МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4.4.1

Амплитудная дифракционная решетка

Пилюгин Л. С.
Б02-212

22 апреля 2024 г.

1 Аннотация

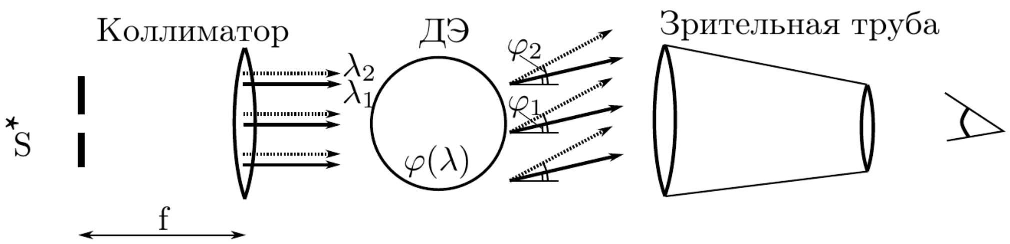
Цель работы: Знакомство с работой и настройкой гониометра Г5, определение спектральных характеристик амплитудной решётки.

Оборудование: гониометр, дифракционная решётка, ртутная лампа.

2 Теоритические сведения

2.1 Принцип работы оптических приборов

Оптические приборы, в которых осуществляется физическое разложение электромагнитного излучения на монохроматические составляющие, называются спектральными. Спектральный состав электромагнитного излучения может много рассказать о своём источнике и осреде, в которой излучение распространялось. Существуют сотни приборов, анализирующих спектры — от радиодиапазона до высокоэнергетических γ-квантов. По характеру распределения интенсивности в спектральном разложении спектры могут быть разделены на линейчатые (например, спектры излучения атомов), непрерывные или сплошные (например, спектр излучения абсолютно чёрного тела), а также смешанные, представляющие собой наложение линейчатых и непрерывных спектров (например, спектр излучения Солнца). В данном лабораторном практикуме наблюдение спектров проводится на установках, основными элементами которых являются дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо и призма. Эти установки позволяют проводить визуальное наблюдение линейчатых спектров, состоящих из набора узких спектральных линий в оптическом диапазоне длин волн, и на них можно довольно точно определить значение длины волны, но интенсивность спектральной линии определяется грубо, «<на глаз»>.



Принципиальная схема установки для изучения спектров приведена на рисунке. Свет от источника S попадает на экран, в котором имеется отверстие в виде щели. Экран располагают в фокальной плоскости линзы или системы линз. Коллиматор формирует пучок света, близкий к параллельному. После коллиматора пучок лучей попадает на диспергирующий элемент (ДЭ): амплитудную или фазовую дифракционную решётку, интерферометр Фабри–Перо или призму. Наблюдаются изображения с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность. Если удалить из схемы диспергирующий элемент, а коллиматор и зрительную трубу расположить на одной оси, то можно увидеть чёткое изображение входной щели коллиматора.

Диспергирующий элемент перераспределяет интенсивность падающего на него излучения по углам в зависимости от длины волны: каждой монохроматической компоненте излучения с длиной волны λ соответствует один или несколько углов $\varphi(\lambda)$ на выходе прибора, в направлении которых интенсивность прошедшей волны максимальна. Иными словами, диспергирующий элемент пространственно разделяет монохроматические составляющие падающего на него излучения, осуществляя тем самым его физическое разложение по спектру. При известной зависимости $\varphi(\lambda)$ по измеряемому углу поворота φ зрительной трубы можно определить длину волны спектральной линии.

Каждый спектральный прибор предназначен для решения конкретной задачи спектроскопии. Выбор прибора для исследования спектра какого-либо источника должен заключаться в сравнении его характеристик с требуемыми. Наиболее важными характеристиками являются угловая дисперсия, разрешающая способность и дисперсионная область.

