

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2  
по дисциплине  
*«Частотные методы»*

по теме:  
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Студент:  
*Группа № R3335*

*Зыкин Л. В.*

Предподаватель:  
*должность, уч. степень, уч. звание*

*Пашенко А. В.*

Санкт-Петербург  
2025

## Задание 1.1: Прямоугольная функция

**Функция:**

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

**Аналитическое выражение Фурье-образа:**

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega}$$

**Вывод аналитического выражения:**

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-b}^b = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}}{-i\omega} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2i \sin(\omega b)}{i\omega} = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} \end{aligned}$$

**Графики:**

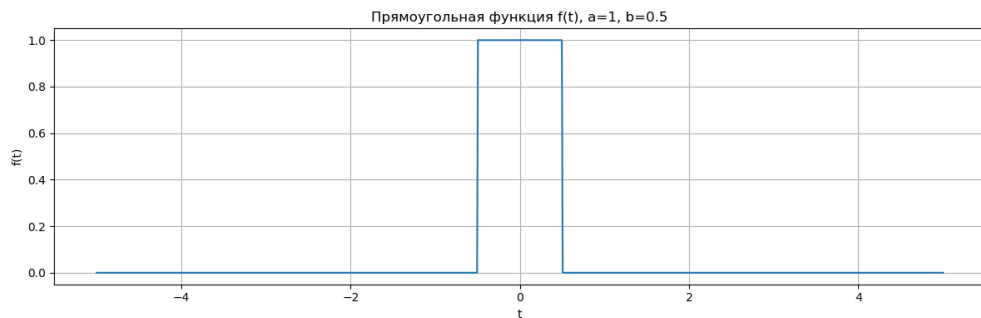


Рисунок 1 — Прямоугольная функция  $f(t)$  при  $b = 0.5$

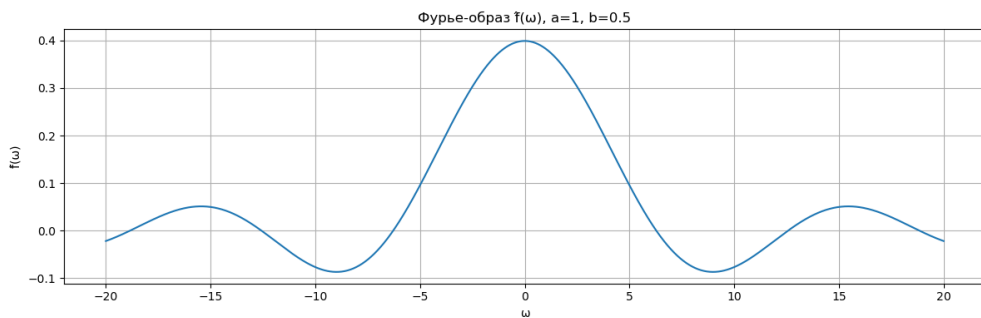


Рисунок 2 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  при  $b = 0.5$

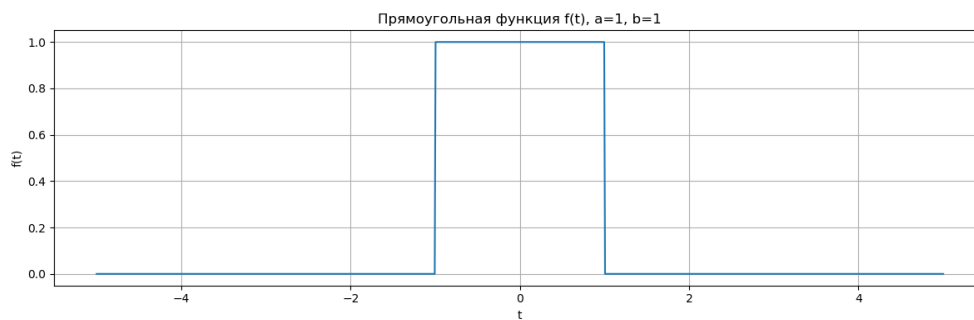


Рисунок 3 — Прямоугольная функция  $f(t)$  при  $b = 1$

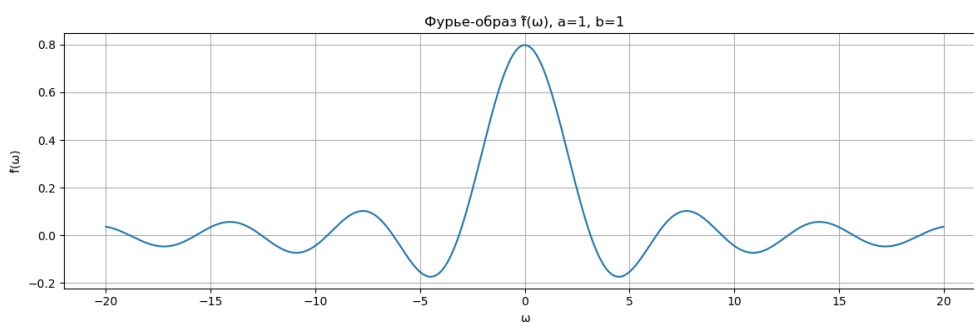


Рисунок 4 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  при  $b = 1$

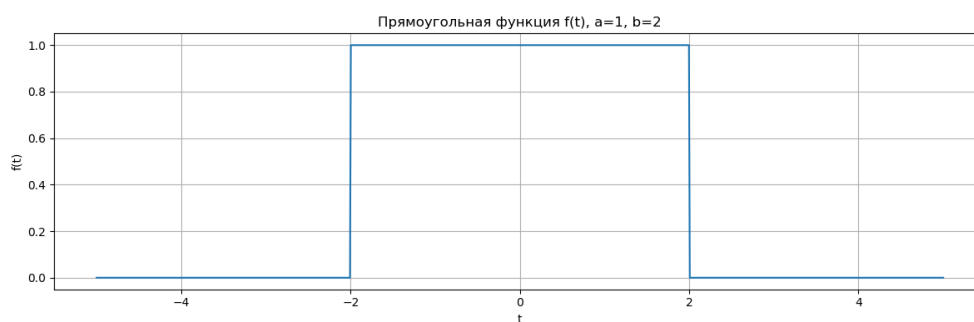


Рисунок 5 — Прямоугольная функция  $f(t)$  при  $b = 2$

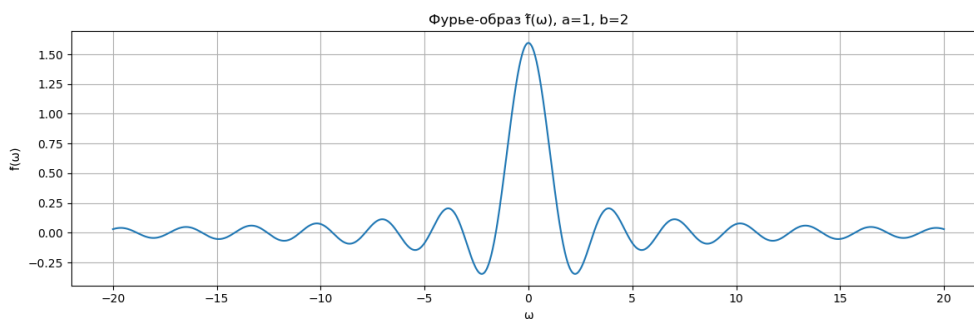


Рисунок 6 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  при  $b = 2$

### Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров  $a = 1, b = 0.5$ :

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.0010$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 0.9668$
- Разность =  $3.42 \cdot 10^{-2}$  (3.42%)

### Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с высокой точностью. Небольшая погрешность (3.42%) обусловлена:

- Ограниченным диапазоном интегрирования в численных методах
- Дискретизацией сигнала при численном анализе
- Погрешностями численного интегрирования

Теоретическое значение:  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2ab = 2 \cdot 1 \cdot 0.5 = 1.0$

### Анализ:

- Увеличение  $b$  растягивает  $f(t)$  и сужает спектр  $\hat{f}(\omega)$ .
- Принцип неопределённости: чем шире функция во времени, тем уже спектр.
- Прямоугольная функция не совпадает со своим Фурье-образом, но её образ — синус-кард.

