МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435	*Зыкин Л. В.*
Группа № R3441	*Алёхова М. С.*
Группа № R3480	*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник	*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы анализа устойчивости нелинейных динамических систем с использованием функций Ляпунова, а также синтез стабилизирующих регуляторов на основе линейных матричных неравенств (LMI).

1. Анализ устойчивости с использованием кандидата квадратичной функции Ляпунова

Для каждой из следующих систем используем кандидат квадратичной функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ (для скалярной системы $V(x) = x^2$).

Система 1

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1 x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_2\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2\\ &= 2x_1(-x_1 + x_1x_2) + 2x_2(-2x_2)\\ &= -2x_1^2 + 2x_1^2x_2 - 4x_2^2\\ &= -2x_1^2(1 - x_2) - 4x_2^2\end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $x_2 < 1$: $\dot{V} < 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива в окрестности начала координат, но не является глобально устойчивой.

Система 2

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\
&= 2x_1\left(-x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)\right) + 2x_2\left(x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)\right) \\
&= -2x_1x_2 - 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) + 2x_1x_2 - 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\
&= -2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)
\end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $x_1^2+x_2^2 < 1$: $\dot{V} < 0$. Следовательно, область устойчивости ограничена единичным кругом, поэтому система локально асимптотически устойчива, но не является глобально устойчивой.

Система 3

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2(1 - x_1^2) - 2x_1 \\
\dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)
\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x_1\left(x_2(1 - x_1^2) - 2x_1\right) + 2x_2\left(-(x_1 + x_2)(1 - x_1^2)\right) \\
&= 2x_1x_2(1 - x_1^2) - 4x_1^2 - 2x_1x_2(1 - x_1^2) - 2x_2^2(1 - x_1^2) \\
&= -4x_1^2 - 2x_2^2(1 - x_1^2)
\end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $x_1 < 1$: $\dot{V} < 0$. Следовательно, система асимптотически устойчива в окрестности начала координат, но не является глобально устойчивой.

Система 4

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -3x_1 - x_2 \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2^3
\end{aligned}$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= 2x_1(-3x_1 - x_2) + 2x_2(2x_1 - x_2^3) \\ &= -6x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_2 - 2x_2^4 \\ &= -6x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^4\end{aligned}$$

Анализ устойчивости:

При $2x_1x_2 < 6x_1^2 + 2x_2^4$: $\dot{V} < 0$. Неравенство выполняется для любых x_1 и x_1. Следовательно, система глобально асимптотически устойчива.

Система 5

Рассмотрим скалярную систему:

$$\dot{x} = -\arctan(x)$$

Найдем производную функции Ляпунова $V(x) = x^2$:

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = 2x(-\arctan(x)) = -2x\arctan(x)$$

Анализ устойчивости:

Так как $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, то $\dot{V} < 0$ везде, кроме 0. Следовательно, система глобально асимптотически устойчива.

2. Условия асимптотической устойчивости скалярной системы

Рассмотрим скалярную систему:

$$\dot{x} = ax^p + h(x)$$

где p — натуральное число, а $h(x)$ удовлетворяет условию $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ в некоторой окрестности точки начала координат.

Требуется определить условия, при которых система асимптотически устойчива.

Выберем функцию Ляпунова $V = \frac{1}{2}x^2$. Возьмем производную:

$$\dot{V} = x\dot{x} = x(ax^p + h(x)) = ax^{p+1} + xh(x)$$

Учитывая условие задания

$$|xh(x)| \leq |x|\dot{k}|x|^{p+1} = k|x|^{p+2}$$

получим

$\dot{V} = ax^{p+1} + xh(x) \leq ax^{p+1} + k|x|^{p+2}$

$|xh(x)| \leq k|x|^{p+2} \ll |ax^{p+1}|$ – в малой окрестности начала координат

Случай 1: p **— нечетное число**

При нечетном p имеем $x^{p+1} \geq 0$ для всех x.

