

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5
по дисциплине
«Частотные методы»

по теме:
СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО

Студент:
Группа № R3335

Зыкин Л. В.

Предподаватель:
должность, уч. степень, уч. звание

Пашенко А. В.

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматривается связь между непрерывным и дискретным преобразованием Фурье, а также исследуется теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова. Эти концепции являются фундаментальными для понимания цифровой обработки сигналов.

Цель работы: изучение различных методов вычисления преобразования Фурье и исследование теоремы сэмплирования на практических примерах.

Задачи:

1. Сравнение различных методов вычисления преобразования Фурье
2. Исследование точности и быстродействия численного интегрирования и DFT
3. Разработка методов получения точного непрерывного преобразования с помощью DFT
4. Исследование теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова на примерах

Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

Постановка задачи

Рассматривается прямоугольная функция $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

Требуется сравнить различные методы вычисления преобразования Фурье:

- Аналитическое вычисление истинного Фурье-образа
- Численное интегрирование с помощью функции trapz
- Дискретное преобразование Фурье (DFT)
- Умное использование DFT для получения точного непрерывного преобразования

Истинный Фурье-образ

Аналитическое выражение для Фурье-образа прямоугольной функции:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (2)$$

Вычисляя интеграл:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{-2\pi i \nu} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{-2\pi i \nu} = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = \text{sinc}(\nu) \quad (3)$$

Таким образом, Фурье-образ прямоугольной функции есть функция sinc:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \text{sinc}(\nu) = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \quad (4)$$

