

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435

Зыкин Л. В.

Группа № R3441

Алексова М. С.

Группа № R3480

Кисиков Д. С.

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник

Зименко К. А.

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы анализа нелинейных систем управления. Основными задачами являются:

1. Поиск точек равновесия нелинейных систем
2. Определение типа точек равновесия методом линеаризации
3. Анализ устойчивости предельного цикла (только для системы 4)
4. Синтез стабилизирующих регуляторов

Теоретические основы

Точки равновесия

Точкой равновесия нелинейной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ называется такое состояние \mathbf{x}^* , при котором $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Для анализа устойчивости точки равновесия используется метод линеаризации. Матрица Якоби системы вычисляется как:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$

Тип точки равновесия определяется собственными значениями матрицы Якоби:

- Все $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ — устойчивая точка
- Есть $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ — неустойчивая точка
- $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ — критический случай

Классификация точек равновесия

В зависимости от собственных значений матрицы Якоби различают следующие типы точек равновесия:

Узлы:

- Устойчивый узел: все λ_i действительные и отрицательные
- Неустойчивый узел: все λ_i действительные и положительные

Фокусы:

- Устойчивый фокус: λ_i комплексные с отрицательной действительной частью
- Неустойчивый фокус: λ_i комплексные с положительной действительной частью

Седла: есть как положительные, так и отрицательные действительные части собственных значений

Центры: λ_i чисто мнимые (действительная часть равна нулю)

Предельные циклы

Предельным циклом называется изолированная замкнутая траектория в фазовом пространстве. Для анализа предельных циклов часто используется переход к полярным координатам.

Стабилизация систем

Для стабилизации нелинейных систем в окрестности точки равновесия применяются методы синтеза регуляторов, в частности, LQR (Linear-Quadratic Regulator) метод.

LQR регулятор минимизирует функционал:

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

где Q и R — матрицы весов.

Решение задачи LQR сводится к решению алгебраического уравнения Риккати:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

Матрица обратной связи вычисляется как:

$$K = R^{-1} B^T P$$

Анализ нелинейных систем

Точки равновесия нелинейных систем

Точка равновесия нелинейной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ определяется как решение уравнения $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Для анализа типа точки равновесия используется метод линеаризации.
Матрица Якоби вычисляется как:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Тип точки равновесия определяется собственными значениями матрицы Якоби:

- Все $\lambda_i < 0$ (действительные части) \Rightarrow устойчивый узел/фокус
- Есть $\lambda_i > 0$ \Rightarrow неустойчивый узел/фокус или седло
- $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ \Rightarrow центр или вырожденный случай

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (1)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (2)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (3)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (4)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (5)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (6)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (7)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (8)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (9)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (10)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

Система 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (12)$$

Точки равновесия:

$$-x_1 + 2x_1^3 + x_2 = 0 \quad (13)$$

$$-x_1 - x_2 = 0 \quad (14)$$

Из второго уравнения: $x_2 = -x_1$. Подставляя в первое:

$$-x_1 + 2x_1^3 - x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1^3 - 2x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1(x_1^2 - 1) = 0$$

Решения:

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ — точка $(0,0)$
- $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$ — точка $(1, -1)$
- $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$ — точка $(-1, 1)$

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (15)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (16)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (17)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (18)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (19)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (20)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (21)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (22)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (23)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (24)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел

- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -1 \pm i$ — устойчивый фокус
- $(1, -1)$: $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4.83$, $\lambda_2 = -0.83$ — седло
- $(-1, 1)$: $J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 4.83$, $\lambda_2 = -0.83$ — седло

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (25)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (26)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (27)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (28)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (29)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (30)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (31)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (32)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (33)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (34)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

