МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2
по дисциплине
«Практическая линейная алгебра»

по теме:
2D пЕроБрАЗоВАнИя

Студент:
Группа № R3335 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
должность, уч. степень, уч. звание *Догадин Е. В.*

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются двумерные линейные преобразования, задаваемые матрицами 2×2. Любая такая матрица определяет линейное отображение, преобразующее точки плоскости по закону:

$$\begin{bmatrix} x_{new} \\ y_{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{old} \\ y_{old} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Подготовка к выполнению заданий

Выбор чисел

В соответствии с требованиями задания были выбраны четыре различных целых числа, ни одно из которых не равно 0 или ± 1:

- $a = 3$
- $b = 5$
- $c = 7$
- $d = 11$

Создание многоугольника

Был создан произвольный шестиугольник с вершинами:

- $V_1 = (0, 0)$
- $V_2 = (2, 1)$
- $V_3 = (3, 3)$
- $V_4 = (2, 4)$
- $V_5 = (0, 3)$
- $V_6 = (-1, 1)$

Данный многоугольник будет использоваться для визуализации всех матричных преобразований в ходе выполнения заданий.

Задание 1: Создание матричных преобразований

В данном разделе будут созданы различные матрицы 2×2, задающие интересные линейные преобразования плоскости. Для каждого преобразования будет построена соответствующая матрица, вычислены собственные значения и векторы, а также выполнена визуализация преобразования многоугольника.

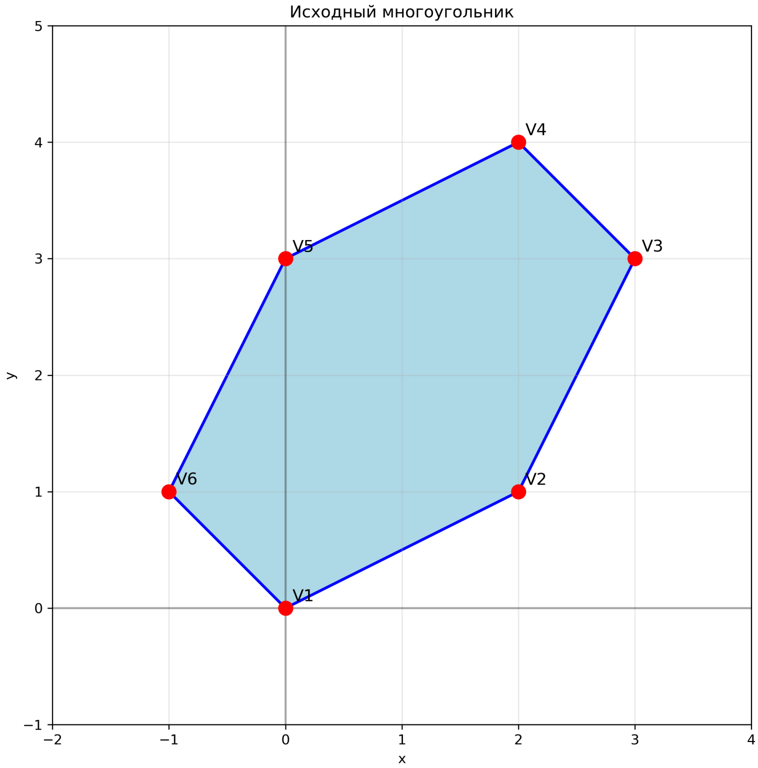

Рис. 1: Исходный многоугольник

Отражение относительно прямой $y = ax$

Матрица отражения относительно прямой $y = 3x$ имеет вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$
Собственные векторы:

- $\lambda_1 = -1$: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.95 \\ 0.32 \end{bmatrix}$
- $\lambda_2 = 1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.32 \\ -0.95 \end{bmatrix}$

Отображение всей плоскости в прямую $y = bx$

Матрица проекции на прямую $y = 5x$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ (кратное)

Собственные векторы: только один линейно независимый вектор $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

