 20.9532\gamma} &< -2 \\ \sqrt{-4.9532 - 20.9532\gamma} &< 2 \\ -4.9532 - 20.9532\gamma &< 4 \\ -20.9532\gamma &< 8.9532 \\ \gamma &< -\frac{8.9532}{20.9532} \\ \gamma &< -0.4273 \end{aligned}$$

Таким образом, при  $\gamma < -0.4273$  с выбранным регулятором система является асимптотически устойчивой со степенью 1.

## Задача 5. Анализ системы с управлением $u = Kx$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - 0.5x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases}$$

где  $u = Kx$  — линейное управление по состоянию.

1. Синтезируем линейный регулятор с обратной связью по состоянию, чтобы глобально стабилизировать начало координат. Функция Ляпунова:

$$V(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2)$$

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \\ &= x_1(x_2 - 0.5x_1^3) + x_2(k_1x_1 + k_2x_2) = \\ &= (1 + k_1)x_1x_2 + k_2x_2^2 - 0.5x_1^4 \end{aligned}$$

Таким образом, глобальная асимптотическая устойчивость достигается при  $k_1 = -1$  и  $k_2 \leq 0$ .

Пусть  $K = [-1 \ -1]$ . Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

2. Исследуем устойчивость по входу к состоянию (ISS) при наличии шумов измерений.

Система называется ISS, если существуют функции  $\beta \in \mathcal{KL}$  и  $\gamma \in \mathcal{K}$  такие, что для любых начальных условий  $x(0)$  и любого ограниченного входа  $u(t)$  выполняется:

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma\left(\sup_{\tau \in [0, t]} \|u(\tau)\|\right)$$

для всех  $t \geq 0$ .

Пусть измерения зашумлены. Тогда

$$u = K(x + \delta) = Kx + K\delta = (-x_1 - x_2) + (-\delta_1 - \delta_2)$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - \delta_1 - \delta_2 \end{cases}$$

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x) = -0.5x_1^4 - x_2^2 - x_2(\delta_1 + \delta_2)$$

Оценим смешанный член с помощью неравенства

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \\ -x_2(\delta_1 + \delta_2) &\leq \frac{1}{2}(x_2^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2) \end{aligned}$$

Получим

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)^2$$

Используя неравенство  $(\delta_1 + \delta_2)^2 \leq 2(\delta_1^2 + \delta_2^2) = 2\|\delta\|^2$ , получим

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{1}{2}x_1^4 - \frac{1}{2}x_2^2 + \|\delta\|^2$$

Следовательно,  $\dot{V} < 0$  при  $\frac{1}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 > \|\delta\|^2$ .

3. Исследуем устойчивость по входу к состоянию при наличии аддитивных возмущений.

При наличии аддитивных возмущений система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 + d_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + d_2 \end{cases}$$

Найдем производную функции Ляпунова:

$$\dot{V}(x) = -0.5x_1^4 - x_2^2 + x_1d_1 + x_2d_2$$

Тогда

$$\dot{V}(x) \leq -0.5x_1^4 - x_2^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|d\|^2$$

Следовательно,  $\dot{V} < 0$  при  $0.5x_1^4 + x_2^2 - \frac{1}{2}\|x\|^2 > \frac{1}{2}\|d\|^2$ .

Подводя итог, при выбранном регуляторе замкнутая система глобально асимптотически устойчива без возмущений и обладает ISS относительно шумов измерений и аддитивных возмущений.

Выполним моделирование системы без шумов и возмущений, с наличием шумов и с наличием аддитивных возмущений.