МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«Практическая линейная алгебра»

по теме:
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Студент:
Группа № R3435 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
техник, ассистент *Догадин Е. В.*

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются линейные динамические системы второго порядка как в непрерывном, так и в дискретном времени. Динамические системы являются важным инструментом для моделирования различных физических, биологических и технических процессов.

Цель работы: изучение свойств устойчивости линейных динамических систем второго порядка, исследование влияния собственных чисел на характер движения системы и анализ физических интерпретаций.

Задачи:

1. Создание и анализ непрерывных динамических систем с различными свойствами устойчивости
2. Исследование дискретных динамических систем с заданными собственными числами
3. Анализ осциллятора и его физических интерпретаций

Задание 1. Непрерывные динамические системы

Постановка задачи

Рассматриваются непрерывные линейные динамические системы второго порядка вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{1}$$

Заданы два неколлинеарных вектора $v_1 = (1, 2)$ и $v_2 = (2, -1)$, не лежащих на координатных осях. Требуется создать шесть различных систем с заданными свойствами.

Система 1: Асимптотически устойчива с инвариантными подпространствами

Требование: Система асимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.

Решение: Создаем матрицу A с собственными числами $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ и собственными векторами v_1, v_2:

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{2}$$

где $P = [v_1, v_2]$.

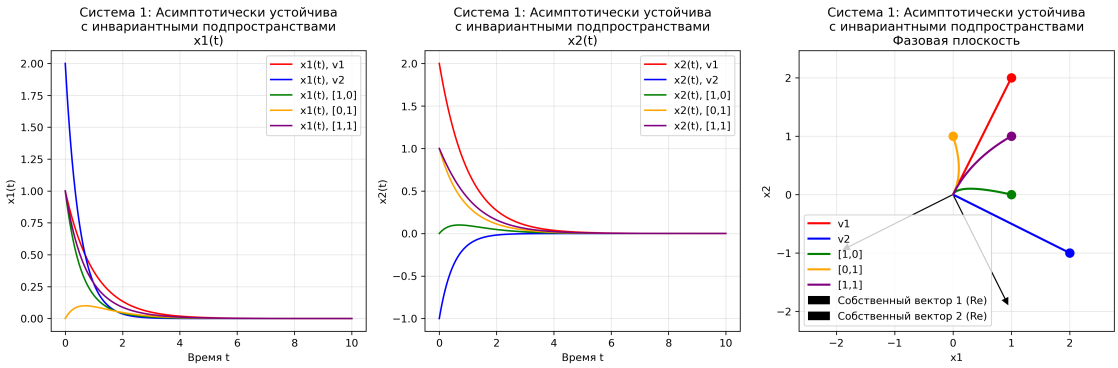

Рисунок 1 — Система 1: Асимптотически устойчива с инвариантными подпространствами

Анализ:

– Собственные числа: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ (оба отрицательные)
– Собственные векторы: $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, -1)$
– Система асимптотически устойчива, так как все собственные числа имеют отрицательные вещественные части
– Траектории, начинающиеся на собственных векторах, остаются в соответствующих подпространствах

Система 2: Неустойчива с дефектной матрицей

Требование: Система неустойчива, при этом у матрицы A не существует двух неколлинеарных собственных векторов.

Решение: Используем жорданову клетку с собственным числом $\lambda = 1$ кратности 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

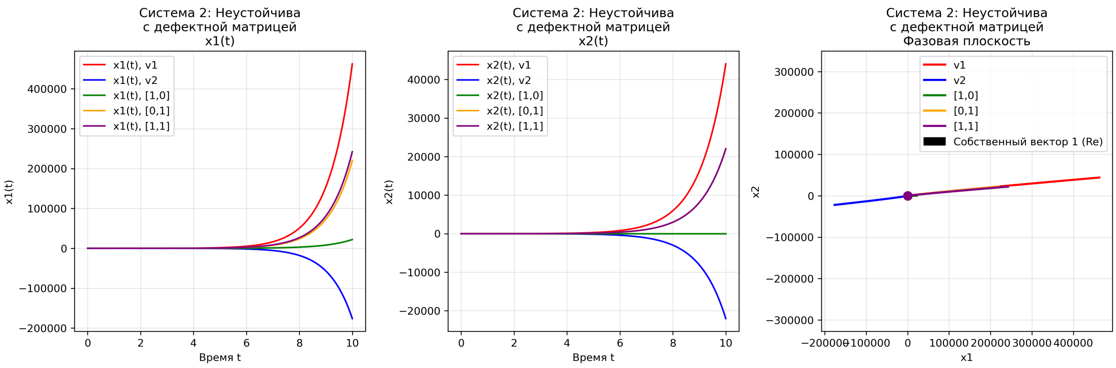

Рисунок 2 — Система 2: Неустойчива с дефектной матрицей

Анализ:

- Собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (оба положительные)
- Матрица дефектная - имеет только один линейно независимый собственный вектор
- Система неустойчива, так как собственные числа положительные
- Траектории экспоненциально растут

Система 3: Неустойчива, но $v_1 \to 0$

Требование: Система неустойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Решение: Создаем матрицу с собственными числами $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ и собственными векторами v_1, v_2:

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \tag{4}$$

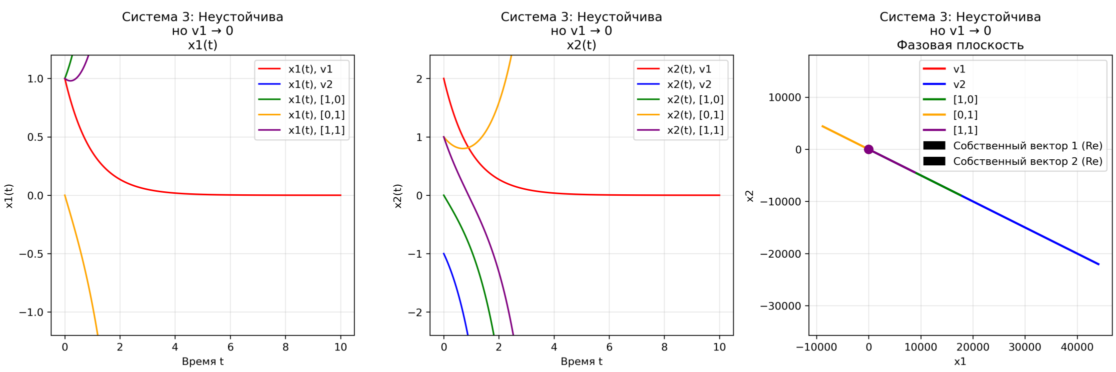

Рисунок 3 — Система 3: Неустойчива, но $v_1 \to 0$

Анализ:

– Собственные числа: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ (одно отрицательное, одно положительное)
– Система неустойчива из-за положительного собственного числа
– Траектории, начинающиеся на v_1 (собственный вектор с отрицательным собственным числом), стремятся к нулю
– Траектории, начинающиеся на v_2 (собственный вектор с положительным собственным числом), растут

Система 4: Асимптотически устойчива с комплексными собственными векторами

Требование: Система асимптотически устойчива, при этом матрица A имеет комплексные собственные векторы вида $v_1 \pm v_2 i$.

