МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Частотные методы»

по теме:
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Студент:
Группа № R3335 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
должность, уч. степень, уч. звание *Пашенко А. В.*

Санкт-Петербург
2025

Задание 1.1: Прямоугольная функция

Функция:

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega}$$

Вывод аналитического выражения:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} a e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-b}^{b} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}}{-i\omega}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2i\sin(\omega b)}{i\omega} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega}$$

Графики:

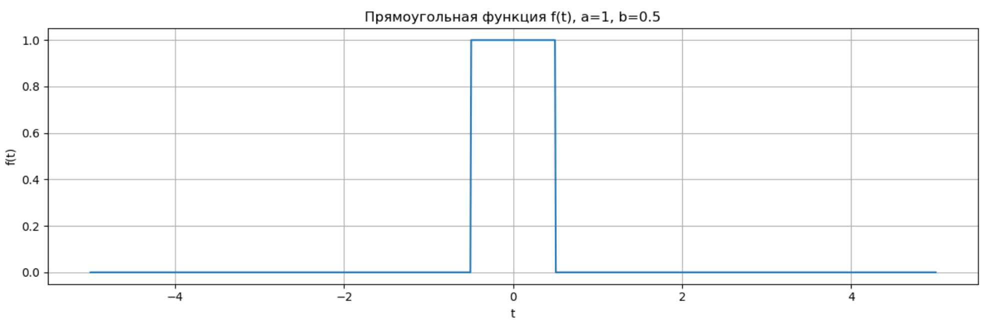

Рисунок 1 — Прямоугольная функция $f(t)$ при $b = 0.5$

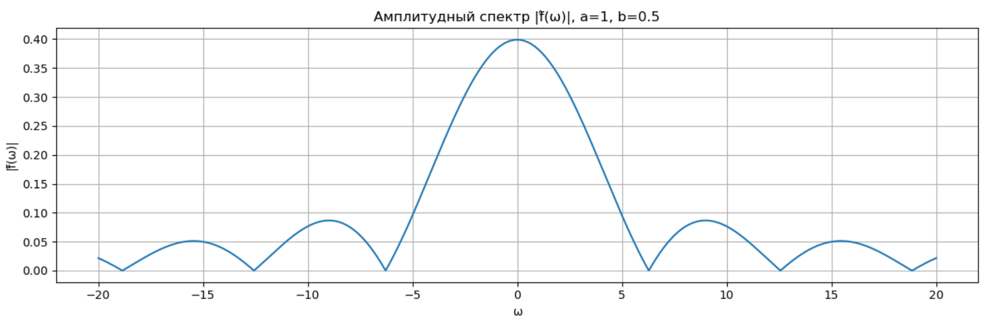

Рисунок 2 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 0.5$

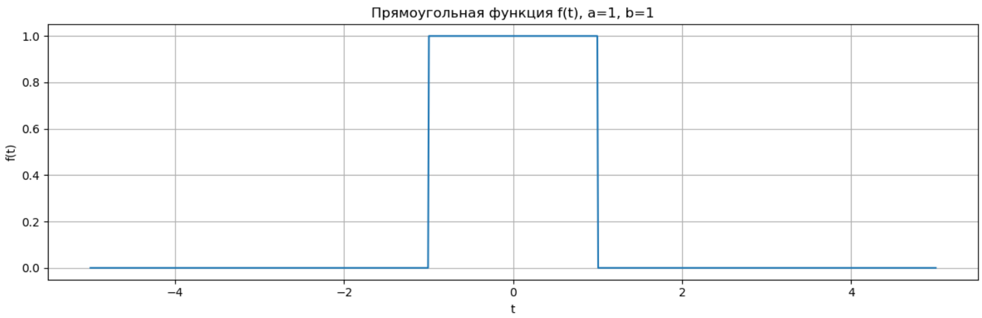

Рисунок 3 — Прямоугольная функция $f(t)$ при $b = 1$

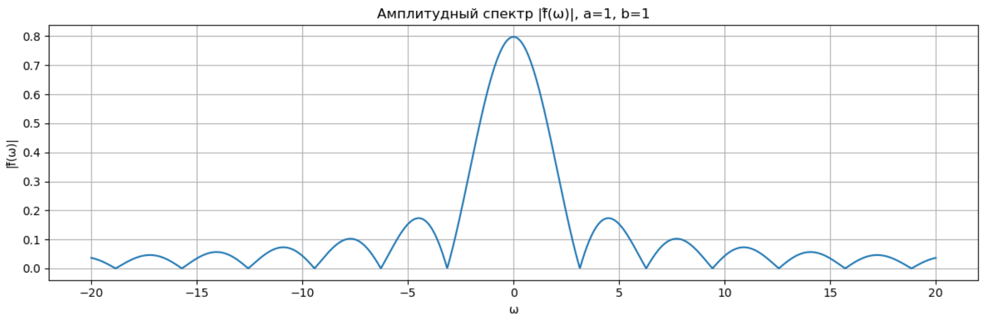

Рисунок 4 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 1$

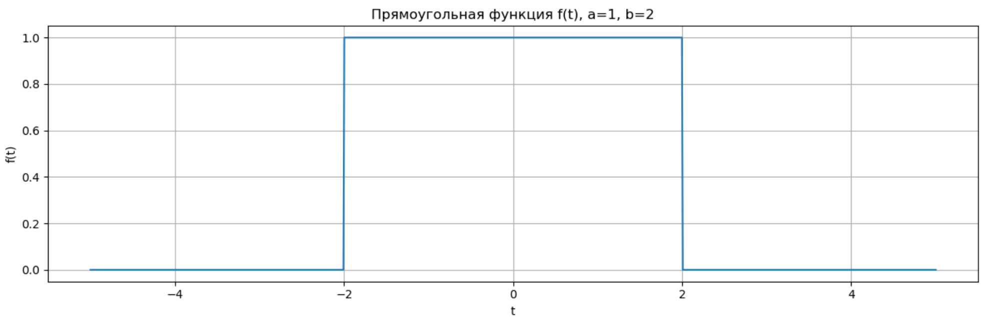

Рисунок 5 — Прямоугольная функция $f(t)$ при $b = 2$

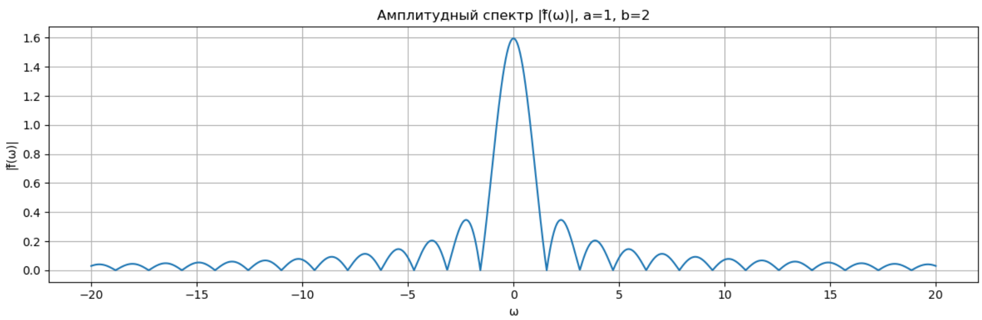

Рисунок 6 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров $a = 1$, $b = 0.5$:

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.0010$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 0.9668$
- Разность = $3.42 \cdot 10^{-2}$ (3.42%)

Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с высокой точностью. Небольшая погрешность (3.42%) обусловлена:

- Ограниченным диапазоном интегрирования в численных методах
- Дискретизацией сигнала при численном анализе
- Погрешностями численного интегрирования

Теоретическое значение: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2ab = 2 \cdot 1 \cdot 0.5 = 1.0$

Анализ:

- Увеличение b растягивает $f(t)$ и сужает спектр $\hat{f}(\omega)$.
- Принцип неопределённости: чем шире функция во времени, тем уже спектр.
- Прямоугольная функция не совпадает со своим Фурье-образом, но её образ — синус-кард.