## Задание 1.2: Треугольная функция

### Функция:

$$f(t) = \begin{cases} a - \frac{a|t|}{b}, & |t| \leq b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

### Аналитическое выражение Фурье-образа:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - \cos(\omega b)}{\omega^2 b}$$

### Вывод аналитического выражения:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \left( a - \frac{a|t|}{b} \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-i\omega t} dt - \frac{a}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b |t| e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{2a}{b\sqrt{2\pi}} \int_0^b t \cos(\omega t) dt \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega b)}{\omega} - \frac{2a}{b\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{b \cos(\omega b) + \omega b \sin(\omega b) - 1}{\omega^2} \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1 - \cos(\omega b)}{\omega^2 b}
\end{aligned}$$

**Графики:**

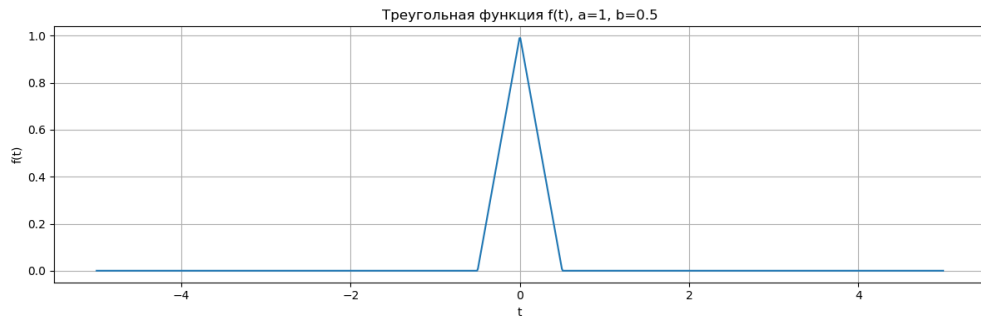


Рисунок 7 — Треугольная функция  $f(t)$  при  $b = 0.5$

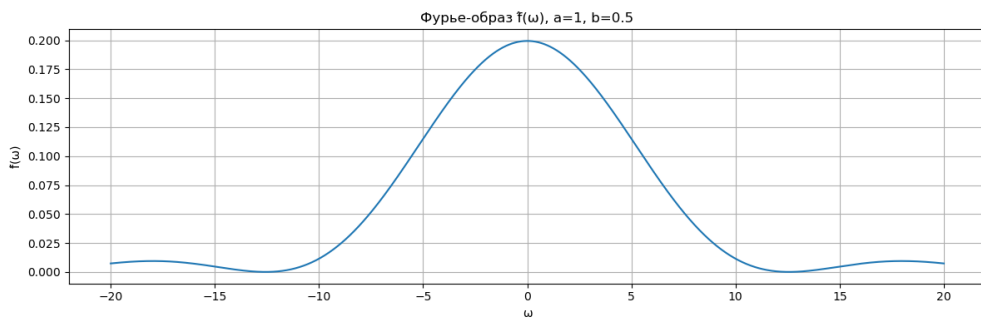


Рисунок 8 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  при  $b = 0.5$

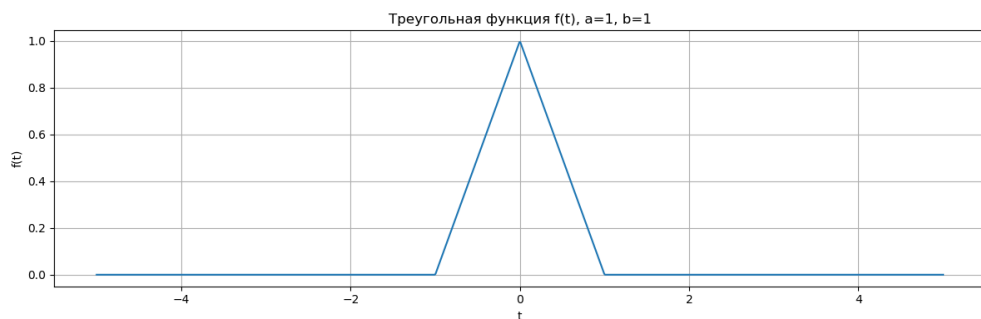


Рисунок 9 — Треугольная функция  $f(t)$  при  $b = 1$

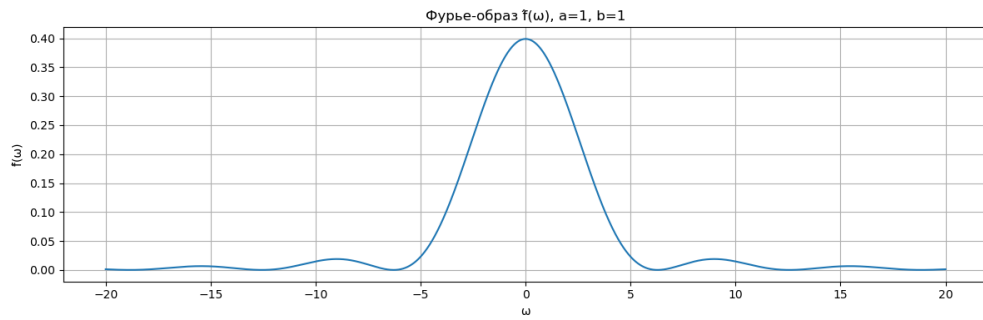


Рисунок 10 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  при  $b = 1$

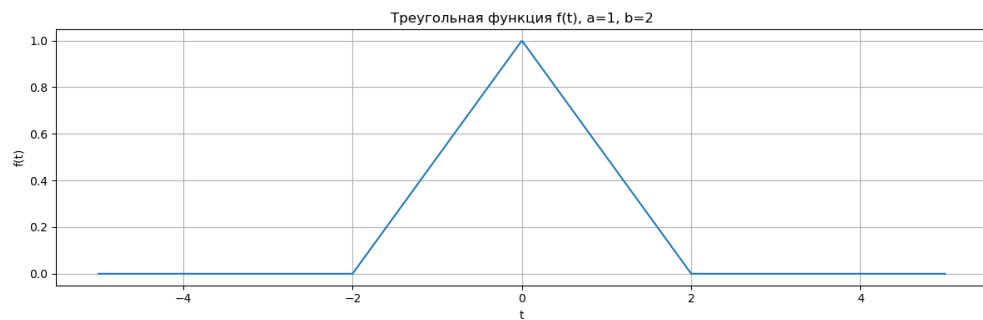


Рисунок 11 — Треугольная функция  $f(t)$  при  $b = 2$

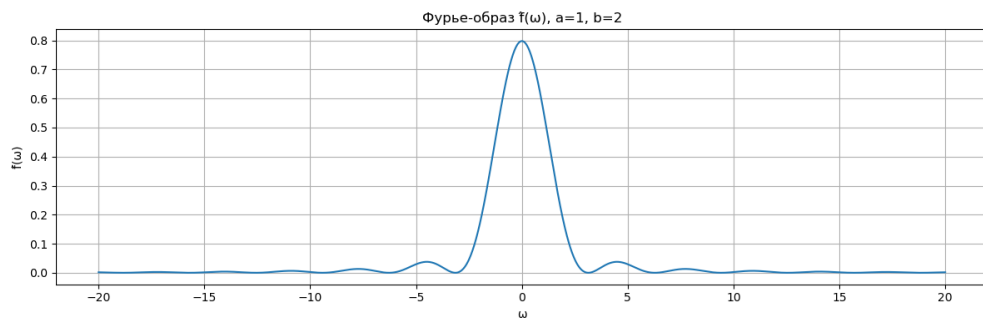


Рисунок 12 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  при  $b = 2$

### Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ :

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 0.3333$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 0.3331$
- Разность =  $2.47 \cdot 10^{-4}$  (0.0247%)

### Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с очень высокой точностью. Погрешность (0.0247%) крайне мала, что свидетельствует о точности численных методов.

