МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Практическая линейная алгебра»

по теме:
2D ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Студент:
Группа № R3435 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
техник, ассистент *Догадин Е. В.*

Санкт-Петербург 2025

1 ХОД РАБОТЫ

1.1 Выберем числа

Для начала выберем четыре целых числа a, b, c и d таким образом, чтобы все они были различными и ни одно из них не равнялось 0 или ± 1.

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$

Задание 1. Придумаем матрицы

1. **Отражение относительно прямой $y = ax = 2x$.**
   Обоснование: матрица отражения относительно прямой через начало с углом наклона $\theta = \arctan(a)$ имеет вид
   $$R_{y=ax} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{bmatrix}.$$
   Для $a = 2$ получаем $\cos(2\theta) = \frac{1-a^2}{1+a^2} = -\frac{3}{5}$, $\sin(2\theta) = \frac{2a}{1+a^2} = \frac{4}{5}$, откуда
   $$M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$
2. **Отображение всей плоскости в прямую $y = bx = 3x$.**
   Обоснование: столбцы матрицы — образы базисных векторов. Требуем $e_1 \mapsto (1,3)^\top$ (любой ненулевой на прямой $y = 3x$) и $e_2 \mapsto (0,0)^\top$ (схлопывание второй координаты). Тогда
   $$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$
3. **Поворот на $10c = 40^\circ$ против часовой стрелки.**
   Обоснование: стандартная матрица поворота на угол φ:
   $$M_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = 40^\circ.$$
4. **Центральная симметрия относительно начала координат.**
   Обоснование: $(x,y) \mapsto (-x, -y)$, то есть $M_4 = -I$:
   $$M_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. **Отражение относительно $y = ax$, затем поворот на $10d = 50^\circ$ по часовой стрелке.**
   Обоснование: композиция линейных преобразований — произведение матриц справа налево. Пусть R — матрица отражения из п.1, а P — поворот на -50°:
$$P = \begin{bmatrix} \cos 50^\circ & \sin 50^\circ \\ -\sin 50^\circ & \cos 50^\circ \end{bmatrix}, \quad M_5 = P\,R.$$
6. **Отображение, которое переводит прямую $y = 0$ в $y = ax$ и прямую $x = 0$ в $y = bx$.**
   Обоснование: $e_1 = (1,0)^\top$ лежит на $y = 0$, его образ должен лежать на $y = ax$, возьмём $e_1 \mapsto (1,a)^\top$. Аналогично $e_2 = (0,1)^\top$ лежит на $x = 0$, его образ возьмём на $y = bx$: $e_2 \mapsto (1,b)^\top$. Тогда столбцы матрицы — эти образы:
$$M_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
7. **Отображение, которое переводит прямую $y = ax$ в $y = 0$ и прямую $y = bx$ в $x = 0$.**
   Обоснование: требуем, чтобы образы направляющих векторов $v_a = (1,a)^\top$ и $v_b = (1,b)^\top$ лежали соответственно на осях Ox и Oy. Искомая матрица M_7 удовлетворяет
$$M_7 v_a = (*,0)^\top, \quad M_7 v_b = (0,*)^\top.$$
   Нормировкой можно добиться $M_7 v_a = (1,0)^\top$, $M_7 v_b = (0,1)^\top$, что означает $M_7 = [v_a\ v_b]^{-1}$. Явно
$$M_7 = \frac{1}{b-a} \begin{bmatrix} b & 1 \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$
8. **Отображение, которое меняет местами прямые $y = ax$ и $y = bx$.**
   Обоснование: требуем, чтобы v_a и v_b были собственными направлениями с собственными значениями, меняющими их местами. Достаточно потребовать $M_8 v_a = v_b$ и $M_8 v_b = v_a$. Решая по столбцам, получаем
$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

9. **Отображение, которое переводит круг единичной площади в круг площади $c = 4$.**

   Обоснование: круг $\to$ круг означает изотропное масштабирование с коэффициентом $s = \sqrt{\frac{\text{площадь}}{\text{исх. площадь}}} = \sqrt{c}$. Выбираем без дополнительного поворота:

$$M_9 = \sqrt{c}\, I = 2I.$$

10. **Отображение, которое переводит круг единичной площади в некруг (эллипс) площади $d = 5$.**

