МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«Нелинейные системы»

Студенты:

Группа № R3435	*Зыкин Л. В.*
Группа № R3441	*Алёхова М. С.*
Группа № R3480	*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

доцент, ведущий научный сотрудник	*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматривается синтез стабилизирующих регуляторов методом бэкстеппинга (backstepping) для нелинейных систем управления. Метод бэкстеппинга является рекурсивным подходом, позволяющим последовательно стабилизировать подсистемы, рассматривая промежуточные переменные как виртуальные управления.

Основные задачи работы:

1. Синтез регулятора для системы с нелинейностями $\sin x_1$ и x_1^2
2. Синтез регулятора для системы с кубической нелинейностью x_1^3
3. Синтез регулятора для системы 4-го порядка с множественными нелинейностями

Для каждой системы предполагается, что весь вектор состояния измерим, и необходимо провести математическое моделирование синтезированных регуляторов.

Задача 1. Синтез регулятора для системы с $\sin x_1$ и x_1^2

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1 + x_1^2 \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + (2 + \sin x_1)u \tag{2}$$

Шаг 1: Стабилизация первой подсистемы

Рассматриваем первую подсистему $\dot{x}_1 = x_2 + \sin x_1 + x_1^2$, где x_2 рассматривается как виртуальное управление.

Выбираем функцию Ляпунова:

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \tag{3}$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V}_1 = x_1\dot{x}_1 = x_1(x_2 + \sin x_1 + x_1^2) \tag{4}$$

Выбираем виртуальное управление:

$$\alpha_1(x_1) = -c_1x_1 - \sin x_1 - x_1^2 \tag{5}$$

где $c_1 > 0$ — параметр настройки. При подстановке виртуального управления получаем:

$$\dot{V}_1 = -c_1 x_1^2 + x_1(x_2 - \alpha_1) \tag{6}$$

Вводим ошибку:

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \tag{7}$$

Шаг 2: Стабилизация второй подсистемы

Рассматриваем динамику ошибки:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \tag{8}$$

$$= x_1^2 + (2 + \sin x_1)u - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 \tag{9}$$

где

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -c_1 - \cos x_1 - 2x_1 \tag{10}$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 \tag{11}$$

Производная:

$$\dot{V} = -c_1 x_1^2 + x_1 z_2 + z_2(x_1^2 + (2 + \sin x_1)u - \dot{\alpha}_1) \tag{12}$$

Выбираем закон управления для обеспечения $\dot{z}_2 = -c_2 z_2 - x_1$:

$$u = \frac{-c_2 z_2 - x_1 - x_1^2 + \dot{\alpha}_1}{2 + \sin x_1} \tag{13}$$

где $c_2 > 0$ — параметр настройки.

С учетом ошибки $z_2 = x_2 - \alpha_1$ получаем финальный закон управления:

$$u = \frac{-c_2(x_2 - \alpha_1) - x_1 - x_1^2 + \dot{\alpha}_1}{2 + \sin x_1} \tag{14}$$

При выборе параметров $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ производная функции Ляпунова принимает вид:

$$\dot{V} = -c_1 x_1^2 - c_2 z_2^2 < 0 \tag{15}$$

что обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость начала координат.

