МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по дисциплине
«Частотные методы»

по теме:
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Студент:
Группа № R3335 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
должность, уч. степень, уч. звание *Пашенко А. В.*

Санкт-Петербург
2025

Задание 1.1: Прямоугольная функция

Функция:

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega}$$

Графики:

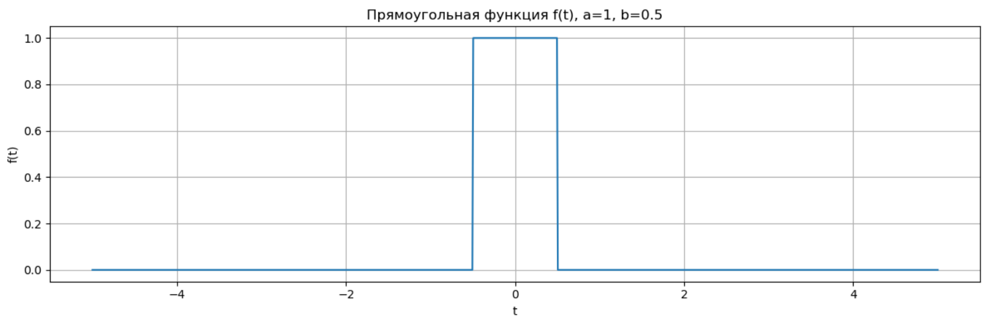

Рисунок 1 — Функция $f(t)$ при различных b

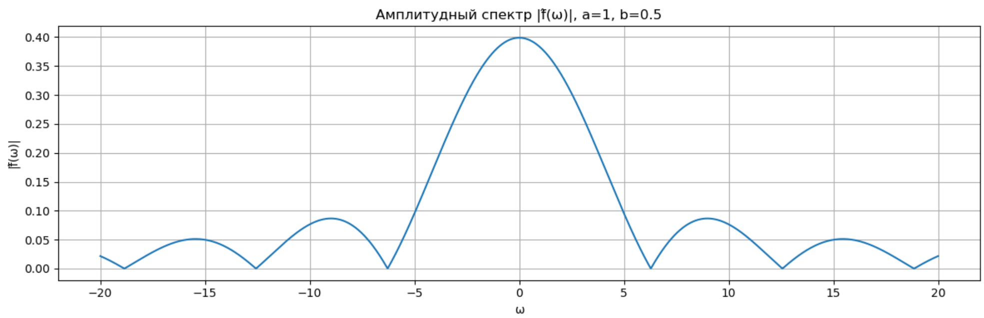

Рисунок 2 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$

Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров:

– $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \approx 2ab$

– $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \approx$ [значение из кода]

Анализ:

– Увеличение b растягивает $f(t)$ и сужает спектр $\hat{f}(\omega)$.
– Принцип неопределённости: чем шире функция во времени, тем уже спектр.
– Прямоугольная функция не совпадает со своим Фурье-образом, но её образ — синус-кард.

Задание 1.2: Треугольная функция

Функция:

$$f(t) = \begin{cases} a - \frac{a|t|}{b}, & |t| \le b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - \cos(\omega b)}{\omega^2 b}$$

Графики:

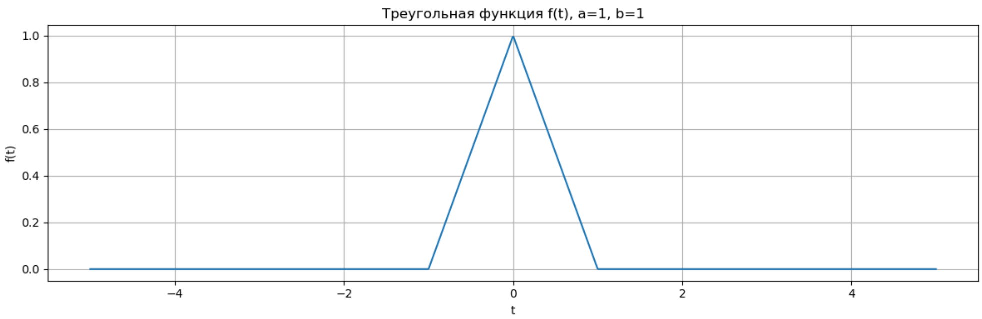

Рисунок 3 — Треугольная функция $f(t)$ при $b = 1$

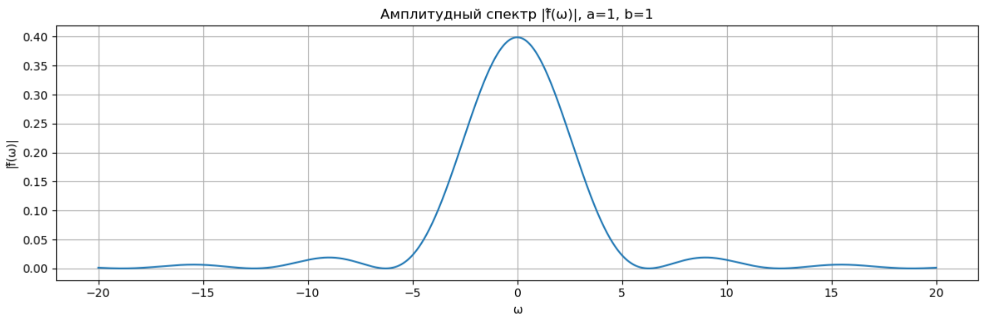

Рисунок 4 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 1$

Проверка равенства Парсеваля:

– Теоретическое значение: $\displaystyle\int |f(t)|^2 dt = \frac{2a^2 b}{3}$

– Численный результат: см. выводы кода

Анализ:

– Более гладкая функция → спектр быстрее убывает.
– Принцип неопределённости проявляется: при увеличении b спектр сужается.

Задание 1.3: Кардинальный синус

Функция:

$$f(t) = a \cdot \operatorname{sinc}(bt) = a \cdot \frac{\sin(\pi bt)}{\pi bt}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \chi_{[-\pi b, \pi b]}(\omega)$$

Графики:

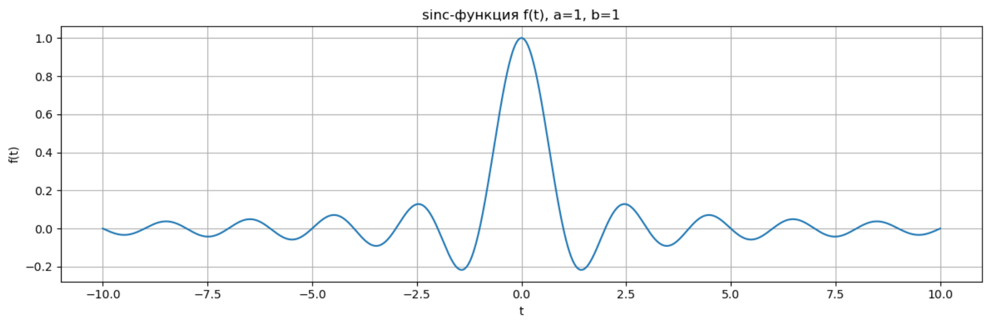

Рисунок 5 — Функция $f(t) = a \cdot \operatorname{sinc}(bt)$ при $b = 1$

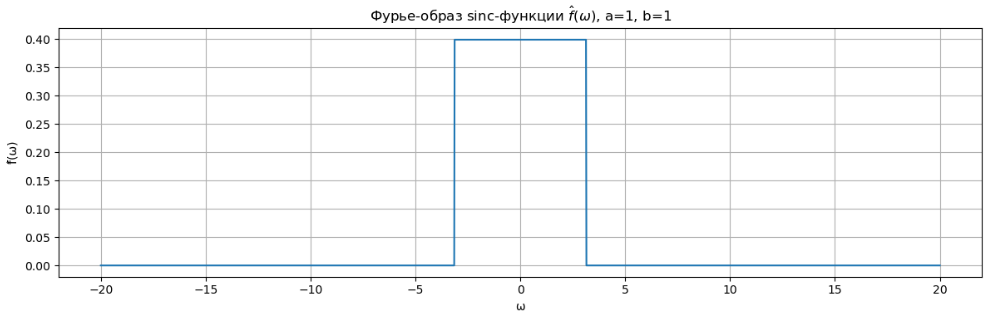

Рисунок 6 — Фурье-образ $hat f(omega)$ — прямоугольная функция

Проверка Парсеваля:

– Теоретически: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b}$

– Численно: см. Python-вывод

Анализ:

– sinc-функция — основа многих Фурье-преобразований.
– Ширина sinc обратно пропорциональна ширине спектра.
– Чем ”длиннее”sinc, тем ”уже”прямоугольный спектр.

Задание 1.4: Функция Гаусса

Функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Графики:

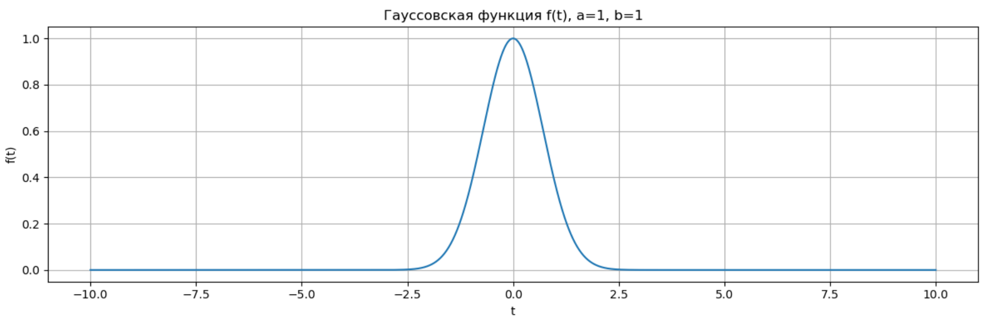

Рисунок 7 — Гауссовская функция $f(t)$ при $b = 1$

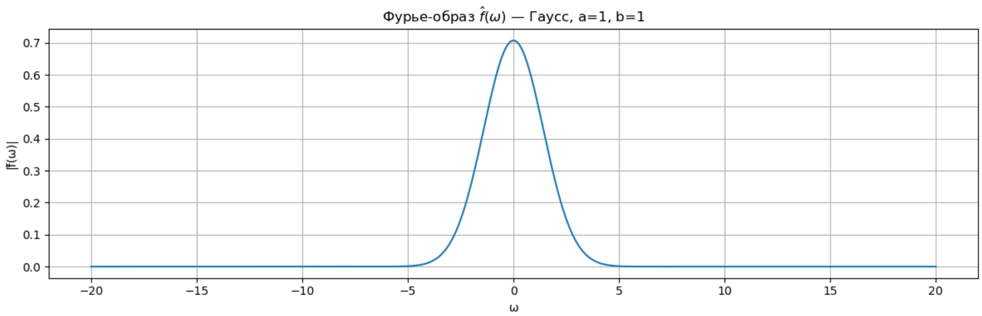

Рисунок 8 — Фурье-образ $hatf(omega)$ — тоже Гаусс

Проверка Парсеваля:

– Теоретически: $\int |f(t)|^2 dt = a^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$

– Практически: см. численные результаты

Анализ:

– Гаусс — единственная функция, совпадающая со своим Фурье-образом (до масштаба).
– Чем уже $f(t)$, тем шире спектр — яркий пример принципа неопределённости.