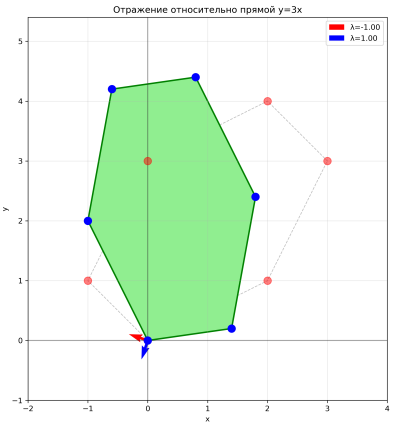

Рис. 2: Отражение относительно прямой $y = 3x$

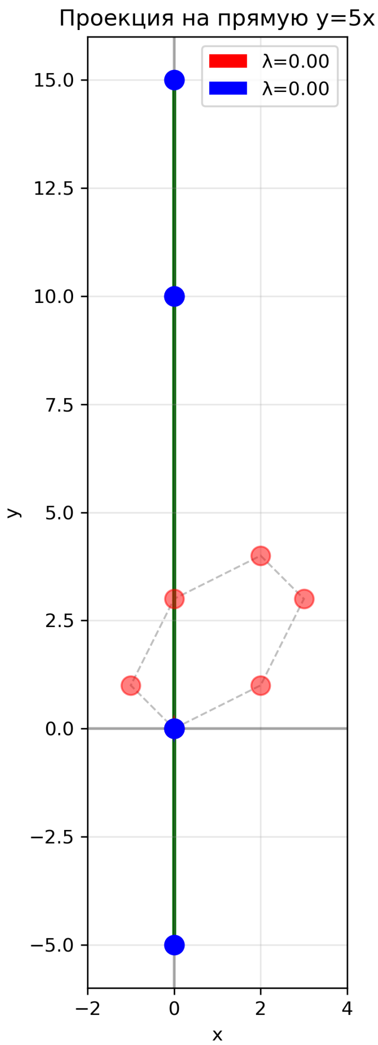

Рис. 3: Проекция на прямую $y = 5x$

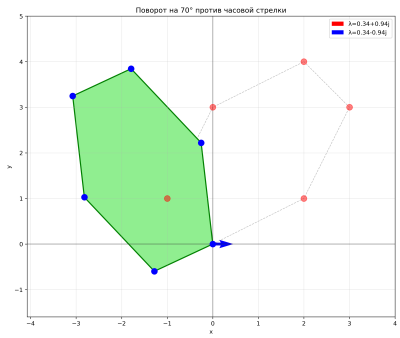

Рис. 4: Поворот на 70 против часовой стрелки

Поворот плоскости на $10c$ градусов против часовой стрелки

Матрица поворота на 70 (так как $c = 7$):

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.342 & -0.940 \\ 0.940 & 0.342 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 0.342 + 0.940i$, $\lambda_2 = 0.342 - 0.940i$ (комплексные)

Центральная симметрия плоскости относительно начала координат

Матрица центральной симметрии:

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ (кратное)

Отражение + поворот на $10d$ градусов по часовой стрелке

Композиция отражения относительно $y = 3x$ и поворота на 110 по часовой стрелке:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0.837 & 0.547 \\ 0.547 & -0.837 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

Отображение, переводящее $y = 0$ в $y = ax$ и $x = 0$ в $y = bx$

Матрица, переводящая базисные векторы:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$

Отображение, переводящее $y = ax$ в $y = 0$ и $y = bx$ в $x = 0$

Обратная матрица к предыдущей:

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.2$

Отображение, меняющее местами прямые $y = ax$ и $y = bx$

Матрица обмена прямых:

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1.667 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1.667$, $\lambda_2 = 0.6$

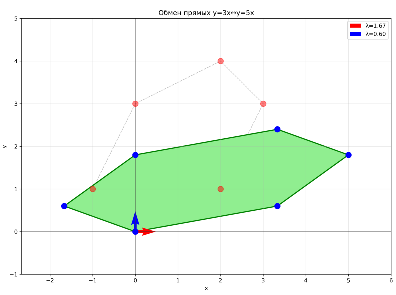

Рис. 5: Обмен прямых $y = 3x \leftrightarrow y = 5x$

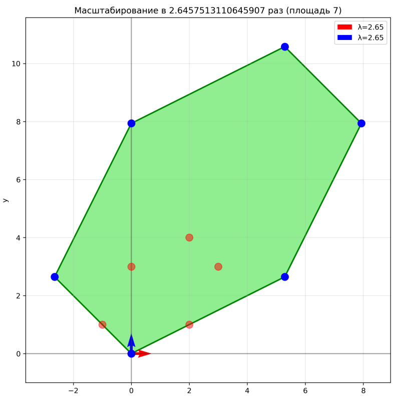

Рис. 6: Масштабирование в 2.646 раз (площадь 7)