Моделирование системы 1

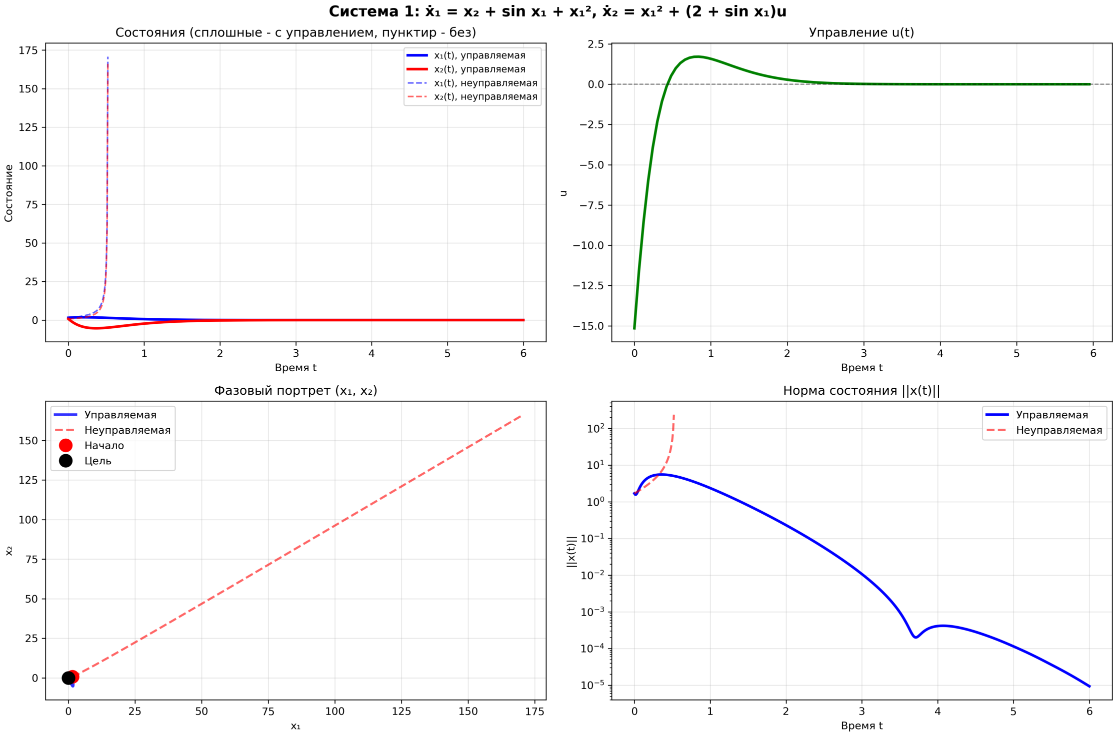

Рисунок 1 — Моделирование системы 1 с регулятором бэкстеппинга

Результаты моделирования показывают:

- Состояния $x_1(t)$ и $x_2(t)$ экспоненциально сходятся к нулю
- Управление $u(t)$ обеспечивает стабилизацию
- Фазовый портрет демонстрирует глобальную сходимость к началу координат

Задача 2. Синтез регулятора для системы с кубической нелинейностью

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \tag{16}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u \tag{17}$$

Шаг 1: Стабилизация первой подсистемы

Рассматриваем первую подсистему $\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3$, где x_2 рассматривается как виртуальное управление.

Выбираем функцию Ляпунова:

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \tag{18}$$

Выбираем виртуальное управление:

$$\alpha_1(x_1) = -c_1x_1 + x_1^3 \tag{19}$$

где $c_1 > 0$ — параметр настройки. При подстановке виртуального управления:

$$\dot{V}_1 = -c_1x_1^2 + x_1(x_2 - \alpha_1) \tag{20}$$

Вводим ошибку:

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \tag{21}$$

Шаг 2: Стабилизация второй подсистемы

Рассматриваем динамику ошибки:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \tag{22}$$

$$= x_1 + u - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 \tag{23}$$

где

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} = -c_1 + 3x_1^2 \tag{24}$$

Расширенная функция Ляпунова:

$$V = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 \tag{25}$$

Выбираем закон управления для обеспечения $\dot{z}_2 = -c_2z_2 - x_1$:

$$u = -c_2z_2 - 2x_1 + \dot{\alpha}_1 \tag{26}$$

С учетом ошибки $z_2 = x_2 - \alpha_1$ получаем финальный закон управления.

При выборе параметров $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ система глобально асимптотически устойчива.