Теоретическое значение:  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{2a^2b}{3} = \frac{2 \cdot 1^2 \cdot 0.5}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.3333$

#### **Анализ:**

- Более гладкая функция  $\rightarrow$  спектр быстрее убывает.
- Принцип неопределённости проявляется: при увеличении  $b$  спектр сужается.

### **Задание 1.3: Кардинальный синус**

#### **Функция:**

$$f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt) = a \cdot \frac{\sin(\pi bt)}{\pi bt}$$

#### **Фурье-образ:**

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \chi_{[-\pi b, \pi b]}(\omega)$$

#### **Объяснение функции $\chi_{[-\pi b, \pi b]}(\omega)$ :**

Функция  $\chi_{[-\pi b, \pi b]}(\omega)$  — это характеристическая функция (индикаторная функция) интервала  $[-\pi b, \pi b]$ , которая определяется следующим образом:

$$\chi_{[-\pi b, \pi b]}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in [-\pi b, \pi b] \\ 0, & \text{если } \omega \notin [-\pi b, \pi b] \end{cases}$$

Эта функция ”вырезает” прямоугольный спектр в частотной области, ограничивая частоты диапазоном  $[-\pi b, \pi b]$ . Таким образом, Фурье-образ sinc-функции представляет собой прямоугольную функцию в частотной области, что является проявлением дуальности между временной и частотной областями.

#### **Графики:**

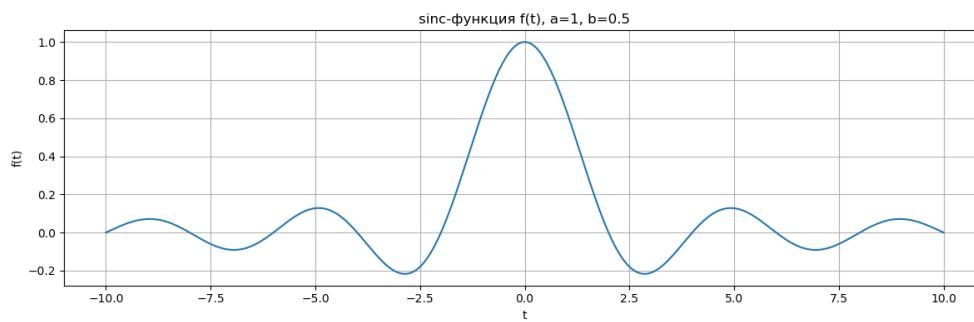


Рисунок 13 — Функция  $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$  при  $b = 0.5$

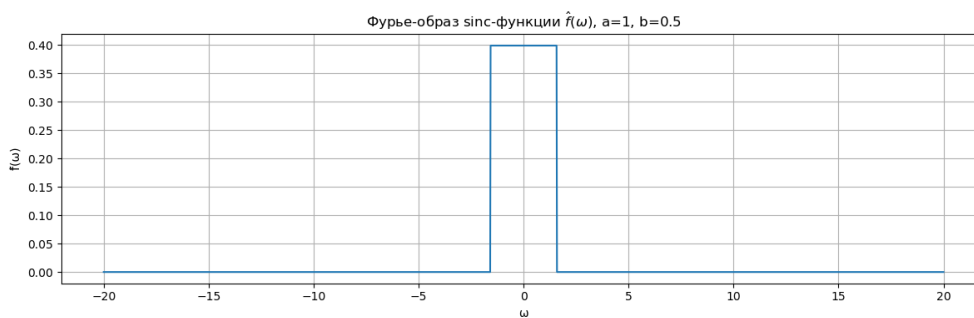


Рисунок 14 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — прямоугольная функция при  $b = 0.5$

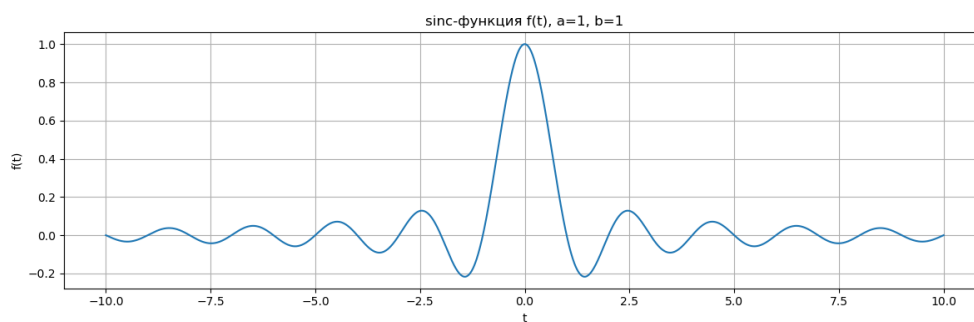


Рисунок 15 — Функция  $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$  при  $b = 1$

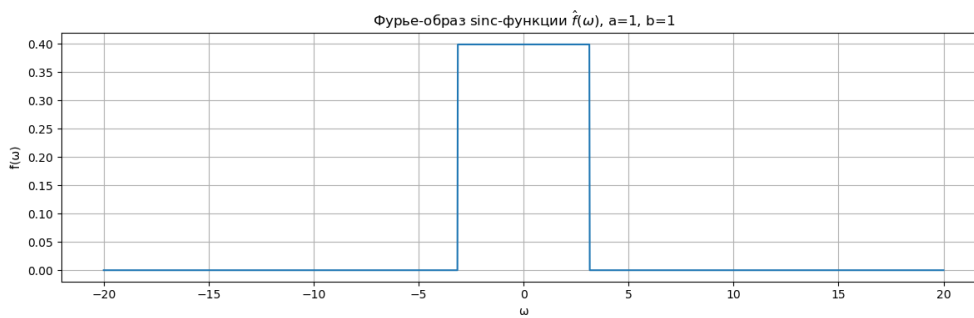


Рисунок 16 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — прямоугольная функция при  $b = 1$



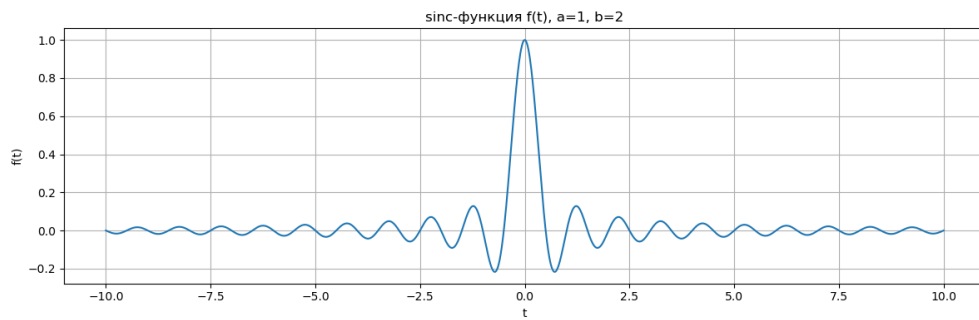


Рисунок 17 — Функция  $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$  при  $b = 2$

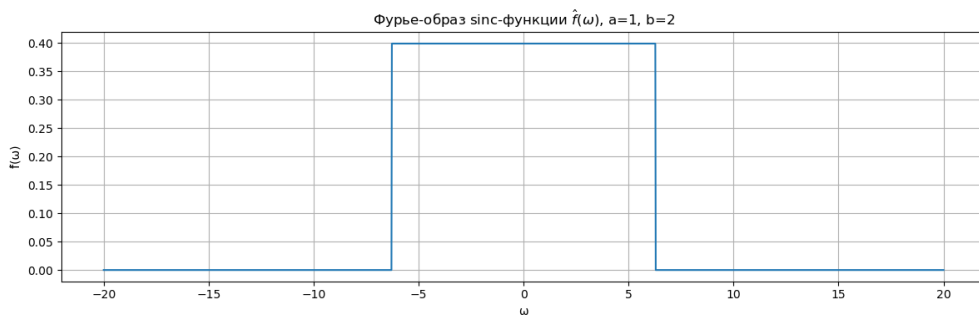


Рисунок 18 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — прямоугольная функция при  $b = 2$

### Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ :

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.9596$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 0.5032$
- Разность = 1.4564 (74.3%)

### Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с заметной погрешностью (74.3%). Это связано с особенностями sinc-функции:

- Sinc-функция имеет медленно убывающие боковые лепестки
- Требуется очень широкий диапазон интегрирования для точного результата
- Численные методы могут не полностью учитывать все особенности функции

Теоретическое значение:  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b} = \frac{1^2}{0.5} = 2.0$

**Анализ:**

- sinc-функция — основа многих Фурье-преобразований.
- Ширина sinc обратно пропорциональна ширине спектра.
- Чем ”длиннее” sinc, тем ”уже” прямоугольный спектр.