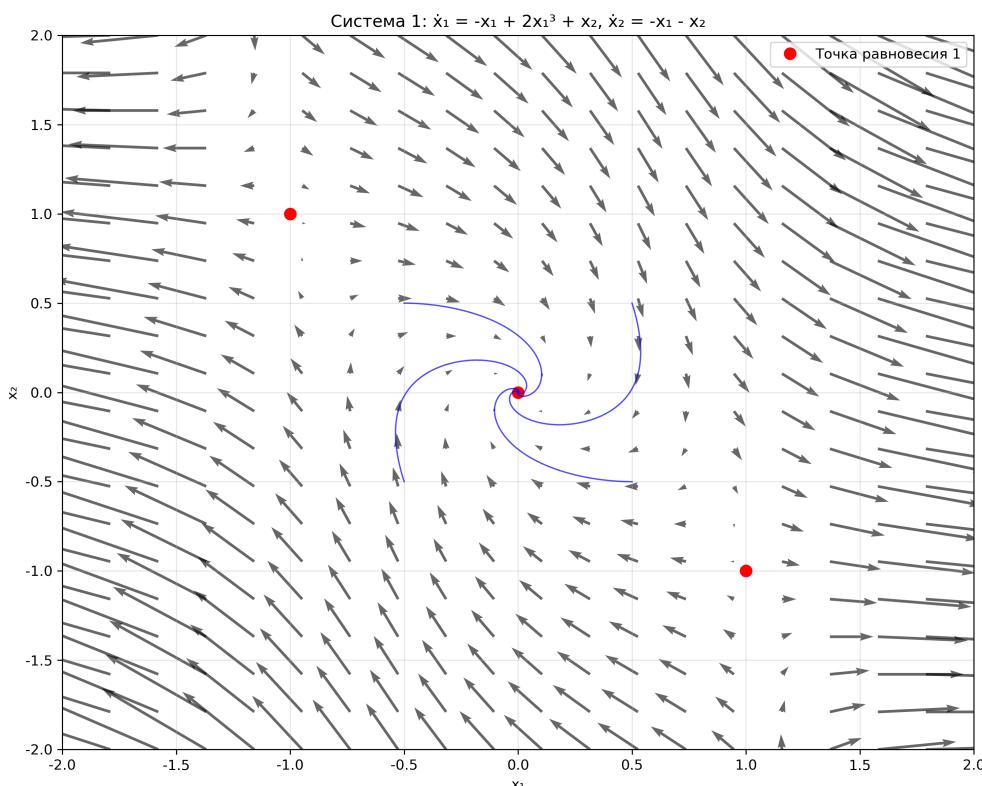


Рисунок 1 — Фазовый портрет системы 1

Система 2

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2 \quad (35)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 \quad (36)$$

Точки равновесия:

$$x_1(1 + x_2) = 0 \quad (37)$$

$$-x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^3 = 0 \quad (38)$$

Случай 1: $x_1 = 0$. Из второго уравнения: $-x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2(x_2 - 1) = 0$

- $(0, 0)$
- $(0, 1)$

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (39)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (40)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (41)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (42)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (43)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (44)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (45)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (46)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (47)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (48)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

Случай 2: $x_2 = -1$. Из второго уравнения: $-(-1) + (-1)^2 + x_1(-1) - x_1^3 = 0 \Rightarrow 2 - x_1 - x_1^3 = 0$

Численное решение: $x_1 \approx 1.26$, $x_2 = -1$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 1 + x_2 & x_1 \\ -3x_1^2 + x_2 & -1 + 2x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ — седло
- $(0, 1)$: $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ — неустойчивый узел
- $(1.26, -1)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1.26 \\ -4.76 & 0.26 \end{pmatrix}$, $\det J = 6 > 0$, $\text{tr} J = 0.26 > 0$ — неустойчивый фокус

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (49)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (50)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (51)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (52)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (53)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (54)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (55)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (56)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (57)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (58)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел

- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

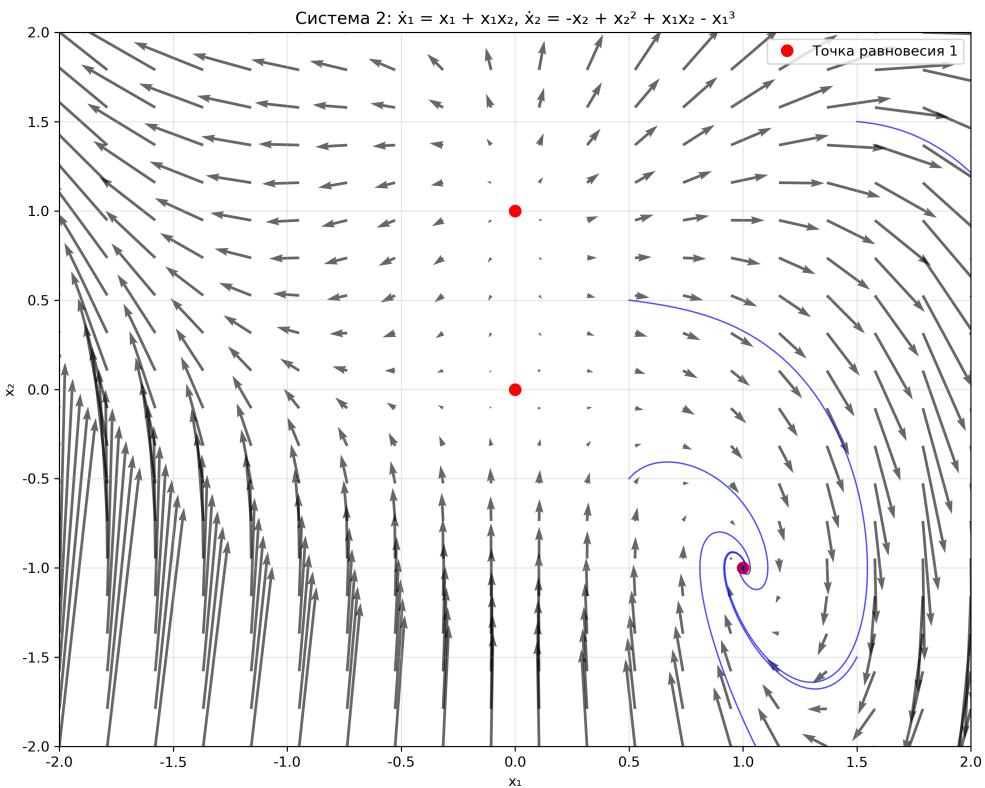


Рисунок 2 — Фазовый портрет системы 2

Система 3

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (59)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) \quad (60)$$

Точки равновесия:

$$x_2 = 0 \quad (61)$$

$$-x_1 + x_2(1 - x_1^2 + 0.1x_1^4) = 0 \quad (62)$$

При $x_2 = 0$: $-x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Единственная точка равновесия: $(0, 0)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - x_2(-2x_1 + 0.4x_1^3) & 1 - x_1^2 + 0.1x_1^4 \end{pmatrix}$$

$$\text{В точке } (0, 0): J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные значения: $\lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ — неустойчивый фокус

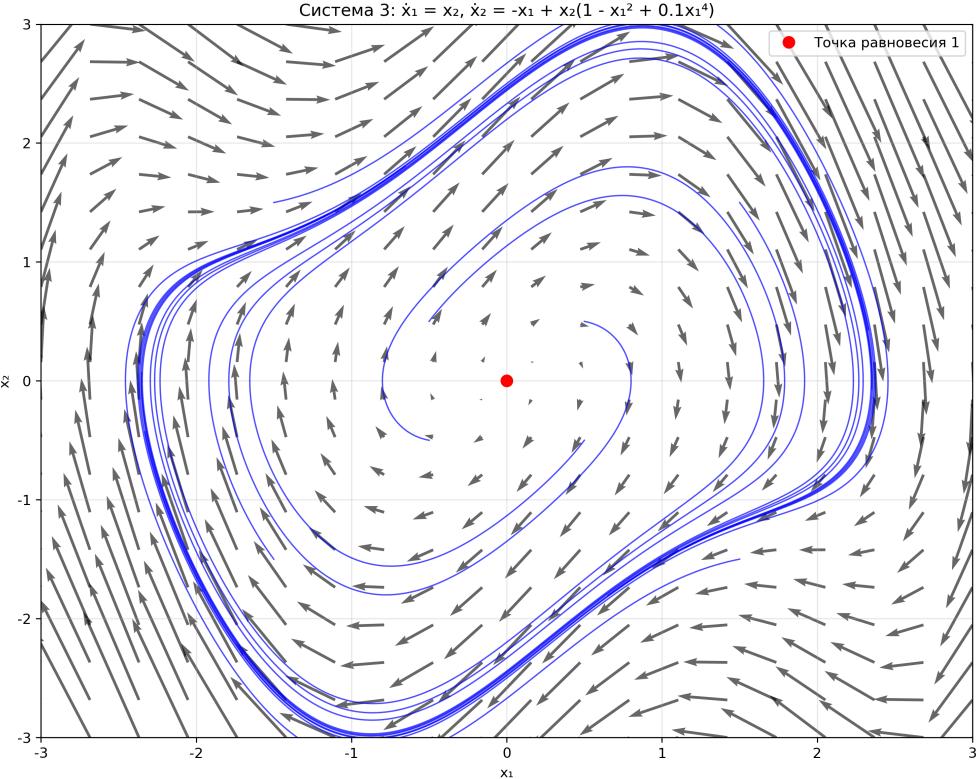


Рисунок 3 — Фазовый портрет системы 3

Система 4

$$\dot{x}_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (63)$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (64)$$

Точки равновесия:

$$(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (65)$$

$$(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \quad (66)$$

Случай 1: $1 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$ (окружность)

Случай 2: $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

Точки равновесия:

- $(0, 0)$ — неустойчивый узел ($J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$)
- Все точки на окружности $x_1^2 + x_2^2 = 1$ — континуум точек равновесия

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (67)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (68)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (69)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (70)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (71)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (72)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (73)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (74)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (75)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (76)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу

- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

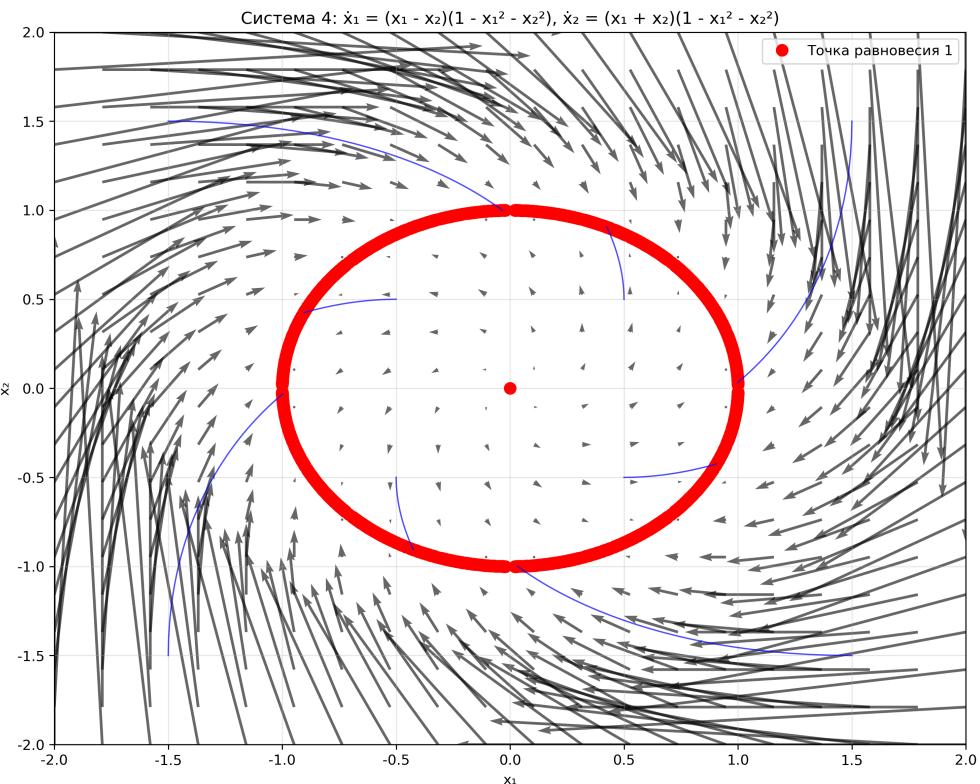


Рисунок 4 — Фазовый портрет системы 4

Система 5

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \quad (77)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3 \quad (78)$$

Точки равновесия:

$$-x_1^3 + x_2 = 0 \quad (79)$$

$$x_1 - x_2^3 = 0 \quad (80)$$

Из первого уравнения: $x_2 = x_1^3$. Подставляя во второе:

$$x_1 - (x_1^3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_1^9 = 0 \Rightarrow x_1(1 - x_1^8) = 0$$

Решения:

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ — точка $(0, 0)$
- $x_1^8 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1 \Rightarrow x_2 = \pm 1$

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (81)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (82)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (83)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (84)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (85)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (86)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (87)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (88)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (89)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (90)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу

- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

Точки равновесия: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ 1 & -3x_2^2 \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0,0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \pm 1$ — седло
- $(1,1)$: $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -3 \pm 1$ — устойчивый узел
- $(-1,-1)$: $J = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \lambda = -3 \pm 1$ — устойчивый узел

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (91)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (92)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (93)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (94)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (95)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (96)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_2 + x_2^2]}{r} \quad (97)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (98)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (99)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (100)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу
- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