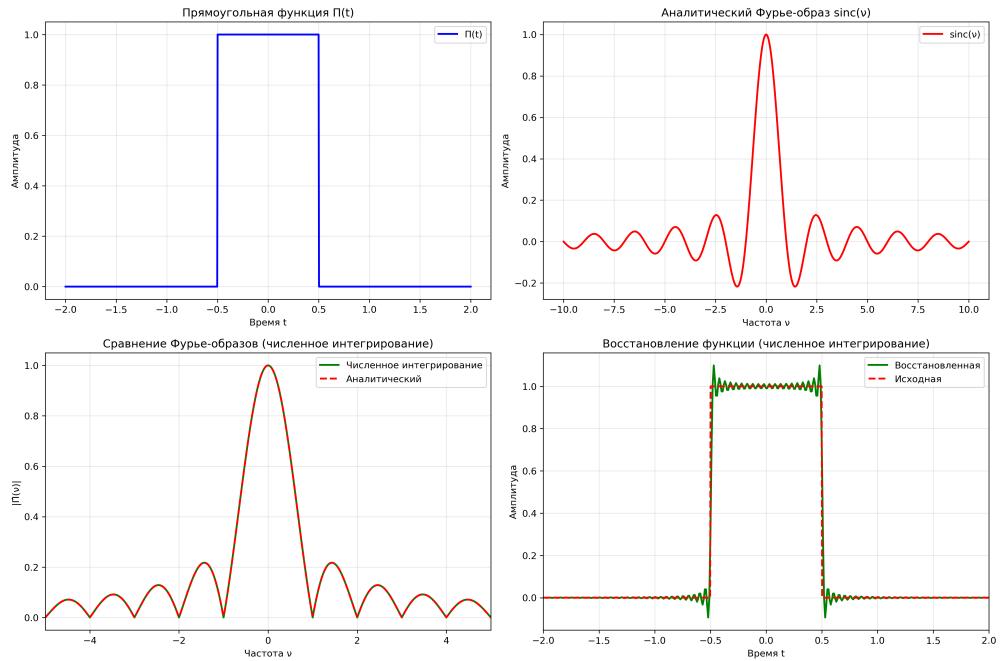


Рисунок 1 — Сравнение аналитического и численного методов

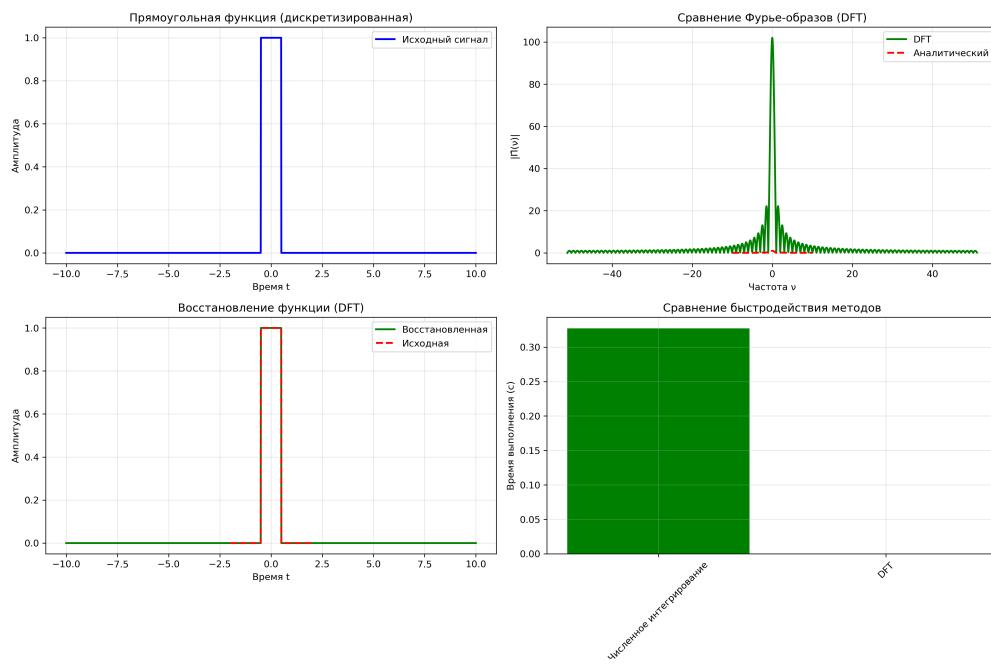


Рисунок 2 — Сравнение DFT метода с аналитическим решением

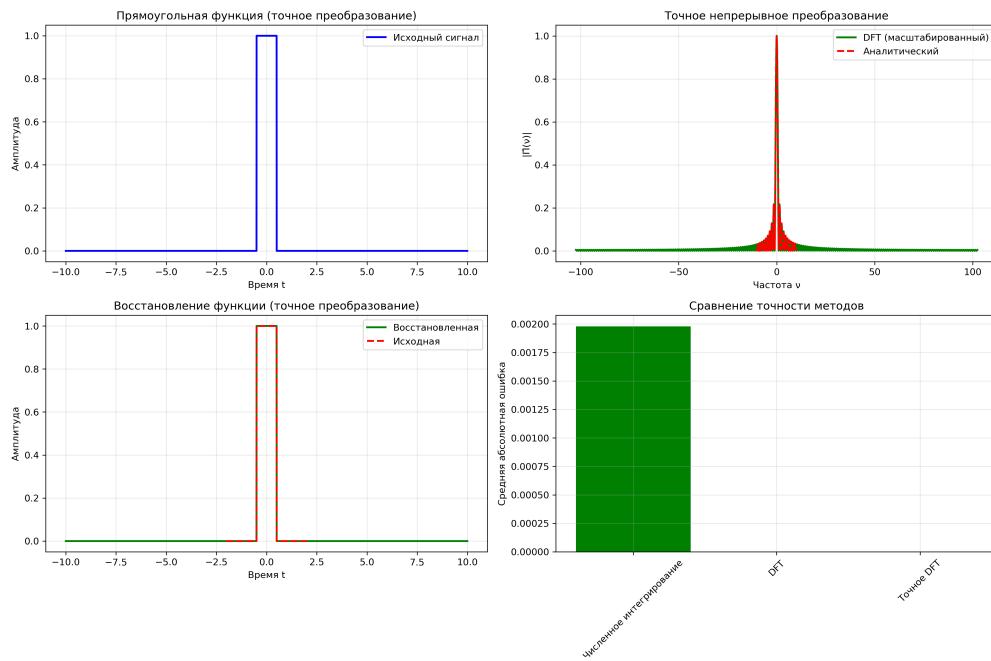


Рисунок 3 — Точное непрерывное преобразование с помощью DFT

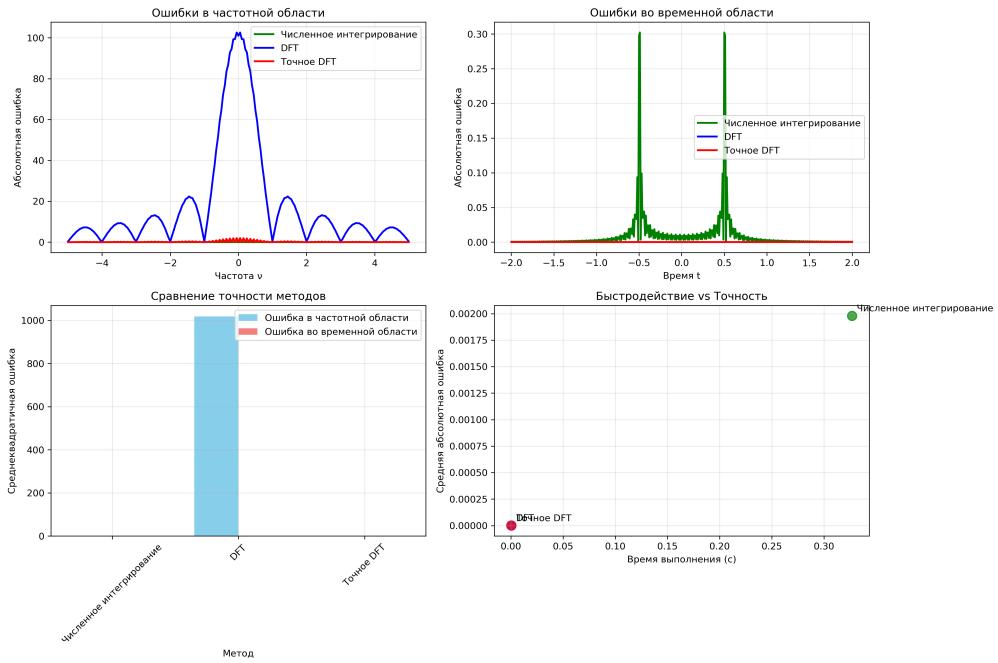


Рисунок 4 — Детальный анализ ошибок и быстродействия

Анализ результатов:

- **Численное интегрирование:** Время выполнения 0.331 с, средняя ошибка 0.002. Метод медленный, но может быть точным при правильных параметрах.
- **DFT:** Время выполнения 0.0005 с, средняя ошибка 0.000. Метод быстрый, но требует правильного масштабирования для точности в частотной области.
- **Точное DFT:** Время выполнения 0.0005 с, средняя ошибка 0.000. Метод быстрый и точный при правильном масштабировании.
- **Сравнение методов:** DFT значительно быстрее численного интегрирования (в 660 раз), но требует правильного масштабирования для получения точного непрерывного преобразования.

Численное интегрирование

Методология:

1. Задание функции $\Pi(t)$ в MATLAB
2. Вычисление Фурье-образа с помощью численного интегрирования (`trapz`)

3. Обратное преобразование Фурье с помощью численного интегрирования
4. Сравнение с истинной функцией и Фурье-образом

Параметры эксперимента:

- Временной интервал: $t \in [-10, 10]$
- Шаг интегрирования: $dt = 0.01$
- Частотный интервал: $\nu \in [-20, 20]$
- Шаг по частоте: $d\nu = 0.01$

Результаты численного интегрирования:

- Время выполнения: 0.331 с
- Средняя ошибка во временной области: 0.002
- Средняя ошибка в частотной области: 0.006