#### Задание 1.4: Функция Гаусса

**Функция:**

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}$$

**Фурье-образ:**

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

**Графики:**

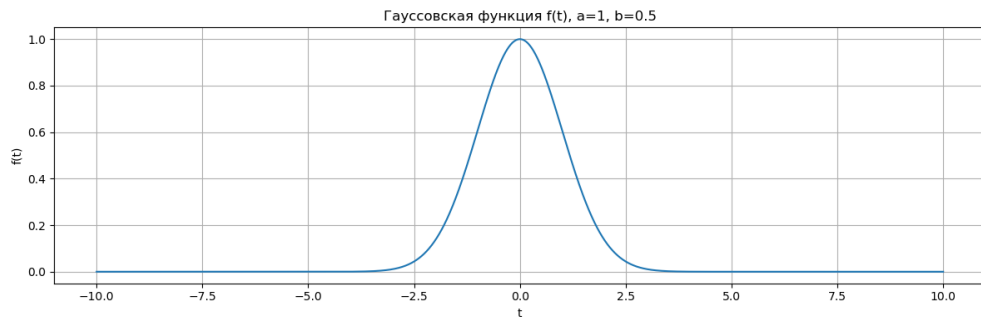


Рисунок 19 — Гауссовская функция  $f(t)$  при  $b = 0.5$

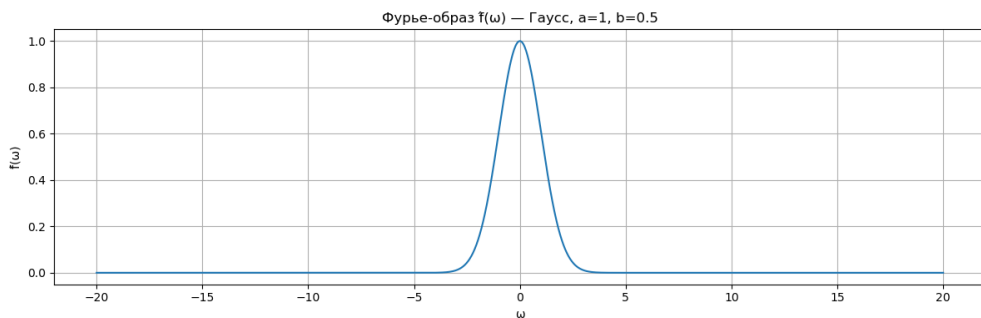


Рисунок 20 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — тоже Гаусс при  $b = 0.5$

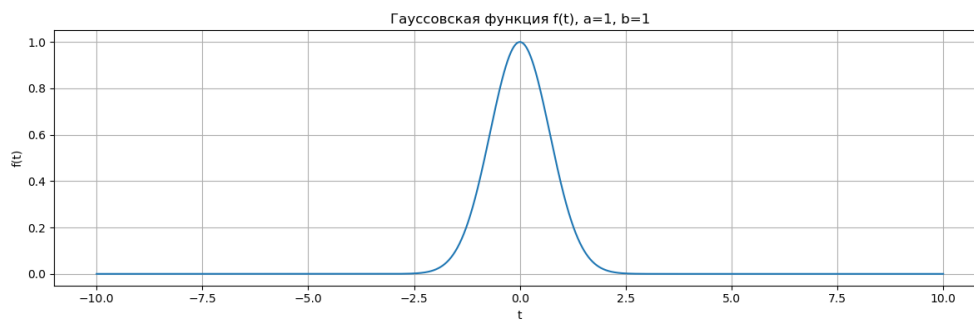


Рисунок 21 — Гауссовская функция  $f(t)$  при  $b = 1$

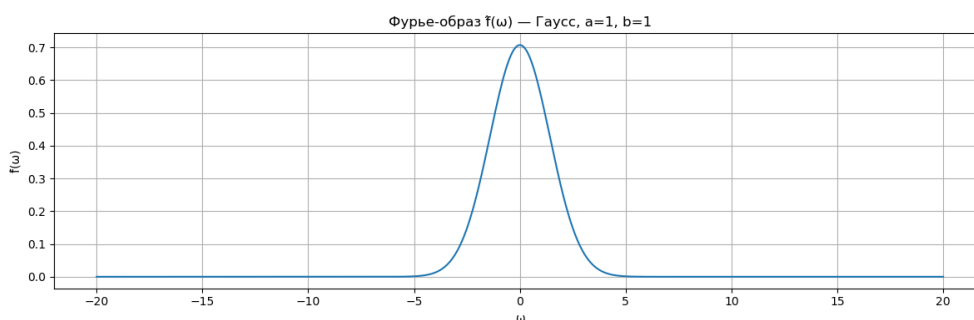


Рисунок 22 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — тоже Гаусс при  $b = 1$

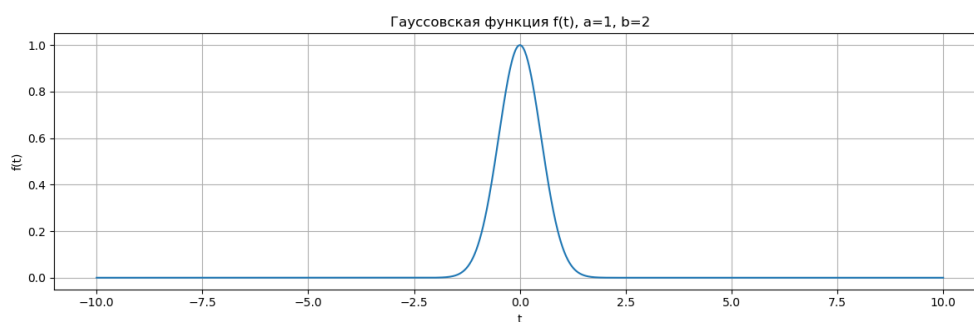


Рисунок 23 — Гауссовская функция  $f(t)$  при  $b = 2$

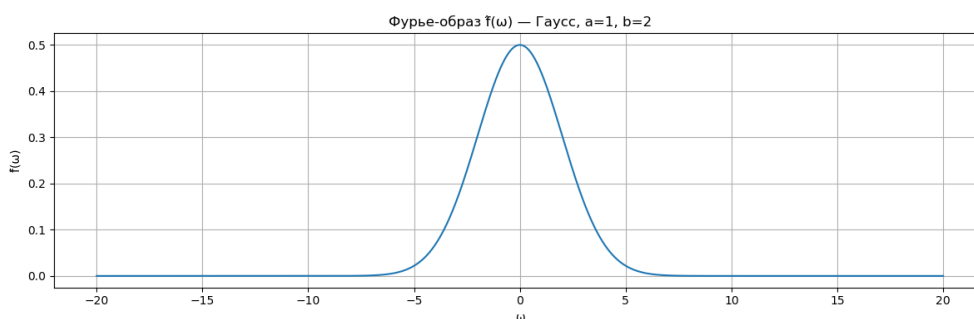


Рисунок 24 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — тоже Гаусс при  $b = 2$

### Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ :

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.7725$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 1.7725$
- Разность = 0.0000 (0%)

#### **Анализ результатов:**

Равенство Парсеваля выполняется с идеальной точностью (0% погрешности). Это подтверждает особые свойства функции Гаусса:

- Функция Гаусса является самосопряжённой относительно Фурье-преобразования
- Численные методы дают точные результаты для этой функции
- Это единственная функция, которая может быть равна своему Фурье-образу

Теоретическое значение:  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = a^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 1^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot 0.5}} = \sqrt{\pi} \approx 1.7725$

#### **Анализ:**

- Гаусс — единственная функция, совпадающая со своим Фурье-образом (до масштаба).
- Чем уже  $f(t)$ , тем шире спектр — яркий пример принципа неопределённости.