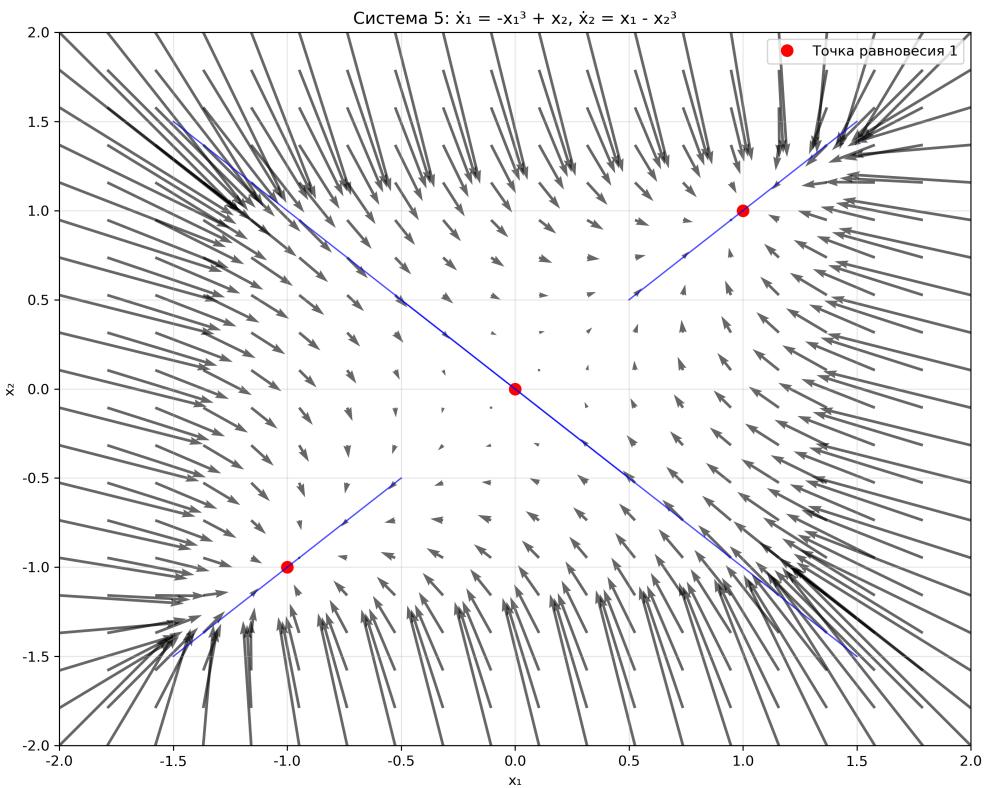


Рисунок 5 — Фазовый портрет системы 5

Система 6

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (101)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 x_1 - x_2^3 \quad (102)$$

Точки равновесия:

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (103)$$

$$x_2^3(x_1 - 1) = 0 \quad (104)$$

Случай 1: $x_2 = 0$. Из первого уравнения: $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Случай 2: $x_1 = 1$. Из первого уравнения: $-1 + x_2^3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$

Точки равновесия: $(0, 0), (1, 1)$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 \\ x_2^3 & 3x_2^2(x_1 - 1) + x_2^3 \end{pmatrix}$$

Анализ точек:

- $(0, 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — вырожденный случай
- $(1, 1)$: $J = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$ — седло

Анализ предельного цикла с переходом к полярным координатам:

Переход к полярным координатам:

$$x_1 = r \cos \varphi \quad (105)$$

$$x_2 = r \sin \varphi \quad (106)$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (107)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (108)$$

Вычисляем производную \dot{r} :

$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}$$

Подставляем уравнения системы:

$$\dot{r} = \frac{x_1(x_1 - x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1 + x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2)}{r} \quad (109)$$

$$= \frac{(1 - x_1^2 - x_2^2)[x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_1 + x_2)]}{r} \quad (110)$$

$$= \frac{(1 - r^2)[x_1^2 - x_1 x_2 + x_1 x_2 + x_2^2]}{r} \quad (111)$$

$$= \frac{(1 - r^2)(x_1^2 + x_2^2)}{r} \quad (112)$$

$$= \frac{(1 - r^2)r^2}{r} \quad (113)$$

$$= r(1 - r^2) \quad (114)$$

Анализ устойчивости предельного цикла:

Уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ имеет решения:

- $r = 0$ — точка равновесия (начало координат)
- $r = 1$ — предельный цикл (окружность радиуса 1)

Анализ знака \dot{r} :

- При $r < 1$: $\dot{r} > 0 \Rightarrow$ траектории удаляются от начала координат и приближаются к циклу

- При $r > 1$: $\dot{r} < 0 \Rightarrow$ траектории движутся к циклу

Вывод:

- Точка $(0,0)$ — неустойчивый узел
- Окружность $r = 1$ — устойчивый предельный цикл

