Видно? Слышно? ✓

М.!!

# Моделир. временных рядов.

ETS, DLT

ETS - модель ≈ 50-60 лет.
её развития (а-ля DLT) совр-ые 2021 г

задачи:
* прогнозирование вр-го ряда.
* разложение ряда на интерпрет-е компоненты.

---

неформально: [m = 12 месяц, m = 4 кварт]

$$\boxed{y_t = \text{тренд}_t + \text{сезон}_t + \text{остаток}_t}$$

наблюдаем

[ненаблюдаемы]

хотим:

сезонная сост-ая: имеет явно выр-нную периодичность

$$S_t \approx S_{t-12}$$

тренд. сост-ая: плавно изменяется

$$l_t \approx l_{t-1}$$

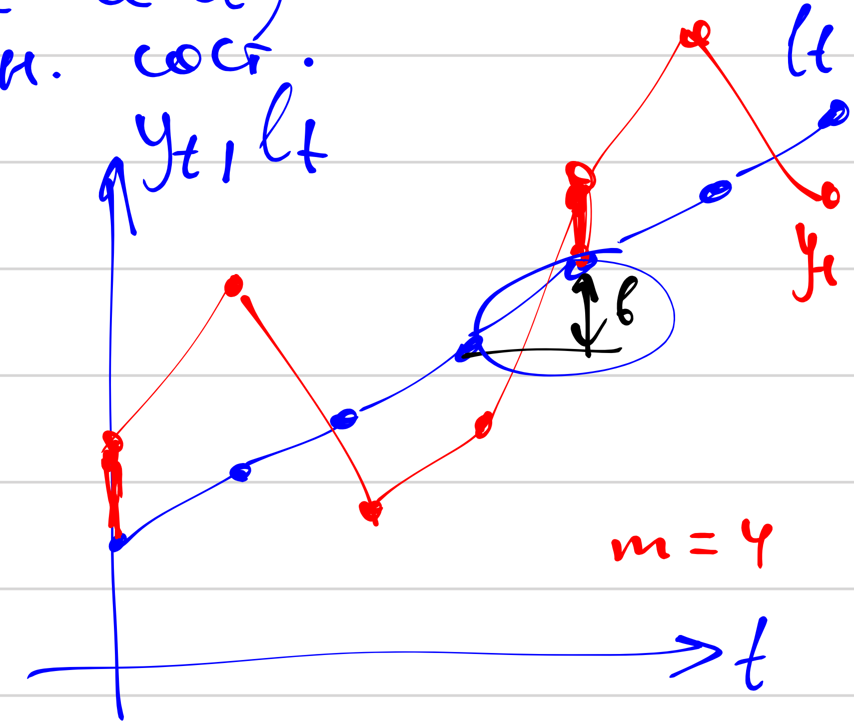
остаток: что осталось!! плохо предсказ-ся.

**Шаг 1** [Мир без случайности]

тренд $(l = \text{level})$

сезон. сост.

$$\begin{cases} y_t = l_t + s_t \\ l_t = l_{t-1} + b \\ s_t = s_{t-12} \end{cases}$$

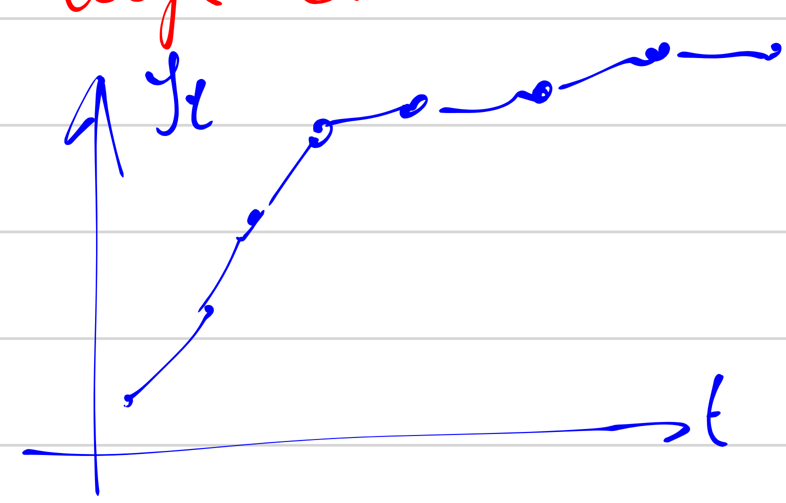



**Шаг 2** добавим (всюду!) случ-сть.

* в ETS один источник случ-сти $(u_t) \sim N(0; \sigma^2)$, нц

в совр. вар-циях несколько источников случ-сти

идея 1: „$b$" может меняться $b \to b_t$




$$\begin{cases} y_t = l_t + s_t \\ l_t = l_{t-1} + b \\ s_t = s_{t-12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_t = l_t + s_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} \\ b_t = b_{t-1} \\ s_t = s_{t-12} \end{cases}$$

