ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ (2 год.)

ТЕМА: Розв'язування алгебраїчних рівнянь та нерівностей різних типів

МЕТА:

навчальна: формування знань і вмінь студентів розв'язувати алгебраїчні рівняння та нерівності різних типів;

розвиваюча: розвивати мислення, уяву, обчислювальні навички, пам'ять;

виховна: виховувати культуру математичних записів, старанність, працелюбність, дисциплінованість, колективізм.

ОБЛАДНАННЯ: дошка, крейда, олівці, картки із завданням.

ПЛАН

1 Розв'язування алгебраїчних рівнянь

2 Розв'язування алгебраїчних нерівностей

ЗМІСТ ПРАКТИЧНОГО ЗАНЯТТЯ

1 Розв'язування алгебраїчних рівнянь

1)Розв'язати рівняння:

$a)\quad 3-\frac{4x+2}{3}=\frac{2x}{5}-\frac{6-x}{3};$

Відповідь: $\frac{65}{31}$

в) $\frac{x+1}{x-3}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{3(3x-1)}{x^2-9}$ // *Відповідь* : $R\setminus\{\pm 3\}$

г) $\frac{2x-1}{x-3}+\frac{5-4x}{3-x}=6;$

Відповідь: *розв'язків немає*

д) $\frac{5x-3}{x^2+3x}-\frac{x+1}{3x^2+9x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x}=0$

Відповідь: $\{-1\}$

2)Розв'язати рівняння з модулем:

$a)\quad |2x-6|-|x|=8$

Відповідь: $\{-2;\ 14\}$

б) $|4-x|-2|x+2|=3$

Відповідь: $\{-5;-1\}$

3) Розв'язати квадратне рівняння $2x^2-5x+2=0$.

Розв'язання. $2x^2-5x+2=0$

$D=b-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2=25-16=9$

$x_1=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$ $\qquad x_2=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

Відповідь. $\left\{\frac{1}{2};\,2\right\}$.

4) Розв'язати **біквадратне рівняння** $x^4-13x^2+36=0$.

Розв'язання.

Вводимо заміну: $x^2=t$ *при* $t\ge 0$

$t^2-13t+36=0$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 + t_2 = 13 \\ t_1 t_2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 9 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 2 \\ x_{3,4} = \pm 3 \end{array}\right.$

Відповідь. $\{\pm 2; \pm 3\}$.

5) Розв'язати дробово-раціональнії рівняння:

1) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$

Розв'язання

$$\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x},$$

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} - \frac{4-x}{x(x+2)} = 0,$$

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} = 0,$$

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)} = 0,$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ x(x-2)(x+2) \neq 0. \end{cases}$$

ОДЗ: $x \neq \pm 2;\ \ x \neq 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0; \quad D = 25 - 24 = 1; \quad \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 3.$

Відповідь: $x = 3$.

2) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 6 = 0$.

Розв'язання.

$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 6 = 0$, ОДЗ: $x \neq -1$, $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5\cdot\frac{x}{x+1} + 6 = 0$. Введемо заміну: $\frac{x}{x+1} = t$,

$t^2 - 5t + 6 = 0$. За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 t_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{x+1} = 2 \\ \frac{x}{x+1} = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{x+1} - 2 = 0 \\ \frac{x}{x+1} - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x-2(x+1)}{x+1} = 0 \\ \frac{x-3(x+1)}{x+1} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2(x+1)=0 \\ x-3(x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2x-2=0 \\ x-3x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x-2=0 \\ -2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ 2x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ 2x=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = -1\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Відповідь. $\left\{-2; -1\frac{1}{2}\right\}$.

Зворотні рівняння

Рівняння виду $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-2}x^2 + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ де $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ – довільні сталі числа, називається зворотнім рівнянням парного степеня, якщо виконуються умови:

$$\frac{a_{2n}}{a_0}=\lambda^n;\ \frac{a_{2n-1}}{a_1}=\lambda^{n-1};\ \frac{a_{2n-2}}{a_2}=\lambda^{n-2}\ldots \qquad (✸)$$

Дане рівняння розв'язується шляхом почленного ділення на x^n (оскільки $x^n \neq 0$). Після чого члени рівновіддалені від середини попарно групуються. Далі робиться заміна $t=x+\frac{\lambda}{x}$ і всі члени рівняння виражаються через цю заміну. Можна легко показати, що

$$x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}=t^2-2\lambda$$
$$x^3+\frac{\lambda^3}{x^3}+t^3-3\lambda t \qquad (✸✸)$$

Після заміни отримуємо рівняння нижчого степеня.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4+3x^3-8x^2-6x+4=0$

Перевіряємо умови (✸):

$$\frac{a_4}{a_0}=\frac{4}{1}=4=\lambda^2$$
$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{-6}{3}=-2=\lambda$$

Отже це зворотне рівняння четвертого степеня, де $\lambda=-2$.

