МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«Практическая линейная алгебра»

по теме:
ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Студент:
Группа № R3335 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
должность, уч. степень, уч. звание *Догадин Е. В.*

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1. Непрерывные динамические системы

В данном задании мы исследуем непрерывные динамические системы второго порядка вида:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{1}$$

Зададим два неколлинеарных вектора, не лежащих на координатных осях:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Проверим, что векторы неколлинеарны:

$$\det([v_1, v_2]) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 2 + 1 = 3 \neq 0 \tag{3}$$

1.1 Система 1: Асимптотически устойчивая система

Создадим систему, которая асимптотически устойчива, при этом если $x(0) = v_1$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_1\}$, а если $x(0) = v_2$, то $x(t) \in \text{Span}\{v_2\}$ при всех $t \geq 0$.

Для этого нужно найти матрицу A такую, что $Av_1 = \lambda_1 v_1$ и $Av_2 = \lambda_2 v_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Пусть $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Решаем систему уравнений:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Получаем матрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

Собственные векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

1.2 Система 2: Неустойчивая система без неколлинеарных собственных векторов

Используем жорданову клетку:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (кратное)

Собственные векторы: только один линейно независимый вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.3 Система 3: Неустойчивая система с особым поведением

Используем диагональную матрицу с разными знаками собственных значений:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$
Собственные векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Если $x(0) = v_2$, то $x(t) = e^{-2t} v_2 \to 0$ при $t \to \infty$.

1.4 Система 4: Асимптотически устойчивая система с комплексными собственными векторами

Используем матрицу с комплексными собственными значениями с отрицательной вещественной частью:

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$
Собственные векторы (комплексные):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{12}$$

1.5 Система 5: Неустойчивая система с комплексными собственными векторами

Используем ту же структуру, но с положительной вещественной частью:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$
Собственные векторы (комплексные):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{14}$$

1.6 Система 6: Нейтрально устойчивая система

Используем мнимые собственные значения:

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$
Собственные векторы (комплексные):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{16}$$

1.7 Моделирование непрерывных систем

На рис. **??** представлены графики для всех шести систем с различными начальными условиями.

