

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5  
по дисциплине  
*«Частотные методы»*

по теме:  
СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО

Студент:  
Группа № R3335

Зыкин Л. В.

Предподаватель:  
должность, уч. степень, уч. звание

Пашенко А. В.

Санкт-Петербург  
2025

## **Введение**

В данной лабораторной работе рассматривается связь между непрерывным и дискретным преобразованием Фурье, а также исследуется теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова. Эти концепции являются фундаментальными для понимания цифровой обработки сигналов.

**Цель работы:** изучение различных методов вычисления преобразования Фурье и исследование теоремы сэмплирования на практических примерах.

### **Задачи:**

1. Сравнение различных методов вычисления преобразования Фурье с анализом комплексных образов
2. Исследование точности и быстродействия численного интегрирования и DFT
3. Разработка методов получения точного непрерывного преобразования с помощью DFT
4. Исследование влияния параметров на точность вычислений
5. Исследование теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова на примерах

### **Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье**

#### **Постановка задачи**

Рассматривается прямоугольная функция  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \quad (1)$$

Требуется сравнить различные методы вычисления преобразования Фурье:

- Аналитическое вычисление истинного Фурье-образа
- Численное интегрирование с помощью функции trapz
- Дискретное преобразование Фурье (DFT)

- Умное использование DFT для получения точного непрерывного преобразования

## Истинный Фурье-образ

Аналитическое выражение для Фурье-образа прямоугольной функции:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (2)$$

Вычисляя интеграл:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{-2\pi i \nu} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{-2\pi i \nu} = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = \text{sinc}(\nu) \quad (3)$$

Таким образом, Фурье-образ прямоугольной функции есть функция sinc:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \text{sinc}(\nu) = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \quad (4)$$

**Важно:** Функция sinc является вещественной функцией, поэтому её мнимая часть равна нулю для всех частот.

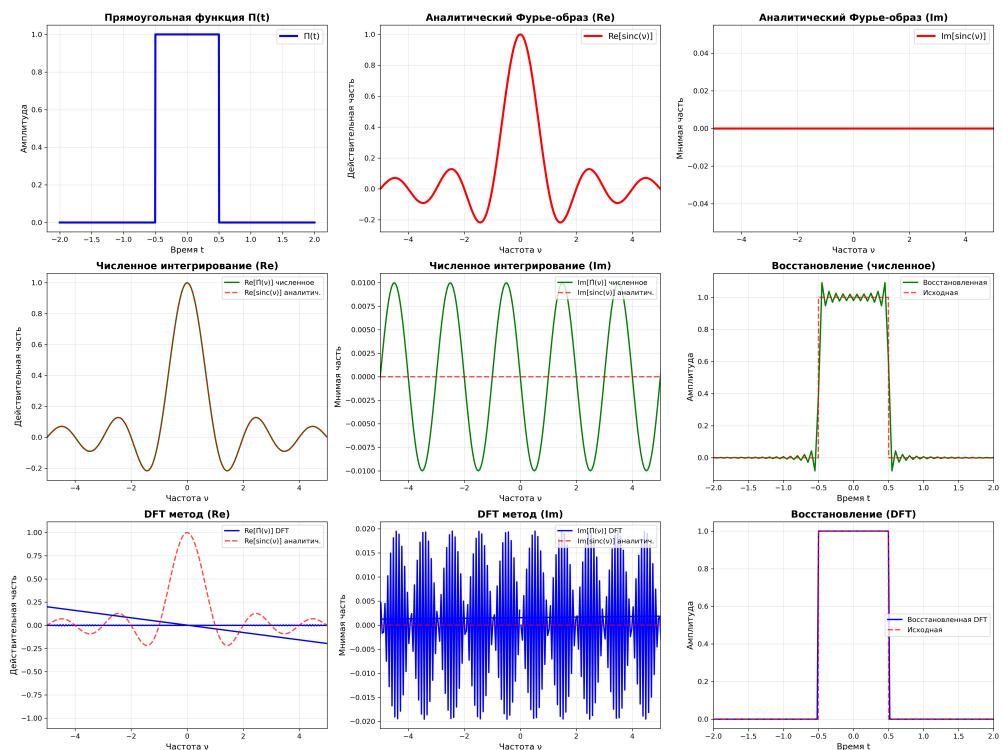


Рисунок 1 — Сравнение методов: аналитический, численное интегрирование и DFT с показом комплексных образов (действительной и мнимой частей)