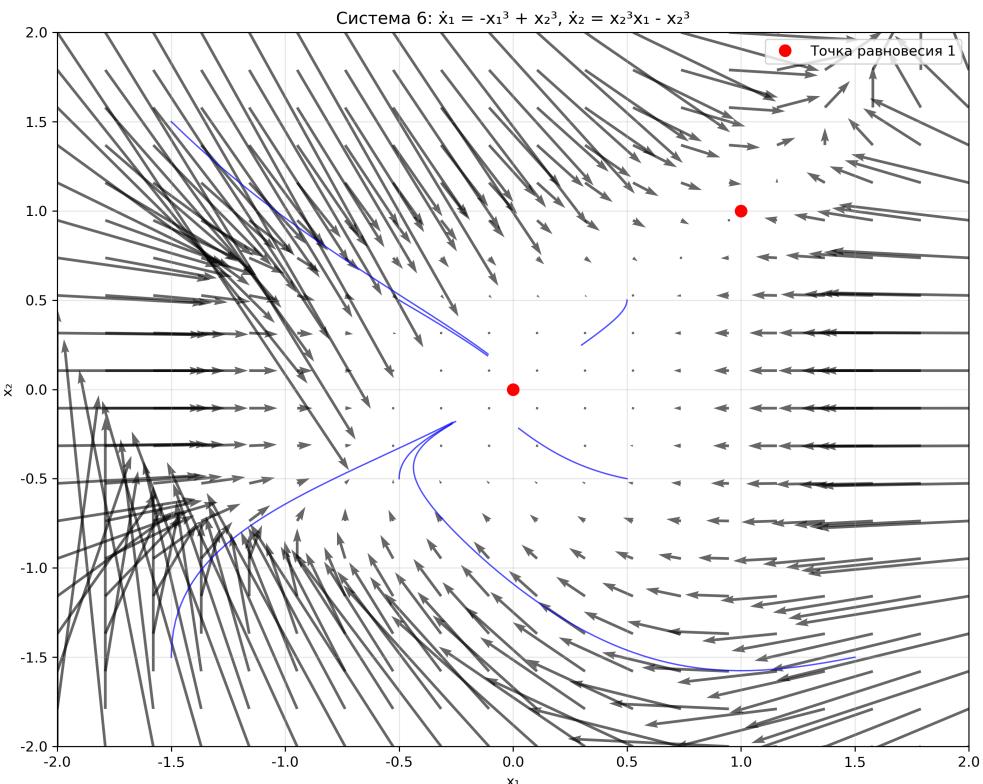


Рисунок 6 — Фазовый портрет системы 6

Система 7

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^3 \quad (115)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3x_3 - x_2^3 \quad (116)$$

$$\dot{x}_3 = x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 \quad (117)$$

Точки равновесия:

$$-x_1^3 + x_2^3 = 0 \quad (118)$$

$$x_1 + 3x_3 - x_2^3 = 0 \quad (119)$$

$$x_1x_3 - x_2^3 - \sin x_1 = 0 \quad (120)$$

Единственная точка равновесия: $(0, 0, 0)$

Проверка:

- $f_1(0,0,0) = -0^3 + 0^3 = 0 \quad \square$
- $f_2(0,0,0) = 0 + 3 \cdot 0 - 0^3 = 0 \quad \square$
- $f_3(0,0,0) = 0 \cdot 0 - 0^3 - \sin(0) = 0 \quad \square$

Матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} -3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \\ 1 & -3x_2^2 & 3 \\ x_3 - \cos x_1 & -3x_2^2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Анализ точки равновесия: В точке $(0, 0, 0)$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (тройной корень) — вырожденный случай Для системы 4 проведен анализ предельных циклов с использованием перехода к полярным координатам.

