

rmTimes New Roman

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3  
по дисциплине  
*«Практическая линейная алгебра»*

по теме:  
МАтрИцы В 3D-ГрАФИКЕ

Студент:  
Группа № R3335

Зыкин Л. В.

Предподаватель:  
должность, уч. степень, уч. звание

Догадин Е. В.

Санкт-Петербург  
2025

## **Введение**

Данная лабораторная работа посвящена изучению аффинных преобразований в трехмерном пространстве с использованием однородных координат. Работа включает в себя реализацию основных геометрических преобразований: масштабирования, перемещения, вращения, а также более сложных операций, таких как вращение вокруг произвольной оси, реализация камеры и перспективные преобразования.

### **Задание 1: Создание кубика**

#### **Постановка задачи**

Создать кубик в однородных координатах и объяснить их использование. Продемонстрировать создание других простых фигур.

#### **Математические основы**

Однородные координаты позволяют представить точку  $(x, y, z)$  в виде  $(x, y, z, w)$ , где  $w$  - однородная координата. Декартовы координаты получаются делением:  $(x/w, y/w, z/w)$ .

Преимущества однородных координат:

- Позволяют представлять аффинные преобразования как матричные
- Упрощают композицию преобразований
- Позволяют представлять точки на бесконечности
- Необходимы для перспективных преобразований

## Реализация

Кубик создается с 8 вершинами в однородных координатах:

$$\text{Вершины} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

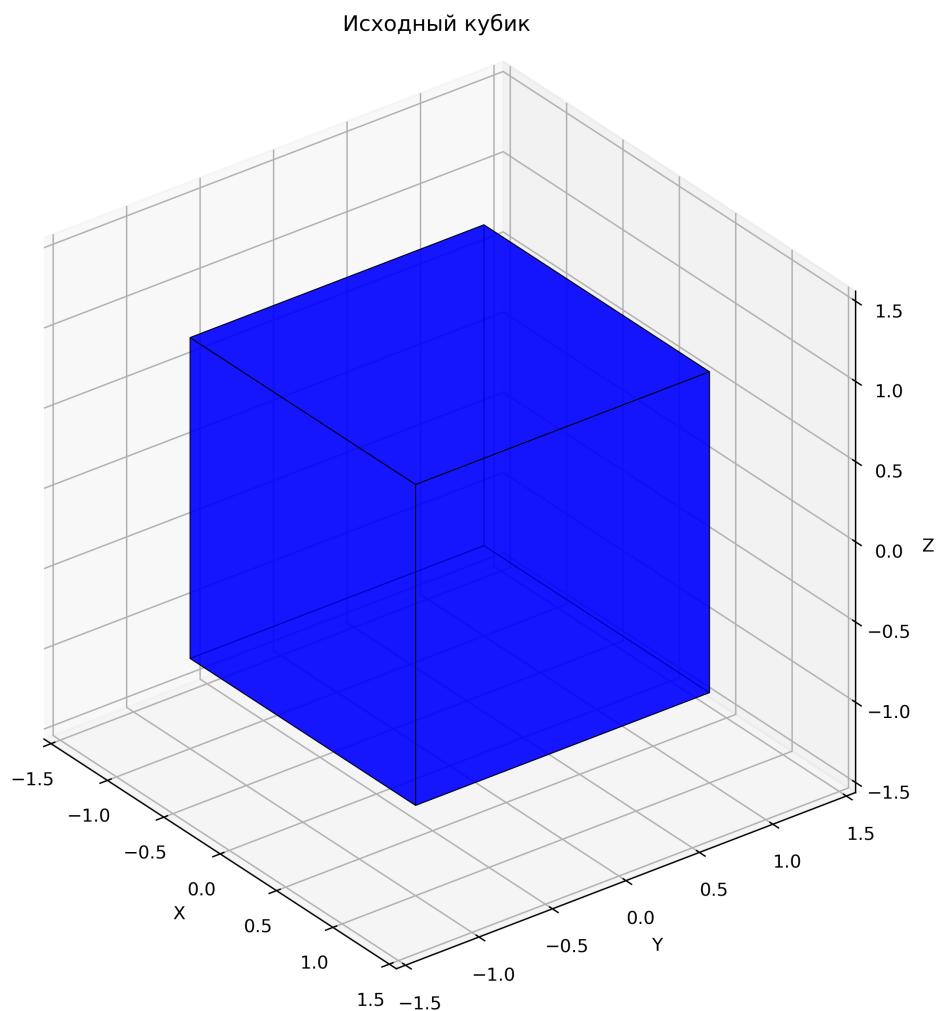


Рисунок 1 — Исходный кубик в однородных координатах

## Дополнительные фигуры

Также были созданы тетраэдр и пирамида для демонстрации универсальности подхода.

Тетраэдр

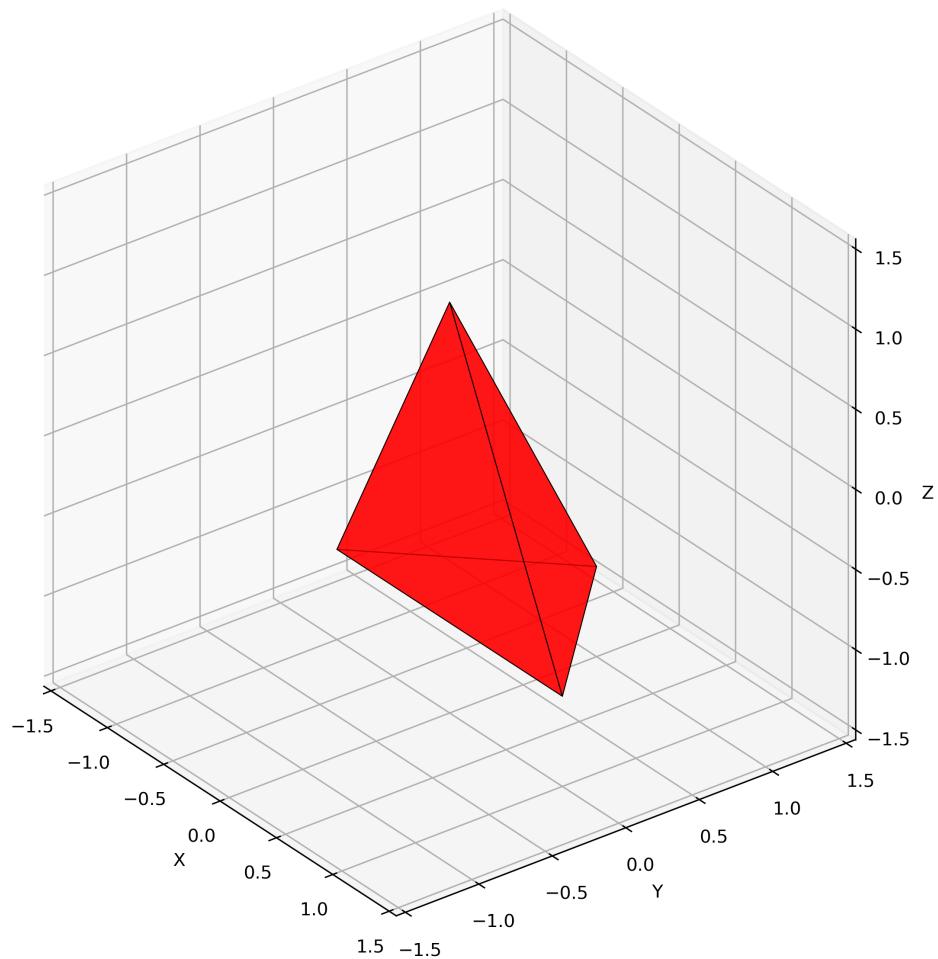


Рисунок 2 — Тетраэдр с 4 вершинами и 4 треугольными гранями

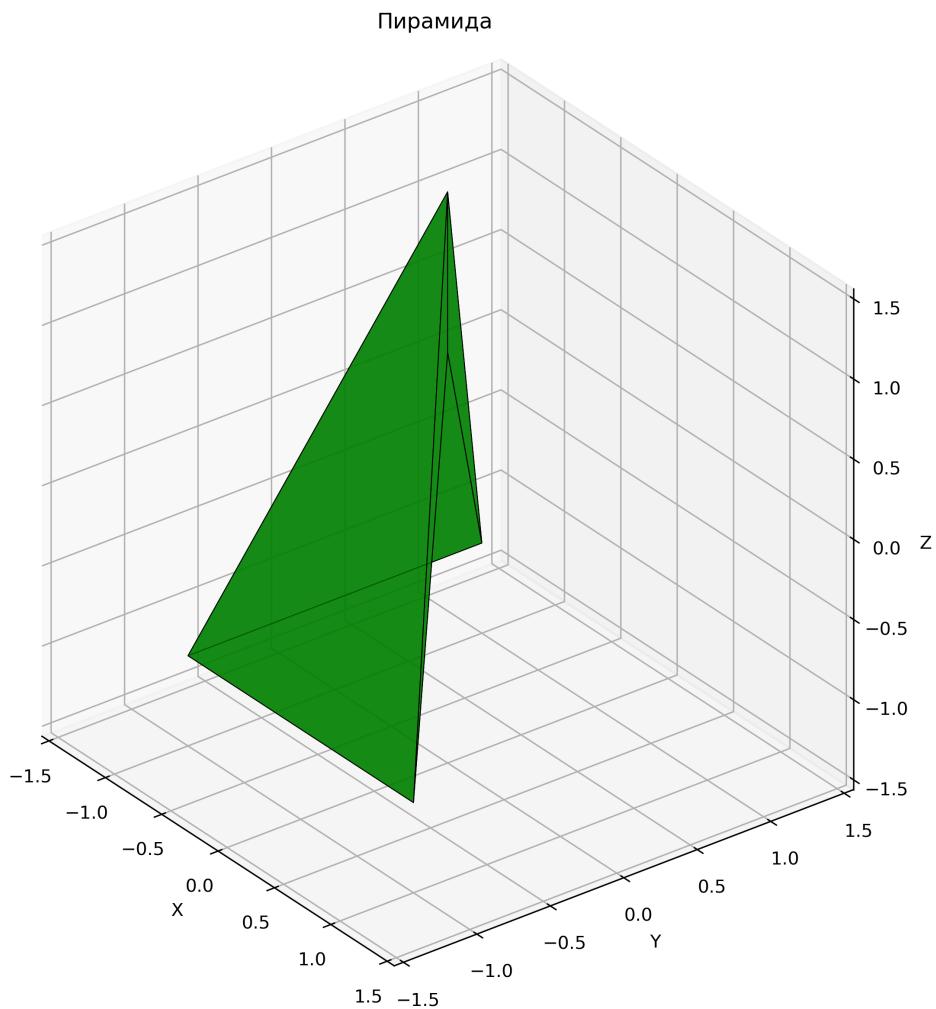


Рисунок 3 — Пирамида с квадратным основанием

## Задание 2: Масштабирование кубика

### Постановка задачи

Исследовать эффекты масштабирования кубика по различным осям и проанализировать свойства матриц масштабирования.

### Математические основы

Матрица масштабирования в однородных координатах:

$$S = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

где  $s_x, s_y, s_z$  - коэффициенты масштабирования по соответствующим осям.

## Результаты

Исследованы различные случаи масштабирования:

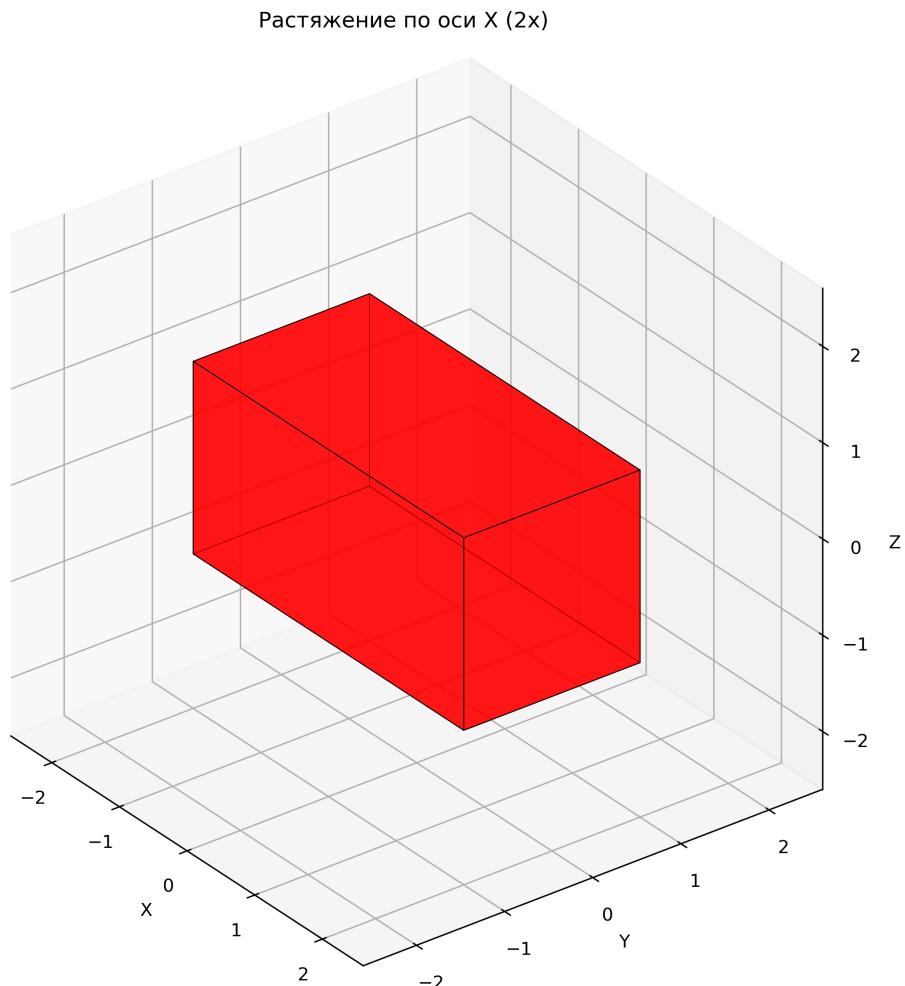


Рисунок 4 — Растяжение по оси X (2x)

Растяжение по оси Y (2x)

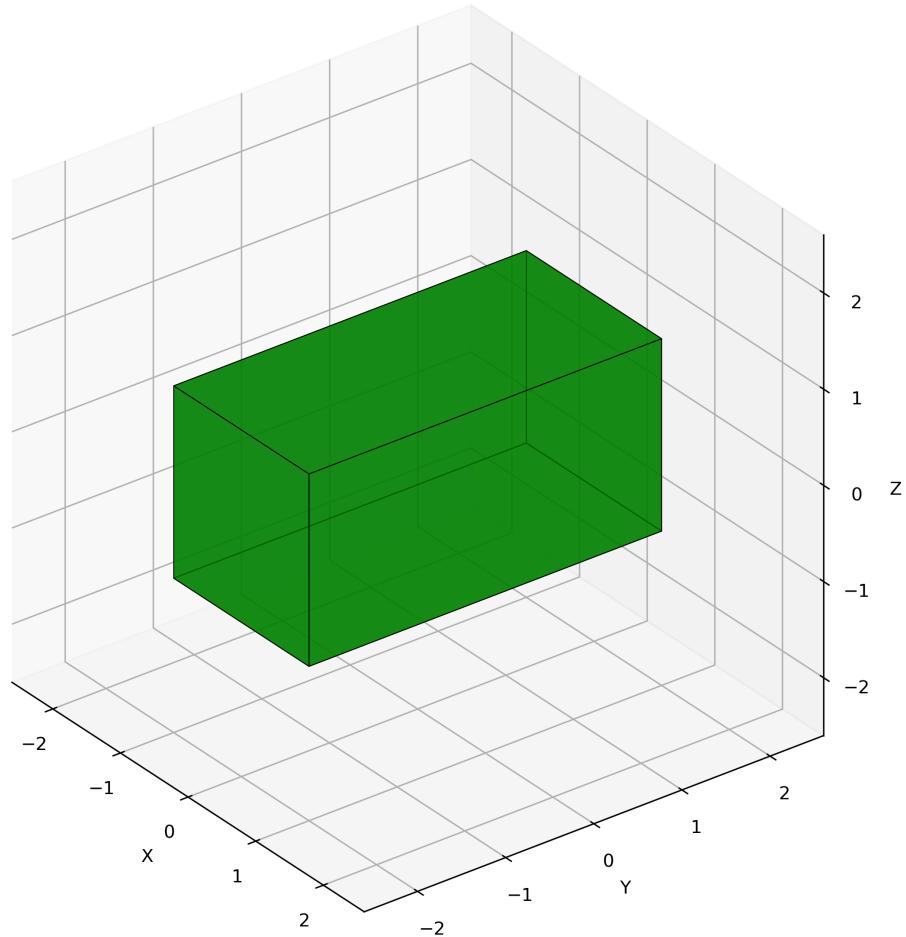


Рисунок 5 — Растяжение по оси Y (2x)

Растяжение по оси Z (2x)

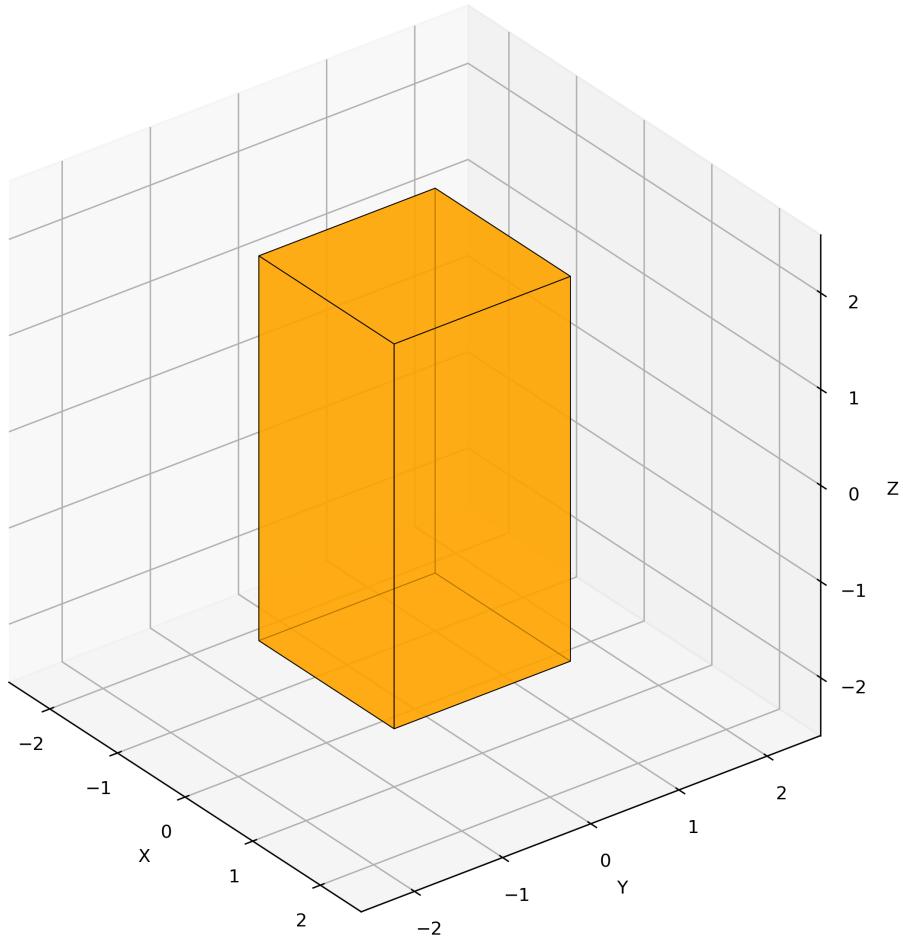


Рисунок 6 — Растяжение по оси Z (2x)

