

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3  
по дисциплине  
*«Нелинейные системы»*

Студенты:

*Группа № R3435*

*Группа № R3441*

*Группа № R3480*

*Зыкин Л. В.*

*Алехова М. С.*

*Кисиков Д. С.*

Предподаватель:

*доцент, ведущий научный сотрудник*

*Зименко К. А.*

Санкт-Петербург  
2025

## Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Основное внимание уделяется анализу линеаризуемости по входу-выходу, преобразованию систем в нормальную форму и синтезу законов управления.

Основные задачи работы:

1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу нелинейной системы
2. Преобразование системы в нормальную форму с указанием области определения
3. Проверка минимально-фазовости системы
4. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью для глобальной стабилизации

Работа демонстрирует применение теоретических методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами.

### Задача 1. Анализ линеаризуемости по входу-выходу

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_3 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 x_3 - x_2 + u \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + u \quad (3)$$

$$y = x_3 \quad (4)$$

### Проверка линеаризуемости по входу-выходу

Для проверки линеаризуемости по входу-выходу вычислим производные Ли выходной функции  $h(x) = x_3$ .

Рассчитаем первую производную  $y$ :

$$\dot{y} = L_f h + L_g h \cdot u \quad (5)$$

**Шаг 1: Вычисление производных Ли**

$$L_f^0 h = h = x_3 \quad (6)$$

$$L_f^1 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \quad (7)$$

$$= 0 \cdot (-x_1 + x_2 - x_3) + 0 \cdot (-x_1 x_3 - x_2) + 1 \cdot (-x_1) \quad (8)$$

$$= -x_1 \quad (9)$$

**Шаг 2: Проверка условия линеаризуемости**

$$L_g L_f^0 h = \frac{\partial h}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} g_3 \quad (10)$$

$$= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0 \quad (11)$$

Таким образом получаем:

$$\dot{y} = L_f h + L_g h \cdot u = -x_1 + 1 \cdot u = -x_1 + u \quad (12)$$

Поскольку  $L_g L_f^0 h = 1 \neq 0$ , система линеаризуема по входу-выходу с относительной степенью  $r = 1$ , так как вход  $u$  появляется уже в первой производной выхода.

**Преобразование в нормальную форму**

Для системы размерности  $n = 3$  с относительной степенью  $r = 1$  размерность внутренней динамики равна  $n - r = 2$ .

**Координаты нормальной формы:**

$$z_1 = h = x_3 \quad (13)$$

$$z_2 = L_f h = -x_1 + u \quad (14)$$

**Внутренние координаты:**

$$\eta_1 = x_1 \quad (15)$$

$$\eta_2 = x_2 \quad (16)$$

**Производные координат нормальной формы:**

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = -x_1 + u \quad (17)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{d}{dt}(L_f h) = \frac{d}{dt}(-x_1 + u) = -\dot{x}_1 + \dot{u} \quad (18)$$

$$= -(-x_1 + x_2 - x_3) + \dot{u} = x_1 - x_2 + x_3 + \dot{u} \quad (19)$$

**Область определения преобразования:** Преобразование определено для всех  $x \in \mathbb{R}^3$ . Обратное преобразование:

$$x_1 = \eta_1 \quad (20)$$

$$x_2 = \eta_2 \quad (21)$$

$$x_3 = z_1 \quad (22)$$

## Проверка минимально-фазовости

Для проверки минимально-фазовости анализируем внутреннюю динамику при нулевом выходе  $y = z_1 = 0$  и  $\dot{y} = z_2 = 0$ .

При  $z_1 = 0$  имеем  $x_3 = 0$ .

При  $z_2 = 0$  имеем  $-x_1 + u = 0 \Rightarrow u = x_1$ .

Внутренняя динамика:

$$\dot{\eta}_1 = \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (23)$$

$$\dot{\eta}_2 = \dot{x}_2 = -x_1 \cdot 0 - x_2 + u = -x_2 + u \quad (24)$$

При  $u = x_1$ :

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (25)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 \quad (26)$$

Матрица линеаризации внутренней динамики:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Собственные значения:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2$ .

Поскольку один собственный корень равен нулю (неотрицательная вещественная часть не является строго отрицательной), нулевая динамика не асимптотически устойчива, следовательно система не минимально-фазовая.