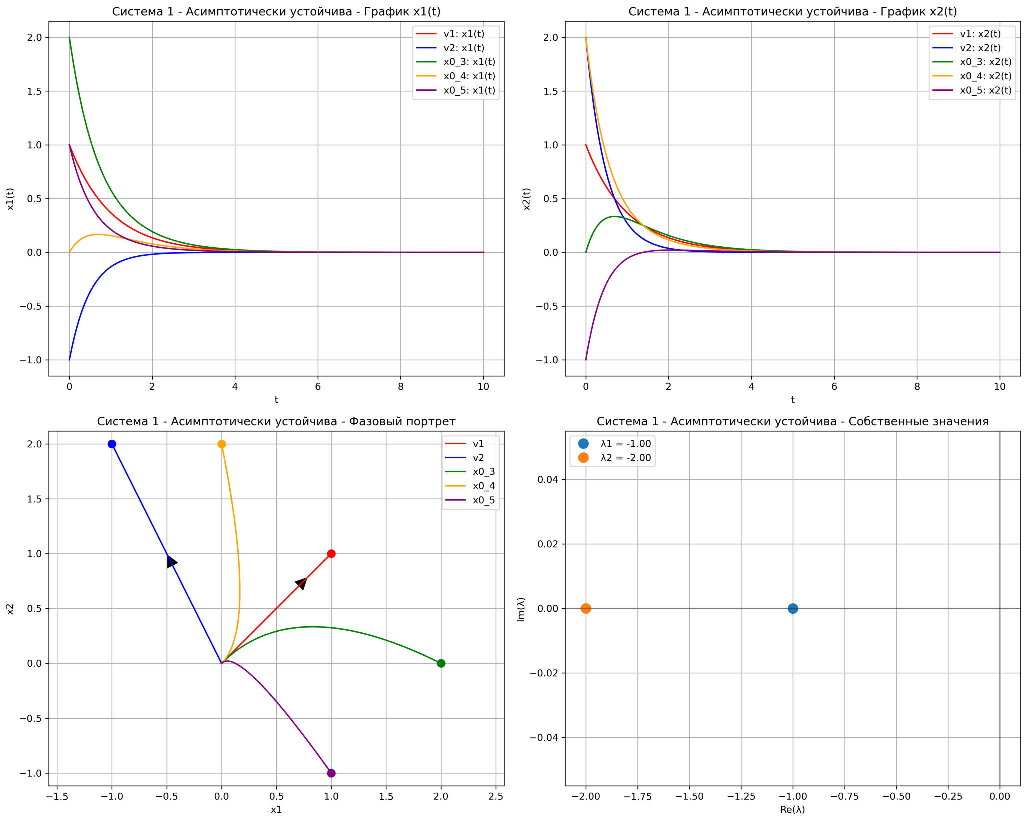

Рис. 1: Система 1: Асимптотически устойчивая система

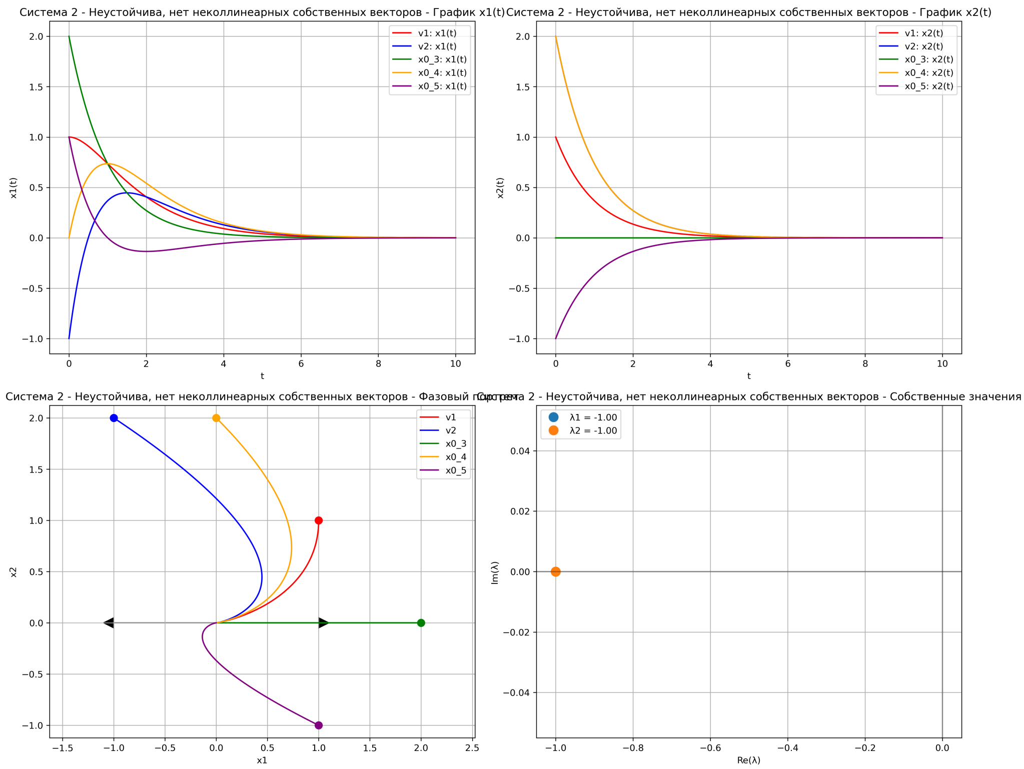

Рис. 2: Система 2: Неустойчивая система без неколлинеарных собственных векторов

2 Задание 2. Дискретные динамические системы

В данном задании мы исследуем дискретные динамические системы второго порядка вида:

$$x(k+1) = Ax(k), \quad x(k) \in \mathbb{R}^2, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{17}$$

