> with(LinearAlgebra) : with(ArrayTools) : with(plots) :

> # Cubic Splines

> Cubic := **proc**(X, Y)
**local** $i, j, n, hs, matrixf, A, F, cs, bs, ds, as, S, answer$;
$n := nops(X) - 1$;
$hs := [seq(X[i+1] - X[i],\ i = 1..n)]$;
matrixf := (i, j)→**if** i = j **then** 2·(hs[i] + $hs[i+1]$) **elif** j − i = 1 **then** hs[i + 1] **elif** $i - j = 1$
**then** hs[i] **else** 0 **end if**;
$A := Matrix(n - 1, matrixf)$;
$F := Vector\left(\left[seq\left(3\cdot\left(\frac{Y[i+2] - Y[i+1]}{hs[i+1]} - \frac{Y[i+1] - Y[i]}{hs[i]}\right), i = 1..n-1\right)\right]\right)$ **;**
answer := LinearSolve(A, F);
$cs := [0, seq(answer[i], i = 1..n - 1), 0]$;
$bs := \left[seq\left(\frac{(Y[i+1] - Y[i])}{hs[i]} - \frac{hs[i]}{3}\cdot(cs[i+1] + 2\cdot cs[i]), i = 1..n\right)\right]$;
$ds := \left[seq\left(\frac{(cs[i+1] - cs[i])}{3\cdot hs[i]}, i = 1..n\right)\right]$;
$as := [seq(Y[i], i = 1..n)]$;
$S := seq\left(as[i] + bs[i]\cdot(x - X[i]) + cs[i]\cdot(x - X[i])^2 + ds[i]\cdot(x - X[i])^3, i = 1..n\right)$;
'piecewise'(seq(seq(op(j, [x < X[i + 1], S[i]]), j = 1 .. 2), i = 1 .. n ), S[n]);
**end proc**:

> # B Splines

> BSpl := **proc**(X, f)
**local** $i, n, xs, l, j, Segment, eps, d$;
$eps := 10^{-9}$;
$d := 2$;
$n := nops(X)$;
**xs** := [$seq(i, i = X[1]$ − d·eps .. $X[1]$ − eps, eps) , seq($op(i, X), i = 1..n$), $seq(i, i = X[n]$
+ eps .. $X[n]$ + d·eps, eps) ];
***l*** := j→ piecewise(

j = 1, f(xs[1]),

$1 < j < n + d,\ \frac{1}{2}\left(-f(xs[j+1]) + 4\,f\left(\frac{xs[j+1] + xs[j+2]}{2}\right) - f(xs[j+2])\right)$,

j ≥ $n$ + d, f(xs[j])

);
$Segment$ := **proc**($j, d$)
**if** $d = 0$ **then** $piecewise(xs[j] \le x < xs[j+1], 1, 0)$;
**else** $\frac{(x - xs[j])\cdot Segment(j, d-1)}{xs[j+d] - xs[j]} + \frac{(xs[j+d+1] - x)\cdot Segment(j+1, d-1)}{xs[j+d+1] - xs[j+1]}$ ;
**end if**;
**end proc**;

```
sum(l(i)·Segment(i, d) , i = 1 ..n + d − 1 );
end proc:
```