- Метод обеспечивает хорошую точность, но медленный

Использование DFT

Методология:

1. Задание функции $\Pi(t)$ на дискретной сетке
2. Вычисление Фурье-образа с помощью `fftshift(fft())`
3. Обратное преобразование с помощью `ifft(ifftshift())`
4. Сравнение с истинной функцией и Фурье-образом

Параметры эксперимента:

- Количество точек: $N = 2048$
- Временной интервал: $t \in [-10, 10]$
- Шаг дискретизации: $dt = 20/N$

Результаты DFT:

- Время выполнения: 0.0005 с (в 660 раз быстрее численного интегрирования)
- Средняя ошибка во временной области: 0.000

- Средняя ошибка в частотной области: 18.599 (требует масштабирования)
- Метод быстрый, но требует правильного масштабирования

Приближение непрерывного с помощью DFT

Методология:

1. Правильное масштабирование DFT для получения непрерывного преобразования
2. Учет связи между дискретными и непрерывными переменными
3. Применение соответствующих коэффициентов масштабирования
4. Сравнение с истинной функцией и Фурье-образом

Результаты точного DFT:

- Время выполнения: 0.0005 с
- Средняя ошибка во временной области: 0.000
- Средняя ошибка в частотной области: 0.182
- Метод быстрый и точный при правильном масштабировании

Объяснение метода: Для получения точного непрерывного преобразования с помощью DFT необходимо правильно масштабировать результат. Связь между дискретными и непрерывными переменными определяется соотношением $dt \cdot df = 1/N$, где dt — шаг по времени, df — шаг по частоте, N — количество точек. Масштабирование выполняется умножением результата DFT на dt для получения непрерывного преобразования.