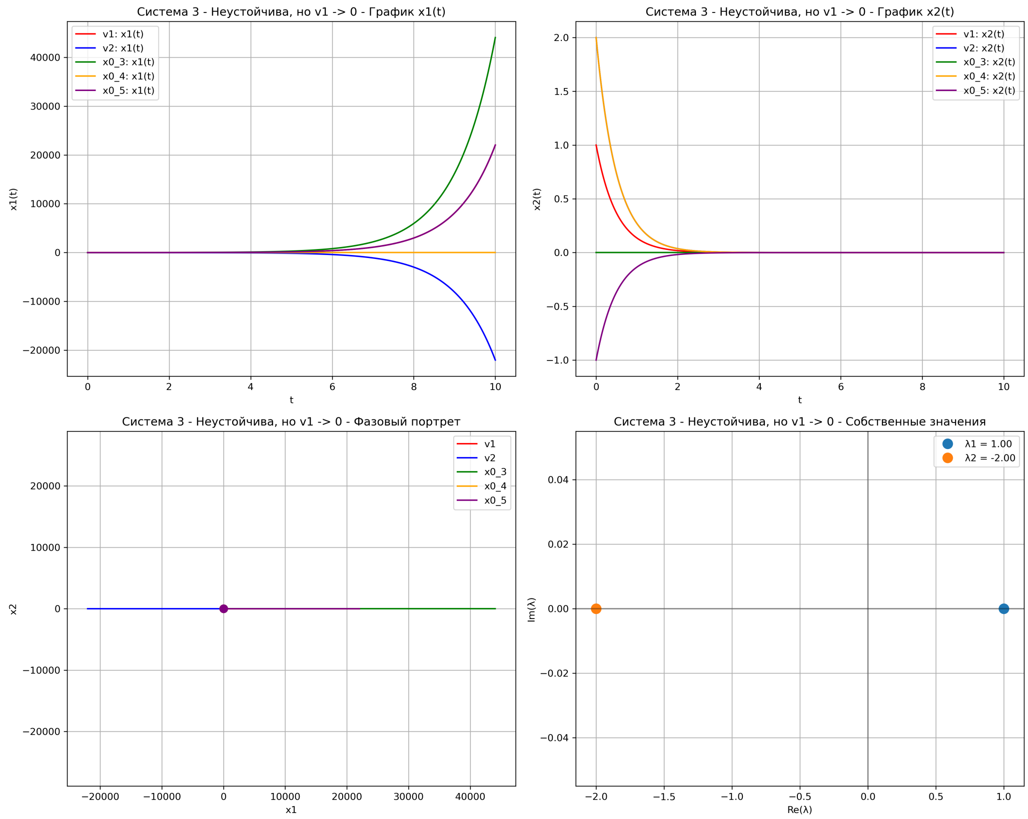

Рис. 3: Система 3: Неустойчивая система с особым поведением

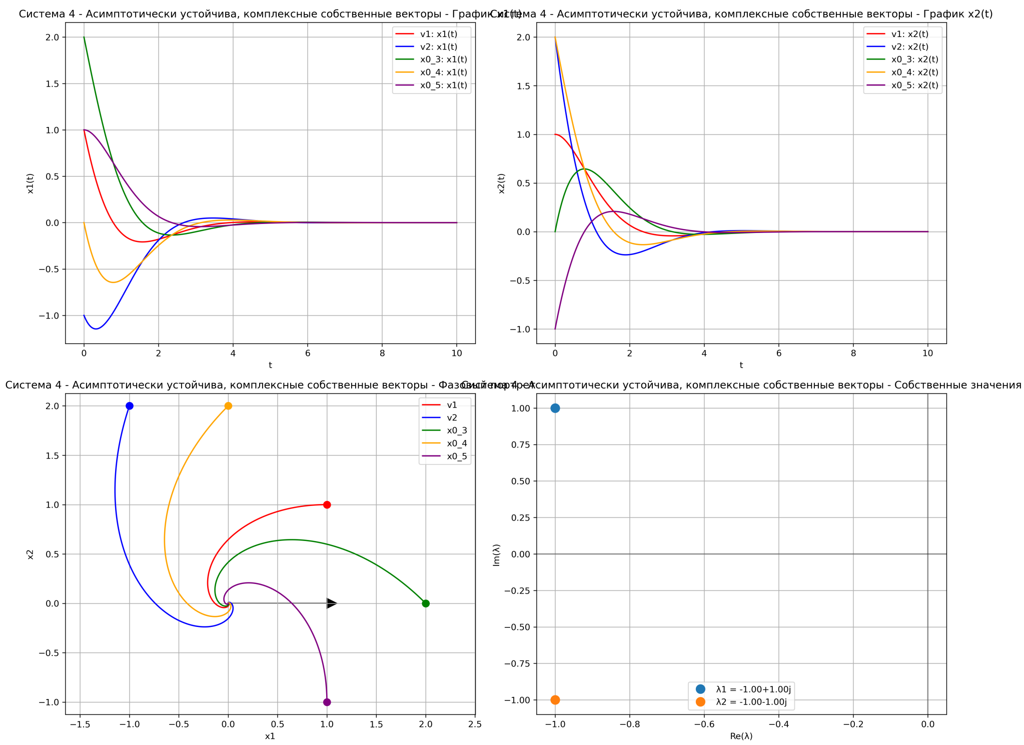

Рис. 4: Система 4: Асимптотически устойчивая система с комплексными собственными векторами

2.1 Создание матриц с заданными собственными значениями

Для создания матриц с заданными собственными значениями используем формулу:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1} \tag{18}$$