    Обоснование: эллипс получается при неодинаковом масштабировании по взаимно перпендикулярным осям. Выберем диагональную матрицу с $\det M_{10} = d$ (площадь масштабируется как $|\det|$):

$$M_{10} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det M_{10} = 5 = d.$$

11. **Отображение с перпендикулярными собственными векторами, не лежащими на $y = 0$ или $y = x$.**

    Обоснование: вещественная симметричная матрица имеет ортогональный базис собственных векторов (спектральная теорема). Выберем симметричную матрицу с несоосными осями:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

12. **Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.**

    Обоснование: жорданов блок размера 2 с собственным значением 1:

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. **Отображение, у которого нет вещественных собственных векторов.**

    Обоснование: поворот на 90° имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i$:

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. **Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным.**

    Обоснование: это скалярное преобразование kI с $k \neq 0$ — любой вектор сохраняет направление:

$$M_{14} = kI.$$

15. **Пара отображений, где $AB \neq BA$.**

    Обоснование: сдвиги (срезы) вдоль разных осей обычно не коммутируют. Возьмём

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB \neq BA.$$

16. **Пара отображений, где $AB = BA$.**

    Обоснование: скалярная матрица коммутирует с любыми, а также коммутируют сдвиги, зависящие от одной и той же оси. В качестве наглядного примера возьмём

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = 3I, \quad AB = BA.$$

Задание 2. Проанализируем

Образы и ядра отображений

1. Матрица $M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

   Отражение обратимо ($\det M_1 = -1 \neq 0$), поэтому

$$\text{Range}(M_1) = \mathbb{R}^2, \quad \text{Null}(M_1) = \{\mathbf{0}\}.$$

2. Матрица $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$M_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Range}(M_2) = \{(t,3t)^\top\}, \text{Null}(M_2) = \{(0,y)^\top\}.$$

3. Матрица $M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   Поворот обратим, поэтому

$$\text{Range}(M_{13}) = \mathbb{R}^2, \quad \text{Null}(M_{13}) = \{\mathbf{0}\}.$$

4. Матрица $M_{14} = kI$, $k \neq 0$

$$\text{Range}(M_{14}) = \mathbb{R}^2, \quad \text{Null}(M_{14}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Собственные значения и собственные векторы

1. M_1
   Характеристический многочлен даёт $\lambda = \pm 1$. Для $\lambda = 1$ направление отражаемой прямой $y = ax$ сохраняется, для $\lambda = -1$ — ортогональное к ней направление меняет знак. Явно получаем $v_{\lambda=1} = (1{,}2)^\top$, $v_{\lambda=-1} = (2, -1)^\top$.
2. M_2
   $\det(M_2 - \lambda I) = -(1-\lambda)\lambda \Rightarrow \lambda \in \{0{,}1\}$. Для $\lambda = 1$: $v = (1{,}3)^\top$; для $\lambda = 0$: $v = (0{,}1)^\top$.
3. M_3
   Поворот на $40°$: $\lambda = \cos 40° \pm i \sin 40°$ — вещественных собственных нет.
4. M_4
   $\lambda = -1$ кратности 2; любой ненулевой вектор — собственный.
5. M_8
   $\lambda = 1, -1$, собственные направления — прямые $y = 0$ и $x = 0$ соответственно.
6. M_{11}
   $\det(M_{11} - \lambda I) = \lambda^2 - 5$, поэтому $\lambda = \pm\sqrt{5}$; собственные векторы ортогональны.
7. M_{12}
   Единственное собственное значение $\lambda = 1$ с единственным направлением $v = (1{,}0)^\top$ (дефектная матрица).
8. M_{13}
   $\lambda = \pm i$; вещественных собственных векторов нет.
9. M_{14}
   $\lambda = k$ кратности 2; любой ненулевой вектор — собственный.
10. A,B **из пп.15, 16**
    В обоих случаях $\lambda_A = 1$, для скалярной B — $\lambda_B = 3$ (любой ненулевой вектор собственный).

Определители матриц

1. $\det(M_1) = -1$ (отражение).
2. $\det(M_2) = 0$ (сжатие в прямую).
3. $\det(M_3) = 1$ (ортогональная матрица поворота).
4. $\det(M_4) = 1$ (поворот на 180°).
5. $\det(M_5) = -1$ (композиция поворота с отражением даёт ориентацию $-$).
6. $\det(M_9) = 4$ (масштаб 2 по обеим осям).
7. $\det(M_{10}) = 5$ (анизотропный масштаб, эллипс той же площади).