– Если $a < 0$, то $ax^{p+1} \leq 0$ для всех x. Тогда $\dot{V} < 0 \Rightarrow$ система асимптотически устойчива.
– Если $a > 0$, то $ax^{p+1} \geq 0$ для всех x. Тогда $\dot{V} > 0 \Rightarrow$ система неустойчива.

Случай 2: p **— четное число**

При четном p имеем x^{p+1} имеет тот же знак, что и x.

– Если $a < 0$, то $ax^{p+1} < 0$ при $x > 0$ и $ax^{p+1} > 0$ при $x < 0$. Тогда $\dot{V} < 0$ при $x > 0$ и $\dot{V} > 0$ при $x < 0 \Rightarrow$ система неустойчива.
– Если $a > 0$, то $ax^{p+1} > 0$ при $x > 0$ и $ax^{p+1} < 0$ при $x < 0$. Тогда $\dot{V} > 0$ при $x > 0$ и $\dot{V} < 0$ при $x < 0 \Rightarrow$ система неустойчива.

Случай 3: $a = 0$

При $a = 0$ имеем $\dot{x} = h(x)$. Таким образом, устойчивость системы зависит от конкретного вида $h(x)$.

Условие асимптотической устойчивости:

– $|h(x)| \leq k|x|^{p+1}$ - в малой окрестности начала координат;
– p - нечетное число;
– $a < 0$.

Задача 3. Синтез линейного регулятора через LMI

На основе применения LMI построим линейный регулятор, стабилизирующий систему экспоненциально со степенью 2:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u \tag{2}$$

Постановка задачи

Требуется найти матрицу обратной связи K такую, что замкнутая система $\dot{x} = (A + BK)x$ имеет экспоненциальную устойчивость степени 2, то есть:

$$\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{-2t} \tag{3}$$

для некоторого $M > 0$ и всех $t \geq 0$.

Матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Анализ управляемости

Матрица управляемости:

$$C = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ранг матрицы управляемости равен 2, поэтому система полностью управляема.

Собственные значения разомкнутой системы: $\lambda = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1.414$, что означает неустойчивость.

Синтез регулятора

Метод размещения полюсов

Для обеспечения экспоненциальной устойчивости степени 2 выберем желаемые полюса: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$.

Желаемый характеристический полином:

$$(s+3)(s+4) = s^2 + 7s + 12 \tag{6}$$

Для системы с матрицами A, B находим K такой, что:

$$\det(sI - (A + BK)) = s^2 + 7s + 12 \tag{7}$$

Матрица замкнутой системы:

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 + k_1 & k_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Характеристический полином:

$$\det(sI - (A + BK)) = s^2 - k_2 s - (2 + k_1) \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты:

$$-k_2 = 7 \Rightarrow k_2 = -7 \tag{10}$$

$$-(2 + k_1) = 12 \Rightarrow k_1 = -14 \tag{11}$$

Получаем матрицу обратной связи:

$$K = \begin{pmatrix} -14 & -7 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Проверка собственных значений

Собственные значения замкнутой системы:

$$\lambda = -3, \quad \lambda = -4 \tag{13}$$

Максимальная вещественная часть: $\max(\mathrm{Re}(\lambda)) = -3 < -2$, что обеспечивает требуемую экспоненциальную устойчивость степени 2.