Разрешающая способность $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ характеризует возможность прибора различать две близкие спектральные линии с длинами волн λ и $\lambda + \delta\lambda$

Угловая дисперсия $D = \frac{d\varphi}{d\lambda}$ — производная зависимости угла отклонения $\varphi(\lambda)$ волны диспергирующим элементом по λ. По величине угловой дисперсии можно определить угловое расстояние между двумя близкими спектральными линиями: $\delta\varpi \approx D\delta\lambda$.

Дисперсионная область (или область дисперсии) — предельная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$ прибора, для которой дифракционные максимумы соседних порядков не перекрываются. Она определяет диапазон длин волн, при которых прибор может быть использован для анализа спектра.

2.2 Дифракция

Дифракцией называются отклонения в распространении волн от законов геометрической оптики.

Основными параметрами, определяющими характер дифракционных явлений, является длина волны λ, размер отверстия b и расстояние до плоскости наблюдения z. Характер дифоракции определяется волновым параметром

$$p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{b}$$

При $p \ll 1$ выполняются законы геометрической оптики, при $p \approx 1$ происзодит дифракция Френеля, $p \gg 1$ — дифракция Фраунгофера.

2.3 Принцип Гюйгенса-Френеля

Пусть волна света, созданная источниками, расположенными в области $z < 0$, достигла плоскости $z = 0$. Световое поле в этой плоскости нам известно. Пусть его комплексная амплитуда есть

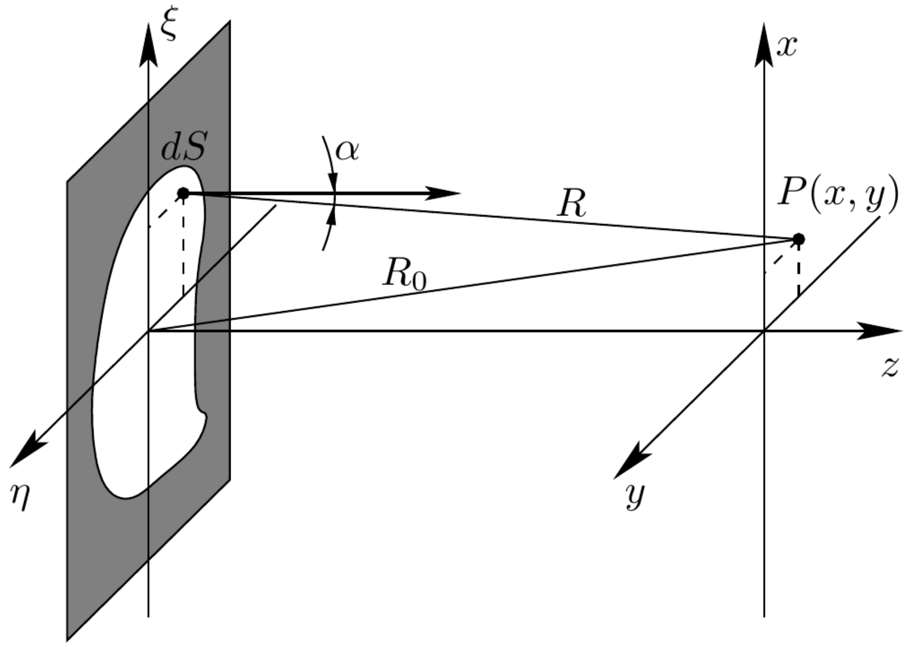
$$f_0(x, y) = a_0(x, y)e^{i\varphi_0(x,y)}$$

где функции $a_0(x, y)$ и $\varphi_0(x, y)$ описывают распределение амплитуд и фаз колебаний в плоскости $z = 0$.

Согласно принципу Гюйгенса, каждую точку (ξ, η) плоскости $z = 0$, куда пришла волна, можно рассматривать как источник вторичной волны. То есть можно представить себе, что волна возбуждает колебания некоторого фиктивного источника (осциллятора), который и переизлучает вторичную волну. Частота ω этой переизлучённой волны совпадает с частотой исходной монохроматической волны. Френель дополнил принцип Гюйгенса, предложив рассматривать световое колебание в любой точке наблюдения в области $z > 0$ как результат интерференции этих вторичных волн.