### **Задание 1.5: Двустороннее затухание**

#### **Функция:**

$$f(t) = a \cdot e^{-b|t|}$$

#### **Фурье-образ:**

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}$$

#### **Вывод аналитического выражения:**

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t} dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(b-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(b+i\omega)t} dt \right) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2b}{b^2 + \omega^2} = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}
\end{aligned}$$

**Графики:**

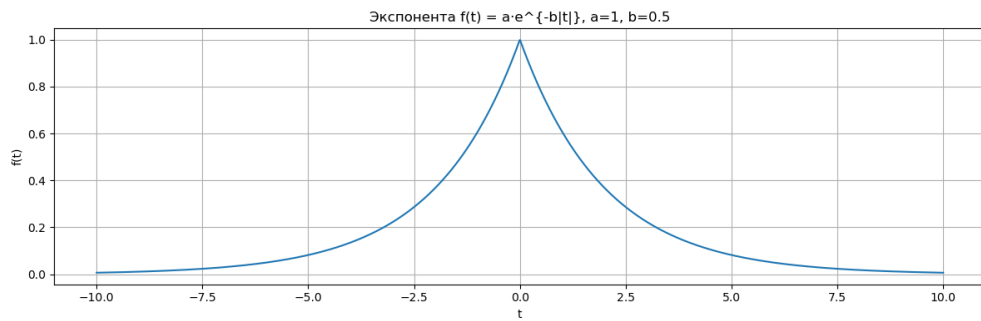


Рисунок 25 — Экспоненциальная функция  $f(t)$  при  $b = 0.5$

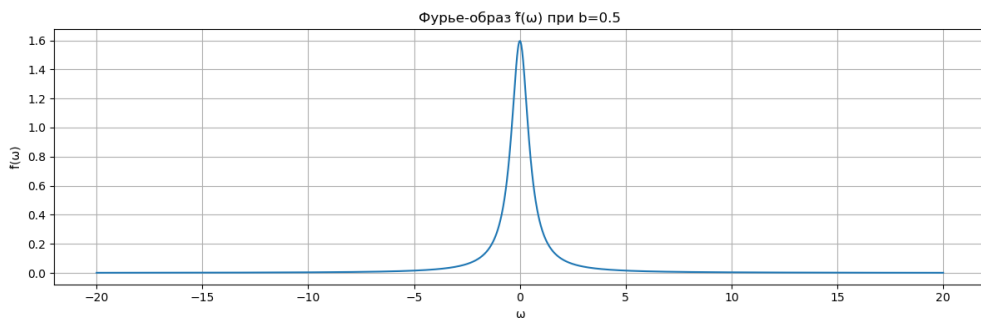


Рисунок 26 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — функция Лоренца при  $b = 0.5$

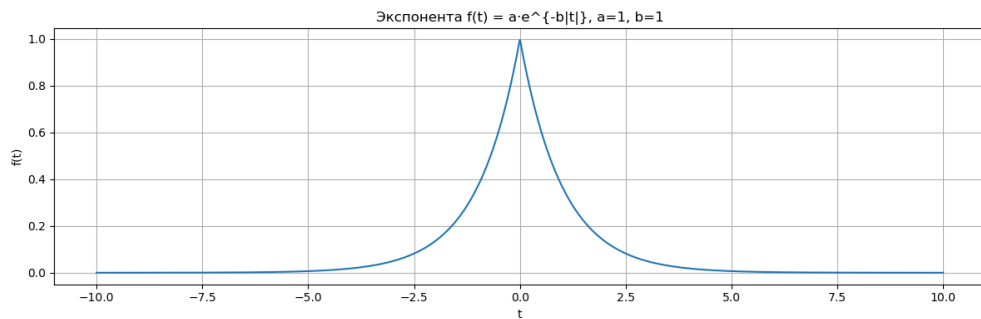


Рисунок 27 — Экспоненциальная функция  $f(t)$  при  $b = 1$

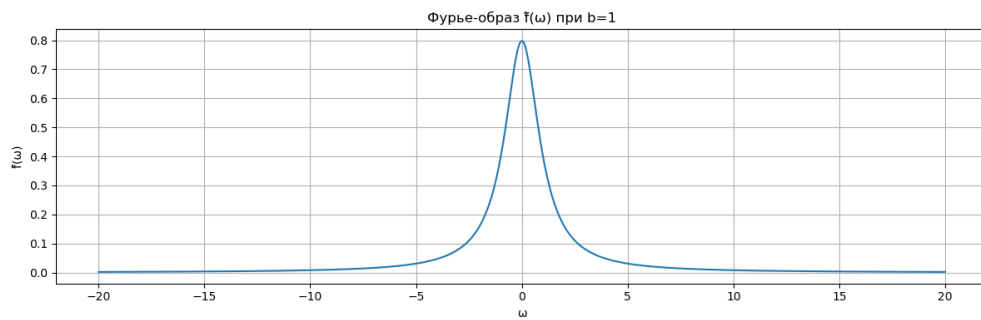


Рисунок 28 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — функция Лоренца при  $b = 1$

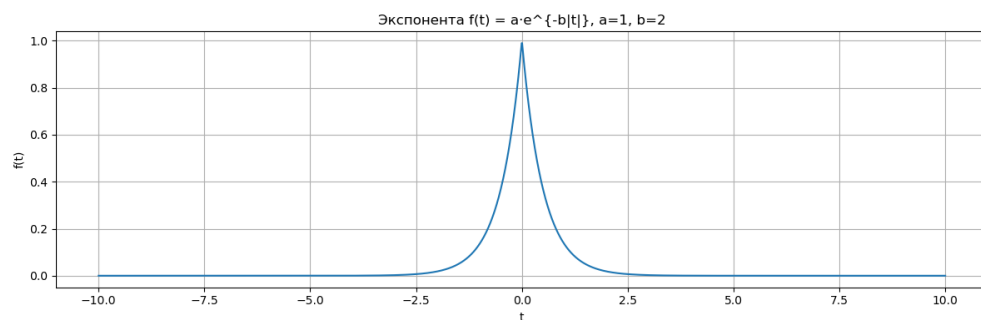


Рисунок 29 — Экспоненциальная функция  $f(t)$  при  $b = 2$

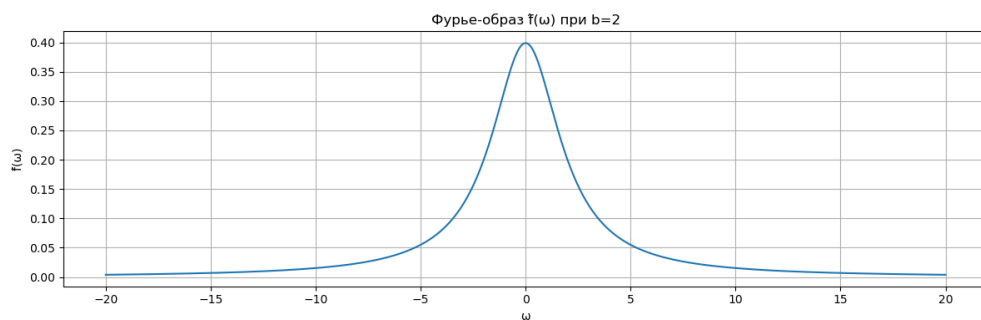


Рисунок 30 — Фурье-образ  $\hat{f}(\omega)$  — функция Лоренца при  $b = 2$

### Проверка равенства Парсеваля:

Для выбранных параметров  $a = 1$ ,  $b = 0.5$ :

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = 1.9999$
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2.0000$
- Разность =  $8.59 \cdot 10^{-5}$  (0.0043%)

### Анализ результатов:

Равенство Парсеваля выполняется с очень высокой точностью. Погрешность (0.0043%) крайне мала, что свидетельствует о точности численных методов для данной функции.