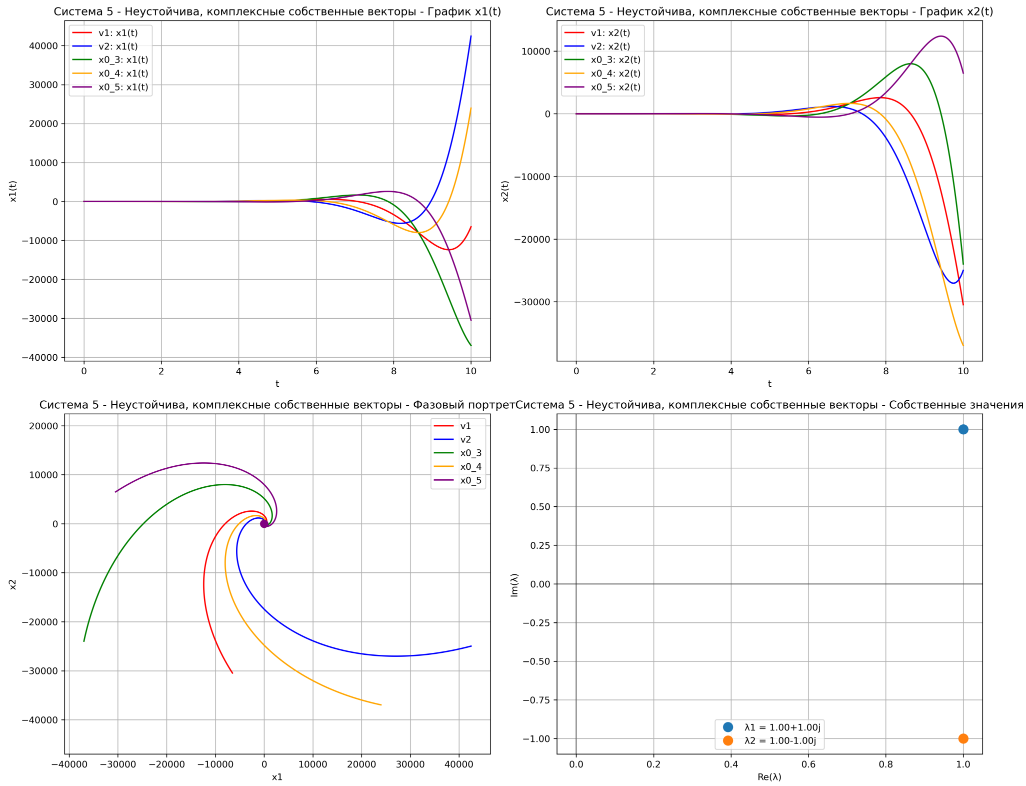

Рис. 5: Система 5: Неустойчивая система с комплексными собственными векторами

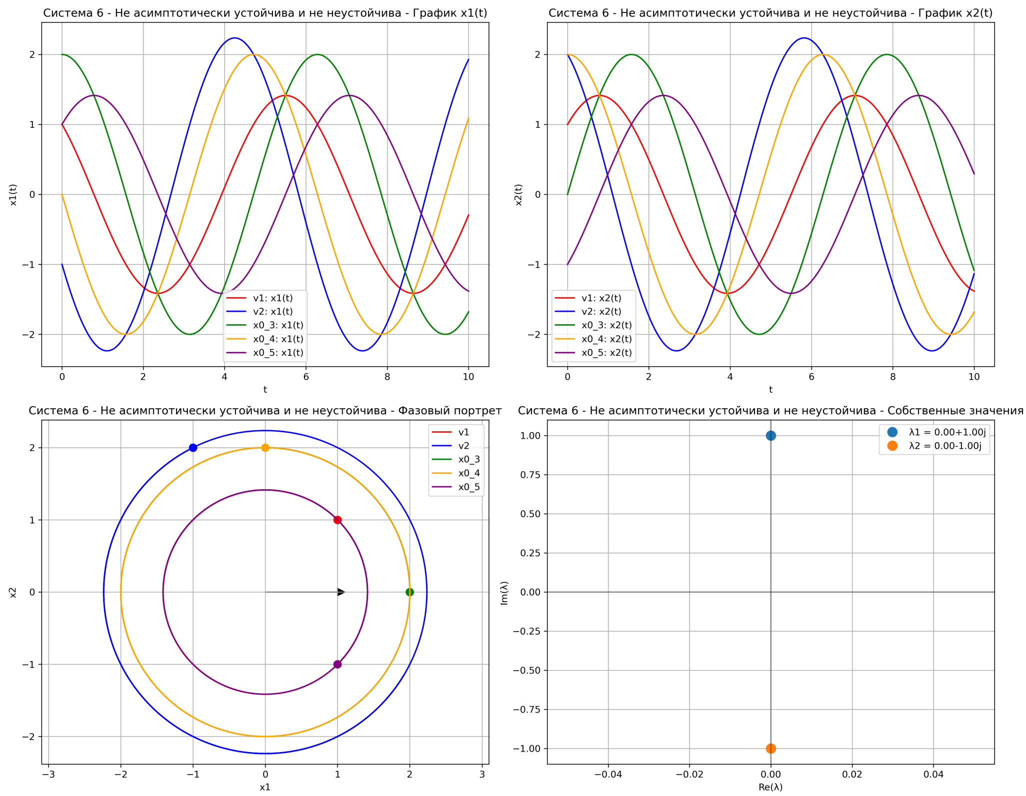

Рис. 6: Система 6: Нейтрально устойчивая система

где D - диагональная матрица с собственными значениями, а P - недиагональная матрица перехода.

2.2 Системы с различными собственными значениями

1. $\lambda_{1,2} = -1$ - система с отрицательными собственными значениями 2. $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$ - система с комплексными собственными значениями внутри единичного круга 3. $\lambda_{1,2} = \pm i$ - система с мнимыми собственными значениями на единичной окружности 4. $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$ - система с комплексными собственными значениями внутри единичного круга 5. $\lambda_{1,2} = 1$ - система с единичными собственными значениями

6-8. Те же собственные числа, умноженные на $c = 0.5$ $(0 < c < 1)$ 9-11. Те же собственные числа, умноженные на $d = 1.5$ $(d > 1)$ 12. $\lambda_{1,2} = 0$ - система с нулевыми собственными значениями

2.3 Моделирование дискретных систем

На рис. **??** представлены графики для всех двенадцати систем.

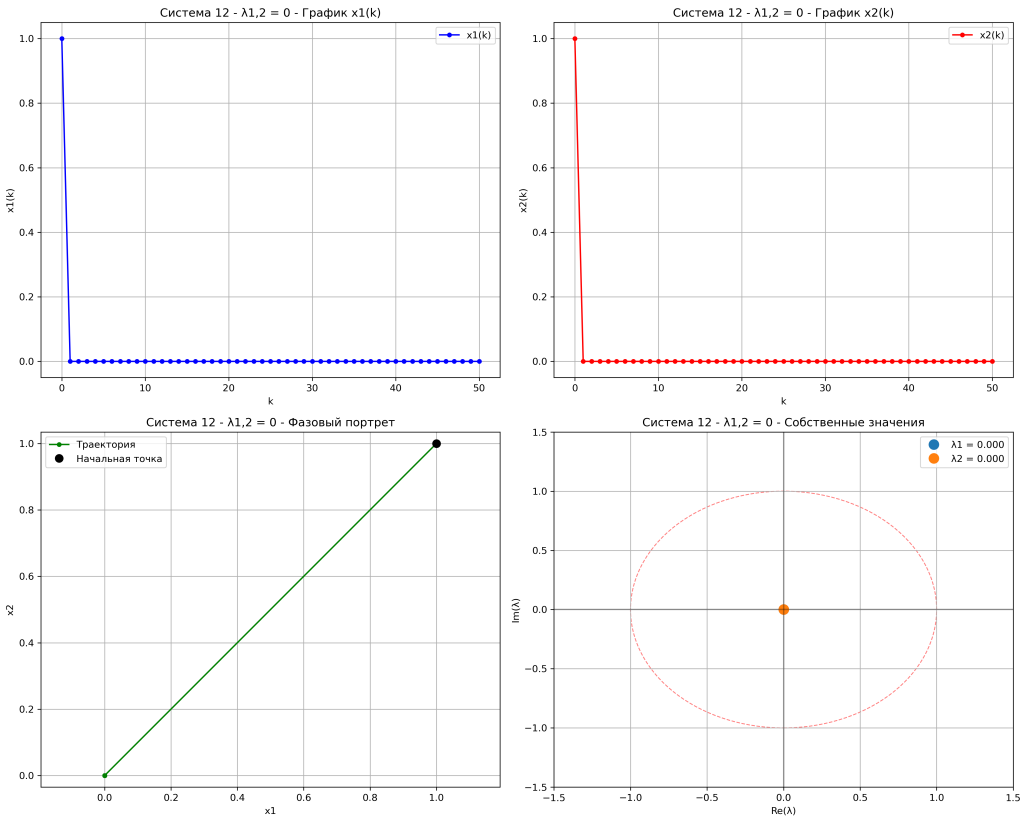

Рис. 7: Система 1: $\lambda_{1,2} = -1$

3 Задание 3. Осциллятор

Рассмотрим непрерывную систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + bx_2 \end{cases} \tag{19}$$

Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \tag{20}$$

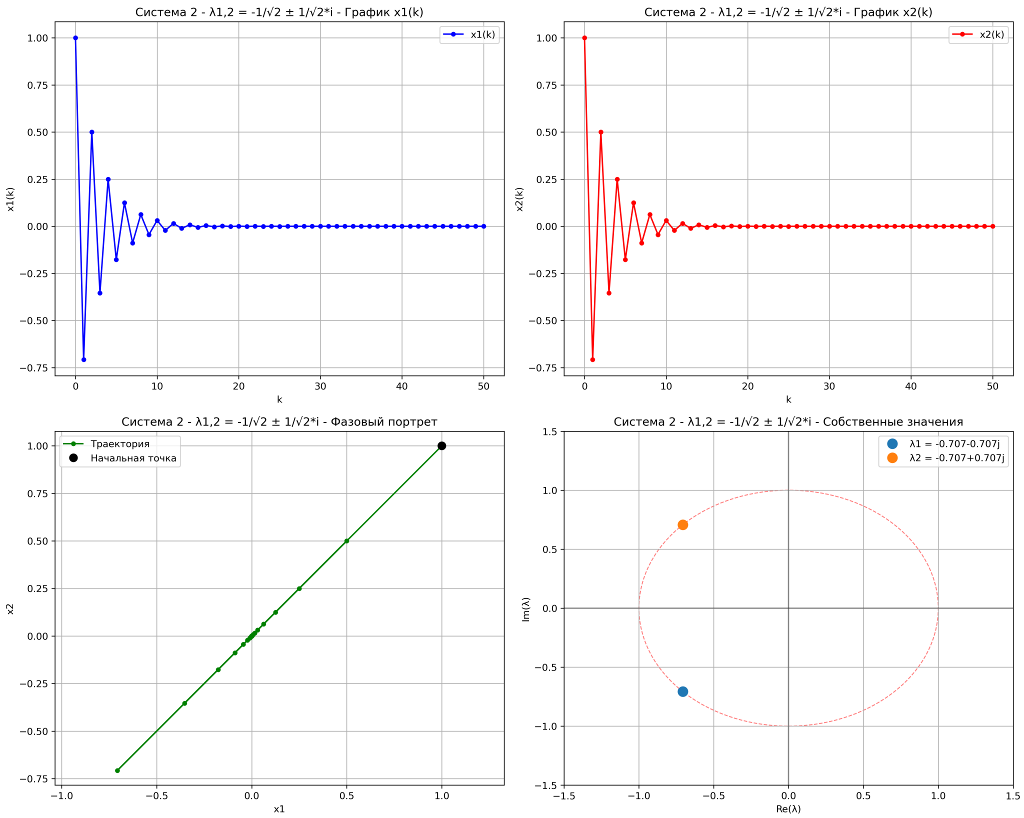

Рис. 8: Система 2: $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

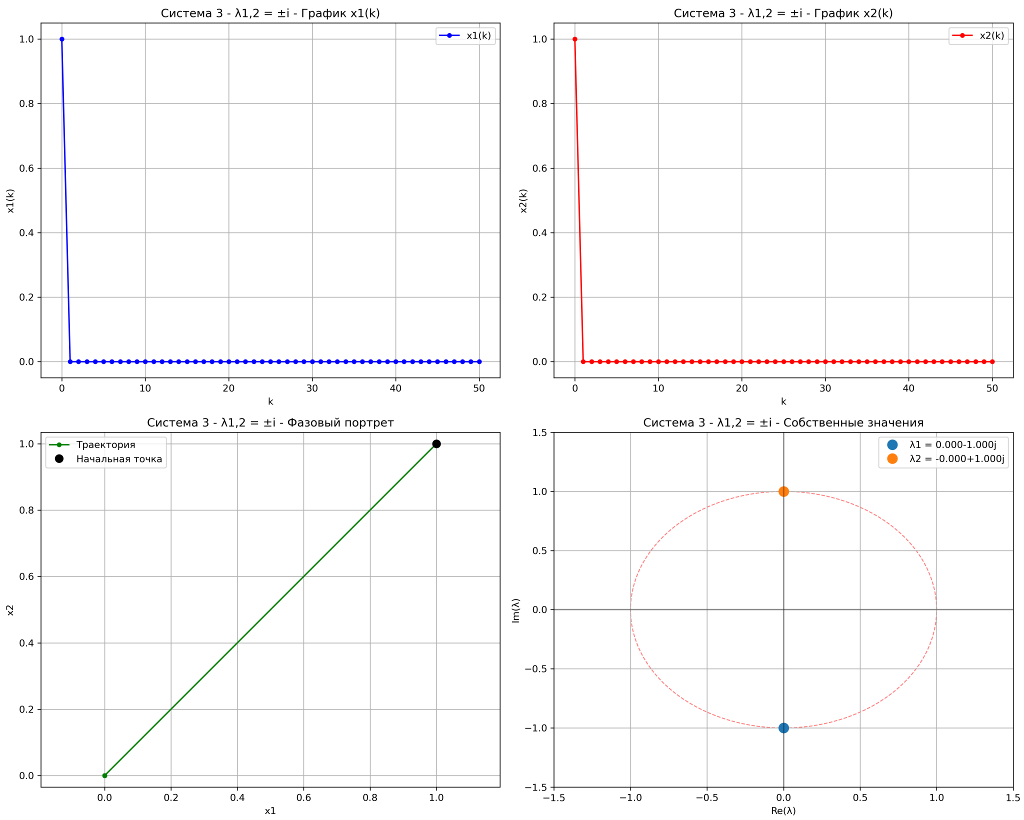

Рис. 9: Система 3: $\lambda_{1,2} = \pm i$

Характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - b\lambda - a = 0 \tag{21}$$