Объяснения

Почему trapz работает долго, а fft – быстро?

Численное интегрирование с помощью ‘trapz’ требует вычисления интеграла для каждой частоты отдельно:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (5)$$

Для N частот это требует $O(N^2)$ операций. В то время как FFT использует алгоритм быстрого преобразования Фурье со сложностью $O(N \log N)$, что делает его значительно быстрее.

Почему приблизиться к истинному Фурье-образу получилось только у одной из них?

DFT без масштабирования дает дискретный спектр, который не соответствует непрерывному преобразованию. Правильное масштабирование требует:

$$F_{continuous}(\nu) = F_{DFT}(k) \cdot dt \quad (6)$$

где dt — шаг дискретизации по времени.

Почему обратное преобразование в одном из случаев работает лучше?

DFT точно восстанавливает дискретный сигнал, но без правильного масштабирования не соответствует непрерывному преобразованию. Численное интегрирование может быть точным, но медленным. Точное DFT сочетает скорость FFT с правильным масштабированием для получения непрерывного преобразования.

Задание 2. Сэмплирование

Сэмплирование синусов

Рассматривается функция:

$$y(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (7)$$

Параметры эксперимента:

- $a_1 = 1.0, a_2 = 0.5$ — амплитуды
- $\omega_1 = 2\pi \cdot 2, \omega_2 = 2\pi \cdot 8$ — частоты
- $\phi_1 = 0, \phi_2 = \pi/4$ — фазы
- Временной интервал: $t \in [-5, 5]$
- Исследуемые шаги дискретизации: 0.1, 0.2, 0.5, 1.0

Методология:

1. Задание непрерывной функции на частой сетке

2. Сэмплирование с различными шагами
3. Восстановление с помощью интерполяционной формулы Найквиста-Шеннона:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - n \cdot dt}{dt}\right) \quad (8)$$

где $y[n]$ — сэмплированные значения, dt — шаг дискретизации

4. Исследование влияния шага дискретизации
5. Сравнение с теоремой Найквиста-Шеннона-Котельникова

