МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1.2.3

Определение моментов инерции твёрдых тел с помощью трифилярного подвеса

Пилюгин Л. С.
Б02-212
4 ноября 2022 г.

1 Аннотация

Цель работы: измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с расчётами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюёгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счётчик числа колебаний, набор тел.

2 Теоритические сведения

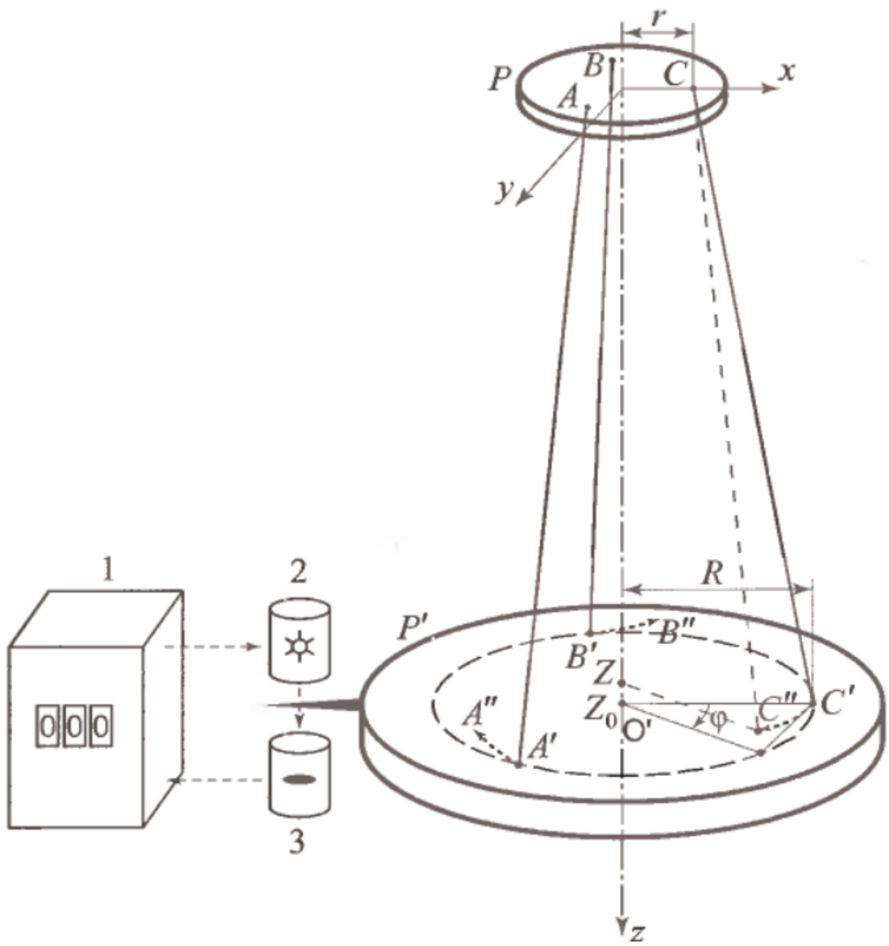
Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции относительно этой оси

$$I = \int r^2 dm$$

Момент инерции аддитивен.

3 Оборудование и инструментальные погрешности

Мосент инерции можно определить при помощи установки, изображённой на рисунке (трифилярного подвеса). Оно состоит из неподвижной платформы P, к которой на трёх симметричных нитях подвешена вращающаяся платформа P'. Верхнюю платформу можно повернуть при помощи рычага, после чего возникают колебания.



Если пренебречь потерями энергии, то закон сохранения энергии можно записать как

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg\left(z_0 - z\right) = E$$

I — момент иннерции платформы вместе с телом, φ — угол поворота платформы от положения равновесия, z_0 — координата по вертикали центра нижней платформы в равновесии, z — координата этой точки, E — полная механическая энергия системы.