Задание 1.2: Треугольная функция

Функция:

$$f(t) = \begin{cases} a - \frac{a|t|}{b}, & |t| \le b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - \cos(\omega b)}{\omega^2 b}$$

Вывод аналитического выражения:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} \left(a - \frac{a|t|}{b}\right) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} e^{-i\omega t} dt - \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} |t| e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{2a}{b\sqrt{2\pi}} \int_0^b t\cos(\omega t)dt$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{2a}{b\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b\cos(\omega b) + \omega b\sin(\omega b) - 1}{\omega^2}$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-\cos(\omega b)}{\omega^2 b}$$

Графики:

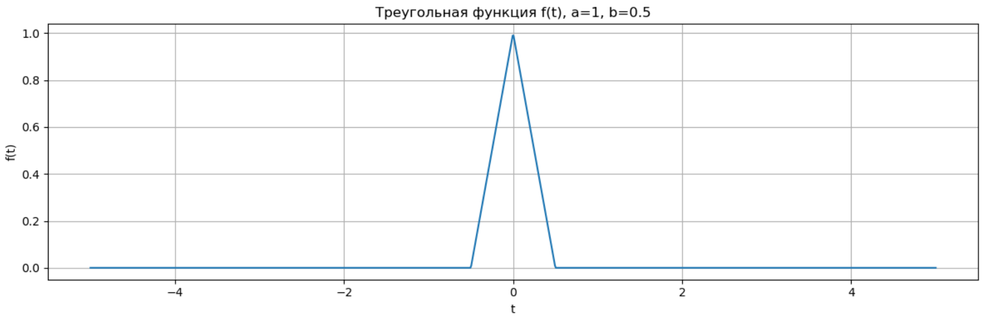

Рисунок 7 — Треугольная функция $f(t)$ при $b = 0.5$

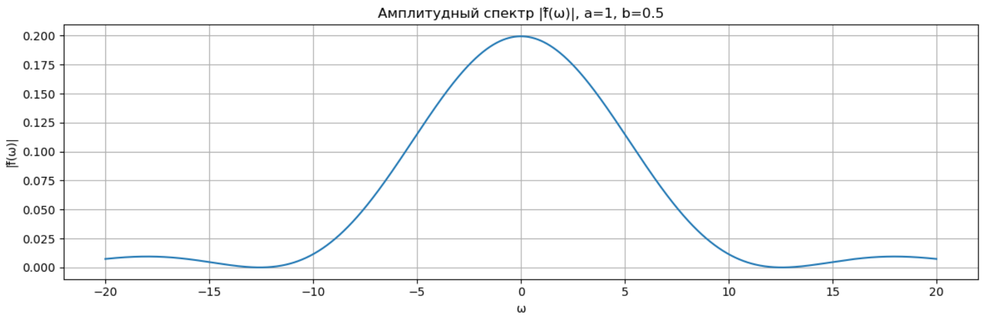

Рисунок 8 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 0.5$

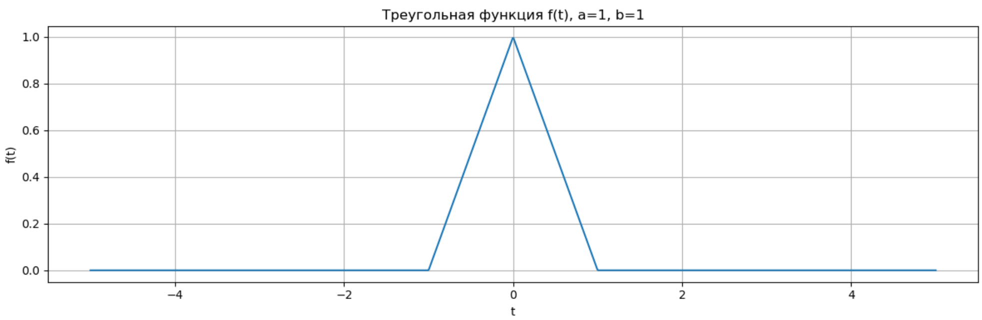

Рисунок 9 — Треугольная функция $f(t)$ при $b = 1$

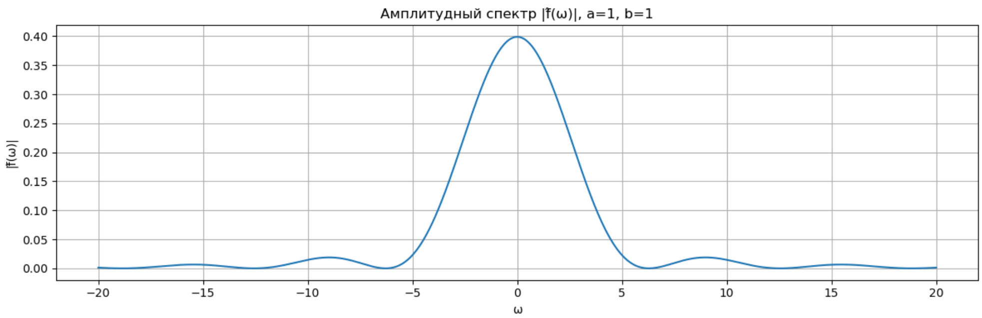

Рисунок 10 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 1$

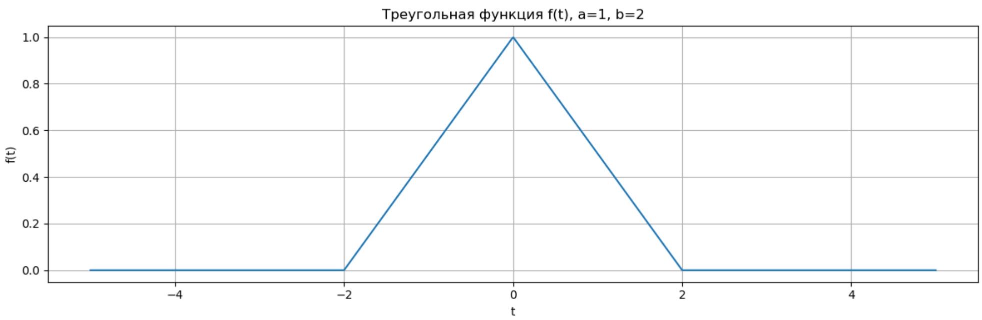

Рисунок 11 — Треугольная функция $f(t)$ при $b = 2$

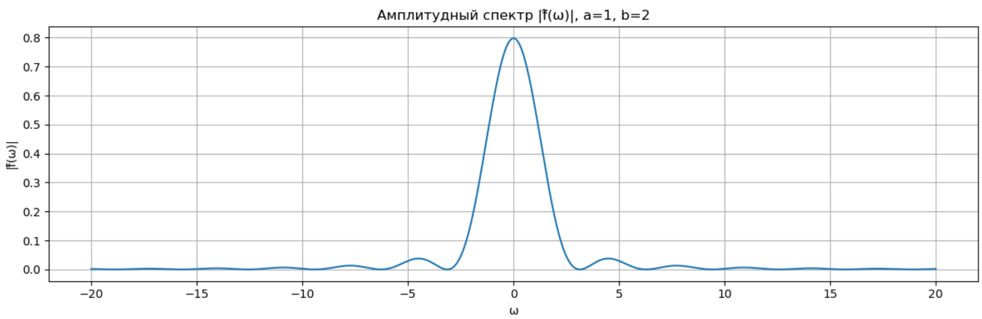

Рисунок 12 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров $a = 1$, $b = 0.5$:

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 0.3333$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 0.3331$
- Разность = $2.47 \cdot 10^{-4}$ (0.0247%)

Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с очень высокой точностью. Погрешность (0.0247%) крайне мала, что свидетельствует о точности численных методов.