Решение: Создаем матрицу с комплексными собственными числами $\lambda = -0.5 \pm 0.5i$:

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \tag{5}$$

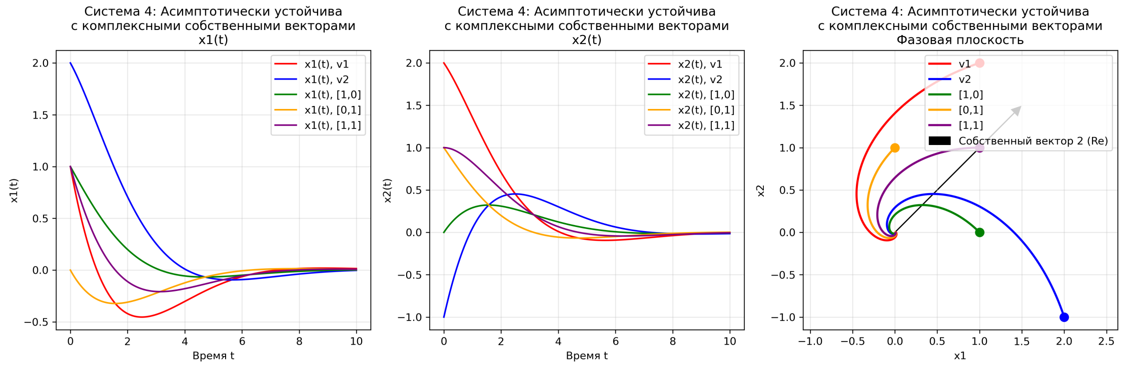

Рисунок 4 — Система 4: Асимптотически устойчива с комплексными собственными векторами

Анализ:

– Собственные числа: $\lambda = -0.5 \pm 0.5i$ (отрицательные вещественные части)
– Собственные векторы: $v_1 \pm v_2 i$ (комплексные)
– Система асимптотически устойчива, так как вещественные части собственных чисел отрицательные
– Траектории затухают с колебаниями

Система 5: Неустойчива с комплексными собственными векторами

Требование: Система неустойчива, при этом матрица A имеет такие же собственные векторы, как в предыдущем пункте.

Решение: Создаем матрицу с комплексными собственными числами $\lambda = 0.5 \pm 0.5i$:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

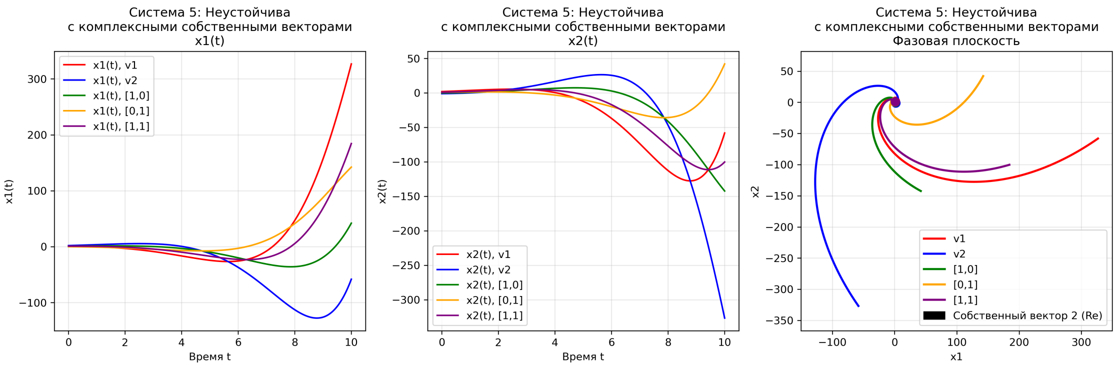

Рисунок 5 — Система 5: Неустойчива с комплексными собственными векторами

Анализ:

- Собственные числа: $\lambda = 0.5 \pm 0.5i$ (положительные вещественные части)
- Собственные векторы: $v_1 \pm v_2 i$ (комплексные)
- Система неустойчива, так как вещественные части собственных чисел положительные
- Траектории растут с колебаниями

Система 6: Нейтрально устойчива

Требование: Система не является асимптотически устойчивой, но не является и неустойчивой, при этом матрица A имеет собственные векторы такие же, как в пункте 4.

Решение: Создаем матрицу с чисто мнимыми собственными числами $\lambda = \pm i$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Рисунок 6 — Система 6: Нейтрально устойчива с чисто мнимыми собственными числами

Анализ:

– Собственные числа: $\lambda = \pm i$ (чисто мнимые)
– Собственные векторы: $v_1 \pm v_2 i$ (комплексные)
– Система нейтрально устойчива, так как вещественные части собственных чисел равны нулю
– Траектории представляют собой замкнутые орбиты (периодические движения)

Задание 2. Дискретные динамические системы

Постановка задачи

Рассматриваются дискретные линейные динамические системы второго порядка вида:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(k) \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{8}$$

Требуется создать системы с заданными собственными числами и исследовать их поведение.

Системы с различными собственными числами

Созданы следующие системы:

1. $\lambda_{1,2} = -1$ - система с отрицательными собственными числами
2. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$ - система с комплексными собственными числами, модуль которых равен 1

3. $\lambda_{1,2} = \pm i$ - система с чисто мнимыми собственными числами
4. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i$ - система с комплексными собственными числами, модуль которых равен 1
5. $\lambda_{1,2} = 1$ - система с положительными собственными числами

Матрицы систем (Задание 2)

Во всех случаях матрицы строились как подобные заданным жордановым/реальным блочно-вращательным формам J:

$$A = PJP^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \ \det P = -1 \neq 0.$$

Выбор подобия исключает диагональный или канонический жорданов вид у A, сохраняя нужные собственные числа.
Базовые формы J:

$$J_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$R(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ (a \pm bi). \tag{10}$$

Соответствующие матрицы $A = PJP^{-1}$:

$$A_1 = PJ_{-1}P^{-1}, \qquad A_2 = PR\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)P^{-1}, \quad A_3 = PR(0,1)P^{-1}, \tag{11}$$

$$A_4 = PR\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)P^{-1}, \quad A_5 = PJ_1P^{-1}, \qquad A_{12} = PJ_0P^{-1}. \tag{12}$$

Масштабирования выполнялись умножением базовых форм: $c = 0.5$, $d = 2$:

$$A_6 = P(cJ_{-1})P^{-1}, \qquad A_7 = P(cR(0,1))P^{-1}, \qquad A_8 = P(cJ_1)P^{-1}, \tag{13}$$

$$A_9 = P(dJ_{-1})P^{-1}, \qquad A_{10} = P(dR(0,1))P^{-1}, \qquad A_{11} = P(dJ_1)P^{-1}. \tag{14}$$

Траектории всех систем (Задание 2)

