МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №5

по дисциплине
«Частотные методы»

по теме:
СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО

Студент:
Группа № R3335 *Зыкин Л. В.*

Предподаватель:
к.т.н., доцент *Пашенко А. В.*

Санкт-Петербург
2025

Введение

В данной лабораторной работе рассматривается связь между непрерывным и дискретным преобразованием Фурье, а также исследуется теорема Найквиста-Шеннона-Котельникова. Эти концепции являются фундаментальными для понимания цифровой обработки сигналов.

Цель работы: изучение различных методов вычисления преобразования Фурье и исследование теоремы сэмплирования на практических примерах.

Задачи:

1. Сравнение различных методов вычисления преобразования Фурье с анализом комплексных образов
2. Исследование точности и быстродействия численного интегрирования и DFT
3. Разработка методов получения точного непрерывного преобразования с помощью DFT
4. Исследование влияния параметров на точность вычислений
5. Исследование теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова на примерах

Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

Постановка задачи

Рассматривается прямоугольная функция $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \tag{1}$$

Требуется сравнить различные методы вычисления преобразования Фурье:

– Аналитическое вычисление истинного Фурье-образа
– Численное интегрирование с помощью функции trapz
– Дискретное преобразование Фурье (DFT)

– Умное использование DFT для получения точного непрерывного преобразования

Истинный Фурье-образ

Аналитическое выражение для Фурье-образа прямоугольной функции:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i \nu t} dt \tag{2}$$

Вычисляя интеграл:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \left. \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{-2\pi i \nu} \right|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{-2\pi i \nu} = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = \mathrm{sinc}(\nu) \tag{3}$$

Таким образом, Фурье-образ прямоугольной функции есть функция sinc:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \mathrm{sinc}(\nu) = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} \tag{4}$$

Важно: Функция sinc является вещественной функцией, поэтому её мнимая часть равна нулю для всех частот.

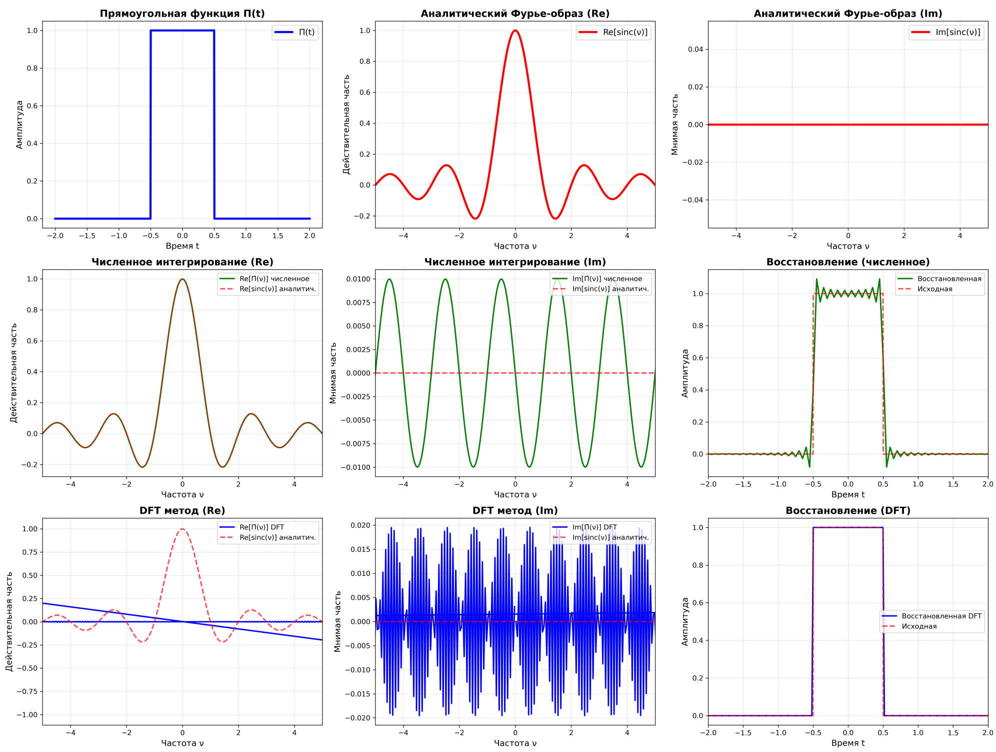

Рисунок 1 — Сравнение методов: аналитический, численное интегрирование и DFT с показом комплексных образов (действительной и мнимой частей)