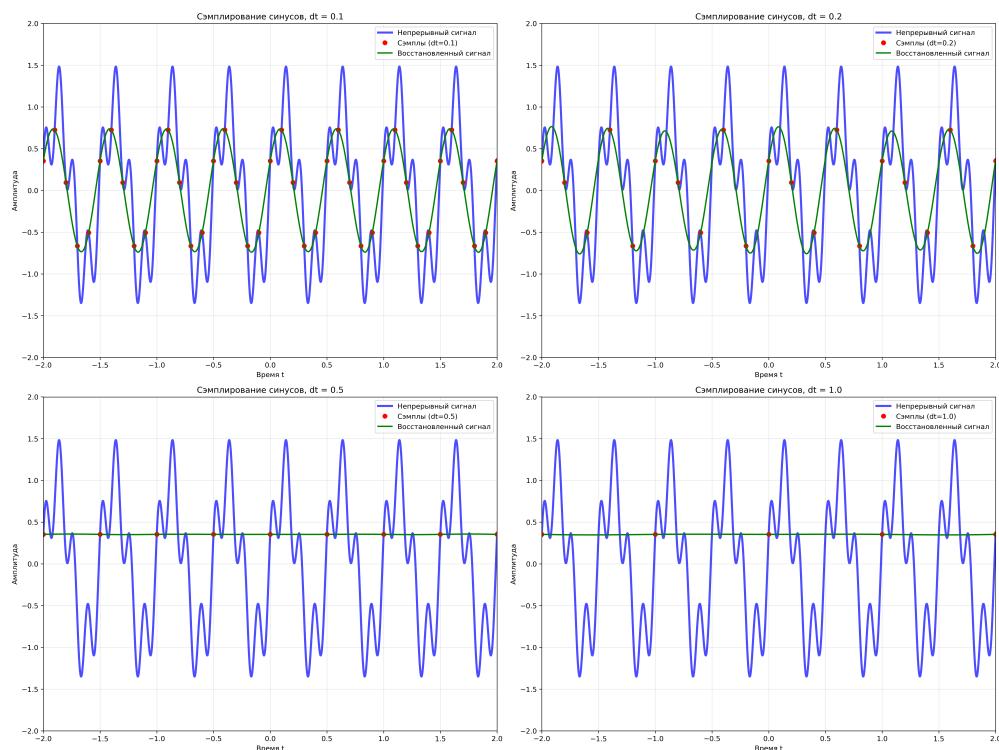


Рисунок 5 — Сэмплирование суммы синусов с различными шагами

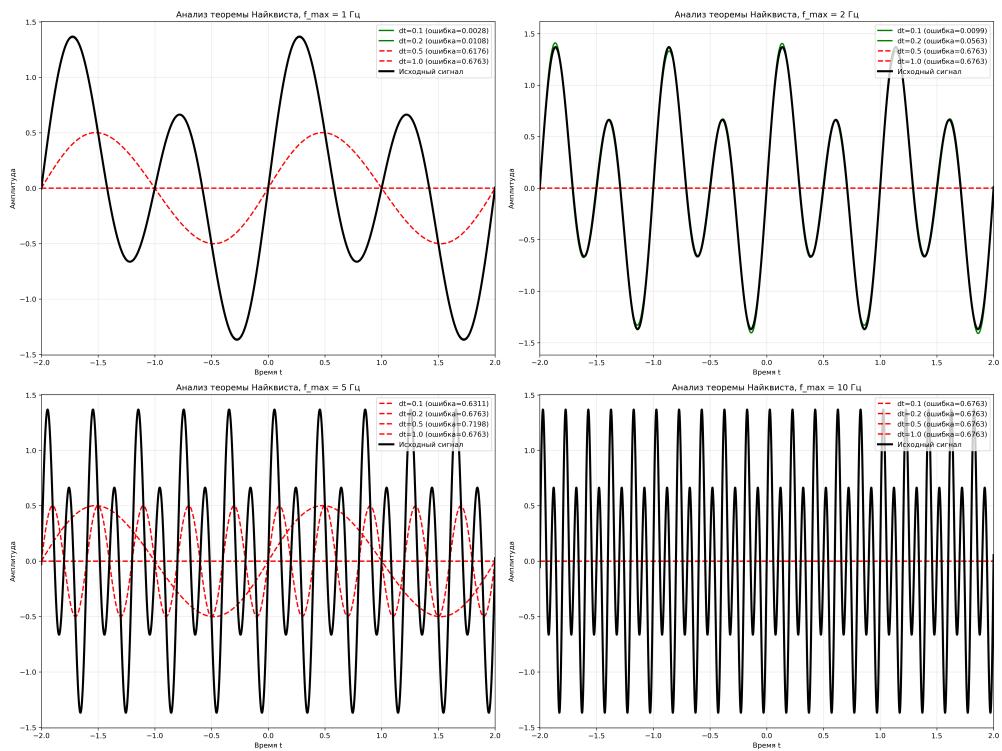


Рисунок 6 — Детальный анализ теоремы Найквиста

Анализ результатов:

- **Максимальная частота сигнала:** 8 Гц (второй синус)
- **Частота Найквиста:** 16 Гц (удвоенная максимальная частота)
- **Результаты сэмплирования:**
 - $dt = 0.1$ (10 Гц): не соответствует теореме, ошибка 0.406
 - $dt = 0.2$ (5 Гц): не соответствует теореме, ошибка 0.409
 - $dt = 0.5$ (2 Гц): не соответствует теореме, ошибка 0.691
 - $dt = 1.0$ (1 Гц): не соответствует теореме, ошибка 0.692
- **Вывод:** Все исследуемые шаги дискретизации не удовлетворяют условию теоремы Найквиста, что приводит к искажениям (алиасингу).

