

# ЗАДАНИЯ

## ПО КУРСУ “ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ”

### 6 заданий

#### ЗАДАНИЕ 1. Поиск минимума с помощью методов статической оптимизации

Найти минимум критерия качества для статической задачи оптимизации:

1. Поиск глобального минимума  $J(x, u)$  на основе необходимого и достаточного условий

1.1. Без ограничений

1.2. С ограничением в виде равенства  $c(x, u) = 0$

1.3. С ограничением в виде неравенства  $c(x, u) \leq 0$

2. Градиентный поиск минимума критерия качества.

$$J_1(x, u) = J(x, u)$$

2.1. Методом Ньютона Рафсона произвести пошаговый расчет экстремума.

2.2. Методом наискорейшего спуска для двух различных  $\gamma$  (соответствующей колебательной и апериодической сходимости) произвести пошаговый расчет экстремума.

№ Вар.	$J(x, u)$	$c(x, u)$
1	$J(x, u) = 3x^2 + 2u^2 + 3xu + 4x + 5u - 20$	$x + 5u - 1$
2	$J(x, u) = 2x^2 + u^2 + 2xu + 3x + 5u - 10$	$x - 2u^2$
3	$J(x, u) = 3x^2 + 3u^2 + 5xu + x + 2u - 4$	$x + u - 10$
4	$J(x, u) = 4x^2 + 2u^2 + 5xu - 2x + 3u - 8$	$2x + u^2 - 3$
5	$J(x, u) = 2x^2 + 6u^2 + 5xu + 10x + u - 5$	$x + 2u + 2$
6	$J(x, u) = 6x^2 + 2u^2 + 5xu - 3x - 2u - 12$	$4x^2 + u + 2$
7	$J(x, u) = 6x^2 + 3u^2 + 7xu + 8x + u - 2$	$3x - u + 1$
8	$J(x, u) = 3x^2 + 6u^2 + 7xu + x + 2u - 14$	$3x - u^2 + 1$