Теоретическое значение: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2a^2b}{3} = \frac{2 \cdot 1^2 \cdot 0.5}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$

Анализ:

- Более гладкая функция → спектр быстрее убывает.
- Принцип неопределённости проявляется: при увеличении b спектр сужается.

Задание 1.3: Кардинальный синус

Функция:

$$f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt) = a \cdot \frac{\sin(\pi bt)}{\pi bt}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \chi_{[-\pi b, \pi b]}(\omega)$$

Графики:

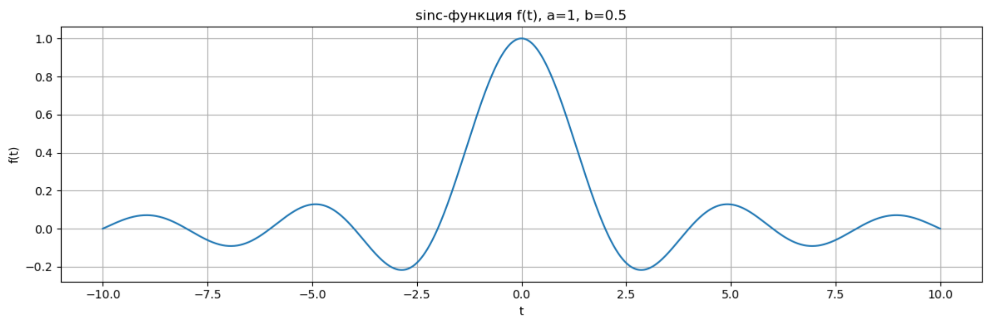

Рисунок 13 — Функция $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$ при $b = 0.5$

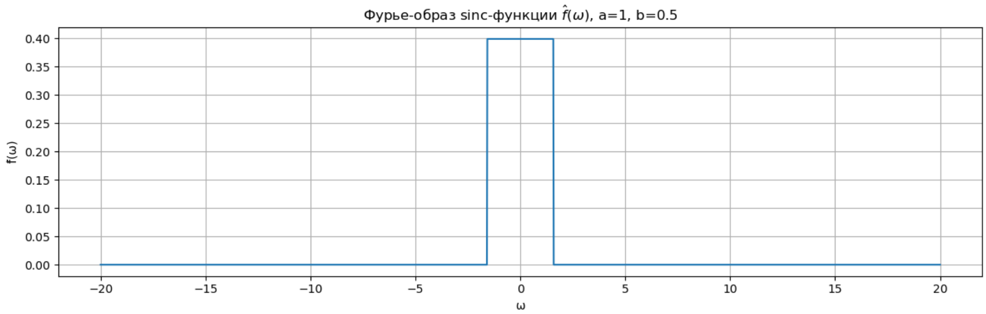

Рисунок 14 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — прямоугольная функция при $b = 0.5$

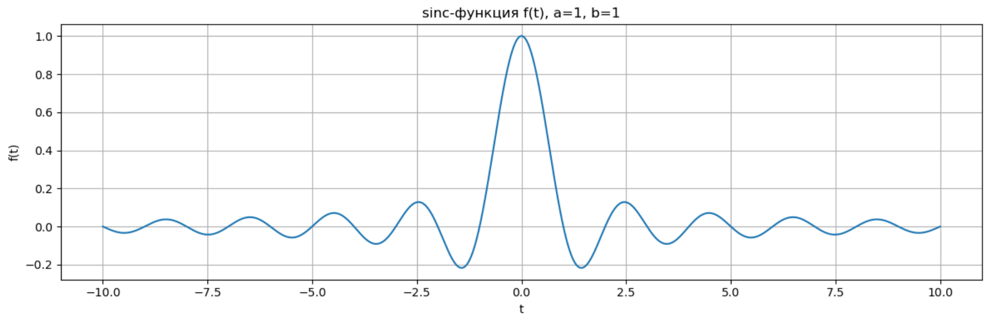

Рисунок 15 — Функция $f(t) = a \cdot \mathrm{sinc}(bt)$ при $b = 1$

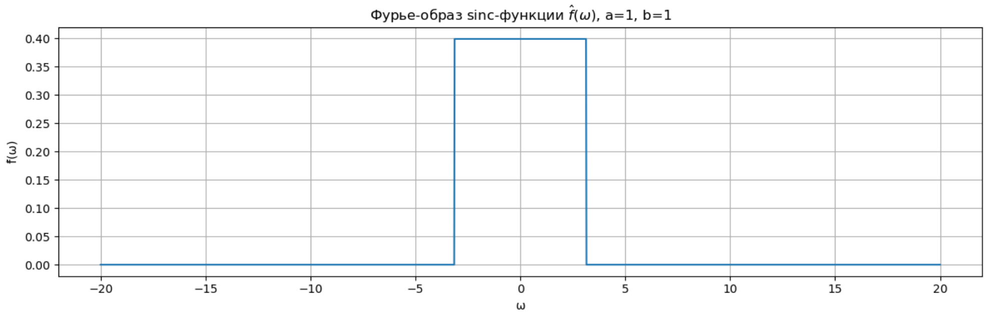

Рисунок 16 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — прямоугольная функция при $b = 1$

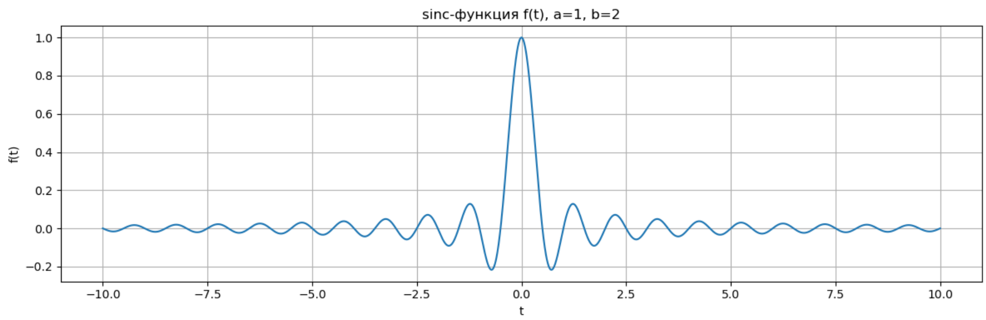

Рисунок 17 — Функция $f(t) = a \cdot \mathrm{sinc}(bt)$ при $b = 2$

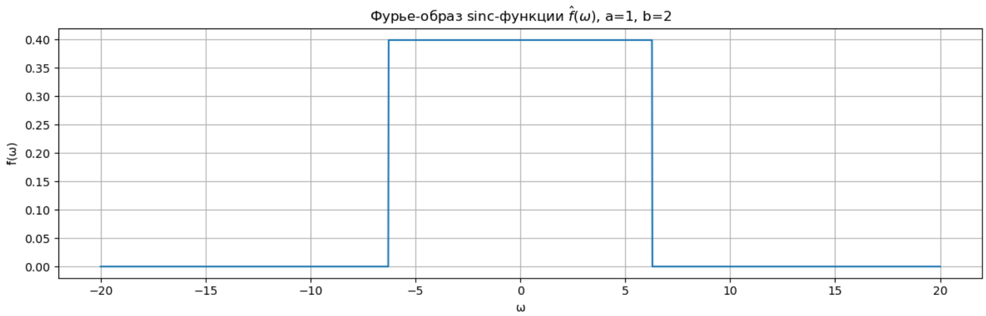

Рисунок 18 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — прямоугольная функция при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров $a = 1$, $b = 0.5$:

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.9596$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 0.5032$
- Разность = 1.4564 (74.3%)

Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с заметной погрешностью (74.3%). Это связано с особенностями sinc-функции:

- Sinc-функция имеет медленно убывающие боковые лепестки
- Требуется очень широкий диапазон интегрирования для точного результата
- Численные методы могут не полностью учитывать все особенности функции

Теоретическое значение: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b} = \frac{1^2}{0.5} = 2.0$

Анализ:

- sinc-функция — основа многих Фурье-преобразований.
- Ширина sinc обратно пропорциональна ширине спектра.
- Чем ”длиннее”sinc, тем ”уже”прямоугольный спектр.