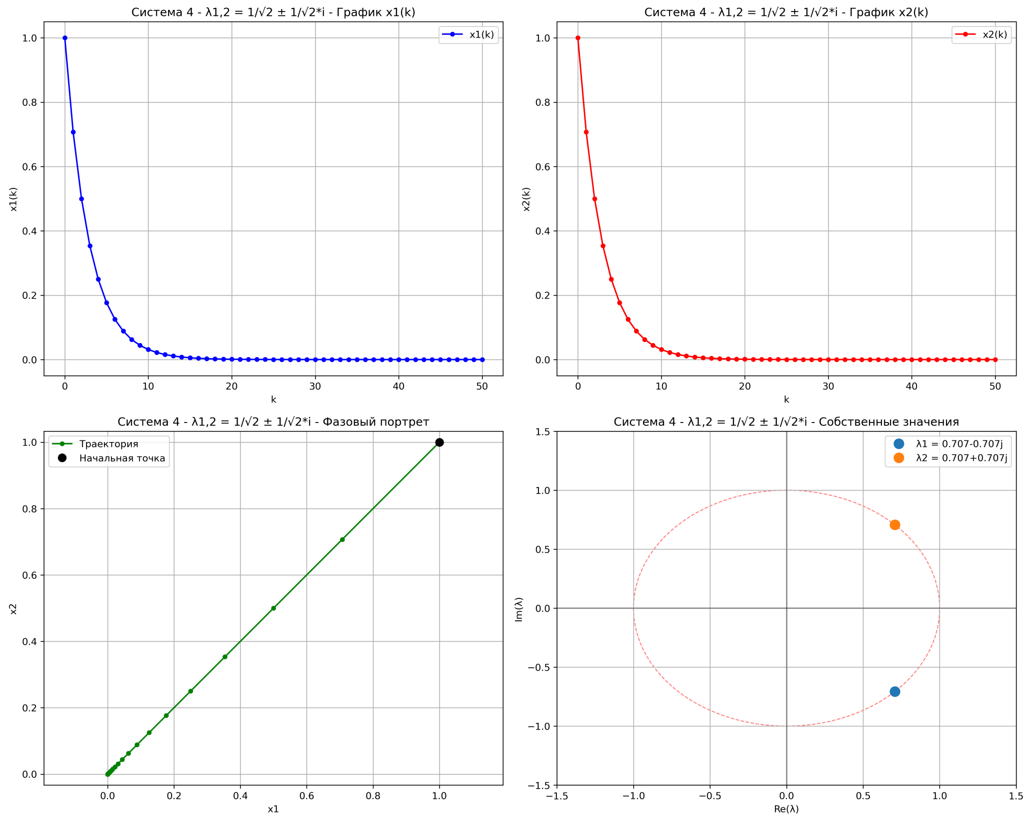

Рис. 10: Система 4: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

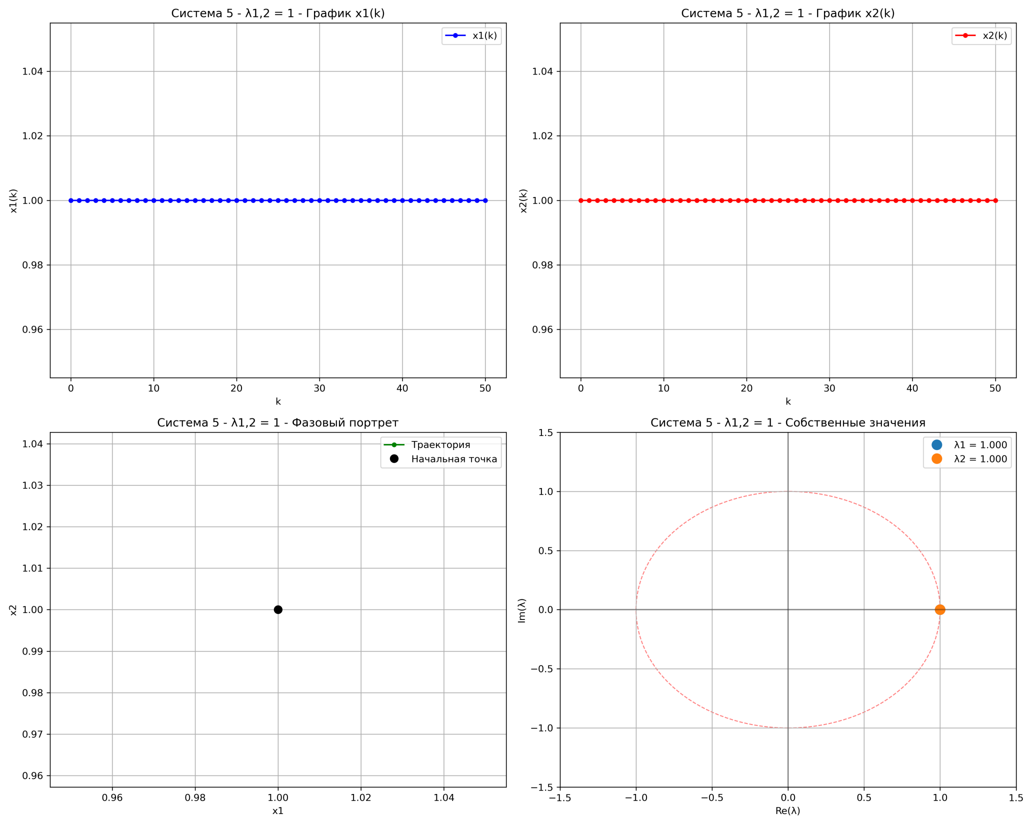

Рис. 11: Система 5: $\lambda_{1,2} = 1$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \tag{22}$$

3.1 Случай 1: $a < 0$, $b = 0$

Физическая интерпретация: Гармонический осциллятор без затухания (например, маятник без трения).

x_1 - смещение от положения равновесия x_2 - скорость a - коэффициент упругости (отрицательный) b - коэффициент затухания (равен нулю)

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-a}i$

Система нейтрально устойчива.

