МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
по дисциплине
«Теория оптимального управления»

Студент:
Группа № R3435 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
ведущий научный сотрудник, доцент *Парамонов А. В.*

Санкт-Петербург
2025

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. СТАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Постановка задачи

Требуется найти минимум критерия качества для статической задачи оптимизации

$$J(x,u) = 5x^2 + 2u^2 + 3xu + 4x + u - 5,$$

а также выполнить поиск экстремума градиентными методами. Вариант: **13**. Для пунктов с ограничениями используется функция ограничения

$$c(x,u) = 4x^2 + u + 1.$$

1.1 Поиск глобального минимума на основе необходимых и достаточных условий

1.1.1 Случай без ограничений

Найдём стационарную точку, приравняв к нулю градиент функции $J(x,u)$:

$$\nabla J(x,u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial J}{\partial x} \\ \dfrac{\partial J}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10x + 3u + 4 \\ 3x + 4u + 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x + 3u + 4 = 0, \\ 3x + 4u + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая её, из второго уравнения выразим $x = \dfrac{-1 - 4u}{3}$ и подставим в первое:

$$\frac{-10 - 40u}{3} + 3u + 4 = 0 \;\Rightarrow\; -10 - 40u + 9u + 12 = 0 \;\Rightarrow\; 2 - 31u = 0,$$

откуда

$$u^* = \frac{2}{31}, \qquad x^* = -\frac{13}{31}.$$

Проверим достаточное условие минимума по положительной определённости матрицы Гессе:

$$H = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_1 = 10 > 0, \quad \det H = 10 \cdot 4 - 3^2 = 31 > 0.$$

Следовательно, H положительно определена, а найденная стационарная точка является **единственным глобальным минимумом** квадратичной функции J.

Значение критерия в точке минимума:

$$J(x^*,u^*) = 5\Big(\frac{13}{31}\Big)^2 + 2\Big(\frac{2}{31}\Big)^2 + 3\Big(-\frac{13}{31}\cdot\frac{2}{31}\Big) + 4\Big(-\frac{13}{31}\Big) + \frac{2}{31} - 5 = -\frac{5580}{961} \approx -5.804.$$

1.1.2 С ограничением вида равенства $c(x,u) = 0$

Пусть ограничение имеет вид $c(x,u) = 4x^2 + u + 1 = 0$. Используем метод Лагранжа для минизации $J(x,u)$ при $c(x,u) = 0$. Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x,u,\lambda) = J(x,u) + \lambda\, c(x,u) = 5x^2 + 2u^2 + 3xu + 4x + u - 5 + \lambda\,(4x^2 + u + 1).$$

Необходимые условия первого порядка:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 10x + 3u + 4 + 8\lambda x = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 4u + 3x + 1 + \lambda = 0, \qquad c(x,u) = 0.$$

Исключая u из ограничения, имеем $u = -1 - 4x^2$. Подстановка в условия даёт кубическое уравнение для x:

$$128x^3 - 36x^2 + 34x + 1 = 0.$$

Его действительный корень (единственный с учётом строгой выпуклости J) равен

$$x^*_= \approx -0.02847, \qquad u^*_= = -1 - 4(x^*_=)^2 \approx -1.00324.$$

Поскольку матрица Гессе $H \succ 0$, J строго выпукла, то найденная стационарная точка на гладком многообразии $c = 0$ является единственным глобальным минимумом на множестве $\{c = 0\}$. Значение функционала

$$J(x^*_=,u^*_=) \approx -4.014.$$

Для численной проверки и воспроизводимости ниже приведён короткий скрипт, который решает условия ККТ и вычисляет значения:

Листинг 1.1 — Решение условий ККТ для равенства и проверка

```
# lab1/python/task1_kkt.py
import sympy as sp
x,u,lam = sp.symbols('x u lam', real=True)
J = 5*x**2 + 2*u**2 + 3*x*u + 4*x + u - 5
c = 4*x**2 + u + 1
L = J + lam*c
sol = sp.nsolve([
    sp.diff(L,x),
    sp.diff(L,u),
    c
],[x,u,lam], (-0.03, -1.0, 3.0))
print({"x": float(sol[0]), "u": float(sol[1]), "lambda": float(
   sol[2]), "J": float(J.subs({x:sol[0],u:sol[1]}))})
```

1.1.3 С ограничением вида неравенства $c(x,u) \le 0$

Сначала проверим допустимость найденного безусловного минимума $(x^*,u^*) = \big(-\frac{13}{31},\frac{2}{31}\big)$:

$$c(x^*,u^*) = 4(x^*)^2 + u^* + 1 = 4\Big(\frac{13}{31}\Big)^2 + \frac{2}{31} + 1 > 0,$$