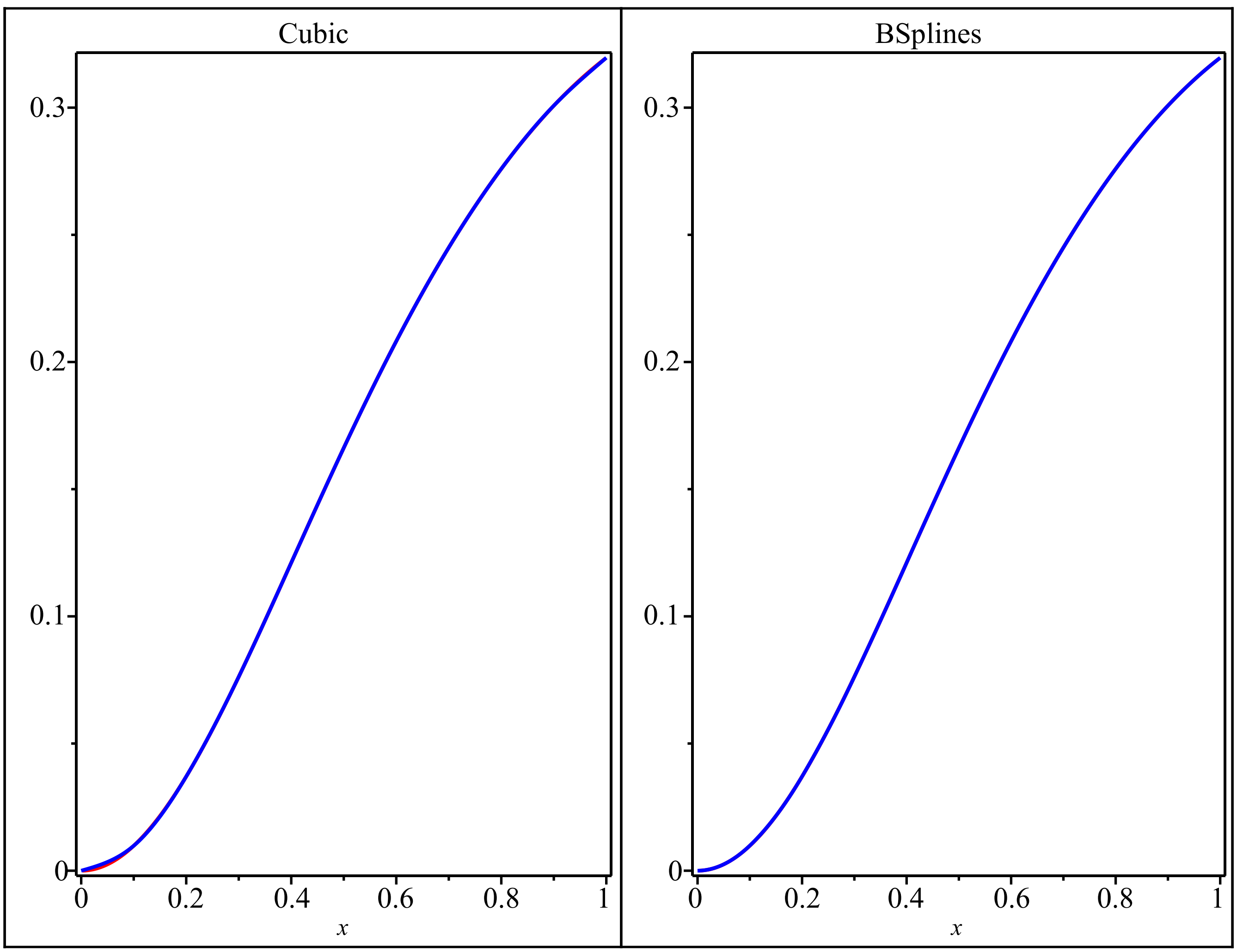
> # Простой случай

> $f := x \to \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{0.5 + x^2}$;

```
X := [seq(i·0.1, i = 0 ..10)] :
Y := [seq(f(X[i]), i = 1 ..11)] :
plt := Array(1 ..2) :
plt[1] := plot([f(x), Cubic(X, Y)(x)], x = 0 ..1, color = [red, blue], title = "Cubic") :
plt[2] := plot([f(x), BSpl(X, f) (x)], x = 0 ..1, color = [red, blue], title = "BSplines") :
```

$$f := x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{0.5 + x^2} \quad \textbf{(1)}$$

> *display*(plt, axes = *boxed*)




> *# Как можно заметить в простых случаях, как Б сплайны, так и кубические сплайны показывают себя одинаково хорошо, можно считать, что это просто проверка*