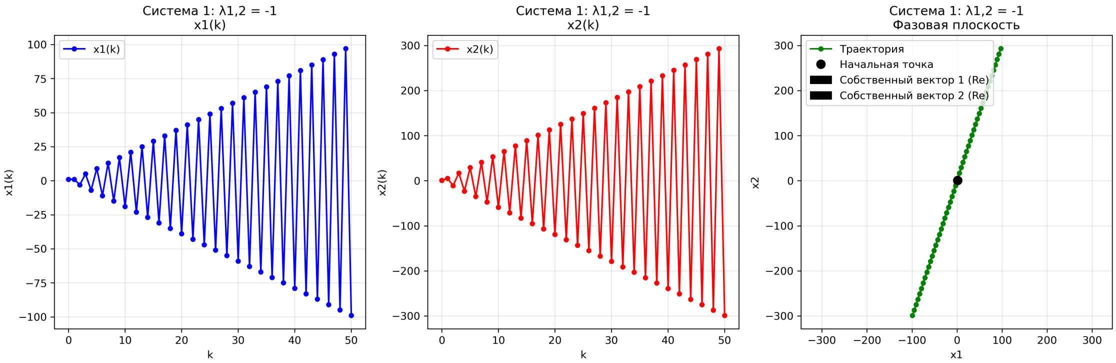

Рисунок 7 — Система 1: $\lambda_{1,2} = -1$

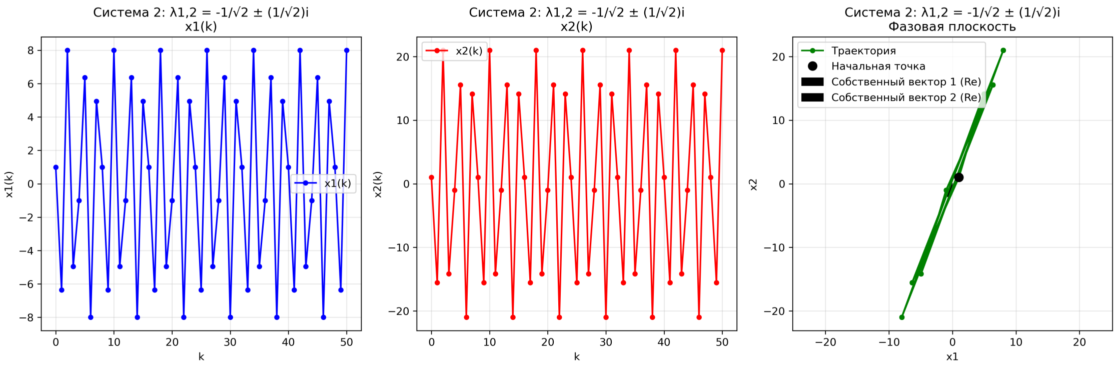

Рисунок 8 — Система 2: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

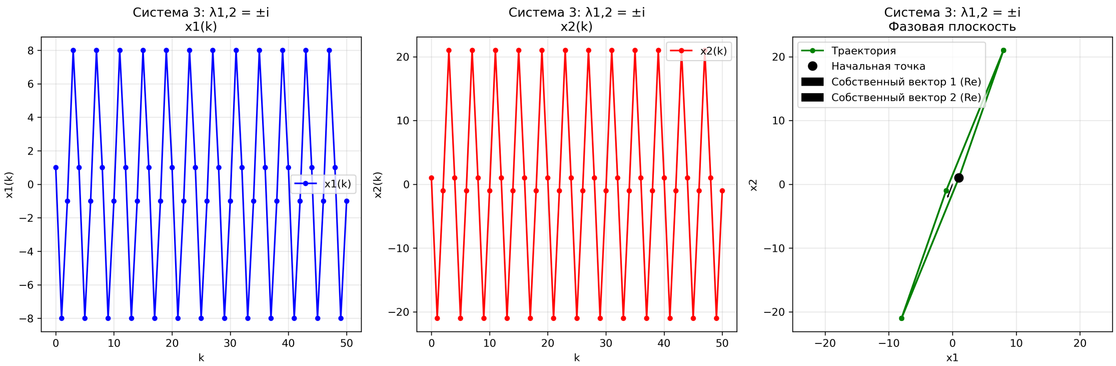

Рисунок 9 — Система 3: $\lambda_{1,2} = \pm i$

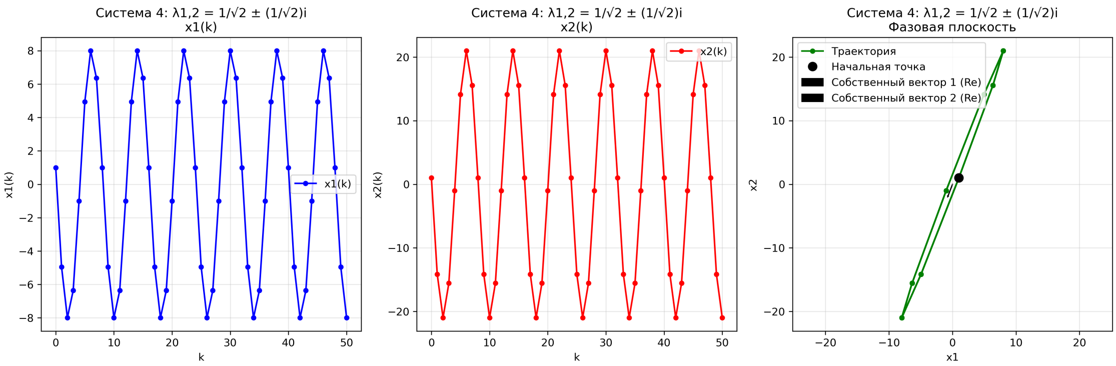

Рисунок 10 — Система 4: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

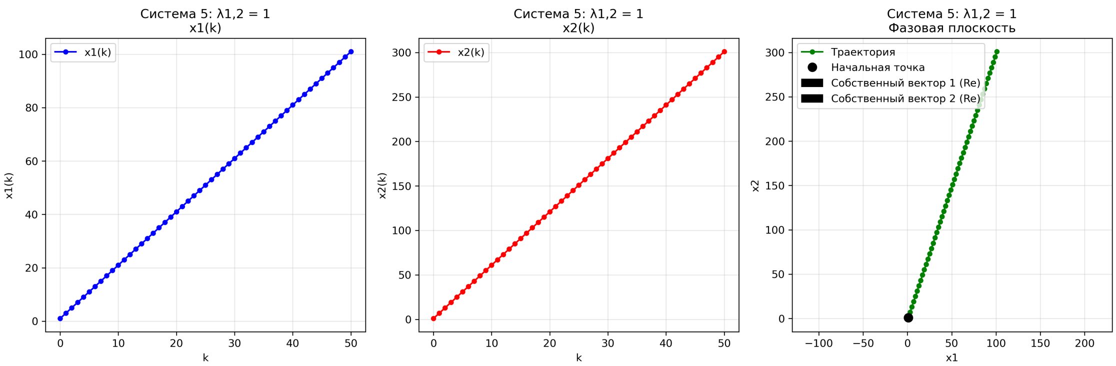

Рисунок 11 — Система 5: $\lambda_{1,2} = 1$

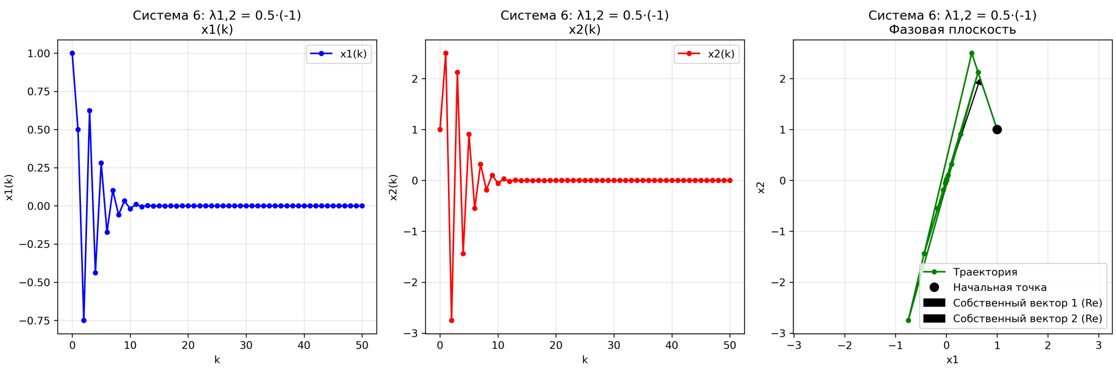