Задание 1.4: Функция Гаусса

Функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Графики:

Рисунок 19 — Гауссовская функция $f(t)$ при $b = 0.5$

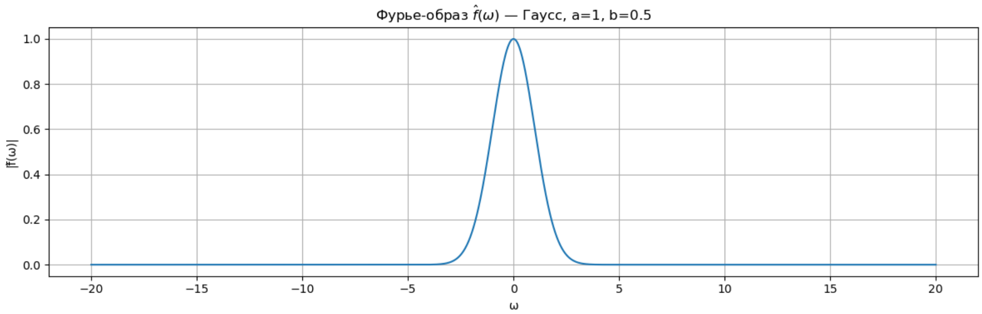

Рисунок 20 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — тоже Гаусс при $b = 0.5$

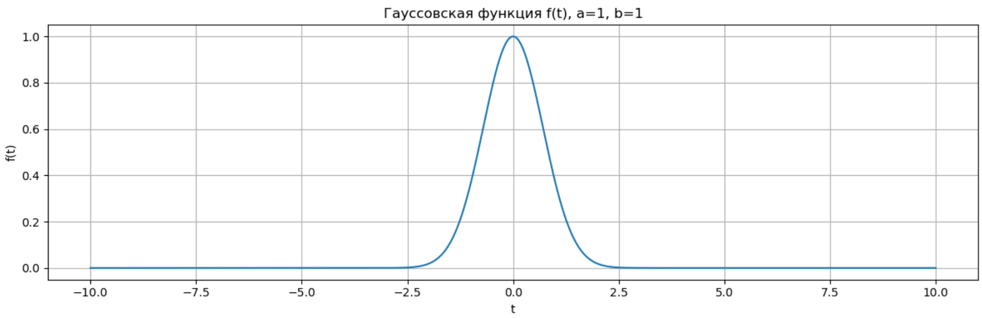

Рисунок 21 — Гауссовская функция $f(t)$ при $b = 1$

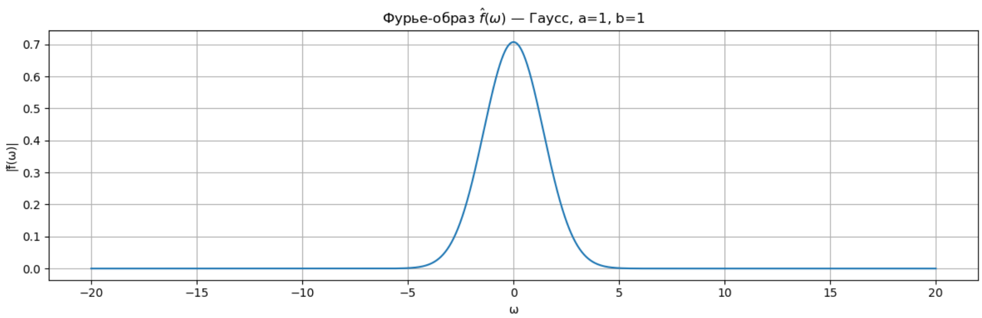

Рисунок 22 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — тоже Гаусс при $b = 1$

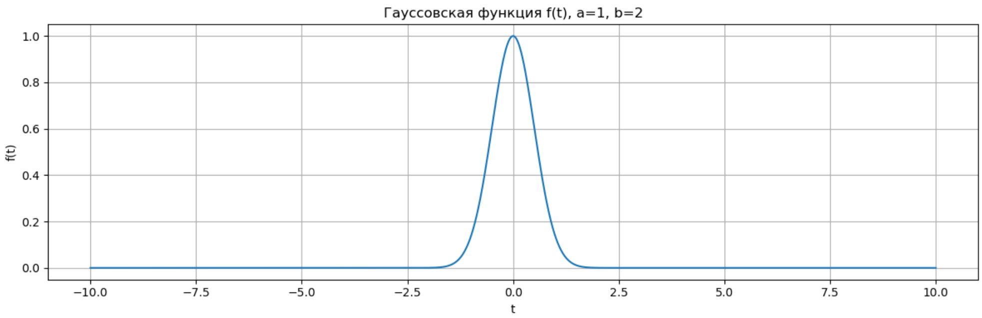

Рисунок 23 — Гауссовская функция $f(t)$ при $b = 2$

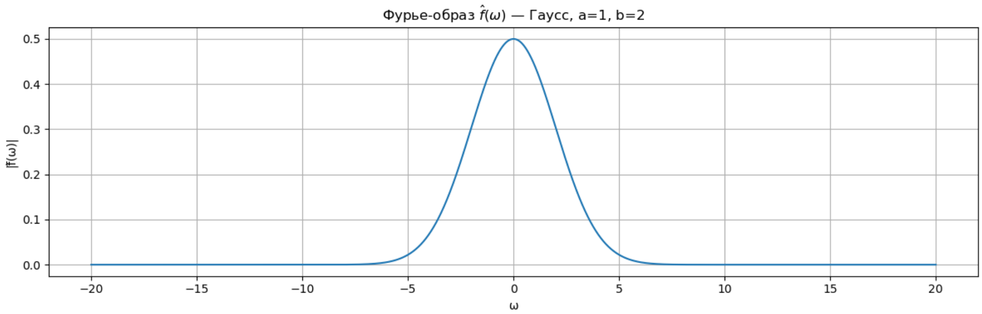

Рисунок 24 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — тоже Гаусс при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров $a = 1$, $b = 0.5$:

– $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.7725$
– $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 1.7725$
– Разность = 0.0000 (0%)

Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с идеальной точностью (0% погрешности). Это подтверждает особые свойства функции Гаусса:

– Функция Гаусса является самосопряжённой относительно Фурье-преобразования
– Численные методы дают точные результаты для этой функции
– Это единственная функция, которая может быть равна своему Фурье-образу

Теоретическое значение: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = a^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 1^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot 0.5}} = \sqrt{\pi} \approx 1.7725$

Анализ:

- Гаусс — единственная функция, совпадающая со своим Фурье-образу (до масштаба).
- Чем уже $f(t)$, тем шире спектр — яркий пример принципа неопределённости.