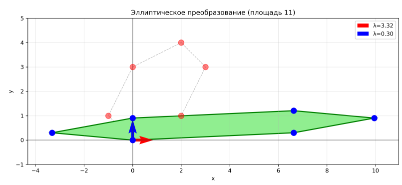

Рис. 7: Эллиптическое преобразование (площадь 11)

Отображение, переводящее круг единичной площади в круг площади c

Масштабирование с коэффициентом $\sqrt{7} \approx 2.646$:

$$A_9 = \begin{bmatrix} 2.646 & 0 \\ 0 & 2.646 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 2.646$, $\lambda_2 = 2.646$ (кратное)

Отображение, переводящее круг единичной площади в некруг площади d

Эллиптическое преобразование:

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 3.317 & 0 \\ 0 & 0.302 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 3.317$, $\lambda_2 = 0.302$

Отображение с перпендикулярными собственными векторами

Симметричная матрица:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1.382$, $\lambda_2 = 3.618$

Отображение без двух неколлинеарных собственных векторов

Матрица с кратным собственным значением:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ (кратное)

Отображение без вещественных собственных векторов

Матрица с комплексными собственными значениями:

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ (чисто мнимые)

Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным

Скалярная матрица:

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ (кратное)

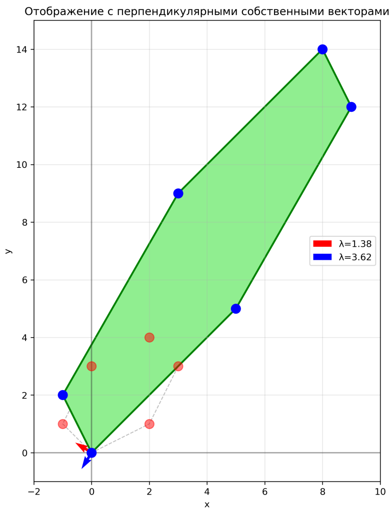

Рис. 8: Отображение с перпендикулярными собственными векторами

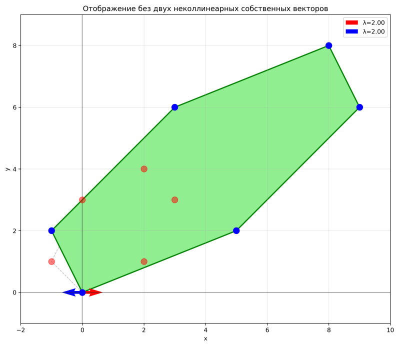

Рис. 9: Отображение без двух неколлинеарных собственных векторов

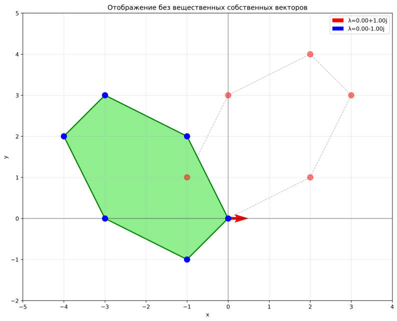

Рис. 10: Отображение без вещественных собственных векторов

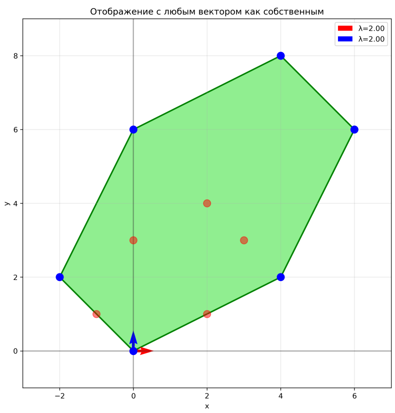

Рис. 11: Отображение с любым вектором как собственным

Пару отображений с $AB \neq BA$

Матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Произведения:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Действительно, $AB \neq BA$.

