Московский государственный университет

Факультет вычислительной математики и кибернетики

"Численное решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Студент: Бурцев Леонид
Группа: 303

Москва
2023

Описание исходной задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.

Решаем задачу на интервале $(0, 1)$, вводя на ней равномерную сетку $x_0, x_1, ..., x_N$, $x_i = i * h$, $h = \frac{1}{N}$ Дискретная аппроксимация уравнения:

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

для приграничных узлов (x_1, x_{N-1}) сюда войдут граничные условия

Метод прогонки:
Определим a_i как элементы стоящие на поддиагонали в i-ой строке
Определим b_i как элементы стоящие на диагонали в i-ой строке
Определим c_i как элементы стоящие на наддиагонали в i-ой строке
Определим d_i как элемент правой части в i-ой строке

Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов α_i и β_i , где i – номер строки матрицы. Этот этап выполняется при $i = 1...n$ строго по возрастанию значения i.
1)В первой строке матрицы $i = 1$ используются формулы:

$$\mathrm{y}_1 = \mathrm{b}_1, \alpha_1 = \frac{-\mathrm{c}_1}{\mathrm{y}_1}, \beta_1 = \frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{y}_1}$$

2) Для строк i от 2 до $N-2$ используются рекуррентные формулы:

$$y_i = b_i + a_i * \alpha_{i-1}, \alpha_i = \frac{-c_i}{y_i}, \beta_i = \frac{(d_i - a_i * \beta_{i-1})}{y_i}$$

3) При $i = N-1$ прямая прогонка завершается вычислением:

$$y_{N-1} = b_{N-1} + a_{N-1} * \alpha_{N-2}, \beta_{N-1} = \frac{(d_{N-1} - a_{N-1} * \beta_{N-2})}{y_{N-1}}$$

После этого производится обратная прогонка, в которой происходит вычисление неизвестных yi. Этот этап выполняется при $i = n...1$ строго по убыванию значения i.

4) В последней строке матрицы $i = N-1$ выполнено $x_{N-1} = \beta_{N-1}$

5) Для всех остальных строк при i от $N-2$ до 1 применяется формула:

$$x_i = \alpha_i * x_{i+1} + \beta_i$$

Для функции $u = sin(\pi(x))$ графики зависимости точности c-нормы и дискретной l2-нормы от шага сетки в логарифмическом виде выглядят следующим образом