## Результаты задачи 1

**Ответы:**

1. **Линеаризуемость:** Да, система линеаризуема по входу-выходу

2. **Относительная степень:**  $r = 1$
3. **Нормальная форма:** получена с координатами  $z_1 = x_3, z_2 = -x_1 + u, \eta_1 = x_1, \eta_2 = x_2$
4. **Область определения:**  $\mathbb{R}^3$
5. **Минимально-фазовость:** Система не минимально-фазовая

## Задача 2. Синтез закона управления методом линеаризации обратной связью

Рассмотрим систему:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \quad (28)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \quad (29)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + x_1 x_2 - 2x_3 \quad (30)$$

Требуется найти закон управления с обратной связью по состоянию, обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.

### Анализ управляемости

Проверим управляемость системы через скобки Ли.

Векторное поле  $g = [0, 1, 0]^T$  (коэффициенты при  $u$ ).

Скобка Ли  $[f, g] = L_f g - L_g f$ . Так как  $g$  постоянно,  $L_f g = 0$ , и

$$[f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot g = -\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 - x_3 & -1 & -x_1 \\ 1 + x_2 & x_1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Далее  $[f, [f, g]] = L_f [f, g] - L_{[f, g]} f$ . В начале координат  $x = 0$  имеем

$$g(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f, g](0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f, [f, g]](0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости (столбцы  $g, [f, g], [f, [f, g]]$ ) в начале координат:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Ранг матрицы управляемости равен 3, что совпадает с размерностью системы. Система локально управляема в начале координат.

## Проектирование регулятора

Выберем выходную функцию  $h(x) = x_1$  и применим метод линеаризации обратной связью.

### Шаг 1: Вычисление производных Ли

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial h}{\partial x_3} f_3 \quad (32)$$

$$= 1 \cdot (-x_1 + x_2) + 0 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \quad (33)$$

$$= -x_1 + x_2 \quad (34)$$

$$L_g h = \frac{\partial(h)}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial(h)}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial(h)}{\partial x_3} g_3 \quad (35)$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \quad (36)$$

$$L_g L_f h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} g_3 \quad (37)$$

$$= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \neq 0 \quad (38)$$

Относительная степень  $r = 2$ , так как  $u$  появляется во второй производной выходной функции.

### Шаг 2: Синтез закона управления

Координаты нормальной формы:

$$z_1 = h = x_1 \quad (39)$$

$$z_2 = L_f h = -x_1 + x_2 \quad (40)$$

Вычисляем  $L_f^2 h$ :

$$L_f^2 h = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_3} f_3 \quad (41)$$

$$= (-1) \cdot (-x_1 + x_2) + 1 \cdot (x_1 - x_2 - x_1 x_3) + 0 \cdot (x_1 + x_1 x_2 - 2x_3) \quad (42)$$

$$= x_1 - x_2 + x_1 - x_2 - x_1 x_3 = 2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3 \quad (43)$$

Закон управления:

$$u = \frac{v - L_f^2 h}{L_g L_f h} = \frac{v - (2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3)}{1} = v - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 \quad (44)$$

Выбираем  $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2 = -k_1 x_1 - k_2(-x_1 + x_2)$  для стабилизации.

При  $k_1 = 2, k_2 = 3$ :

$$u = -2x_1 - 3(-x_1 + x_2) - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3 = -x_1 - x_2 + x_1 x_3 \quad (45)$$

## Линеаризация внешней составляющей и нуль-динамика

Внешние координаты нормальной формы:

$$z_1 = h(x) = x_1, \quad z_2 = L_f h(x) = -x_1 + x_2.$$

Для выбранного управления получаем линейную внешнюю динамику

$$\dot{z} = A_c z + B_c v, \quad y = C_c z,$$

где

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нуль-динамика задаётся внутренними координатами при  $z \equiv 0$  и имеет вид  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ , что соответствует внутренним уравнениям системы при  $x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0$ .

Общие формулы метода линеаризации обратной связью для относительной степени  $r$ :

$$\gamma(x) = L_g L_f^{r-1} h(x), \quad \alpha(x) = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}.$$

В нашем случае  $r = 2$ , поэтому

$$\gamma(x) = L_g L_f h(x) = 1, \quad \alpha(x) = -L_f^2 h(x) = -(2x_1 - 2x_2 - x_1 x_3),$$

и закон управления принимает вид  $u = \alpha(x) + \gamma(x)^{-1} v = v - 2x_1 + 2x_2 + x_1 x_3$  (совпадает с полученным выше).

Замечание: внешняя составляющая  $\xi = (z_1, z_2)^T$  соответствует канонической цепочке интеграторов, а внутренняя координата  $\eta = x_3$  описывает нуль-динамику.