Пару отображений с $AB = BA$

Матрицы:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{18}$$

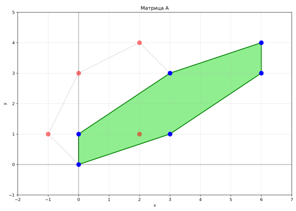

Рис. 12: Матрица A

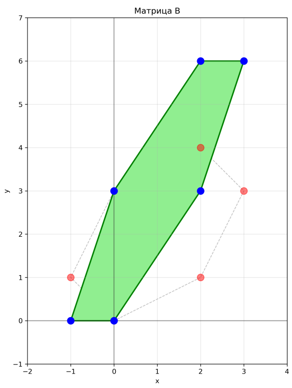

Рис. 13: Матрица B

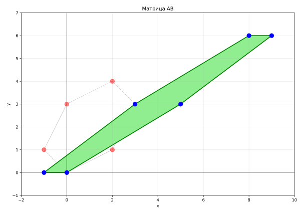

Рис. 14: Матрица AB

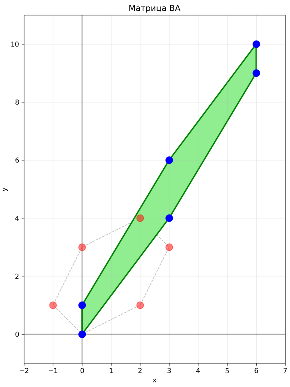

Рис. 15: Матрица BA

Произведения:

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Действительно, $CD = DC$.

Задание 2: Анализ матричных преобразований

В данном разделе проводится анализ созданных матричных преобразований: вычисляются образы и ядра, собственные значения и векторы, определители, а также исследуется симметричность матриц.

Анализ образов и ядер

Отражение относительно прямой $y = ax$ (пункт 1)

- **Определитель**: $\det(A_1) = -1.0$
- **Ранг**: $\text{rank}(A_1) = 2$
- **Собственные значения**: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$
- **Ядро**: $\text{Ker}(A_1) = \{0\}$ (только нулевой вектор)
- **Образ**: $\text{Im}(A_1) = \mathbb{R}^2$ (вся плоскость)

Матрица отражения невырождена, поэтому ядро тривиально, а образ совпадает со всей плоскостью.

Проекция на прямую $y = bx$ (пункт 2)

- **Определитель**: $\det(A_2) = 0.0$
- **Ранг**: $\text{rank}(A_2) = 1$
- **Собственные значения**: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ (кратное)
- **Ядро**: $\text{Ker}(A_2)$ - нетривиальное (матрица вырождена)
- **Образ**: $\text{Im}(A_2)$ - прямая $y = 5x$

