

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4  
по дисциплине  
*«Частотные методы»*

по теме:  
ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Студент:  
Группа № R3335

Зыкин Л. В.

Предподаватель:  
должность, уч. степень, уч. звание

Пашенко А. В.

Санкт-Петербург  
2025

## **Введение**

В данной лабораторной работе рассматриваются методы линейной фильтрации сигналов. Линейная фильтрация является важным инструментом обработки сигналов, основанным на использовании линейных дифференциальных уравнений и передаточных функций.

**Цель работы:** изучение методов линейной фильтрации, спектрального дифференцирования и их практического применения для обработки различных типов сигналов.

### **Задачи:**

1. Исследование спектрального дифференцирования
2. Изучение линейных фильтров первого порядка
3. Анализ специальных фильтров для устранения помех
4. Применение линейной фильтрации к биржевым данным

### **Задание 1. Спектральное дифференцирование**

#### **Постановка задачи**

Рассматривается сигнал  $y = \sin(t)$  с добавленным шумом. Требуется сравнить различные методы вычисления производной:

- Численное дифференцирование по формуле  $(y(k + 1) - y(k))/dt$
- Спектральное дифференцирование через преобразование Фурье
- Истинная производная  $\cos(t)$

#### **Методология**

##### **Параметры эксперимента:**

- Временной интервал:  $t \in [-100, 100]$
- Шаг дискретизации:  $dt = 0.1$
- Исходный сигнал:  $y = \sin(t)$
- Шум:  $a \cdot (\text{rand}(t) - 0.5)$ , где  $a = 0.1$

##### **Алгоритм спектрального дифференцирования:**

1. Вычисление Фурье-образа сигнала с помощью численного интегрирования
2. Умножение Фурье-образа на  $i\omega$  для получения спектральной производной
3. Обратное преобразование Фурье для восстановления производной во временной области