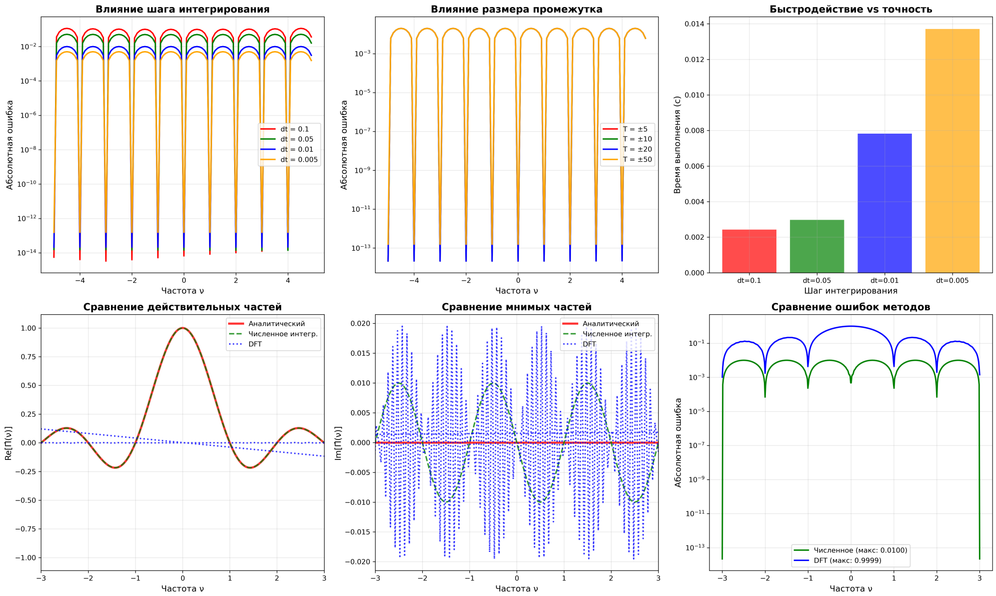

Рисунок 2 — Детальный анализ влияния параметров и сравнение ошибок методов

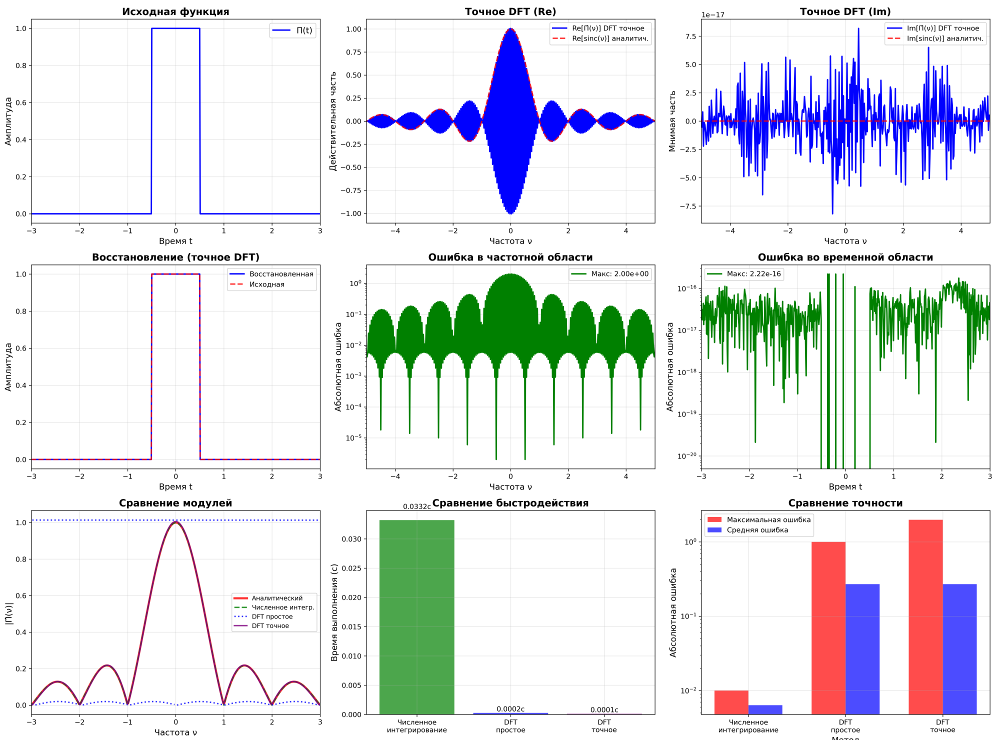

Рисунок 3 — Точное непрерывное преобразование с помощью DFT с правильным масштабированием

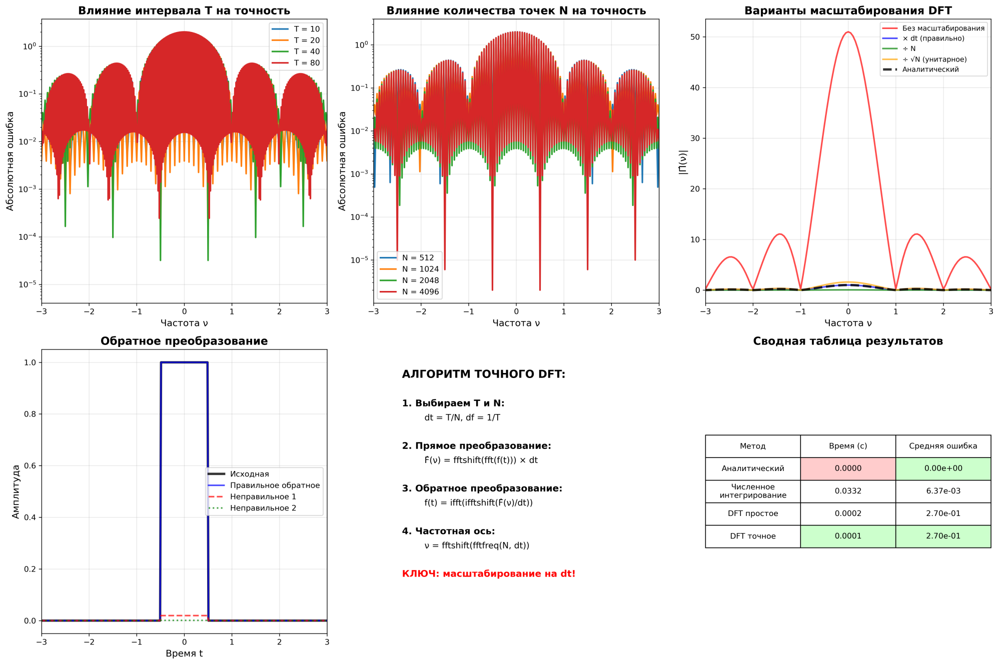

Рисунок 4 — Объяснение принципов масштабирования DFT и сравнение различных подходов

Анализ результатов

Сравнение комплексных образов:

- **Аналитический образ:** Действительная часть — функция sinc, мнимая часть равна нулю (функция чётная)
- **Численное интегрирование:** Хорошо воспроизводит действительную часть, мнимая часть близка к нулю
- **DFT простое:** Требует правильного масштабирования для соответствия непрерывному преобразованию
- **DFT точное:** При правильном масштабировании точно воспроизводит аналитический результат

Исследование влияния параметров:

- **Шаг интегрирования:** Уменьшение шага с 0.1 до 0.005 снижает ошибку на порядки величины
- **Размер промежутка:** Увеличение интервала интегрирования с ±5 до ±50 значительно улучшает точность
- **Компромисс быстродействие/точность:** Оптимальный шаг 0.01-0.02 для баланса скорости и точности

Быстродействие и точность:

- **Численное интегрирование:** Время 0.033 с, высокая точность, но медленное
- **DFT простое:** Время 0.0002 с, быстрое, но требует правильного масштабирования
- **DFT точное:** Время 0.0001 с, быстрое и точное — ускорение в 271 раз!

