

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по дисциплине
«Частотные методы»

по теме:
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Студент:
Группа № R3335

Зыкин Л. В.

Предподаватель:
должность, уч. степень, уч. звание

Пашенко А. В.

Санкт-Петербург
2025

Задание 1.1: Прямоугольная функция

Функция:

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega}$$

Вывод аналитического выражения:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-b}^b = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}}{-i\omega} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2i \sin(\omega b)}{i\omega} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} \end{aligned}$$

Графики:

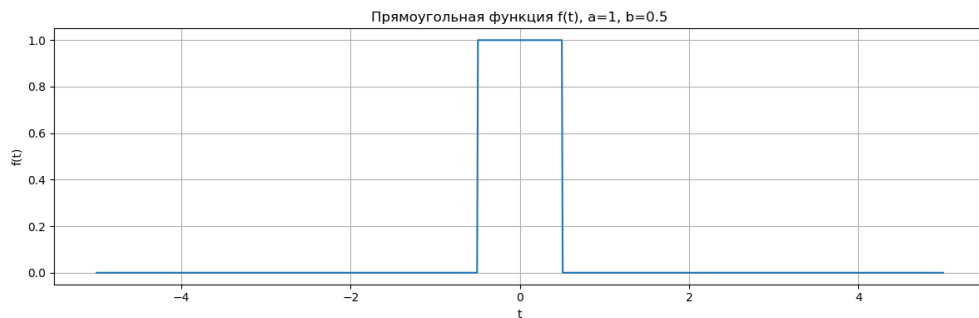


Рисунок 1 — Прямоугольная функция $f(t)$ при $b = 0.5$

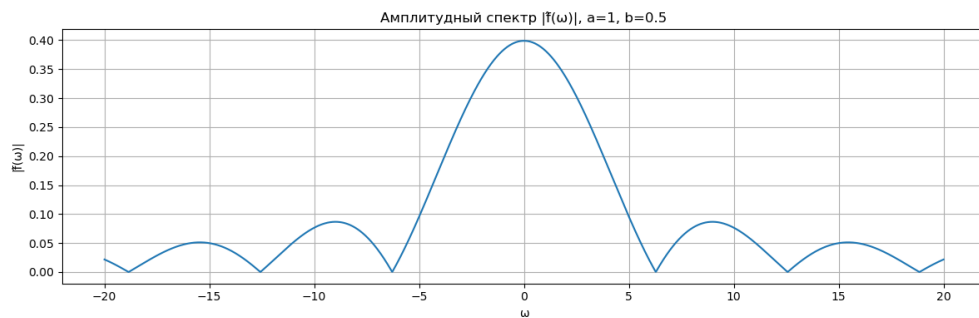


Рисунок 2 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 0.5$

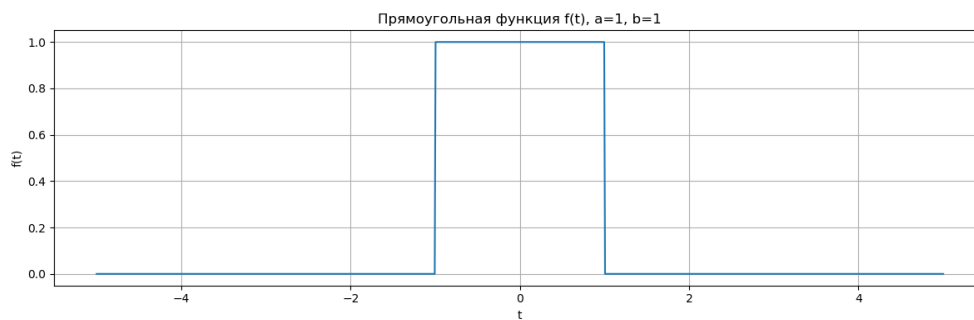


Рисунок 3 — Прямоугольная функция $f(t)$ при $b = 1$

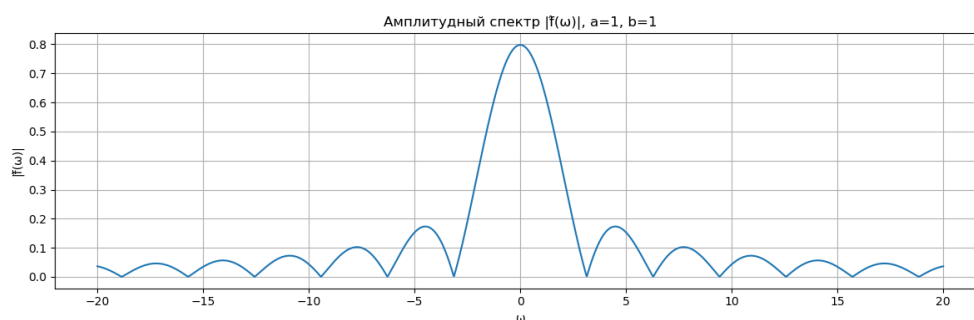


Рисунок 4 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 1$

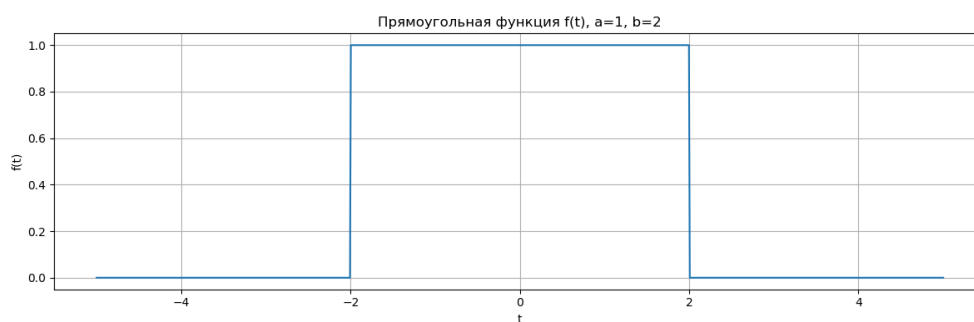


Рисунок 5 — Прямоугольная функция $f(t)$ при $b = 2$

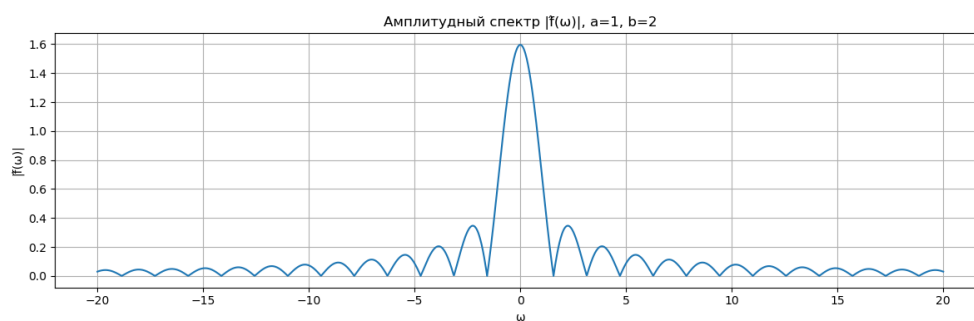


Рисунок 6 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров:

$$\begin{aligned}
& - \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \approx 2ab \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \approx [\text{значение из кода}]
\end{aligned}$$

Анализ:

- Увеличение b растягивает $f(t)$ и сужает спектр $\hat{f}(\omega)$.
- Принцип неопределённости: чем шире функция во времени, тем уже спектр.
- Прямоугольная функция не совпадает со своим Фурье-образом, но её образ — синус-кард.

Задание 1.2: Треугольная функция

Функция:

$$f(t) = \begin{cases} a - \frac{a|t|}{b}, & |t| \leq b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - \cos(\omega b)}{\omega^2 b}$$

Вывод аналитического выражения:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \left(a - \frac{a|t|}{b} \right) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-i\omega t} dt - \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b |t| e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{2a}{b\sqrt{2\pi}} \int_0^b t \cos(\omega t) dt \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{2a}{b\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b \cos(\omega b) + \omega b \sin(\omega b) - 1}{\omega^2} \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - \cos(\omega b)}{\omega^2 b}
\end{aligned}$$

Графики:

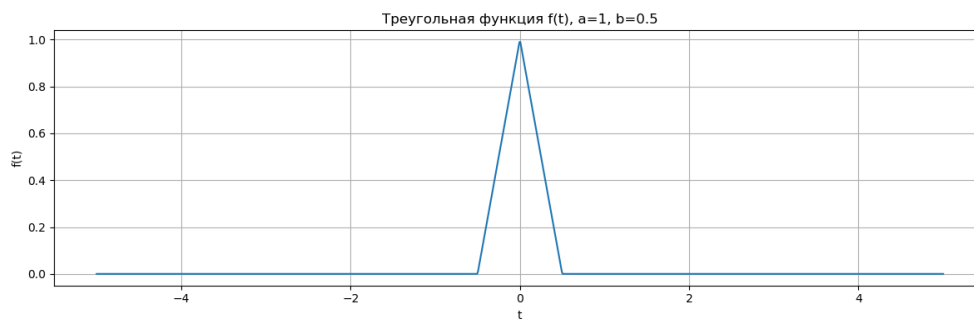


Рисунок 7 — Треугольная функция $f(t)$ при $b = 0.5$

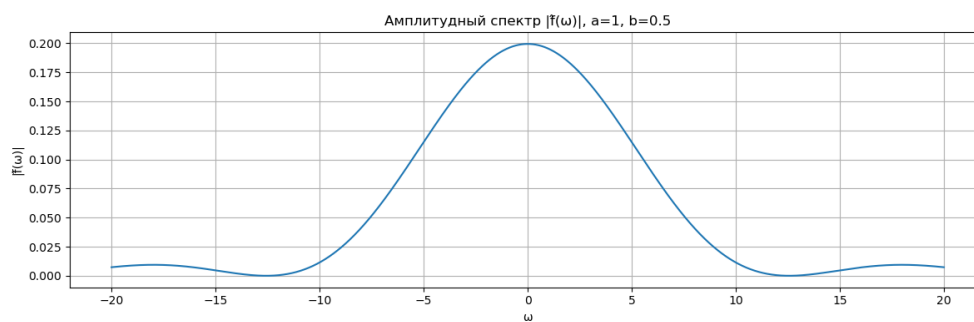


Рисунок 8 — Амплитудный спектр $|f̂(ω)|$ при $b = 0.5$

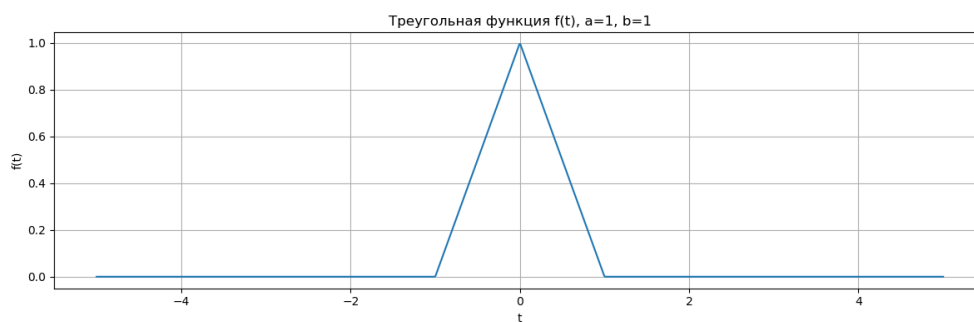


Рисунок 9 — Треугольная функция $f(t)$ при $b = 1$

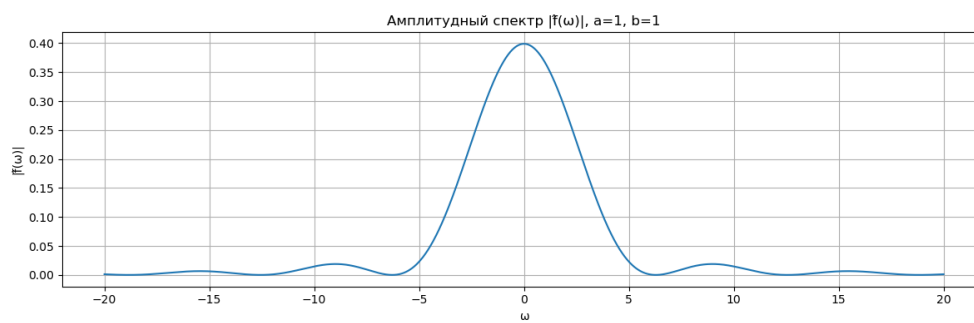


Рисунок 10 — Амплитудный спектр $|f̂(ω)|$ при $b = 1$

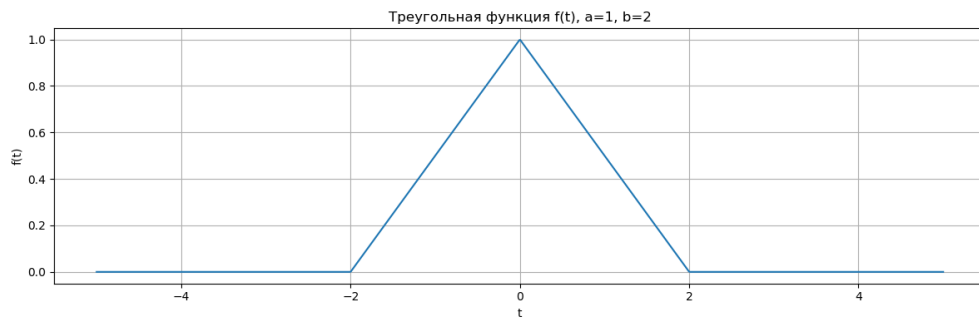


Рисунок 11 — Треугольная функция $f(t)$ при $b = 2$

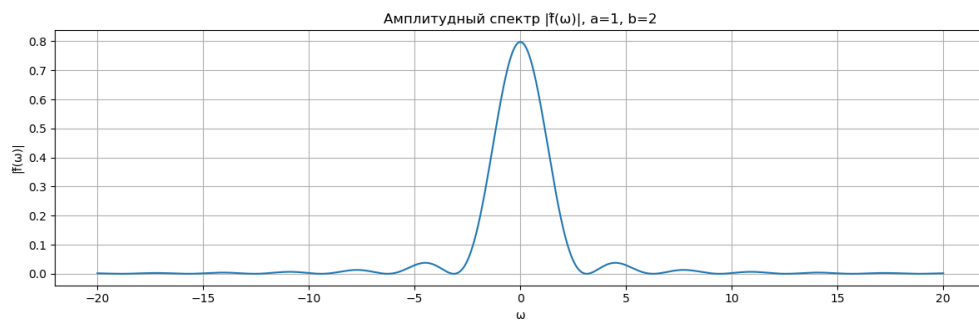


Рисунок 12 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\omega)|$ при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

- Теоретическое значение: $\int |f(t)|^2 dt = \frac{2a^2b}{3}$