Растяжение по осям X и Y ( $2x$ )

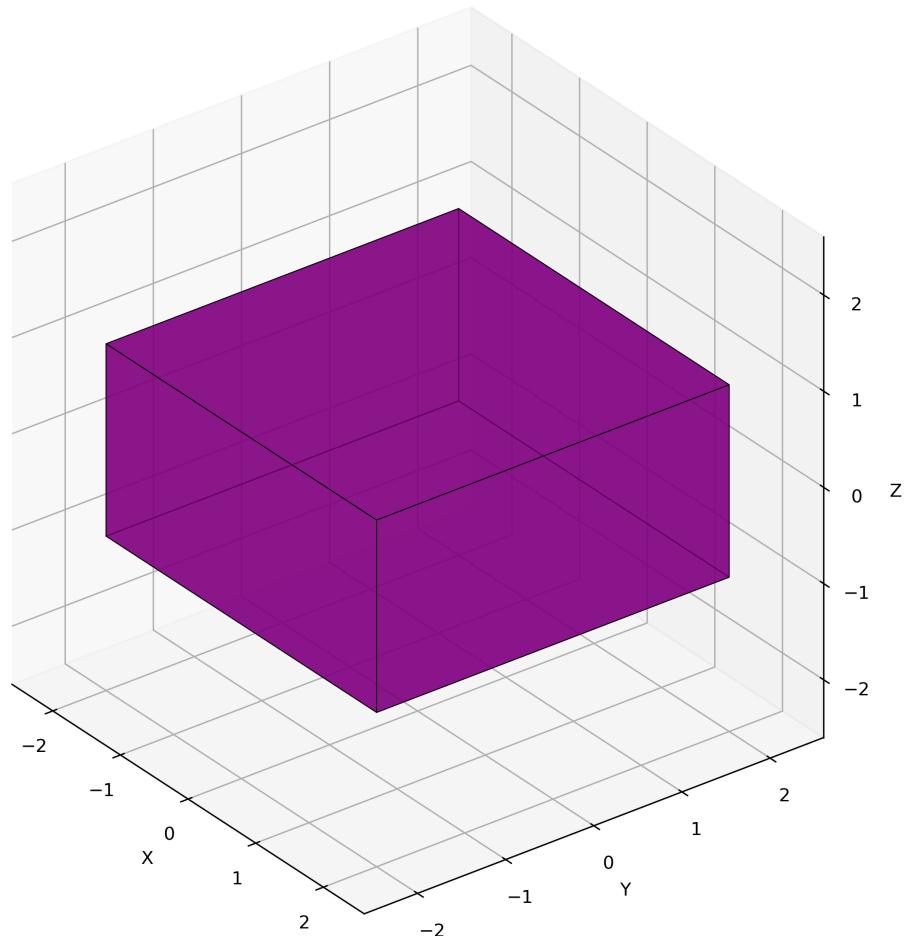


Рисунок 7 — Растяжение по осям X и Y ( $2x$ )

Сжатие по всем осям ( $0.5x$ )

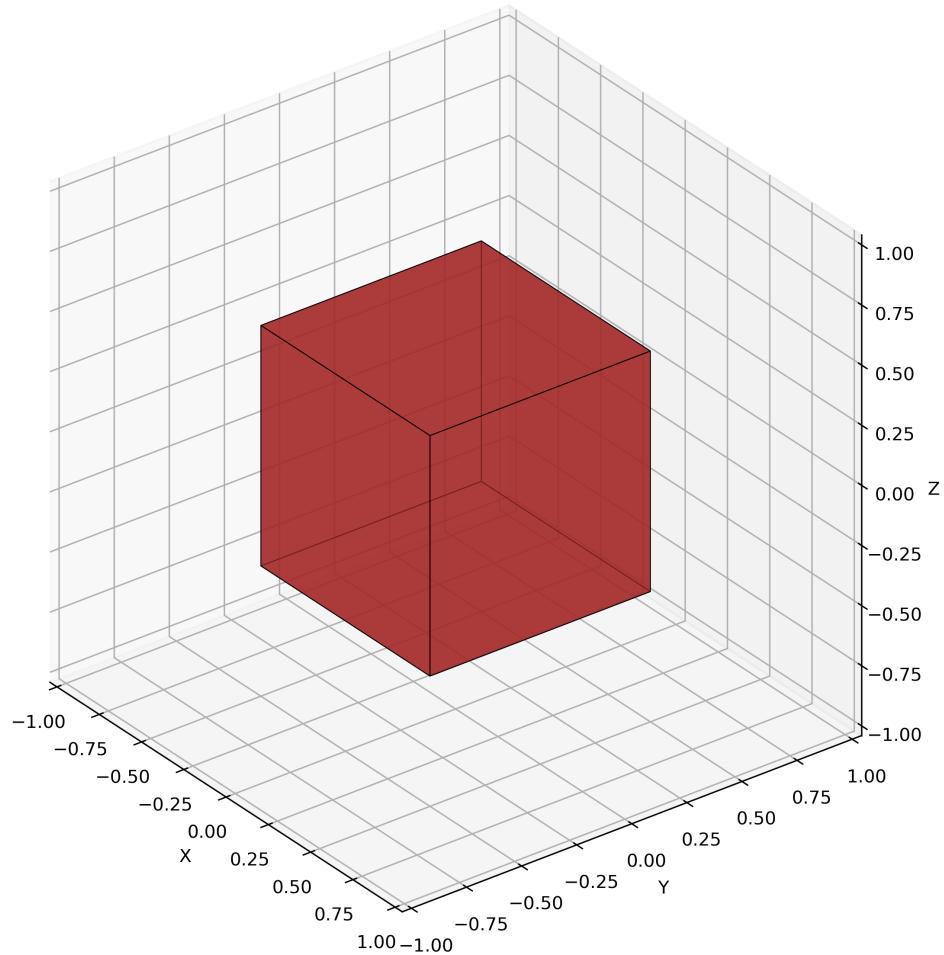


Рисунок 8 — Сжатие по всем осям ( $0.5x$ )

Растяжение по всем осям ( $2x$ )

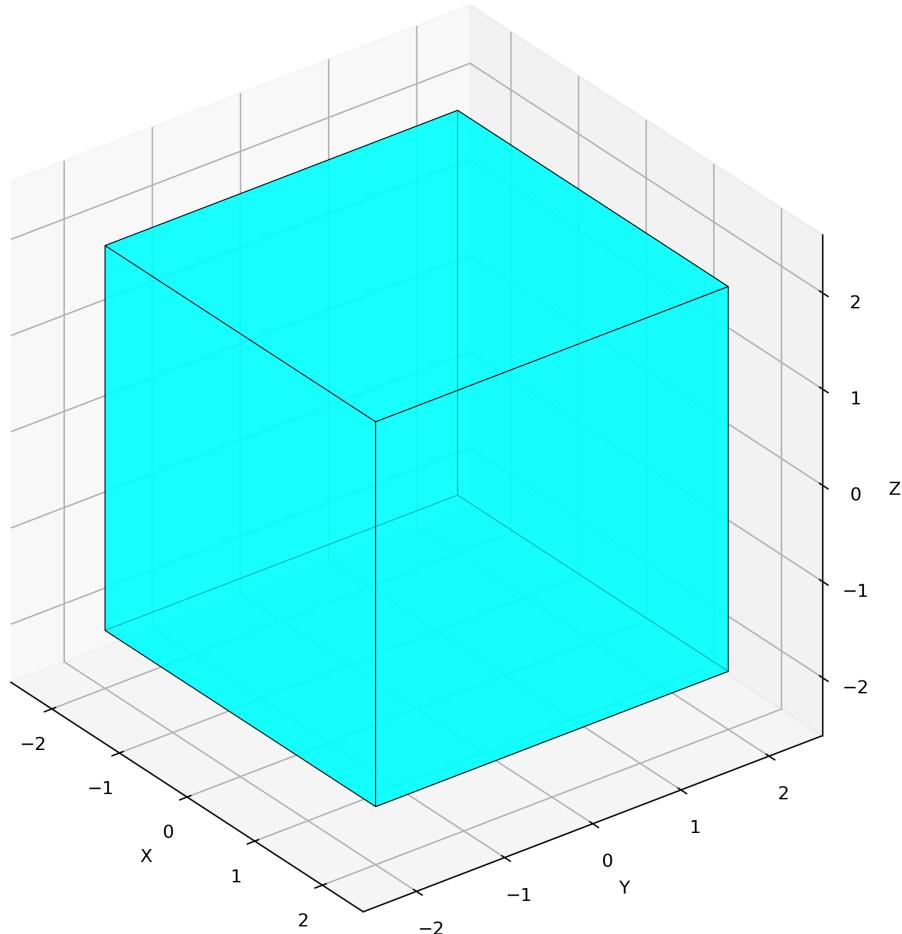


Рисунок 9 — Растяжение по всем осям ( $2x$ )

## Анализ

- Масштабирование по одной оси: кубик становится прямоугольным параллелепипедом
- Масштабирование по двум осям: кубик становится призмой
- Равномерное масштабирование: сохраняется форма, меняется размер
- Объем изменяется пропорционально произведению коэффициентов масштабирования

## **Задание 3: Перемещение кубика**

### **Постановка задачи**

Исследовать эффекты перемещения кубика и изучить композицию преобразований TS vs ST.

### **Математические основы**

Матрица перемещения в однородных координатах:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

где  $t_x, t_y, t_z$  - компоненты вектора перемещения.

### **Результаты**

Исследованы различные случаи перемещения:

Перемещение по оси X на 2

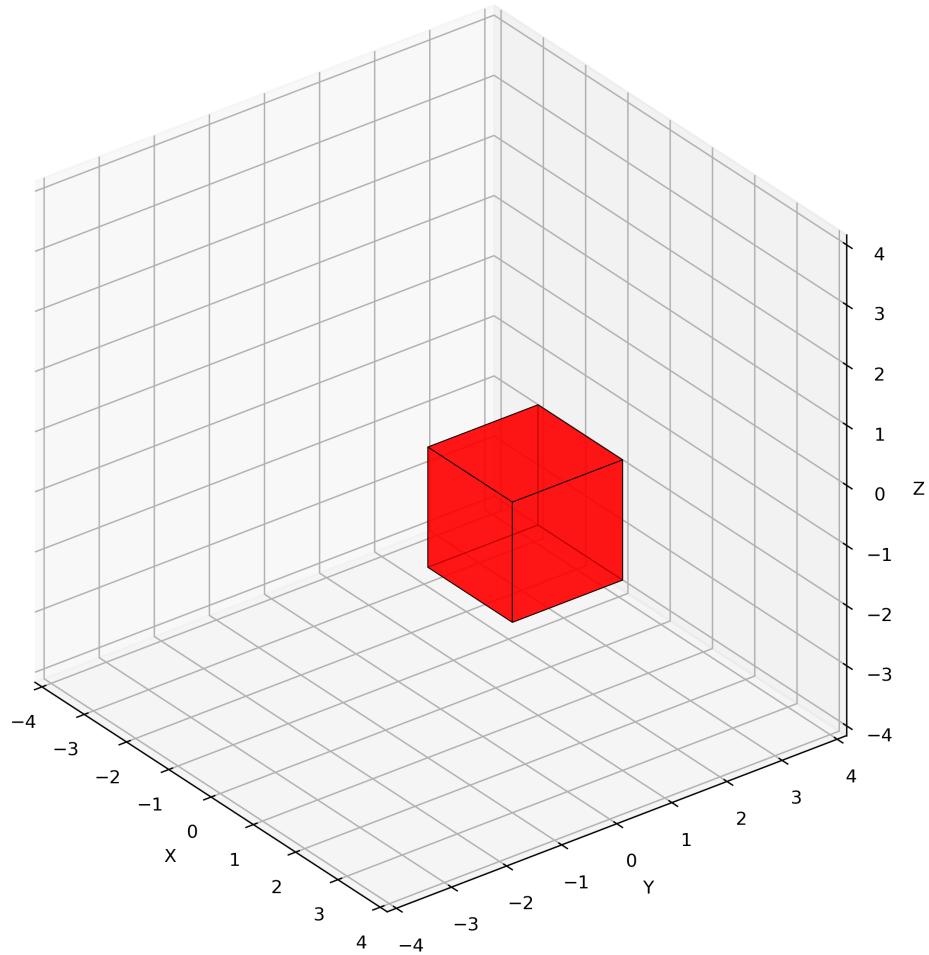


Рисунок 10 — Перемещение по оси X на 2

Перемещение по оси Y на 2

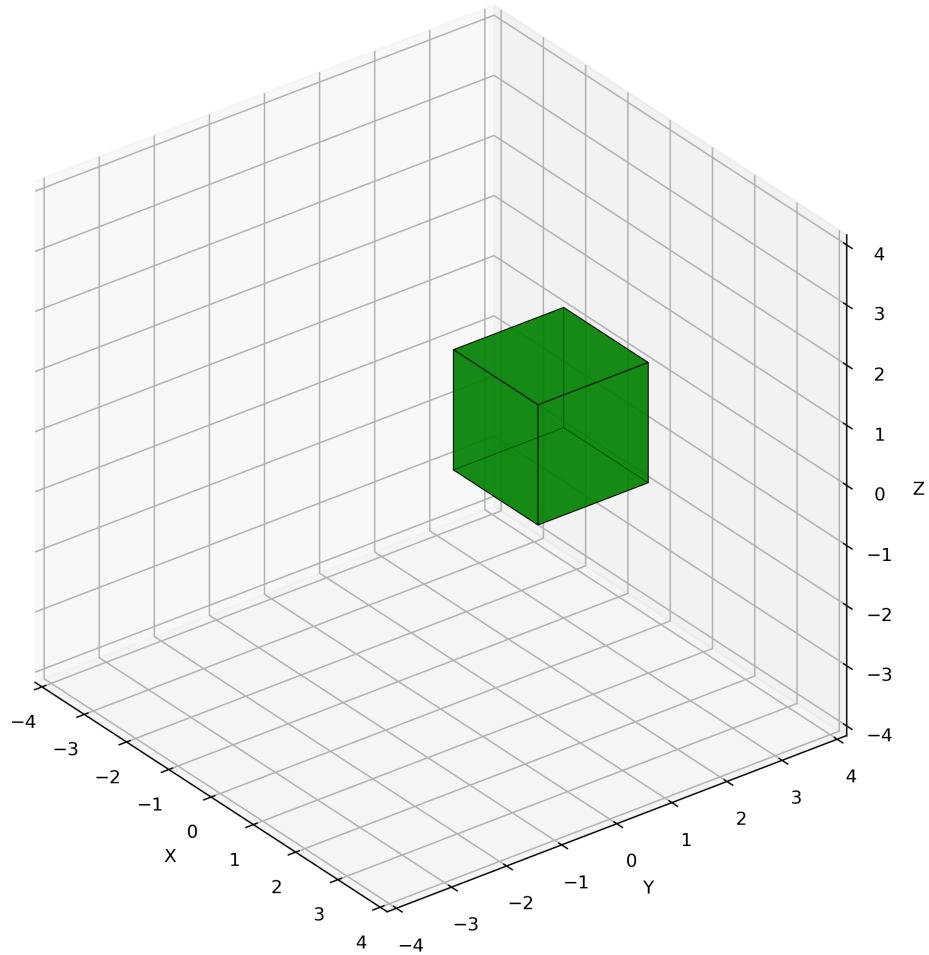


Рисунок 11 — Перемещение по оси Y на 2

Перемещение по оси Z на 2

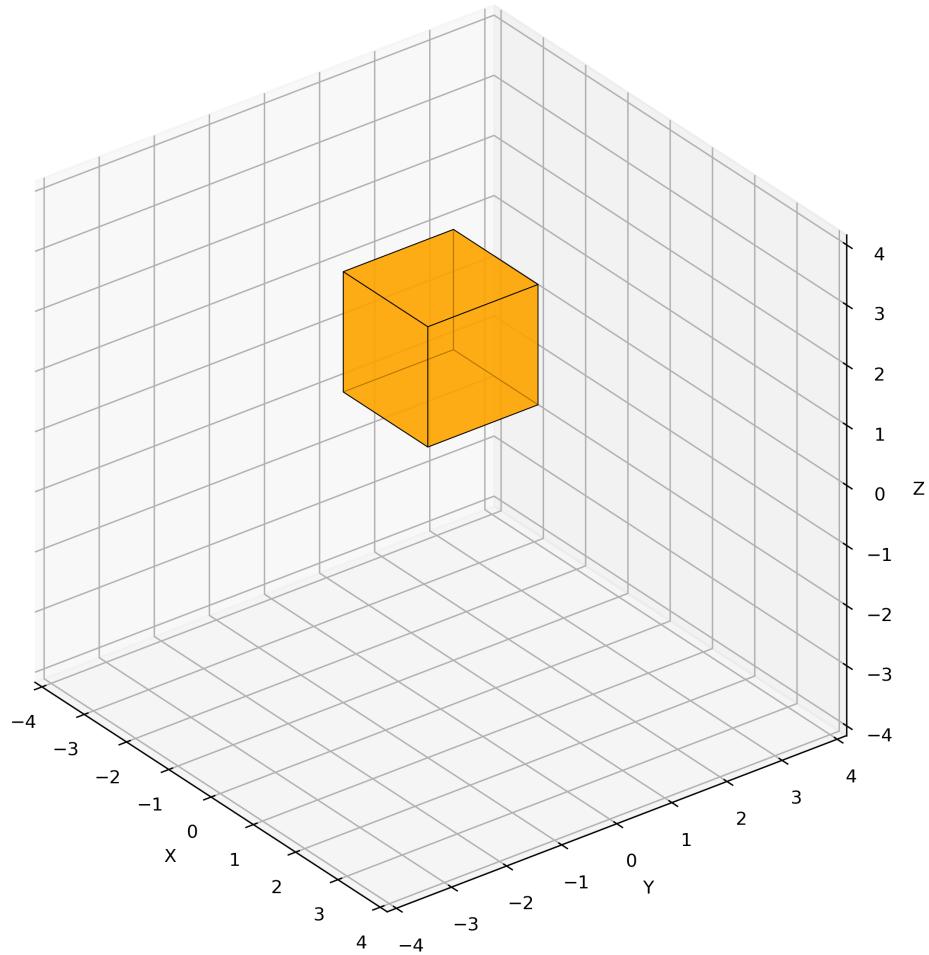


Рисунок 12 — Перемещение по оси Z на 2

Перемещение по всем осям

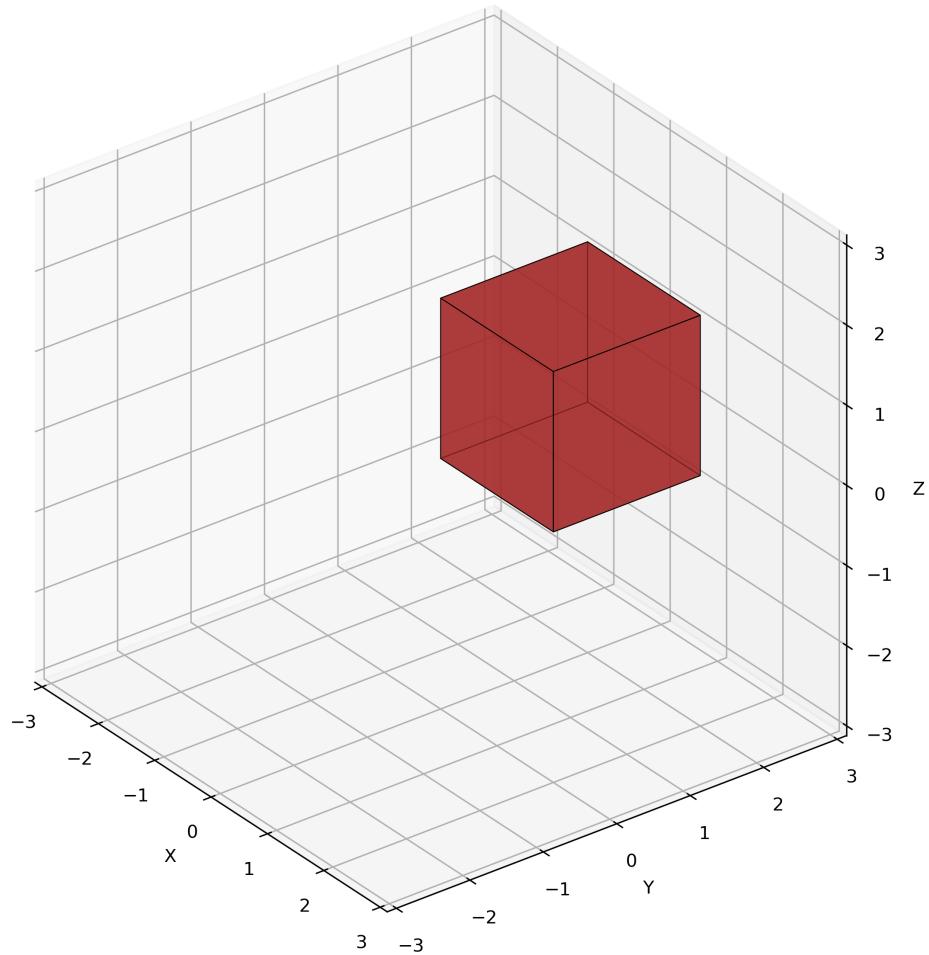


Рисунок 13 — Перемещение по всем осям

## Исследование композиции TS vs ST

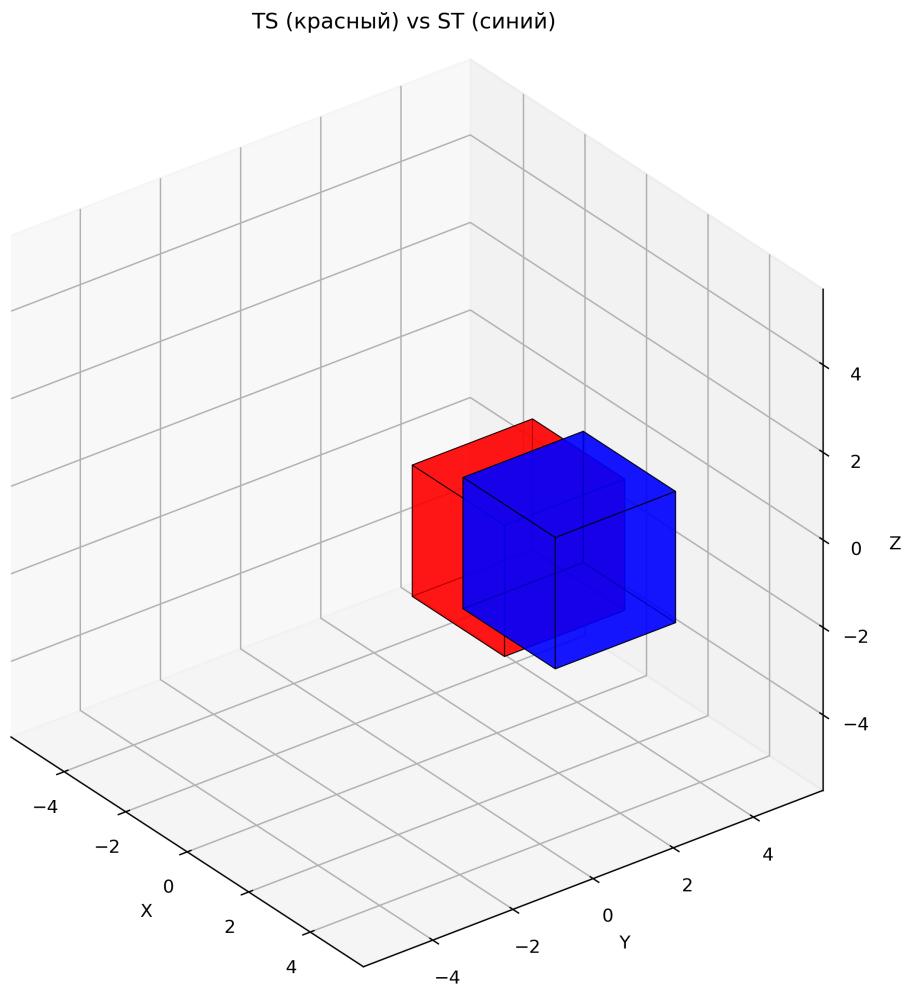


Рисунок 14 — Сравнение TS (красный) vs ST (синий)

### Анализ различий

- При TS: сначала масштабирование (изменение размера), потом перемещение
- При ST: сначала перемещение, потом масштабирование (включая перемещение)
- Масштабирование влияет на все координаты, включая перемещение
- $TS \neq ST$ : преобразования не коммутируют

## **Задание 4: Вращение кубика**

### **Постановка задачи**

Реализовать вращение кубика вокруг произвольной оси и исследовать теорему вращения Эйлера.

### **Математические основы**

Матрица вращения вокруг вектора  $\mathbf{v}$  на угол  $\theta$ :

$$R = e^{J\theta} \quad (4)$$

где  $J$  - кососимметрическая матрица:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -v_z & v_y & 0 \\ v_z & 0 & -v_x & 0 \\ -v_y & v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

### **Результаты**

Исследованы вращения вокруг различных осей:

Вращение вокруг оси X на  $45^\circ$

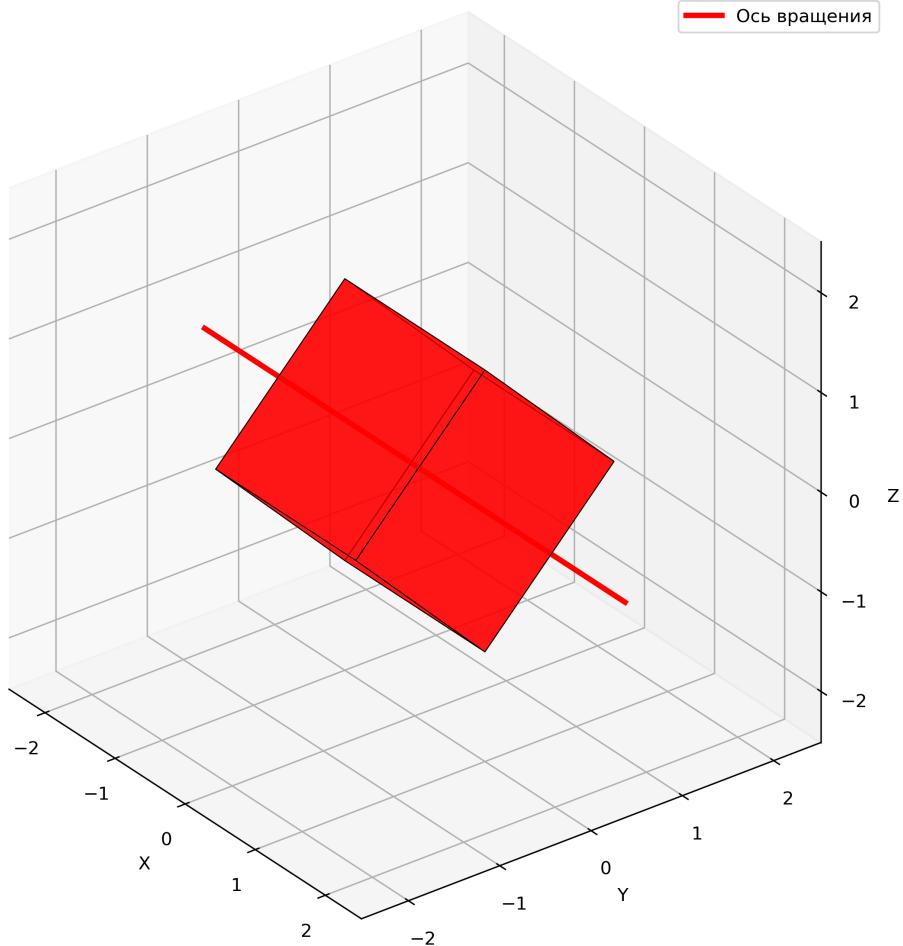


Рисунок 15 — Вращение вокруг оси X на  $45^\circ$

Вращение вокруг оси Y на  $45^\circ$

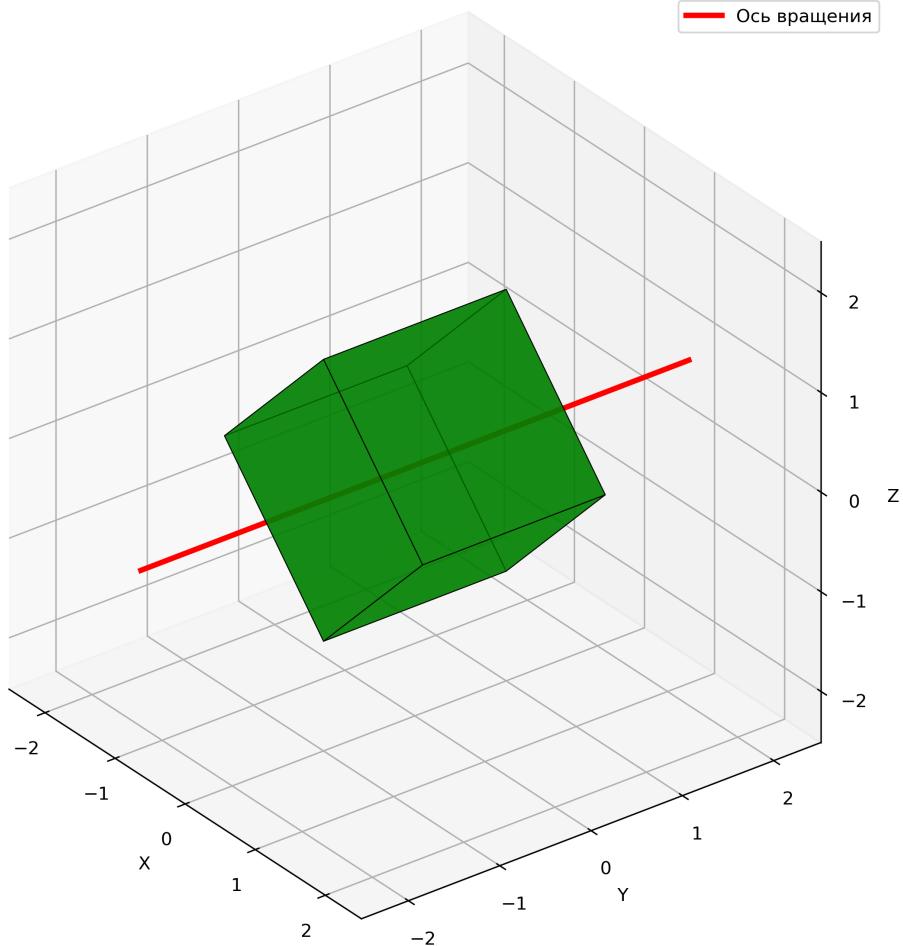


Рисунок 16 — Вращение вокруг оси Y на  $45^\circ$

Вращение вокруг оси Z на  $45^\circ$

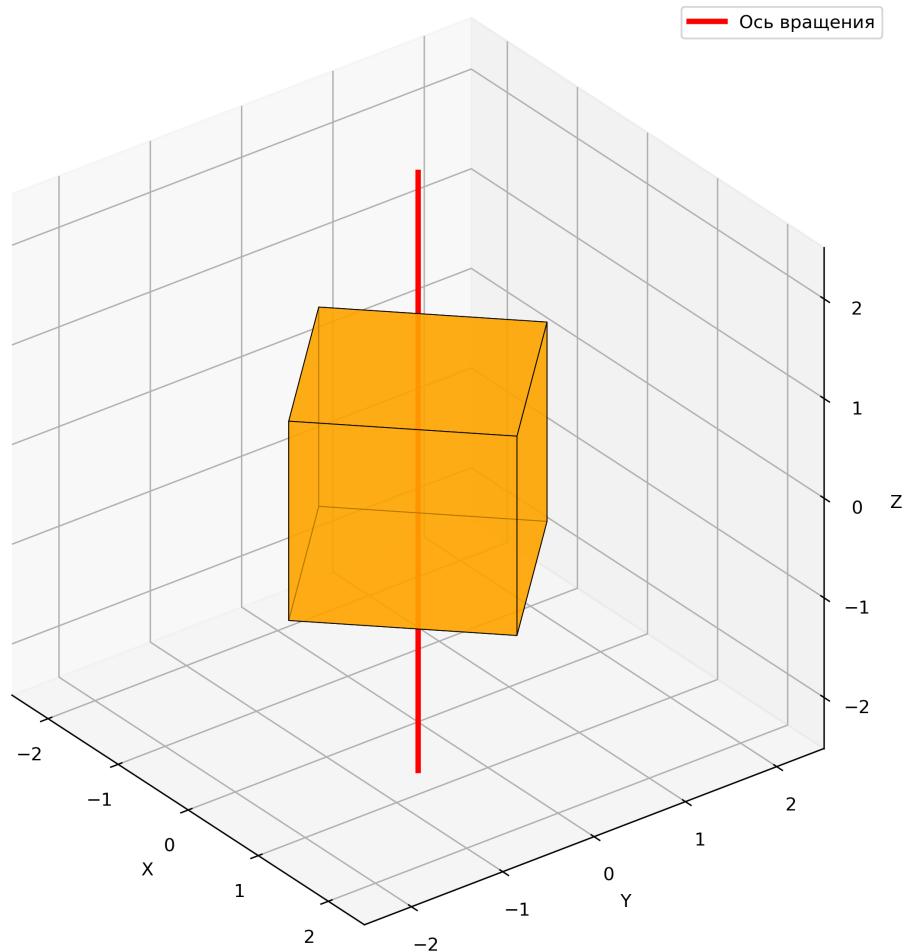


Рисунок 17 — Вращение вокруг оси Z на  $45^\circ$

Вращение вокруг диагонали XYZ на  $90^\circ$

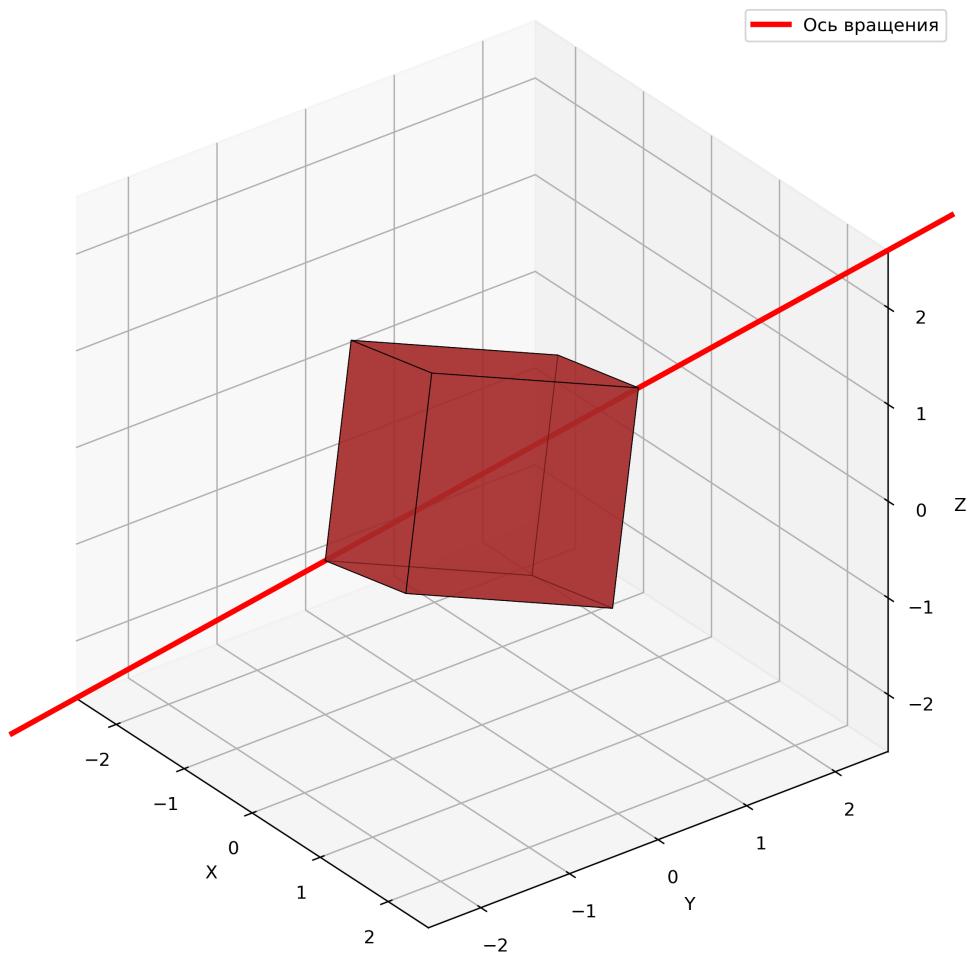


Рисунок 18 — Вращение вокруг диагонали XYZ на  $90^\circ$

Вращение вокруг произвольной оси на  $30^\circ$

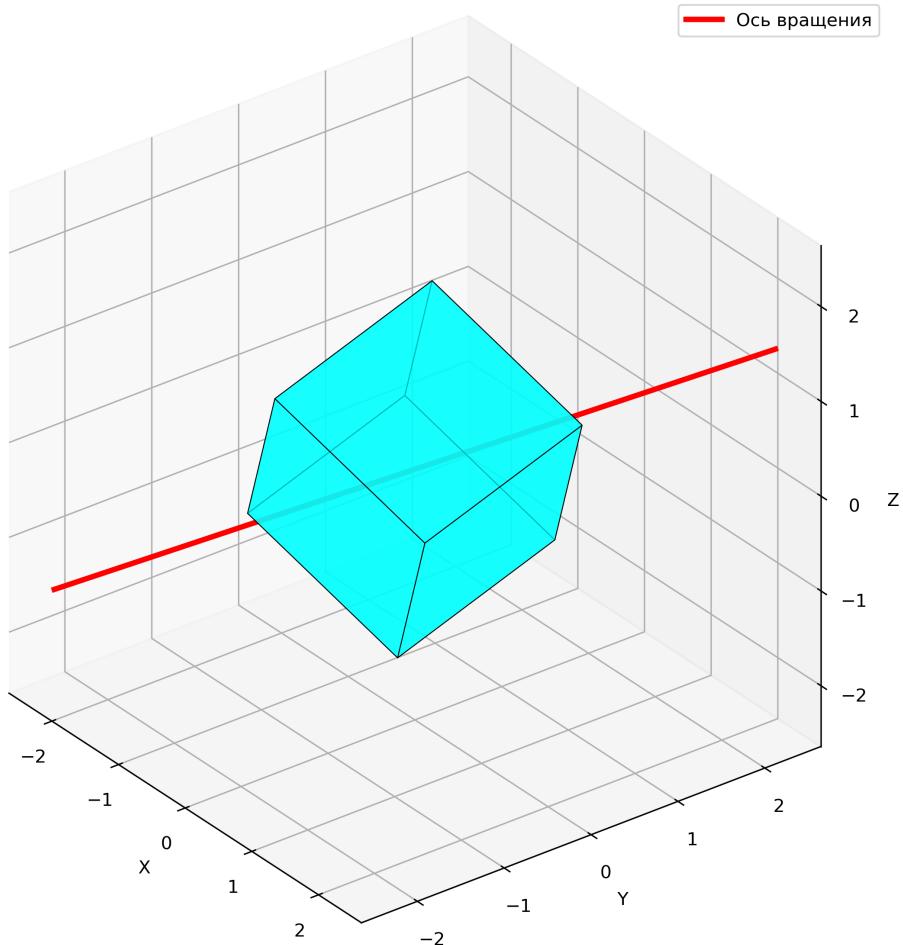


Рисунок 19 — Вращение вокруг произвольной оси на  $30^\circ$

## Сравнение с вращениями вокруг осей координат

Вращение вокруг оси X (стандартная матрица)

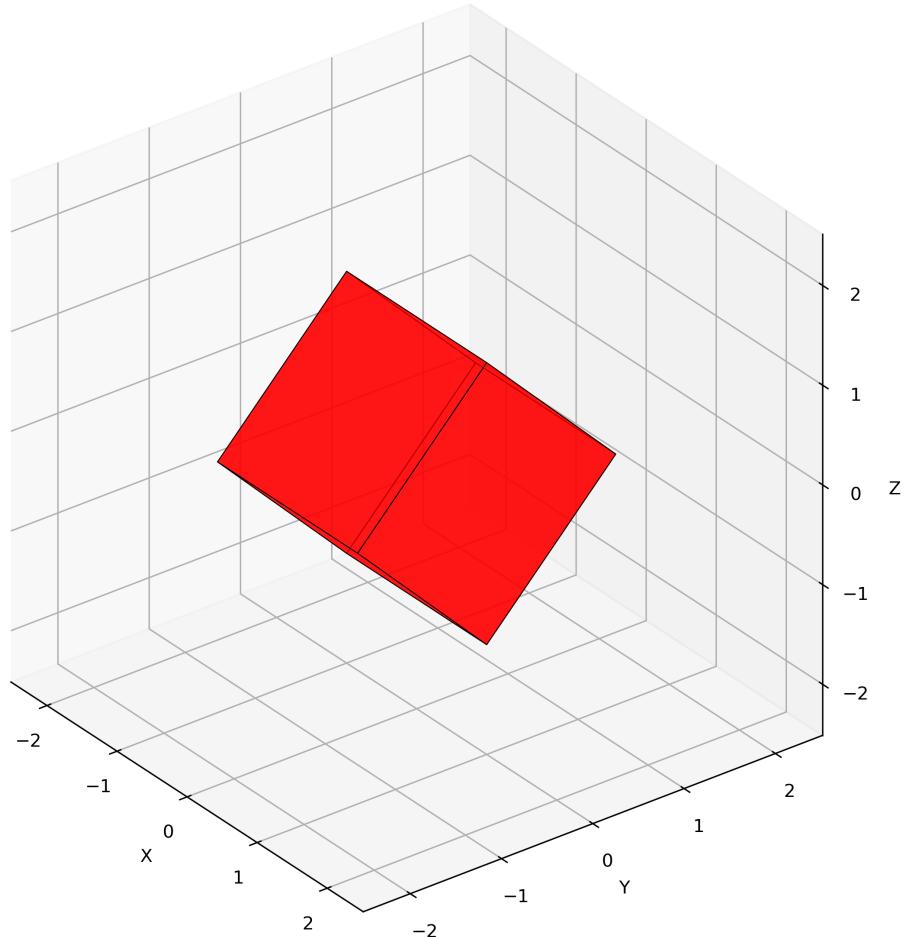


Рисунок 20 — Вращение вокруг оси X (стандартная матрица)

Вращение вокруг оси Y (стандартная матрица)

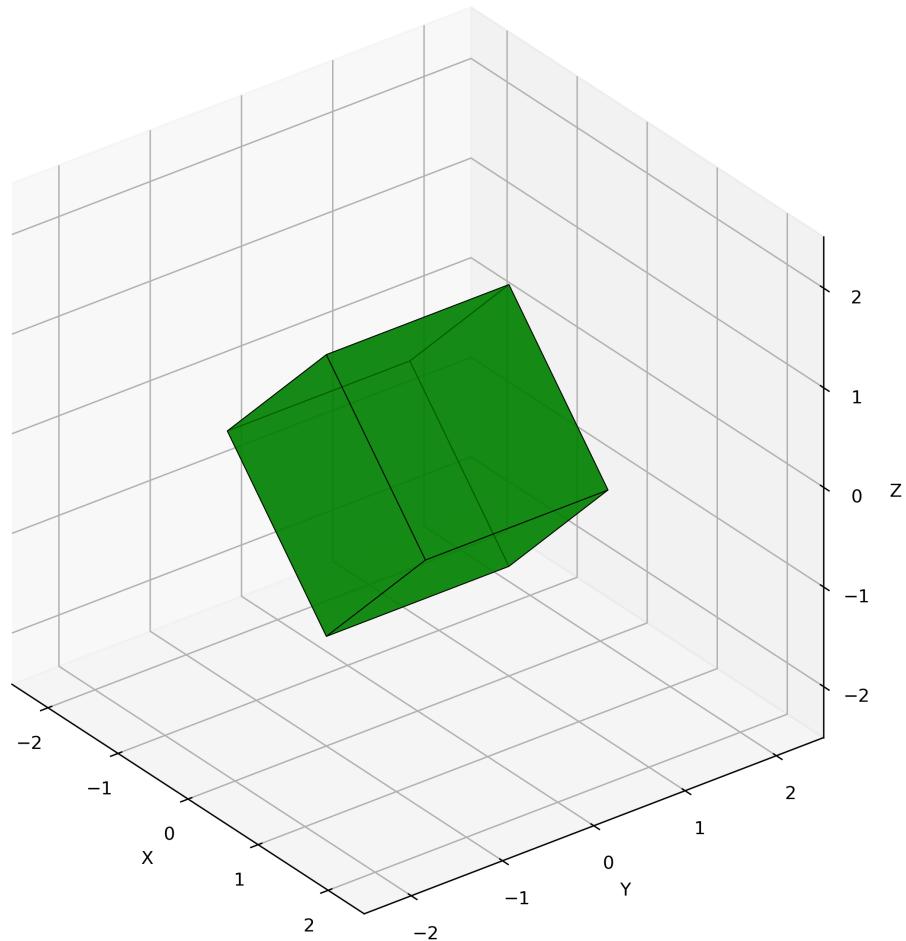


Рисунок 21 — Вращение вокруг оси Y (стандартная матрица)

Вращение вокруг оси Z (стандартная матрица)

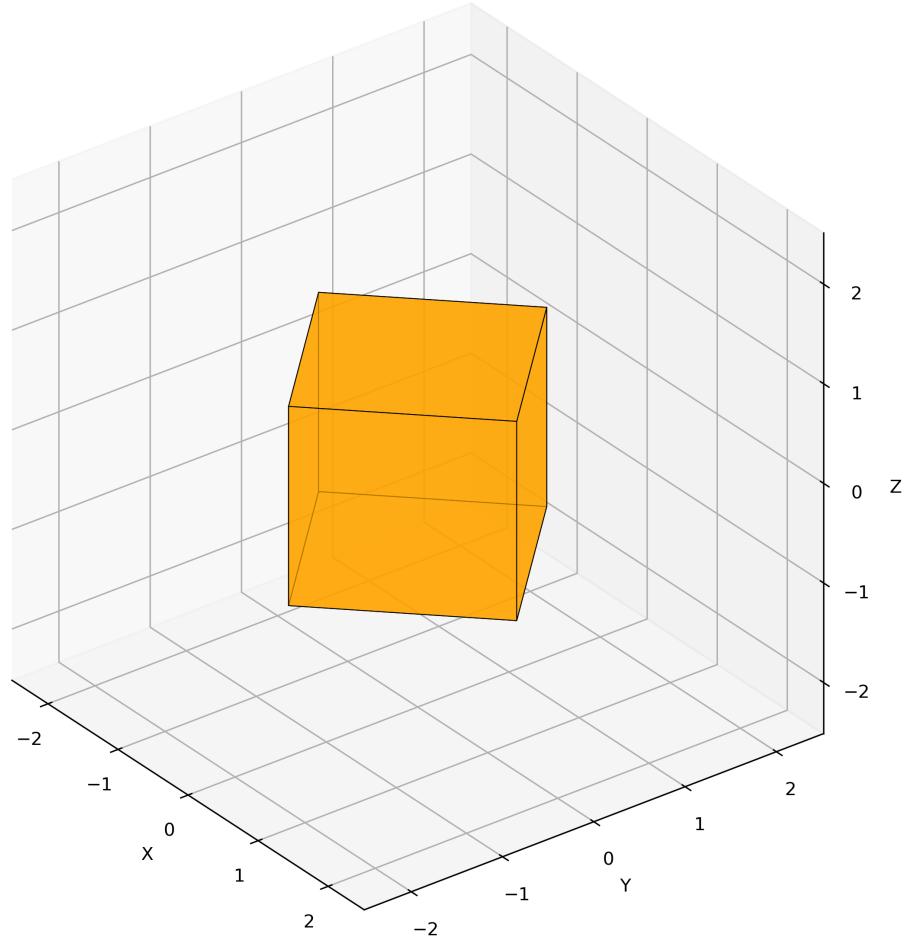


Рисунок 22 — Вращение вокруг оси Z (стандартная матрица)

### Теорема вращения Эйлера

Исследована композиция вращений  $R_x(\theta) \cdot R_y(\phi) \cdot R_z(\psi)$ :

- Любое вращение в 3D можно представить как вращение вокруг одной оси
- Композиция  $R_x(\theta)R_y(\phi)R_z(\psi)$  не покрывает все возможные вращения
- Для полного покрытия нужны другие параметризации (например, кватернионы)

## **Задание 5: Вращение кубика около одной вершины**

### **Постановка задачи**

Реализовать вращение кубика вокруг одной из его вершин и исследовать свойства такого преобразования.

### **Математические основы**

Вращение вокруг вершины выполняется в три этапа:

1. Перемещение:  $T_1$  - перемещение выбранной вершины в начало координат
2. Вращение:  $R$  - вращение вокруг оси
3. Обратное перемещение:  $T_2$  - возврат в исходное положение

Полная матрица преобразования:  $T_2 \cdot R \cdot T_1$

### **Результаты**

Исследованы вращения вокруг различных вершин:

Вращение вокруг вершины 0 (угол) на  $45^\circ$

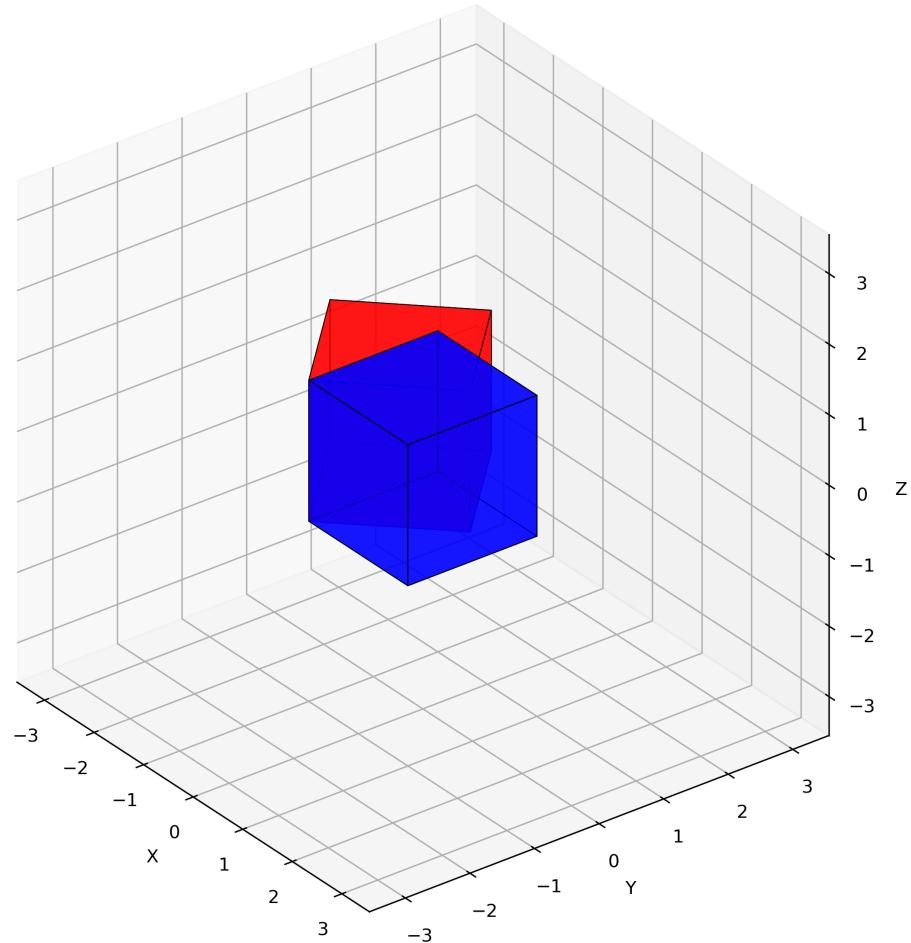


Рисунок 23 — Вращение вокруг вершины 0 (угол) на  $45^\circ$

Вращение вокруг вершины 1 (ребро) на  $60^\circ$

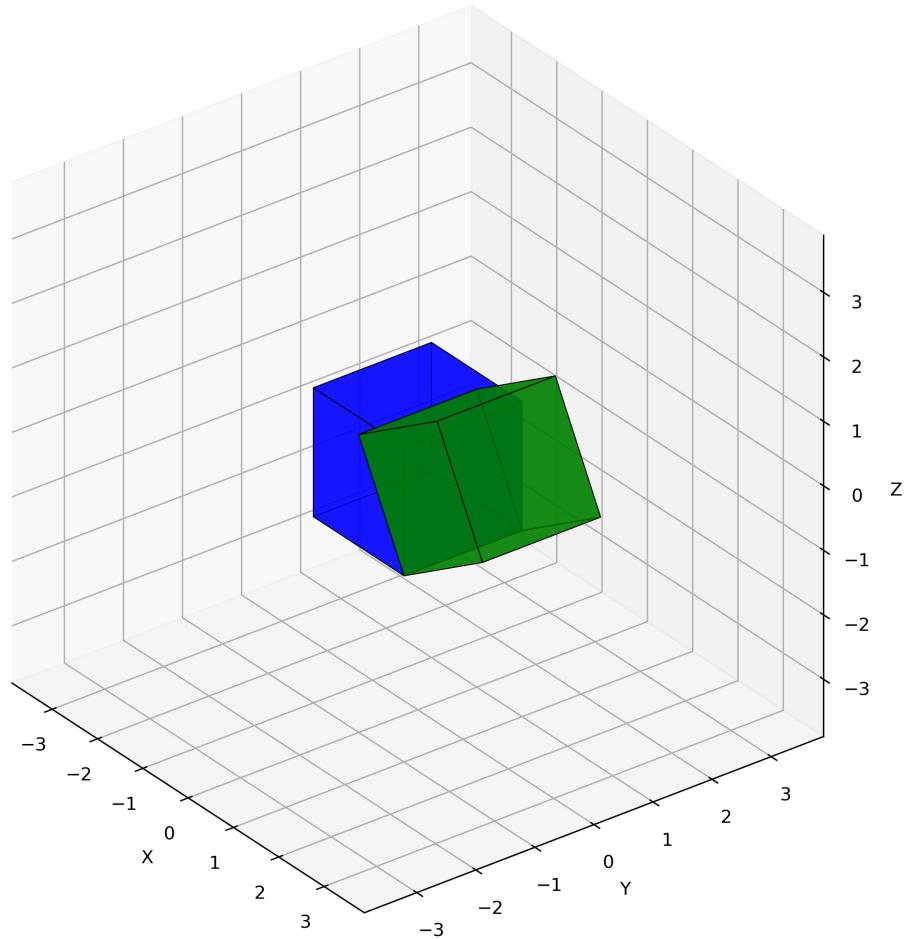


Рисунок 24 — Вращение вокруг вершины 1 (ребро) на  $60^\circ$

Вращение вокруг вершины 2 (грань) на  $90^\circ$

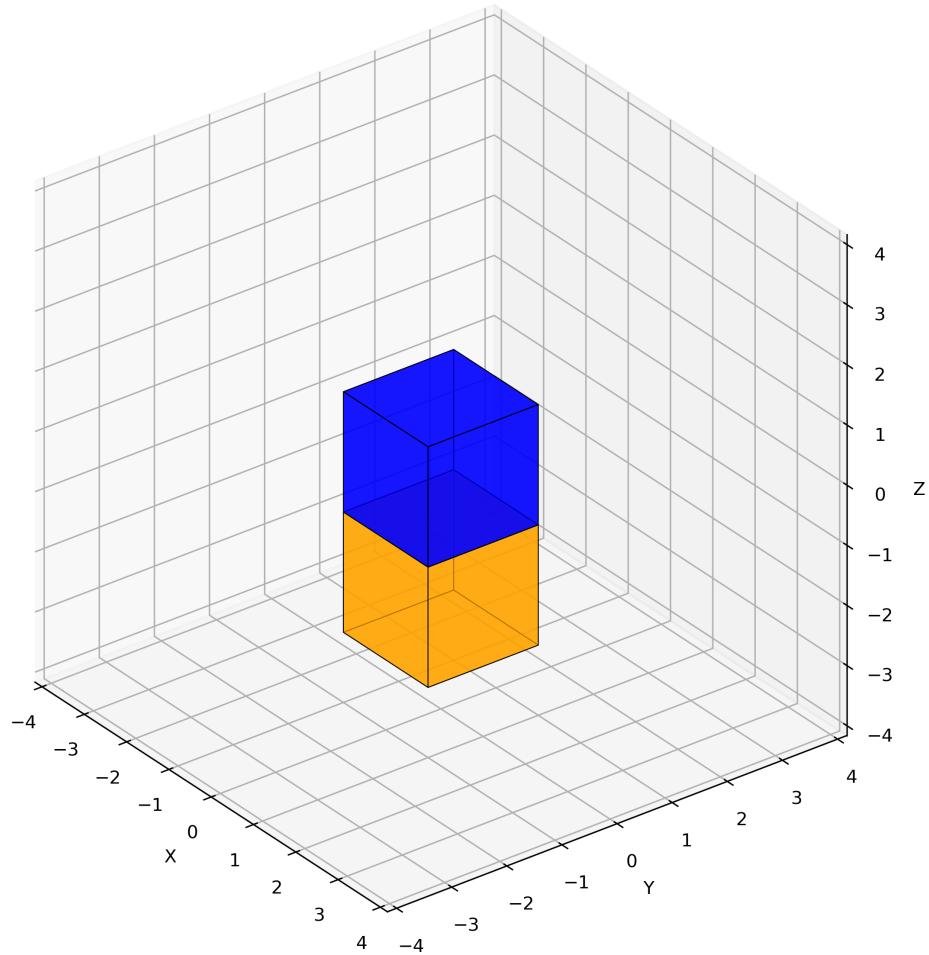


Рисунок 25 — Вращение вокруг вершины 2 (грань) на  $90^\circ$

Вращение вокруг вершины 3 (диагональ) на  $30^\circ$

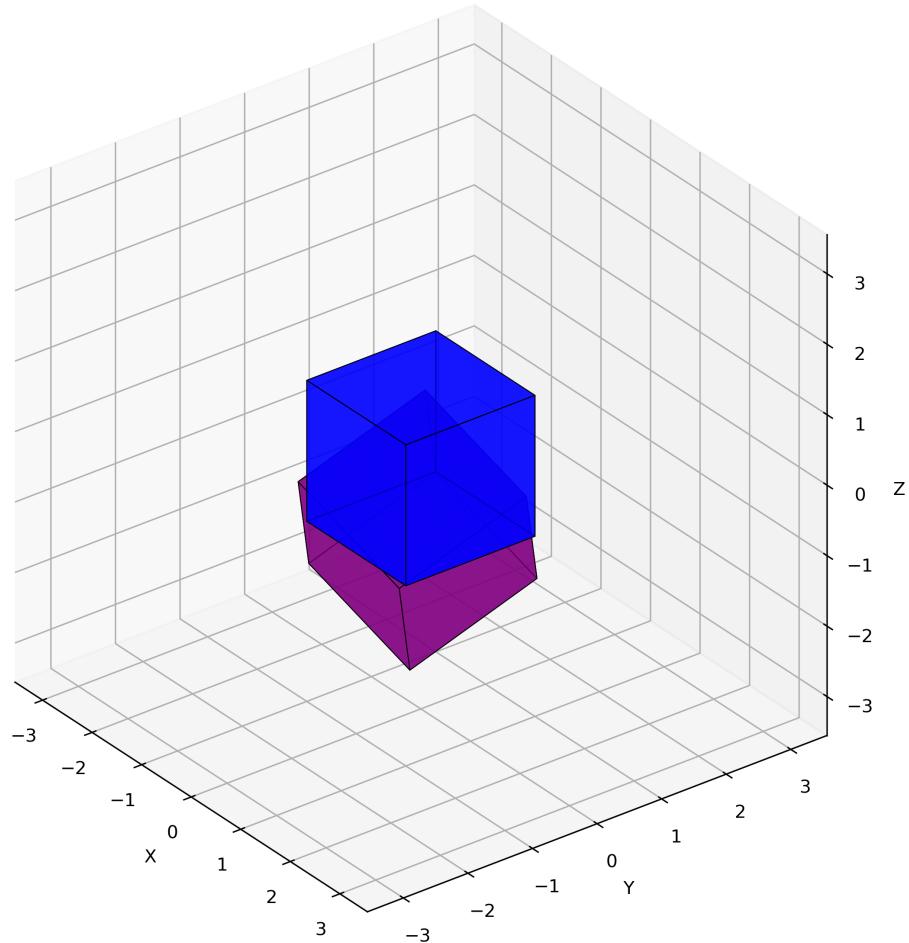


Рисунок 26 — Вращение вокруг вершины 3 (диагональ) на  $30^\circ$

Вращение вокруг вершины 4 на  $180^\circ$

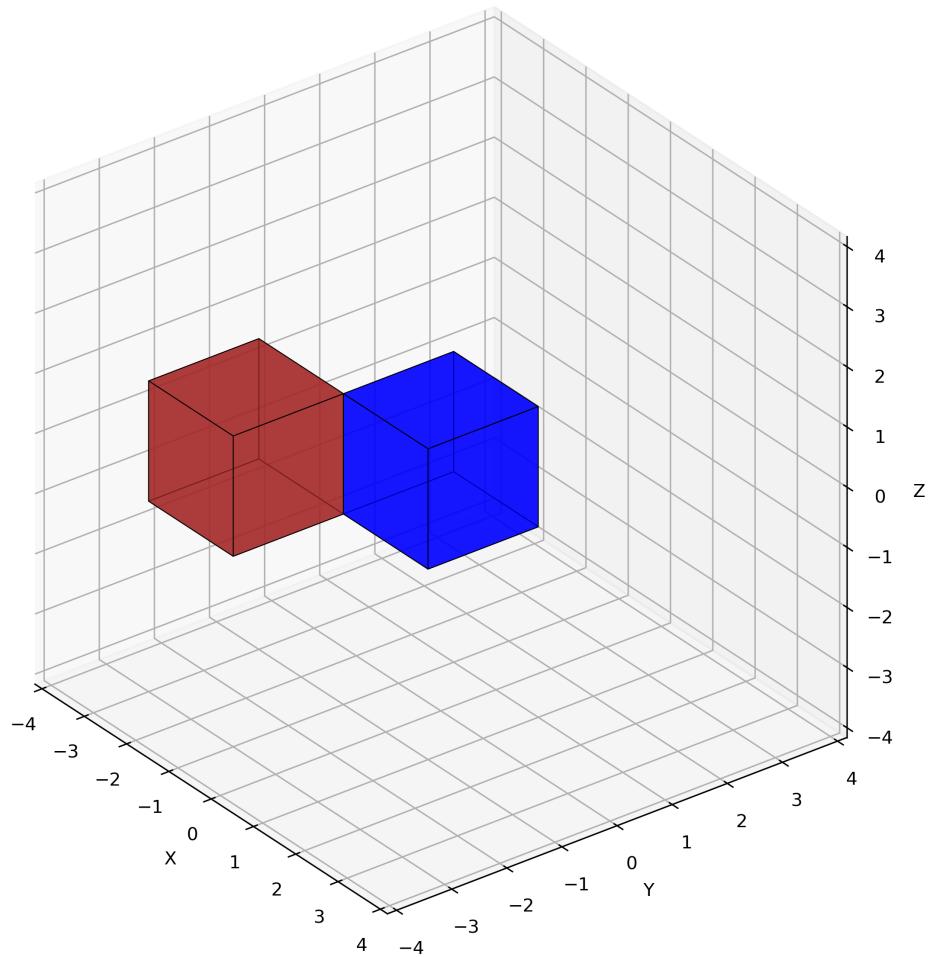


Рисунок 27 — Вращение вокруг вершины 4 на  $180^\circ$

Вращение вокруг вершины 5 (пространственная диагональ) на  $45^\circ$

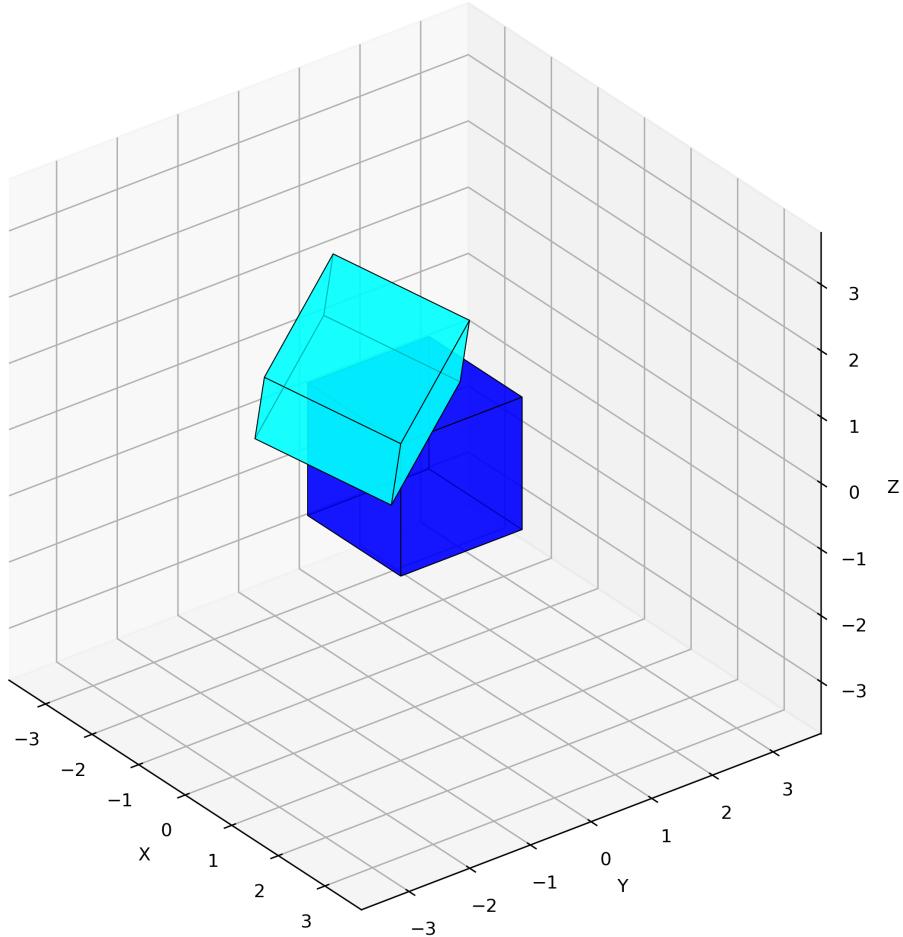


Рисунок 28 — Вращение вокруг вершины 5 (пространственная диагональ) на  $45^\circ$

## Анализ свойств

- Выбранная вершина остается неподвижной
- Объем и форма кубика сохраняются
- Центр кубика может смещаться
- Преобразование не является ортогональным в целом

## Задание 6: Реализация камеры

### Постановка задачи

Реализовать камеру с возможностью изменения позиции и ориентации, а также исследовать обратное преобразование камеры.

## Математические основы

Матрица камеры состоит из двух частей:

1. Матрица поворота камеры  $R_{camera}$
2. Матрица перемещения камеры  $T_{camera}$

Полная матрица камеры:  $C = R_{camera} \cdot T_{camera}$

## Результаты

Исследованы различные позиции камеры:

Сцена: Камера сбоку и сверху

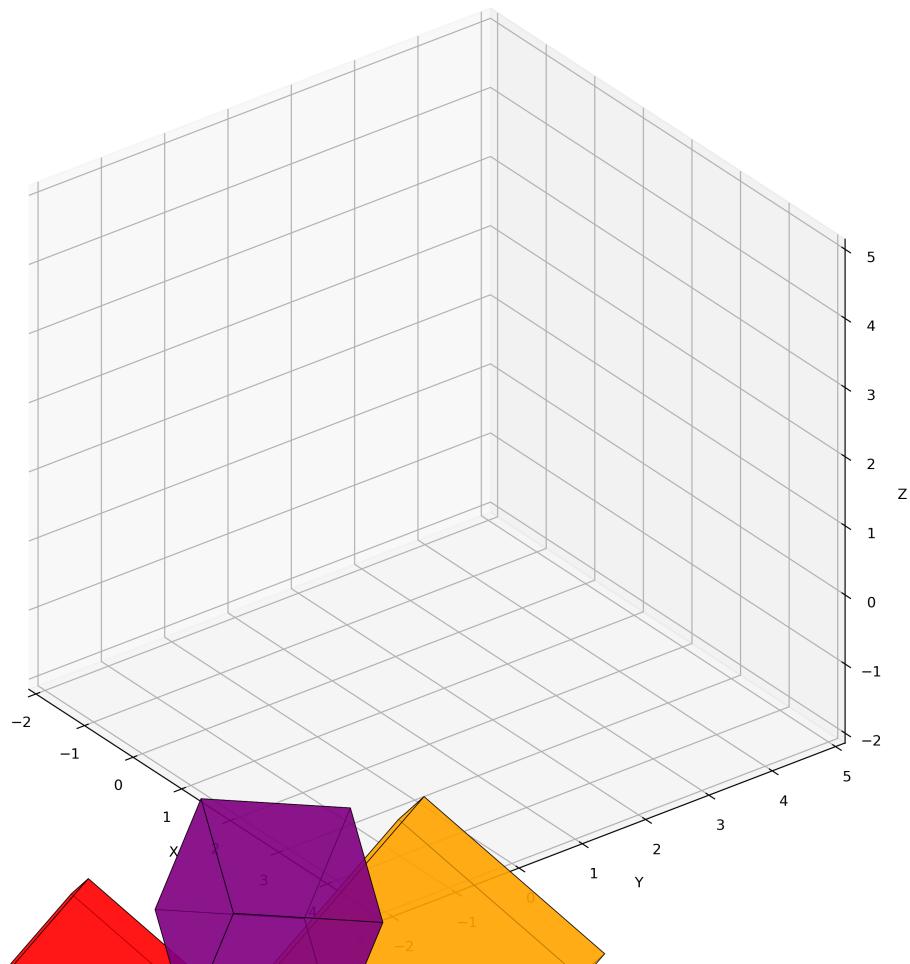


Рисунок 29 — Камера сбоку и сверху

Сцена: Камера спереди

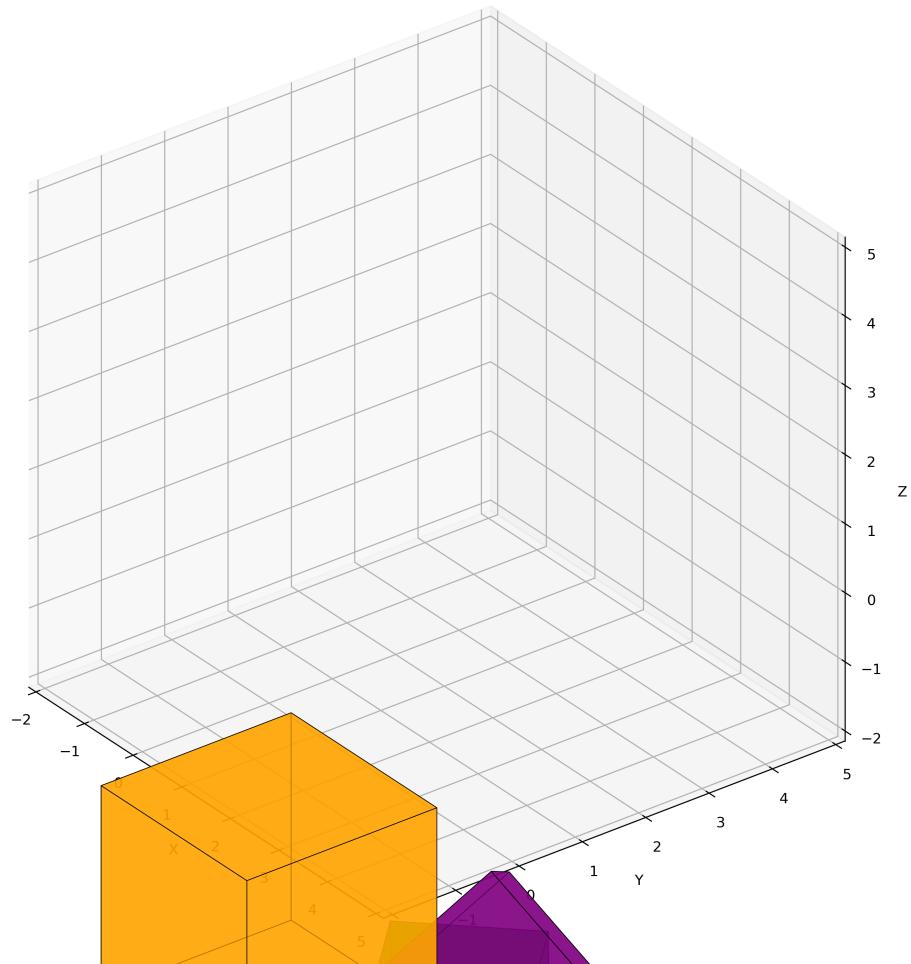


Рисунок 30 — Камера спереди

Сцена: Камера справа

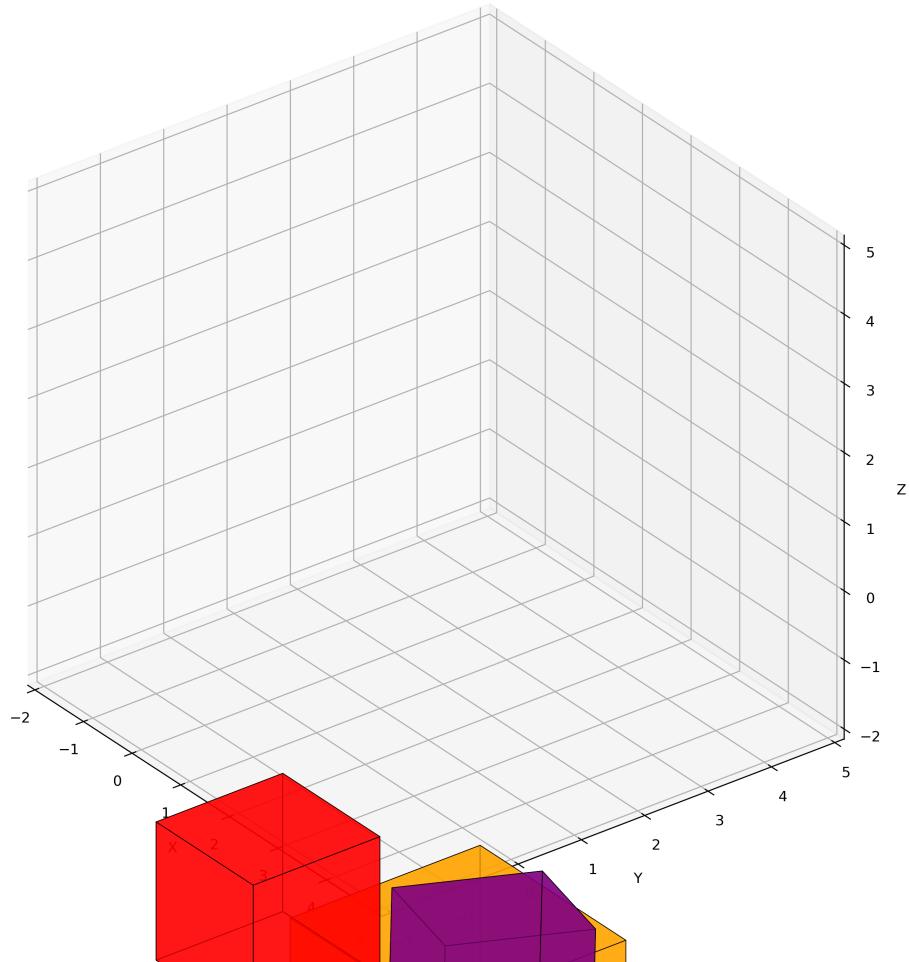


Рисунок 31 — Камера справа

Сцена: Камера смотрит на центр

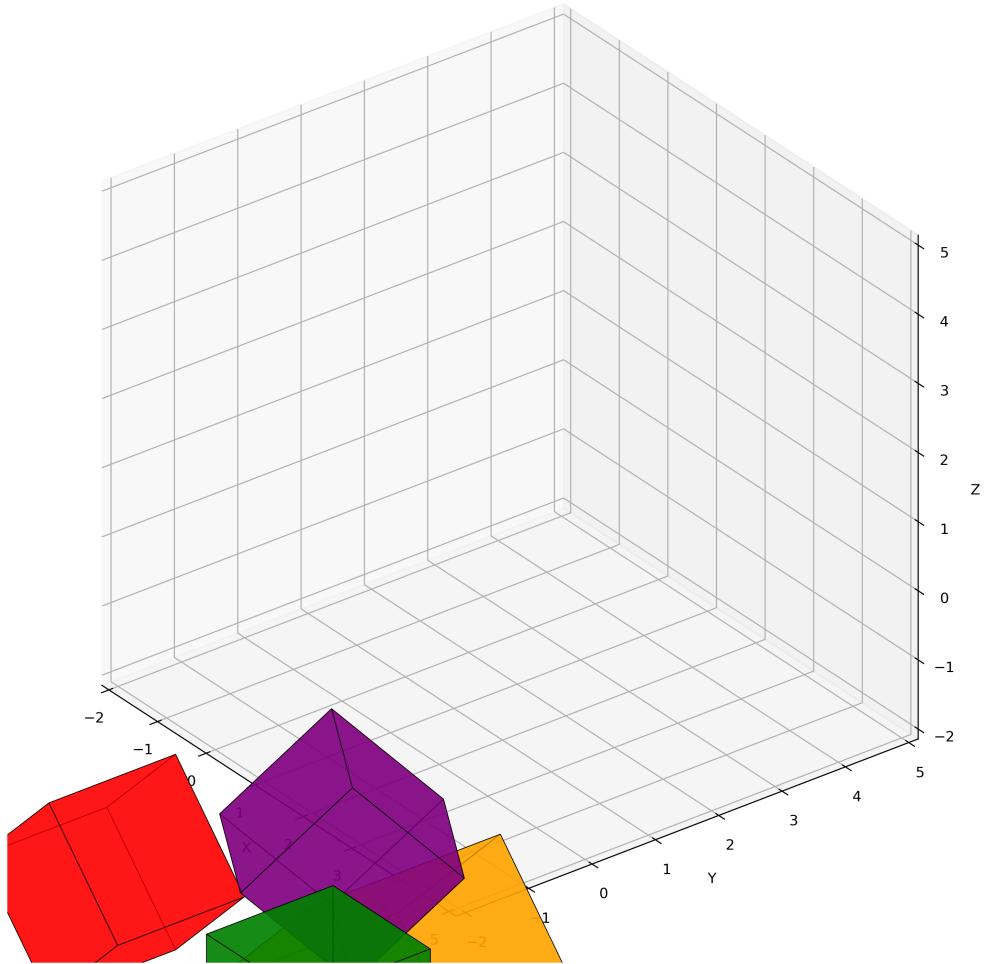


Рисунок 32 — Камера смотрит на центр

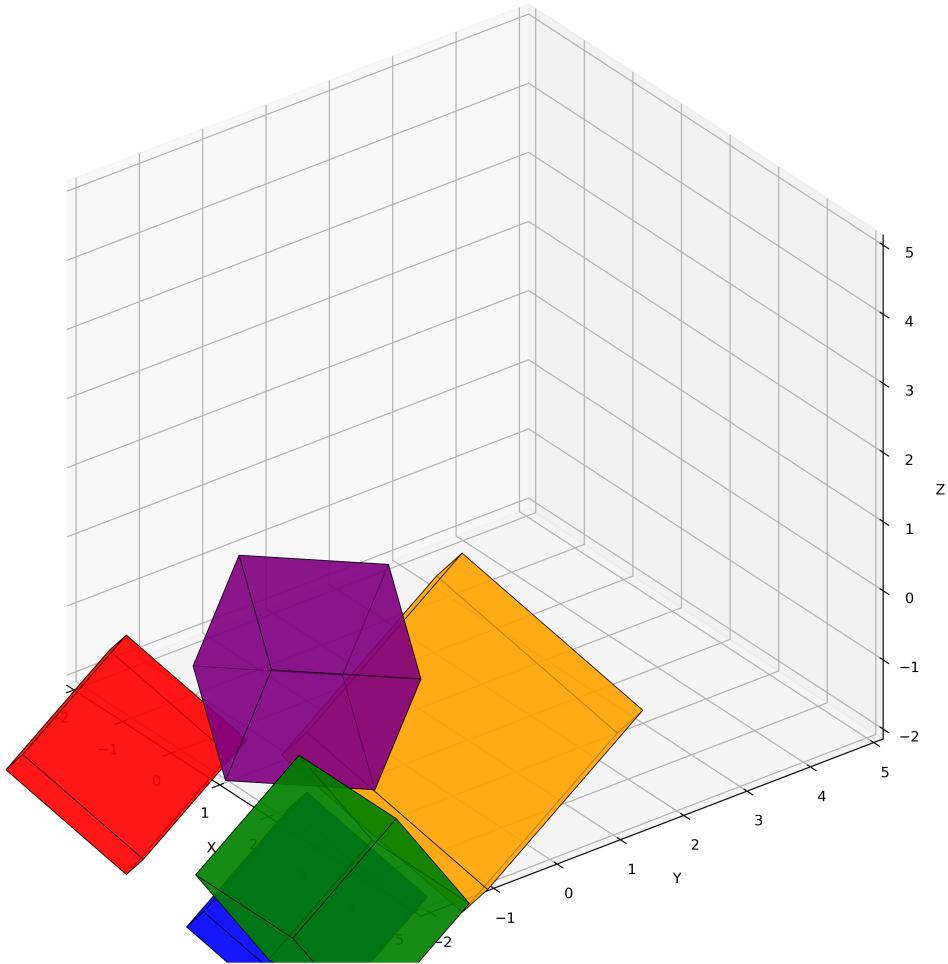


Рисунок 33 — Камера под углом

## Обратное преобразование камеры

- $C^{-1}$  восстанавливает исходную сцену
- Ошибка восстановления минимальна
- Преобразование камеры обратимо

## Задание 7: Перспективные преобразования

### Постановка задачи

Реализовать перспективные преобразования и исследовать их влияние на геометрию объектов.

## Математические основы

Матрица перспективного преобразования:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

где  $d$  - расстояние до плоскости проекции.

## Результаты

Исследованы различные перспективные преобразования:

Сцена: Стандартная перспектива

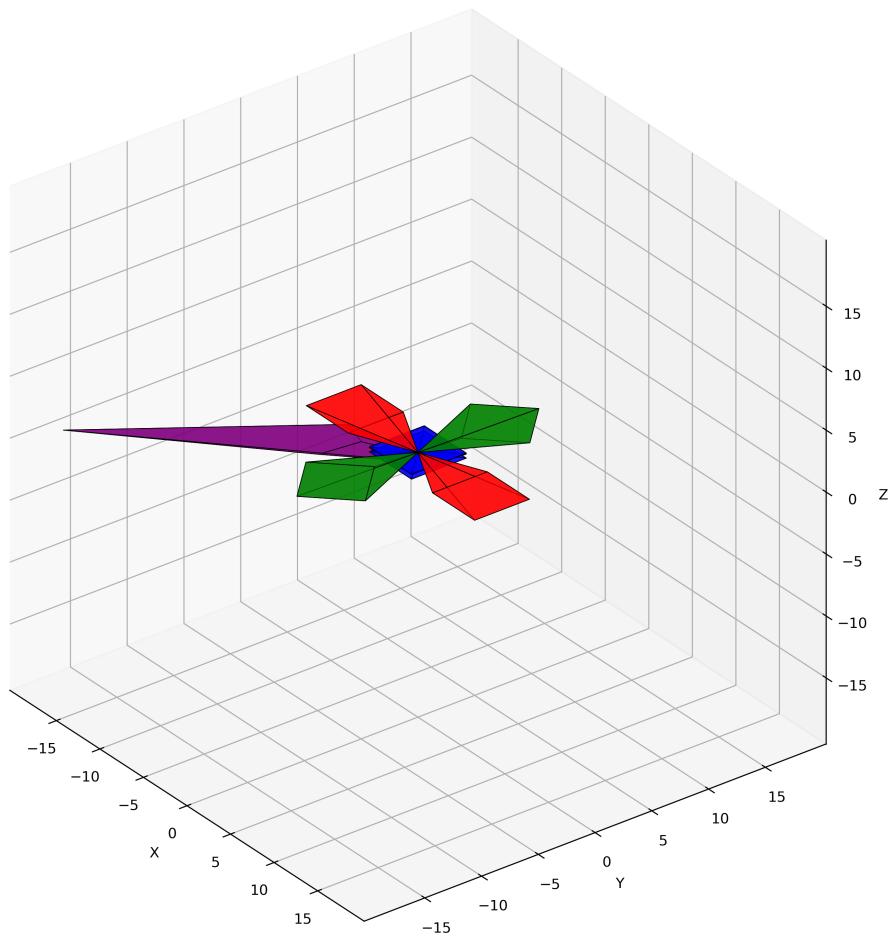


Рисунок 34 — Стандартная перспектива

Сцена: Узкий угол обзора

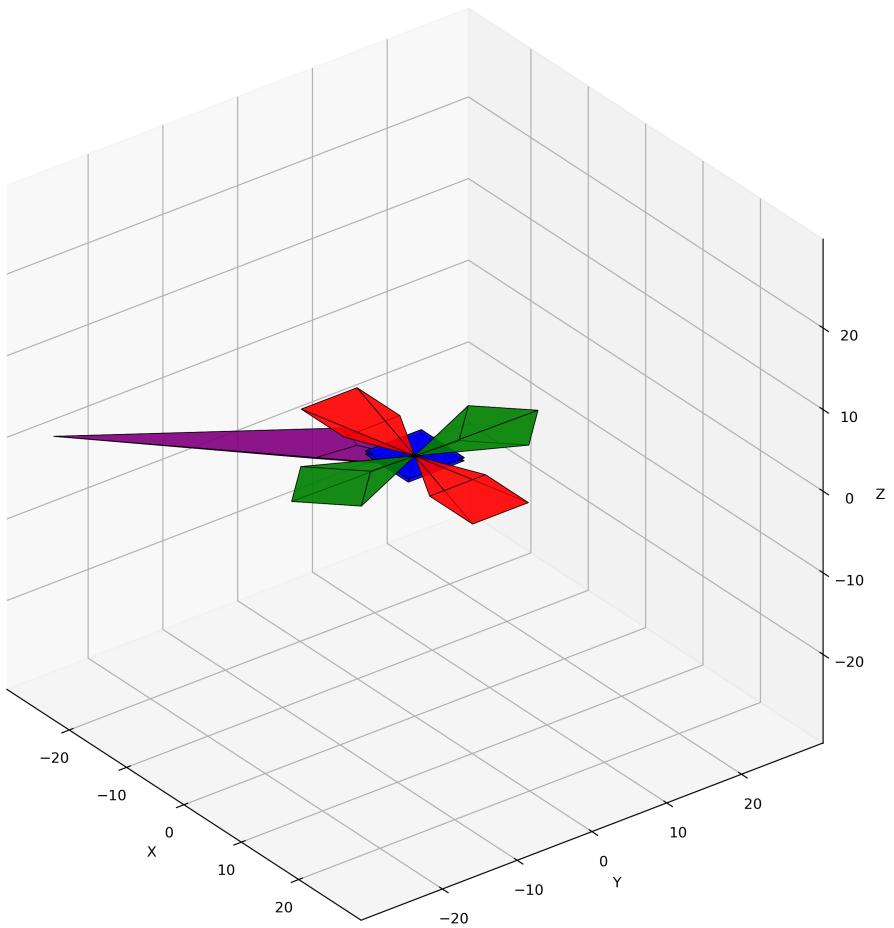


Рисунок 35 — Узкая перспектива

Сцена: Широкий угол обзора

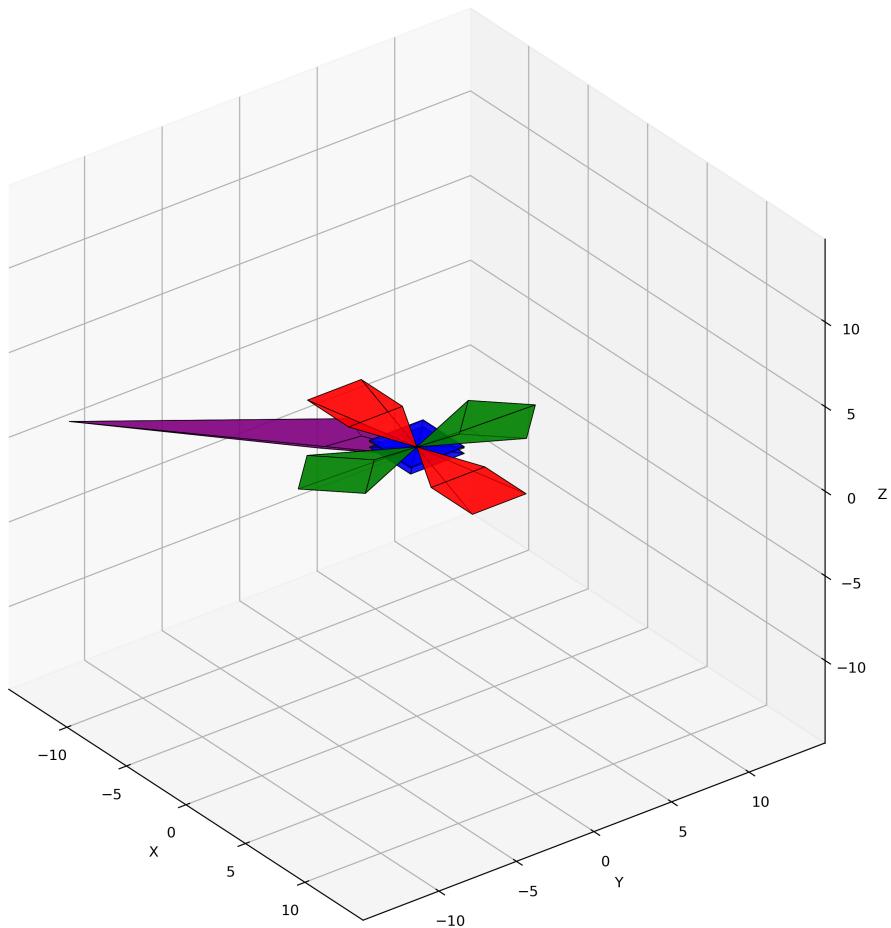


Рисунок 36 — Широкая перспектива

Кубик с перспективой

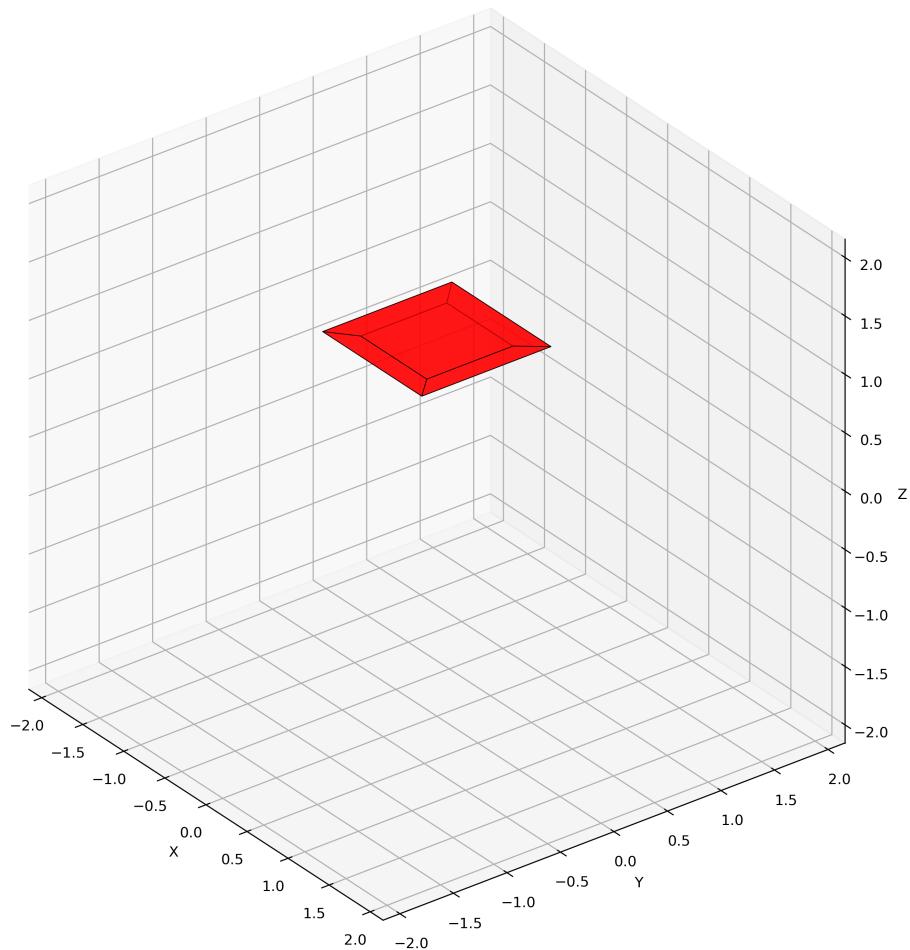


Рисунок 37 — Перспектива кубика

## Анализ эффектов

- Уменьшение  $d$  усиливает эффект перспективы
- Параллельные линии сходятся в точку схода
- Объекты, расположенные дальше, кажутся меньше
- Перспектива создает иллюзию глубины

## Задание 8: Построение домика (почти Blender)

### Постановка задачи

Создать сложную 3D сцену - домик, используя все изученные преобразования, и продемонстрировать процесс построения.

## Структура домика

Домик состоит из 12 элементов:

- Фундамент ( $8 \times 6 \times 1$ )
- 4 стены ( $6 \times 0.4 \times 4$  и  $0.4 \times 6 \times 4$ )
- 2 части крыши ( $5.46 \times 6 \times 0.55$ )
- Дверь ( $1.6 \times 0.2 \times 3$ )
- 2 окна ( $1.6 \times 0.2 \times 1.6$ )
- Дымоход ( $0.6 \times 0.6 \times 2$ )
- Труба ( $0.4 \times 0.4 \times 1$ )

