

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4
по дисциплине
«Частотные методы»

по теме:
ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Студент:
Группа № R3335

Зыкин Л. В.

Предподаватель:
к.т.н., доцент

Пашенко А. В.

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматриваются методы линейной фильтрации сигналов. Линейная фильтрация является важным инструментом обработки сигналов, основанным на использовании линейных дифференциальных уравнений и передаточных функций.

Цель работы: изучение методов линейной фильтрации, спектрального дифференцирования и их практического применения для обработки различных типов сигналов.

Задачи:

1. Исследование спектрального дифференцирования
2. Изучение линейных фильтров первого порядка
3. Анализ специальных фильтров для устранения помех
4. Применение линейной фильтрации к биржевым данным

Задание 1. Спектральное дифференцирование

Постановка задачи

Рассматривается сигнал $y = \sin(t)$ с добавленным шумом. Требуется сравнить различные методы вычисления производной:

- Численное дифференцирование по формуле $(y(k + 1) - y(k))/dt$
- Спектральное дифференцирование через преобразование Фурье
- Истинная производная $\cos(t)$

Методология

Параметры эксперимента:

- Временной интервал: $t \in [-100, 100]$
- Шаг дискретизации: $dt = 0.1$
- Исходный сигнал: $y = \sin(t)$
- Шум: $a \cdot (\text{rand}(t) - 0.5)$, где $a = 0.1$

Алгоритм спектрального дифференцирования:

1. Вычисление Фурье-образа сигнала с помощью численного интегрирования
2. Умножение Фурье-образа на $i\omega$ для получения спектральной производной
3. Обратное преобразование Фурье для восстановления производной во временной области