Предполагается, что амплитуда излучения вторичного источника пропорциональна амплитуде $a_0(\xi, \eta)$ колебания, созданного реальной волной, пришедшей к площадке ds. Фаза колебания также задаётся фазой $\varphi(\xi, \eta)$ пришедшей к элементу ds волны.

Далее предполагается, что маленькая площадка ds переизлучает, подобно точечному источнику, сферическую волну, т. е. для вычисления вклада, который даёт эта площадка



в суммарное колебание в точке наблюдения P, нужно учесть ослабление амплитуды и набег фазы e^{ikR}/R. Наконец, предполагается, что амплитуда колебания пропорциональна видимой из точки наблюдения площади элемента ds, т.е. пропорциональна $ds \cos\alpha$. Таким образом, вклад элемента ds пропорционален величине

$$f_0(\xi, \eta)\frac{e^{ikR}}{R}\cos\alpha \cdot d\xi d\eta$$

Полное световое колебание $g(x, y)$ есть результат интерференции всех вторичных волн, посылаемых всеми площадками ds, расположенными в области отверстия:

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda}\iint_S f_0(\xi, \eta)\frac{e^{ikR}}{R}\cos\alpha d\xi d\eta$$

При условии, что размер препятствия мал по сравнению с расстоянием R_0 до точки наблюдения, амплитудный множитель $\frac{1}{R}$, учитывающий уменьшение амплитуды в сферической волне по мере удаления от вторичного источника ds, можно заменить постоянной величиной $\frac{1}{R_0}$. Множитель наклона $\cos\alpha$ также считаем приблизительно одинаковым (и равным единице) для всех вторичных источников, расположенных в области отверстия. Тогда в этом приближении принцип Гюйгенса—Френеля приобретает следующий вид:

$$g(x, y) = \frac{1}{i\lambda R_0}\iint f_0(\xi, \eta)e^{ikR}d\xi d\eta$$

$$R \approx z + \frac{(x-\xi)^2}{2z} + \frac{(y-\eta)^2}{2z}$$

Тогда

$$g(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint f_0(\xi, \eta)e^{i\frac{k}{2z}\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)}d\xi d\eta$$

Если отверстиеосвещается плоской волной, то $f_0(\xi, \eta) = A_0$.

2.4 Дифракция Фраунгофера

Рассмотрим дифракцию на отверстии в плоском экране, находящемся в плоскости $z = 0$. Пусть точка наблюдения имеет координаты $P(x, y, z)$. Расстояние R от площадки ds в точке экрана (ξ, η) до точки P равно

$$R = \sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \approx R_0 - \frac{x\xi + y\eta}{R_0} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R_0}$$

$R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат O до точки наблюдения.

$$\xi^2 + \eta^2 \leq b^2 \ll \lambda R_0$$

Тогда последним слагаемым в R можно пренебречь и

$$R \approx R_0 - \frac{x\xi}{R_0} - \frac{y\eta}{R_0}$$

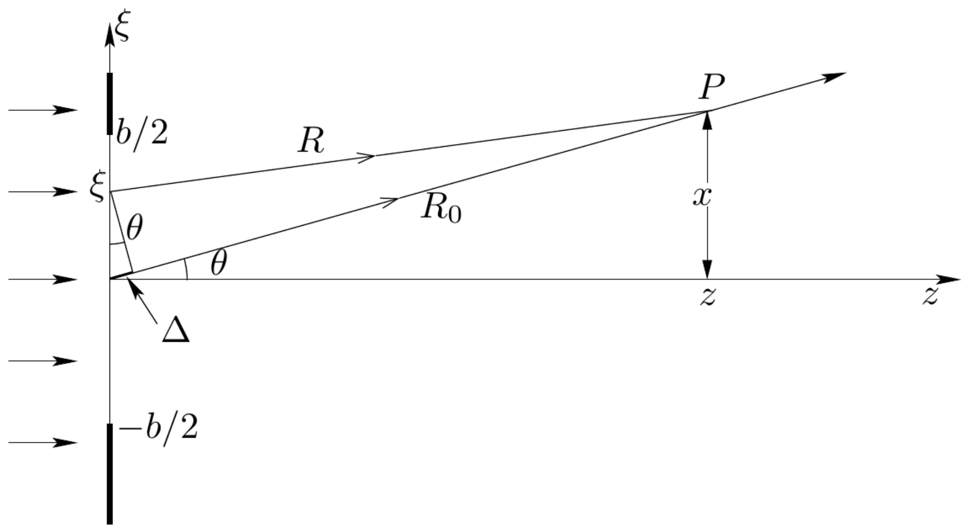
Тогда принцип Гюйгенса-Френеля запишется в виде