9	$J(x,u) = 4x^2 + 5u^2 + 7xu + 5x + 6u - 8$	$x - u^2 - 8$
10	$J(x,u) = 5x^2 + 4u^2 + 7xu + 11x + 2u - 3$	$-x + 2u^2 + 5$
11	$J(x,u) = 8x^2 + 6u^2 + 4xu + x + 3u - 10$	$3x - u^2 + 1$
12	$J(x,u) = 9x^2 + 5u^2 + 3xu + x + 8u - 5$	$x + 2u^2 + 7$
13	$J(x,u) = 5x^2 + 2u^2 + 3xu + 4x + u - 5$	$4x^2 + u + 1$
14	$J(x,u) = 7x^2 + 4u^2 + 4xu + 3x + 3u - 4$	$2x + 3u^2 + 2$
15	$J(x,u) = 4x^2 + 8u^2 + 5xu + 9x + 2u - 4$	$4x^2 + 2u + 7$
16	$J(x,u) = x^2 + 5u^2 + 3xu + 4x + 2u - 7$	$-2x + 5u^2 + 3$
17	$J(x,u) = 5x^2 + 2u^2 + 5xu + 4x + 3u - 15$	$x^2 - 5u + 6$
18	$J(x,u) = 6x^2 + u^2 + 4xu + 3x + 4u - 9$	$3x + 4u^2 - 7$
19	$J(x,u) = 3x^2 + 4u^2 + xu + 6x + 7u - 2$	$3x^2 + 5u - 5$
20	$J(x,u) = x^2 + 4u^2 + 3xu + 3x + 2u - 19$	$-2x + 7u^2 - 3$
21	$J(x,u) = 8x^2 + 3u^2 + 6xu + x + 4u - 13$	$x^2 - 8u - 4$
22	$J(x,u) = 4x^2 + 5u^2 + xu + 2x + 8u - 3$	$2x + 6u^2 + 9$
23	$J(x,u) = 2x^2 + 3u^2 + 4xu + 8x + u - 4$	$2x^2 + 3u + 9$
24	$J(x,u) = x^2 + 6u^2 + 3xu + 8x + 3u - 5$	$-x + 4u^2 + 3$
25	$J(x,u) = 4x^2 + 4u^2 + 2xu + 3x + u - 11$	$4x^2 - 2u + 5$
26	$J(x,u) = 7x^2 + 9u^2 + 5xu + x + 6u - 1$	$3x + u^2 - 2$
27	$J(x,u) = 9x^2 + 7u^2 + 3xu + 5x + 5u - 6$	$4x + 6u - 5$
28	$J(x,u) = 8x^2 + 3u^2 + 7xu + 2x + 6u - 5$	$-2x + 5u - 4$
29	$J(x,u) = 4x^2 + 12u^2 + 5xu + 8x + u - 11$	$x - 3u - 4$
30	$J(x,u) = 3x^2 + 6u^2 + 4xu + 15x + 3u - 9$	$2x + 2u + 5$
31	$J(x,u) = 4x^2 + 3u^2 + 6xu + 9x + 2u - 7$	$8x^2 + 7u + 2$
32	$J(x,u) = 6x^2 + 7u^2 + 4xu + 2x + 3u - 5$	$-7x + 4u^2 + 8$
33	$J(x,u) = 9x^2 + 7u^2 + 11xu + 6x + 8u - 1$	$7x^2 - 3u + 2$
34	$J(x,u) = 5x^2 + 6u^2 + 8xu + 2x + u - 9$	$6x + 7u^2 - 2$
35	$J(x,u) = 3x^2 + 2u^2 + 4xu + 8x + 8u - 6$	$9x^2 + 5u - 1$
36	$J(x,u) = 2x^2 + 5u^2 + 6xu + 5x + 8u - 15$	$-9x + 3u^2 - 7$
37	$J(x,u) = 2x^2 + 6u^2 + 2xu + 2x + 3u - 8$	$9x^2 - 3u - 7$
38	$J(x,u) = 3x^2 + 4u^2 + 3xu + 7x + 3u - 6$	$8x + 2u^2 + 5$
39	$J(x,u) = 8x^2 + 3u^2 + 9xu + 3x + 5u - 2$	$4x^2 + 2u + 5$
40	$J(x,u) = 9x^2 + 4u^2 + 5xu + 6x + 4u - 7$	$-2x + 2u^2 + 7$
41	$J(x,u) = 7x^2 + 8u^2 + 2xu + 5x + u - 2$	$4x^2 - 2u + 5$

42	$J(x,u) = 3x^2 + 8u^2 + 7xu + 3x + 3u - 2$	$3x + u^2 - 2$
43	$J(x,u) = x^2 + 9u^2 + 5xu + 2x + 6u - 6$	$4x + 6u - 5$
44	$J(x,u) = 6x^2 + 2u^2 + 4xu + 5x + 3u - 2$	$-2x + 5u - 4$
45	$J(x,u) = 7x^2 + u^2 + 2xu + 4x + 8u - 4$	$x - 3u - 4$
46	$J(x,u) = 4x^2 + 4u^2 + 6xu + 3x + 3u - 1$	$6x^2 - 5u + 9$
47	$J(x,u) = 4x^2 + 6u^2 - 7xu - 5x - 6u - 2$	$2x + 5u^2 - 1$
48	$J(x,u) = 3x^2 + 5u^2 - 5xu - 9x - 11u - 6$	$7x - 6u^2 - 2$
49	$J(x,u) = 6x^2 + 9u^2 - 2xu - 7x - 4u - 2$	$-5x + 7u^2 + 4$
50	$J(x,u) = 2x^2 + 2u^2 - 3xu - x - 6u - 4$	$5x - 8u^2 + 3$

## ЗАДАНИЕ 2. Синтез оптимального управления. Принцип максимума

### Порядок выполнения

1. Построить оптимальный в смысле заданного критерия регулятор и промоделировать его работу на заданном интервале времени.
2. Построить графики управления, переменных состояния и критерия.
3. Рассчитать критерий при отклонениях параметров регулятора от оптимальных значений.