Поділимо почленно ліву частину на $x^2 \neq 0$.

$$\frac{x^4}{x^2}+\frac{3x^3}{x^2}-\frac{8x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}+\frac{4}{x^2}=0$$

$$x^2+3x-8-\frac{6}{x}+\frac{4}{x^2}=0$$

Згрупуємо рівновіддалені від середини члени:

$$\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{2}{x}\right)-8=0$$

Робимо заміну $x-\frac{2}{x}=t$, тоді враховуючи (✸✸), маємо $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2=t^2$;

$$x^2-4+\frac{4}{x^2}=t^2\$$$

$$x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+4$$

$$t^2+4+3t-8=0$$

$$t^2+3t-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-4 \\ t_2=1 \end{array}\right.$$

Повертаємось до заміни:

$$\left[\begin{array}{l} x-\dfrac{2}{x}=-4 \\ x-\dfrac{2}{x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-2=0 \\ x^2-x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-2-\sqrt{6} \\ x_2=-2+\sqrt{6} \\ x_3=-1 \\ x_4=2 \end{array}\right.$$

Відповідь: $-2\pm\sqrt{6}$;–1;2.

Розв’язати систему рівнянь: $\begin{cases} x+y=5, \\ xy-y^2=-7 \end{cases}$

Відповідь: $(1{,}5; 3{,}5)$; $(6;\ -1)$

2 Розв’язування алгебраїчних нерівностей

1) На числовій прямій знайти всі цілі розв’язки системи нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{4}-\dfrac{x+1}{2}\le 2x+1 \\ 4x+2\ge \dfrac{10x+1}{2} \end{cases}$$

Відповідь: $\{-1; 0; 1\}$

2) Розв’язати нерівності:

А) $(x-3)^2-(x+5)(x-5)>4-2(x-3);$;

Відповідь: $x<6$

Б) $|x-5|<3$

$\begin{cases} x-5<3, \\ x-5>-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x<8, \\ x>2; \end{cases}$

Відповідь: $x\epsilon(2; 8)$

В) $|x-4|>5$

$\left[\begin{array}{l} x-4>5, \\ x-4<-5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>9, \\ x<-1; \end{array}\right.$

Відповідь: $x\epsilon(-\infty; -1)\cup(9;\ +\infty)$

Г) $-2{,}5\le\frac{4x-1}{2}<3{,}5$

Відповідь: $x\epsilon[\![-1;\ 2)$

Д) $15-x-2x^2>0$

Відповідь: $x\epsilon(-3; 2{,}5)$

Спростити вираз: $\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}$+$\sqrt{a-2\sqrt{a+1}+2}$, якщо $a=-0{,}5$

$\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}$+$\sqrt{a-2\sqrt{a+1}+2}$=$\sqrt{\left(\sqrt{a+1}+1\right)^2}$+$\sqrt{\left(\sqrt{a+1}-1\right)^2}$=$\left|\sqrt{a+1}+1\right|+$

$+\left|\sqrt{a+1}-1\right|$

якщо $a=-0{,}5$, то $\left|\sqrt{-0{,}5+1}+1\right|+\left|\sqrt{-0{,}5+1}-1\right|=\left|\sqrt{0{,}5}+1\right|+\left|\sqrt{0{,}5}-1\right|=\sqrt{0{,}5}+$

$+1-\sqrt{0{,}5}+1=2$

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1) $|5x-3| \leq 4$;

2) $|2x+5| > 3$;

3) $|2x-1| = 3x+2$;

4) $\begin{cases} (8-x)^2 - x(x+4) > 4, \\ \dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x+3}{4} > 3; \end{cases}$

5) $2 < \frac{7-2x}{3} \leq 5$;

6) $\frac{7}{x+1} + \frac{x+4}{2x-2} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$;

7) $(2x+3)^2 > (x+1)(x-10) + 43$;

8) $\begin{cases} x + 7y = 3, \\ 3x - 2y = 32; \end{cases}$

9) * $|x-1| + |2-x| = x$. У відповідь записати суму розв'язків, якщо розв'язків два і більше; якщо ж один розв'язок, то його записати у відповідь.