Рисунок 12 — Система 6: $\lambda_{1,2} = 0.5 \cdot (-1)$

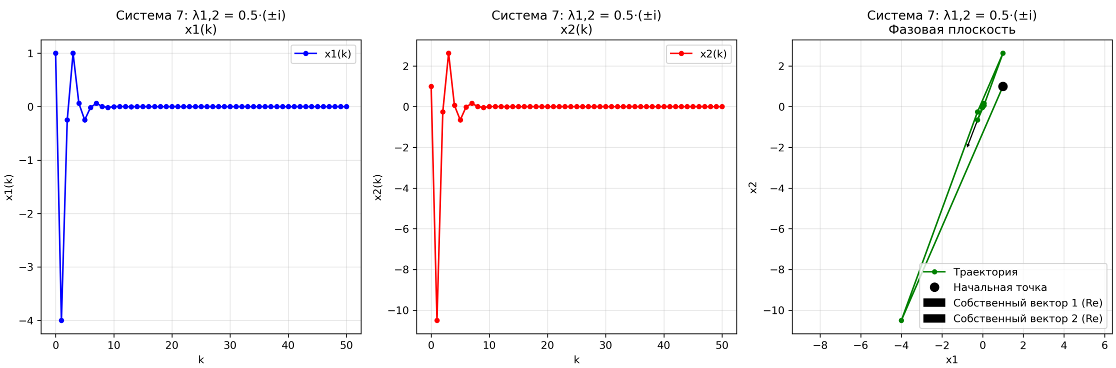

Рисунок 13 — Система 7: $\lambda_{1,2} = 0.5 \cdot (\pm i)$

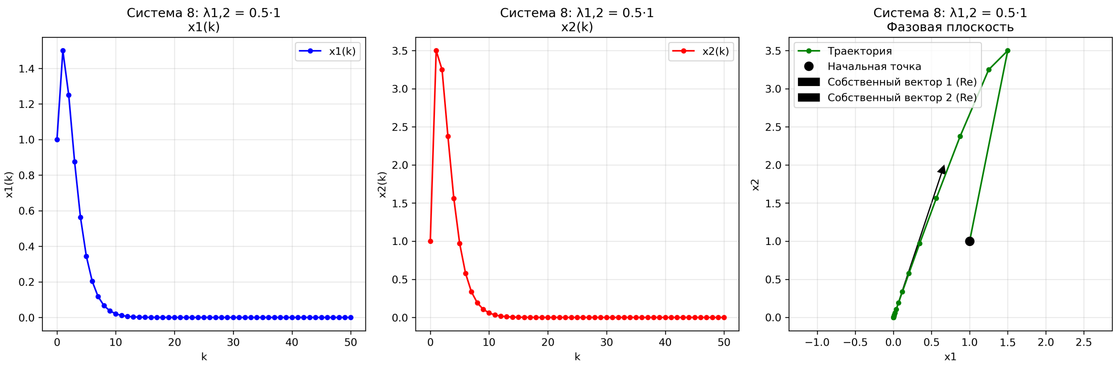

Рисунок 14 — Система 8: $\lambda_{1,2} = 0.5 \cdot 1$

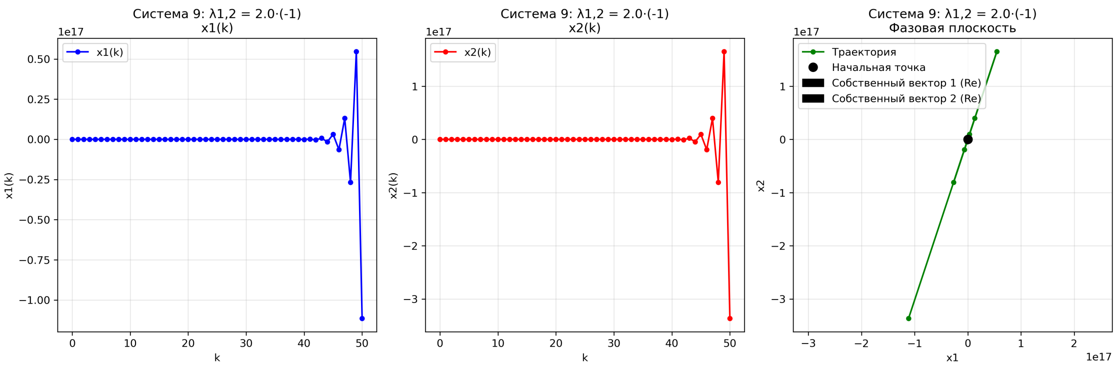

Рисунок 15 — Система 9: $\lambda_{1,2} = 2 \cdot (-1)$

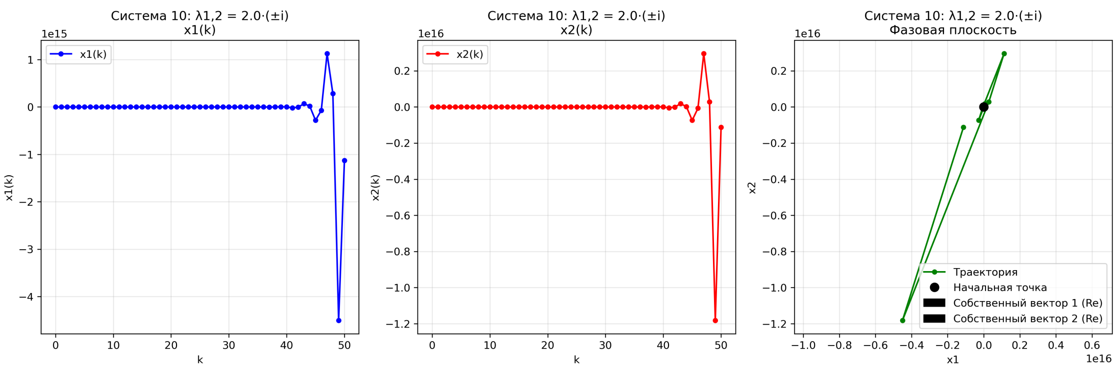

Рисунок 16 — Система 10: $\lambda_{1,2} = 2 \cdot (\pm i)$

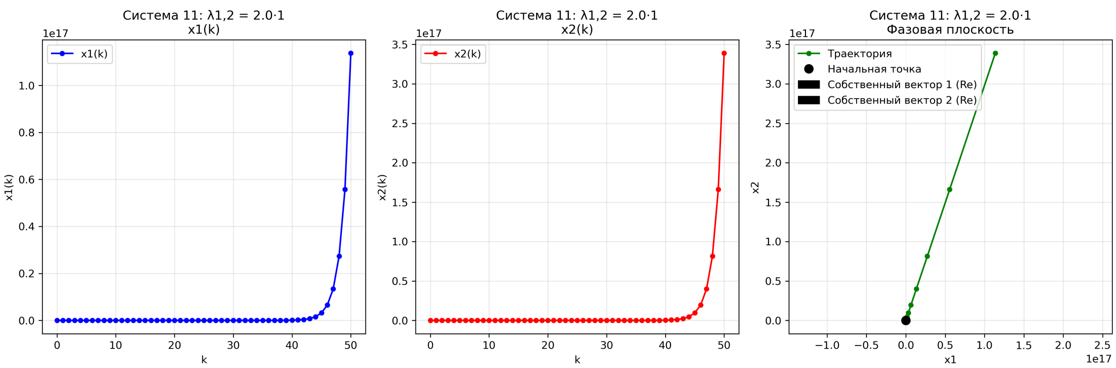

Рисунок 17 — Система 11: $\lambda_{1,2} = 2 \cdot 1$

