

Московский государственный университет

Факультет вычислительной математики и кибернетики

# **"Численное решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа**

Студент: Бурцев Леонид  
Группа: 303

Москва  
2023

## Описание исходной задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.

Решаем задачу на интервале  $(0, 1)$ , вводя на ней равномерную сетку  $x_0, x_1, \dots, x_N$ ,  $x_i = i * h$ ,  $h = \frac{1}{N}$  Дискретная аппроксимация уравнения:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

для приграничных узлов  $(x_1, x_{N-1})$  сюда войдут граничные условия

## Метод прогонки:

Определим  $a_i$  как элементы стоящие на поддиагонали в  $i$ -ой строке

Определим  $b_i$  как элементы стоящие на диагонали в  $i$ -ой строке

Определим  $c_i$  как элементы стоящие на наддиагонали в  $i$ -ой строке

Определим  $d_i$  как элемент правой части в  $i$ -ой строке

Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ , где  $i$  – номер строки матрицы. Этот этап выполняется при  $i = 1 \dots n$  строго по возрастанию значения  $i$ .

1) В первой строке матрицы  $i = 1$  используются формулы:

$$y_1 = b_1, \alpha_1 = \frac{-c_1}{y_1}, \beta_1 = \frac{d_1}{y_1}$$

2) Для строк  $i$  от 2 до  $N - 2$  используются рекуррентные формулы:

$$y_i = b_i + a_i * \alpha_{i-1}, \alpha_i = \frac{-c_i}{y_i}, \beta_i = \frac{(d_i - a_i * \beta_{i-1})}{y_i}$$

3) При  $i = N - 1$  прямая прогонка завершается вычислением:

$$y_{N-1} = b_{N-1} + a_{N-1} * \alpha_{N-2}, \beta_{N-1} = \frac{(d_{N-1} - a_{N-1} * \beta_{N-2})}{y_{N-1}}$$

После этого производится обратная прогонка, в которой происходит вычисление неизвестных  $y_i$ . Этот этап выполняется при  $i = n...1$  строго по убыванию значения  $i$ .

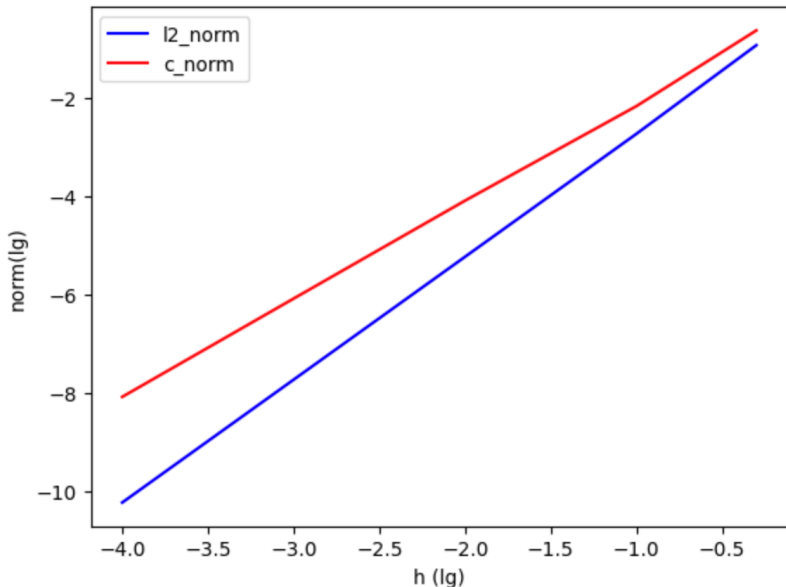
4) В последней строке матрицы  $i = N - 1$  выполнено

$$x_{N-1} = \beta_{N-1}$$

5) Для всех остальных строк при  $i$  от  $N - 2$  до 1 применяется формула:

$$x_i = \alpha_i * x_{i+1} + \beta_i$$

Для функции  $u = \sin(\pi(x))$  графики зависимости точности с-нормы и дискретной  $l_2$ -нормы от шага сетки в логарифмическом виде выглядят следующим образом



Сходимость l2-нормы:  $O(0.82 * h^{2.5})$

Сходимость c-нормы:  $O(0.91 * h^2)$