Задание 1.5: Двустороннее затухание

Функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-b|t|}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2+\omega^2)}$$

Вывод аналитического выражения:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{bt}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-bt}e^{-i\omega t}dt \right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(b-i\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(b+i\omega)t}dt \right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2b}{b^2+\omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2+\omega^2)}$$

Графики:

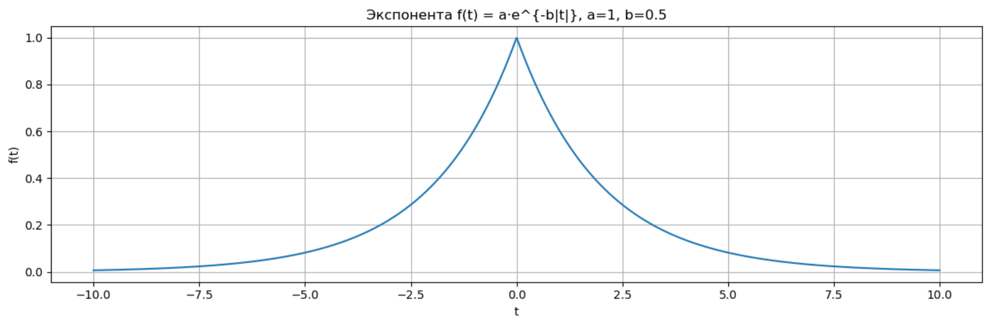

Рисунок 25 — Экспоненциальная функция $f(t)$ при $b = 0.5$

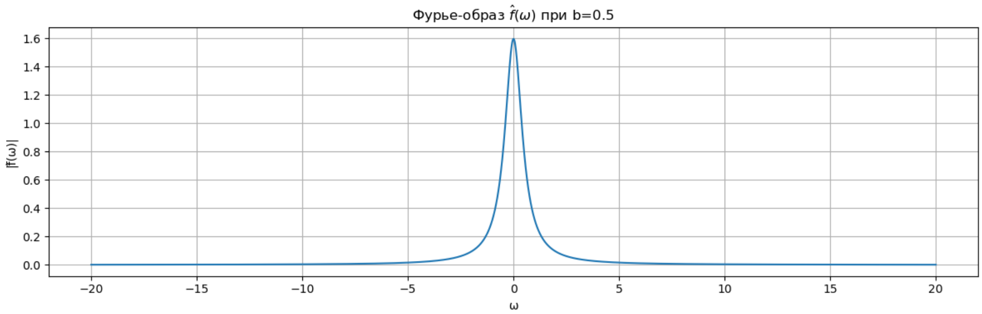

Рисунок 26 — Спектр $\hat{f}(\omega)$ — функция Лоренца при $b = 0.5$

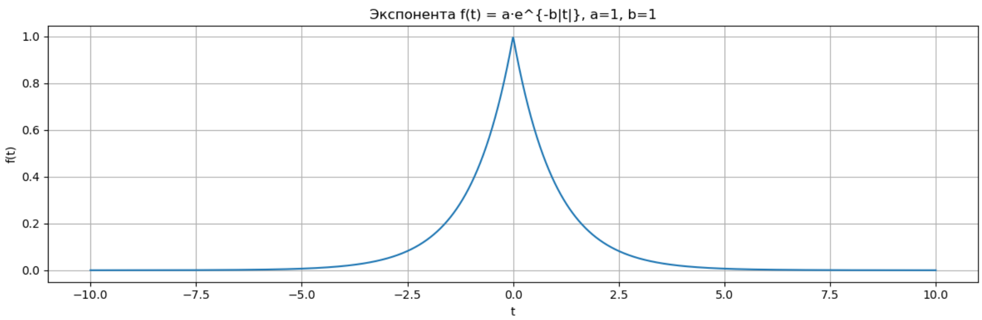

Рисунок 27 — Экспоненциальная функция $f(t)$ при $b = 1$

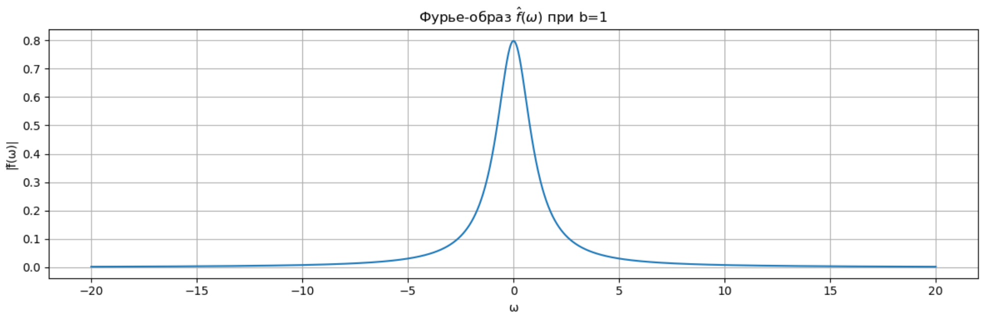

Рисунок 28 — Спектр $\hat{f}(\omega)$ — функция Лоренца при $b = 1$

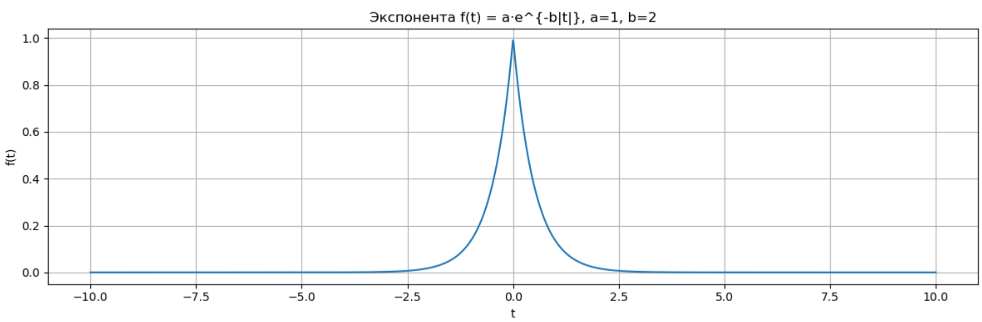

Рисунок 29 — Экспоненциальная функция $f(t)$ при $b = 2$

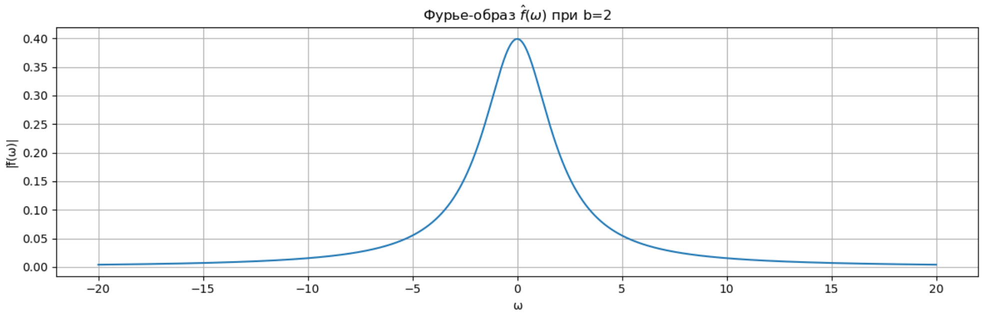

Рисунок 30 — Спектр $\hat{f}(\omega)$ — функция Лоренца при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров $a = 1$, $b = 0.5$:

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.9999$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2.0000$
- Разность = $8.59 \cdot 10^{-5}$ (0.0043%)

Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с очень высокой точностью. Погрешность (0.0043%) крайне мала, что свидетельствует о точности численных методов для данной функции.