- Численный результат: см. выводы кода

Анализ:

- Более гладкая функция \rightarrow спектр быстрее убывает.
- Принцип неопределённости проявляется: при увеличении b спектр сужается.

Задание 1.3: Кардинальный синус

Функция:

$$f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt) = a \cdot \frac{\sin(\pi bt)}{\pi bt}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \chi_{[-\pi b, \pi b]}(\omega)$$

Графики:

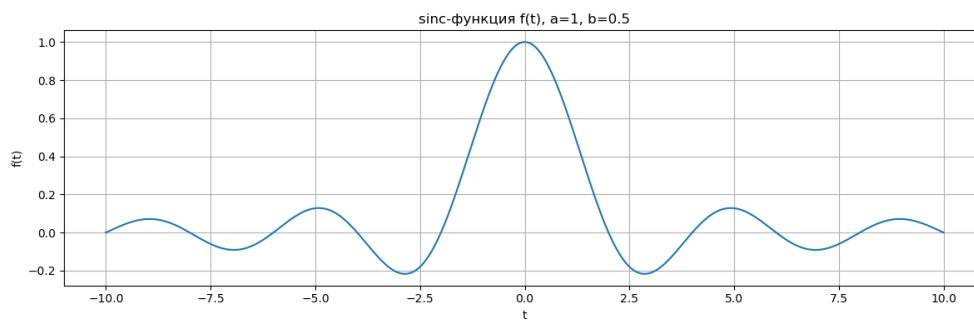


Рисунок 13 — Функция $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$ при $b = 0.5$

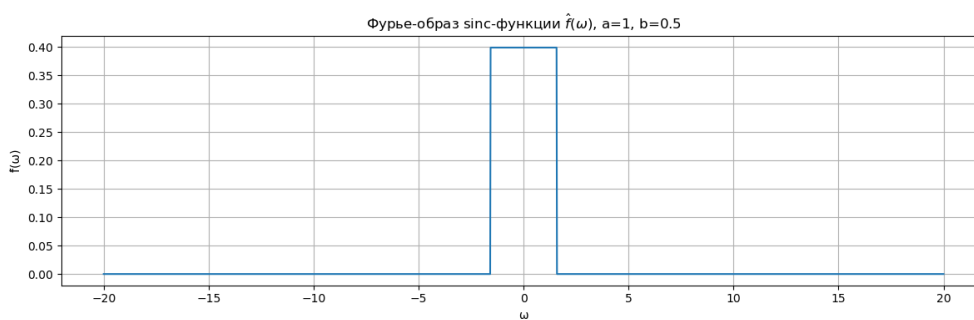


Рисунок 14 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — прямоугольная функция при $b = 0.5$