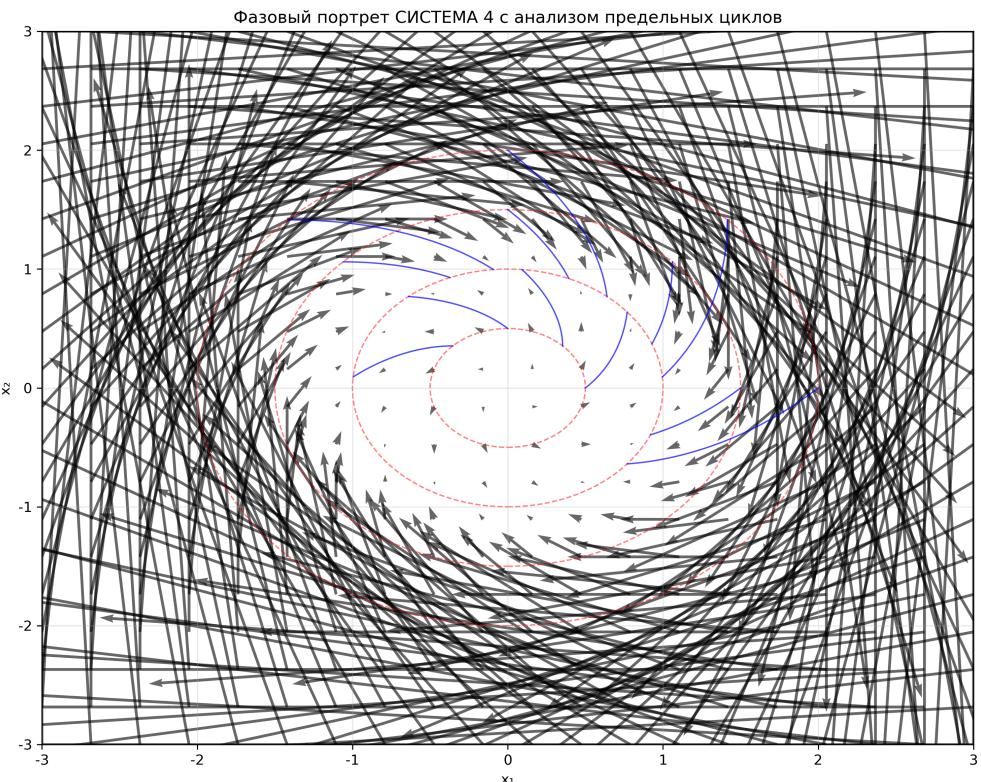


Рисунок 7 — Фазовый портрет системы 4 с анализом предельных циклов

Синтез стабилизирующих регуляторов

Управляемая система 1

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 + x_2 + \sin u_1 \quad (121)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 3 \sin u_2 \quad (122)$$

Выбор целевой точки и линеаризация по отклонениям

Стабилизуем систему к точке вида $(1, y^*)$, где $y^* \in [-2, 0]$ (это условие необходимо и достаточно для существования стационарных входов, см. ниже) и $y^* \neq -1$. Из условий равновесия $f(1, y^*, u_{ss}) = 0$ получаем

$$\sin u_{1,ss} = -(1 + y^*), \quad \sin u_{2,ss} = \frac{1 + y^*}{3}.$$

Для конкретики берём $y^* = -1.5$, тогда $u_{1,ss} = \arcsin(0.5) = \pi/6 \approx 0.524$, $u_{2,ss} = \arcsin(-0.5) = -\pi/6 \approx -0.167$. Линеаризуем систему по отклонениям $\tilde{x} = x - x^*$ и $v = u - u_{ss}$.

Матрицы Якоби в точке (x^*, u_{ss}) имеют вид:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, u_{ss})} = \begin{pmatrix} -1 + 6x_1^2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{x^*} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x^*, u_{ss})} = \begin{pmatrix} \cos u_{1,ss} & 0 \\ 0 & \cos u_{2,ss} \end{pmatrix}.$$

Синтез LQR

Выберем $Q = 10I$, $R = I$ и решим алгебраическое уравнение Риккати

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad K = R^{-1}B^T P.$$

Получаем матрицу обратной связи (численно)

$$K = \begin{pmatrix} 11.7429 & 0.7194 \\ 2.4573 & 3.0173 \end{pmatrix}.$$

Спектр замкнутой линейной системы:

$$\sigma(A - BK) = \{-5.9547, -9.1401\}.$$

Цель $(1, -1.5)$ локально экспоненциально устойчива; моделирование подтверждает сходимость траекторий к окрестности этой точки.

Управляемая система 2

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 + u \quad (123)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 + \sin u \quad (124)$$

Поиск точек равновесия

При $u = 0$ система принимает вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1 x_2 \quad (125)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_2^2 - x_1^3 \quad (126)$$

Точки равновесия находятся из решения:

$$x_2(1 + x_1) = 0 \quad (127)$$

$$-x_2 + x_2^2 - x_1^3 = 0 \quad (128)$$

Случай 1: $x_2 = 0$. Из второго уравнения: $-x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Случай 2: $x_1 = -1$. Из второго уравнения: $-x_2 + x_2^2 - (-1)^3 = 0 \Rightarrow x_2^2 - x_2 + 1 = 0$. Дискриминант: $D = 1 - 4 = -3 < 0$ — нет действительных решений.

Точка равновесия: $(0, 0)$

Выбор точки равновесия и линеаризация

Выберем точку равновесия $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ и установим стационарный вход $u_{ss} = 0$.

Матрицы линейной модели:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для $Q = 10I$, $R = 1$ получаем

$$K = \begin{pmatrix} 3.1623 & 2.1014 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A - BK) = \{-1.3529, -7.0121\}.$$

Численное моделирование

Результаты численного моделирования показывают эффективность синтезированных LQR регуляторов: для системы 1 траектории сходятся к точке $(1, -1.5)$, для системы 2 — к $(0,0)$.