Выразим z через угол поворота

$$z \approx z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0}$$

Тогда закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E$$

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0$$

Это уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0}$$

$$I = kmT^2$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ — постоянная величина для данной установки.

Затухание колебаний должно быть мало (время затухания в 2 раза много больше периода). Период колебаний рекомендуется определять с относительной погрешностью $0{,}5\%$.

Для подсчёта числа колебаний используется счётчик.

4 Результаты измерений

Параметры установки:

$$R = 114{,}6 \pm 0{,}5\,\text{мм}\ (\varepsilon_R \approx 0{,}004)$$
$$r = 30{,}2 \pm 0{,}3\,\text{мм}\ (\varepsilon_r \approx 0{,}01)$$
$$m_0 = 956{,}7 \pm 0{,}5\,\text{г}\ (\varepsilon_m \approx 0{,}0005)$$
$$z_0 = 2152 \pm 1{,}5\,\text{мм}\ (\varepsilon_{z_0} \approx 0{,}0007)$$
$$g = 9{,}8155 \pm 0{,}0005\,\text{м/с}^2\ (\varepsilon_g \approx 0{,}00005)$$

$$k = (0{,}4 \pm 0{,}006) \cdot 10^{-3}\,\text{м}^2\text{с}^{-2}\ (\varepsilon_k \approx 0{,}015)$$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_m + \varepsilon_k + 2\varepsilon_T$$

При измерениях можно пренебречь погрешностью измерений времени, т.к. систематическая погрешность составляет 5 мс при измеряемых промежутках примерно в 60 с, а случайная погрешность мала по сравнению с $0{,}015$ из-за большой массы подвеса (поэтому трение почти не замедляет его) и большого z_0 по сравнению с R и r (поэтому малы скорости и амплитуды и период колебаний почти не зависит от амплитуды).

Параметры цилиндра:

$$m_1 = 772{,}1 \pm 0{,}5\,\text{г}$$
$$d_1 = 158{,}8 \pm 0{,}05\,\text{мм}$$

Параметры диска:

$$m_2 = 584{,}7 \pm 0{,}5\,\text{г}$$
$$d_2 = 170{,}4 \pm 0{,}05\,\text{мм}$$

Измерим по 30 колебаний для разных комбинаций грузов.

- Без тел: $t_0 = 122{,}622\,\text{с}$
- Цилиндр: $t_1 = 120{,}560\,\text{с}$
- Диск: $t_2 = 109{,}816\,\text{с}$
- Диск и цилиндр: $t_3 = 113{,}004\,\text{с}$

Момент инерции платформы

$$I_0 = (6{,}39 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ (\varepsilon_{I_0} \approx 0{,}016)$$

Момент инерции платформы с цилиндром

$$I_1 = (11{,}16 \pm 0{,}18) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ (\varepsilon_{I_1} \approx 0{,}016)$$

Момент инерции платформы с диском

$$I_2 = (8{,}41 \pm 0{,}14) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ (\varepsilon_{I_2} \approx 0{,}017)$$

Момент инерции платформы с диском и цилиндром

$$I_3 = (13{,}13 \pm 0{,}22) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ (\varepsilon_{I_3} \approx 0{,}017)$$

Момент инерции цилиндра

$$I_c = I_1 - I_0 = (4{,}77 \pm 0{,}28) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ (\varepsilon_{I_c} \approx 0{,}06)$$

Теоретическое значение

$$I_{ct} = m_1 \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 = (4{,}867 \pm 0{,}006) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ \text{(отклонение эксперимента от теории 2 \%)}$$

Момент инерции диска

$$I_d = I_2 - I_0 = (2{,}02 \pm 0{,}24) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ (\varepsilon_{I_d} \approx 0{,}11)$$

Теоретическое значение

$$I_{dt} = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = (2{,}122 \pm 0{,}003) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ \text{(отклонение эксперимента от теории 5 \%)}$$

Момент инерции диска и платформы

$$I_{cd} = I_3 - I_0 = (6{,}73 \pm 0{,}32) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2\ (\varepsilon_{I_{cd}} \approx 0{,}05)$$

Теоретическое значение

$$I_{cdt} = I_{dt} + I_{ct} = (6{,}990 \pm 0{,}009) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2 \text{ (отклонение эксперимента от теории } 4\,\%\text{)}$$

$$I_c + I_d = (6{,}79 \pm 0{,}52) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$1 - \frac{I_{cd}}{I_c + I_d} \approx 8 \cdot 10^{-3}$$

Аддитивность момента иннерции выполняется с хорошей точностью.