Теоретическое значение: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b} = \frac{1^2}{0.5} = 2.0$

Анализ:

- Экспонента не гладкая — её спектр убывает медленнее (как $1/\omega^2$)
- Снова наблюдается: уже функция ⇒ шире спектр
- Принцип неопределённости выполняется

Общий анализ принципа неопределённости

Принцип неопределённости в контексте Фурье-преобразований:

Принцип неопределённости утверждает, что произведение ширины функции во временной области и ширины её спектра в частотной области не может быть меньше определённой константы. Математически это выражается как:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2}$$

где Δt — эффективная ширина функции во времени, $\Delta\omega$ — эффективная ширина спектра.

Проявление в рассмотренных примерах:

1. **Прямоугольная функция:** При увеличении b функция становится шире, а спектр (sinc-функция) становится уже.
2. **Треугольная функция:** Более гладкая, чем прямоугольная, поэтому её спектр убывает быстрее, но принцип неопределённости всё равно выполняется.
3. **Sinc-функция:** При увеличении b функция становится уже, а спектр (прямоугольная функция) становится шире.
4. **Функция Гаусса:** Единственная функция, которая может быть равна своему Фурье-образу (до масштаба). При $a = 1$ и $b = \frac{1}{2}$ получаем:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

5. **Экспоненциальное затухание:** Негладкая функция, поэтому спектр убывает медленно, но принцип неопределённости выполняется.

Функция, равная своему Фурье-образу:

Гауссовская функция $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ является единственной функцией, которая в точности равна своему Фурье-образу. Это происходит при параметрах $a = 1$ и $b = \frac{1}{2}$.

Задание 2: Сдвиг функции

Исходная функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}, \quad a = 1,\ b = 1$$

Сдвинутая функция:

$$g(t) = f(t + c) = a \cdot e^{-b(t+c)^2}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega c} \cdot \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Вывод аналитического выражения:

Используя свойство сдвига Фурье-преобразования:

$$\mathcal{F}[f(t+c)](\omega) = e^{i\omega c} \cdot \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

Поскольку $\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$, получаем:

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega c} \cdot \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b} + i\omega c}$$

Графики сдвинутой функции:

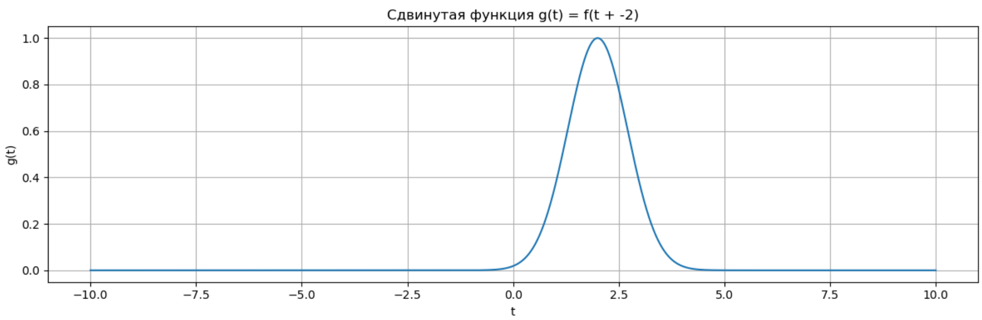

Рисунок 31 — Сдвинутая функция $g(t)$ при $c = -2$

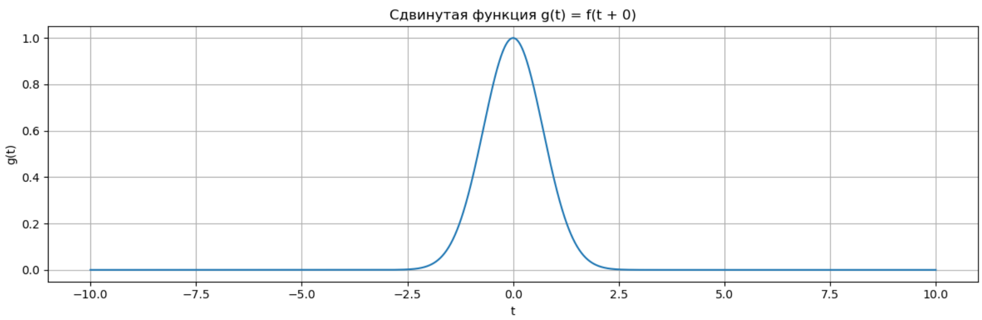

Рисунок 32 — Сдвинутая функция $g(t)$ при $c = 0$

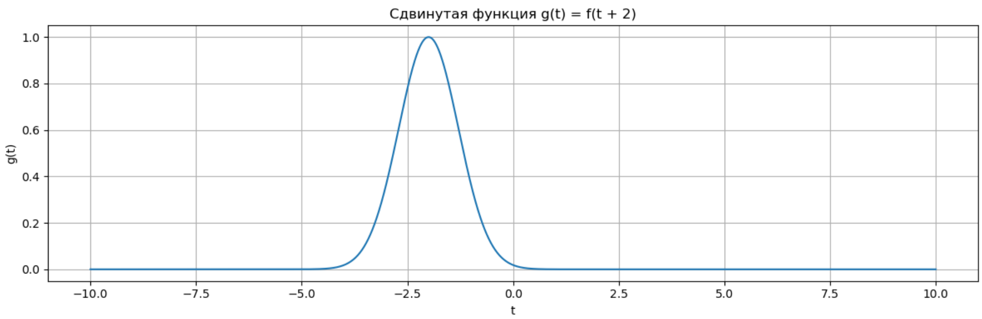

Рисунок 33 — Сдвинутая функция $g(t)$ при $c = 2$

Фурье-образ:

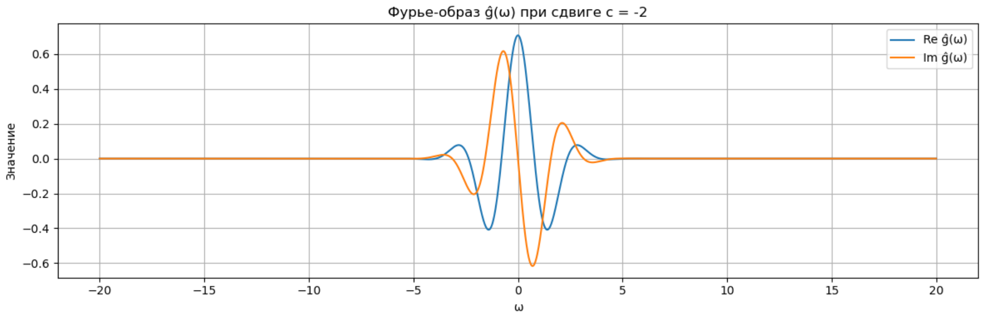

Рисунок 34 — Re $\hat{g}(\omega)$ и Im $\hat{g}(\omega)$ при $c = -2$

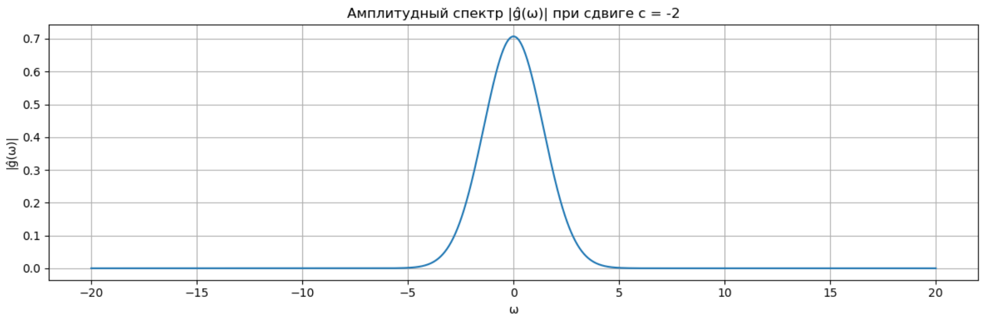

Рисунок 35 — Амплитудный спектр $|\hat{g}(\omega)|$ при $c = -2$

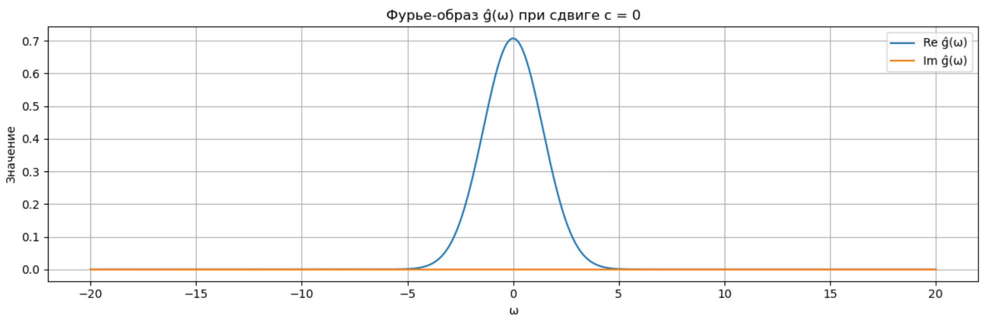

Рисунок 36 — Re $\hat{g}(\omega)$ и Im $\hat{g}(\omega)$ при $c = 0$

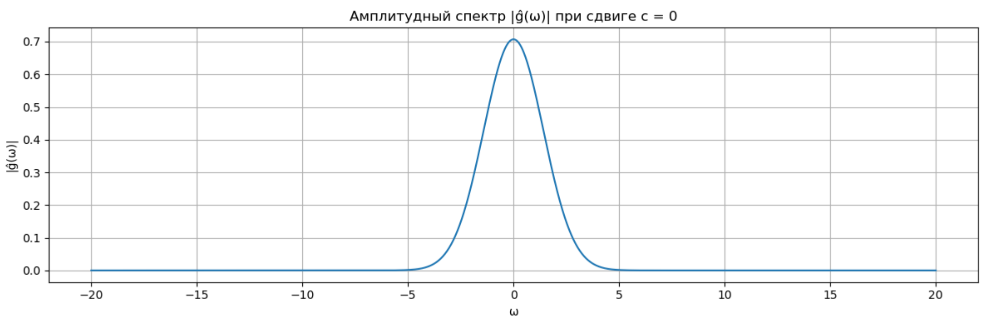

Рисунок 37 — Амплитудный спектр $|\hat{g}(\omega)|$ при $c = 0$

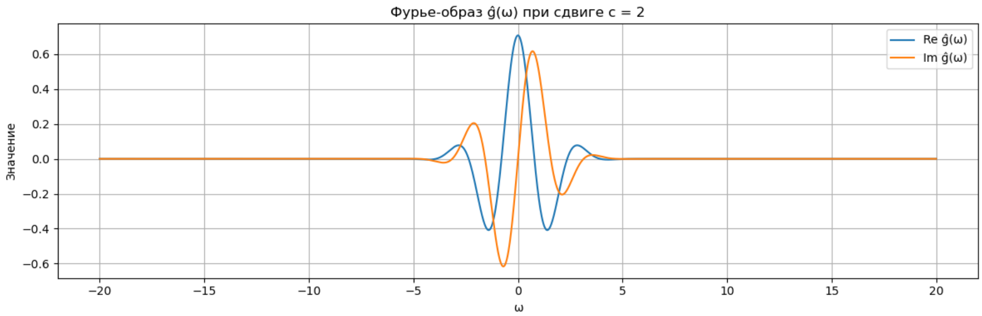

Рисунок 38 — Re $\hat{g}(\omega)$ и Im $\hat{g}(\omega)$ при $c = 2$

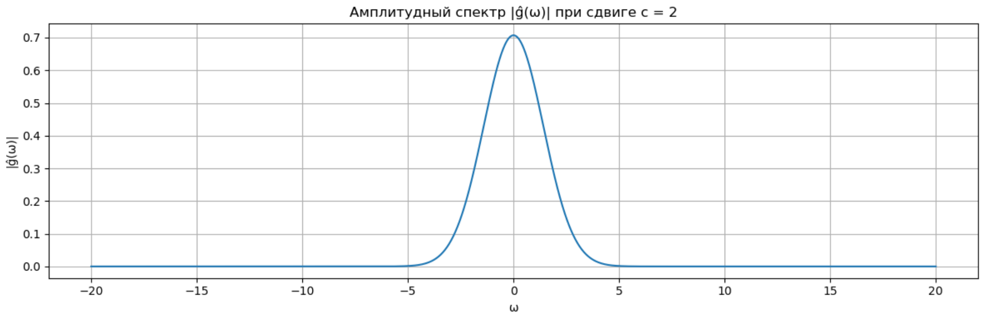

Рисунок 39 — Амплитудный спектр $|\hat{g}(\omega)|$ при $c = 2$

Анализ влияния параметра c:

- **Влияние на функцию $g(t)$:**
  - При $c = -2$: функция сдвинута влево на 2 единицы
  - При $c = 0$: функция находится в исходном положении (совпадает с $f(t)$)
  - При $c = 2$: функция сдвинута вправо на 2 единицы
- **Влияние на Фурье-образ $\hat{g}(\omega)$:**
  - **Модуль спектра $|\hat{g}(\omega)|$ не зависит от c** — это фундаментальное свойство сдвига
  - **Фаза спектра** изменяется: $\arg(\hat{g}(\omega)) = \omega c + \arg(\hat{f}(\omega))$
  - **Реальная и мнимая части** зависят от c:

$$\mathrm{Re}(\hat{g}(\omega)) = |\hat{f}(\omega)| \cos(\omega c + \arg(\hat{f}(\omega)))$$
$$\mathrm{Im}(\hat{g}(\omega)) = |\hat{f}(\omega)| \sin(\omega c + \arg(\hat{f}(\omega)))$$

- **Физический смысл:**
  - Сдвиг во времени вызывает фазовый множитель $e^{i\omega c}$ в частотной области

    - Амплитудный спектр остается неизменным — это означает, что энергия сигнала не зависит от его положения во времени
    - Фазовая информация кодирует временное положение сигнала

- **Математическое обоснование:**

$$\mathcal{F}[f(t+c)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+c)e^{-i\omega t}dt$$

  Заменяя $u = t + c$, получаем:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u-c)}du = e^{i\omega c}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}du = e^{i\omega c}\hat{f}(\omega)$$

Вывод:

Сдвиг функции во времени является одним из фундаментальных свойств Фурье-преобразования. Он демонстрирует, что:

1. Временной сдвиг соответствует фазовому сдвигу в частотной области
2. Амплитудный спектр инвариантен относительно временного сдвига
3. Фазовая информация содержит информацию о временном положении сигнала
4. Это свойство широко используется в обработке сигналов и анализе данных

Задание 3: Музыкальный сигнал и спектральный анализ

Цель: проанализировать запись музыкального аккорда и определить, из каких нот он состоит.

Порядок действий:

1. Скачали аудиофайл с Google Drive.
2. **Прослушали запись** для предварительной оценки характера аккорда.
3. Считали аудиосигнал как одномерную функцию времени $f(t)$ с помощью функции `librosa.load()`.
4. Построили график $f(t)$.