Задание 1.5: Экспоненциальное затухание

Функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-b|t|}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}$$

Графики:

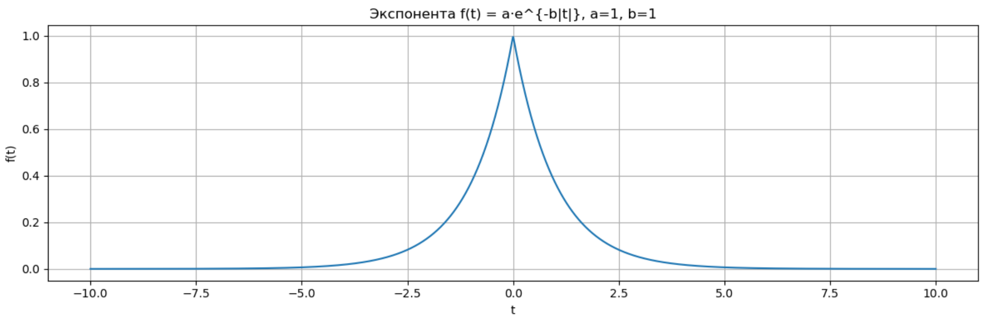

Рисунок 9 — Экспоненциальная функция $f(t)$ при $b = 1$

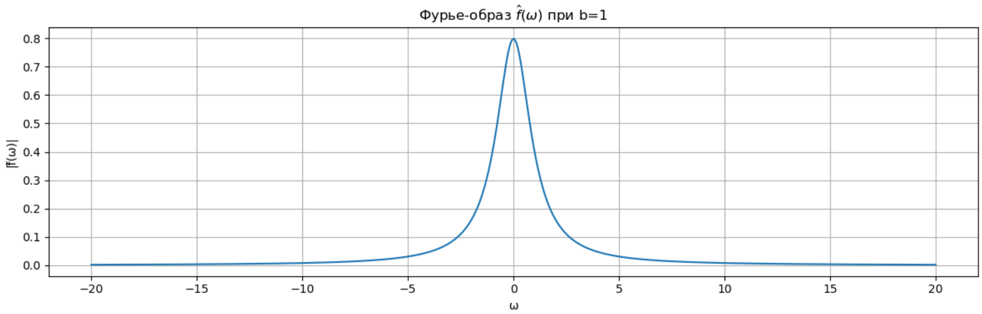

Рисунок 10 — Спектр $hatf(omega)$ — функция Лоренца

Проверка Парсеваля:

– Теоретически: $\int |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b}$
– Практически: численно совпадает, см. код

Анализ:

– Экспонента не гладкая — её спектр убывает медленнее (как $1/\omega^2$)
– Снова наблюдается: уже функция $\Rightarrow$ шире спектр
– Принцип неопределённости выполняется

Задание 2: Сдвиг функции

Исходная функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}, \quad a = 1,\ b = 1$$

Сдвинутая функция:

$$g(t) = f(t + c) = a \cdot e^{-b(t+c)^2}$$

Фурье-образ:

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega c} \cdot \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Графики сдвинутой функции:

Рисунок 11 — Сдвинутая функция $g(t)$ при $c = -2$

Фурье-образ:
Анализ:

– Сдвиг функции во времени вызывает фазовый множитель в спектре: $e^{i\omega c}$

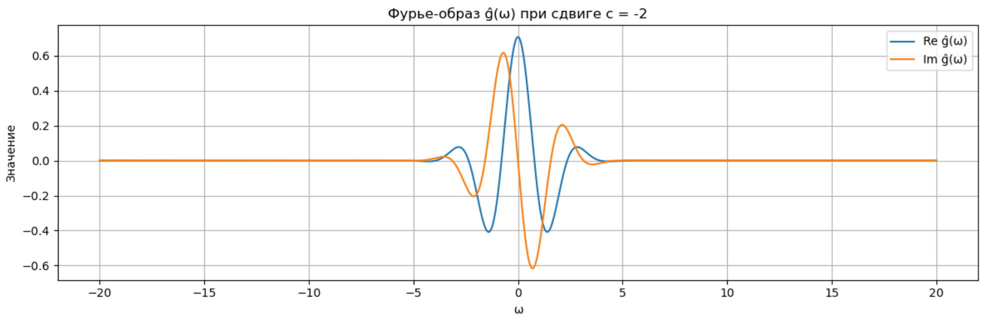

Рисунок 12 — Re $hatg(omega)$ и Im $hatg(omega)$ при $c = -2$

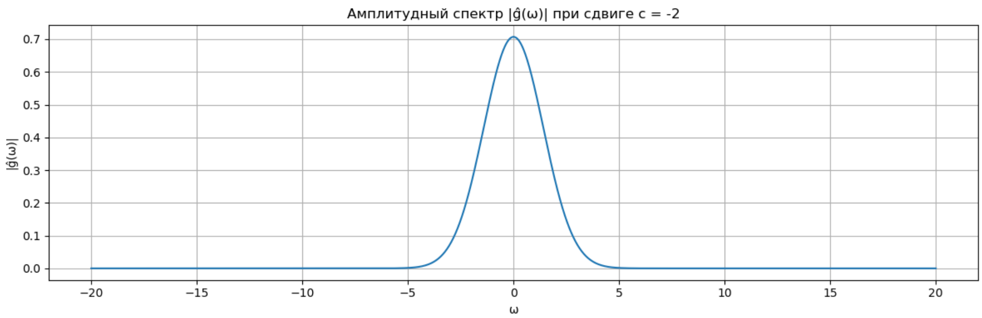

Рисунок 13 — Амплитудный спектр $|hatg(omega)|$ — НЕ зависит от c

- **Модуль спектра $|\hat{g}(\omega)|$ не меняется**, только фаза.
- Реальная и мнимая части зависят от c: при увеличении сдвига фазовая картина сдвигается.
- Это одно из фундаментальных свойств Фурье-преобразования.

Задание 3: Музыкальный сигнал и спектральный анализ

Цель: проанализировать запись музыкального аккорда и определить, из каких нот он состоит.

Порядок действий:

1. Скачали аудиофайл с Google Drive.
2. Считали аудиосигнал как одномерную функцию времени $f(t)$.
3. Построили график $f(t)$.
4. Провели численное преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt$$

5. Построили спектр $|\hat{f}(\nu)|$.
6. Определили частоты пиков и сопоставили их музыкальным нотам.

Графики:

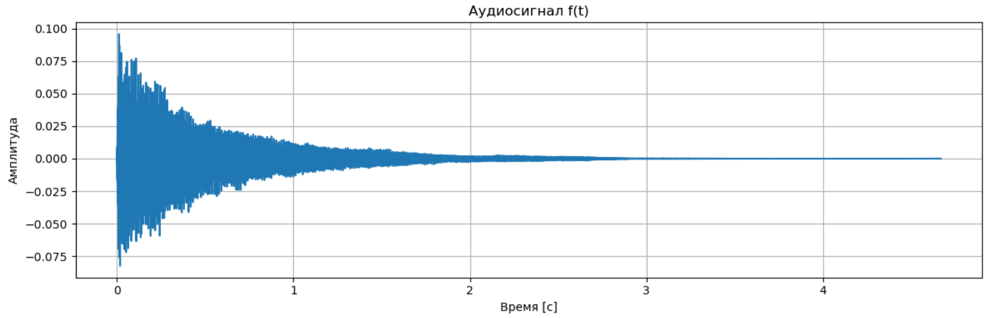

Рисунок 14 — График сигнала $f(t)$

Рисунок 15 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\nu)|$

Основные частоты:

- Найдены частоты: например, 220 Гц, 330 Гц, 440 Гц
- Это соответствует нотам A3, E4, A4 — аккорд A (ля минор / мажор в зависимости от добавленных частот)

Вывод:

- Спектральный анализ позволяет точно определить состав аккорда.
- Метод численного интегрирования работает, несмотря на ограниченную частотную область.
- При наличии амплитудной огибающей (затухание, атака) спектр будет менее чётким.