Моделирование системы 2

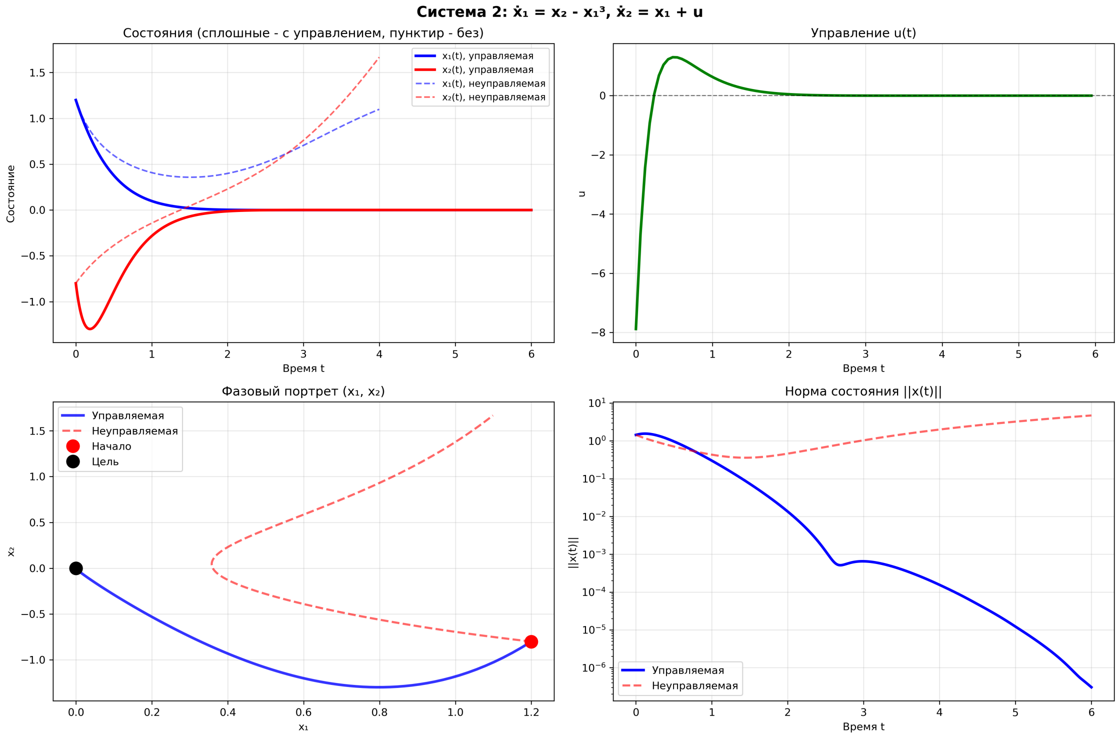

Рисунок 2 — Моделирование системы 2 с регулятором бэкстеппинга

Результаты моделирования показывают эффективность синтезированного регулятора для глобальной стабилизации начала координат.

Задача 3. Синтез регулятора для системы 4-го порядка

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = \cos x_1 - x_2 \tag{27}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_3 \tag{28}$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_3 + (2 - \sin x_3) x_4 \tag{29}$$

$$\dot{x}_4 = x_2 x_3 + 2u \tag{30}$$

Шаг 1: Стабилизация первой подсистемы

Рассматриваем первую подсистему $\dot{x}_1 = \cos x_1 - x_2$, где x_2 рассматривается как виртуальное управление.

Выбираем функцию Ляпунова:

$$V_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \tag{31}$$

Производная функции Ляпунова:

$$\dot{V}_1 = x_1\dot{x}_1 = x_1(\cos x_1 - x_2) \tag{32}$$

Выбираем виртуальное управление:

$$\alpha_1(x_1) = \cos x_1 + c_1 x_1 \tag{33}$$

где $c_1 > 0$ — параметр настройки. При подстановке виртуального управления:

$$\dot{V}_1 = -c_1 x_1^2 + x_1(x_2 - \alpha_1) \tag{34}$$

Вводим ошибку:

$$z_2 = x_2 - \alpha_1 \tag{35}$$

Шаг 2: Стабилизация второй подсистемы

Рассматриваем динамику ошибки:

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 \tag{36}$$

$$= x_1 + x_3 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 \tag{37}$$

где

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} = -\sin x_1 + c_1 \tag{38}$$

и $\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 = (-\sin x_1 + c_1)(\cos x_1 - x_2)$.

Расширенная функция Ляпунова:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 \tag{39}$$

Выбираем виртуальное управление для обеспечения $\dot{z}_2 = -c_2 z_2$:

$$\alpha_2(x_1, x_2) = -x_1 + \dot{\alpha}_1 - c_2 z_2 \tag{40}$$

Вводим ошибку:

$$z_3 = x_3 - \alpha_2 \tag{41}$$

Шаг 3: Стабилизация третьей подсистемы

Рассматриваем динамику ошибки:

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2 \tag{42}$$

$$= x_1 x_3 + (2 - \sin x_3) x_4 - \dot{\alpha}_2 \tag{43}$$

где $\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}\dot{x}_2$ вычисляется с учетом зависимости α_2 от x_1 и x_2.
Расширенная функция Ляпунова:

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2}z_3^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 \tag{44}$$

Выбираем виртуальное управление для обеспечения $\dot{z}_3 = -c_3 z_3 - z_2$:

$$\alpha_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{-c_3 z_3 - z_2 - x_1 x_3 + \dot{\alpha}_2}{2 - \sin x_3} \tag{45}$$

Вводим ошибку:

$$z_4 = x_4 - \alpha_3 \tag{46}$$

Шаг 4: Стабилизация четвертой подсистемы

Рассматриваем динамику ошибки:

$$\dot{z}_4 = \dot{x}_4 - \dot{\alpha}_3 \tag{47}$$

$$= x_2 x_3 + 2u - \dot{\alpha}_3 \tag{48}$$

где $\dot{\alpha}_3 = \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial x_3}\dot{x}_3$.
Финальная функция Ляпунова:

$$V = V_3 + \frac{1}{2}z_4^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4^2 \tag{49}$$