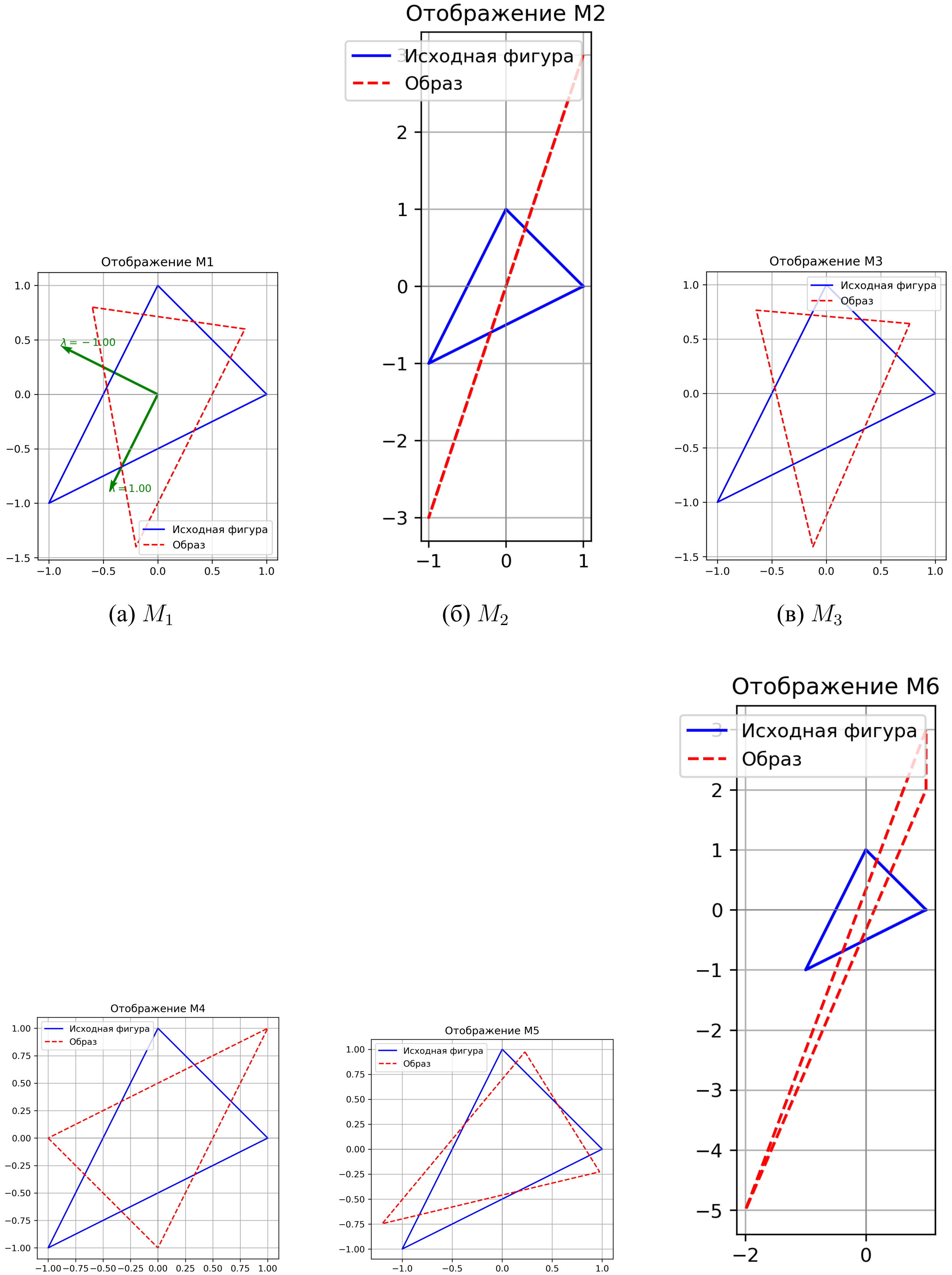
Где матрица *обязательно* симметрична?