*корректности написанных сплайн функций*

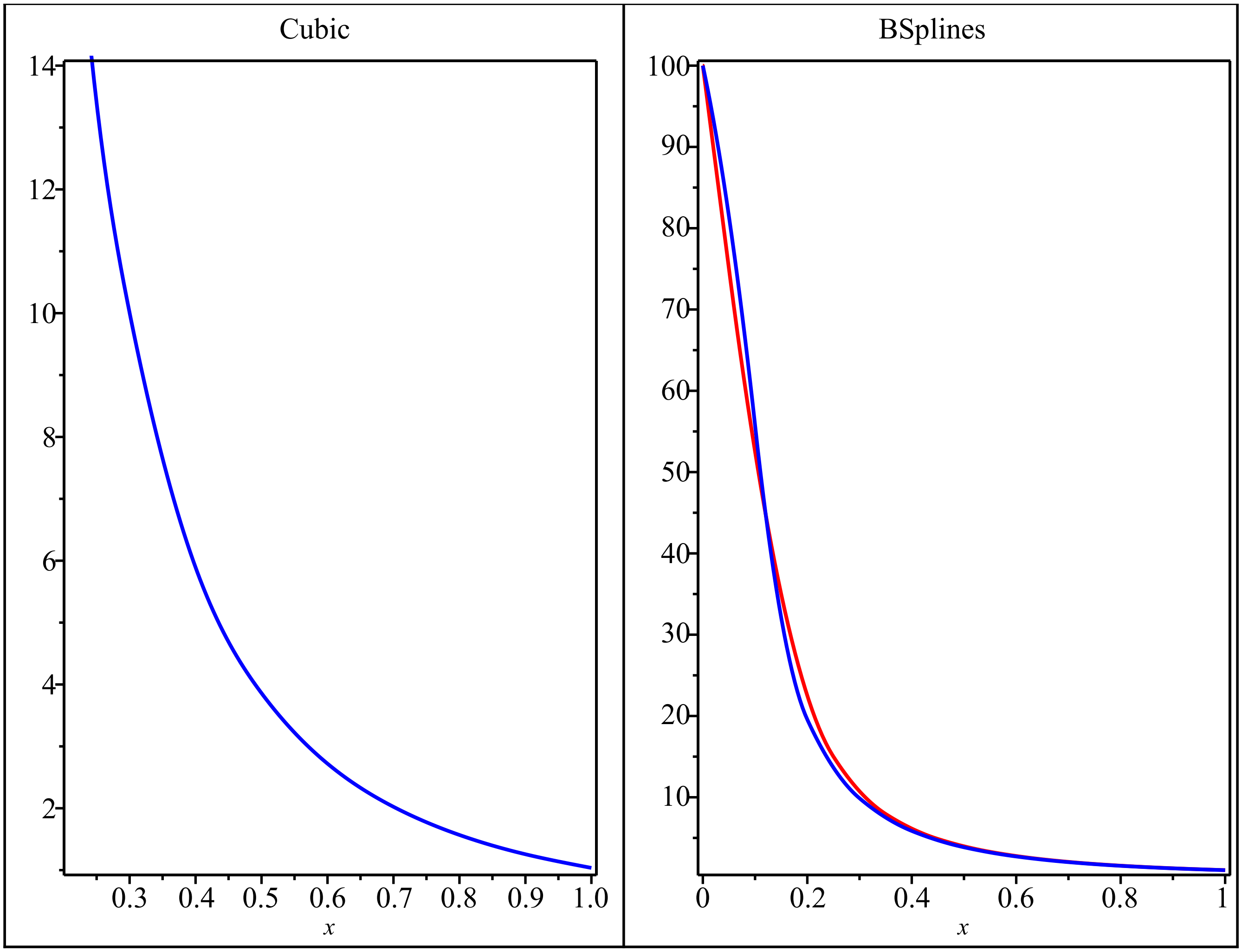
> # Сравнение с Maple сплайнам

> with(CurveFitting) :

> $f := x \rightarrow \dfrac{\cos\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}{\sin(0.01 + x^2)}$;
$Y := [seq(f(X[i]), i = 1..11)]$ :
$n := nops(X)$ :
$eps := 10^{-9}$ :
$d := 2$ :
$plt[1] :=$ plot( [Spline(X, Y, x, degree = 3) (x), Cubic(X, Y) (x) ] , x = 0 ..1, color = [red, blue], title = "Cubic") :
$plt[2] :=$ plot( [*BSplineCurve*( [$seq(i, i = X[1] -$ d·eps .. $X[1] -$ eps, eps) , seq($op(i, X), i = 1..n$), $seq(i, i = X[n] +$ eps .. $X[n] +$ d·eps, eps) ],
[seq($f(X[1]), i = 1..d$), seq(f(X[i]), i = 1 ..n), seq($f(X[n]), i = 1..d$) ], $x$, $order = 3$) ,
BSpl(X, $f$) (x) ] , x = 0 ..1, color = [red, blue], title = "BSplines") :

$$f := x \mapsto \frac{\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\sin(0.01 + x^2)} \tag{2}$$