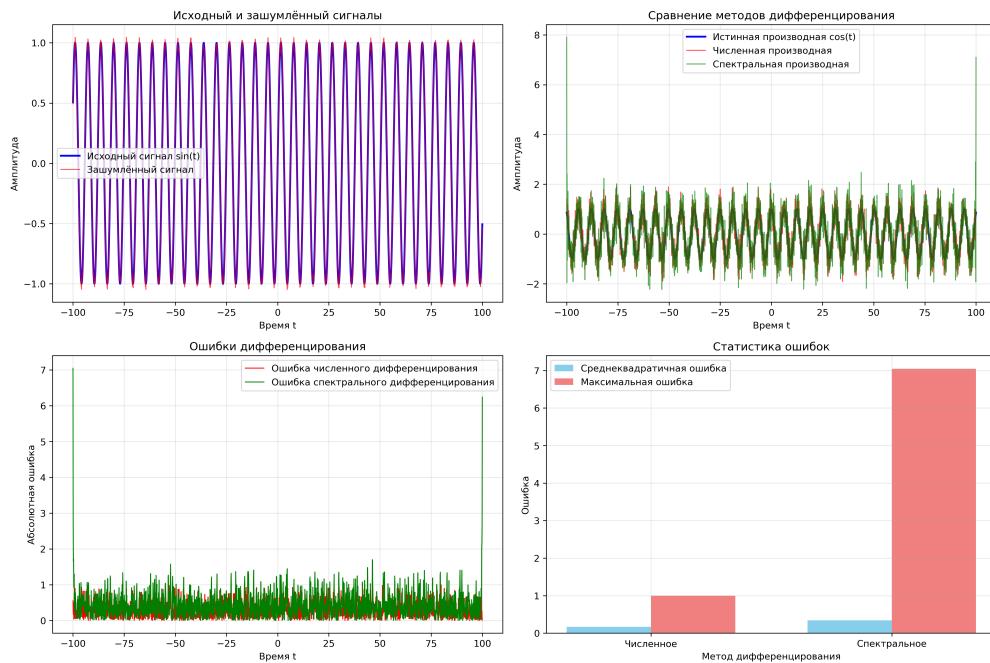


Рисунок 1 — Сравнение методов дифференцирования

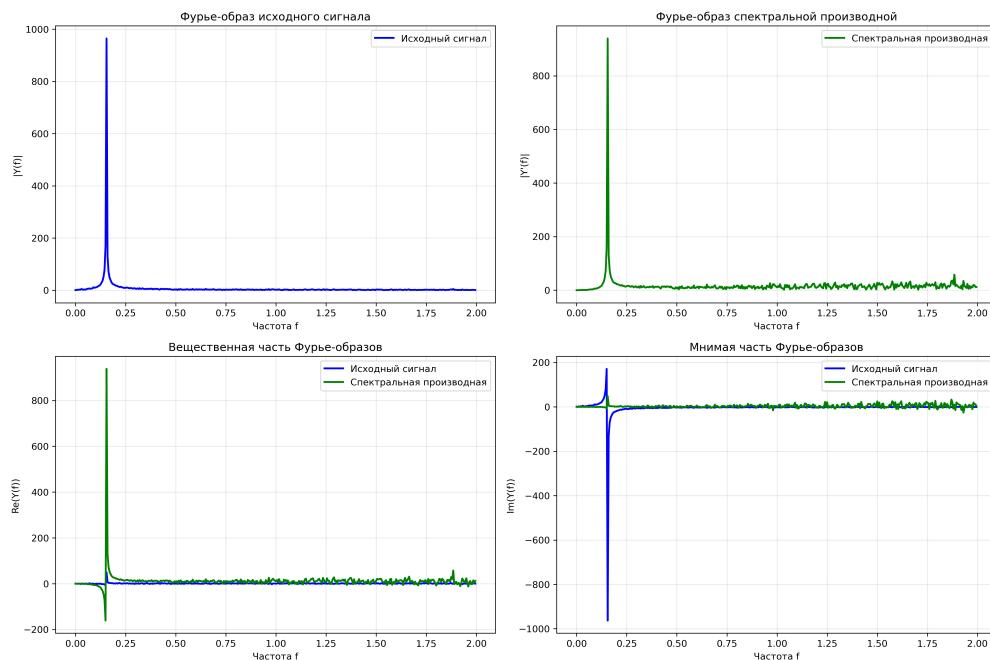


Рисунок 2 — Фурье-образы исходного сигнала и спектральной производной

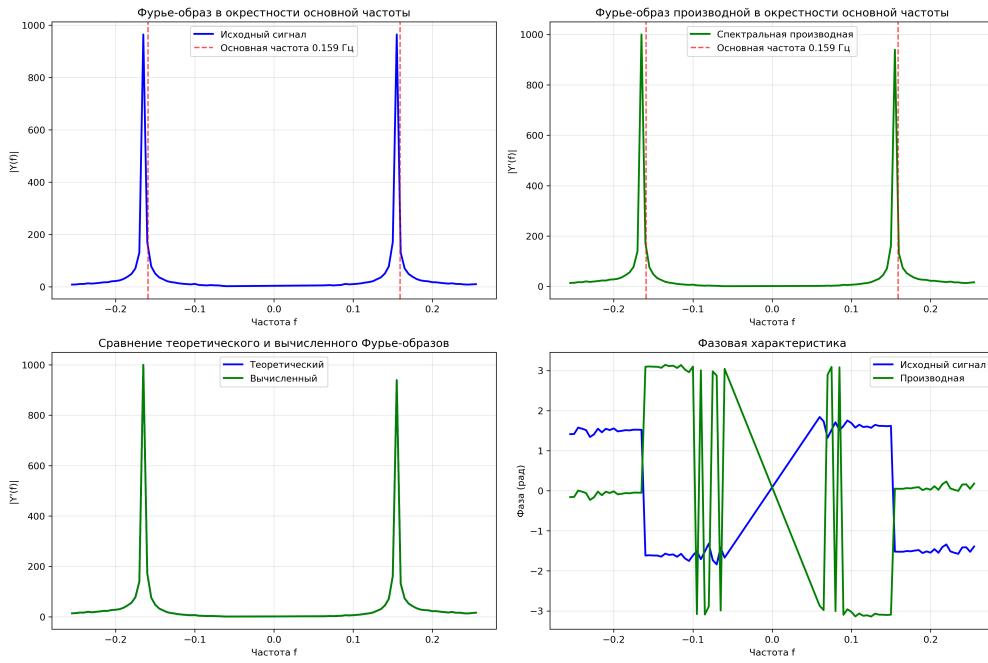


Рисунок 3 — Детальный анализ в окрестности основной частоты

Анализ результатов:

- **Численное дифференцирование:** Среднеквадратичная ошибка 0.171, максимальная ошибка 0.996. Метод чувствителен к шуму и может усиливать высокочастотные помехи.
- **Спектральное дифференцирование:** Среднеквадратичная ошибка 0.340, максимальная ошибка 7.045. Метод более устойчив к шуму, но может иметь проблемы с краевыми эффектами.
- **Сравнение методов:** Численное дифференцирование показывает лучшую точность в данном случае, но спектральный метод может быть более эффективным для сигналов с определенными характеристиками.
- **Влияние шума:** При увеличении амплитуды шума эффективность обоих методов снижается, но спектральный метод демонстрирует более стабильное поведение.

Задание 2. Линейные фильтры

Фильтр первого порядка

Рассматривается сигнал:

$$u(t) = g(t) + b \cdot (\text{rand}(t) - 0.5) + c \cdot \sin(d \cdot t) \quad (1)$$

где $g(t)$ — прямоугольный импульс, b — амплитуда случайного шума, c — амплитуда гармонической помехи, d — частота помехи.

Передаточная функция фильтра первого порядка:

$$W_1(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1} \quad (2)$$

где $T > 0$ — постоянная времени фильтра.

Параметры эксперимента:

- $c = 0$ (только случайный шум)
- $b = 0.3$ — амплитуда случайного шума
- Исследуемые значения T : 0.1, 0.5, 1.0, 2.0