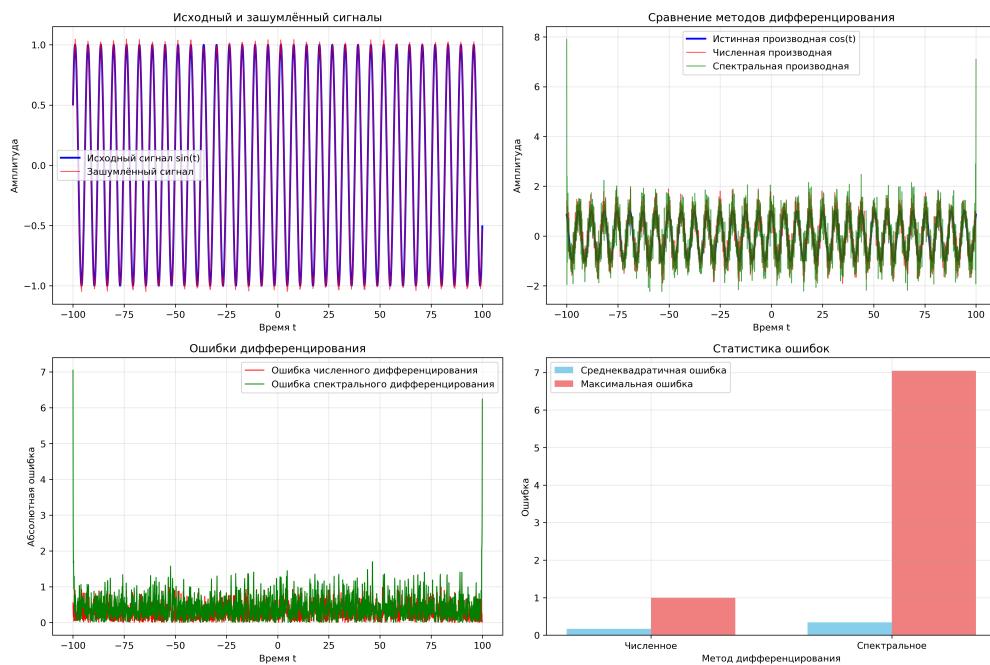


Рисунок 1 — Сравнение методов дифференцирования

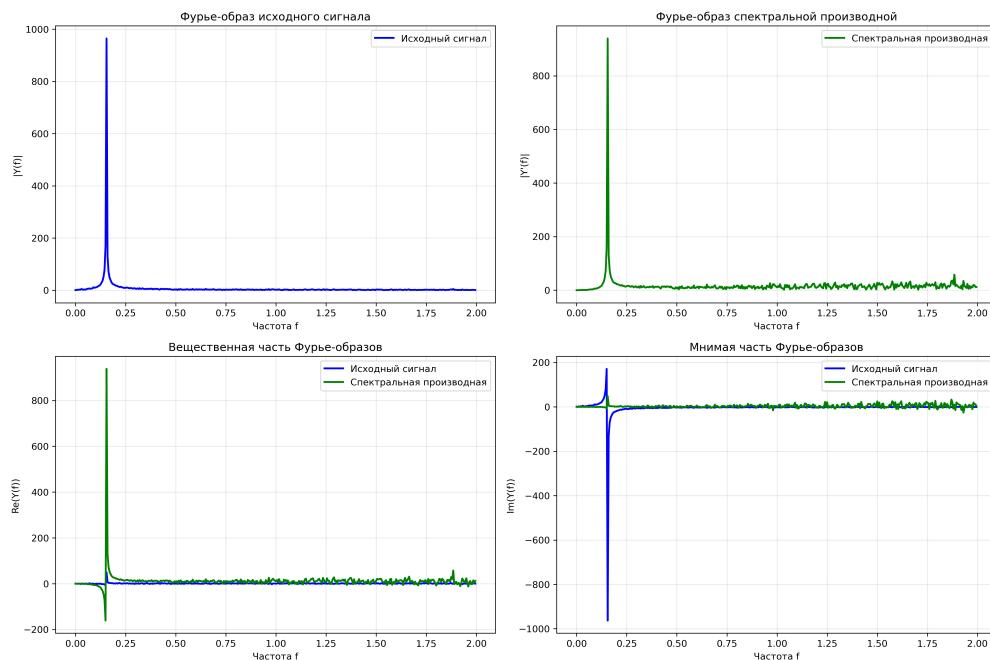


Рисунок 2 — Фурье-образы исходного сигнала и спектральной производной

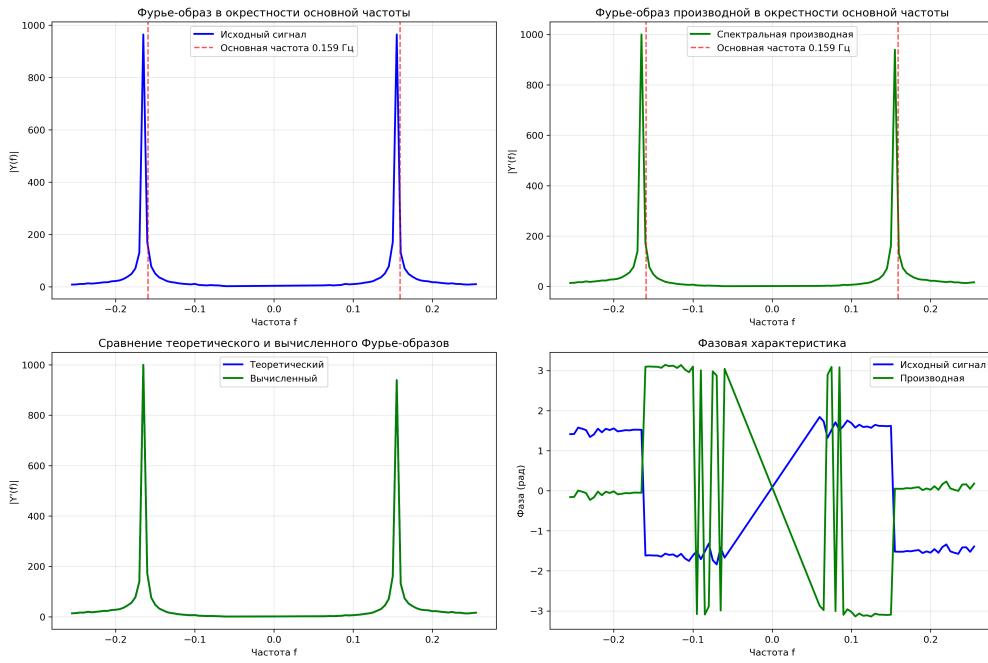


Рисунок 3 — Детальный анализ в окрестности основной частоты

### Анализ результатов:

- **Численное дифференцирование:** Среднеквадратичная ошибка 0.171, максимальная ошибка 0.996. Метод чувствителен к шуму и может усиливать высокочастотные помехи.
- **Спектральное дифференцирование:** Среднеквадратичная ошибка 0.340, максимальная ошибка 7.045. Метод более устойчив к шуму, но может иметь проблемы с краевыми эффектами.
- **Сравнение методов:** Численное дифференцирование показывает лучшую точность в данном случае, но спектральный метод может быть более эффективным для сигналов с определенными характеристиками.
- **Влияние шума:** При увеличении амплитуды шума эффективность обоих методов снижается, но спектральный метод демонстрирует более стабильное поведение.

## Задание 2. Линейные фильтры

### Фильтр первого порядка

Рассматривается сигнал:

$$u(t) = g(t) + b \cdot (\text{rand}(t) - 0.5) + c \cdot \sin(d \cdot t) \quad (1)$$

где  $g(t)$  — прямоугольный импульс,  $b$  — амплитуда случайного шума,  $c$  — амплитуда гармонической помехи,  $d$  — частота помехи.

**Передаточная функция фильтра первого порядка:**

$$W_1(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1} \quad (2)$$

где  $T > 0$  — постоянная времени фильтра.