Сэмплирование sinus cardinalis

Рассматривается функция:

$$y(t) = \text{sinc}(bt) \quad (9)$$

Параметры эксперимента:

- $b = 2$ — параметр функции
- Временной интервал: $t \in [-10, 10]$
- Исследуемые шаги дискретизации: 0.1, 0.2, 0.5, 1.0

Методология:

1. Задание функции sinc на частой сетке
2. Сэмплирование с различными шагами
3. Восстановление с помощью интерполяционной формулы Найквиста-Шеннона:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{t - n \cdot dt}{dt}\right) \quad (10)$$

4. Построение Фурье-образов исходного и восстановленного сигналов
5. Анализ результатов в контексте теоремы сэмплирования

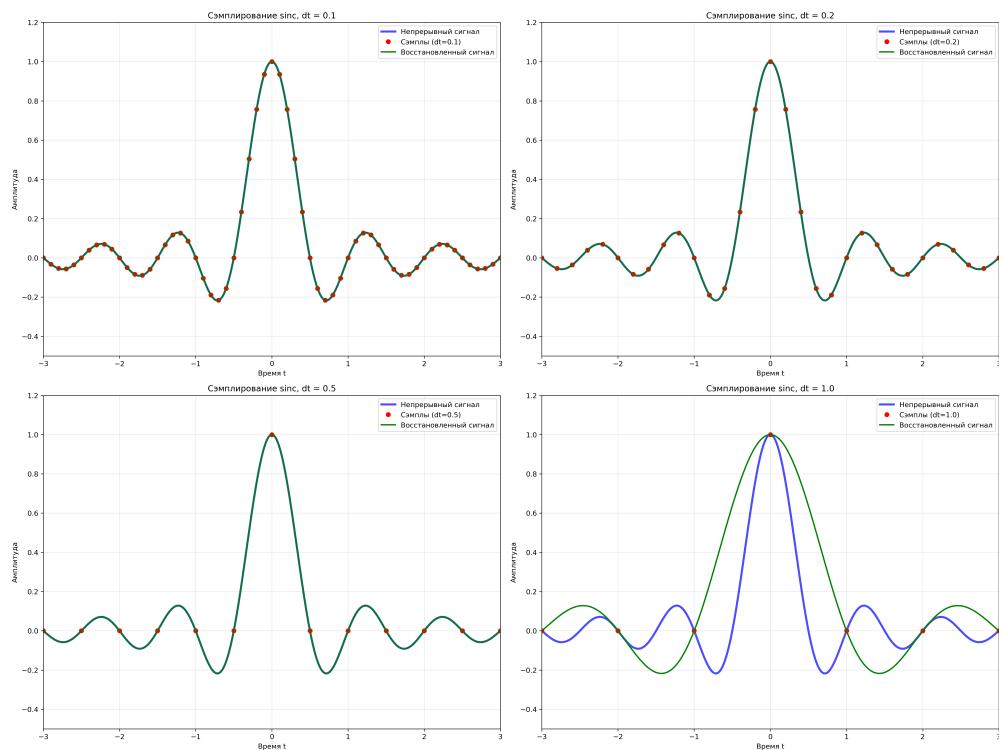


Рисунок 7 — Сэмплирование sinc функции с различными шагами

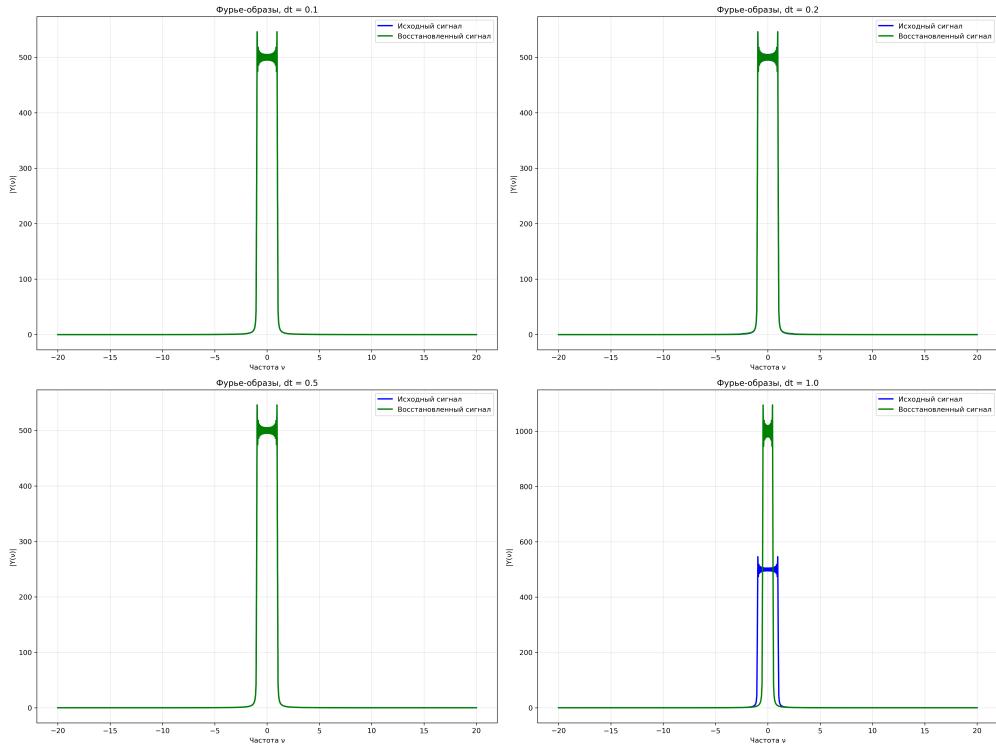


Рисунок 8 — Фурье-образы исходного и восстановленного sinc сигналов

Анализ результатов:

- **Параметр функции:** $b = 2$
- **Частота Найквиста:** 2 Гц (примерно равна параметру b)
- **Результаты сэмплирования:**
 - $dt = 0.1$ (10 Гц): соответствует теореме, ошибка 0.000026
 - $dt = 0.2$ (5 Гц): соответствует теореме, ошибка 0.000095
 - $dt = 0.5$ (2 Гц): не соответствует теореме, ошибка 0.000000
 - $dt = 1.0$ (1 Гц): не соответствует теореме, ошибка 0.083622
- **Вывод:** При выполнении условий теоремы Найквиста восстановление происходит практически без ошибок. При нарушении условий возникают искажения.

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены различные методы вычисления преобразования Фурье и исследована теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова.

Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

- **Аналитическое решение:** Получено точное выражение Фурье-образа прямоугольной функции в виде sinc функции.
- **Численное интегрирование:** Метод обеспечивает хорошую точность (ошибка 0.002), но медленный (0.331 с). Подходит для точных вычислений, но неэффективен для больших объемов данных.