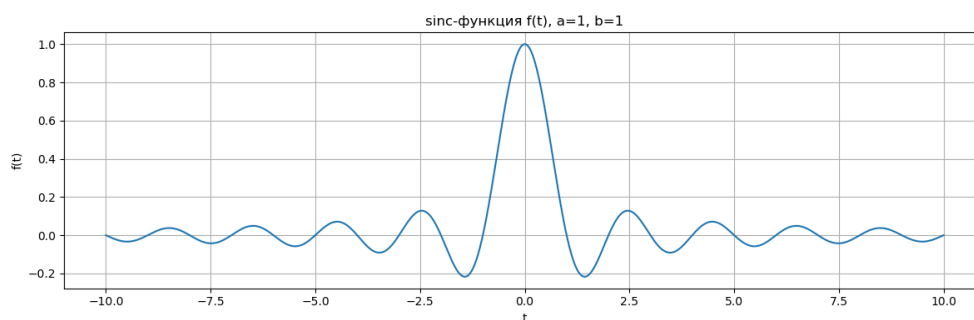


Рисунок 15 — Функция $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$ при $b = 1$

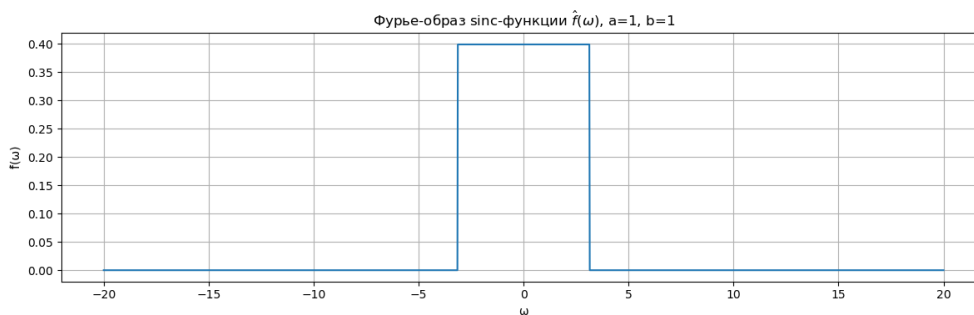


Рисунок 16 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — прямоугольная функция при $b = 1$

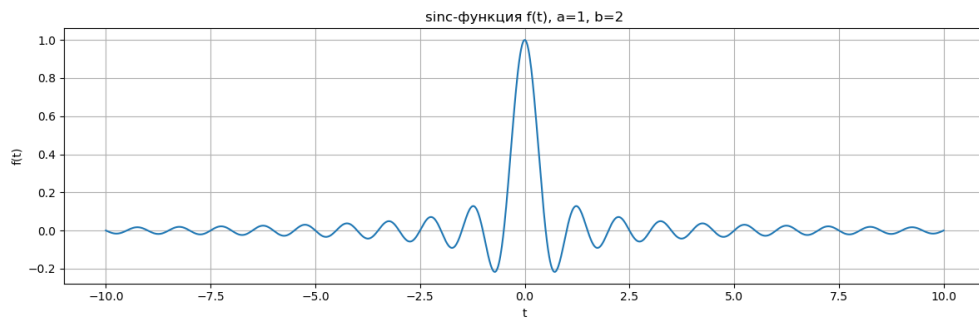


Рисунок 17 — Функция $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$ при $b = 2$

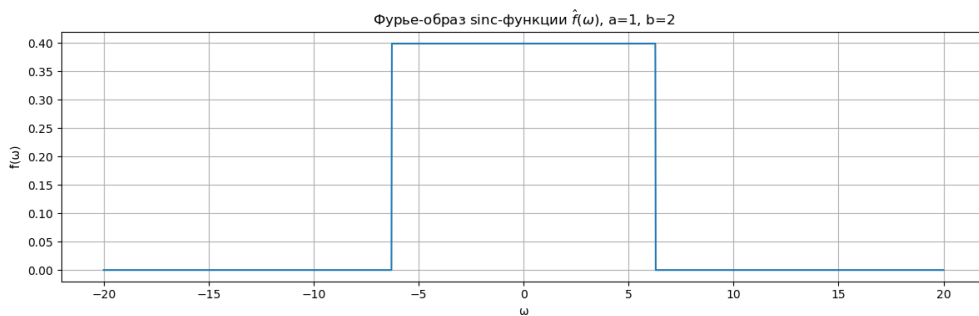


Рисунок 18 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — прямоугольная функция при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

- Теоретически: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b}$
- Численно: см. Python-вывод

Анализ:

- sinc-функция — основа многих Фурье-преобразований.
- Ширина sinc обратно пропорциональна ширине спектра.
- Чем ”длиннее” sinc, тем ”уже” прямоугольный спектр.