Убедимся в справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера. Для этого придвинем вплотную два бруска, образующих цилиндр и изменяя расстояние между их серединами $2h$, будем измерять период 30 колебаний t_30. Если в координатах $T^2(h^2)$ точки лягут на прямую, теорема будет выполнена.

Таблица 1. Зависимость периода 30 колебаний от h

h, $\pm 0{,}2$ см	t_{30}, с
0	92.395
0.5	93.161
1	94.038
1.5	94.372
2	96.208
2.5	98.146
3	99.669
3.5	102.434
4	104.254
4.5	106.417
5	110.252
5.5	113.689
6	116.311
6.5	120.030
7	123.869
7.5	128.324

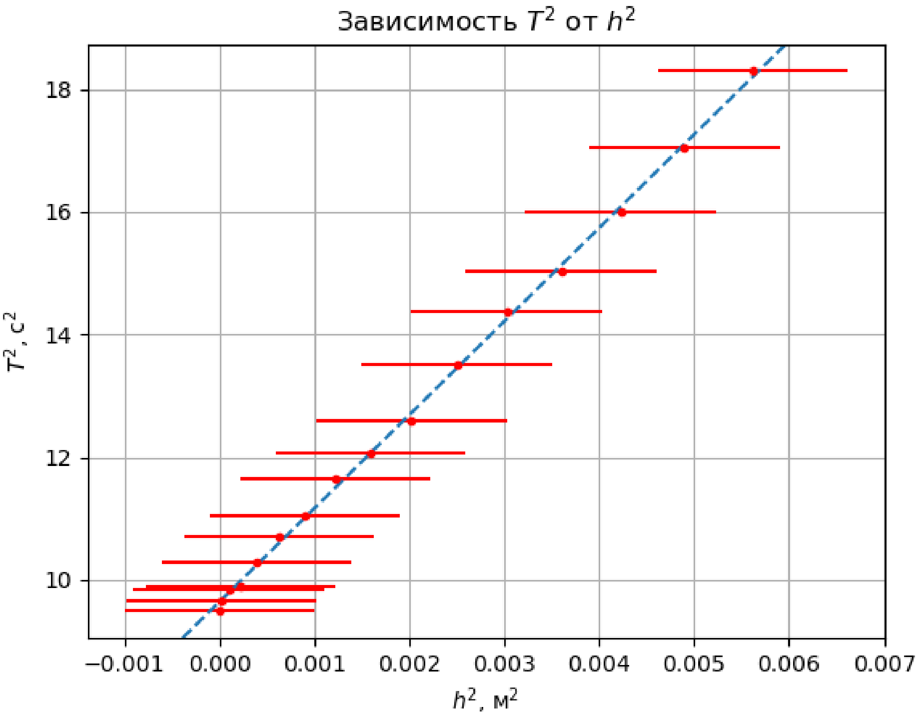
Погрешности измерения времени очень малы, поэтому не учитываются.