Матрица *обязательно* симметрична в следующих пунктах задачи (независимо от выбранных представительных матриц внутри класса описанных преобразований):

1) Отражение относительно прямой через начало. Любое такое отражение имеет вид $A = Q\,\mathrm{diag}(1, -1)\,Q^\top$ с ортогональной Q, откуда $A = A^\top$.
4) Центральная симметрия $A = -I$ — симметрична.
11) У матрицы есть два взаимно перпендикулярных собственных направления. В этом случае существует ортонормированный базис из собственных векторов, и матрица ортогонально диагонализуема: $A = QDQ^\top$, следовательно симметрична.
14) Скалярная матрица $A = kI$ — симметрична.

В остальных пунктах симметричность не является обязательной: например, в п.9 круг в круг можно переводить с дополнительным поворотом $A = sR$ (не симметрична при $R \neq \pm I$), а в п.10 эллипс можно получить композицией двух разных поворотов с диагональным масштабом $A = R_1 \mathrm{diag}(\alpha,\beta) R_2$.

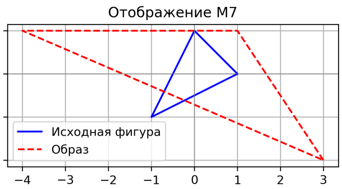
Визуализация линейных отображений



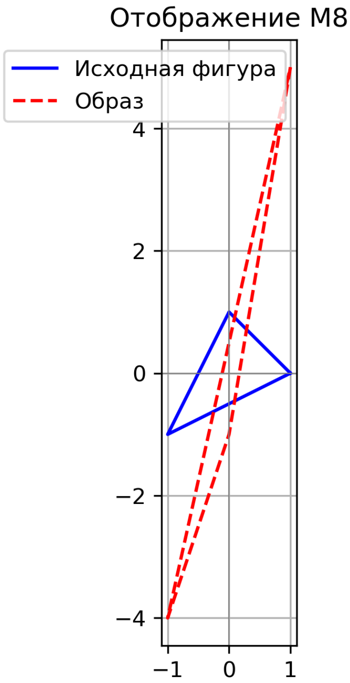
(а) M_1 (б) M_2 (в) M_3

(г) M_4 (д) M_5 (е) M_6

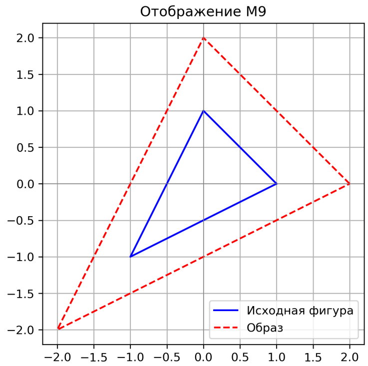
Рисунок 1 — Отображения M_1–M_6



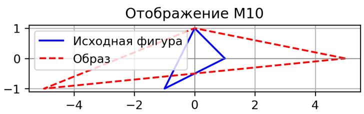
(а) M_7



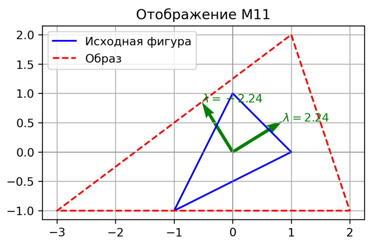
(б) M_8



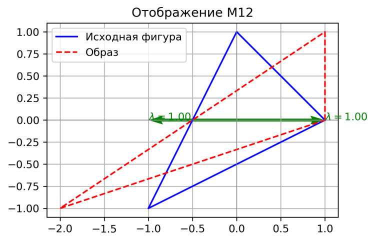
(в) M_9



(г) M_{10}

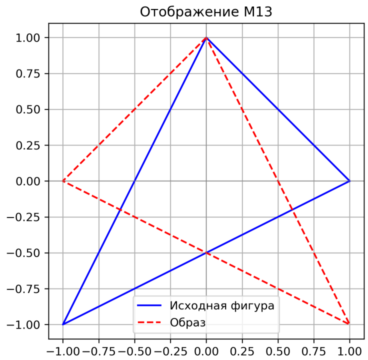