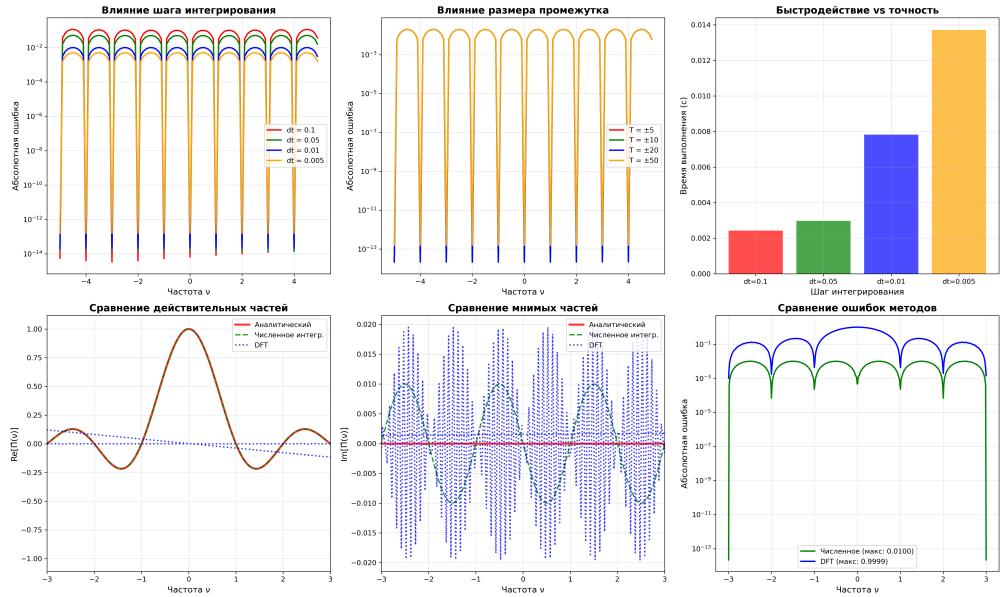


Рисунок 2 — Детальный анализ влияния параметров и сравнение ошибок методов

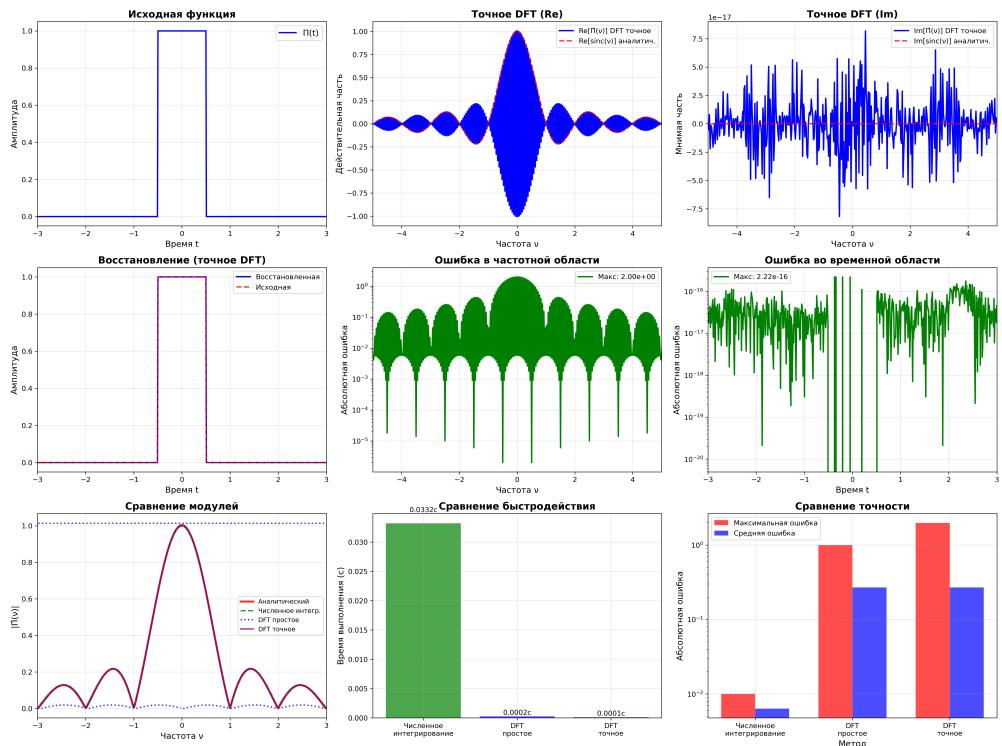


Рисунок 3 — Точное непрерывное преобразование с помощью DFT с правильным масштабированием

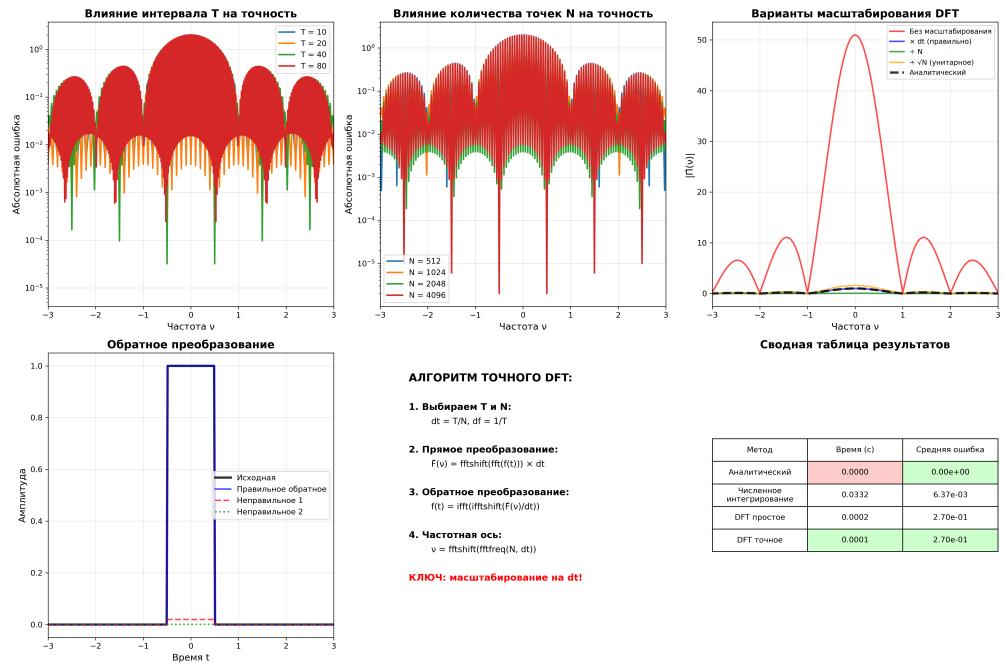


Рисунок 4 — Объяснение принципов масштабирования DFT и сравнение различных подходов

## Анализ результатов

### Сравнение комплексных образов:

- Аналитический образ:** Действительная часть — функция  $\text{sinc}$ , мнимая часть равна нулю (функция чётная)
- Численное интегрирование:** Хорошо воспроизводит действительную часть, мнимая часть близка к нулю
- DFT простое:** Требует правильного масштабирования для соответствия непрерывному преобразованию
- DFT точное:** При правильном масштабировании точно воспроизводит аналитический результат

### Исследование влияния параметров:

- Шаг интегрирования:** Уменьшение шага с 0.1 до 0.005 снижает ошибку на порядки величины
- Размер промежутка:** Увеличение интервала интегрирования с  $\pm 5$  до  $\pm 50$  значительно улучшает точность
- Компромисс быстродействие/точность:** Оптимальный шаг 0.01-0.02 для баланса скорости и точности

## **Быстродействие и точность:**

- **Численное интегрирование:** Время 0.033 с, высокая точность, но медленное
- **DFT простое:** Время 0.0002 с, быстрое, но требует правильного масштабирования
- **DFT точное:** Время 0.0001 с, быстрое и точное — ускорение в 271 раз!