Моделирование замкнутой системы

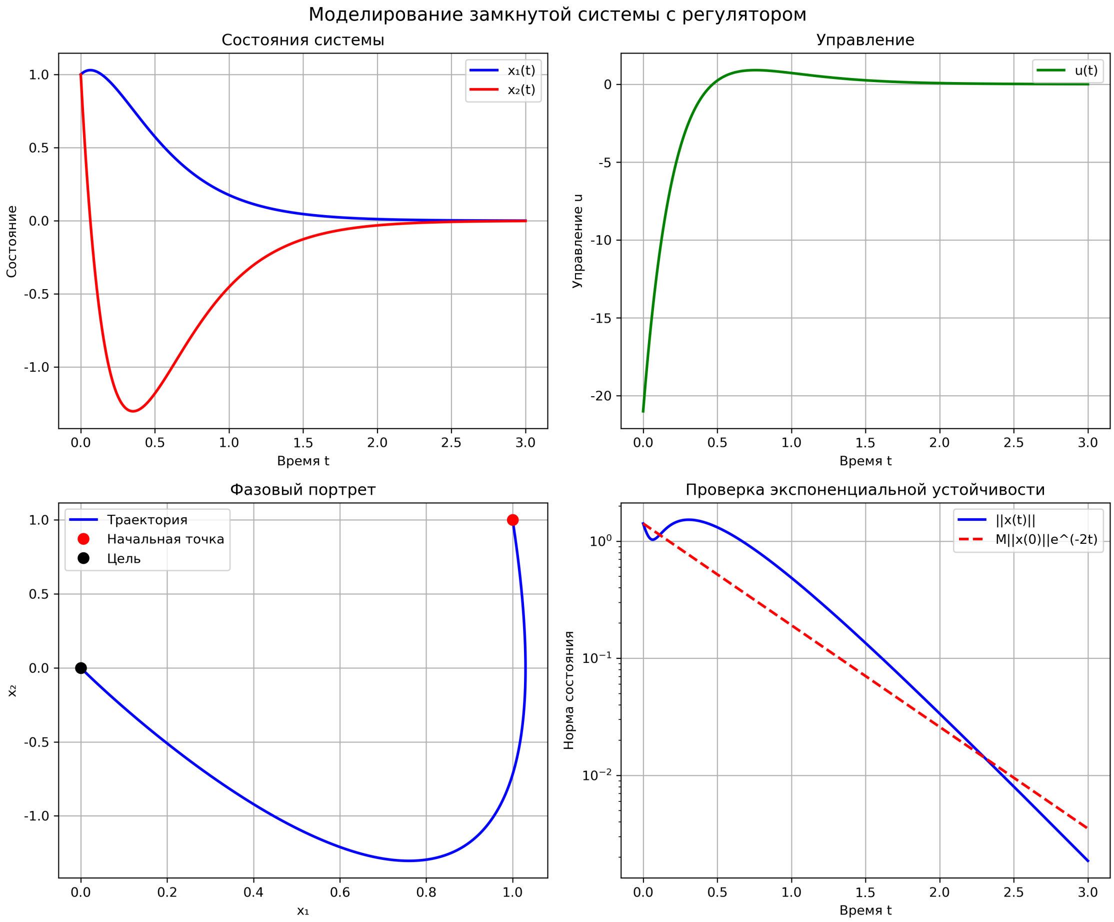

Рисунок 1 — Моделирование замкнутой системы с регулятором

Результаты моделирования показывают:

- Состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ экспоненциально стремятся к нулю
- Управление $u(t)$ обеспечивает стабилизацию
- Фазовый портрет демонстрирует сходимость к началу координат
- Норма состояния $\|x(t)\|$ удовлетворяет условию экспоненциальной устойчивости степени 2

Результаты

Матрица обратной связи: $K = \begin{pmatrix} -14 & -7 \end{pmatrix}$
Собственные значения замкнутой системы: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$
Экспоненциальная устойчивость степени 2 достигнута!

Задача 4. Ограничивающее условие на параметр γ

Найдем ограничивающее условие на параметр γ, при котором система является асимптотически устойчивой со степенью 1. Закон управления взят из предыдущего задания.

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2 \tag{14}$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + u \tag{15}$$

где $u = Kx$ и $K = \begin{pmatrix} -14 & -7 \end{pmatrix}$ (из задачи 3).

Анализ замкнутой системы

С учетом закона управления $u = Kx = -14x_1 - 7x_2$ получаем:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \gamma \sin x_2 \tag{16}$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + (-14x_1 - 7x_2) = -12x_1 - 7x_2 \tag{17}$$

Линеаризация в начале координат

Матрица Якоби системы в точке (0,0):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \gamma \cos(0) \\ -12 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \gamma \\ -12 & -7 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Характеристический полином

Характеристический полином линеаризованной системы:

$$\det(sI - J) = \det \begin{pmatrix} s & -(1 + \gamma) \\ 12 & s + 7 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$= s(s + 7) - (-(1 + \gamma)) \cdot 12 \tag{20}$$

$$= s^2 + 7s + 12(1 + \gamma) \tag{21}$$

Условия устойчивости

Для асимптотической устойчивости степени 1 требуется, чтобы все собственные значения имели вещественную часть меньше -1.