(д) M_{11}

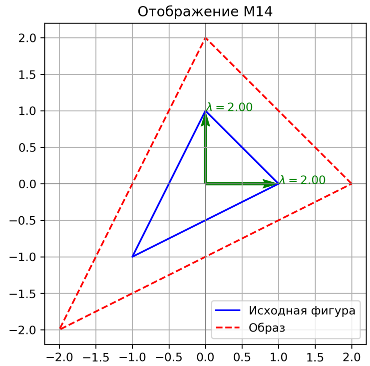


(е) M_{12}

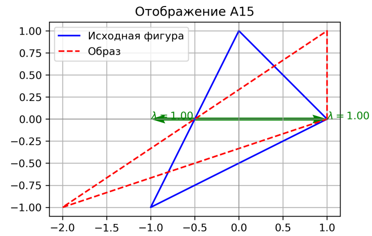
Рисунок 2 — Отображения M_7–M_{12}



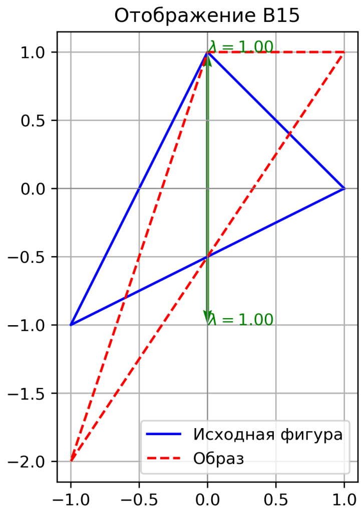
(а) M_{13}



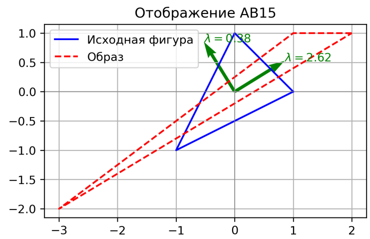
(б) M_{14}



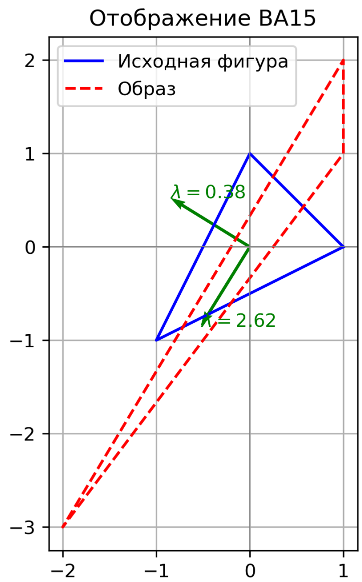
(в) A_{15}



(г) B_{15}

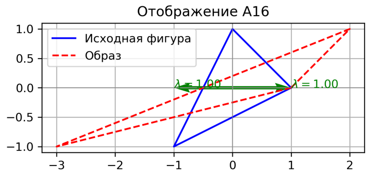


(д) $A_{15}B_{15}$

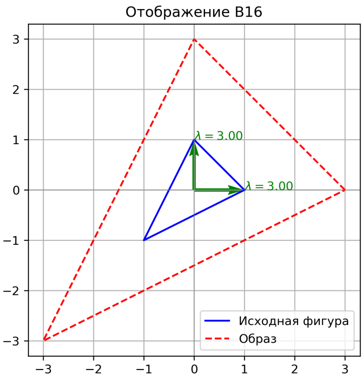


(е) $B_{15}A_{15}$

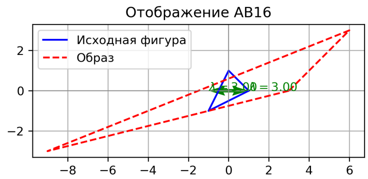
Рисунок 3 — Отображения M_{13}–BA_{15}



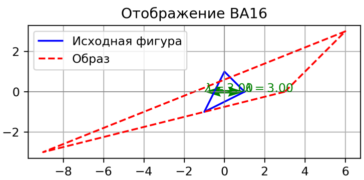
(а) A_{16}



(б) B_{16}



(в) $A_{16}B_{16}$



(г) $B_{16}A_{16}$

Рисунок 4 — Отображения A_{16}–BA_{16}

Выводы

В работе сконструированы и проанализированы 2D-линейные преобразования, реализующие множество геометрических эффектов: отражения, проекции в прямую, повороты, изотропные и анизотропные масштабирующие отображения, а также примеры некомутации и коммутативности. Для каждого класса даны построения по геометрическим условиям (через образы базисных векторов, ортогональные разложения и жордановы формы), вычислены спектры, образы/ядра и определители. Показано, что симметричность матрицы *обязательна* лишь для отражений через прямую, центральной симметрии, преобразований с ортогональным базисом собственных векторов и скалярных матриц; в остальных случаях она необязательна.