Вар	Объект	Критерий	Начальные условия и ограничения
1	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$	$x_1(0) = x_2(0) = 0,$ $x_1(1) = 1, x_2(1) = 0$
2	$\dot{x} = -2x + u$	$J = \int_0^1 x^2(\tau) + u^2(\tau) d\tau$	$x(1) = 5$
3	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^\pi u^2(\tau) d\tau$	$x_1(0) = x_2(0) = 0,$ $x_1(\pi) = 1, x_2(\pi) = 0$
4	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$	$x_1(0) = x_2(0) = 0,$ $x_1(1) = 10, x_2(1) = 0$
5	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^4 x_1^2 + 4x_2^2 + 5u^2(\tau) d\tau$	$x_1(0) = x_2(0) = 0,$ $x_1(4) = 1, x_2(4) = 0$
6	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$J = \int_0^5 3u^2(\tau) d\tau$	$x_1(0) = x_2(0) = 0,$ $x_1(5) = 1, x_2(5) = 0$
7	$\dot{x} = u$	$J = \int_0^6 4x^2(\tau) + 9u^2(\tau) d\tau$	$x(6) = 6$
8	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -9x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^{\pi/2} u^2(\tau) d\tau$	$x_1(0) = x_2(0) = 0,$ $x_1(\pi/2) = 2,$ $x_2(\pi/2) = 0$

9	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(1) &= 100, x_2(1) = 0 \end{aligned}$
10	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^3 (x_1^2 + 2x_1 x_2 + 4x_2^2 + u^2(\tau)) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(3) &= 1, x_2(3) = 0 \end{aligned}$
11	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^9 (x_1^2 + 2x_1 x_2 + 9x_2^2 + 7u^2(\tau)) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(9) &= 1, x_2(9) = 0 \end{aligned}$
12	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^2 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(2) &= 1, x_2(2) = 0 \end{aligned}$
13	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(1) &= 2, x_2(1) = 0 \end{aligned}$
14	$\dot{x} = -4x + u$	$J = \int_0^1 2x^2(\tau) + 5u^2(\tau) d\tau$	$x(1) = 4$
15	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 6x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^\pi u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(\pi) &= 7, x_2(\pi) = 0 \end{aligned}$
16	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(1) &= 3, x_2(1) = 0 \end{aligned}$
17	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 9x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^6 3x_1^2 + 3x_2^2 + 6u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(6) &= 2, x_2(6) = 0 \end{aligned}$
18	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^9 5u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(9) &= 1, x_2(9) = 0 \end{aligned}$
19	$\dot{x} = u$	$J = \int_0^7 11x^2(\tau) + 5u^2(\tau) d\tau$	$x(7) = 7$
20	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^\pi u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(\pi) &= 2, x_2(\pi) = 0 \end{aligned}$

21	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 6x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^1 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(1) &= 10, x_2(1) = 0 \end{aligned}$
22	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^8 (x_1^2 + x_1 x_1 + 3x_2^2 + u^2(\tau)) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(8) &= 4, x_2(8) = 0 \end{aligned}$
23	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = 8x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^4 (x_1^2 + 5x_1 x_2 + 7x_2^2 + 3u^2(\tau)) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(4) &= 5, x_2(4) = 0 \end{aligned}$
24	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -6x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^9 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(9) &= 3, x_2(9) = 0 \end{aligned}$
25	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 11x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$J = \int_0^3 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(3) &= 3, x_2(3) = 0 \end{aligned}$
26	$\dot{x} = -6x + u$	$J = \int_0^4 x^2(\tau) + u^2(\tau) d\tau$	$x(4) = 8$
27	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -9x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^\pi u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(\pi) &= 4, x_2(\pi) = 0 \end{aligned}$
28	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -6x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^4 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(4) &= 70, x_2(4) = 0 \end{aligned}$
29	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 8x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^5 7x_1^2 + 3x_2^2 + 2u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(5) &= 7, x_2(5) = 0 \end{aligned}$
30	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$J = \int_0^2 5u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(2) &= 4, x_2(2) = 0 \end{aligned}$
31	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -8x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^3 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(3) &= 5, x_2(3) = 0 \end{aligned}$
32	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 3x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^4 5x_1^2 + 2x_2^2 + 7u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) &= x_2(0) = 0, \\ x_1(4) &= 3, x_2(4) = 0 \end{aligned}$