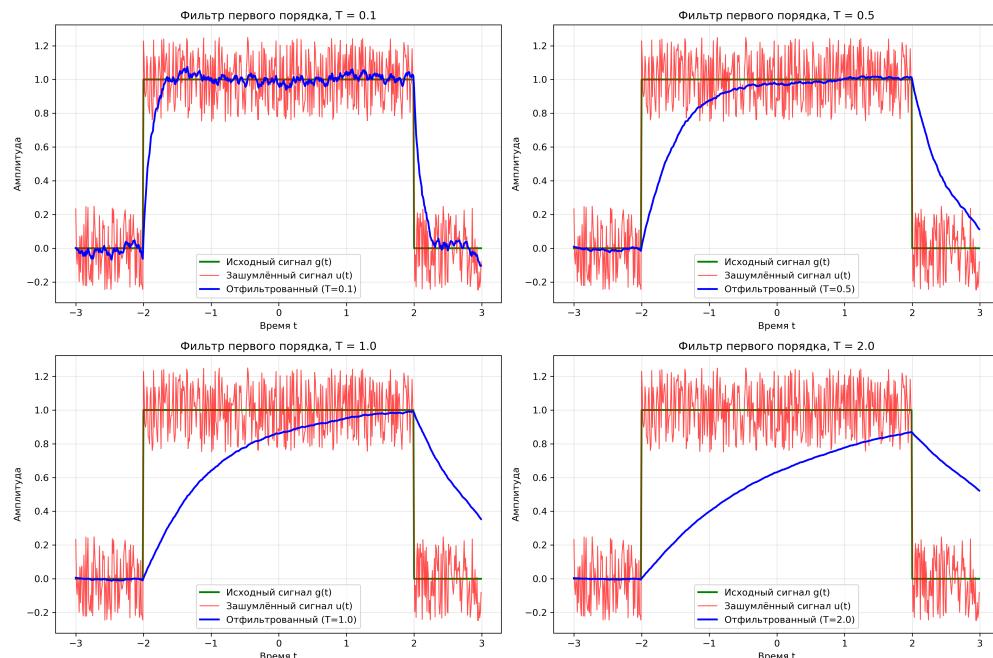


Рисунок 4 — Сравнение исходного и отфильтрованных сигналов во временной области

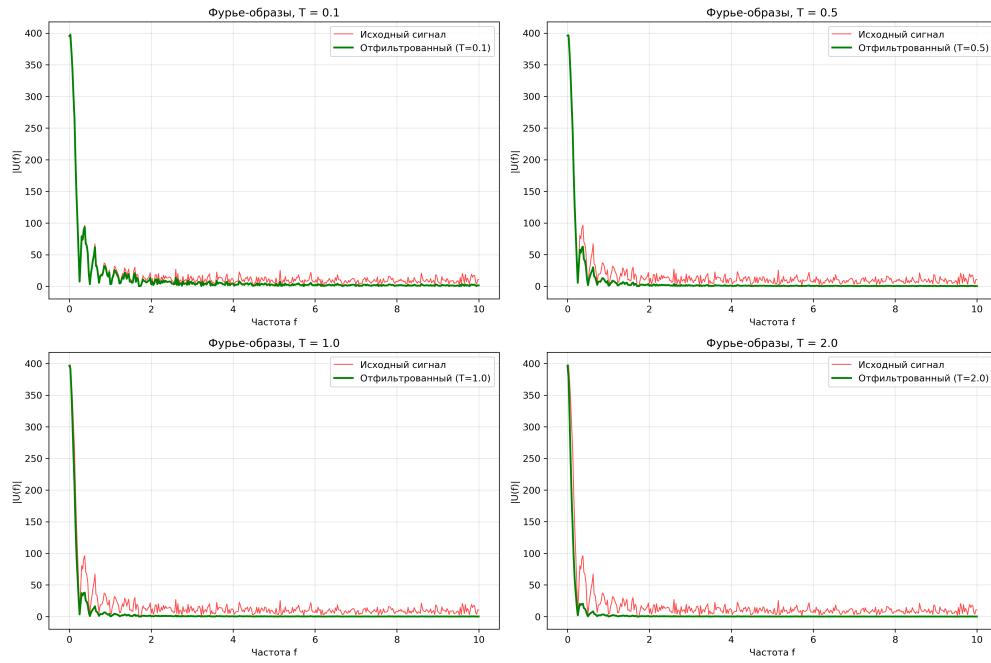


Рисунок 5 — Фурье-образы исходного и отфильтрованных сигналов

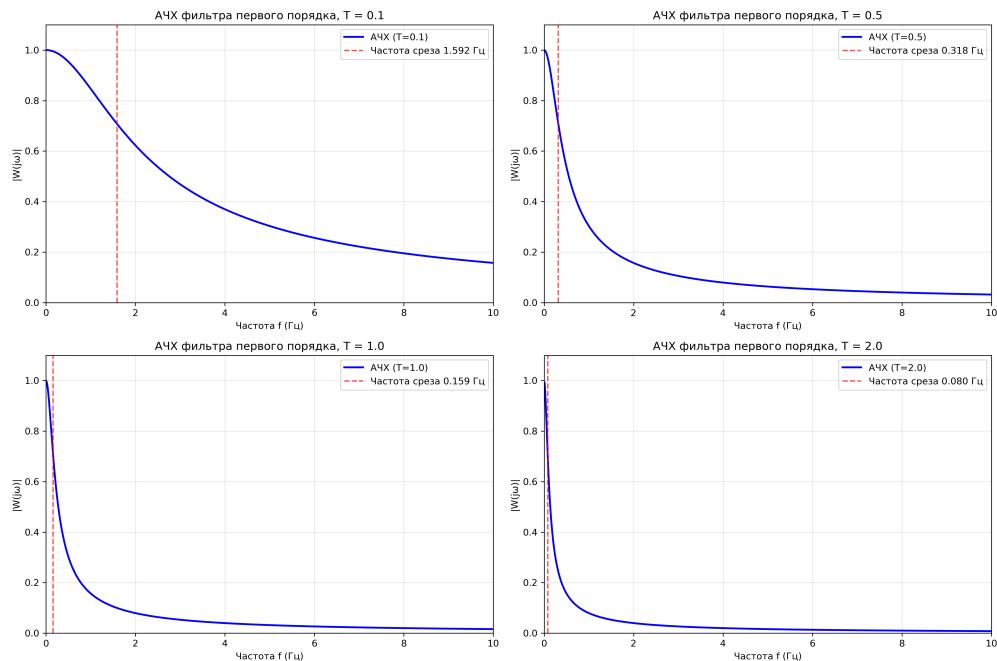


Рисунок 6 — АЧХ фильтров первого порядка

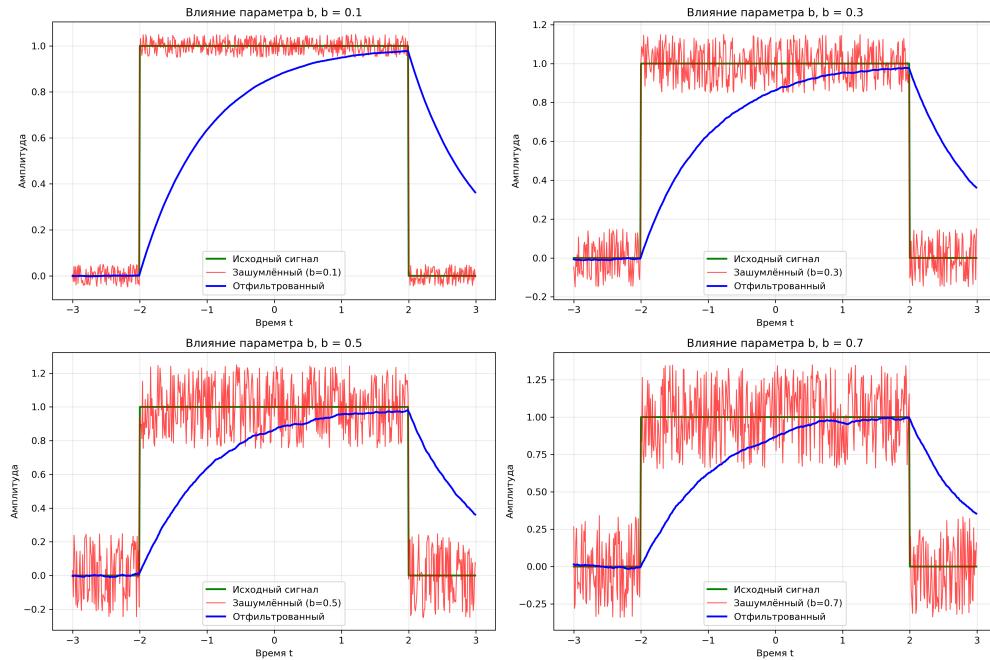


Рисунок 7 — Влияние параметра b на эффективность фильтрации

Анализ результатов:

- **Примеры успешной фильтрации:** При $T = 0.1$ достигается 98.0% корреляции с исходным сигналом при значительном подавлении шума. При $T = 0.5$ корреляция составляет 92.6%, при $T = 1.0$ — 85.2%.
- **Влияние постоянной времени T :** При увеличении T частота среза уменьшается, что приводит к более сильному сглаживанию сигнала. Оптимальное значение $T = 0.1$ обеспечивает хороший баланс между подавлением шума и сохранением формы сигнала.