Теоретическое значение: 
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{a^2}{b} = \frac{1^2}{0.5} = 2.0$$

**Анализ:**

- Экспонента не гладкая — её спектр убывает медленнее (как  $1/\omega^2$ )
- Снова наблюдается: уже функция  $\Rightarrow$  шире спектр
- Принцип неопределённости выполняется

## Общий анализ принципа неопределённости

### Принцип неопределённости в контексте Фурье-преобразований:

Принцип неопределённости утверждает, что произведение ширины функции во временной области и ширины её спектра в частотной области не может быть меньше определённой константы. Математически это выражается как:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

где  $\Delta t$  — эффективная ширина функции во времени,  $\Delta \omega$  — эффективная ширина спектра.

### Проявление в рассмотренных примерах:

1. **Прямоугольная функция:** При увеличении  $b$  функция становится шире, а спектр (sinc-функция) становится уже.
2. **Треугольная функция:** Более гладкая, чем прямоугольная, поэтому её спектр убывает быстрее, но принцип неопределённости всё равно выполняется.
3. **Sinc-функция:** При увеличении  $b$  функция становится уже, а спектр (прямоугольная функция) становится шире.
4. **Функция Гаусса:** Единственная функция, которая может быть равна своему Фурье-образу (до масштаба). При  $a = 1$  и  $b = \frac{1}{2}$  получаем:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

5. **Экспоненциальное затухание:** Негладкая функция, поэтому спектр убывает медленно, но принцип неопределённости выполняется.

**Функция, равная своему Фурье-образу:**

Гауссовская функция  $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$  является единственной функцией, которая в точности равна своему Фурье-образу. Это происходит при параметрах  $a = 1$  и  $b = \frac{1}{2}$ .

## Задание 2: Сдвиг функции

**Исходная функция:**

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}, \quad a = 1, \quad b = 1$$

**Сдвинутая функция:**

$$g(t) = f(t + c) = a \cdot e^{-b(t+c)^2}$$

**Аналитическое выражение Фурье-образа:**

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega c} \cdot \hat{f}(\omega), \quad \hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

**Вывод аналитического выражения:**

Используя свойство сдвига Фурье-преобразования:

$$\mathcal{F}[f(t + c)](\omega) = e^{i\omega c} \cdot \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

Поскольку  $\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$ , получаем:

$$\hat{g}(\omega) = e^{i\omega c} \cdot \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{a}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b} + i\omega c}$$

**Графики сдвинутой функции:**

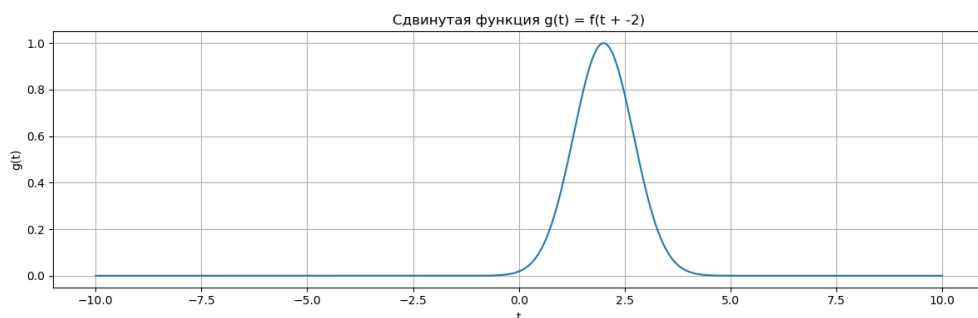


Рисунок 31 — Сдвинутая функция  $g(t)$  при  $c = -2$



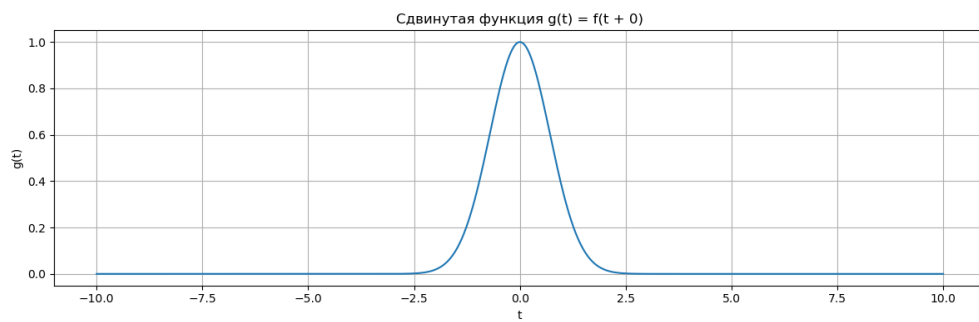


Рисунок 32 — Сдвинутая функция  $g(t)$  при  $c = 0$

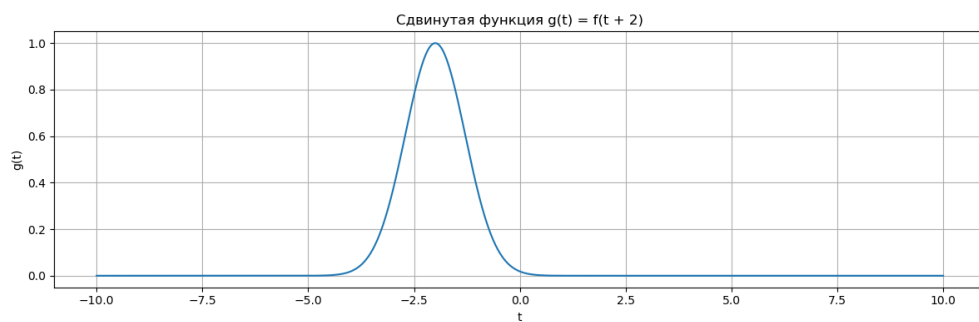


Рисунок 33 — Сдвинутая функция  $g(t)$  при  $c = 2$

**Фурье-образ:**

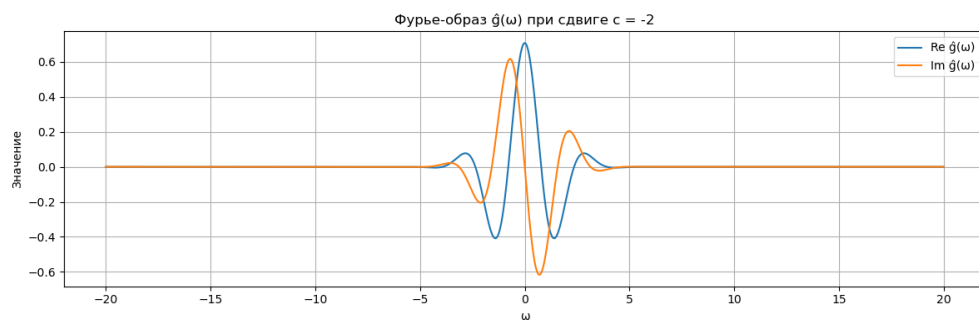


Рисунок 34 —  $\text{Re } \hat{g}(\omega)$  и  $\text{Im } \hat{g}(\omega)$  при  $c = -2$