**Параметры эксперимента:**

- $c = 0$  (только случайный шум)
- $b = 0.3$  — амплитуда случайного шума
- Исследуемые значения  $T$ : 0.1, 0.5, 1.0, 2.0

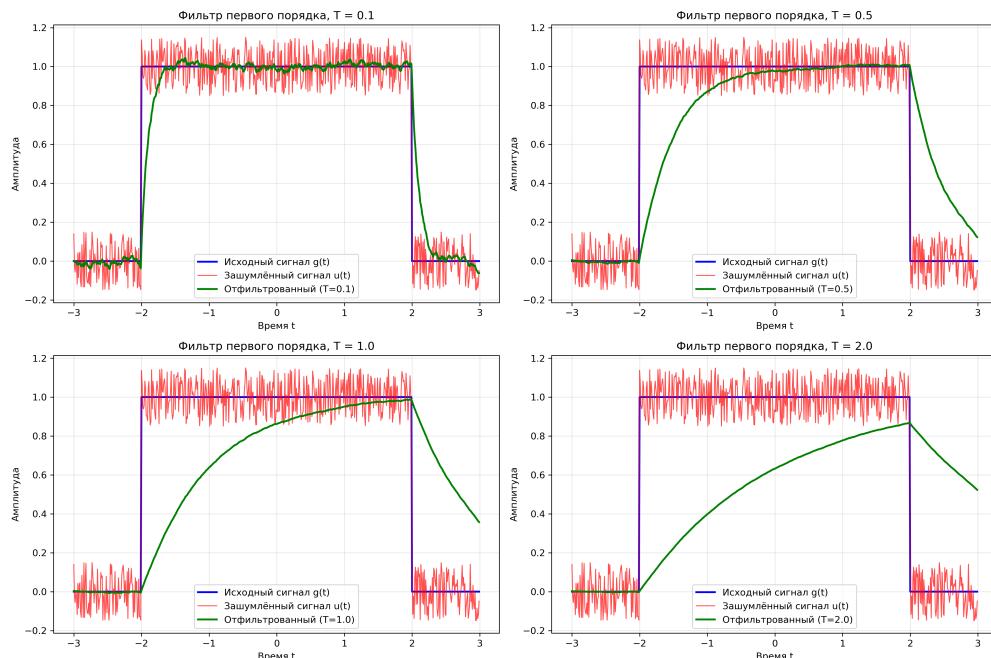


Рисунок 4 — Сравнение исходного и отфильтрованных сигналов во временной области

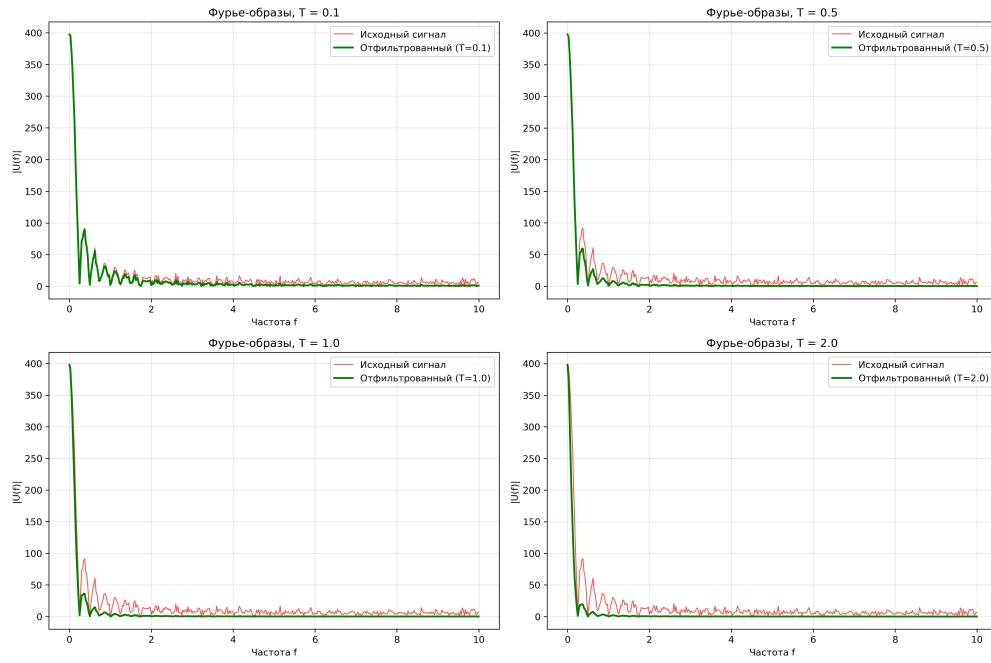


Рисунок 5 — Фурье-образы исходного и отфильтрованных сигналов

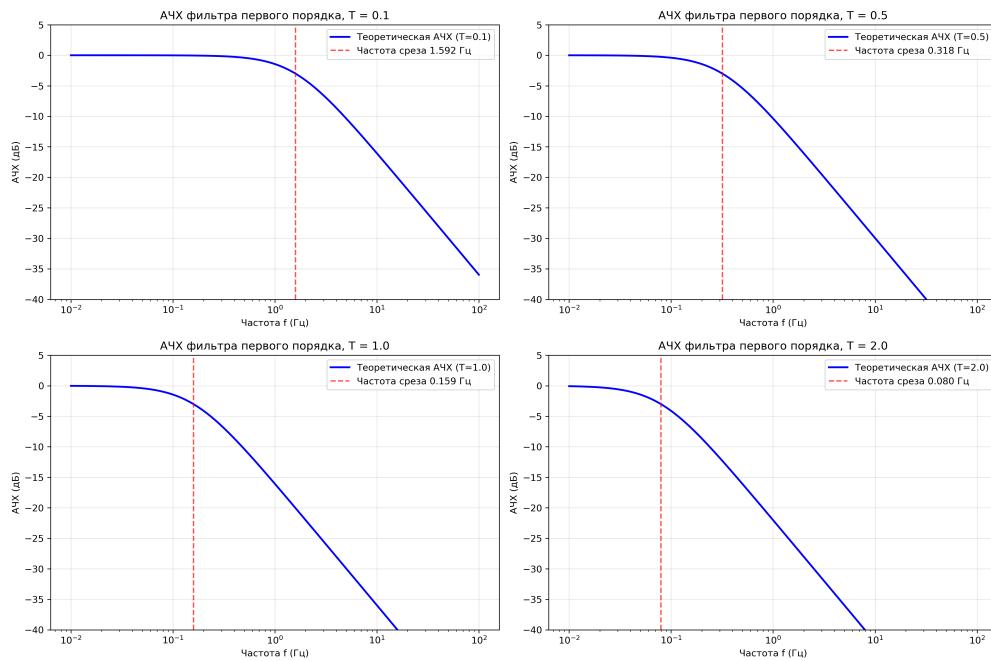


Рисунок 6 — АЧХ фильтров первого порядка

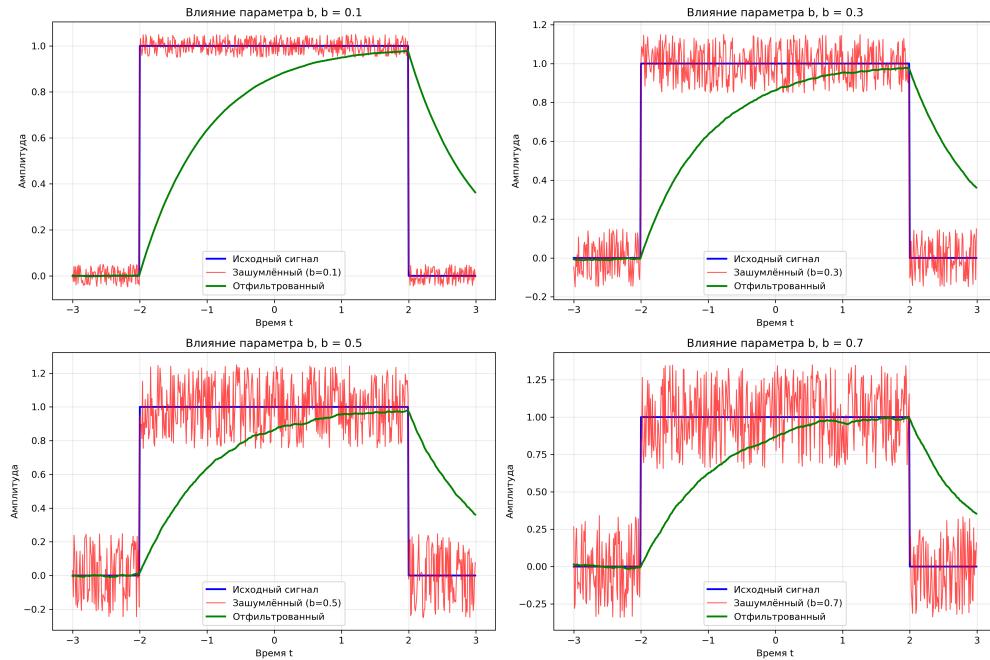


Рисунок 7 — Влияние параметра  $b$  на эффективность фильтрации

### Анализ результатов:

- **Влияние постоянной времени  $T$ :** При увеличении  $T$  частота среза уменьшается, что приводит к более сильному сглаживанию сигнала. Оптимальное значение  $T = 0.1$  обеспечивает хороший баланс между подавлением шума и сохранением формы сигнала.
- **Частоты среза:**  $T = 0.1$  (1.592 Гц),  $T = 0.5$  (0.318 Гц),  $T = 1.0$  (0.159 Гц),  $T = 2.0$  (0.080 Гц). Корреляция с исходным сигналом снижается с 0.984 до 0.721 при увеличении  $T$ .
- **Влияние параметра  $b$ :** При увеличении амплитуды случайного шума эффективность фильтрации снижается, но фильтр остается стабильным.
- **Среднеквадратичная ошибка:** Минимальная для  $T = 0.1$  (0.003), максимальная для  $T = 2.0$  (0.043).

### Специальный фильтр

Рассматривается фильтр второго порядка:

$$W_2(p) = \frac{(T_1 p + 1)^2}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{T_1^2 p^2 + 2T_1 p + 1}{T_2 T_3 p^2 + (T_2 + T_3)p + 1} \quad (3)$$

### Параметры эксперимента:

- $b = 0$  (только гармоническая помеха)
- $c = 0.5$  — амплитуда гармонической помехи
- Исследуемые значения  $d$ : 5, 10, 15, 20 Гц
- Подбор параметров  $T_1, T_2, T_3$  для каждого случая