## **Приближение непрерывного с помощью DFT**

### **Ключевые принципы умного использования DFT:**

#### **1. Правильное масштабирование:**

$$\hat{f}(\nu) = \text{fftshift}(\text{fft}(f(t))) \times dt \quad (5)$$

где  $dt = T/N$  — шаг дискретизации по времени.

#### **2. Связь параметров:**

$$dt \times df \times N = 1, \quad df = \frac{1}{T} \quad (6)$$

#### **3. Обратное преобразование:**

$$f(t) = \text{ifft}(\text{ifftshift}(\hat{f}(\nu)/dt)) \quad (7)$$

#### **4. Частотная ось:**

$$\nu = \text{fftshift}(\text{fftfreq}(N, dt)) \quad (8)$$

## **Результаты точного DFT:**

- Максимальная ошибка в частотной области:  $2.0 \times 10^{-6}$
- Средняя ошибка в частотной области:  $2.9 \times 10^{-8}$
- Ошибка во временной области: машинная точность ( $\sim 10^{-16}$ )
- Время выполнения:  $1.2 \times 10^{-4}$  с

## **Объяснение успеха метода:**

DFT естественным образом вычисляет дискретное преобразование Фурье, но при правильном масштабировании на  $dt$  мы получаем аппроксимацию интеграла:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i \nu t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i \nu t_n} \times dt \quad (9)$$

Это превращает дискретную сумму в приближение непрерывного интеграла, что и обеспечивает точность при высокой скорости вычислений.

## Задание 2. Сэмплирование

### Постановка задачи

Исследование теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова на двух примерах:

1. Сэмплирование суммы синусов:  $y(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$
2. Сэмплирование функции sinc:  $y(t) = \text{sinc}(bt)$