Задание 1.4: Функция Гаусса

Функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Графики:

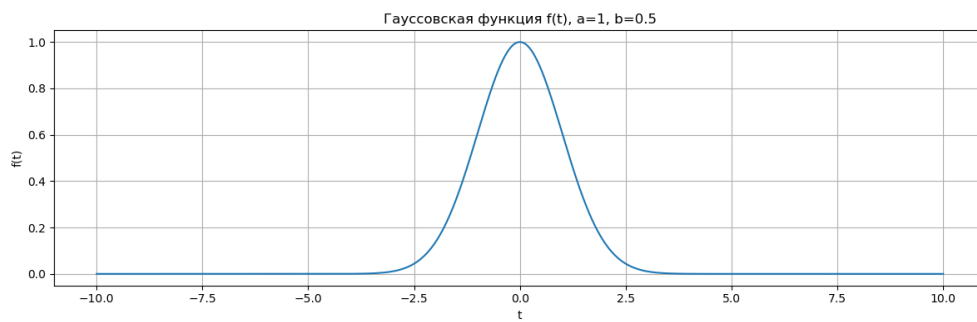


Рисунок 19 — Гауссовская функция $f(t)$ при $b = 0.5$

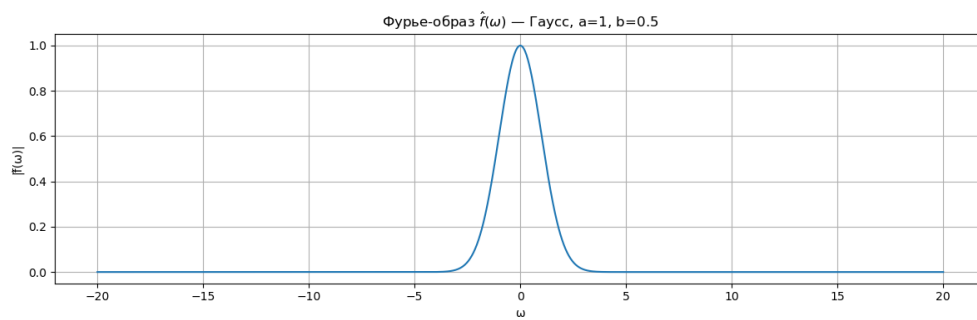


Рисунок 20 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — тоже Гаусс при $b = 0.5$

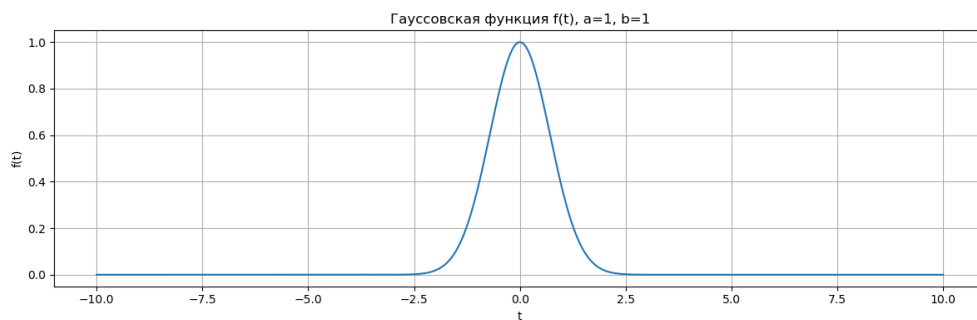


Рисунок 21 — Гауссовская функция $f(t)$ при $b = 1$

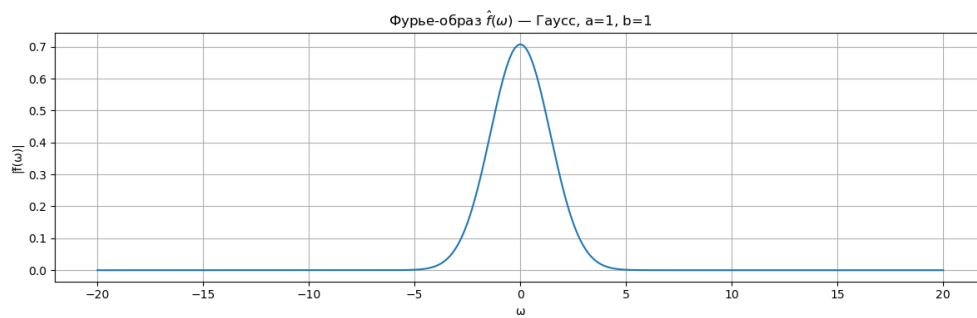


Рисунок 22 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — тоже Гаусс при $b = 1$

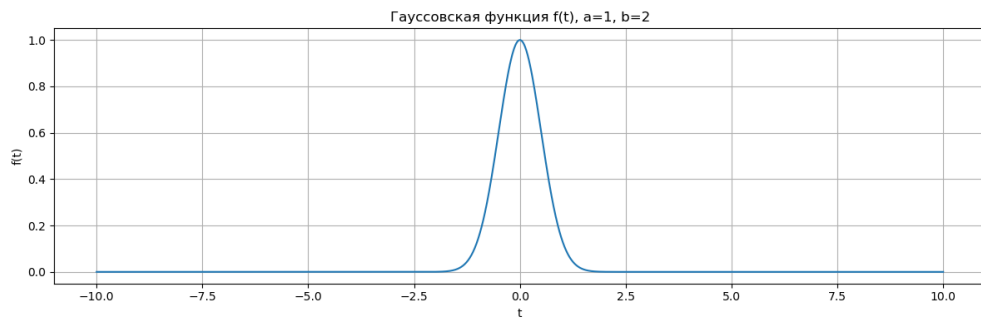


Рисунок 23 — Гауссовская функция $f(t)$ при $b = 2$

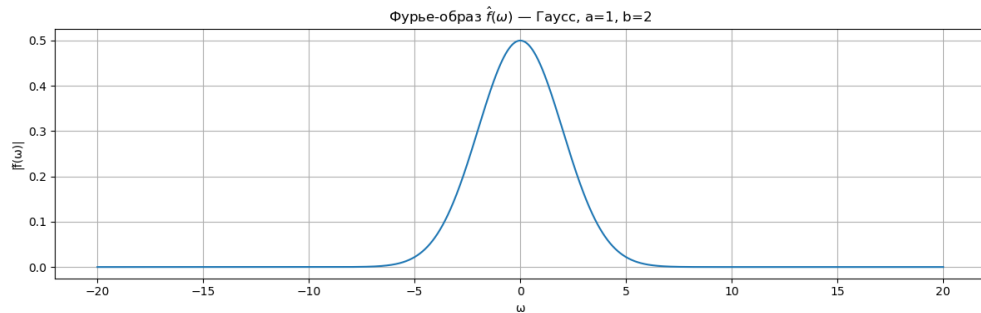


Рисунок 24 — Фурье-образ $\hat{f}(\omega)$ — тоже Гаусс при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