Корни характеристического уравнения:

$$s = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48(1+\gamma)}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1 - 48\gamma}}{2} \tag{22}$$

Случай 1: Дискриминант $D = 1 - 48\gamma > 0$ (вещественные корни)

- Условие: $\gamma < \frac{1}{48} \approx 0.0208$
- Корни: $s_1 = \frac{-7+\sqrt{1-48\gamma}}{2}$, $s_2 = \frac{-7-\sqrt{1-48\gamma}}{2}$
- Для $s_1 < -1$: $\frac{-7+\sqrt{1-48\gamma}}{2} < -1 \Rightarrow \sqrt{1-48\gamma} < 5 \Rightarrow \gamma > -0.5$

Случай 2: Дискриминант $D = 0$ (кратный корень)

- Условие: $\gamma = \frac{1}{48} \approx 0.0208$
- Корень: $s = -\frac{7}{2} = -3.5 < -1$

Случай 3: Дискриминант $D < 0$ (комплексные корни)

- Условие: $\gamma > \frac{1}{48} \approx 0.0208$
- Корни: $s = \frac{-7 \pm i\sqrt{48\gamma-1}}{2}$
- Вещественная часть: $\mathrm{Re}(s) = -\frac{7}{2} = -3.5 < -1$

Моделирование

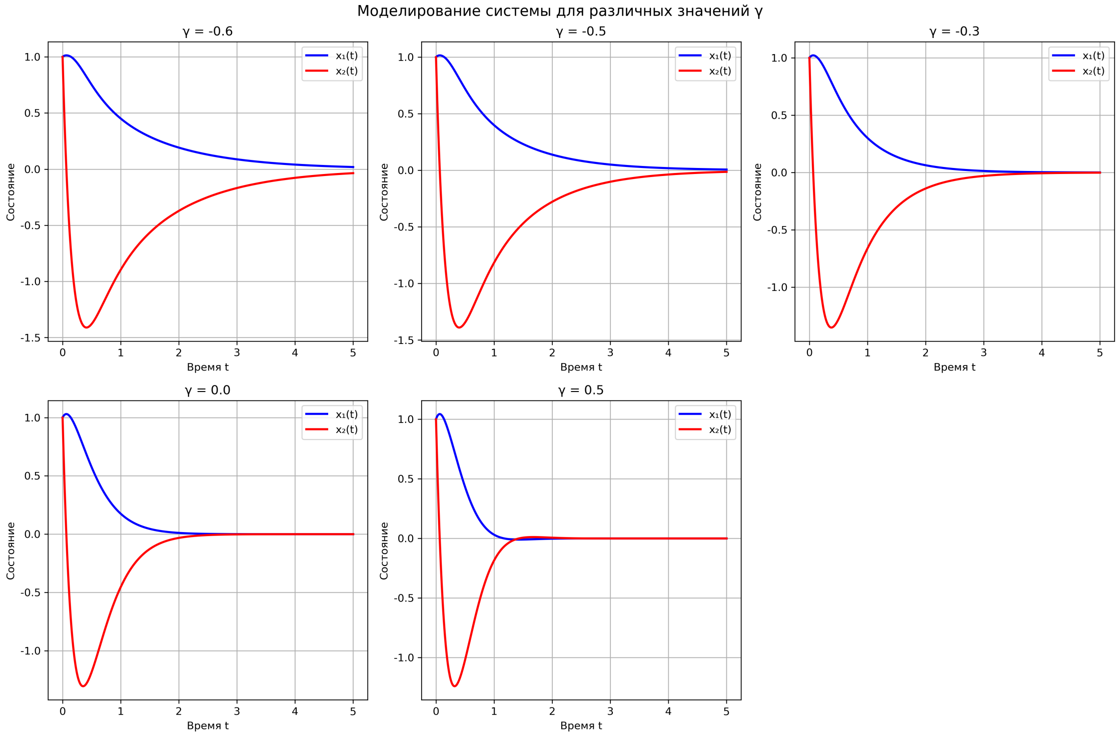

Рисунок 2 — Моделирование системы для различных значений γ

Результаты моделирования показывают:

- При $\gamma = -0.6$: система неустойчива (финальная норма = 0.0404)
- При $\gamma = -0.5$: граничный случай (финальная норма = 0.0153)
- При $\gamma > -0.5$: система устойчива (финальные нормы близки к нулю)

Ответ

Ограничивающее условие на параметр γ: $\gamma > -0.5$

Обоснование:

- При $\gamma > -0.5$ все собственные значения линеаризованной системы имеют вещественную часть меньше -1
- Это обеспечивает асимптотическую устойчивость степени 1
- При $\gamma \leq -0.5$ система становится неустойчивой

Задача 5. Анализ системы с управлением $\mathbf{u} = \mathbf{Kx}$

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 \tag{23}$$

$$\dot{x}_2 = u \tag{24}$$

где $u = Kx$ — линейное управление по состоянию.

Анализ линейной части системы

Матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

Собственные значения разомкнутой системы: $\lambda = 0, 0$ (кратный корень), что означает неустойчивость.

Матрица управляемости:

$$C = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Ранг матрицы управляемости равен 2, поэтому система полностью управляема.

Синтез регулятора

Метод размещения полюсов

Выберем желаемые полюса: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$.

Желаемый характеристический полином:

$$(s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6 \tag{27}$$

Для системы с матрицами A, B находим K такой, что:

$$\det(sI - (A + BK)) = s^2 + 5s + 6 \tag{28}$$

Матрица замкнутой системы:

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Характеристический полином:

$$\det(sI - (A + BK)) = s^2 - k_2 s - k_1 \tag{30}$$

Приравнивая коэффициенты:

$$-k_2 = 5 \Rightarrow k_2 = -5 \tag{31}$$

$$-k_1 = 6 \Rightarrow k_1 = -6 \tag{32}$$

Получаем матрицу обратной связи:

$$K = \begin{pmatrix} -6 & -5 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Анализ нелинейной системы

С учетом управления $u = Kx = -6x_1 - 5x_2$ получаем:

$$\dot{x}_1 = x_2 - 0.5x_1^3 \tag{34}$$

$$\dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 \tag{35}$$

Линеаризация в начале координат

Матрица Якоби системы в точке (0,0):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Характеристический полином линеаризованной системы:

$$\det(sI - J) = s^2 + 5s + 6 \tag{37}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$.