> *display*(plt, axes = *boxed*)




> *# Как можно заметить, в то время как реализации кубических сплайнов Maple и моя довольно схожи, B-сплайны имеют видимые различия. Скорее всего это связано с разным выбором политики построения сплайн функции. В написанной реализации передаётся функция, в то время как в реализации Maple передаются точные значения в точках игриков*

```
> compError := proc(f, interpol)
 local i;
 max(evalf(seq(abs(eval(f(i)) − eval(subs(x = i, interpol))), i = X[1] .. X[n], 1/10 * 1/10)));

 end proc:
```

> $[compError(f, Cubic(X, Y)),\ compError(f, BSpl(X, f))]$

$$[0.000489313246120671,\ 8.4591 \times 10^{-6}] \quad \textbf{(3)}$$

> # Эксперименты

> ***# Быстрое убывание функции***

> $f := x \rightarrow \dfrac{\cos\left(\dfrac{x}{10}\right)}{\sin(0.001 + x^2)};$

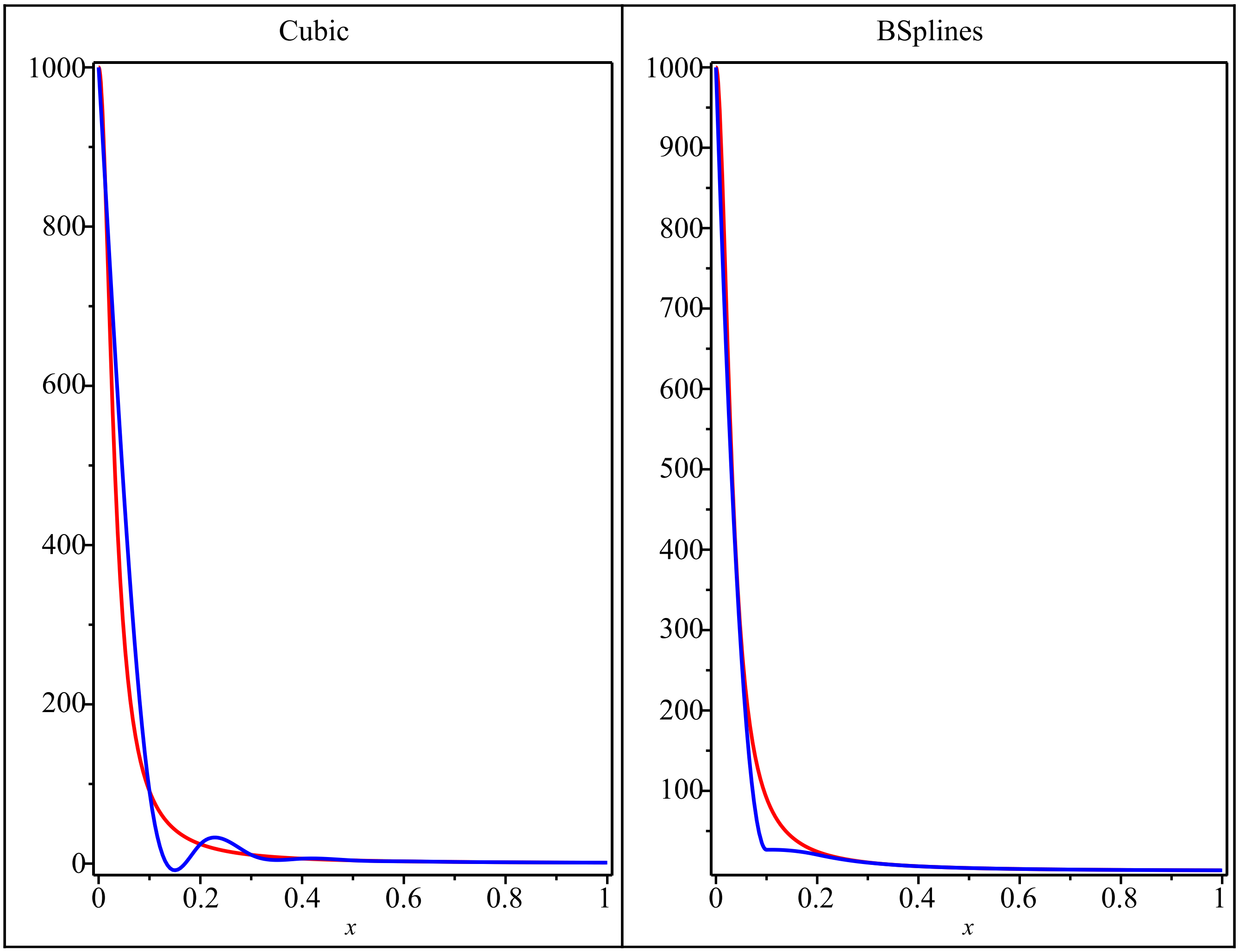
$Y := [seq(f(X[i]), i = 1 ..11)]:$

```
plt[1] := plot([f(x), Cubic(X, Y)(x)], x = 0 ..1, color = [red, blue], title = "Cubic") :
```