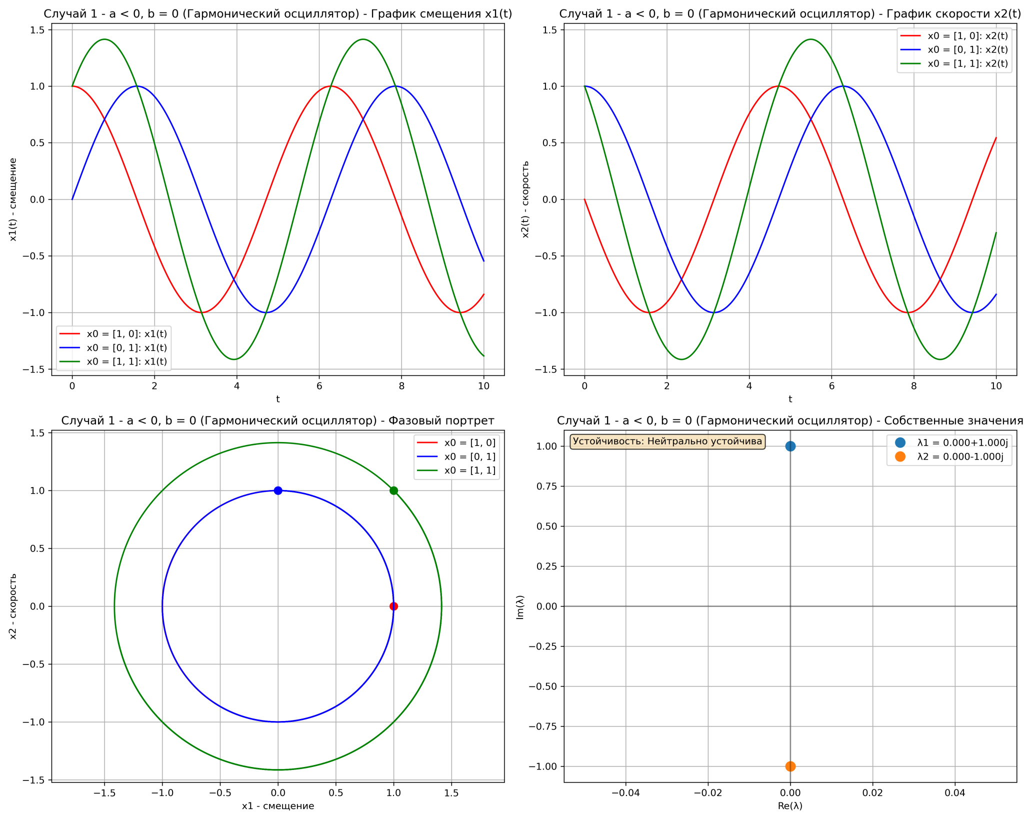

Рис. 12: Случай 1: Гармонический осциллятор без затухания

3.2 Случай 2: $a < 0$, $b < 0$

Физическая интерпретация: Затухающий гармонический осциллятор (например, маятник с трением).

x_1 - смещение от положения равновесия x_2 - скорость a - коэффициент упругости (отрицательный) b - коэффициент затухания (отрицательный)

Собственные значения имеют отрицательную вещественную часть.

Система асимптотически устойчива.

3.3 Случай 3: $a > 0$, $b = 0$

Физическая интерпретация: Неустойчивый осциллятор (например, маятник в перевернутом положении).

x_1 - смещение от неустойчивого положения равновесия x_2 - скорость a - коэффициент упругости (положительный - неустойчивость) b - коэффициент затухания (равен нулю)

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

Система неустойчива.