идея 2: в у-ии будем выражать текущее через прошлое

идея 3: добав $(u_t)$!

$$\begin{cases} y_t = \boxed{l_{t-1} + b_{t-1}} + \boxed{s_{t-12}} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t \cdot \alpha \\ b_t = b_{t-1} + u_t \cdot \beta \\ s_t = s_{t-12} + u_t \cdot \gamma \end{cases}$$

для посл./кварт шипарно.

$$\begin{cases} y_t = \boxed{\ell_{t-1} + b_{t-1}} + s_{t-12} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \cdot \alpha \\ b_t = b_{t-1} + u_t \cdot \beta \\ s_t = s_{t-12} + u_t \cdot \gamma \\ u_t \sim N(0; \sigma^2), \text{незав} \end{cases}$$

$\boxed{ETS(AAA)}$

Error = Add
Trend = Add.
Seas = Add.

А сколько здесь надо оценить пар-в? : $\boxed{\alpha, \beta, \gamma, \sigma^2}$ (своб-х)

[нач: $b_0, \ell_0, s_0, s_{-1}, \ldots, s_{-10}$]

[17 пар-в]

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ н}y \end{cases}$$

ETS(AAN)

Error = Add
Trend = Add
Seas = No

Rob Hyndman „Forecasting principles & practice"
otexts.com/fpp3 chap 8

---

| $\ell$ | s |
|---|---|
| 1 | +1 |
| 2 | +2 |
| 3 | +3 |
| 4 | −1 |

~

| $\ell$ | s |
|---|---|
| 3 | −1 |
| 4 | 0 |
| 5 | +1 |
| 6 | −3 |

| y |
|---|
| 2 |
| 4 |
| 6 |
| 3 |

доп. ограничение на $s_0, s_{-1}, s_{-2}, \ldots \underline{s_{-11}}$

самые попул: $s_{-11} = 0$

$s_0 + s_{-1} + s_{-2} + \ldots + s_{-11} = 0.$

(3) * Как оценивается? [Целевая ф-ция?]

**M.1** (1) * как ряд разлагается на компоненты?

(2) * как прогнозируется?

(либо есть точные значения пар-в, либо оценки)

Q1 Как извлечь компоненты?

— интерпр.

— использовать компоненты для прогнозов.

Упр.

$m=4$ $\quad \alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2} \quad \sigma^2=16$

| $t$ | $y$ | $b$ | $\ell$ | $s$ | $u$ |
|---|---|---|---|---|---|
| −3 | | | | −2 | |
| −2 | | | | +1 | |
| −1 | | | | +3 | |
| 0 | | 2 | 5 | −2 | |
| 1 | 6 | 2.5 | 7.5 | −1.5 | 1 |
| 2 | 10 | – | – | – | −1 |
| 3 | 11 | | | | |

$b_1, \ell_1, s_1, u_1$

$b_2, \ell_2, s_2, u_2$

$b_3, \ell_3, s_3, u_3$

$$\boxed{u_1 = y_1 - \ell_0 - b_0 - s_{-3} = 6 - 5 - 2 - (-2) = 1}$$

не однородны!!

$\boxed{m=4}$

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \cdot \alpha \\ b_t = b_{t-1} + u_t \cdot \beta \\ s_t = s_{t-4} + u_t \cdot \gamma \end{cases}$$

$b_1 = b_0 + u_1 \beta = 2 + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2.5$

$\ell_1 = \ell_0 + b_0 + 1 \cdot \frac{1}{2} =$

$u_2 \overset{?}{=} y_2 - \ell_1 - b_1 - s_{-2} = 10 - 7.5 - 2.5 - 1 = -1$

$u_1 \to b_1, \ell_1, s_1 \to u_2 \to b_2, \ell_2, s_2 \to \ldots$

Мораль: если есть $y_1, \ldots, y_T$ и пар-ры (либо их оценки), то ETS модель позволяет получить ряды $b_t, \ell_t, s_t, u_t$.