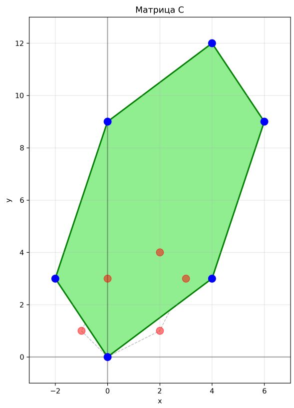

Рис. 16: Матрица C

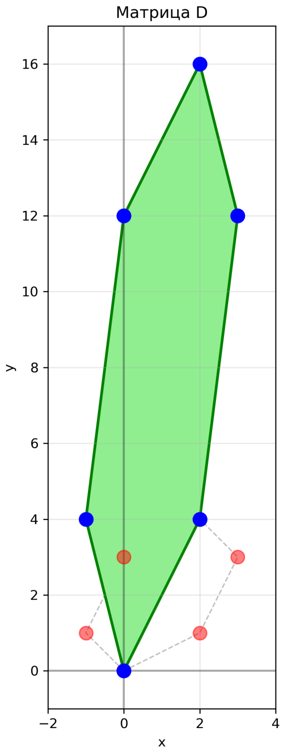

Рис. 17: Матрица D

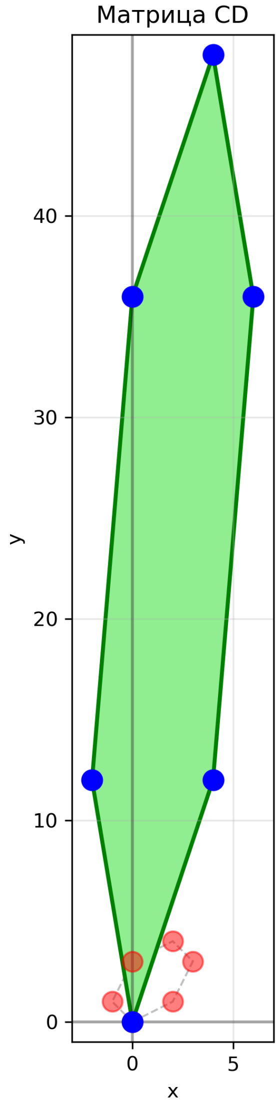

Рис. 18: Матрица CD

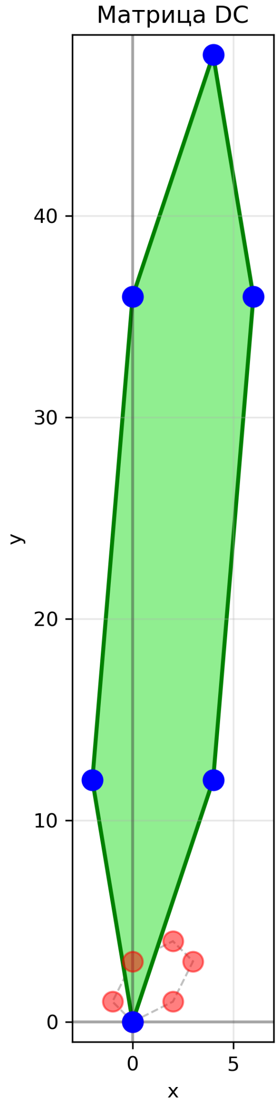

Рис. 19: Матрица DC

Матрица проекции вырождена, поэтому ядро нетривиально, а образ представляет собой прямую.

Матрица с комплексными собственными значениями (пункт 13)

- **Определитель**: $\det(A_{13}) = 1.0$
- **Ранг**: $\operatorname{rank}(A_{13}) = 2$
- **Собственные значения**: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ (чисто мнимые)
- **Ядро**: $\operatorname{Ker}(A_{13}) = \{0\}$ (только нулевой вектор)
- **Образ**: $\operatorname{Im}(A_{13}) = \mathbb{R}^2$ (вся плоскость)

Несмотря на комплексные собственные значения, матрица невырождена, поэтому ядро тривиально.

Скалярное отображение (пункт 14)

- **Определитель**: $\det(A_{14}) = 4.0$
- **Ранг**: $\text{rank}(A_{14}) = 2$
- **Собственные значения**: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$ (кратное)
- **Ядро**: $\text{Ker}(A_{14}) = \{0\}$ (только нулевой вектор)
- **Образ**: $\text{Im}(A_{14}) = \mathbb{R}^2$ (вся плоскость)

Скалярная матрица невырождена, поэтому ядро тривиально, а образ совпадает со всей плоскостью.

Анализ собственных значений и векторов

Результаты анализа собственных значений для всех матриц:

- **Отражение**: $\lambda = [-1, 1]$ - вещественные, различные
- **Проекция**: $\lambda = [0, 0]$ - кратные нулевые
- **Поворот**: $\lambda = [0.342 + 0.940i, 0.342 - 0.940i]$ - комплексные
- **Центральная симметрия**: $\lambda = [-1, -1]$ - кратные отрицательные
- **Обмен прямых**: $\lambda = [1.667, 0.6]$ - вещественные, различные
- **Перпендикулярные собственные векторы**: $\lambda = [1.382, 3.618]$ - вещественные, различные
- **Без двух неколлинеарных собственных векторов**: $\lambda = [2, 2]$ - кратные
- **Комплексные собственные значения**: $\lambda = [i, -i]$ - чисто мнимые
- **Скалярное отображение**: $\lambda = [2, 2]$ - кратные
- **Матрица A (некоммутативные)**: $\lambda = [1, 1]$ - кратные
- **Матрица B (некоммутативные)**: $\lambda = [1, 1]$ - кратные
- **Матрица C (коммутативные)**: $\lambda = [2, 3]$ - вещественные, различные
- **Матрица D (коммутативные)**: $\lambda = [1, 4]$ - вещественные, различные