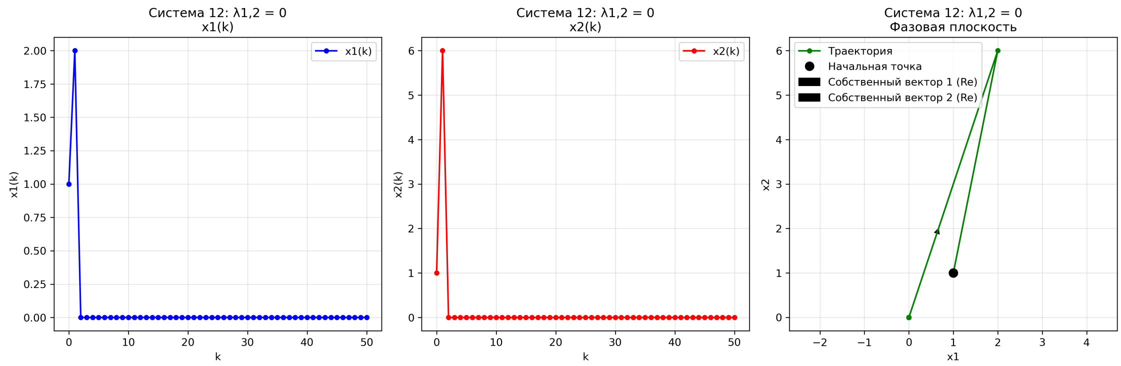

Рисунок 18 — Система 12: $\lambda_{1,2} = 0$

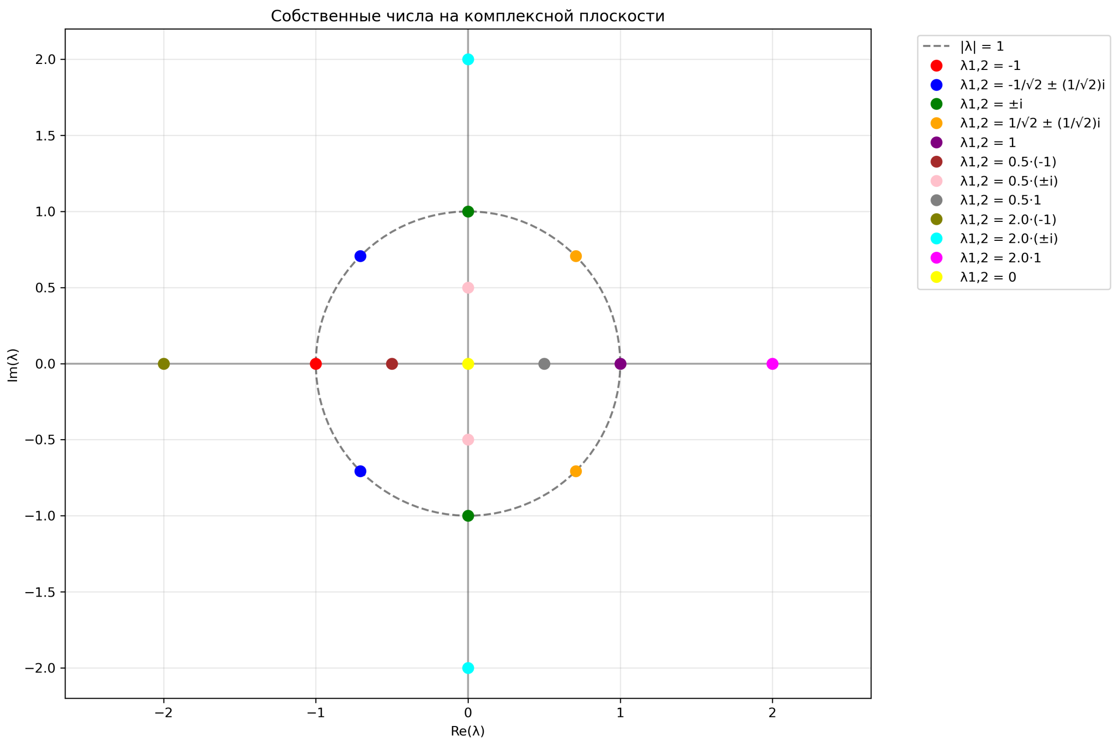

Рисунок 19 — Собственные числа всех систем на комплексной плоскости

Анализ влияния масштабирования

Исследовано влияние масштабирования собственных чисел на поведение системы:

– **Уменьшение масштаба** ($c = 0.5$): системы становятся более устойчивыми, траектории быстрее стремятся к нулю
– **Увеличение масштаба** ($d = 2.0$): системы становятся менее устойчивыми, траектории быстрее растут