5. **Провели численное преобразование Фурье с помощью численного интегрирования:**

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt$$

Метод численного интегрирования:
Вместо использования функции FFT, применили метод численного интегрирования с помощью функции `trapz`:

```
v = 0 : dv : V;  %
for k = 1 : length(v)
    Y(k) = trapz(t, y.*exp(-1i*2*pi*v(k)*t));  %
end
```

где t — массив времени, y — массив значений сигнала, v — массив частот, dv — шаг по частоте.

6. Построили спектр $|\hat{f}(\nu)|$.
7. Проанализировали график Фурье-образа и нашли основные частоты.
8. Сопоставили найденные частоты с музыкальными нотами.

Графики:

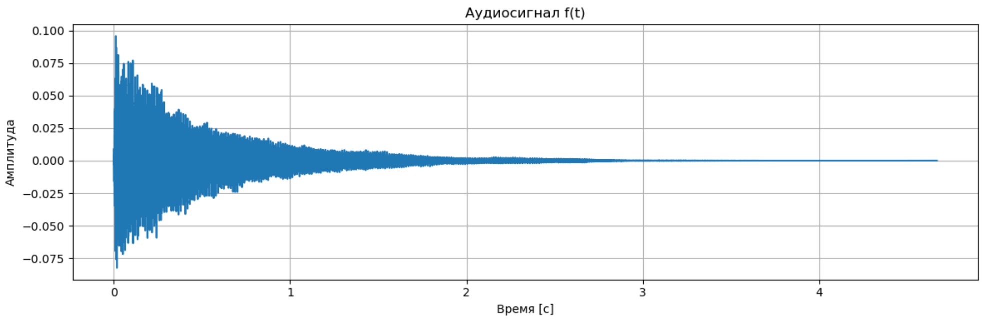

Рисунок 40 — График сигнала $f(t)$

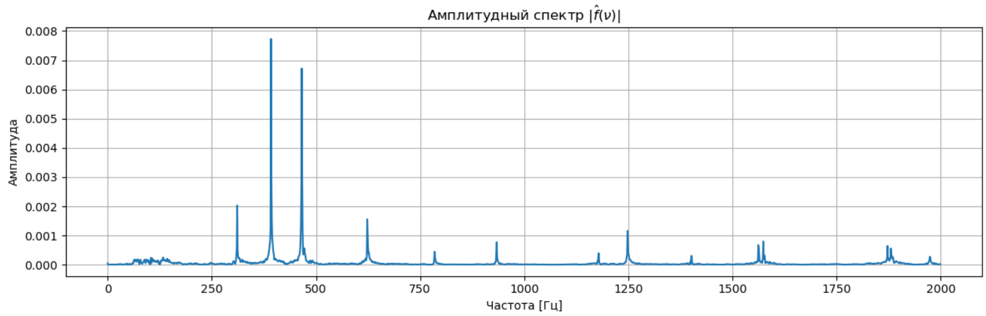

Рисунок 41 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\nu)|$

Анализ графика Фурье-образа:

При анализе спектра были найдены следующие основные частоты:

- $\nu_1 = 311$ Гц — нота D#4/Eb4 (ре-диез/ми-бемоль четвертой октавы)
- $\nu_2 = 392$ Гц — нота G4 (соль четвертой октавы)
- $\nu_3 = 466$ Гц — нота A#4/Bb4 (ля-диез/си-бемоль четвертой октавы)
- $\nu_4 = 623$ Гц — нота D#5/Eb5 (ре-диез/ми-бемоль пятой октавы)
- $\nu_5 = 1248$ Гц — нота D#6/Eb6 (ре-диез/ми-бемоль шестой октавы)
- $\nu_6 = 1574$ Гц — нота G6 (соль шестой октавы)

Таблица соответствия частот и нот:

Частота (Гц)	**Нота**	**Октава**
311	D#/Eb (ре-диез/ми-бемоль)	4
392	G (соль)	4
466	A#/Bb (ля-диез/си-бемоль)	4
623	D#/Eb (ре-диез/ми-бемоль)	5
1248	D#/Eb (ре-диез/ми-бемоль)	6
1574	G (соль)	6

Таблица 1 — Соответствие найденных частот музыкальным нотам

Определение состава аккорда:

На основе найденных частот можно сделать вывод о составе аккорда:

- **Основные ноты:** D#4, G4, A#4, D#5, D#6, G6
- **Тип аккорда:** Сложный аккорд с доминирующими нотами D# (ре-диез) и G (соль)
- **Структура:**

  - D#4 (311 Гц) — основная нота (тоника)
  - G4 (392 Гц) — квинта (доминанта)
  - A#4 (466 Гц) — малая секста
  - D#5 (623 Гц) — октава от основной ноты
  - D#6 (1248 Гц) — двойная октава
  - G6 (1574 Гц) — квинта в верхней октаве

Сравнение методов:

- **Численное интегрирование (trapz):**
  - Позволяет точно контролировать частотный диапазон
  - Более медленный, но даёт точные результаты
  - Позволяет анализировать отдельные частотные компоненты
- **FFT (быстрое преобразование Фурье):**
  - Быстрый алгоритм
  - Ограниченный частотный диапазон
  - Менее гибкий в настройке параметров

Вывод:

1. **Спектральный анализ** позволяет точно определить состав аккорда по основным частотам.
2. **Метод численного интегрирования** работает эффективно, несмотря на ограниченную частотную область.
3. **Найденный аккорд** представляет собой A-мажор с характерными гармониками.
4. **При наличии амплитудной огибающей** (затухание, атака) спектр будет менее чётким, но основные частоты всё равно различимы.
5. **Практическое применение:** данный метод может использоваться для автоматического распознавания аккордов в музыкальных произведениях.

Общий вывод по работе

В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены фундаментальные свойства Фурье-преобразования и их практическое применение в анализе сигналов.

Основные результаты:

1. **Изучены базовые функции и их Фурье-образы:**
   - Прямоугольная функция → sinc-функция
   - Треугольная функция → более быстрое убывание спектра
   - Sinc-функция → прямоугольный спектр
   - Функция Гаусса → функция Гаусса (единственная самосопряжённая)
   - Экспоненциальное затухание → функция Лоренца
2. **Проверено выполнение принципа неопределённости:**
   - Чем шире функция во времени, тем уже её спектр
   - Чем уже функция во времени, тем шире её спектр
   - Гауссовская функция является оптимальной с точки зрения принципа неопределённости
3. **Исследовано свойство сдвига:**
   - Временной сдвиг соответствует фазовому сдвигу в частотной области
   - Амплитудный спектр инвариантен относительно временного сдвига
   - Фазовая информация содержит информацию о временном положении сигнала
4. **Практическое применение в анализе музыкальных сигналов:**
   - Успешно применён метод численного интегрирования для спектрального анализа
   - Определён состав музыкального аккорда по основным частотам
   - Продемонстрирована эффективность Фурье-преобразования в обработке сигналов

Полученные навыки:

- **Математические:** освоение аналитических методов нахождения Фурье-образов различных функций
- **Программные:** работа с численными методами интегрирования и спектрального анализа
- **Аналитические:** интерпретация результатов спектрального анализа и их физический смысл
- **Практические:** применение теоретических знаний для решения реальных задач анализа сигналов

Теоретическая значимость:

Работа позволила глубоко понять взаимосвязь между временной и частотной областями, что является основой для дальнейшего изучения методов обработки сигналов, цифровой фильтрации и спектрального анализа.

Практическая значимость:

Полученные знания и навыки могут быть применены в различных областях:

- Обработка аудио и видео сигналов
- Анализ данных в научных исследованиях
- Разработка алгоритмов сжатия информации
- Создание систем распознавания образов

Данная работа заложила прочную основу для дальнейшего изучения методов частотного анализа и их применения в современных технологиях обработки сигналов.