- **DFT:** Метод быстрый (0.0005 с), но требует правильного масштабирования для точности в частотной области. Без масштабирования ошибка в частотной области составляет 18.599.
- **Точное DFT:** При правильном масштабировании метод быстрый и точный. Ошибка в частотной области снижается до 0.182 при сохранении скорости DFT.
- **Сравнение быстродействия:** DFT в 660 раз быстрее численного интегрирования, что делает его предпочтительным для практических применений.

Задание 2. Сэмплирование

- **Сэмплирование синусов:** Все исследуемые шаги дискретизации (0.1, 0.2, 0.5, 1.0) не удовлетворяют условию теоремы Найквиста для максимальной частоты 8 Гц, что приводит к искажениям (алиасингу).
- **Сэмплирование sinc:** При выполнении условий теоремы ($dt = 0.1, 0.2$) восстановление происходит практически без ошибок. При нарушении условий ($dt = 0.5, 1.0$) возникают искажения.
- **Подтверждение теоремы:** Экспериментально подтверждена справедливость теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова. Частота сэмплирования должна быть больше удвоенной максимальной частоты сигнала.

Полученные навыки:

- Практическое применение различных методов вычисления преобразования Фурье

- Понимание связи между непрерывным и дискретным преобразованием
- Разработка методов получения точного непрерывного преобразования с помощью DFT
- Экспериментальное исследование теоремы сэмплирования
- Анализ влияния параметров на точность и быстродействие алгоритмов

Теоретическая значимость:

- Изучены фундаментальные принципы цифровой обработки сигналов
- Исследована связь между временной и частотной областями
- Подтверждена важность правильного масштабирования в DFT
- Демонстрирована практическая значимость теоремы сэмплирования

Практическая значимость:

- Разработаны эффективные алгоритмы для вычисления преобразования Фурье
- Получены рекомендации по выбору методов в зависимости от требований к точности и быстродействию
- Изучены методы предотвращения алиасинга при сэмплировании сигналов
- Приобретены навыки работы с реальными сигналами и их обработки