$$g(x, y) = \frac{e^{ikR_0}}{i\lambda R_0} \iint f_0(\xi, \eta) e^{-i\left(\frac{kx}{R_0}\xi + \frac{ky}{R_0}\eta\right)} d\xi d\eta$$

В одномерном случае

$$g(x) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-\frac{ikx\xi}{R_0}} d\xi$$

$u = \frac{kx}{R_0}$, а картина дифракции Фраунгофера представляет собой преобразование Фурье граничного поля $f_0(\xi)$.



Определим разность хода волн Δ, приходящих к удалённой точке наблюдения от двух вторичных источников, один из которых находится в точке с координатой ξ, а второй — в точке $\xi = 0$. Удалённость точки P позволяет считать направления волн, идущих из этих точек практически параллельными, следовательно, разность их хода равна

$$\Delta = \xi \sin\theta$$

Соответственно разность фаз колебаний равна $\varphi = -k\xi \sin\theta$, где θ — направление на удалённую точку наблюдения, имеющую координату x:

$$k \sin\theta = \frac{kx}{R_0} = u$$

Таким образом

$$g(u) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-ik\sin\theta\xi} d\xi$$

Эта формула — полный аналог преобразования Фурье для $f_0(t)$

$$C(\omega) = \int f_0(t) e^{-i\omega t} dt$$

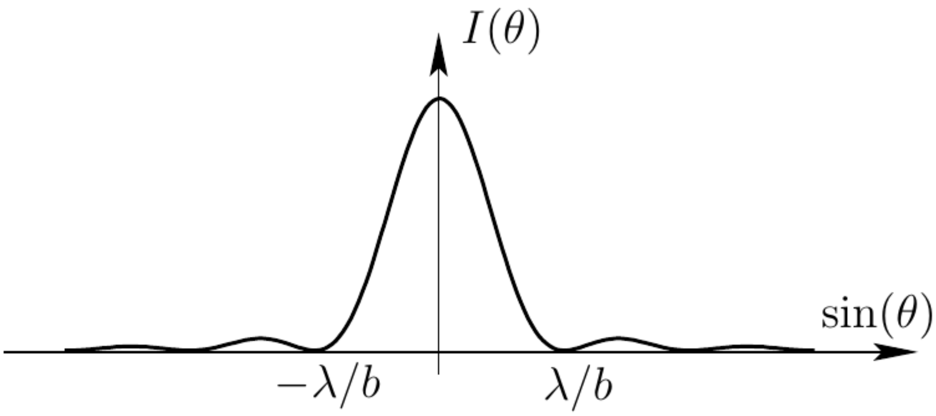
Эта аналлогия позволяет назвать величину $u = k\sin\theta$ пространственной частотой.

Распределение $I(\theta) \approx g(\theta)$ называется диаграммой направленности.

