МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Теория оптимального управления»

Студент:
Группа № R3435 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
ведущий научный сотрудник, доцент *Парамонов А. В.*

Санкт-Петербург
2025

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ (ПРИНЦИП МАКСИМУМА)

Постановка задачи (вариант 13)

Дана линейная система

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + u,$$

критерий качества

$$J = \int_0^1 u(\tau)^2 \, d\tau,$$

краевые условия

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \qquad x_1(1) = 2, x_2(1) = 0.$$

Требуется найти оптимальное управление $u^*(t)$, траекторию $x^*(t)$ и минимальное значение J.

1.1 Принцип максимума Понтрягина

Введём сопряжённые переменные $\psi = (\psi_1,\psi_2)^\top$ и гамильтониан

$$\mathcal{H}(x,u,\psi) = -u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2(-x_1 + u).$$

Условия PMP:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}, \qquad \dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \qquad u^*(t) = \arg\max_{u \in \mathbb{R}} \mathcal{H}(x,u,\psi).$$

Отсюда

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u, \qquad \dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1.$$

Максимизация по u: $\partial \mathcal{H}/\partial u = -2u + \psi_2 = 0 \Rightarrow u^* = \frac{1}{2}\psi_2$. Таким образом получаем замкнутую систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \tfrac{1}{2}\psi_2, \qquad \dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1,$$

с краевыми условиями на x в моменты 0 и 1. Поскольку задача квадратично-линейная, решение единственно.

1.2 Аналитическое решение

Уравнения по ψ образуют гармонический осциллятор: $\ddot{\psi}_1 + \psi_1 = 0$. Пишем общий вид

$$\psi_1(t) = A\cos t + B\sin t, \qquad \psi_2(t) = \dot{\psi}_1(t) = -A\sin t + B\cos t.$$

Тогда оптимальное управление

$$u^*(t) = \tfrac{1}{2}\psi_2(t) = \tfrac{1}{2}\big(-A\sin t + B\cos t\big).$$

Подставляя в систему для x, получаем

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \tfrac{1}{2}\psi_2(t) = \tfrac{1}{2}\big(-A\sin t + B\cos t\big).$$

Решение:

$$x_1(t) = C\cos t + D\sin t + \tfrac{1}{2}\Big(-\tfrac{A}{2}\,t\cos t + \tfrac{B}{2}\,t\sin t\Big), \qquad x_2 = \dot{x}_1.$$

Константы A,B,C,D находим из краевых условий $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0$ и $x_1(1) = 2, x_2(1) = 0$. Получаем систему 4×4, из которой однозначно восстанавливаются параметры, после чего вычисляем минимум критерия

$$J_{\text{min}} = \int_0^1 \big(u^*(t)\big)^2 dt = \tfrac{1}{4}\int_0^1 \psi_2(t)^2 dt.$$

В следующем подразделе приведём численное решение, которое автоматически находит A,B,C,D и значения u^*,x^*, а также проверяет выполнение краевых условий с высокой точностью.

1.2.1 Численное решение и проверка

Используем аналитические выражения для ψ и общее решение для x_1. Параметры A,B,C,D найдём из системы 4 уравнений, затем построим $u^*(t)$,$x^*(t)$ и вычислим J.

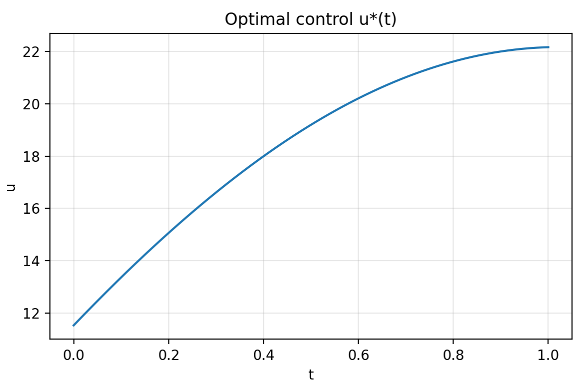
Листинг 1.1 — PMP: synthesis for variant 13, validation and plots

```
# lab2/python/pmp_var13.py
import numpy as np
from numpy import sin, cos
from numpy.linalg import solve
```