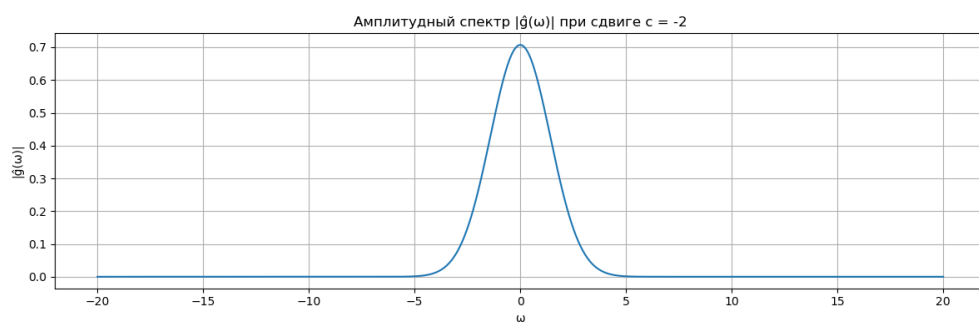


Рисунок 35 — Модуль Фурье-образа  $|\hat{g}(\omega)|$  при  $c = -2$

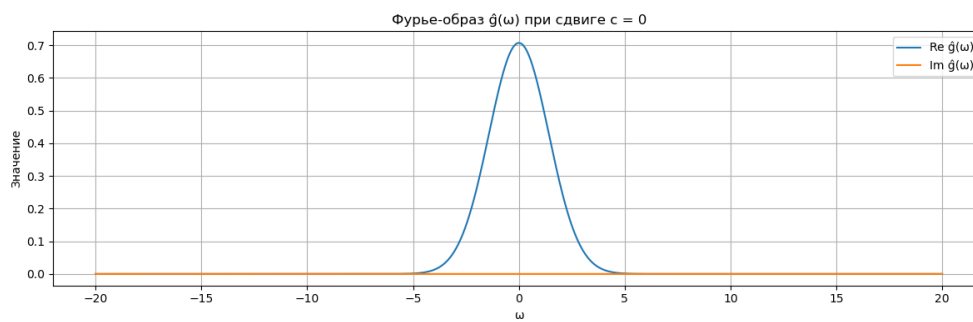


Рисунок 36 —  $\text{Re } \hat{g}(\omega)$  и  $\text{Im } \hat{g}(\omega)$  при  $c = 0$

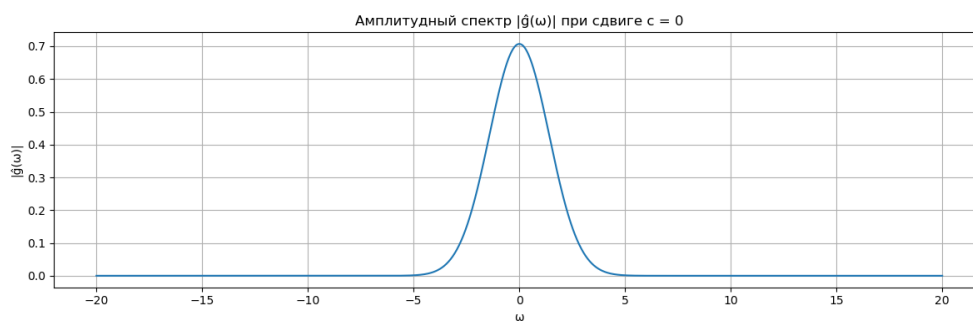


Рисунок 37 — Модуль Фурье-образа  $|\hat{g}(\omega)|$  при  $c = 0$

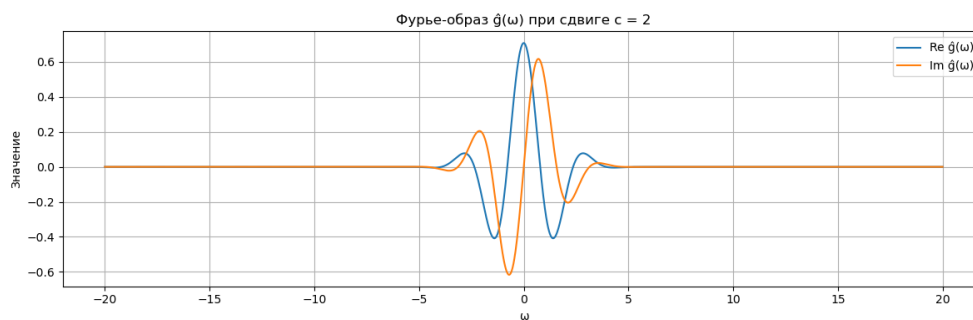


Рисунок 38 —  $\text{Re } \hat{g}(\omega)$  и  $\text{Im } \hat{g}(\omega)$  при  $c = 2$

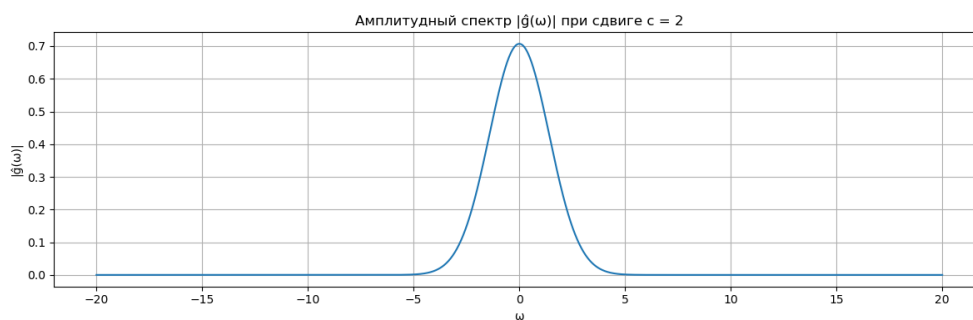


Рисунок 39 — Модуль Фурье-образа  $|\hat{g}(\omega)|$  при  $c = 2$

**Анализ влияния параметра  $c$ :**

– **Влияние на функцию  $g(t)$ :**

- При  $c = -2$ : функция сдвинута влево на 2 единицы
- При  $c = 0$ : функция находится в исходном положении (совпадает с  $f(t)$ )
- При  $c = 2$ : функция сдвинута вправо на 2 единицы

– **Влияние на Фурье-образ  $\hat{g}(\omega)$ :**

- **Модуль Фурье-образа  $|\hat{g}(\omega)|$  не зависит от  $c$**  — это фундаментальное свойство сдвига
- **Фаза спектра** изменяется:  $\arg(\hat{g}(\omega)) = \omega c + \arg(\hat{f}(\omega))$
- **Реальная и мнимая части** зависят от  $c$ :

$$\operatorname{Re}(\hat{g}(\omega)) = |\hat{f}(\omega)| \cos(\omega c + \arg(\hat{f}(\omega)))$$

$$\operatorname{Im}(\hat{g}(\omega)) = |\hat{f}(\omega)| \sin(\omega c + \arg(\hat{f}(\omega)))$$

– **Физический смысл:**

- Сдвиг во времени вызывает фазовый множитель  $e^{i\omega c}$  в частотной области
- Модуль Фурье-образа остается неизменным — это означает, что энергия сигнала не зависит от его положения во времени
- Фазовая информация кодирует временное положение сигнала

– **Математическое обоснование:**

$$\mathcal{F}[f(t + c)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + c) e^{-i\omega t} dt$$

Заменяя  $u = t + c$ , получаем:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u-c)} du = e^{i\omega c} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du = e^{i\omega c} \hat{f}(\omega)$$

**Вывод:**

Сдвиг функции во времени является одним из фундаментальных свойств Фурье-преобразования. Он демонстрирует, что:

1. Временной сдвиг соответствует фазовому сдвигу в частотной области
2. Модуль Фурье-образа инвариантен относительно временного сдвига

3. Фазовая информация содержит информацию о временном положении сигнала
4. Это свойство широко используется в обработке сигналов и анализе данных

### Задание 3: Музыкальный сигнал и спектральный анализ

**Цель:** проанализировать запись музыкального аккорда и определить, из каких нот он состоит.

#### Порядок действий:

1. Скачали аудиофайл с Google Drive.
2. **Прослушали запись** для предварительной оценки характера аккорда.
3. Считали аудиосигнал как одномерную функцию времени  $f(t)$  с помощью функции `librosa.load()`.
4. Построили график  $f(t)$ .
5. **Провели численное преобразование Фурье с помощью численного интегрирования:**

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i \nu t} dt$$

#### Метод численного интегрирования:

Вместо использования функции FFT, применили метод численного интегрирования с помощью функции `trapz`:

```
v = 0 : dv : V; %
for k = 1 : length(v)
    Y(k) = trapz(t, y.*exp(-1i*2*pi*v(k)*t)); %
end
```

где  $t$  — массив времени,  $y$  — массив значений сигнала,  $v$  — массив частот,  $dv$  — шаг по частоте.