$plt[2] := \mathrm{plot}([\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{BSpl}(\mathrm{X}, f)(\mathrm{x})], \mathrm{x} = 0..1, \mathrm{color} = [\mathrm{red}, \mathrm{blue}], \mathrm{title} = \text{"BSplines"}):$

$$f := x \mapsto \frac{\cos\left(\frac{x}{10}\right)}{\sin(0.001 + x^2)} \tag{4}$$

> $display(\mathrm{plt}, \mathrm{axes} = boxed)$



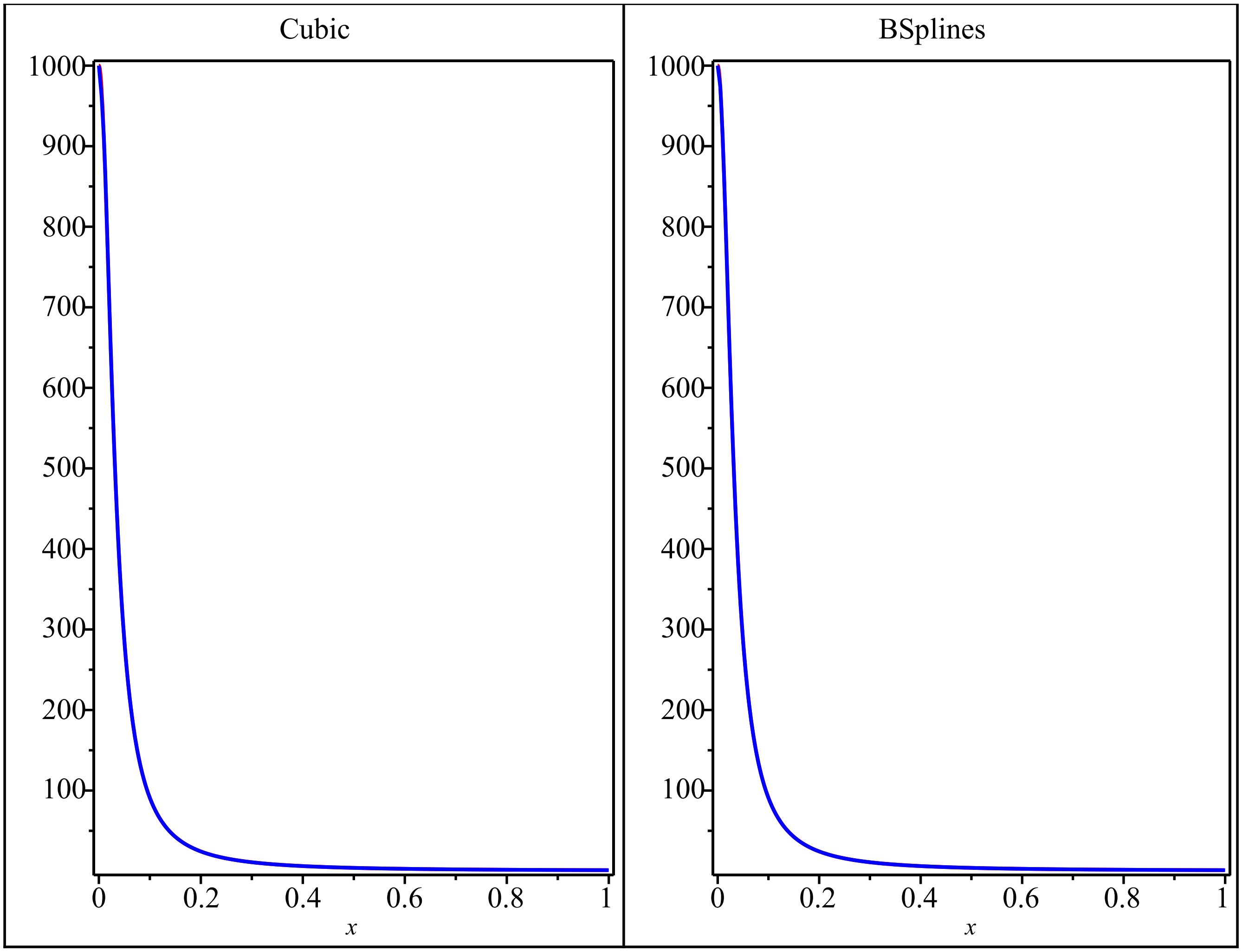

> $[compError(f, Cubic(X, Y)), compError(f, BSpl(X, f))]$

$$[177.121408717585, 94.1489092] \tag{5}$$

> *# Как можно заметить, если функция очень быстро возрастсает или убывает, а точки, по которым проводится интерполяция, не стоят достаточно близко, получается не очень точное представление функции*

> $X := [seq(i \cdot 0.01, i = 0..100)]:$
$Y := [seq(f(X[i]), i = 1..101)]:$
$plt[1] := \mathrm{plot}([\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{Cubic}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})(\mathrm{x})], \mathrm{x} = 0..1, \mathrm{color} = [\mathrm{red}, \mathrm{blue}], \mathrm{title} = \text{"Cubic"}):$
$plt[2] := \mathrm{plot}([\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{BSpl}(\mathrm{X}, f)(\mathrm{x})], \mathrm{x} = 0..1, \mathrm{color} = [\mathrm{red}, \mathrm{blue}], \mathrm{title} = \text{"BSplines"}):$