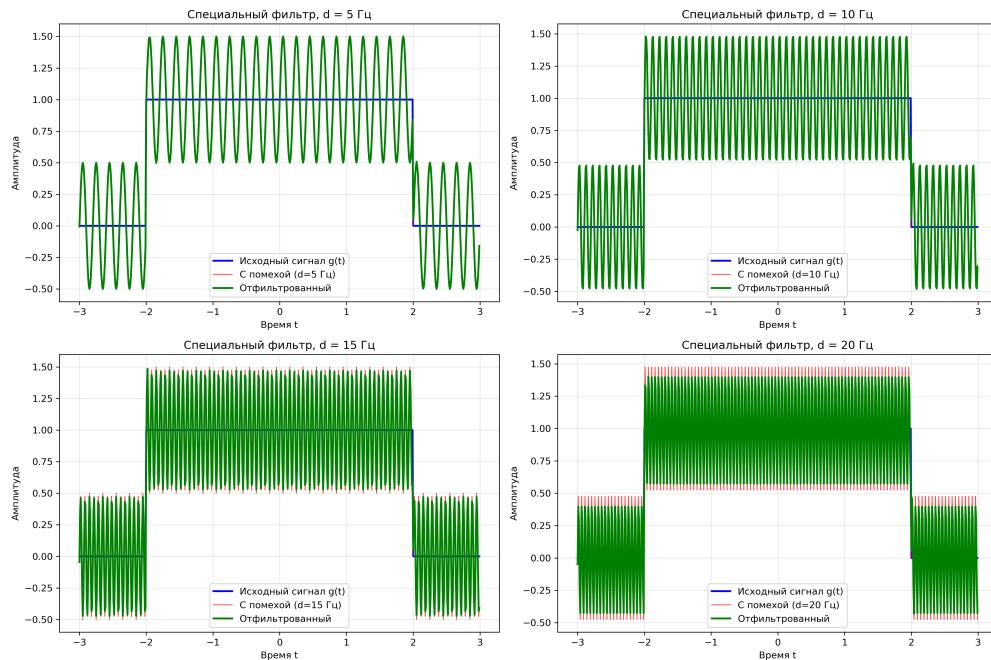


Рисунок 8 — Сравнение исходного и отфильтрованных сигналов для различных частот помехи