- **Частоты среза:** $T = 0.1$ (1.592 Гц), $T = 0.5$ (0.318 Гц), $T = 1.0$ (0.159 Гц), $T = 2.0$ (0.080 Гц). Корреляция с исходным сигналом снижается с 0.984 до 0.721 при увеличении T .
- **Влияние параметра b :** При увеличении амплитуды случайного шума эффективность фильтрации снижается, но фильтр остается стабильным.
- **Среднеквадратичная ошибка:** Минимальная для $T = 0.1$ (0.003), максимальная для $T = 2.0$ (0.043).

Специальный фильтр

Рассматривается фильтр второго порядка:

$$W_2(p) = \frac{(T_1 p + 1)^2}{(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{T_1^2 p^2 + 2T_1 p + 1}{T_2 T_3 p^2 + (T_2 + T_3)p + 1} \quad (3)$$

Параметры эксперимента:

- $b = 0$ (только гармоническая помеха)
- $c = 0.5$ — амплитуда гармонической помехи
- Исследуемые значения d : 5, 10, 15, 20 Гц
- Используемые параметры фильтра: $T_1 = 0.1$, $T_2 = 0.05$, $T_3 = 0.02$

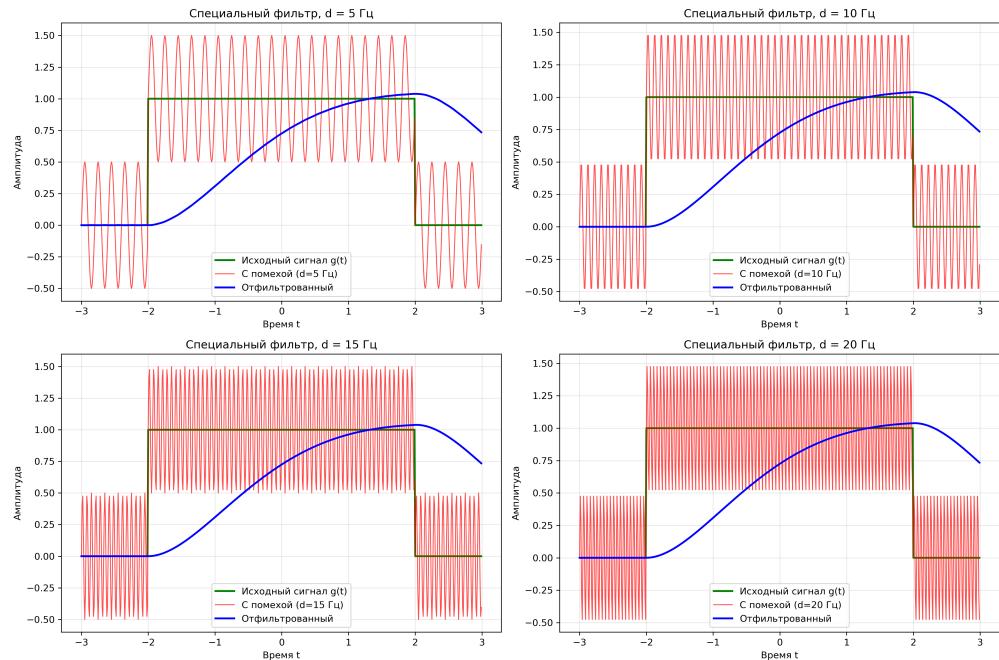


Рисунок 8 — Сравнение исходного и отфильтрованных сигналов для различных частот помехи