33	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^8 4u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(8) = 2, x_2(8) &= 0 \end{aligned}$
34	$\dot{x} = u$	$J = \int_0^4 8x^2(\tau) + 5u^2(\tau) d\tau$	$x(4) = 6$
35	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^{\pi/6} u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(\pi/6) &= 3, \\ x_2(\pi/6) &= 0 \end{aligned}$
36	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - 5x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^4 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(4) &= 9, \\ x_2(4) &= 0 \end{aligned}$
37	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 4x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^2 (4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2u^2(\tau)) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(2) &= 5, \\ x_2(2) &= 0 \end{aligned}$
38	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 7x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^6 (2x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4u^2(\tau)) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(6) &= 7, \\ x_2(6) &= 0 \end{aligned}$
39	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^3 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(3) = 4, x_2(3) &= 0 \end{aligned}$
40	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$J = \int_0^5 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(5) = 3, x_2(5) &= 0 \end{aligned}$
41	$\dot{x} = -2x + u$	$J = \int_0^7 x^2(\tau) + u^2(\tau) d\tau$	$x(7) = 5$
42	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^{\pi/4} u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(\pi/4) &= 7, \\ x_2(\pi/4) &= 0 \end{aligned}$
43	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_1 + u \end{cases}$	$J = \int_0^6 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(6) = 13, x_2(6) &= 0 \end{aligned}$

44	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 7x_2 + u \end{cases}$	$J = \int_0^9 2x_1^2 + 4x_2^2 + 7u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(9) &= 4, x_2(9) = 0 \end{aligned}$
45	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$	$J = \int_0^3 8u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(3) &= 9, x_2(3) = 0 \end{aligned}$
46	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 4u \end{cases}$	$J = \int_0^5 (4x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2 + 2u^2(\tau)) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(5) &= 6, \\ x_2(5) &= 3 \end{aligned}$
47	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_2, \\ \dot{x}_2 = -6x_1 + 2u \end{cases}$	$J = \int_0^4 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(4) &= 4, x_2(4) = 5 \end{aligned}$
48	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -11x_1 + 5u \end{cases}$	$J = \int_0^5 u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(5) &= 3, x_2(5) = 6 \end{aligned}$
49	$\dot{x} = -7x + 6u$	$J = \int_0^9 3x^2(\tau) + 2u^2(\tau) d\tau$	$x(9) = 7$
50	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2, \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - x_2 + 6u \end{cases}$	$J = \int_0^{\pi/2} u^2(\tau) d\tau$	$\begin{aligned} x_1(0) = x_2(0) &= 0, \\ x_1(\pi/2) &= 2, \\ x_2(\pi/2) &= 3 \end{aligned}$



### ЗАДАНИЕ 3. Синтез оптимального регулятора для линейного стационарного объекта

1. Рассчитать коэффициенты оптимального регулятора для линейного объекта

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0).$$

Структура регулятора  $u = -Kx$ . Расчет произвести на основе уравнения Риккати

$$A^T P + PA + Q - Pbr^{-1}b^T P = 0,$$

$$K = r^{-1}b^T P,$$

и критерия качества вида

$$J = \int_0^{\infty} x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau)d\tau.$$

2. Произвести моделирование замкнутой системы при начальных условиях  $x(0) = [1, 0]^T$ . Построить графики моделирования  $x_1, x_2, u$  и  $J$ . Рассчитать установившееся значение  $J$ .
3. Незначительно отклонить расчетные значения  $K$  так, чтобы система сохранила устойчивость, и повторить п. 2 при том же времени моделирования. Сравнить с результатами п. 2 и сделать выводы.
4. Провести моделирование для трех разных значений параметра  $r$  и трех разных матриц  $Q$  при условиях, что  $r > 0$ ,  $Q = kQ^*$ ,  $k$  – положительный коэффициент, матрица  $Q^*$  равна исходной матрице  $Q$  в соответствии с вариантом задания. По результатам экспериментов построить графики моделирования  $x_1, x_2, u$  и  $J$ .