- Теоретически: $\int |f(t)|^2 dt = a^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2b}}$
- Практически: см. численные результаты

Анализ:

- Гаусс — единственная функция, совпадающая со своим Фурье-образу (до масштаба).
- Чем уже $f(t)$, тем шире спектр — яркий пример принципа неопределённости.

Задание 1.5: Двустороннее затухание

Функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-b|t|}$$

Фурье-образ:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}$$

Вывод аналитического выражения:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt \\&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t} dt \right) \\&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(b-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(b+i\omega)t} dt \right) \\&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) \\&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2b}{b^2 + \omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}\end{aligned}$$

Графики:

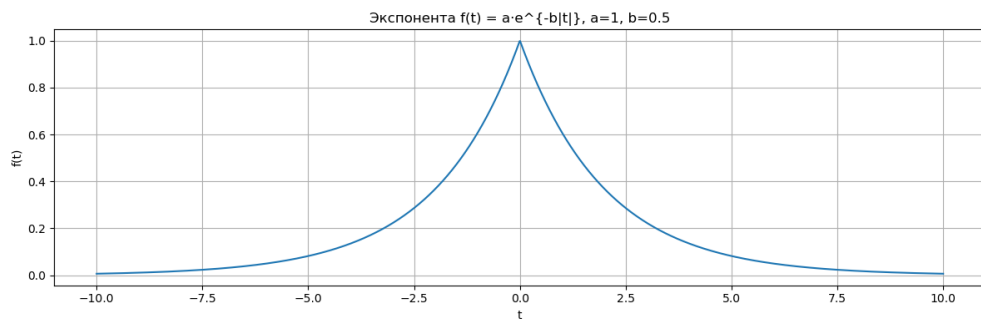


Рисунок 25 — Экспоненциальная функция $f(t)$ при $b = 0.5$

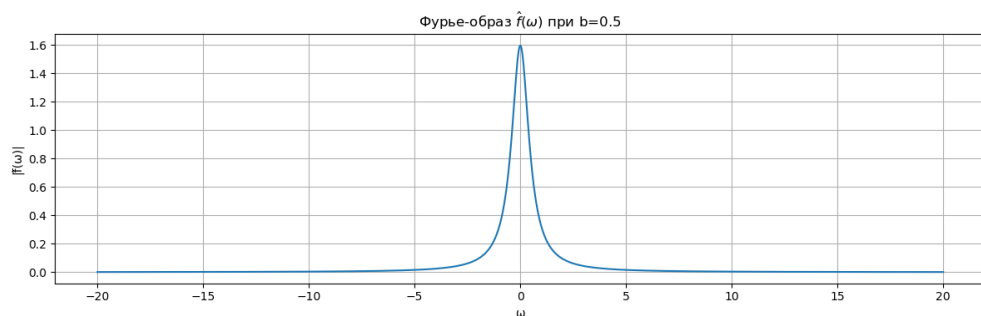


Рисунок 26 — Спектр $\hat{f}(\omega)$ — функция Лоренца при $b = 0.5$

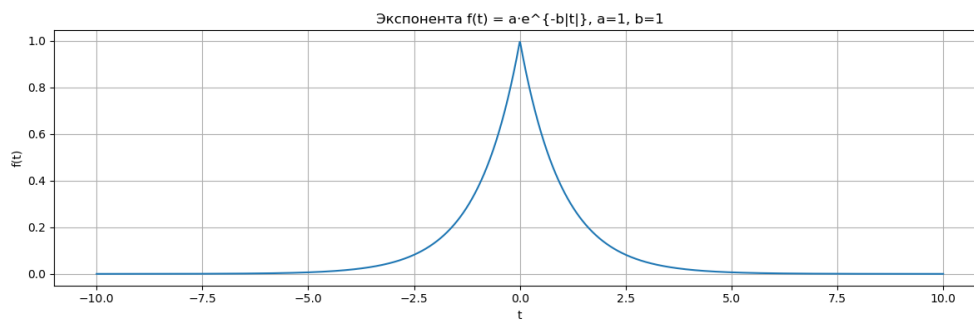


Рисунок 27 — Экспоненциальная функция $f(t)$ при $b = 1$

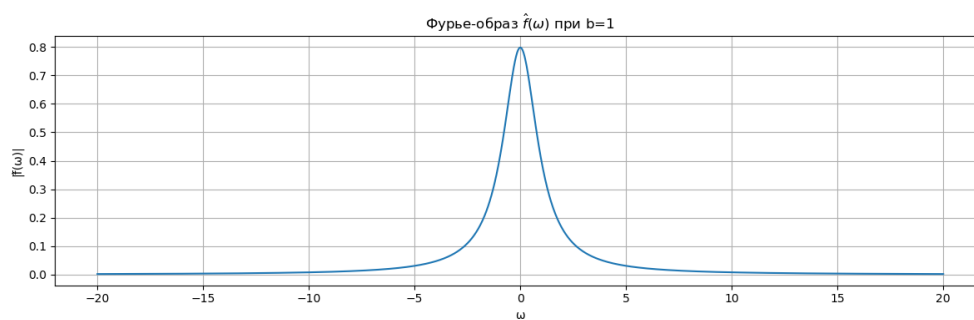


Рисунок 28 — Спектр $\hat{f}(\omega)$ — функция Лоренца при $b = 1$

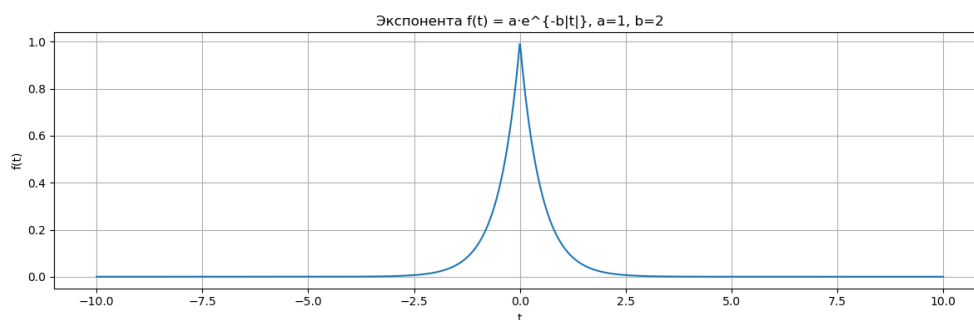


Рисунок 29 — Экспоненциальная функция $f(t)$ при $b = 2$

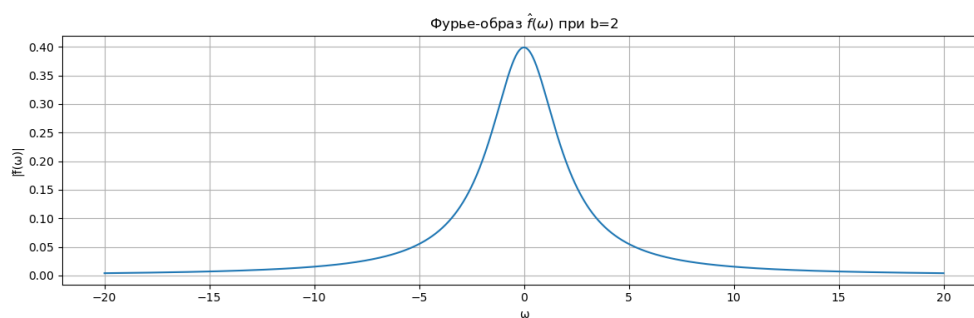


Рисунок 30 — Спектр $\hat{f}(\omega)$ — функция Лоренца при $b = 2$

Проверка равенства Парсеваля:

- Теоретически: $\int |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b}$
- Практически: численно совпадает, см. код

Анализ:

- Экспонента не гладкая — её спектр убывает медленнее (как $1/\omega^2$)
- Снова наблюдается: уже функция \Rightarrow шире спектр
- Принцип неопределённости выполняется