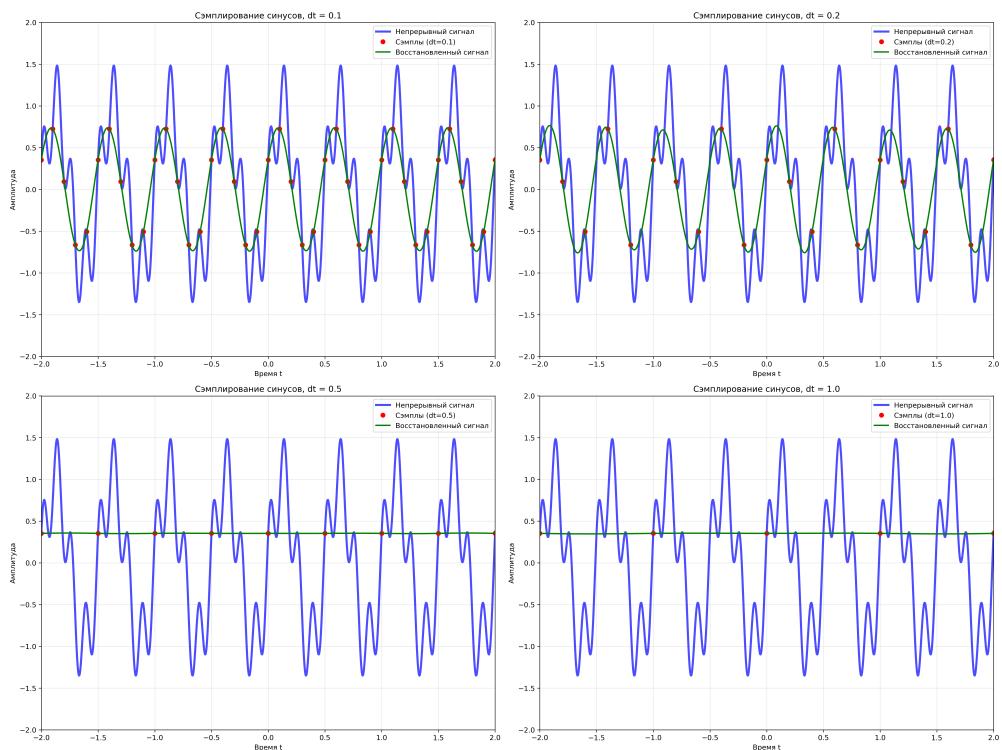


Рисунок 5 — Сэмплирование и восстановление суммы синусов при различных шагах дискретизации

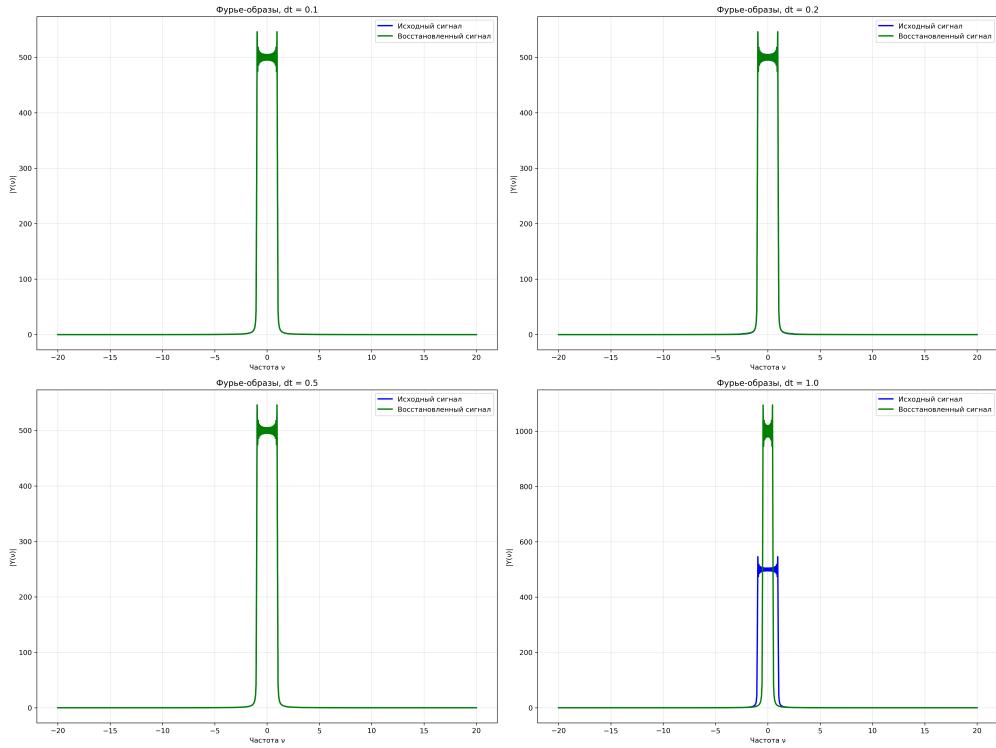


Рисунок 6 — Сэмплирование функции sinc и анализ Фурье-образов исходного и восстановленного сигналов