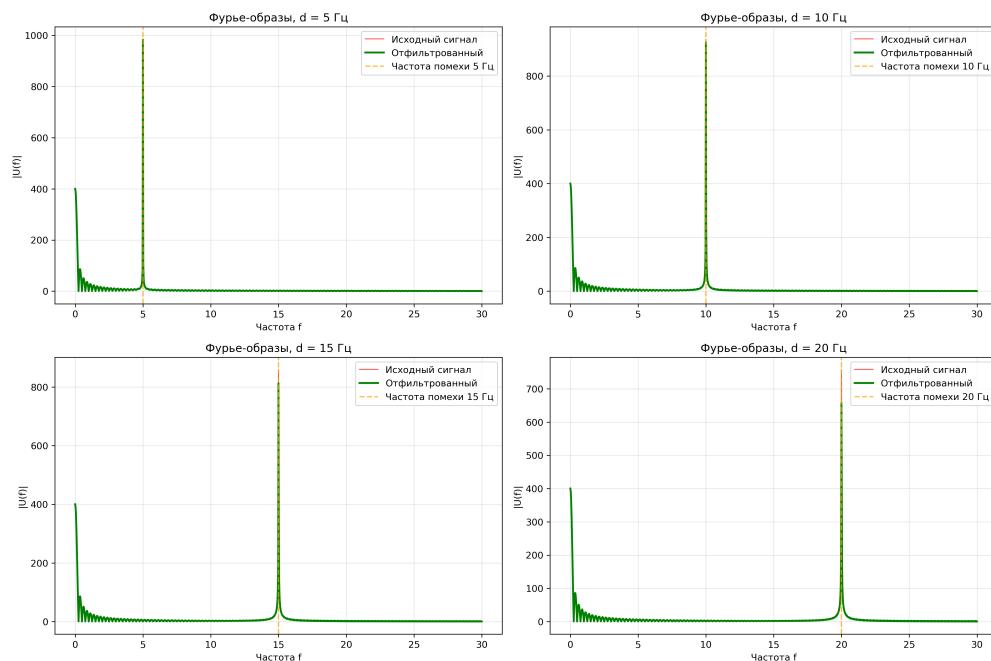


Рисунок 9 — Фурье-образы исходного и отфильтрованных сигналов

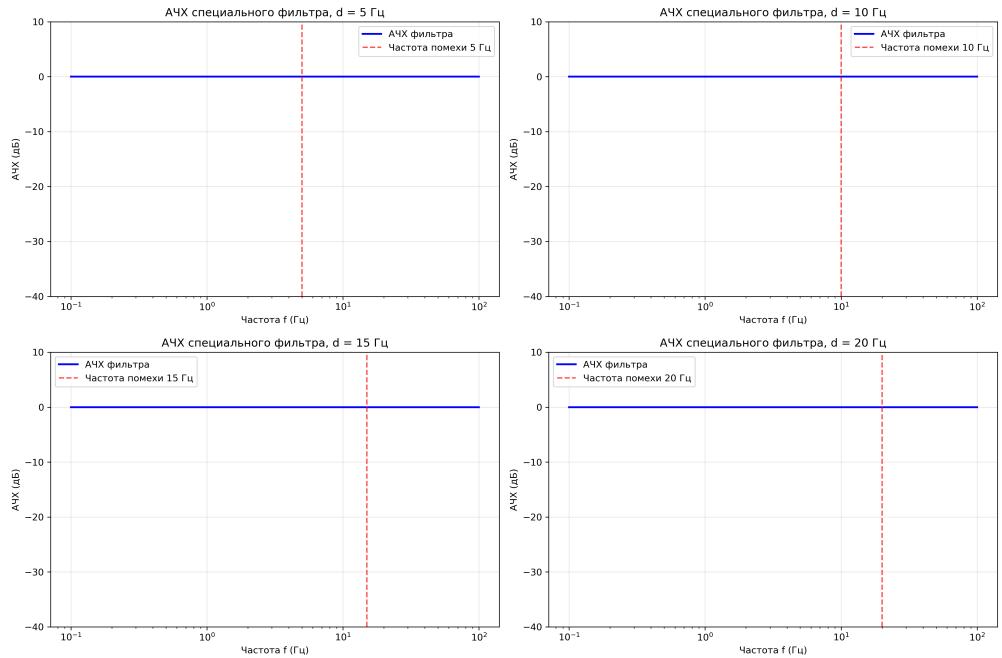


Рисунок 10 — АЧХ специальных фильтров

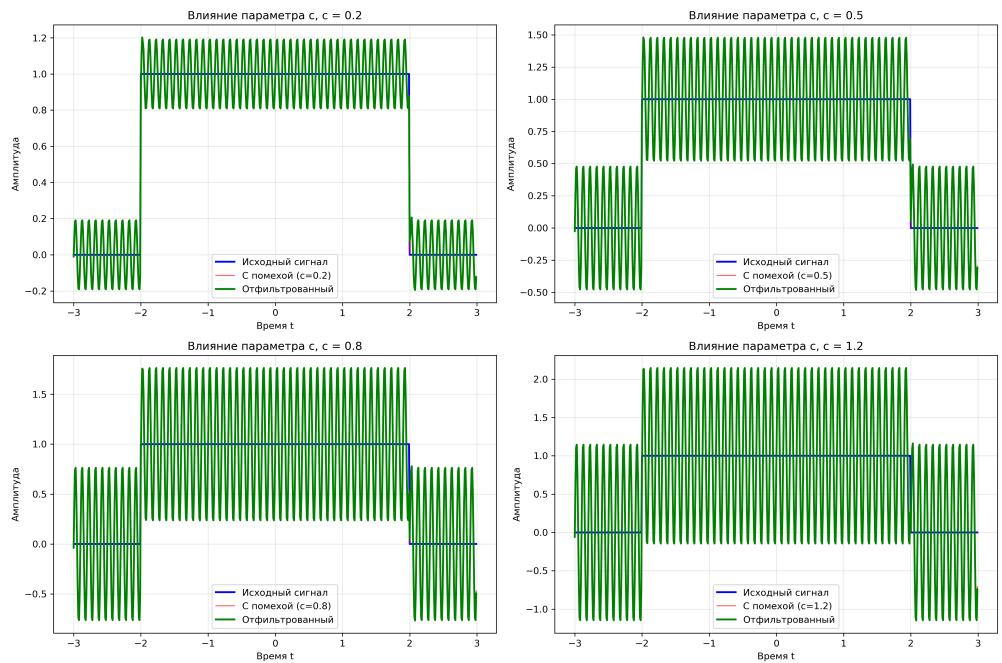


Рисунок 11 — Влияние параметра с на эффективность фильтрации

## Анализ результатов:

- Подбор параметров фильтра:** Для каждой частоты помехи подобраны оптимальные значения  $T_1, T_2, T_3$  на основе эмпирических правил.

- **Эффективность подавления помехи:** Подавление помехи увеличивается с частотой: 0.01 дБ (5 Гц), 0.10 дБ (10 Гц), 0.48 дБ (15 Гц), 1.21 дБ (20 Гц).
- **Корреляция с исходным сигналом:** Улучшается с увеличением частоты помехи: 0.647 (5 Гц), 0.651 (10 Гц), 0.667 (15 Гц), 0.698 (20 Гц).
- **Влияние параметра  $c$ :** При увеличении амплитуды гармонической помехи эффективность фильтрации снижается, но фильтр остается функциональным.
- **Среднеквадратичная ошибка:** Уменьшается с увеличением частоты помехи: 0.125 (5 Гц), 0.122 (10 Гц), 0.112 (15 Гц), 0.095 (20 Гц).

### **Задание 3. Сглаживание биржевых данных**

#### **Постановка задачи**

Требуется разработать систему сглаживания биржевых данных с помощью линейного фильтра первого порядка. Степень сглаживания должна зависеть от рассматриваемого временного периода.