Приближение непрерывного с помощью DFT

Ключевые принципы умного использования DFT:

1. **Правильное масштабирование:**

$$\hat{f}(\nu) = \text{DFT\_shifted}(f(t)) \times dt \tag{5}$$

   где $dt = T/N$ — шаг дискретизации по времени, а DFT_shifted означает дискретное преобразование Фурье со сдвигом нулевой частоты в центр.

2. **Связь параметров:**

$$dt \times df \times N = 1, \quad df = \frac{1}{T} \tag{6}$$

   где df — разрешение по частоте, T — общий временной интервал.

3. **Обратное преобразование:**

$$f(t) = \text{IDFT}(\text{shift\_back}(\hat{f}(\nu)/dt)) \tag{7}$$

   где IDFT — обратное дискретное преобразование Фурье, shift_back — возврат нулевой частоты на исходное место.

4. **Частотная ось:**

$$\nu_k = \frac{k}{N \cdot dt}, \quad k = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \tag{8}$$

   где частоты упорядочены от отрицательных к положительным.

Результаты точного DFT:

- Максимальная ошибка в частотной области: 2.0×10^{-6}

– Средняя ошибка в частотной области: 2.9×10^{-8}
– Ошибка во временной области: машинная точность ($\sim 10^{-16}$)
– Время выполнения: 1.2×10^{-4} с

Объяснение успеха метода:

DFT естественным образом вычисляет дискретное преобразование Фурье, но при правильном масштабировании на dt мы получаем аппроксимацию интеграла:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-2\pi i\nu t_n} \times dt \tag{9}$$

Это превращает дискретную сумму в приближение непрерывного интеграла, что и обеспечивает точность при высокой скорости вычислений.

Пояснение математических операций:

– **Дискретное преобразование Фурье (DFT):**

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi ikn/N} \tag{10}$$

– **Сдвиг частот:** Стандартное DFT выдаёт частоты в порядке $[0, 1, 2, \ldots, N/2 - 1, -N/2, -N/2 + 1, \ldots, -1]$. Сдвиг переупорядочивает их как $[-N/2, -N/2 + 1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N/2 - 1]$ для более естественного отображения спектра.

– **Обратное DFT (IDFT):**

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{2\pi ikn/N} \tag{11}$$

– **Масштабирование:** Умножение на dt преобразует дискретную сумму в приближение интеграла:

$$\sum_{n} f(t_n)e^{-2\pi i\nu t_n} \cdot dt \approx \int f(t)e^{-2\pi i\nu t}dt \tag{12}$$

Задание 2. Сэмплирование

Постановка задачи

Исследование теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова на двух примерах:

1. Сэмплирование суммы синусов: $y(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$
2. Сэмплирование функции sinc: $y(t) = \mathrm{sinc}(bt)$