> $display(\mathrm{plt}, \mathrm{axes} = boxed)$




> *# При увеличении числа точек в десять раз ситуация становится гораздо лучше*

> $[compError(f, Cubic(X, Y)),\ compError(f, BSpl(X, f))]$

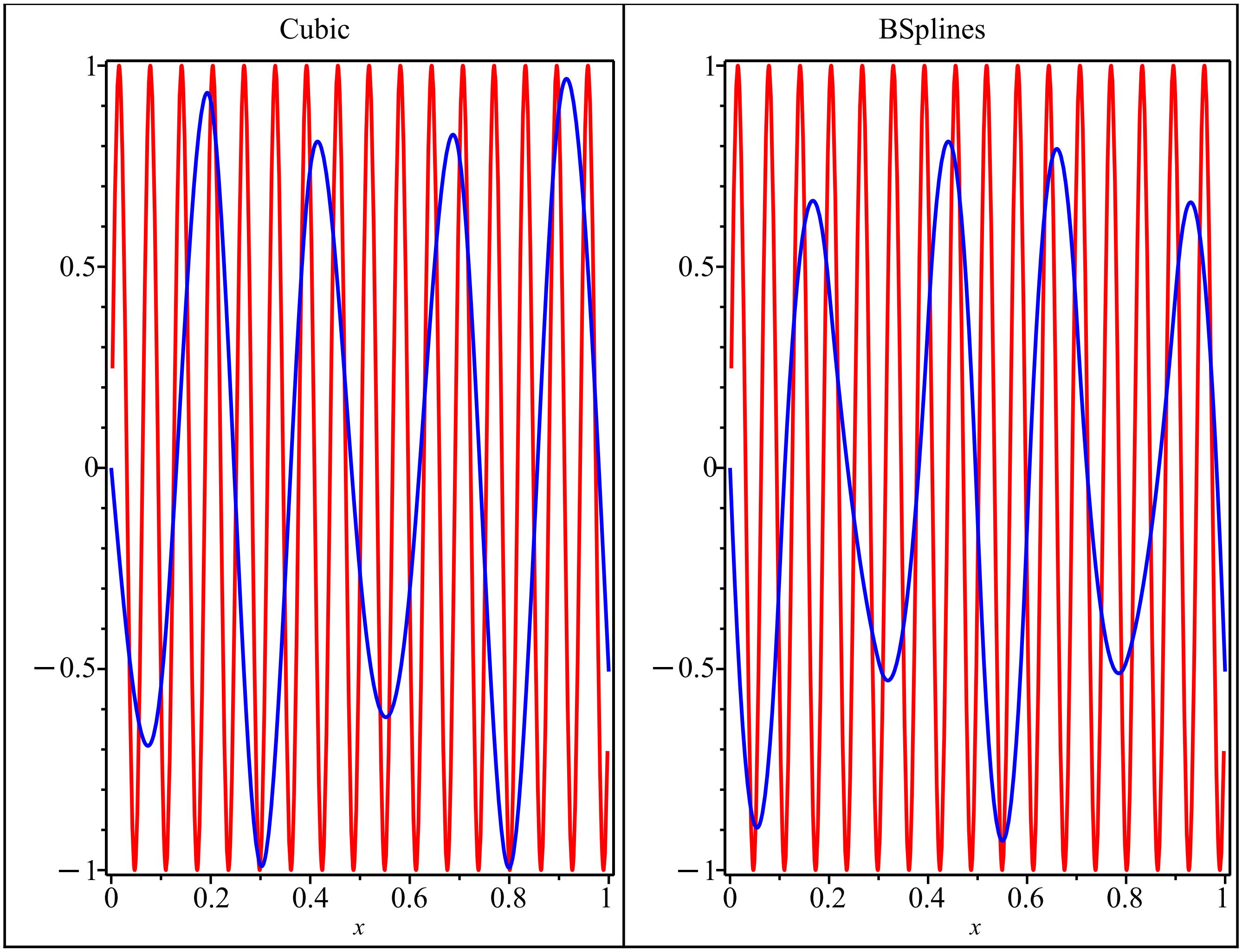
$$[1.13686837721616 \times 10^{-13}, 1.4309068] \quad (6)$$

> ***# Частые колебания***

> $f := x \to \sin(100 \cdot x);$
$X := [seq(i \cdot 0.1, i = 0..10)]:$
$Y := [seq(f(X[i]), i = 1..11)]:$
$plt[1] := \mathrm{plot}([\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{Cubic}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})(\mathrm{x})], \mathrm{x} = 0..1, \mathrm{color} = [\mathrm{red}, \mathrm{blue}], \mathrm{title} = \text{"Cubic"}):$
$plt[2] := \mathrm{plot}([\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{BSpl}(\mathrm{X}, f)(\mathrm{x})], \mathrm{x} = 0..1, \mathrm{color} = [\mathrm{red}, \mathrm{blue}], \mathrm{title} = \text{"BSplines"}):$

$$f := x \mapsto \sin(100 \cdot x) \quad (7)$$

> $display(\mathrm{plt}, \mathrm{axes} = boxed)$




> *# Данная функция это гиперболизация предыдущего примера. Функция синуса с большим коэффициентом сильно колеблется из-за чего 11 точек крайне мало для интерполяции*