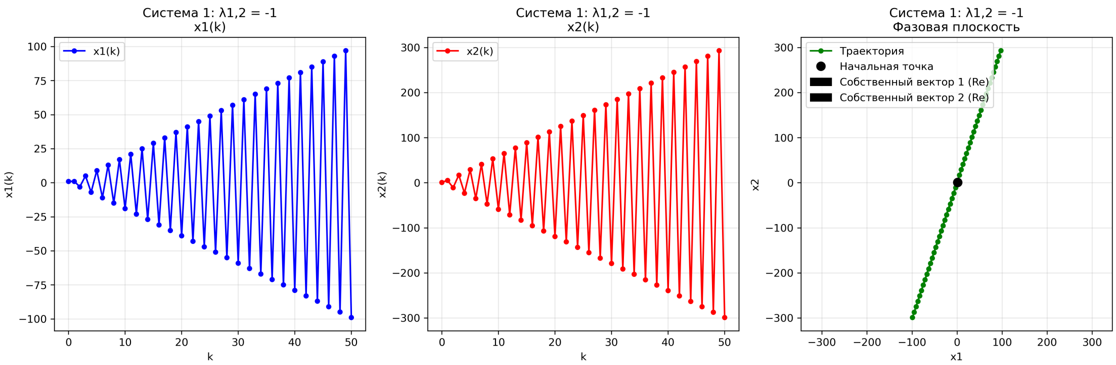

Рисунок 20 — Система 1: $\lambda_{1,2} = -1$

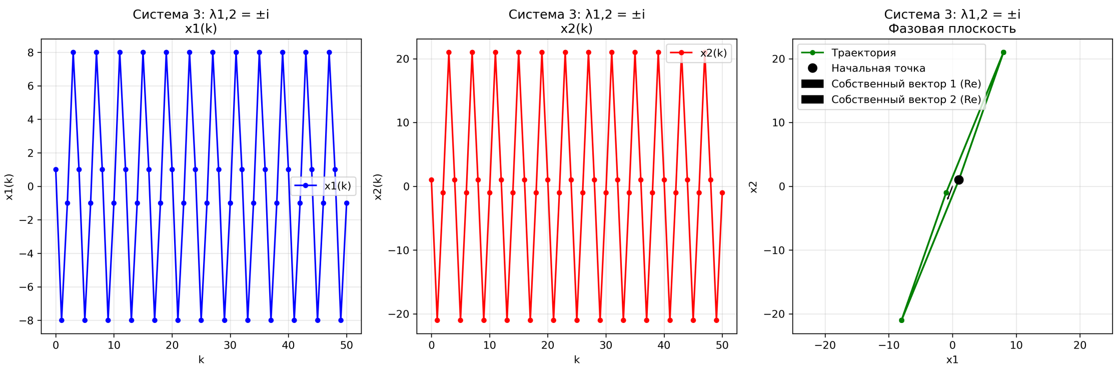

Рисунок 21 — Система 3: $\lambda_{1,2} = \pm i$

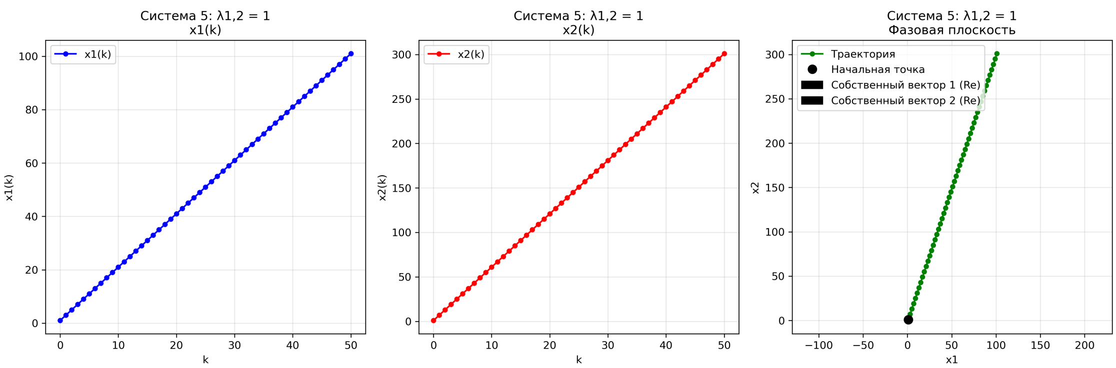

Рисунок 22 — Система 5: $\lambda_{1,2} = 1$

Закономерности поведения дискретных систем

- $|\lambda| < 1$: система асимптотически устойчива, траектории стремятся к нулю
- $|\lambda| = 1$: система нейтрально устойчива, траектории ограничены
- $|\lambda| > 1$: система неустойчива, траектории растут
- **Комплексные** λ: траектории имеют колебательный характер

– **Чисто мнимые** λ: траектории представляют собой замкнутые орбиты

Задание 3. Осциллятор

Постановка задачи

Рассматривается непрерывная система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2 \end{cases} \tag{15}$$

Требуется проанализировать устойчивость и характер движения при различных значениях параметров a и b.

Случай 1: $a < 0$**,** $b = 0$ **(Гармонический осциллятор)**

Физическая интерпретация: Гармонический осциллятор (пружина без трения)

– x_1 - смещение от положения равновесия
– x_2 - скорость
– $a < 0$ - коэффициент упругости (отрицательный для возвращающей силы)
– $b = 0$ - отсутствие трения

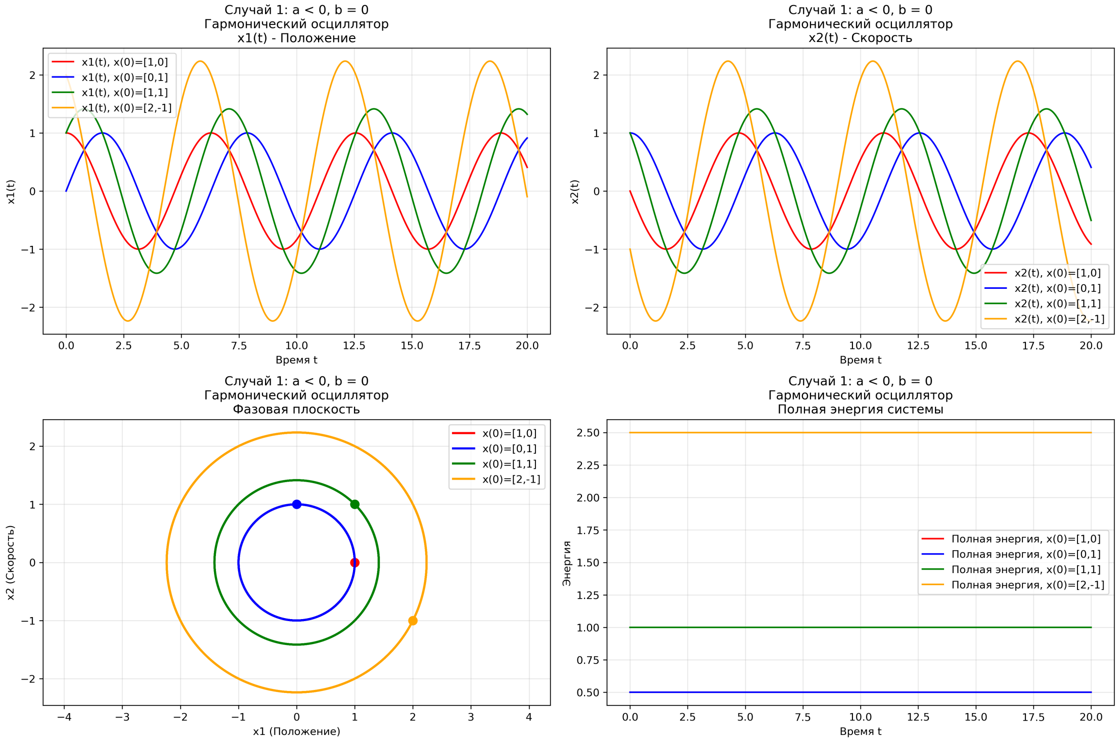

Рисунок 23 — Гармонический осциллятор: $a = -1, b = 0$

Анализ:

- Собственные числа: $\lambda = \pm i$ (чисто мнимые)
- Тип устойчивости: Нейтрально устойчива
- Характер движения: Периодические колебания с постоянной амплитудой
- Энергия системы сохраняется

Случай 2: $a < 0$**,** $b < 0$ **(Затухающий осциллятор)**

Физическая интерпретация: Затухающий осциллятор (пружина с трением)

- x_1 - смещение от положения равновесия
- x_2 - скорость
- $a < 0$ - коэффициент упругости
- $b < 0$ - коэффициент трения (отрицательный для затухания)