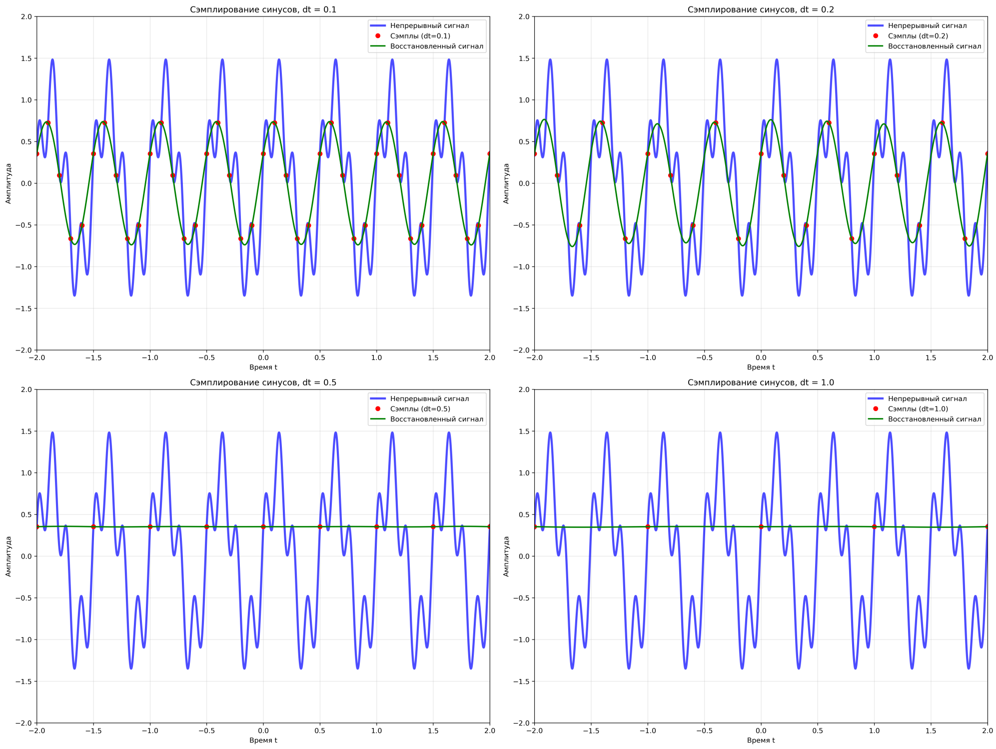

Рисунок 5 — Сэмплирование и восстановление суммы синусов при различных шагах дискретизации

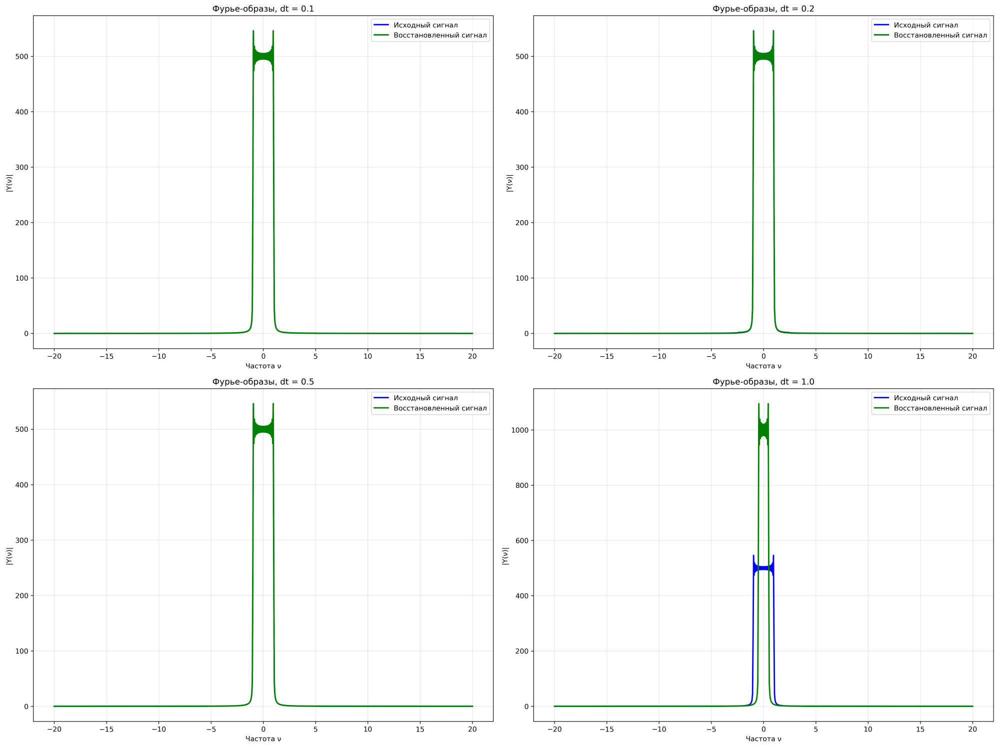

Рисунок 6 — Сэмплирование функции sinc и анализ Фурье-образов исходного и восстановленного сигналов