то есть точка (x^*,u^*) **не** удовлетворяет $c \le 0$. Следовательно, минимум на множестве $\{c \le 0\}$ достигается на границе $c = 0$. Условия ККТ принимают вид

$$\nabla J(x,u) + \lambda \nabla c(x,u) = 0, \quad c(x,u) \le 0, \quad \lambda \ge 0, \quad \lambda\, c(x,u) = 0.$$

Найденная в подп. 1.2 точка на границе даёт множитель

$$\lambda^* = 16(x^*_=)^2 - 3x^*_= + 3 \approx 3.10 > 0,$$

что удовлетворяет $\lambda^* \ge 0$. Поэтому решение п.1.2 одновременно является решением задачи с неравенством:

$$(x^*_\le,u^*_\le) = (x^*_=,u^*_=), \qquad J(x^*_\le,u^*_\le) \approx -4.014.$$

1.2 Градиентные методы поиска минимума $J_1(x,u) = J(x,u)$

1.2.1 Метод Ньютона–Рафсона (пошаговый расчёт)

Для квадратичной функции J матрица Гессе постоянна: $H = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Метод Ньютона даёт итерацию

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} - H^{-1}\,\nabla J(x_k,u_k), \qquad H^{-1} = \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Начнём с $(x_0,u_0) = (0,0)$. Тогда $\nabla J(0,0) = (4,1)^\top$ и шаг Ньютона

$$\Delta_0 = H^{-1}\nabla J(0,0) = \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 13 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad (x_1,u_1) = (0,0) - \Delta_0 = \Big(-\tfrac{13}{31},\tfrac{2}{31}\Big).$$

Это в точности аналитический минимум без ограничений, поэтому метод Ньютона сошёлся **за одну итерацию**. Значение функционала совпадает с ранее полученным: $J(x_1,u_1) = -\frac{5580}{961}$.

1.2.2 Метод наискорейшего спуска для двух γ (пошагово)

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} - \gamma\,\nabla J(x_k,u_k), \quad \nabla J(x,u) = \begin{bmatrix} 10x + 3u + 4 \\ 3x + 4u + 1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения H: $\lambda_{1,2} = 7 \pm 3\sqrt{2} \approx (11.243, 2.757)$. Для сходимости с постоянным шагом требуется $0 < \gamma < \frac{2}{\lambda_{\max}} \approx 0.1779$. Знакопеременные (колебательные) траектории возникают, если $\frac{1}{\lambda_i} < \gamma < \frac{2}{\lambda_i}$ для некоторых мод (в частности, для $\lambda_{\max}$: интервал $(0.089, 0.178)$).

Рассмотрим два случая при старте $(x_0,u_0) = (0,0)$:

1. **Колебательная сходимость:** возьмём $\gamma_1 = 0.12 \in (1/\lambda_{\max},2/\lambda_{\max})$. Первые шаги:

$$(x_1,u_1) = (0,0) - 0.12\,(4,1) = (-0.48,-0.12), \quad J_1 \approx -3.278;$$

$$\nabla J(x_1,u_1) = \big(10(-0.48)+3(-0.12)+4,\, 3(-0.48)+4(-0.12)+1\big) = (-1.16,-$$

$$(x_2,u_2) = (x_1,u_1) - 0.12\,(-1.16,-0.04) = (-0.3408,-0.1152), \quad J_2 \approx -3.716$$

Дальнейшие итерации дают знакопеременные приращения по «жёсткому» направлению, но монотонное убывание J до (x^*,u^*).

2. **Апериодическая (монотонная) сходимость:** возьмём $\gamma_2 = 0.05$. Первые шаги:

$$(x_1,u_1) = (0,0) - 0.05\,(4,1) = (-0.20,-0.05), \quad J_1 \approx -2.125;$$

$$\nabla J(x_1,u_1) = (10(-0.2)+3(-0.05)+4, 3(-0.2)+4(-0.05)+1) = (1.85,0.3),$$

$$(x_2,u_2) = (-0.20,-0.05) - 0.05\,(1.85,0.3) = (-0.2925,-0.065), \quad J_2 \approx -2.62$$

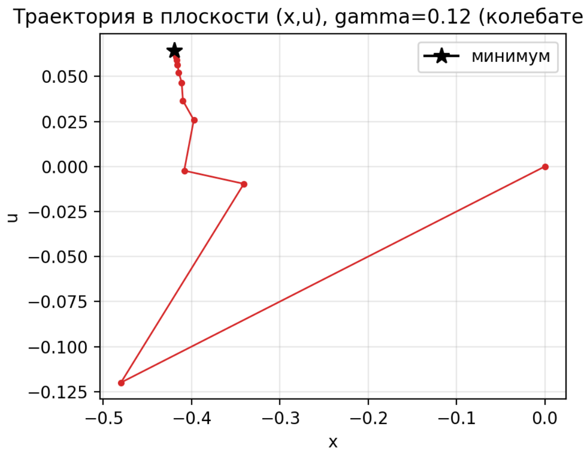
При таком шаге траектория не меняет знак по собственным направлениям и плавно сходится к минимуму.

