Московский государственный университет

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Численное решение 2D уравнения Лапласа

Студент: Бурцев Леонид
Группа: 303

Москва
2024

Описание исходной задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -\Delta u = f, x \in \Omega = (0,1)^2 \\ u(x) = g, x \in \delta\Omega \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.

Решаем задачу в квадрате $(0,1)^2$, вводя на ней равномерную сетку (x_i, y_i), $i, j = 0, \ldots, N$, где $x_i = i * h$, $y_j = j * h$, $h = \frac{1}{N}$ - шаг сетки.

Дискретная аппроксимация уравнения:

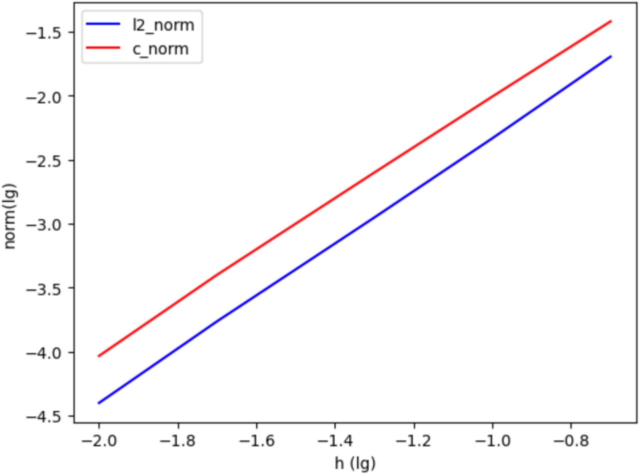
$$-\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = f(x_{i,j})$$

Пятиточечный шаблон приводит к линейной системе с матрицей, в которой 5 ненулевых элементов в строке.

В граничных узлах значения известны, поэтому неизвестные там не вводятся.

Описание численного решения
Для решения полученной линейной системы использовался стабилизированный метод бисопряженных градиентов **BiCGStab** с переобуславливателем **MPTILUC** из пакета INMOST.

Для функции $u = sin(x)sin(5y)$ графики зависимости точности c-нормы и дискретной l2-нормы от шага сетки в логарифмическом виде выглядят следующим образом



Сходимость l2-нормы: $O(0.77 * h^{2.07})$
Сходимость c-нормы: $O(h^2)$

Графики времени построения решения и времени итераций от размера системы