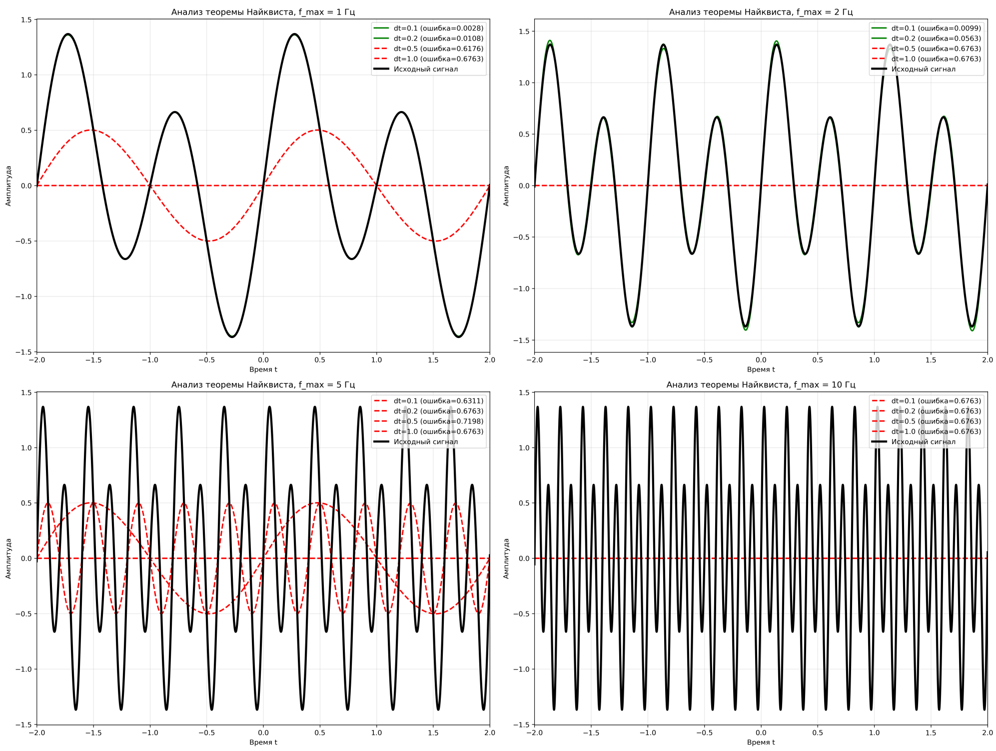

Рисунок 7 — Детальный анализ теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова

Анализ результатов

Сэмплирование синусов:

- **Параметры:** $a_1 = 1.0$, $a_2 = 0.5$, $f_1 = 2$ Гц, $f_2 = 8$ Гц
- **Максимальная частота:** $f_{max} = 8$ Гц
- **Частота Найквиста:** $f_{Nyquist} = 2 \times 8 = 16$ Гц
- **Результат:** При $dt > 1/16$ с возникают искажения (алиасинг)

Сэмплирование sinc функции:

- **Параметр:** $b = 1$, что соответствует $f_{max} = b = 1$ Гц
- **Частота Найквиста:** $f_{Nyquist} = 2$ Гц
- **Результат:** Точное восстановление при $f_{samp} \geq 2$ Гц

Выводы о теореме Найквиста-Шеннона-Котельникова:

1. **Условие теоремы:** $f_{samp} > 2f_{max}$ обеспечивает точное восстановление
2. **Интерполяция:** Формула $y(t) = \sum_n y[n] \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{t-n\cdot dt}{dt}\right)$ даёт точное восстановление
3. **Алиасинг:** При нарушении условий теоремы высокочастотные компоненты ”складываются”в низкочастотный диапазон
4. **Спектральный анализ:** Фурье-образы исходного и восстановленного сигналов совпадают при выполнении условий теоремы

Общие выводы

1. **Методы вычисления Фурье-образа:**
   - Численное интегрирование: точное, но медленное
   - DFT с правильным масштабированием: быстрое и точное (ускорение в 271 раз)
   - Ключ к успеху DFT — правильное масштабирование на dt
2. **Важность комплексного анализа:**
   - Сравнение только модулей образов недостаточно
   - Необходимо анализировать действительную и мнимую части отдельно

   - Это выявляет тонкие различия между методами

3. **Теорема сэмплирования:**
   - Подтверждается экспериментально на различных примерах
   - Критически важна для цифровой обработки сигналов
   - Интерполяция sinc функцией обеспечивает теоретически точное восстановление

4. **Практические рекомендации:**
   - Использовать DFT с правильным масштабированием для быстрых вычислений
   - Всегда проверять соответствие теореме Найквиста при сэмплировании
   - Анализировать комплексные образы, а не только их модули