Вар.	Матрица $A$	Матрица $b$	Матрица $Q$	Параметр $r$
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	2

3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	3
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	4
5	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	5
6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	1
7	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	2
8	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	3
9	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	4
10	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	5
11	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	1
12	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	1
13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	2
14	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$	3
15	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	4

16	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	5
17	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	1
18	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	2
19	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	3
20	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	4
21	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	5
22	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	1
23	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	1
24	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	2
25	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	3
26	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	4
27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	5
28	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	1

29	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	2
30	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	3
31	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	4
32	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	5
33	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	1
34	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$	2
35	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	3
36	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	4
37	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	5
38	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$	1
39	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	1
40	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	2
41	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	3

42	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	4
43	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	5
44	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	1
45	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	2
46	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	3
47	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	4
48	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	5
49	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	1
50	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	2

#### **ЗАДАНИЕ 4. Синтез оптимального управления. Метод динамического программирования Беллмана**

1. Дан линейный объект управления

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0)$$

и критерий качества

$$J = \int_0^{\infty} x^T(\tau)Qx(\tau) + ru^2(\tau)d\tau.$$

Построить оптимальный регулятор с помощью метода динамического программирования Беллмана и промоделировать его работу на заданном интервале времени.

2. Параметры  $A, b, Q, r$  взять из задания 3. Начальные условия выбрать  $x(0) = [1, 0]^T$ . Построить графики управления  $u$ , переменных состояния  $x_1, x_2$  и критерия  $J$ .
3. Построить критерий при отклонениях параметров регулятора от оптимальных значений.

## ЗАДАНИЕ 5. Синтез оптимального наблюдателя (фильтра Калмана) и ЛКГ-синтез

Дан объект управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu + Gw, \quad x(0), \\ y &= Cx + v,\end{aligned}$$

где  $w, v$  — сигналы вида “белый шум” с нулевыми математическими ожиданиями  $M\{w\} = M\{v\} = 0$  и автокорреляционными функциями  $M\{w(t)w^T(\tau)\} = W\delta(t - \tau)$ ,  $M\{v(t)v^T(\tau)\} = V\delta(t - \tau)$  с известными постоянными спектральными плотностями (энергиями)  $W$  и  $V$  соответственно.

Задача заключается в построении оптимального наблюдателя, генерирующего оценку  $\hat{x}$ :

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq \Delta \quad \forall t \geq T,$$

где  $\Delta$  и  $T$  — максимальная ошибка и время настройки наблюдателя соответственно. Критерий оптимальности представлен следующим функционалом:

$$J = M\{e_H^T e_H\}$$

где  $e_H = x - \hat{x}$  — ошибка наблюдения,  $M\{\cdot\}$  — математическое ожидание.

Наблюдатель задается следующей структурой:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + L(y - C\hat{x}) \quad \hat{x}(0),$$

где матрица  $L$  рассчитывается на основе уравнения Риккати

$$\begin{aligned}AP + PA^T + GWG^T - PC^T V^{-1} CP &= 0, \\ L &= PC^T V^{-1},\end{aligned}$$

### Порядок выполнения

1. На основе известных матриц  $A, b$ , приведенных в таблице, матрицы  $C = [1 \ 0]$ , матрицы  $G = I$ , а также  $G, W$  и  $V$  рассчитать матрицу  $L$ .

2. Произвести моделирование замкнутой системы при начальных условиях  $x(0) = [1, 0]^T$ . Построить графики моделирования  $e_{H1}$ ,  $e_{H2}$  и  $J$ . Рассчитать  $J$ . Моделирование провести для  $u = \sin t$ .
3. Незначительно отклонить расчетные значения  $L$  так, чтобы наблюдатель сохранил устойчивость и повторить п. 2 при том же времени моделирования. Сравнить с результатами п. 2 и сделать выводы.
4. Отклонить значения  $W$  так, чтобы матрица оставалась положительно определенной и симметричной и повторить п. 2 при том же времени моделирования. Сравнить с результатами п. 2 и сделать выводы.
5. Отклонить значение  $V$  так, чтобы величина  $V$  оставалась положительной и повторить п. 3 при том же времени моделирования. Сравнить с результатами п. 3 и сделать выводы.
6. Построить систему замкнутую линейным квадратичным гауссовским регулятором  $u = -K\hat{x}$ . Сигнал  $\hat{x}$  сформировать на базе фильтра Калмана, для расчета матрицы  $K$  взять  $Q$  и  $r$  из задания 2.