> $[compError(f, Cubic(X, Y)),\ compError(f, BSpl(X, f))]$

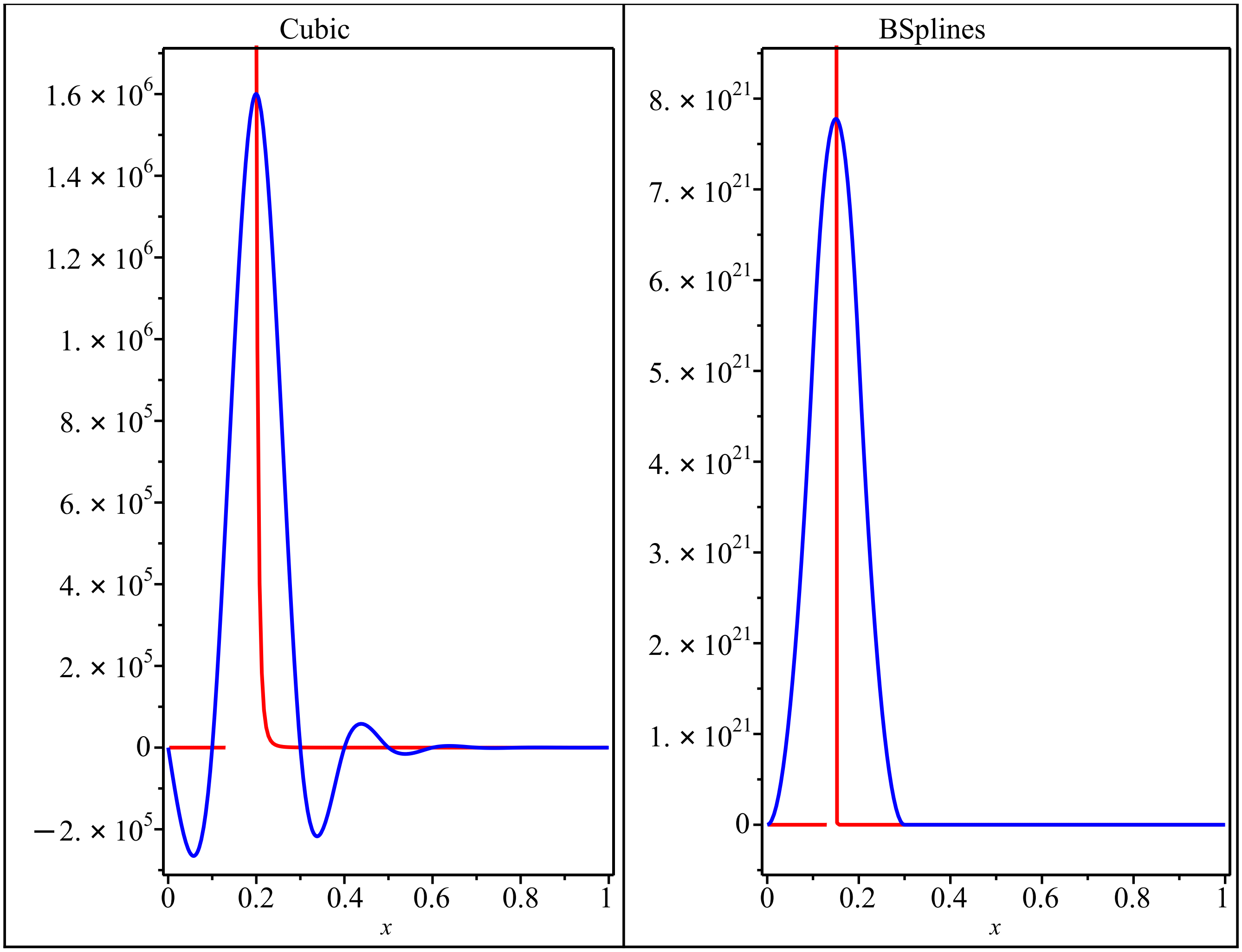
$$[1.85102644181916, 1.685538216] \tag{8}$$

> ***# Функции с разрывом второго порядка***

> $f := x \rightarrow \exp\left(\frac{1}{x - 0.13}\right);$
$X := [seq(i \cdot 0.1, i = 0..10)]:$
$Y := [seq(f(X[i]), i = 1..11)]:$
$plt[1] := \mathrm{plot}([\mathrm{f(x)}, \mathrm{Cubic(X, Y)(x)}], \mathrm{x} = 0..1, \mathrm{color} = [\mathrm{red, blue}], \mathrm{title} = \text{"Cubic"}):$
$plt[2] := \mathrm{plot}([\mathrm{f(x)}, \mathrm{BSpl}(\mathrm{X}, f)(\mathrm{x})], \mathrm{x} = 0..1, \mathrm{color} = [\mathrm{red, blue}], \mathrm{title} = \text{"BSplines"}):$

$$f := x \mapsto e^{\frac{1}{x - 0.13}} \tag{9}$$

> $display(\mathrm{plt}, \mathrm{axes} = boxed)$




> $[compError(f, Cubic(X, Y)),\ compError(f, BSpl(X, f))]$

$$[\mathrm{Float}(\infty), \mathrm{Float}(\infty)] \qquad \textbf{(10)}$$

> *# Разрывные функции апроксимировать не является разумным, потому что результат может оказаться крайне некачественным, что можно наблюдать на данных графиках*