## Q3. Как прогнозировать? $T=100$

$m=4.$ $\left.\begin{array}{c} \sigma^2=16 \quad \alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2} \\ \hline l_0, b_0, s_0, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3} \end{array}\right\} \xRightarrow{Q2}$ $\begin{array}{ccc} l_1 & b_1 & s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{100} & b_{100} & s_{100} \end{array}$

Упр. $\sigma^2=16$ $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$

| $t$ | $l$ | $b$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| 97 | $\vdots$ | $\vdots$ | $-5$ |
| 98 | $\vdots$ | $\vdots$ | $-3$ |
| 99 | $\vdots$ | $\vdots$ | $+6$ |
| 100 | 13 | 2 | $+3$ |

а) точечный прогноз $E(y_{101} \mid y_1 \ldots y_{100})? = 13+2-5 = 10$

$Var(y_{101} \mid y_1 \ldots y_{100})?$

95% предск. интервал (PI) для $y_{101}$

б) —//— для $y_{102}$

$\boxed{m=4}$

$$E(y_{101} \mid y_1 \ldots y_{100}) = E(l_{100}+b_{100}+s_{97}+u_{101} \mid y_1 \ldots y_{100})$$

$$= l_{100}+b_{100}+s_{97}+E(u_{101} \mid y_1 \ldots y_{100}) =$$

$$= l_{100}+b_{100}+s_{97}+\underbrace{E(u_{101})}_{0} = l_{100}+b_{100}+s_{97}$$

$$Var(y_{101} \mid y_1 \ldots y_{100}) = Var(\underbrace{l_{100}+b_{100}+s_{97}}_{\text{идеально изв-на}} + \underbrace{u_{101}}_{\text{не зависит от [illegible]}} \mid y_1 \ldots y_{100})$$

$$= Var(u_{101} \mid y_1 \ldots y_{100}) = Var(u_{101}) = \sigma^2 = 16$$

95% PI для $y_{101}$ $[10-1.96\sqrt{16}; 10+1.96\sqrt{16}]$

$y_{102} = l_{101} + b_{101} + s_{98} + u_{102} =$

инфо:
$\mathcal{F}_{100} = \sigma(y_1 \ldots y_{100})$

$= \left(l_{100} + b_{100} + u_{101} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(b_{100} + u_{101} \cdot \frac{1}{2}\right) + s_{98} + u_{102} =$

$= \underbrace{(l_{100} + 2b_{100} + s_{98})}_{\text{неслуч-ая ф-ция от } y_1 \ldots y_{100}} + \underbrace{u_{101} \cdot 1 + u_{102} \cdot 1}_{\text{не зав-ит от } y_1 \ldots y_{100}}$

точечный прогноз $= E(y_{102} \mid y_1 \ldots y_{100}) = \boxed{l_{100} + 2b_{100} + s_{98}} = 14$

$Var(y_{102} \mid y_1 \ldots y_{100}) = Var(u_{101} + u_{102}) = 2\sigma^2 = 32$

95% для $y_{102}$ $[14 - 1.96\sqrt{32}; 14 + 1.96\sqrt{32}]$

Q1. как оценив-ся?

ETS → max likelihood

DLT (и совр. вар) → байес. апостер распр пар-в.

на примере ETS(AAN)

$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ незав} \\ \text{нач: } l_0, b_0 \end{cases}$$

$\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2, l_0, b_0)$

max $l_0, b_0, \sigma^2, \alpha, \beta$

$(y_{t+1} \mid y_1 \ldots y_t) \sim N(l_t + b_t; \sigma^2)$

$\boxed{\ell(y_1 \ldots y_t \mid \theta)} = \ln f(y_1 \ldots y_t \mid \theta) =$

$(y_2 \mid y_1, \theta) \sim N(l_1 + b_1, \sigma^2)$

$= \underbrace{\ln f(y_1 \mid \theta)}_{(y_1 \mid \theta) \sim N(l_0 + b_0, \sigma^2)} + \boxed{\ln f(y_2 \mid y_1, \theta)} + \ln f(y_3 \mid y_1, y_2, \theta) + \ldots + \ln f(y_t \mid y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots y_1, \theta)$

$$f(y_1, y_2, y_3) = f(y_3 \mid y_1, y_2) \cdot f(y_1, y_2) =$$

$$= f(y_3 \mid y_1, y_2) \cdot f(y_2 \mid y_1) \cdot f(y_1)$$