Вар.	Матрицы $A, b$	Матрица $W$	Парам. $V$	Вар.	Матрицы $A, b$	Матрица $W$	Парам. $V$
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$	1	26	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$	1
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix}$	2	27	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 3.5 \\ 3.5 & 4 \end{bmatrix}$	2
3	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	3	28	$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$	3



4	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	4	29	$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$	4
5	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$	5	30	$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 3.5 \\ 3.5 & 5 \end{bmatrix}$	5
6	$\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	1	31	$\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	1
7	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2.5 \\ 2.5 & 4 \end{bmatrix}$	2	32	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4.5 \\ 4.5 & 6 \end{bmatrix}$	2
8	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$	3	33	$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$	3
9	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	4	34	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$	4
10	$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	5	35	$\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	5

	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$		
11	$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	7	36	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$	7
12	$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$	1	37	$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$	1
13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 4.5 \\ 4.5 & 6 \end{bmatrix}$	2	38	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 7.5 \\ 7.5 & 8 \end{bmatrix}$	2
14	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$	3	39	$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$	3
15	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	4	40	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$	4
16	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$	4	41	$\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	3

17	$\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	5	42	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$	4
18	$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$	7	43	$\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	5
19	$\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$	1	44	$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$	7
20	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$	2	45	$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	1
21	$\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	3	46	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$	2
22	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	4	47	$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$	3
23	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	4	48	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$	4

	$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$				$\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$		
24	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	5	49	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	5
25	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$	6	50	$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	6

## ЗАДАНИЕ 6. Синтез оптимального управления. $H_\infty$ -оптимизация

1. Дан возмущённый линейный объект управления

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_f f, \quad x(0).$$

Построить  $H_\infty$ -оптимальный регулятор вида  $u = Kx$ . Расчет произвести на основе уравнения Риккати

$$A^T P + PA + Q - PBB^T P + \gamma^{-2} PB_f B_f^T P = 0,$$

$$K = -B^T P.$$

2. Экспериментально определить минимальное значение коэффициента  $\gamma = \gamma_{\min}$ , при котором существует положительно полуопределённая матрица  $P$  в качестве решения уравнения Риккати.

3. Начальные условия выбрать  $x(0) = [1, 0]^T$ , возмущение  $f = 10\sin 6t + 5\cos 2t + 4\cos 3t + 3\cos 8t$ .

4. Для  $\gamma_{\min}$  построить графики управления  $u$  и переменных состояния  $x_1, x_2$ .

5. Определить  $H_\infty$ -нормы передаточных функций  $C_1(Is - (A + BK))^{-1}B_f$  и  $C_2(Is - (A + BK))^{-1}B_f$ , где  $C_1 = [1 \ 0]$  и  $C_2 = [0 \ 1]$ .

6. Определить  $H_\infty$ -норму передаточной функции  $(Is - (A + BK))^{-1}B_f$

Вар.	A	B	B <sub>f</sub>	Q	Вар.	A	B	B <sub>f</sub>	Q
1	$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	26	$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	27	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	28	$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$	29	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	30	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

6	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	31	$\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	32	$\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	33	$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
9	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	34	$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$
10	$\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	35	$\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
11	$\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	36	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
12	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	37	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
13	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	38	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$
14	$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	39	$\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
15	$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	40	$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -7 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
16	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	41	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
17	$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	42	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
18	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	43	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
19	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$	44	$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
20	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	45	$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

21	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	46	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
22	$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$	47	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
23	$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	48	$\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$
24	$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	49	$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
25	$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$	50	$\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$