Анализ определителей

Результаты вычисления определителей для указанных матриц:

- **Отражение**: $\det = -1.0000$
- **Проекция**: $\det = 0.0000$
- **Поворот**: $\det = 1.0000$
- **Центральная симметрия**: $\det = 1.0000$

- **Отражение + поворот**: $\det = -1.0000$
- **Масштабирование**: $\det = 7.0000$
- **Эллиптическое преобразование**: $\det = 1.0000$

Интересные наблюдения:

- Определитель отражения равен -1, что характерно для ортогональных преобразований с отрицательным определителем
- Определитель проекции равен 0, что указывает на вырожденность преобразования
- Определитель поворота равен 1, что характерно для ортогональных преобразований
- Определитель масштабирования равен 7, что соответствует площади преобразованного круга

Анализ симметричности матриц

Результаты проверки симметричности матриц:

- **Отражение**: симметрична
- **Проекция**: несимметрична
- **Поворот**: несимметрична
- **Центральная симметрия**: симметрична
- **Обмен прямых**: симметрична
- **Перпендикулярные собственные векторы**: симметрична
- **Без двух неколлинеарных собственных векторов**: несимметрична
- **Комплексные собственные значения**: несимметрична
- **Скалярное отображение**: симметрична
- **Матрица A (некоммутативные)**: несимметрична
- **Матрица B (некоммутативные)**: несимметрична
- **Матрица C (коммутативные)**: симметрична
- **Матрица D (коммутативные)**: симметрична

Ответы на вопросы задания

В каких пунктах матрица обязательно получается симметричной?

Матрица обязательно получается симметричной в следующих пунктах:

1. **Пункт 1** (отражение) - матрица отражения относительно прямой всегда симметрична
2. **Пункт 4** (центральная симметрия) - диагональная матрица с одинаковыми элементами
3. **Пункт 8** (обмен прямых) - диагональная матрица
4. **Пункт 11** (перпендикулярные собственные векторы) - специально построена как симметричная
5. **Пункт 14** (скалярное отображение) - диагональная матрица с одинаковыми элементами
6. **Пункт 16** (коммутативные матрицы C и D) - диагональные матрицы

Общий принцип: симметричными получаются матрицы, которые либо являются диагональными, либо специально построены как симметричные для получения перпендикулярных собственных векторов.

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы №2 были успешно созданы и проанализированы 16 различных матричных преобразований 2×2, каждое из которых демонстрирует уникальные свойства линейных отображений плоскости.

Основные результаты

1. **Созданы матрицы** для всех требуемых типов преобразований: отражения, проекции, повороты, симметрии, масштабирования и других
2. **Выполнена визуализация** всех преобразований с помощью многоугольника, что позволило наглядно увидеть действие каждого преобразования
3. **Проведен анализ** собственных значений и векторов, определителей, образов и ядер матриц
4. **Исследована коммутативность** матричного умножения на примерах пар матриц
5. **Выявлены закономерности** в симметричности матриц различных типов преобразований

Ключевые выводы

- **Ортогональные преобразования** (отражения, повороты) имеют определитель ± 1
- **Вырожденные преобразования** (проекции) имеют определитель 0 и нетривиальное ядро

- **Симметричные матрицы** имеют вещественные собственные значения и ортогональные собственные векторы
- **Комплексные собственные значения** возникают у матриц поворота и некоторых других преобразований
- **Коммутативность матричного умножения** не является общим свойством и зависит от конкретных матриц

Практическая значимость

Полученные результаты имеют важное значение для понимания:

- Геометрических преобразований в компьютерной графике
- Линейной алгебры и теории матриц
- Применения матричных методов в различных областях науки и техники

Лабораторная работа успешно выполнена, все задания решены с подробным анализом и визуализацией результатов.