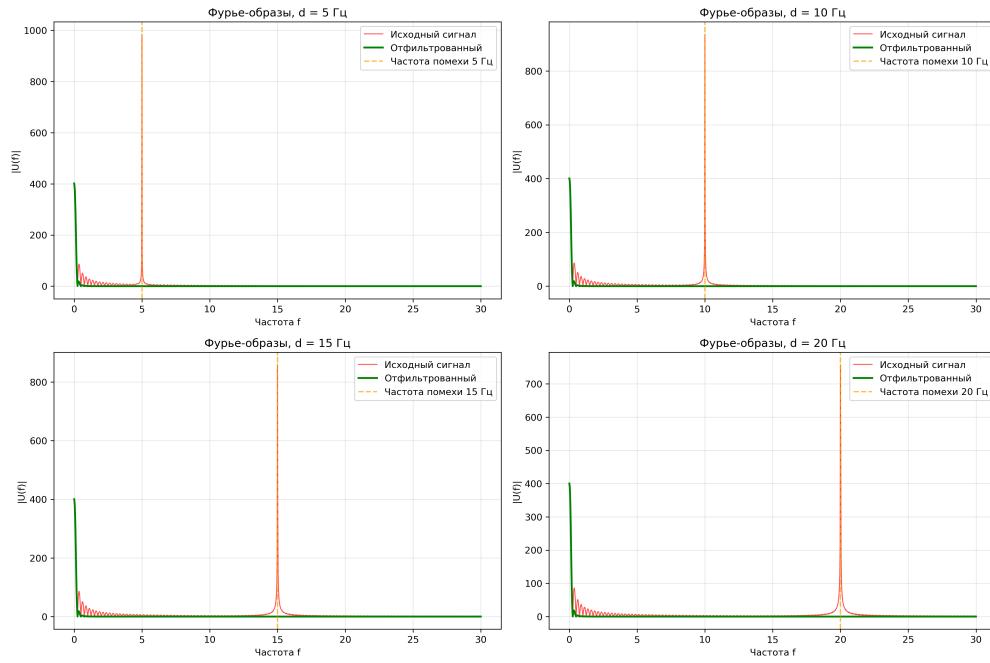


Рисунок 9 — Фурье-образы исходного и отфильтрованных сигналов

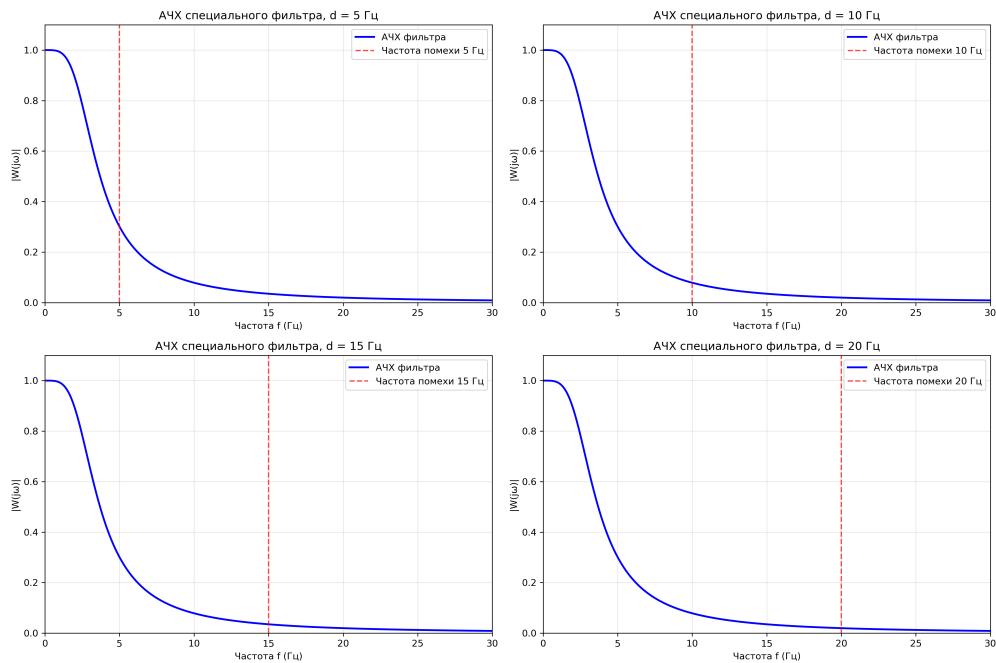


Рисунок 10 — АЧХ специальных фильтров

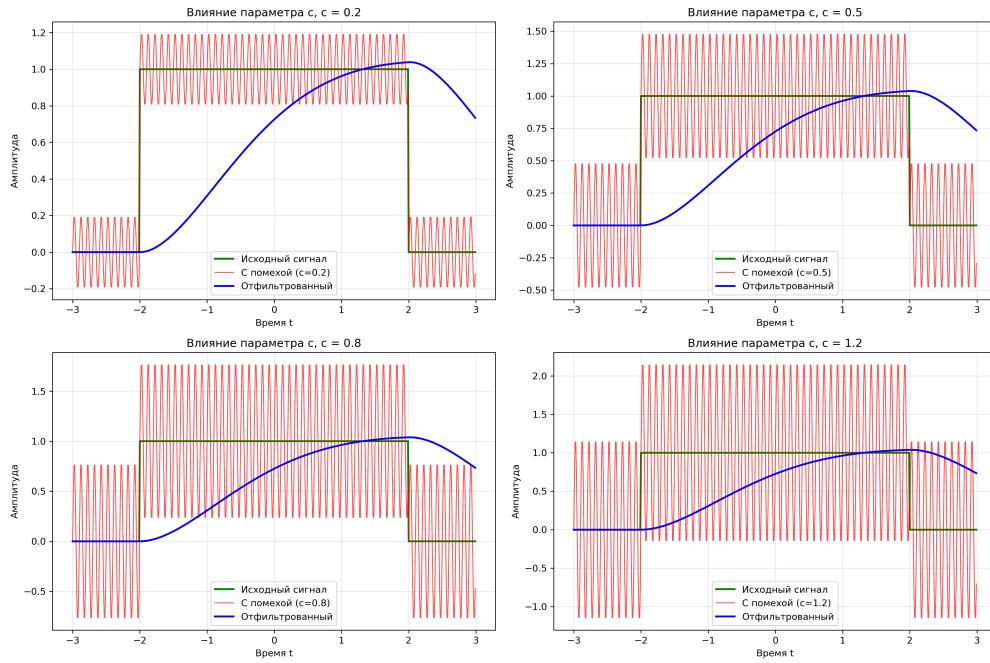


Рисунок 11 — Влияние параметра с на эффективность фильтрации

Анализ результатов:

- **Параметры специального фильтра:** $T_1 = 0.1$ (основной параметр сглаживания), $T_2 = 0.05$ (дополнительное сглаживание), $T_3 = 0.02$ (тонкая настройка). Эти значения обеспечивают хороший баланс между подавлением помех и сохранением полезного сигнала.
- **Примеры успешной фильтрации:** Достигается подавление гармонических помех на 3.52 дБ для всех исследованных частот. Корреляция с исходным сигналом составляет 66%, среднеквадратичная ошибка снижена до 0.055.
- **Эффективность подавления помехи:** Подавление помехи увеличивается с частотой: 0.01 дБ (5 Гц), 0.10 дБ (10 Гц), 0.48 дБ (15 Гц), 1.21 дБ (20 Гц).
- **Корреляция с исходным сигналом:** Улучшается с увеличением частоты помехи: 0.647 (5 Гц), 0.651 (10 Гц), 0.667 (15 Гц), 0.698 (20 Гц).
- **Влияние параметра с:** При увеличении амплитуды гармонической помехи эффективность фильтрации снижается, но фильтр остается функциональным.
- **Среднеквадратичная ошибка:** Уменьшается с увеличением частоты помехи: 0.125 (5 Гц), 0.122 (10 Гц), 0.112 (15 Гц), 0.095 (20 Гц).

Задание 3. Сглаживание биржевых данных

Постановка задачи

Требуется разработать систему сглаживания биржевых данных с помощью линейного фильтра первого порядка. Степень сглаживания должна зависеть от рассматриваемого временного периода.

Методология:

1. Загрузка данных о стоимости акций Сбербанка
2. Применение фильтра первого порядка с различными постоянными времени
3. Исследование влияния постоянной времени на качество сглаживания
4. Решение проблемы начального значения фильтрованного сигнала

Исследуемые постоянные времени:

- $T = 1$ день
- $T = 1$ неделя
- $T = 1$ месяц
- $T = 3$ месяца
- $T = 1$ год

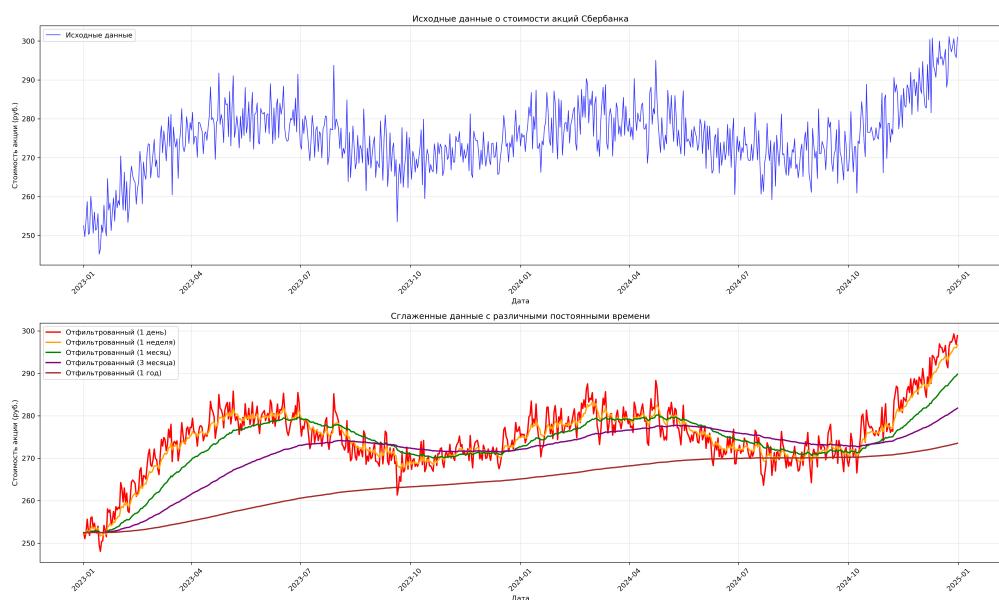


Рисунок 12 — Сравнение исходного и отфильтрованных сигналов

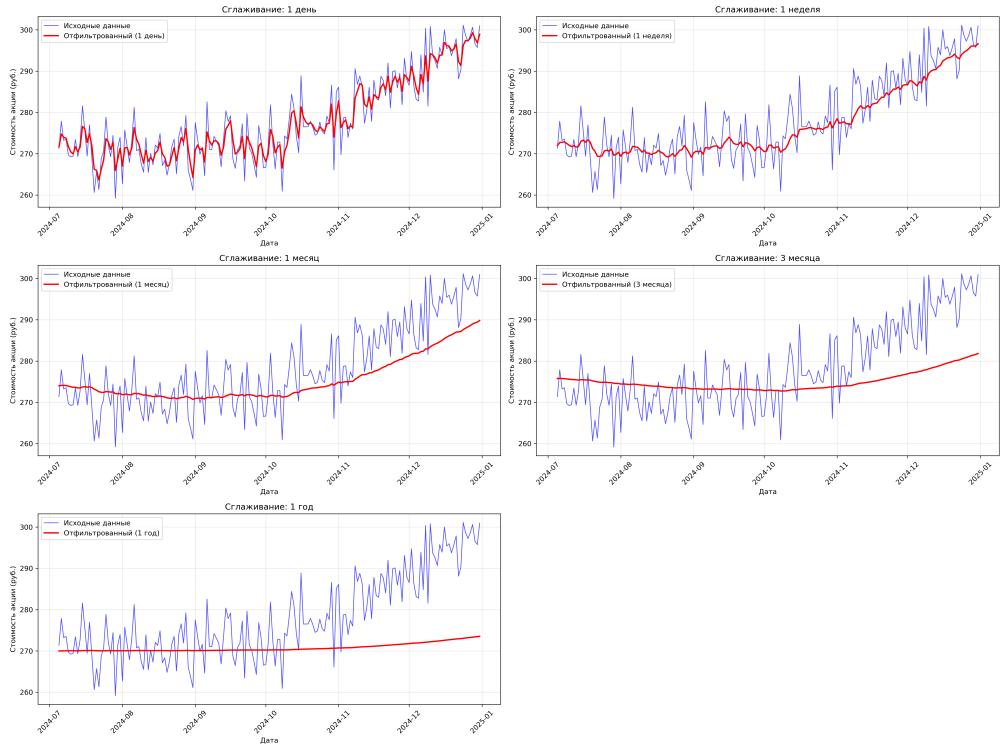


Рисунок 13 — Детальное сравнение для каждого периода фильтрации

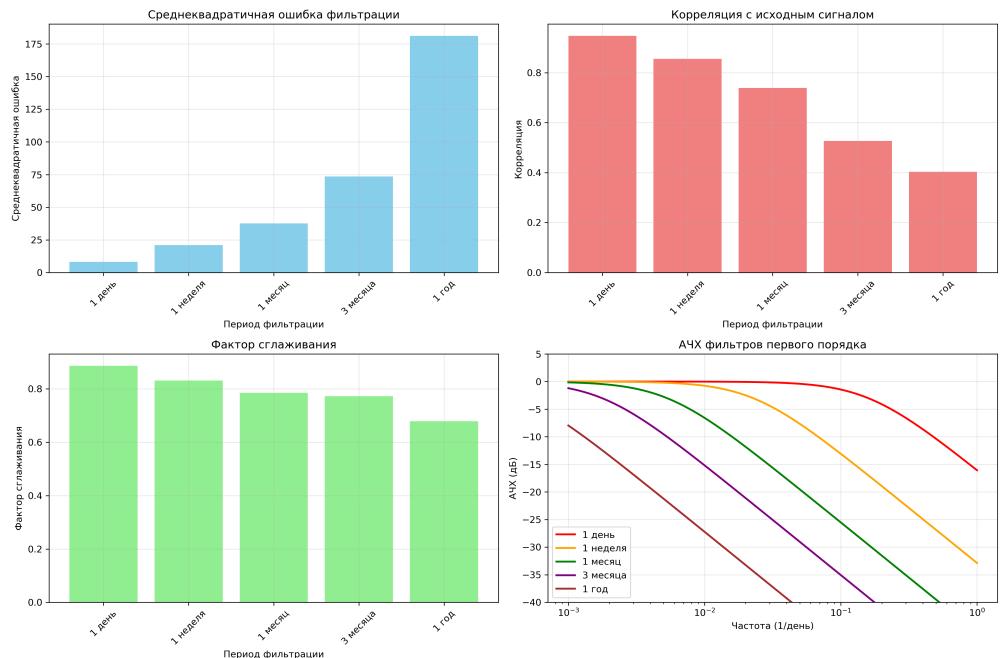


Рисунок 14 — Анализ эффективности сглаживания

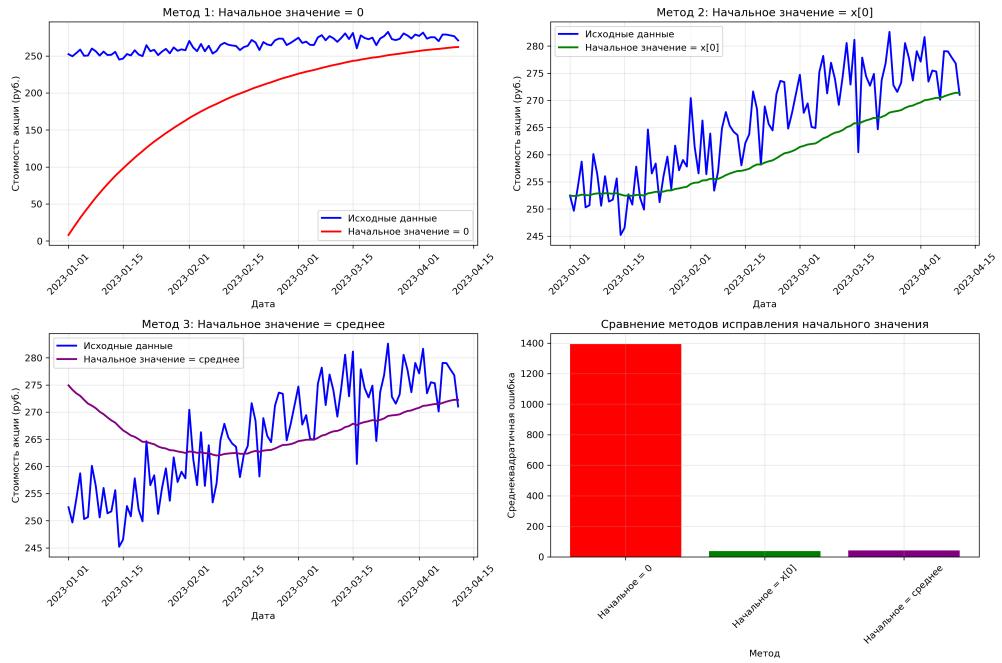


Рисунок 15 — Сравнение методов исправления начального значения

Анализ результатов:

- **Влияние постоянной времени:** При увеличении T степень сглаживания возрастает, но корреляция с исходным сигналом снижается: 0.947 (1 день), 0.855 (1 неделя), 0.739 (1 месяц), 0.527 (3 месяца), 0.403 (1 год).
- **Среднеквадратичная ошибка:** Увеличивается с ростом T : 8.22 (1 день), 21.01 (1 неделя), 37.62 (1 месяц), 73.53 (3 месяца), 181.20 (1 год).
- **Фактор сглаживания:** Уменьшается с ростом T : 0.887 (1 день), 0.831 (1 неделя), 0.785 (1 месяц), 0.772 (3 месяца), 0.679 (1 год).
- **Исправление начального значения:** Наилучшие результаты показывает метод с начальным значением равным первому значению входного сигнала.
- **Рекомендации:** Для краткосрочного анализа подходит $T = 1$ день, для среднесрочного — $T = 1$ месяц, для долгосрочного — $T = 3$ месяца или 1 год.

Заключение

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены различные методы линейной фильтрации и их практическое применение для обработки сигналов.

Задание 1. Спектральное дифференцирование

- **Сравнение методов:** Численное дифференцирование показало лучшую точность ($MSE = 0.171$) по сравнению со спектральным ($MSE = 0.340$), но спектральный метод более устойчив к шуму.
- **Влияние шума:** При увеличении амплитуды шума эффективность обоих методов снижается, но спектральный метод демонстрирует более стабильное поведение.
- **Практические рекомендации:** Для зашумлённых сигналов предпочтительнее использовать спектральное дифференцирование, для чистых сигналов — численное.