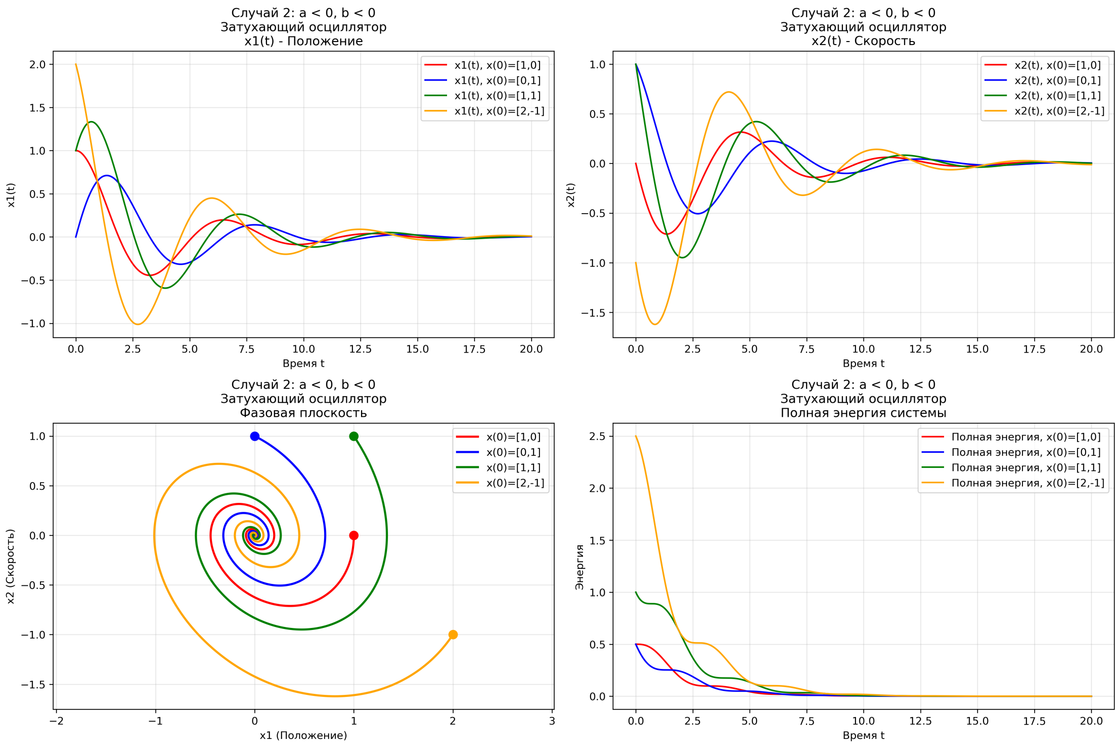

Рисунок 24 — Затухающий осциллятор: $a = -1$, $b = -0.5$

Анализ:

- Собственные числа: $\lambda = -0.25 \pm 0.968i$ (отрицательные вещественные части)
- Тип устойчивости: Асимптотически устойчива
- Характер движения: Затухающие колебания
- Энергия системы уменьшается со временем

Случай 3: $a > 0$**,** $b = 0$ **(Неустойчивый осциллятор)**

Физическая интерпретация: Неустойчивый осциллятор (перевернутый маятник)

- x_1 - угол отклонения от неустойчивого равновесия
- x_2 - угловая скорость
- $a > 0$ - коэффициент неустойчивости (положительный для отталкивающей силы)
- $b = 0$ - отсутствие трения

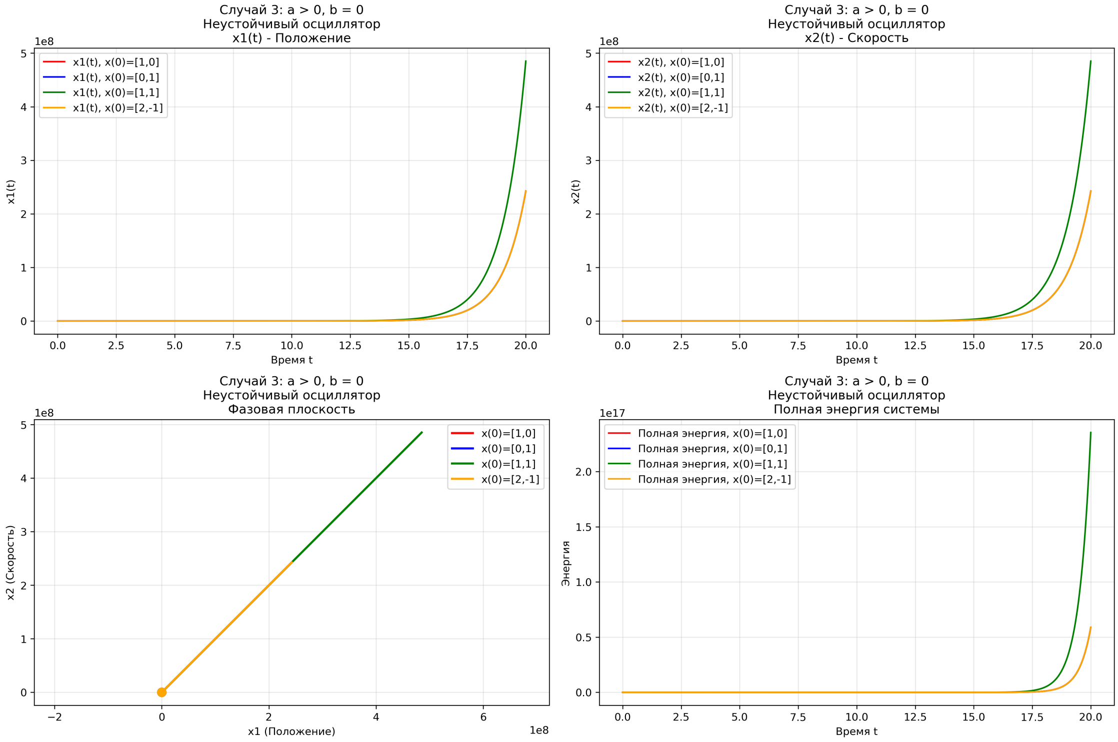

Рисунок 25 — Неустойчивый осциллятор: $a = 1$, $b = 0$

Анализ:

- Собственные числа: $\lambda = \pm 1$ (одно положительное, одно отрицательное)
- Тип устойчивости: Неустойчива
- Характер движения: Экспоненциальный рост
- Энергия системы растет со временем

Случай 4: $a > 0$, $b < 0$ (Неустойчивый осциллятор с затуханием)

Физическая интерпретация: Неустойчивый осциллятор с затуханием

- x_1 - отклонение от неустойчивого равновесия
- x_2 - скорость
- $a > 0$ - коэффициент неустойчивости
- $b < 0$ - коэффициент трения (может стабилизировать систему)