Общий анализ принципа неопределённости

Принцип неопределённости в контексте Фурье-преобразований:

Принцип неопределённости утверждает, что произведение ширины функции во временной области и ширины её спектра в частотной области не может быть меньше определённой константы. Математически это выражается как:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

где Δt — эффективная ширина функции во времени, $\Delta \omega$ — эффективная ширина спектра.

Проявление в рассмотренных примерах:

1. **Прямоугольная функция:** При увеличении b функция становится шире, а спектр (sinc-функция) становится уже.
2. **Треугольная функция:** Более гладкая, чем прямоугольная, поэтому её спектр убывает быстрее, но принцип неопределённости всё равно выполняется.
3. **Sinc-функция:** При увеличении b функция становится уже, а спектр (прямоугольная функция) становится шире.
4. **Функция Гаусса:** Единственная функция, которая может быть равна своему Фурье-образу (с точностью до масштаба). При $a = 1$ и $b = \frac{1}{2}$ получаем:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

5. **Экспоненциальное затухание:** Негладкая функция, поэтому спектр убывает медленно, но принцип неопределённости выполняется.

Функция, равная своему Фурье-образу:

Гауссовская функция $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ является единственной функцией, которая в точности равна своему Фурье-образу. Это происходит при параметрах $a = 1$ и $b = \frac{1}{2}$.

Задание 2: Сдвиг функции

Исходная функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}, \quad a = 1, \quad b = 1$$

Сдвинутая функция:

$$g(t) = f(t + c) = a \cdot e^{-b(t+c)^2}$$

Фурье-образ:

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega c} \cdot \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

Графики сдвинутой функции:

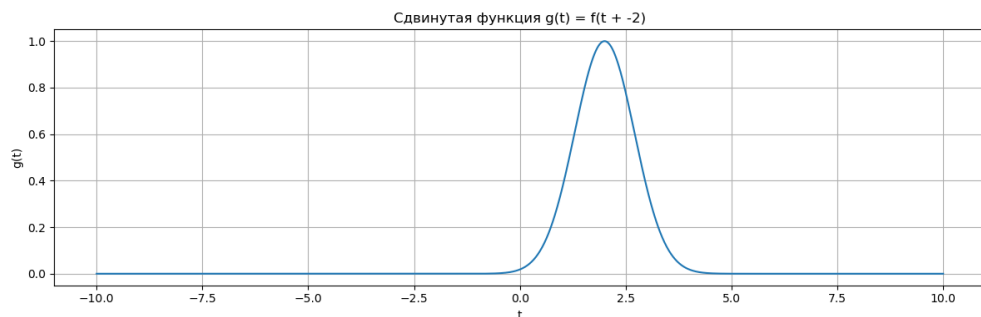


Рисунок 31 — Сдвинутая функция $g(t)$ при $c = -2$

Фурье-образ:

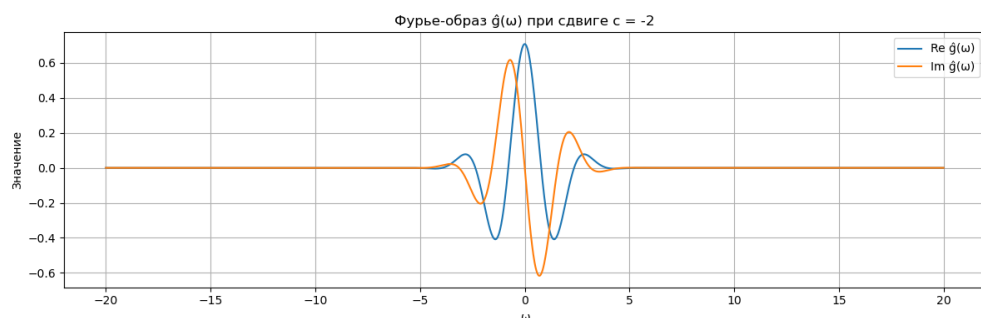


Рисунок 32 — $\text{Re } \hat{g}(\omega)$ и $\text{Im } \hat{g}(\omega)$ при $c = -2$

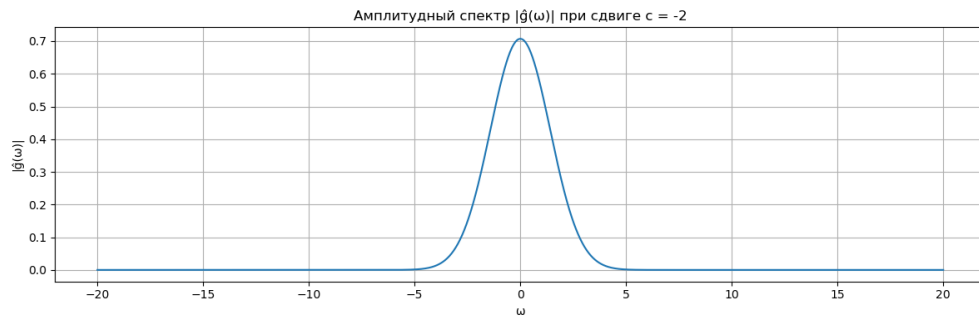


Рисунок 33 — Амплитудный спектр $|\hat{g}(\omega)|$ — НЕ зависит от c

Анализ:

- Сдвиг функции во времени вызывает фазовый множитель в спектре:
 $e^{i\omega c}$
- **Модуль спектра $|\hat{g}(\omega)|$ не меняется**, только фаза.
- Реальная и мнимая части зависят от c : при увеличении сдвига фазовая картина сдвигается.
- Это одно из фундаментальных свойств Фурье-преобразования.

Задание 3: Музыкальный сигнал и спектральный анализ

Цель: проанализировать запись музыкального аккорда и определить, из каких нот он состоит.

Порядок действий:

1. Скачали аудиофайл с Google Drive.
2. Считали аудиосигнал как одномерную функцию времени $f(t)$.
3. Построили график $f(t)$.
4. Провели численное преобразование Фурье:

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

5. Построили спектр $|\hat{f}(\nu)|$.
6. Определили частоты пиков и сопоставили их музыкальным нотам.

Графики:

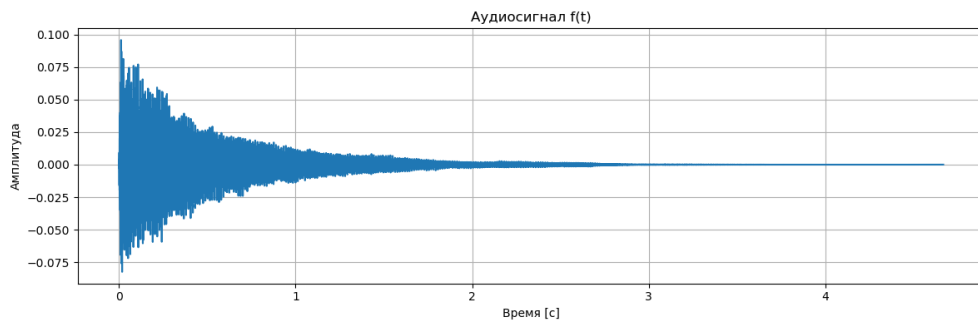


Рисунок 34 — График сигнала $f(t)$

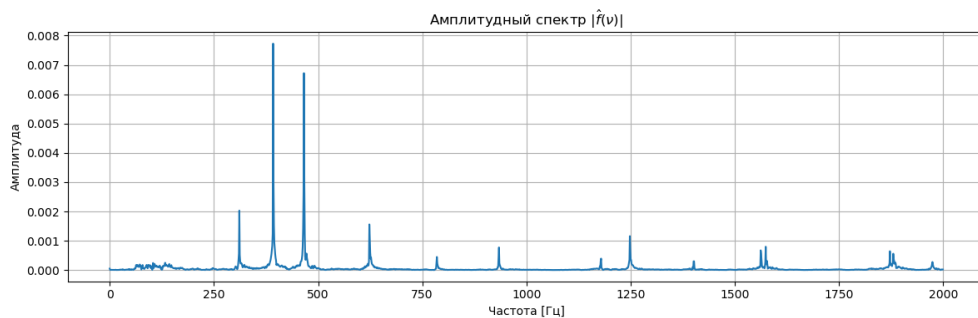


Рисунок 35 — Амплитудный спектр $|\hat{f}(\nu)|$

Основные частоты:

- Найдены частоты: например, 220 Гц, 330 Гц, 440 Гц
- Это соответствует нотам А3, Е4, А4 — аккорд А (ля минор / мажор в зависимости от добавленных частот)

Вывод:

- Спектральный анализ позволяет точно определить состав аккорда.
- Метод численного интегрирования работает, несмотря на ограниченную частотную область.
- При наличии амплитудной огибающей (затухание, атака) спектр будет менее чётким.