Диаметр диска, который образуют грузы $d = 12{,}56 \pm 0{,}005$ см.

$$I = kmT^2$$
$$I_0 + m\left(\frac{d^2}{8} + h^2 + x^2\right) = k\,(m + m_0)\,T^2$$
$$b + x^2 = k\left(1 + \frac{m_0}{m}\right)T^2$$
$$b + x^2 = aT^2$$
$$m = \frac{m_0}{\frac{1}{kK} - 1}$$

По МНК $a = 1525 \pm 13\,\text{с}^2/\text{м}^2$.

$$m = 1496 \pm 23\,\text{г} \text{ (взвешивание даёт } 1536{,}3\,\text{г, ошибка } 3\%\text{)}$$



$$I = k(m_0 + m)T(0)^2 - I_0 = (2{,}91 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

теоретическое значение $3{,}03 \cdot 10^{-3}$ кг · м^2, ошибка $4\,\%$.

Проведём аналогичные измерения для смещения в направлении, перпендикулярном рёбрам брусков. $2h$ — расстояние между торцами брусков.

Таблица 2. Зависимость периода 30 колебаний от h

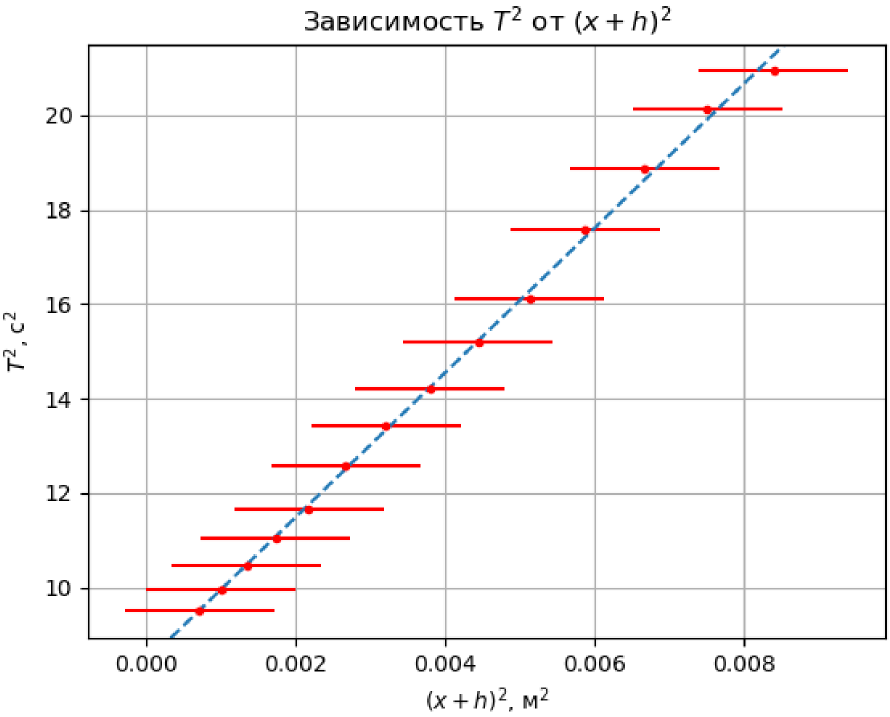
h, $\pm 0{,}2$ см	t_{30}, с
0	92.433
0.5	94.583
1	97.059
1.5	99.721
2	102.367
2.5	106.43
3	109.910
3.5	113.010
4	116.953
4.5	120.367
5	125.733
5.5	130.315
6	134.548
6.5	137.253

Формулы для массы и момента иннерции будут аналггичны предыдущим.

По МНК $a = 1532 \pm 17$ с^2/м^2.

$$m = 1512 \pm 39\,\text{г (взвешивание даёт } 1536{,}3\,\text{г, ошибка } 2\%)$$

$$I = k(m_0 + m)T(0)^2 - I_0 = (2{,}97 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-3}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$$



теоретическое значение $3{,}03 \cdot 10^{-3}$ кг $\cdot$ м^2, ошибка $2\,\%$.

Точки легли на прямую, поэтому теорема Гюйгенса-Штейнера выполняется.

5 Вывод

При помощи трифилярного подвеса с хорошей точностью были измерены моменты инерции диска, цилиндра и двух брусков, образующих диск. Также были проверены аддитивность момента инерции и теорема Гюйгенса-Штейнера.