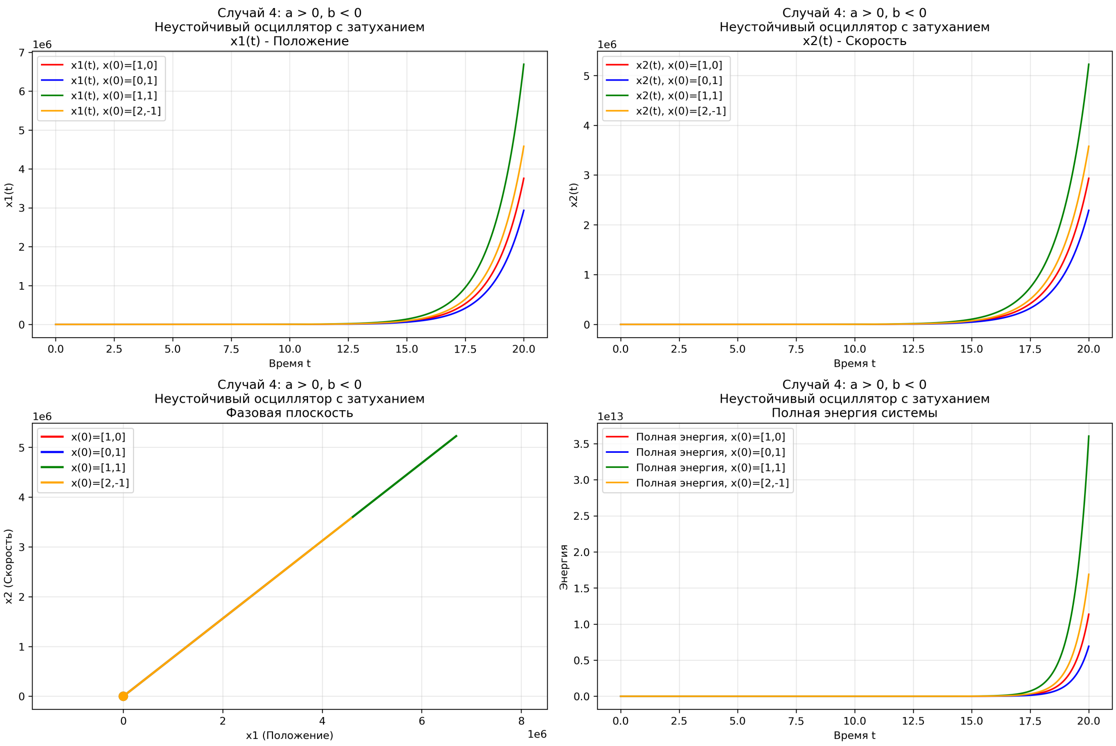

Рисунок 26 — Неустойчивый осциллятор с затуханием: $a = 1$, $b = -0.5$

Анализ:

- Собственные числа: $\lambda = 0.781$, $\lambda = -1.281$ (одно положительное, одно отрицательное)
- Тип устойчивости: Неустойчива
- Характер движения: Экспоненциальный рост с затуханием по одной компоненте
- Трение не может полностью стабилизировать неустойчивую систему

Сравнительный анализ

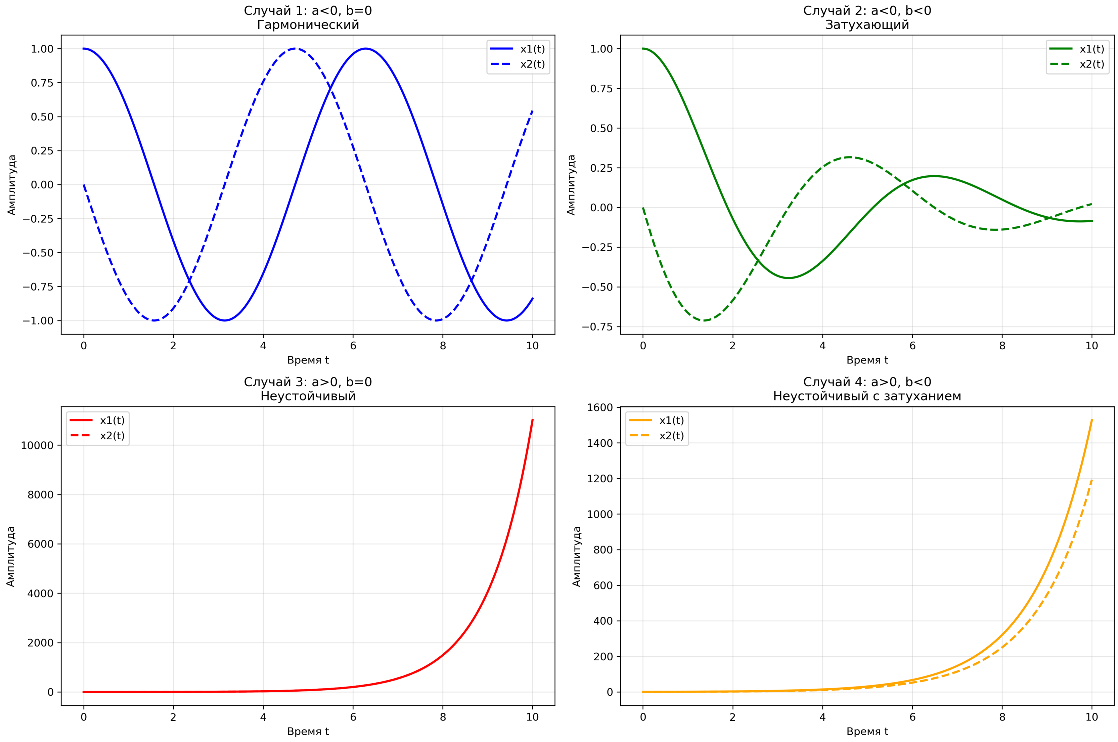

Рисунок 27 — Сравнение всех четырех случаев осциллятора

Выводы:

– Параметр a определяет тип равновесия: $a < 0$ - устойчивое, $a > 0$ - неустойчивое
– Параметр b определяет наличие трения: $b < 0$ - затухание, $b = 0$ - отсутствие трения
– Комбинация параметров определяет характер движения системы
– Энергетический анализ подтверждает качественные выводы об устойчивости

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены различные аспекты линейных динамических систем второго порядка.

Основные результаты:

Задание 1. Непрерывные системы

- Созданы шесть различных непрерывных систем с заданными свойствами устойчивости
- Исследовано влияние собственных чисел и собственных векторов на поведение системы
- Показано, что характер собственных чисел определяет тип устойчивости системы
- Демонстрированы различные типы траекторий: затухающие, растущие, периодические

Задание 2. Дискретные системы

- Созданы системы с заданными собственными числами
- Исследовано влияние модуля собственных чисел на устойчивость дискретных систем
- Показано, что $|\lambda| < 1$ обеспечивает асимптотическую устойчивость
- Демонстрировано влияние масштабирования на поведение системы

Задание 3. Осциллятор

- Проанализированы четыре различных случая осциллятора
- Дана физическая интерпретация параметров a и b
- Показана связь между параметрами и типом устойчивости
- Проведен энергетический анализ системы

Полученные навыки:

- Практическое применение теории собственных чисел для анализа устойчивости
- Создание и анализ динамических систем с заданными свойствами
- Моделирование и визуализация траекторий динамических систем
- Физическая интерпретация математических моделей

Теоретическая значимость: Изучены фундаментальные принципы теории динамических систем и их практическое применение.

Практическая значимость: Полученные навыки могут быть применены в различных областях: механика, электротехника, биология, экономика и других областях, где используются динамические системы.