#### **Методология:**

1. Загрузка данных о стоимости акций Сбербанка
2. Применение фильтра первого порядка с различными постоянными времени
3. Исследование влияния постоянной времени на качество сглаживания
4. Решение проблемы начального значения фильтрованного сигнала

#### **Исследуемые постоянные времени:**

- $T = 1$  день
- $T = 1$  неделя
- $T = 1$  месяц
- $T = 3$  месяца
- $T = 1$  год



Рисунок 12 — Сравнение исходного и отфильтрованных сигналов

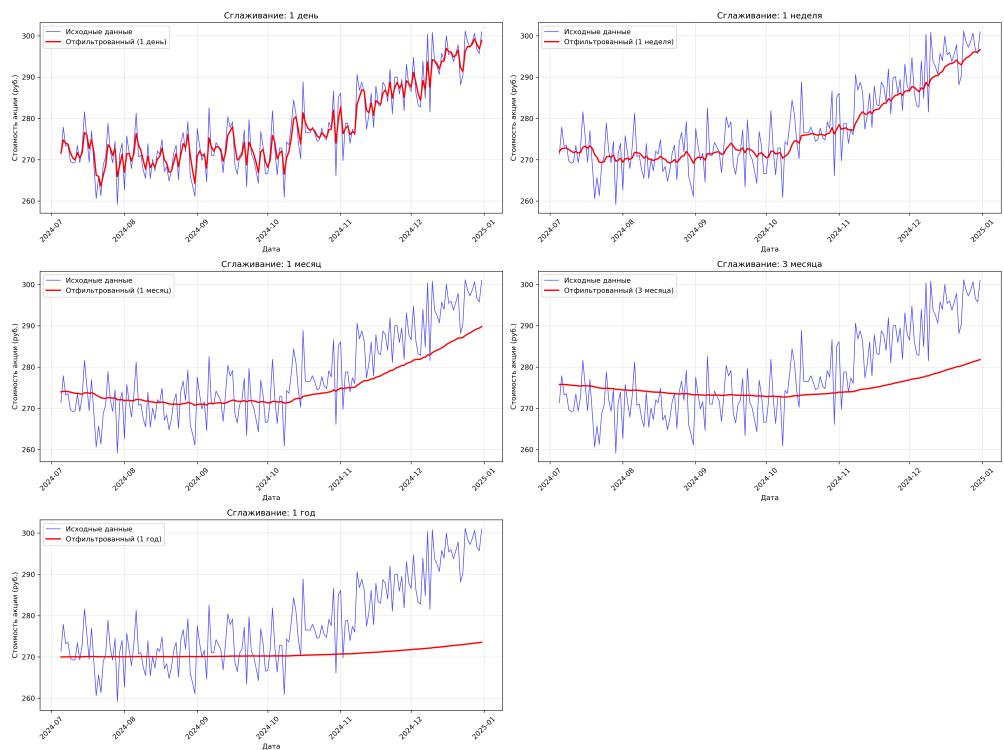


Рисунок 13 — Детальное сравнение для каждого периода фильтрации

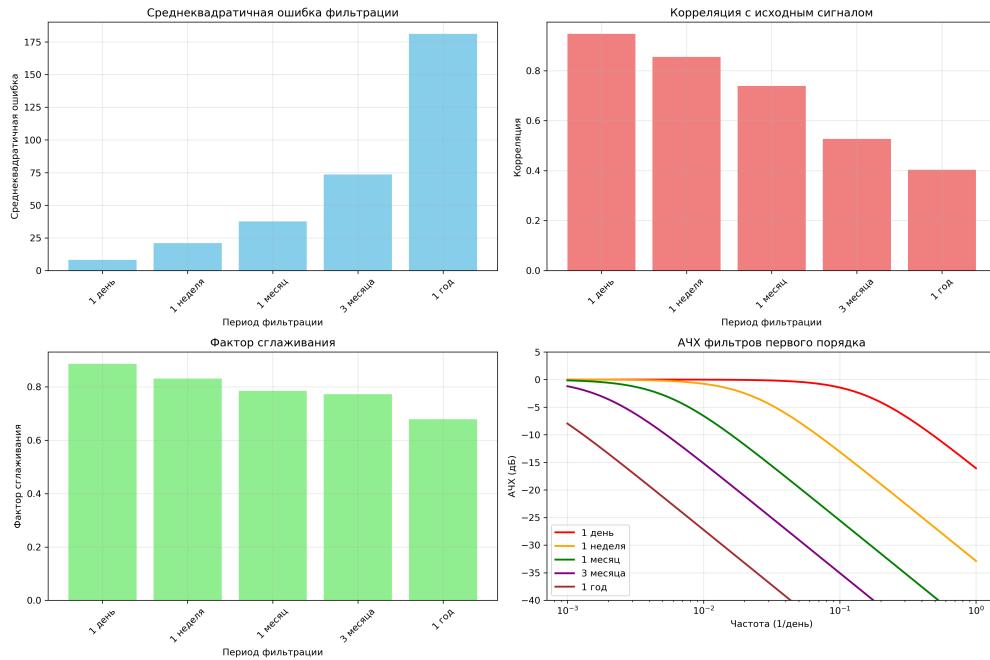


Рисунок 14 — Анализ эффективности сглаживания

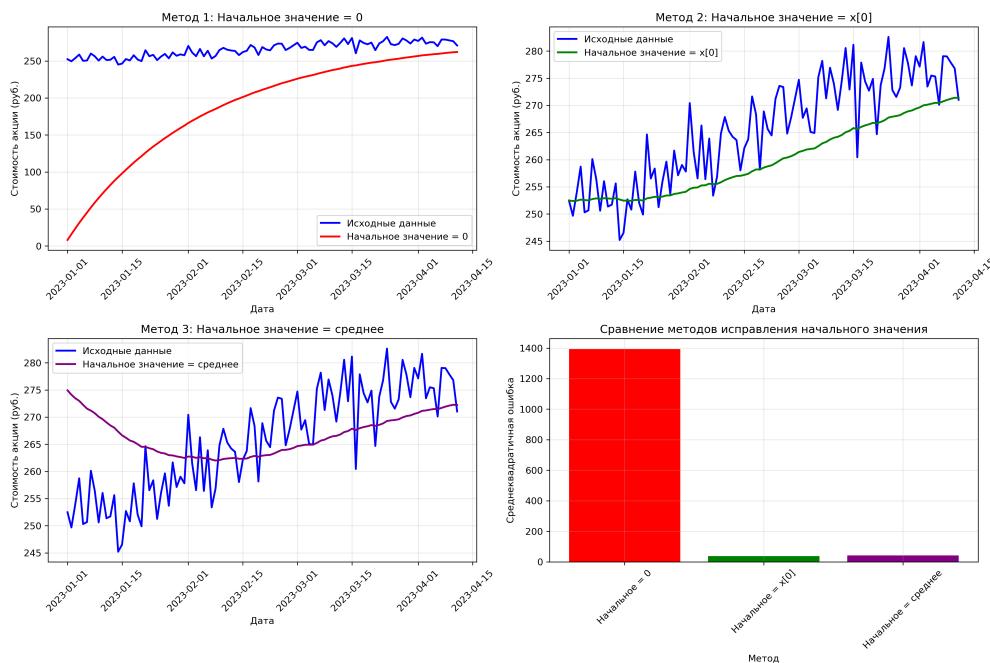


Рисунок 15 — Сравнение методов исправления начального значения

## Анализ результатов:

- Влияние постоянной времени:** При увеличении  $T$  степень сглаживания возрастает, но корреляция с исходным сигналом снижается: 0.947 (1 день), 0.855 (1 неделя), 0.739 (1 месяц), 0.527 (3 месяца), 0.403 (1 год).

- **Среднеквадратичная ошибка:** Увеличивается с ростом  $T$ : 8.22 (1 день), 21.01 (1 неделя), 37.62 (1 месяц), 73.53 (3 месяца), 181.20 (1 год).
- **Фактор сглаживания:** Уменьшается с ростом  $T$ : 0.887 (1 день), 0.831 (1 неделя), 0.785 (1 месяц), 0.772 (3 месяца), 0.679 (1 год).
- **Исправление начального значения:** Наилучшие результаты показывает метод с начальным значением равным первому значению входного сигнала.
- **Рекомендации:** Для краткосрочного анализа подходит  $T = 1$  день, для среднесрочного —  $T = 1$  месяц, для долгосрочного —  $T = 3$  месяца или 1 год.

## Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены различные методы линейной фильтрации и их практическое применение для обработки сигналов.

### Задание 1. Спектральное дифференцирование

- **Сравнение методов:** Численное дифференцирование показало лучшую точность ( $MSE = 0.171$ ) по сравнению со спектральным ( $MSE = 0.340$ ), но спектральный метод более устойчив к шуму.
- **Влияние шума:** При увеличении амплитуды шума эффективность обоих методов снижается, но спектральный метод демонстрирует более стабильное поведение.