## Процесс построения

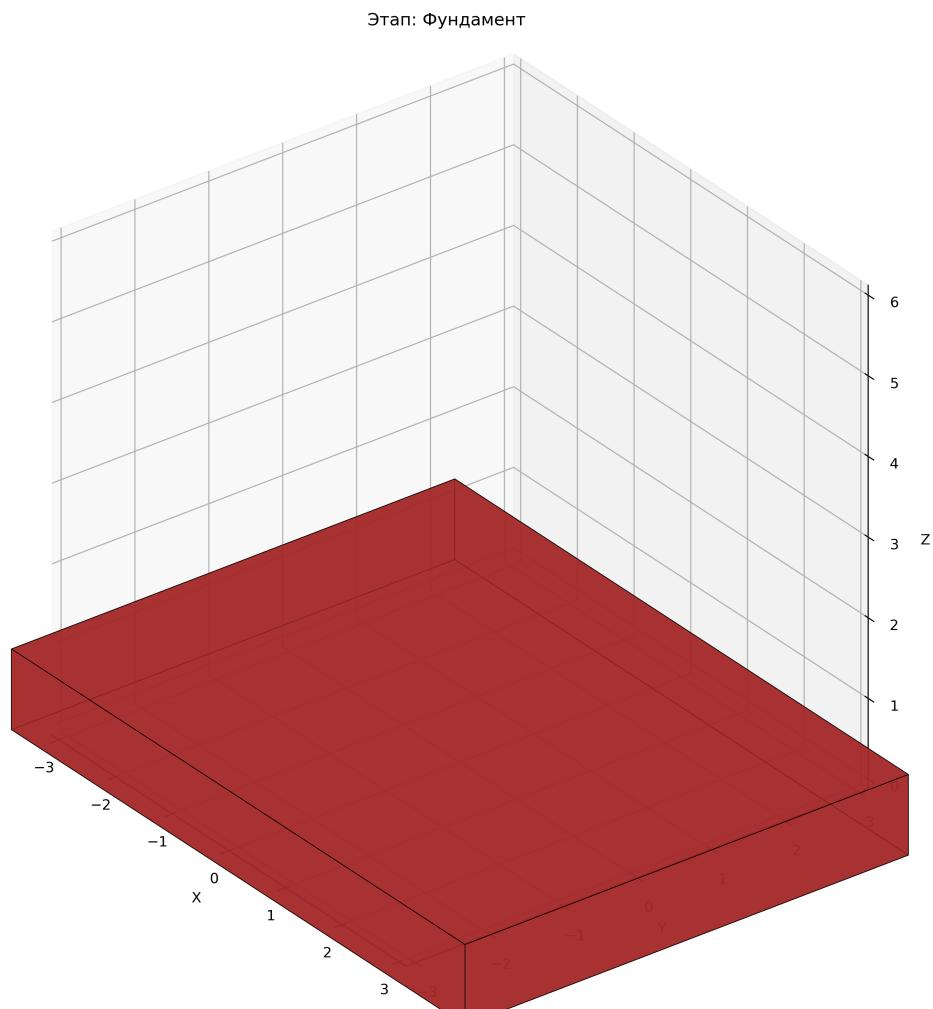


Рисунок 38 — Этап 1: Фундамент

Этап: Стены

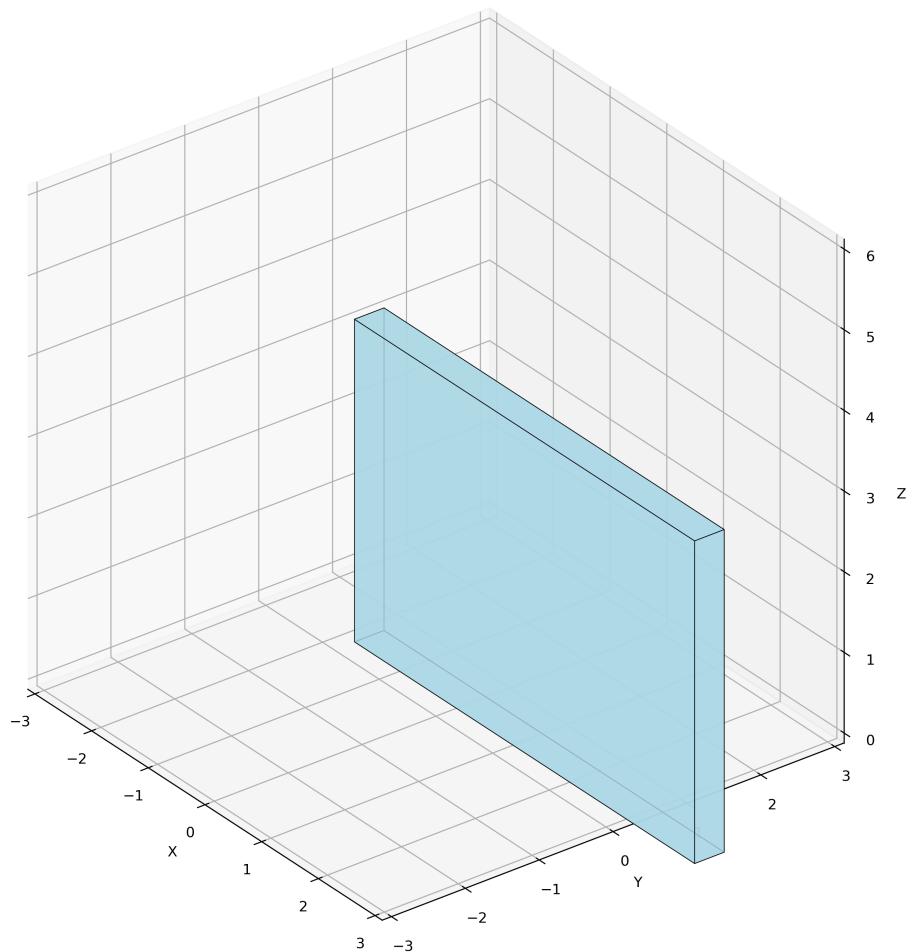


Рисунок 39 — Этап 2: Стены

Этап: Крыша

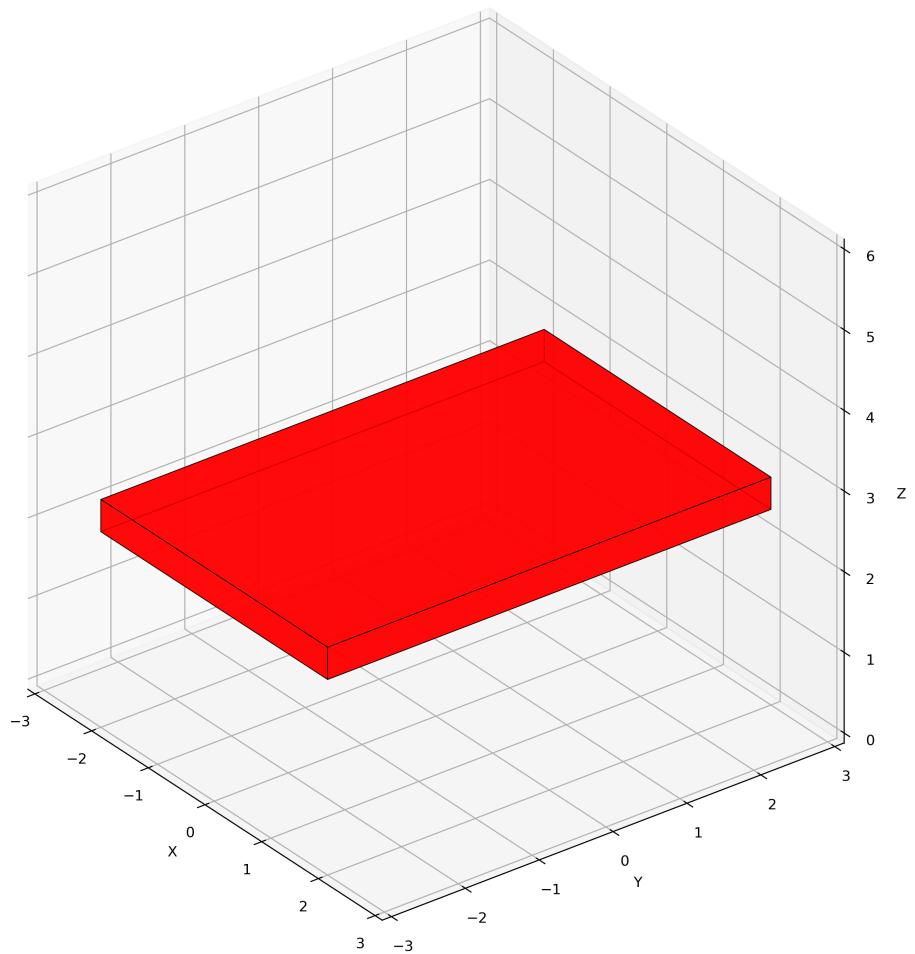


Рисунок 40 — Этап 3: Крыша

Этап: Дверь

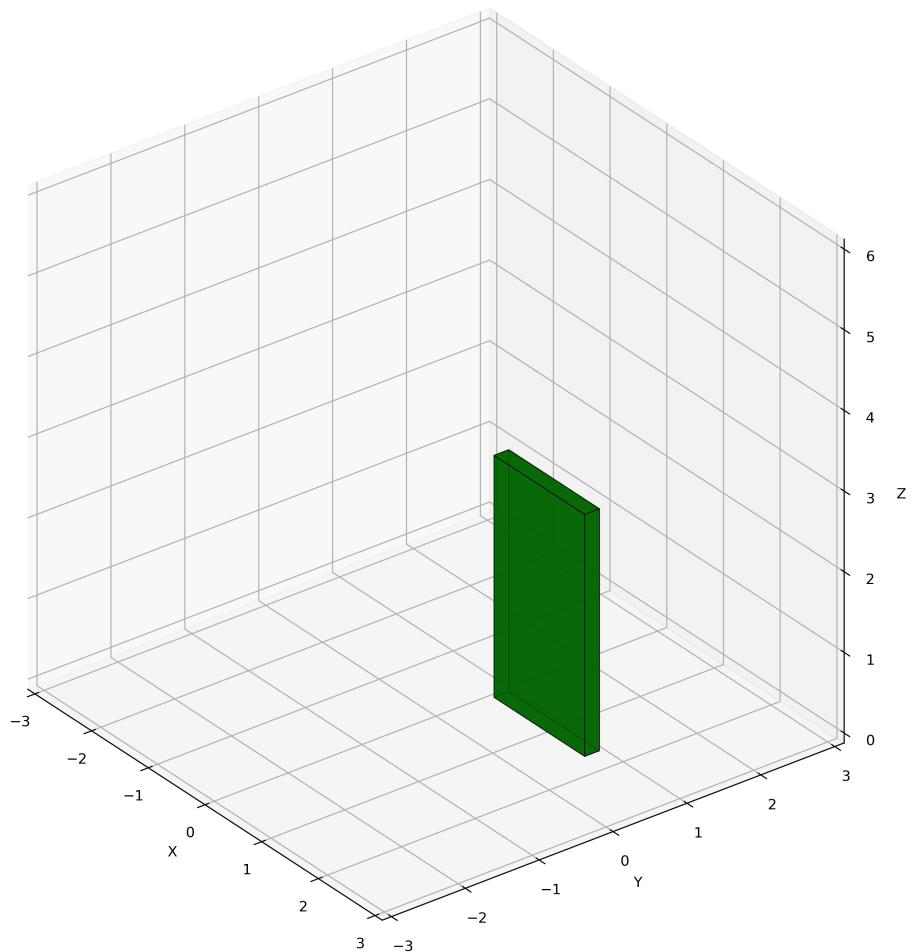


Рисунок 41 — Этап 4: Дверь

Этап: Окна

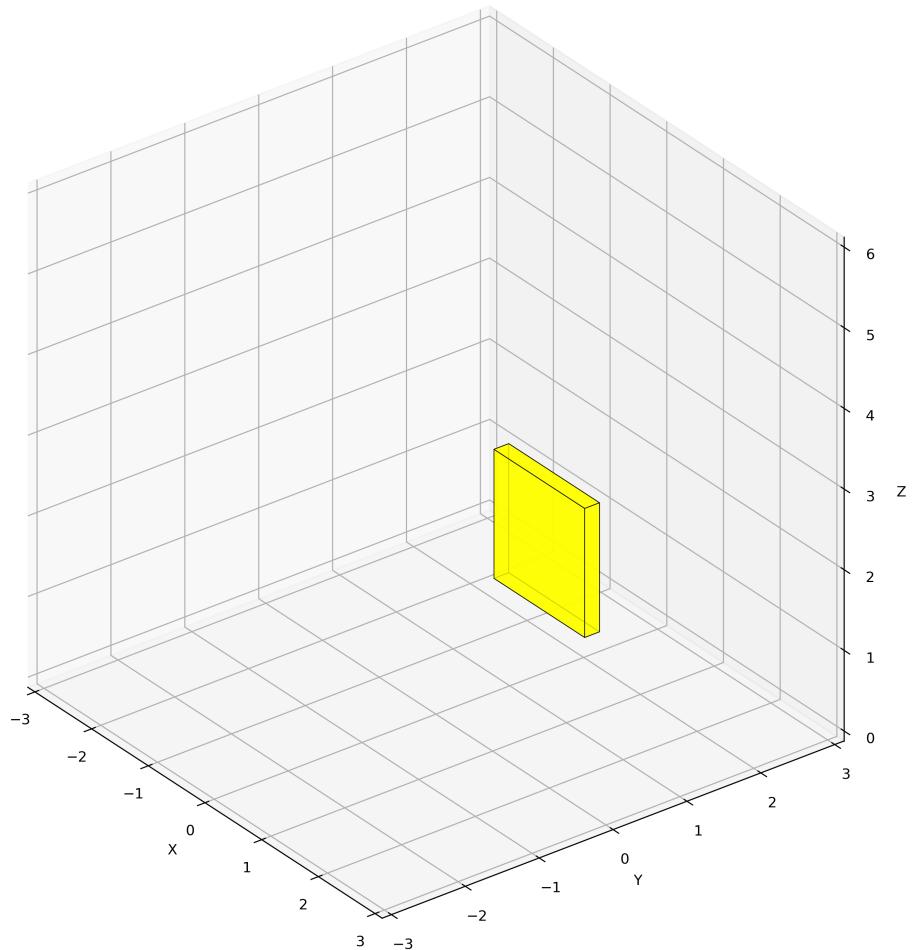


Рисунок 42 — Этап 5: Окна

Этап: Дымоход

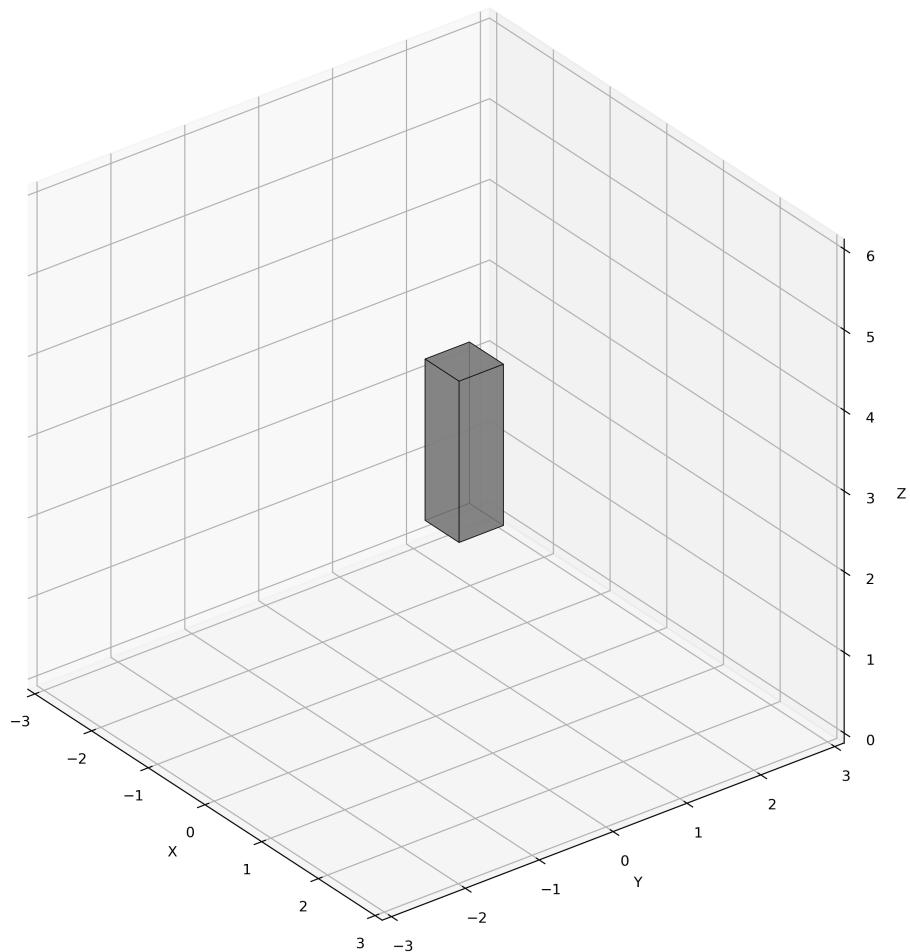


Рисунок 43 — Этап 6: Дымоход

## Виды домика с разных углов

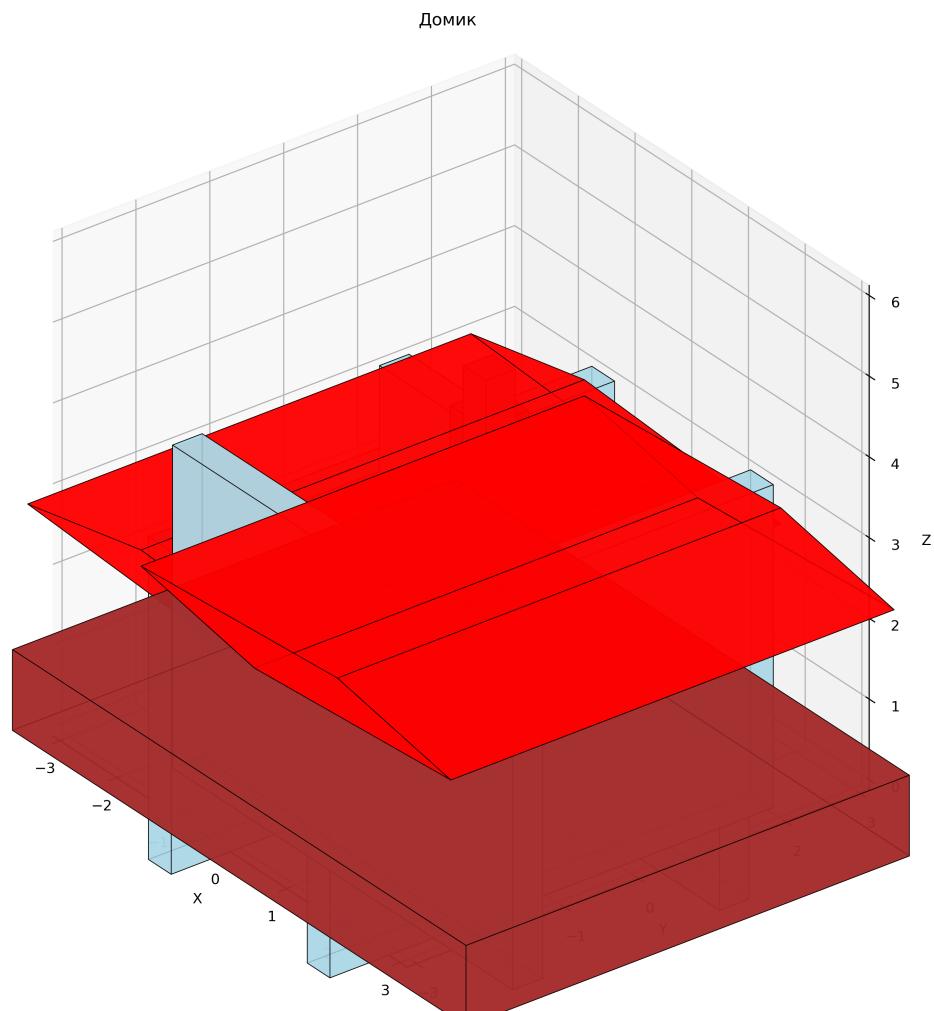


Рисунок 44 — Исходный вид домика

Домик: Вид сбоку и сверху

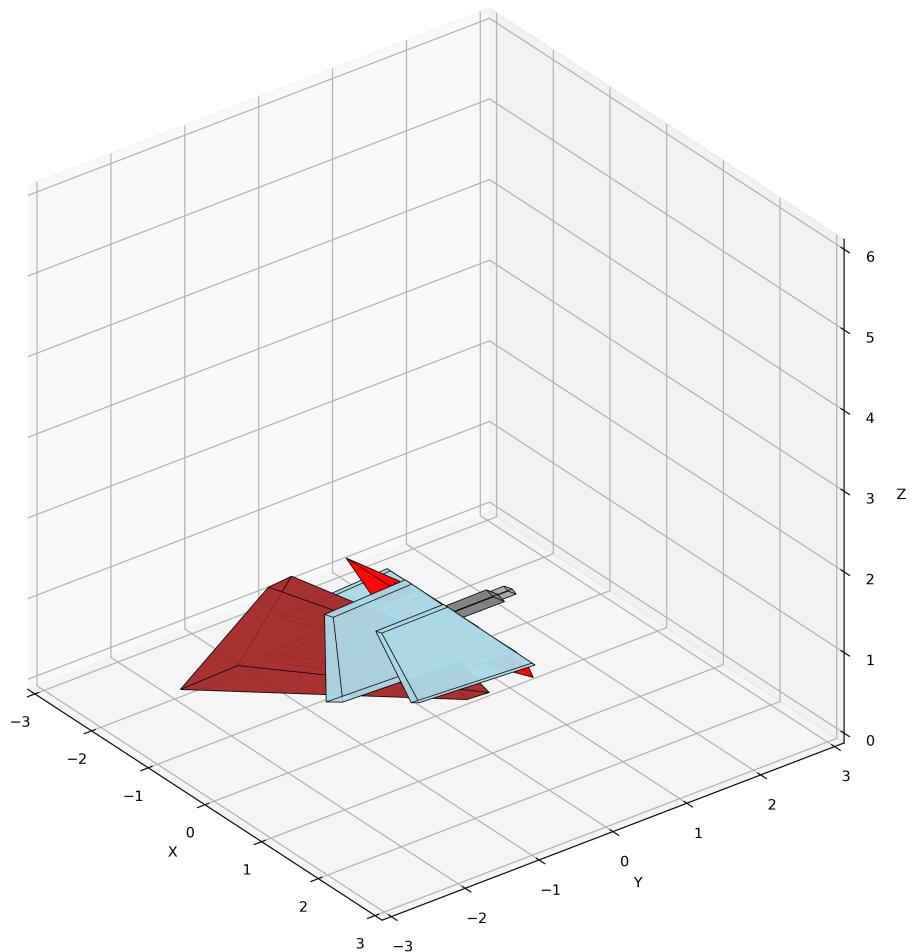


Рисунок 45 — Вид сбоку и сверху

Домик: Вид спереди

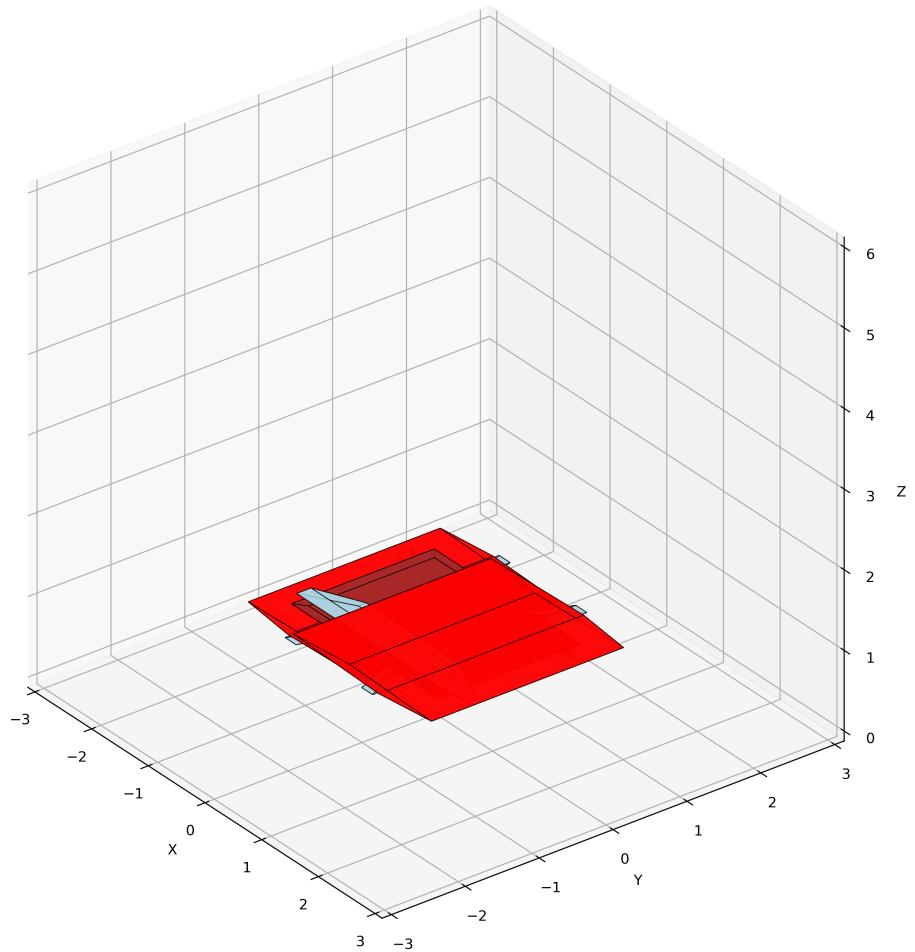


Рисунок 46 — Вид спереди

Домик: Вид спереди

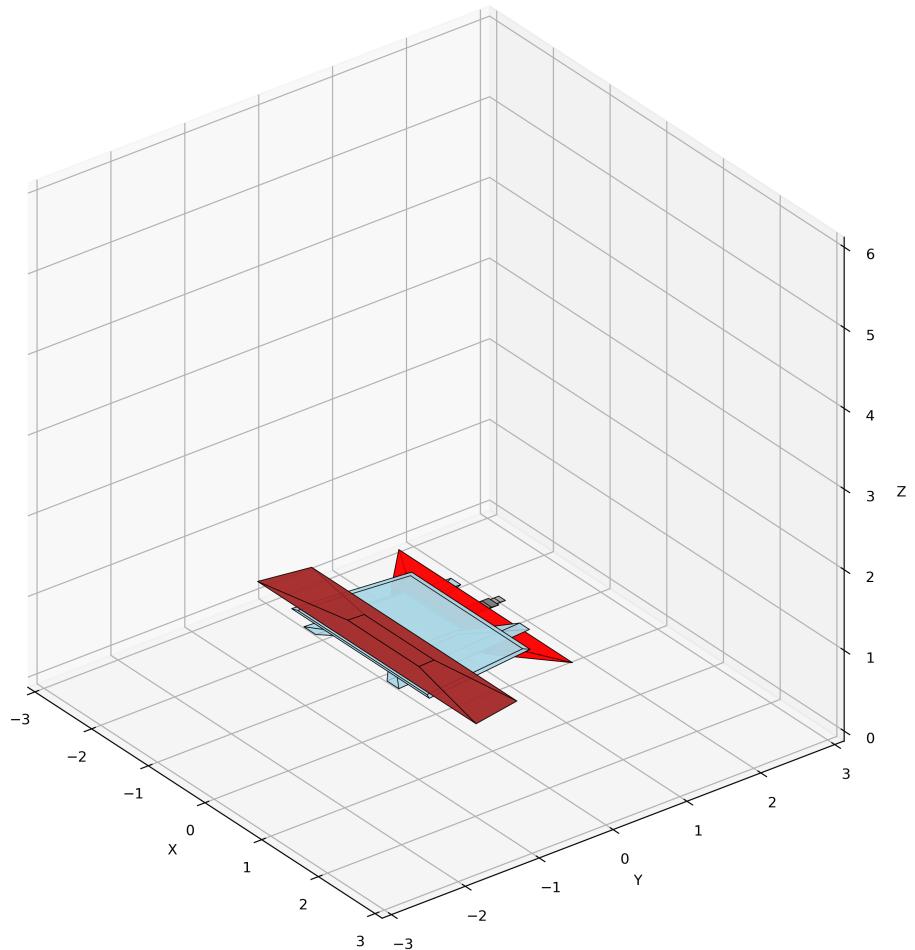


Рисунок 47 — Вид спереди

Домик: Вид под углом

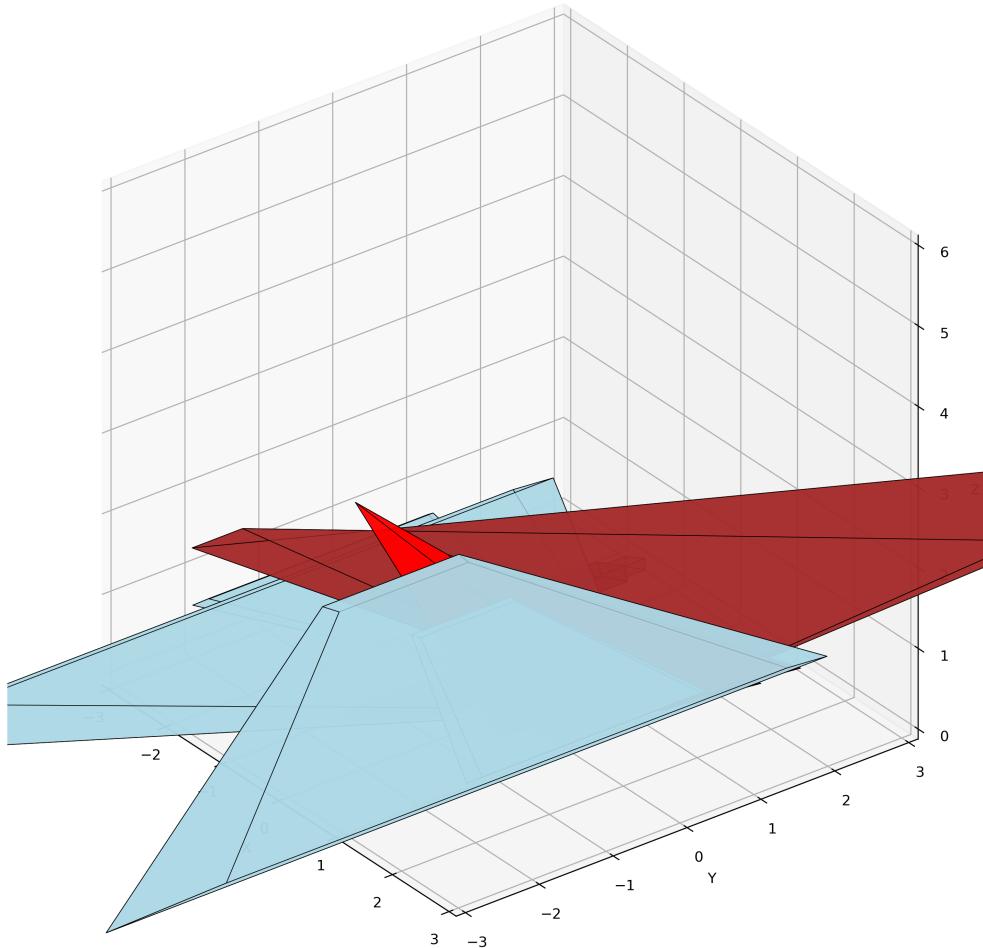


Рисунок 48 — Вид под углом

## Статистика домика

- Количество элементов: 12
- Общий объем: 115.47 кубических единиц
- Использованы все типы преобразований: масштабирование, перемещение, вращение
- Каждый элемент имеет свой цвет и назначение

## Общий анализ и выводы

### Достигнутые результаты

1. Успешно реализованы все основные аффинные преобразования в 3D
2. Исследованы свойства и композиции преобразований

3. Демонстрирована работа с однородными координатами
4. Реализована камера с различными позициями и ориентациями
5. Исследованы перспективные преобразования
6. Создана сложная 3D сцена (домик) с использованием всех изученных техник

## Ключевые выводы

- Однородные координаты необходимы для представления аффинных преобразований в матричном виде
- Преобразования масштабирования и перемещения не коммутируют
- Любое вращение в 3D можно представить как вращение вокруг одной оси (теорема Эйлера)
- Камера позволяет изменять точку зрения на сцену
- Перспективные преобразования создают реалистичное изображение глубины
- Композиция преобразований позволяет создавать сложные 3D сцены

## Практическое применение

Полученные знания и навыки могут быть применены в:

- Компьютерной графике и анимации
- Разработке игр
- Системах автоматизированного проектирования (CAD)
- Робототехнике и кинематике
- Компьютерном зрении

## Заключение

Лабораторная работа успешно выполнена. Все поставленные задачи решены, включая создание базовых геометрических объектов, реализацию основных аффинных преобразований, исследование их свойств и композиций, а также создание сложной 3D сцены. Полученные результаты демонстрируют успешное выполнение поставленных задач.

стрируют глубокое понимание математических основ компьютерной графики и готовность к применению этих знаний в практических задачах.