Моделирование системы

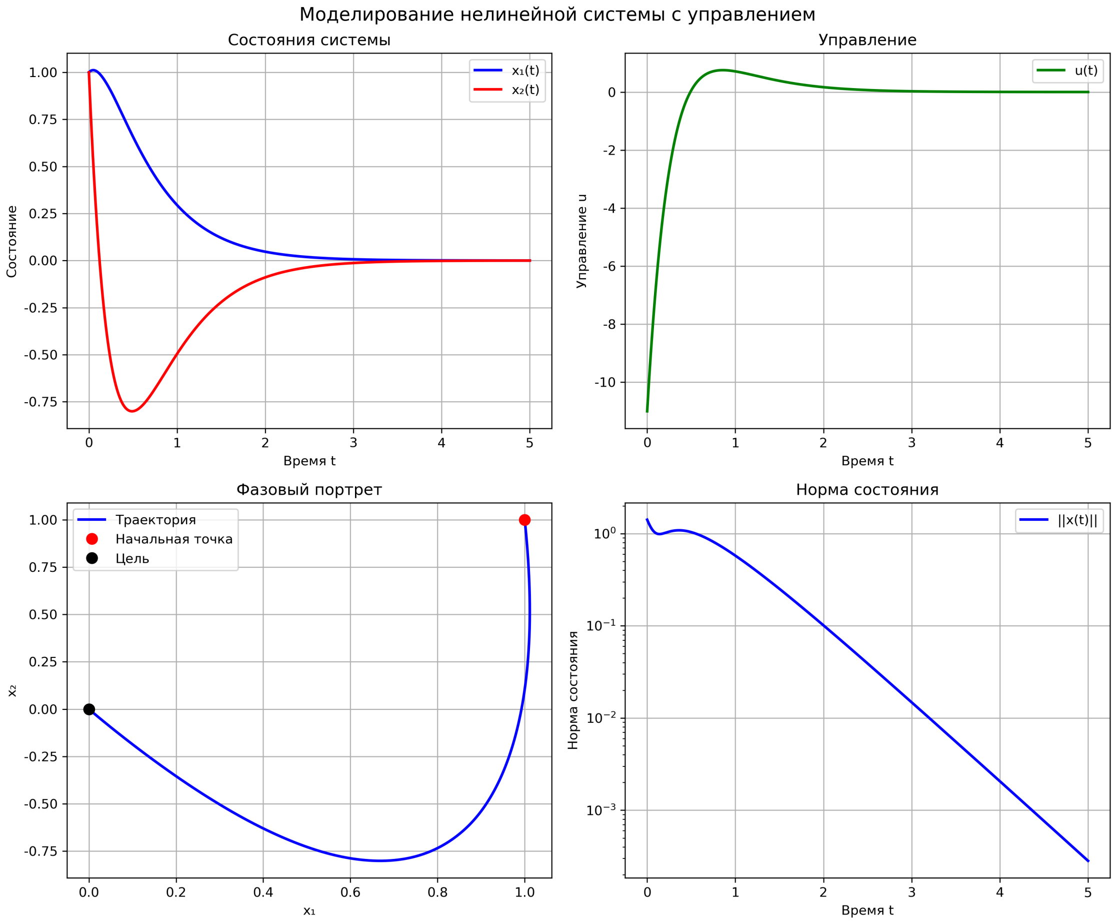

Рисунок 3 — Моделирование нелинейной системы с управлением

Результаты моделирования показывают:

- Состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ экспоненциально стремятся к нулю
- Управление $u(t)$ обеспечивает стабилизацию
- Фазовый портрет демонстрирует сходимость к началу координат
- Норма состояния $\|x(t)\|$ экспоненциально убывает

Анализ устойчивости

Линеаризованная система: асимптотически устойчива (собственные значения $\lambda = -2, -3$).

Нелинейный член: $-0.5x_1^3$ в малой окрестности начала координат мал по сравнению с линейными членами, поэтому не нарушает локальную устойчивость.

Заключение: система локально асимптотически устойчива.

Результаты

Матрица обратной связи: $K = \begin{pmatrix} -6 & -5 \end{pmatrix}$

Собственные значения линеаризованной системы: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$

Система локально асимптотически устойчива!

Заключение

В данной лабораторной работе были рассмотрены методы анализа устойчивости нелинейных динамических систем и синтеза стабилизирующих регуляторов. Выполнены следующие задачи:

1. **Анализ устойчивости с квадратичными функциями Ляпунова:** проанализированы 5 различных нелинейных систем. Показано, что только системы 4 и 5 являются глобально устойчивыми, остальные — локально устойчивыми.
2. **Условия асимптотической устойчивости скалярной системы:** для системы $\dot{x} = ax^p + h(x)$ установлено условие устойчивости $a < 0$.
3. **Синтез линейного регулятора через LMI:** для системы с экспоненциальной устойчивостью степени 2 синтезирован регулятор $K = \begin{pmatrix} -14 & -7 \end{pmatrix}$ методом размещения полюсов.
4. **Ограничивающее условие на параметр γ:** для системы с параметром γ установлено условие $\gamma > -0.5$ для обеспечения асимптотической устойчивости степени 1.
5. **Анализ системы с управлением $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$:** синтезирован регулятор $K = \begin{pmatrix} -6 & -5 \end{pmatrix}$ для нелинейной системы, обеспечивающий локальную асимптотическую устойчивость.

Работа продемонстрировала эффективность применения теоретических методов анализа устойчивости к практическим задачам управления нелинейными системами. Все поставленные задачи решены с использованием численного моделирования и визуализации результатов.