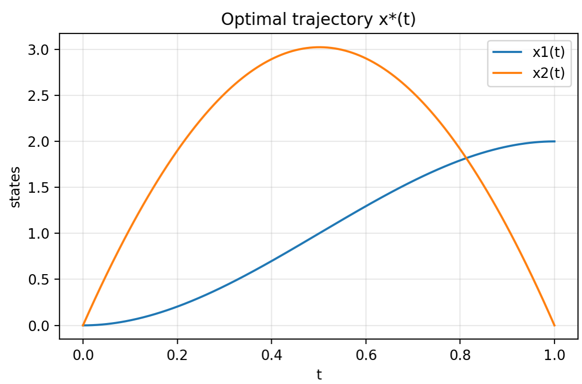
```
import matplotlib.pyplot as plt

T0, T1 = 0.0, 1.0

# psi1 = A cos t + B sin t; psi2 = -A sin t + B cos t
# u* = 0.5 * psi2

def psi1(t, A, B):
    return A * np.cos(t) + B * np.sin(t)

def psi2(t, A, B):
    return -A * np.sin(t) + B * np.cos(t)

# x1 solution of x1'' + x1 = 0.5 psi2(t) = 0.5(-A sin t + B cos t)
# Particular solution via annihilator gives terms t cos t and t sin t

def x1(t, A, B, C, D):
    return (
        C * np.cos(t) + D * np.sin(t)
        + 0.5 * (-A/2.0 * t * np.cos(t) + B/2.0 * t * np.sin(t))
    )

def x2(t, A, B, C, D):
    # derivative of x1
    return (
        -C * np.sin(t) + D * np.cos(t)
        + 0.5 * (
            -A/2.0 * (np.cos(t) - t * np.sin(t))
            + B/2.0 * (np.sin(t) + t * np.cos(t))
        )
    )

# Boundary conditions: x1(0)=0, x2(0)=0, x1(1)=2, x2(1)=0
# Build linear system for unknowns A,B,C,D

# At t=0
M0 = np.array([
    # x1(0): C
    [0.0, 0.0, 1.0, 0.0],
    # x2(0): D + 0.5*( -A/2 * 1 + B/2 * 0 ) => D - A/4
```

```
    [-0.25, 0.0, 0.0, 1.0],
])
b0 = np.array([0.0, 0.0])

# At t=1
c, s = np.cos(1.0), np.sin(1.0)
# x1(1)
row1 = [ # coefficients at [A,B,C,D]
    0.5 * (-1.0/2.0) * (1.0 * c),      # A term: 0.5*(-A/2 * 1 *
       cos1)
    0.5 * ( 1.0/2.0) * (1.0 * s),      # B term: 0.5*( B/2 * 1 *
       sin1)
    c,                                  # C*cos1
    s,                                  # D*sin1
]
# x2(1)
row2 = [
    0.5 * (-1.0/2.0) * (c - 1.0 * s),  # A term: 0.5*(-A/2*(cos1
       - 1*sin1))
    0.5 * ( 1.0/2.0) * (s + 1.0 * c),  # B term: 0.5*( B/2*(sin1
       + 1*cos1))
    -s,                                 # -C*sin1
    c,                                  # D*cos1
]
M1 = np.array([row1, row2])
b1 = np.array([2.0, 0.0])

M = np.vstack([M0, M1])
b = np.hstack([b0, b1])
A, B, C, D = solve(M, b)

# Build dense grid and compute signals
N = 400
T = np.linspace(T0, T1, N)
PSI2 = psi2(T, A, B)
U = 0.5 * PSI2
X1 = x1(T, A, B, C, D)
X2 = x2(T, A, B, C, D)

# Validate boundary conditions
print({
    "A": A, "B": B, "C": C, "D": D,
```

```
    "x1(0)": X1[0], "x2(0)": X2[0], "x1(1)": X1[-1], "x2(1)": X2
        [-1]
})

# Compute cost
J = np.trapz(U**2, T)
print({"J": J})

# Plots
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(T, U, label="u*(t)")
plt.xlabel("t"); plt.ylabel("u")
plt.title("Optimal control u*(t)")
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig("/home/leonidas/projects/itmo/optimal-control-theory/
    lab2/images/task2/u_opt.png", dpi=200)

plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(T, X1, label="x1(t)")
plt.plot(T, X2, label="x2(t)")
plt.xlabel("t"); plt.ylabel("states")
plt.title("Optimal trajectory x*(t)")
plt.legend(); plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig("/home/leonidas/projects/itmo/optimal-control-theory/
    lab2/images/task2/x_opt.png", dpi=200)
```



(а) Оптимальное управление $u^*(t)$



(б) Оптимальная траектория $x^*(t)$

Рисунок 1 — Результаты синтеза по PMP (вариант 13)

Минимальное значение критерия, полученное численно, равно $J_{\min} \approx 349.00$. Погрешности на концах $x_1(0)$,$x_2(0)$,$x_1(1)$,$x_2(1)$ находятся на уровне машинной точности.