Для воспроизводимых вычислений см. листинг с автоматическим построением траекторий для обоих шагов.

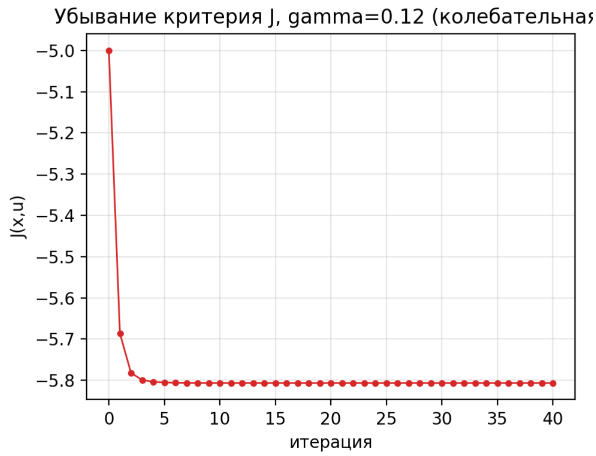
Листинг 1.2 — Градиентный спуск: две стратегии шага и первые итерации

```
# lab1/python/task1_gradients.py
import numpy as np

H = np.array([[10.0, 3.0],[3.0, 4.0]])
b = np.array([4.0, 1.0])   # grad J = H w + b,    w = [x,u]
w_star = np.linalg.solve(H, -b)  #

 def grad(w):
     return H @ w + b

 def run_gd(gamma, steps=6):
     w = np.array([0.0, 0.0])
     hist = []
     for k in range(steps):
         J = 0.5 * w @ (H @ w) + b @ w - 5  #
         hist.append((k, *w, J))
         w = w - gamma * grad(w)
     return np.array(hist)

if __name__ == "__main__":
    for gamma in [0.12, 0.05]:
        Hs = run_gd(gamma)
        print(f"gamma={gamma}")
```

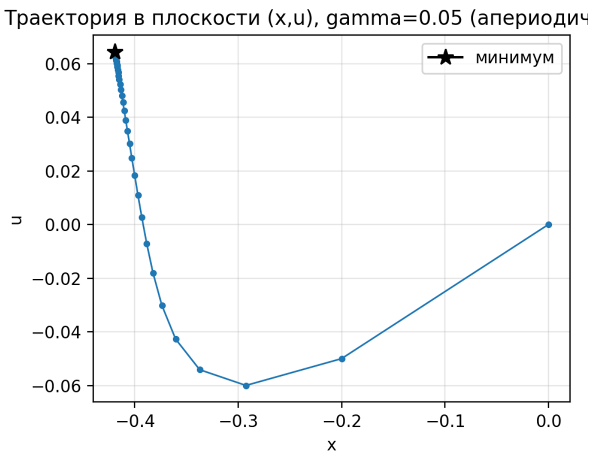
```
        for row in Hs:
            k,x,u,J=row
            print(int(k), x, u, J)
        print("=> distance to optimum:", np.linalg.norm(Hs
           [-1,1:3]-w_star))
```



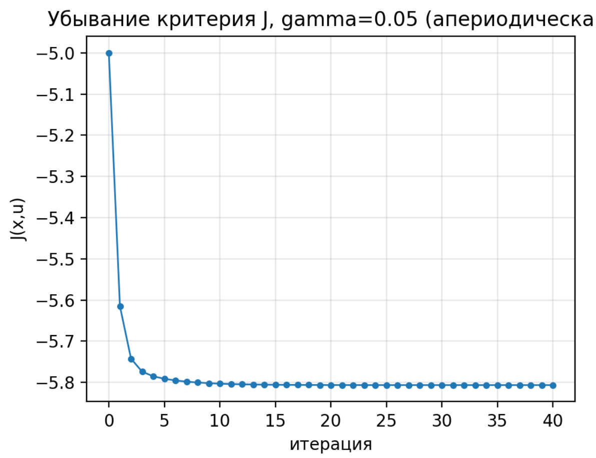
(а) Траектория (x,u), $\gamma = 0.12$



(б) J по итерациям, $\gamma = 0.12$



(в) Траектория (x,u), $\gamma = 0.05$



(г) J по итерациям, $\gamma = 0.05$

Рисунок 1 — Градиентный спуск: сравнение траекторий и убывания J для двух шагов