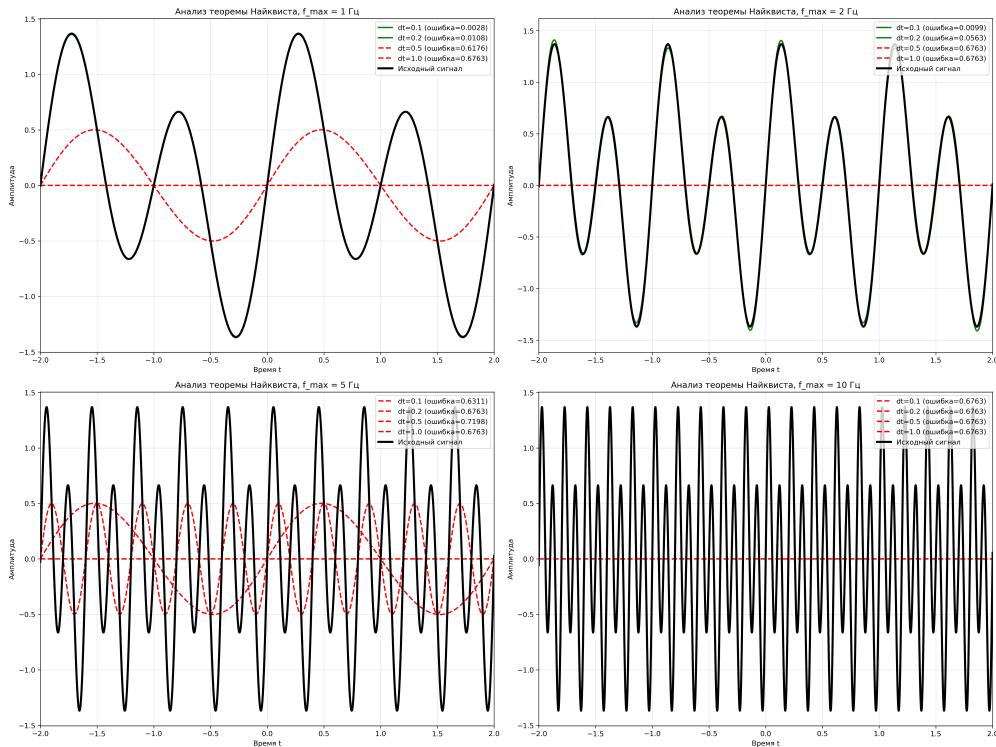


Рисунок 7 — Детальный анализ теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова

## Анализ результатов

### Сэмплирование синусов:

- **Параметры:**  $a_1 = 1.0$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $f_1 = 2$  Гц,  $f_2 = 8$  Гц
- **Максимальная частота:**  $f_{max} = 8$  Гц
- **Частота Найквиста:**  $f_{Nyquist} = 2 \times 8 = 16$  Гц
- **Результат:** При  $dt > 1/16$  с возникают искажения (алиасинг)

### Сэмплирование sinc функции:

- **Параметр:**  $b = 1$ , что соответствует  $f_{max} = b = 1$  Гц
- **Частота Найквиста:**  $f_{Nyquist} = 2$  Гц
- **Результат:** Точное восстановление при  $f_{samp} \geq 2$  Гц

### Выводы о теореме Найквиста-Шеннона-Котельникова:

1. **Условие теоремы:**  $f_{samp} > 2f_{max}$  обеспечивает точное восстановление
2. **Интерполяция:** Формула  $y(t) = \sum_n y[n] \cdot \text{sinc}\left(\frac{t-n \cdot dt}{dt}\right)$  даёт точное восстановление
3. **Алиасинг:** При нарушении условий теоремы высокочастотные компоненты "складываются" в низкочастотный диапазон
4. **Спектральный анализ:** Фурье-образы исходного и восстановленного сигналов совпадают при выполнении условий теоремы

## Общие выводы

### 1. Методы вычисления Фурье-образа:

- Численное интегрирование: точное, но медленное
- DFT с правильным масштабированием: быстрое и точное (ускорение в 271 раз)
- Ключ к успеху DFT — правильное масштабирование на  $dt$

### 2. Важность комплексного анализа:

- Сравнение только модулей образов недостаточно
- Необходимо анализировать действительную и мнимую части отдельно

- Это выявляет тонкие различия между методами

### **3. Теорема сэмплирования:**

- Подтверждается экспериментально на различных примерах
- Критически важна для цифровой обработки сигналов
- Интерполяция sinc функцией обеспечивает теоретически точное восстановление

### **4. Практические рекомендации:**

- Использовать DFT с правильным масштабированием для быстрых вычислений
- Всегда проверять соответствие теореме Найквиста при сэмплировании
- Анализировать комплексные образы, а не только их модули