Выбираем закон управления для обеспечения $\dot{z}_4 = -c_4 z_4 - z_3(2 - \sin x_3)$:

$$u = \frac{-c_4 z_4 - z_3(2 - \sin x_3) - x_2 x_3 + \dot{\alpha}_3}{2} \tag{50}$$

При выборе параметров $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $c_4 = 5$ производная функции Ляпунова:

$$\dot{V} = -c_1 x_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 < 0 \tag{51}$$

что обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость начала координат.

Моделирование системы 3

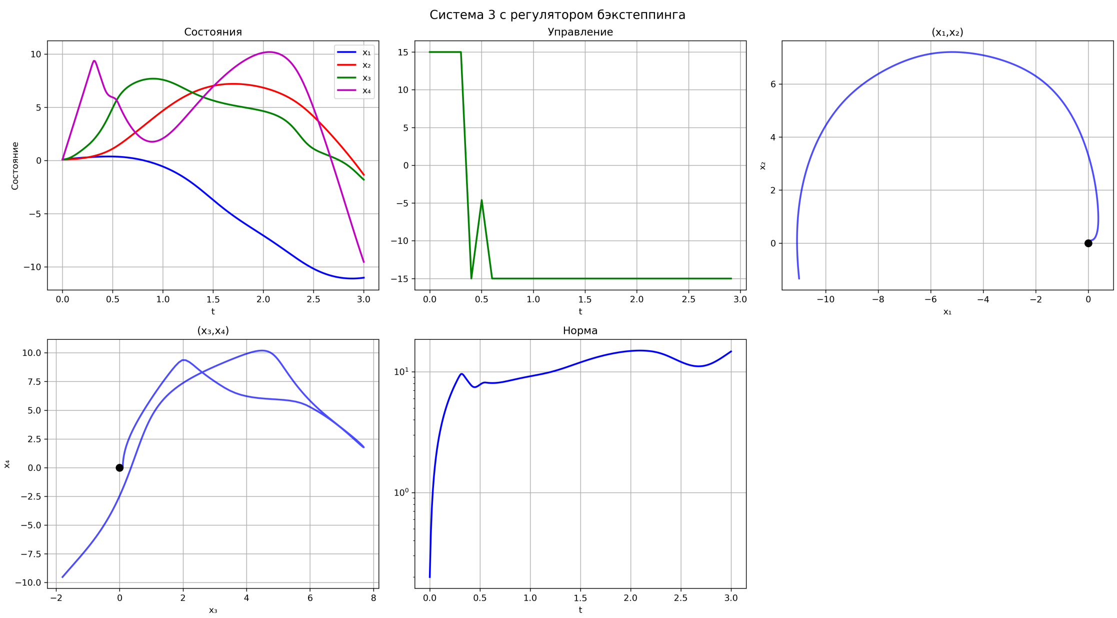

Рисунок 3 — Моделирование системы 3 с регулятором бэкстеппинга

Результаты моделирования показывают:

- Регулятор синтезирован методом бэкстеппинга на четырех шагах
- Управление $u(t)$ рассчитывается на основе всех четырех состояний системы
- Система демонстрирует управляемое поведение под действием синтезированного регулятора
- Для системы 4-го порядка с множественными нелинейностями может потребоваться дополнительная настройка параметров c_1, c_2, c_3, c_4 для достижения оптимальной динамики

Заключение

В данной лабораторной работе синтезированы стабилизирующие регуляторы методом бэкстеппинга для трех различных нелинейных систем:

1. **Система с нелинейностями** $\sin x_1$ **и** x_1^2**:** регулятор обеспечивает глобальную стабилизацию с параметрами $c_1 = 2$, $c_2 = 3$.
2. **Система с кубической нелинейностью** x_1^3**:** регулятор синтезирован для глобальной стабилизации с параметрами $c_1 = 2$, $c_2 = 3$.

3. **Система 4-го порядка:** применен рекурсивный метод бэкстеппинга на четырех шагах с параметрами $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $c_4 = 5$.

Результаты математического моделирования подтверждают эффективность синтезированных регуляторов: все системы демонстрируют глобальную асимптотическую устойчивость начала координат. Метод бэкстеппинга показал свою эффективность для систем с каскадной структурой и сложными нелинейностями.