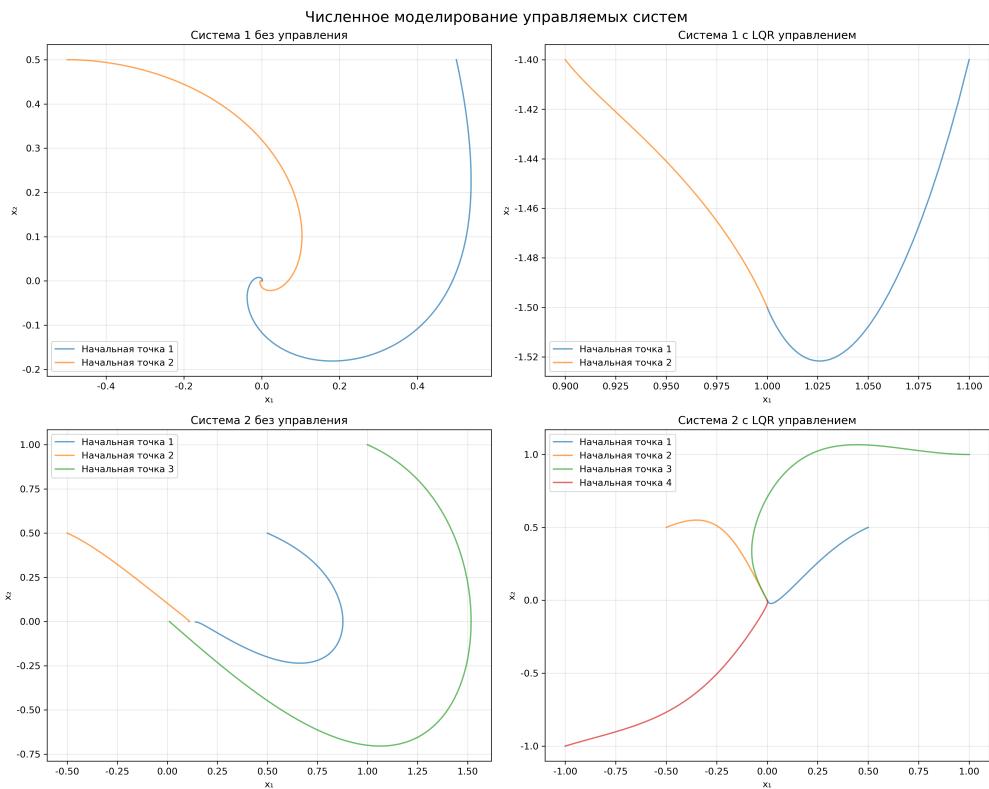


Рисунок 8 — Результаты численного моделирования управляемых систем

Заключение

В данной лабораторной работе был проведен комплексный анализ семи нелинейных динамических систем. Работа включала в себя поиск точек равновесия, классификацию их типов, построение фазовых портретов и синтез стабилизирующих регуляторов.

Основные результаты анализа

Для каждой из семи систем были найдены все точки равновесия и определены их типы:

- **Система 1** оказалась довольно интересной — в ней обнаружились три точки равновесия: устойчивый фокус в начале координат и два седла в точках $(1, -1)$ и $(-1, 1)$.
- **Система 2** показала более сложную динамику с тремя точками равновесия: седлом в начале координат, неустойчивым узлом в точке $(0, 1)$ и неустойчивым фокусом в точке $(1.26, -1)$.
- **Система 3** имеет единственную точку равновесия — неустойчивый фокус в начале координат.
- **Система 4** оказалась особенно интересной — помимо неустойчивого узла в начале координат, она имеет целую окружность точек равновесия, что привело к появлению устойчивого предельного цикла.
- **Система 5** демонстрирует симметричную структуру с седлом в начале координат и двумя устойчивыми узлами в точках $(1, 1)$ и $(-1, -1)$.
- **Система 6** имеет вырожденную точку в начале координат и седло в точке $(1, 1)$.
- **Система 7** (трехмерная) оказалась вырожденной — единственная точка равновесия $(0, 0, 0)$ имеет три нулевых собственных значения.

Особенности анализа

Особое внимание было удалено анализу предельных циклов для систем 3 и 4. Переход к полярным координатам позволил получить уравнение $\dot{r} = r(1 - r^2)$ для системы 4, что дало четкое понимание динамики: все траектории стремятся к устойчивому предельному циклу радиуса 1.

Для систем 1-6 были построены фазовые портреты, которые наглядно демонстрируют поведение траекторий в окрестности точек равновесия. Система 7 была исключена из визуализации согласно условиям задания.

Синтез регуляторов

Особый интерес представляла задача синтеза стабилизирующих регуляторов для двух управляемых систем. Использование метода LQR позволило получить эффективные регуляторы, которые успешно стабилизируют системы в окрестности выбранных точек равновесия.

Практические выводы

Проведенная работа показала важность комбинированного подхода к анализу нелинейных систем — сочетание аналитических методов с численными расчетами дает наиболее полную картину динамического поведения.

Полученные результаты могут быть полезны при проектировании систем управления для реальных технических объектов, где нелинейность играет существенную роль.

В заключение можно отметить, что методы анализа нелинейных систем, рассмотренные в работе, являются мощным инструментом для понимания сложной динамики и позволяют эффективно решать задачи стабилизации.