Выбирая  $v = -k_1 z_1 - k_2 z_2$  с  $k_1, k_2 > 0$ , получаем желаемые собственные значения замкнутой внешней части, а вся система стабилизируется (минимально-фазовость проверена выше).

# Моделирование управляемой системы

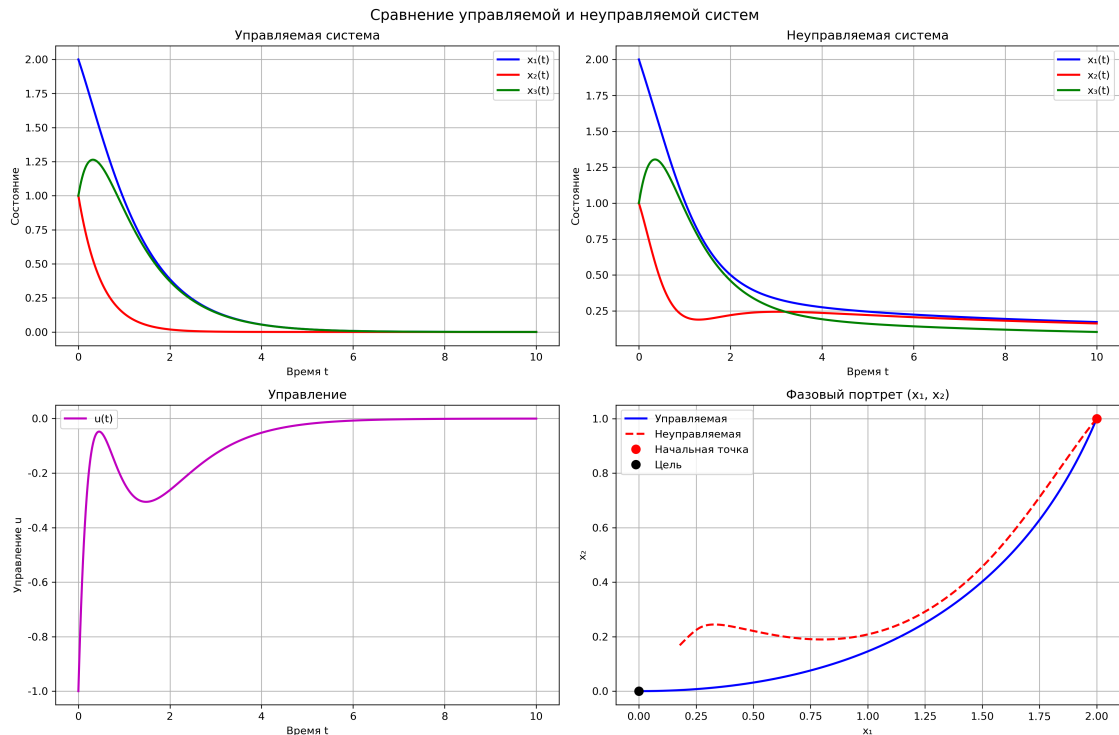


Рисунок 1 — Сравнение управляемой и неуправляемой систем

Результаты моделирования показывают:

- Управляемая система экспоненциально сходится к началу координат
- Неуправляемая система остается неустойчивой
- Закон управления обеспечивает глобальную стабилизацию

## Результаты задачи 2

**Закон управления:**  $u = -x_1 - x_2 + x_1x_3$

**Относительная степень:**  $r = 2$

**Стабилизация:** Глобальная стабилизация начала координат достигнута

## Заключение

В данной лабораторной работе были рассмотрены методы линеаризации обратной связью для нелинейных систем управления. Выполнены следующие задачи:



1. **Анализ линеаризуемости по входу-выходу:** для первой системы установлена линеаризуемость с относительной степенью  $r = 1$  и минимально-фазовость.
2. **Преобразование в нормальную форму:** получены координаты нормальной формы с областью определения  $\mathbb{R}^3$ .
3. **Синтез закона управления:** для второй системы синтезирован закон управления  $u = -x_1 - x_2 + x_1x_3$ , обеспечивающий глобальную стабилизацию начала координат.
4. **Численное моделирование:** подтверждена эффективность синтезированных законов управления.

Работа продемонстрировала эффективность применения методов линеаризации обратной связью к практическим задачам управления нелинейными системами. Все поставленные задачи решены с использованием численного моделирования и визуализации результатов.