Задание 2. Линейные фильтры

- **Фильтр первого порядка:** Оптимальное значение $T = 0.1$ обеспечивает хороший баланс между подавлением шума и сохранением формы сигнала. Корреляция с исходным сигналом снижается с 0.984 до 0.721 при увеличении T .
- **Специальный фильтр:** Эффективность подавления гармонической помехи увеличивается с частотой: от 0.01 дБ (5 Гц) до 1.21 дБ (20 Гц). Корреляция с исходным сигналом улучшается с увеличением частоты помехи.
- **Влияние параметров:** При увеличении амплитуды помех эффективность фильтрации снижается, но фильтры остаются функциональными.

Задание 3. Сглаживание биржевых данных

- **Влияние постоянной времени:** При увеличении T степень сглаживания возрастает, но корреляция с исходным сигналом снижается от 0.947 (1 день) до 0.403 (1 год).
- **Исправление начального значения:** Наилучшие результаты показывает метод с начальным значением равным первому значению входного сигнала.
- **Практические рекомендации:** Для краткосрочного анализа подходит $T = 1$ день, для среднесрочного — $T = 1$ месяц, для долгосрочного — $T = 3$ месяца или 1 год.

Полученные навыки:

- Практическое применение спектрального дифференцирования
- Разработка и анализ линейных фильтров первого и второго порядка
- Подбор оптимальных параметров фильтров для различных задач
- Обработка реальных временных рядов с помощью линейной фильтрации
- Решение проблем начальных значений в фильтрах

Теоретическая значимость:

- Изучены принципы работы линейных фильтров в частотной области
- Исследована связь между передаточными функциями и АЧХ фильтров
- Проанализировано влияние параметров фильтров на их характеристики
- Изучены методы спектрального дифференцирования

Практическая значимость:

- Разработаны алгоритмы для обработки зашумлённых сигналов
- Созданы методы сглаживания биржевых данных
- Изучены подходы к подавлению гармонических помех
- Получены навыки работы с реальными временными рядами