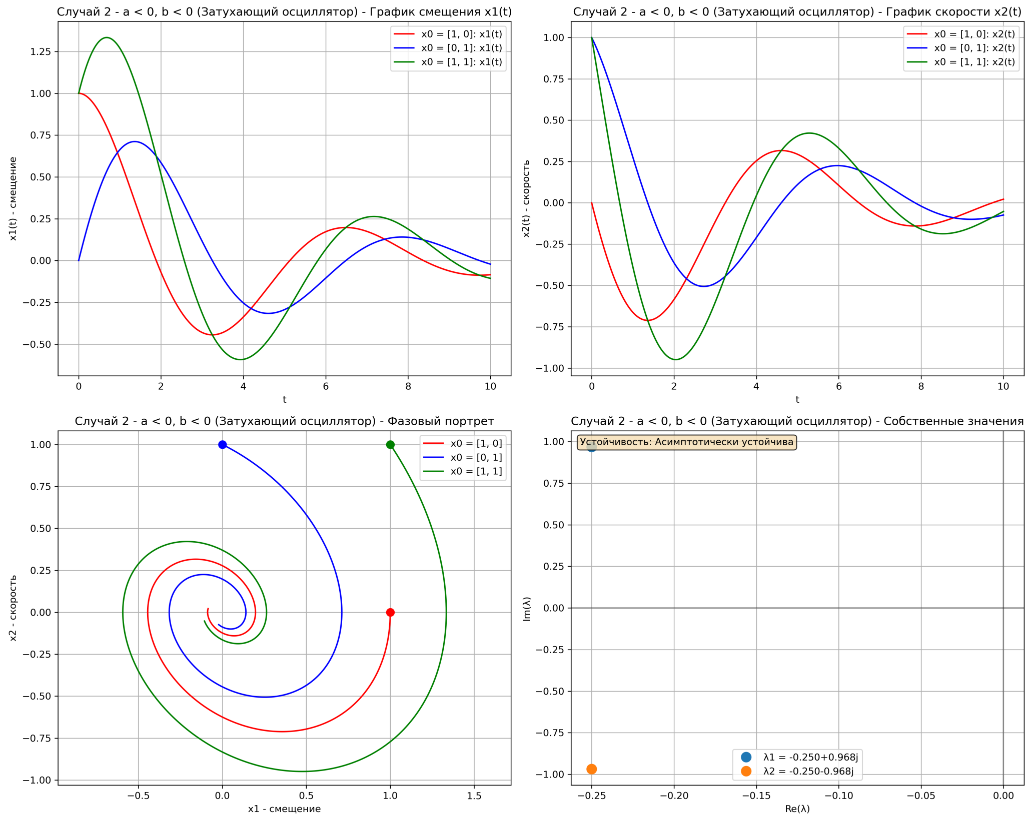

Рис. 13: Случай 2: Затухающий гармонический осциллятор

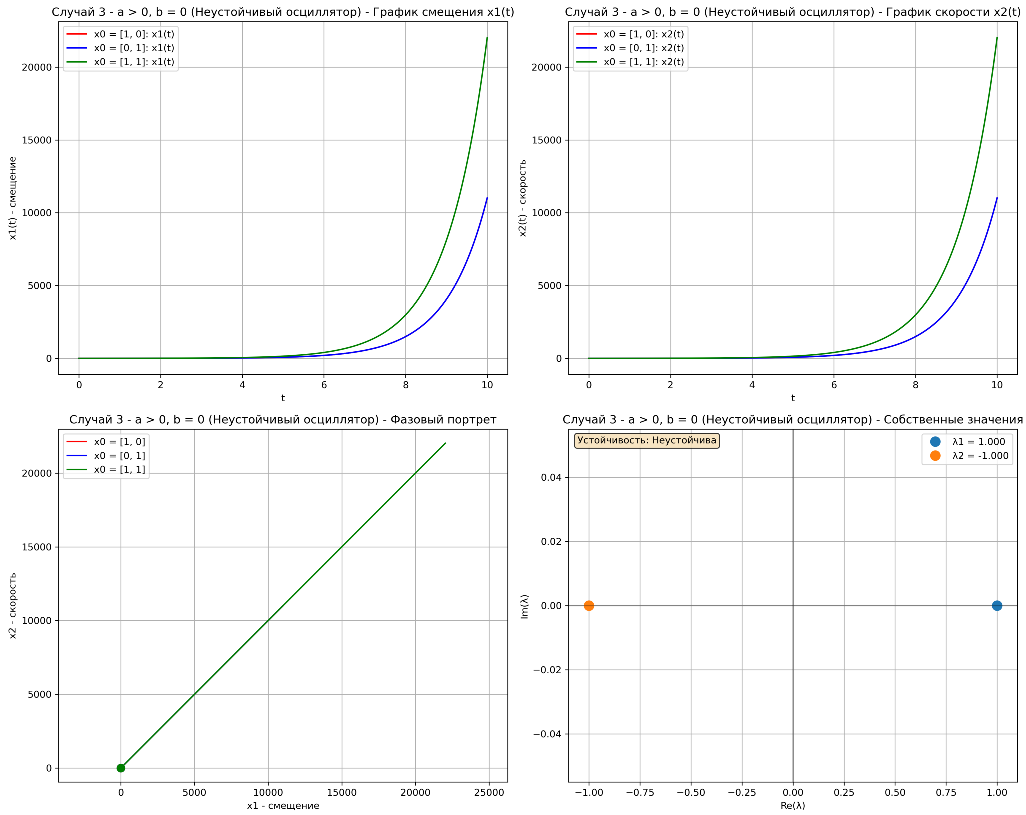

Рис. 14: Случай 3: Неустойчивый осциллятор

3.4 Случай 4: $a > 0, b < 0$

Физическая интерпретация: Неустойчивый осциллятор с затуханием.

x_1 - смещение от неустойчивого положения равновесия x_2 - скорость a - коэффициент упругости (положительный - неустойчивость) b - коэффициент затухания (отрицательный)

Одно собственное значение положительное, другое отрицательное.

Система неустойчива.

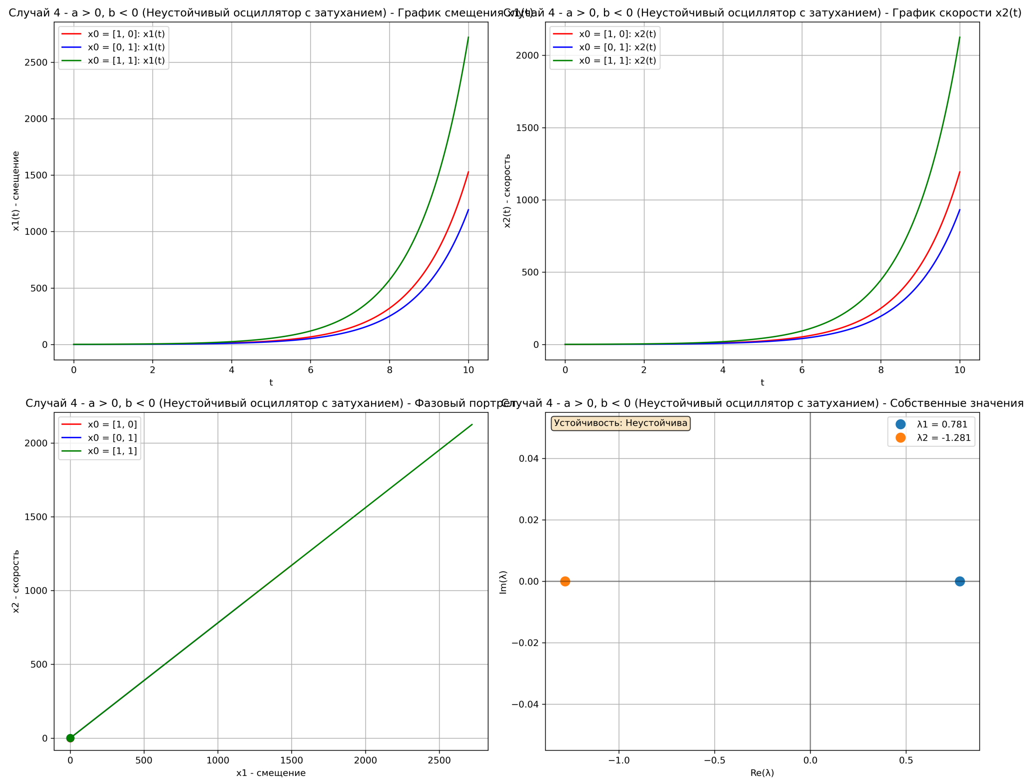

Рис. 15: Случай 4: Неустойчивый осциллятор с затуханием

4 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы различные типы динамических систем:

1. **Непрерывные системы**: Изучены системы с различными типами устойчивости - асимптотически устойчивые, неустойчивые и нейтрально устойчивые. Показано влияние собственных значений и собственных векторов на поведение системы.

2. **Дискретные системы**: Исследованы системы с различными расположениями собственных значений на комплексной плоскости. Показано, что расположение собственных значений относительно единичной окружности определяет характер движения системы.

3. **Осциллятор**: Проанализирована система осциллятора с различными параметрами. Показана связь между физическими параметрами системы и её математическими свойствами устойчивости.

Полученные результаты демонстрируют важность анализа собственных значений для понимания поведения динамических систем и их устойчивости.