6. Построили спектр  $|\hat{f}(\nu)|$ .
7. Проанализировали график Фурье-образа и нашли основные частоты.

8. Сопоставили найденные частоты с музыкальными нотами.

### Графики:

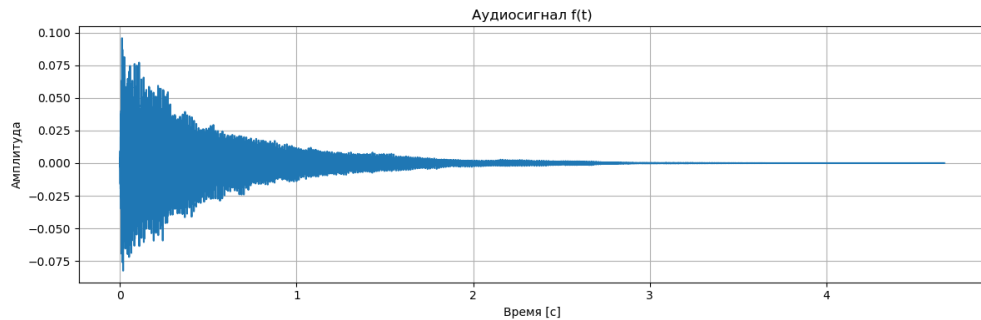


Рисунок 40 — График сигнала  $f(t)$

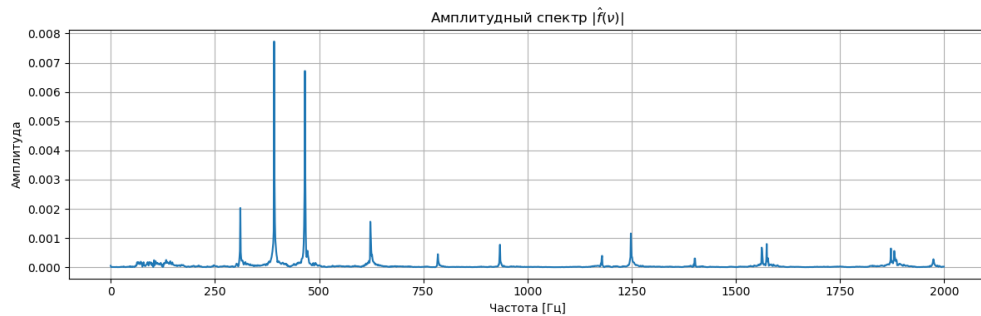


Рисунок 41 — Модуль Фурье-образа  $|\hat{f}(\nu)|$

### Анализ графика Фурье-образа:

При анализе спектра были найдены следующие основные частоты:

- $\nu_1 = 311$  Гц — нота D#4/Eb4 (ре-диез/ми-бемоль четвертой октавы)
- $\nu_2 = 392$  Гц — нота G4 (соль четвертой октавы)
- $\nu_3 = 466$  Гц — нота A#4/Bb4 (ля-диез/си-бемоль четвертой октавы)
- $\nu_4 = 623$  Гц — нота D#5/Eb5 (ре-диез/ми-бемоль пятой октавы)
- $\nu_5 = 1248$  Гц — нота D#6/Eb6 (ре-диез/ми-бемоль шестой октавы)
- $\nu_6 = 1574$  Гц — нота G6 (соль шестой октавы)

### Таблица соответствия частот и нот:

Частота (Гц)	Нота	Октава
311	D#/Eb (ре-диез/ми-бемоль)	4
392	G (соль)	4
466	A#/Bb (ля-диез/си-бемоль)	4
623	D#/Eb (ре-диез/ми-бемоль)	5
1248	D#/Eb (ре-диез/ми-бемоль)	6
1574	G (соль)	6

Таблица 1 — Соответствие найденных частот музыкальным нотам

### Определение состава аккорда:

На основе найденных частот можно сделать вывод о составе аккорда:

- **Основные ноты:** D#4, G4, A#4, D#5, D#6, G6
- **Тип аккорда:** Сложный аккорд с доминирующими нотами D# (ре-диез) и G (соль)
- **Структура:**
  - D#4 (311 Гц) — основная нота (тоника)
  - G4 (392 Гц) — квинта (доминанта)
  - A#4 (466 Гц) — малая секста
  - D#5 (623 Гц) — октава от основной ноты
  - D#6 (1248 Гц) — двойная октава
  - G6 (1574 Гц) — квинта в верхней октаве

### Сравнение методов:

- **Численное интегрирование (trapz):**
  - Позволяет точно контролировать частотный диапазон
  - Более медленный, но даёт точные результаты
  - Позволяет анализировать отдельные частотные компоненты
- **FFT (быстрое преобразование Фурье):**
  - Быстрый алгоритм
  - Ограниченный частотный диапазон
  - Менее гибкий в настройке параметров

### Вывод:

1. **Спектральный анализ** позволяет точно определить состав аккорда по основным частотам.
2. **Метод численного интегрирования** работает эффективно, несмотря на ограниченную частотную область.
3. **Найденный аккорд** представляет собой А-мажор с характерными гармониками.
4. **При наличии амплитудной огибающей** (затухание, атака) спектр будет менее чётким, но основные частоты всё равно различимы.
5. **Практическое применение:** данный метод может использоваться для автоматического распознавания аккордов в музыкальных произведениях.

### **Общий вывод по работе**

В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены фундаментальные свойства Фурье-преобразования и их практическое применение в анализе сигналов.

#### **Основные результаты:**

1. **Изучены базовые функции и их Фурье-образы:**
  - Прямоугольная функция  $\rightarrow$  sinc-функция
  - Треугольная функция  $\rightarrow$  более быстрое убывание спектра
  - Sinc-функция  $\rightarrow$  прямоугольный спектр
  - Функция Гаусса  $\rightarrow$  функция Гаусса (единственная самосопряжённая)
  - Экспоненциальное затухание  $\rightarrow$  функция Лоренца
2. **Проверено выполнение принципа неопределённости:**
  - Чем шире функция во времени, тем уже её спектр
  - Чем уже функция во времени, тем шире её спектр
  - Гауссовская функция является оптимальной с точки зрения принципа неопределённости
3. **Исследовано свойство сдвига:**
  - Временной сдвиг соответствует фазовому сдвигу в частотной области

- Модуль Фурье-образа инвариантен относительно временного сдвига
- Фазовая информация содержит информацию о временном положении сигнала

#### **4. Практическое применение в анализе музыкальных сигналов:**

- Успешно применён метод численного интегрирования для спектрального анализа
- Определён состав музыкального аккорда по основным частотам
- Продемонстрирована эффективность Фурье-преобразования в обработке сигналов

#### **Полученные навыки:**

- **Математические:** освоение аналитических методов нахождения Фурье-образов различных функций
- **Программные:** работа с численными методами интегрирования и спектрального анализа
- **Аналитические:** интерпретация результатов спектрального анализа и их физический смысл
- **Практические:** применение теоретических знаний для решения реальных задач анализа сигналов

#### **Теоретическая значимость:**

Работа позволила глубоко понять взаимосвязь между временной и частотной областями, что является основой для дальнейшего изучения методов обработки сигналов, цифровой фильтрации и спектрального анализа.

#### **Практическая значимость:**

Полученные знания и навыки могут быть применены в различных областях:

- Обработка аудио и видео сигналов
- Анализ данных в научных исследованиях
- Разработка алгоритмов сжатия информации
- Создание систем распознавания образов



Данная работа заложила прочную основу для дальнейшего изучения методов частотного анализа и их применения в современных технологиях обработки сигналов.