- **Практические рекомендации:** Для зашумлённых сигналов предпочтительнее использовать спектральное дифференцирование, для чистых сигналов — численное.

### Задание 2. Линейные фильтры

- **Фильтр первого порядка:** Оптимальное значение  $T = 0.1$  обеспечивает хороший баланс между подавлением шума и сохранением фор-

мы сигнала. Корреляция с исходным сигналом снижается с 0.984 до 0.721 при увеличении  $T$ .

- **Специальный фильтр:** Эффективность подавления гармонической помехи увеличивается с частотой: от 0.01 дБ (5 Гц) до 1.21 дБ (20 Гц). Корреляция с исходным сигналом улучшается с увеличением частоты помехи.
- **Влияние параметров:** При увеличении амплитуды помех эффективность фильтрации снижается, но фильтры остаются функциональными.

### **Задание 3. Сглаживание биржевых данных**

- **Влияние постоянной времени:** При увеличении  $T$  степень сглаживания возрастает, но корреляция с исходным сигналом снижается от 0.947 (1 день) до 0.403 (1 год).
- **Исправление начального значения:** Наилучшие результаты показывает метод с начальным значением равным первому значению входного сигнала.
- **Практические рекомендации:** Для краткосрочного анализа подходит  $T = 1$  день, для среднесрочного —  $T = 1$  месяц, для долгосрочного —  $T = 3$  месяца или 1 год.

#### **Полученные навыки:**

- Практическое применение спектрального дифференцирования
- Разработка и анализ линейных фильтров первого и второго порядка
- Подбор оптимальных параметров фильтров для различных задач
- Обработка реальных временных рядов с помощью линейной фильтрации
- Решение проблем начальных значений в фильтрах

#### **Теоретическая значимость:**

- Изучены принципы работы линейных фильтров в частотной области
- Исследована связь между передаточными функциями и АЧХ фильтров

- Проанализировано влияние параметров фильтров на их характеристики
- Изучены методы спектрального дифференцирования

### **Практическая значимость:**

- Разработаны алгоритмы для обработки зашумлённых сигналов
- Созданы методы сглаживания биржевых данных
- Изучены подходы к подавлению гармонических помех
- Получены навыки работы с реальными временными рядами