2.5 Дифракция Фраунгофера на щели

Пусть щель шириной b освещается слева плоской нормально падающей волной. Граничное поле $f_0(x)$, возникающее в плоскости $z = 0$, примыкающей к непрозрачному экрану со щелью справа, имеет вид прямоугольного выступа шириной b. Тогда

$$g(\theta) \approx \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx\sin\theta} dx \approx \frac{\frac{kb}{2}\sin\theta}{\frac{kb}{2}\sin\theta}$$



Почти вся интенсивность $I(\theta) \approx g(\theta)^2$ сосредоточена в области

$$|\sin\theta| \leq \frac{\lambda}{b}$$

2.6 Дифракция Фраунгофера на двух щелях

Рядом со щелью, дифракцию на которой мы рассмотрели выше, расположим параллельно ещё одну щель на расстоянии d от первой.

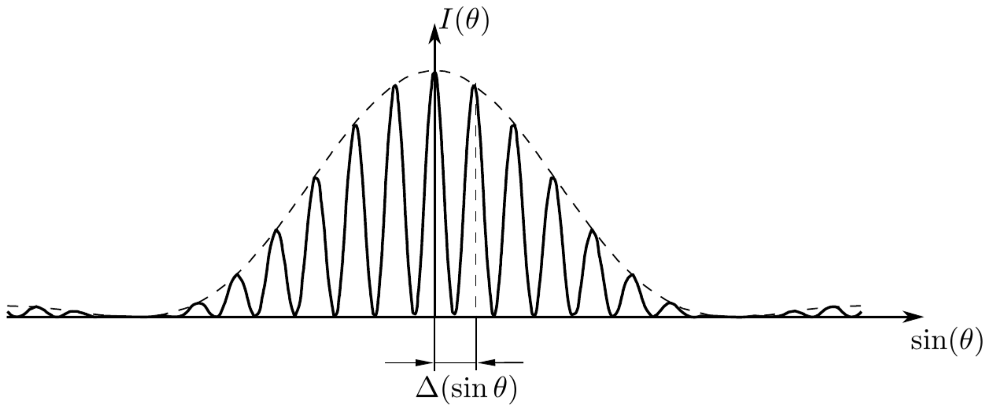
Расстояние от второй щели до точки наблюдения на величину $\Delta = d\sin\theta$ меньше расстояния между первой щелью и точкой наблюдения. Соответствующая фаза колебания отличается на величину

$$\alpha = -k\Delta = -kd\sin\theta$$

Поэтому колебательный процесс, созданный второй щелью в точке наблюдения, описывается функцией $g(\theta)e^{i\alpha}$. Волны, посылаемые в точку наблюдения двумя щелями, интерферируют. Амплитуда суммарного колебательного процесса в точке наблюдения есть $g(\theta) + g(\theta)e^{i\alpha}$.

Картина интенсивности

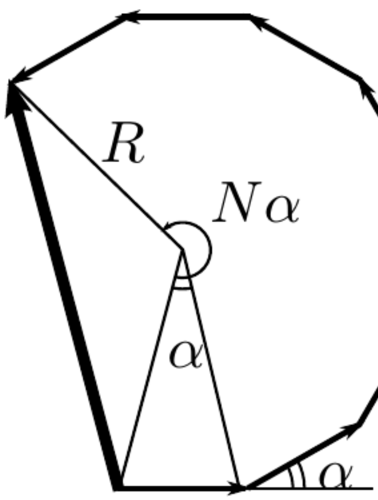
$$I(\theta) \approx |g(\theta)|^2 \left(1 + \cos\left(kd\sin\theta\right)\right)^2$$



2.7 Дифракция Фраунгофера на решётке

Рассмотрим периодическую структуру одинаковых щелей с периодом d. По аналогии с дифракцией на двух щелях запишем суммарный колебательный процесс в точке наблюдений как сумму колебаний от каждой щели с учётом сдвига фазы. Фаза колебаний от щели номер m на $\alpha_m = m\alpha = -mkd\sin\theta$ отличается от фазы колебаний начальной щели. Если всего решётка имеет N щелей, суммарное колебание в точке наблюдения есть

$$g_N(\theta) = g(\theta)\sum_{m=0}^{N-1} e^{im\alpha}$$



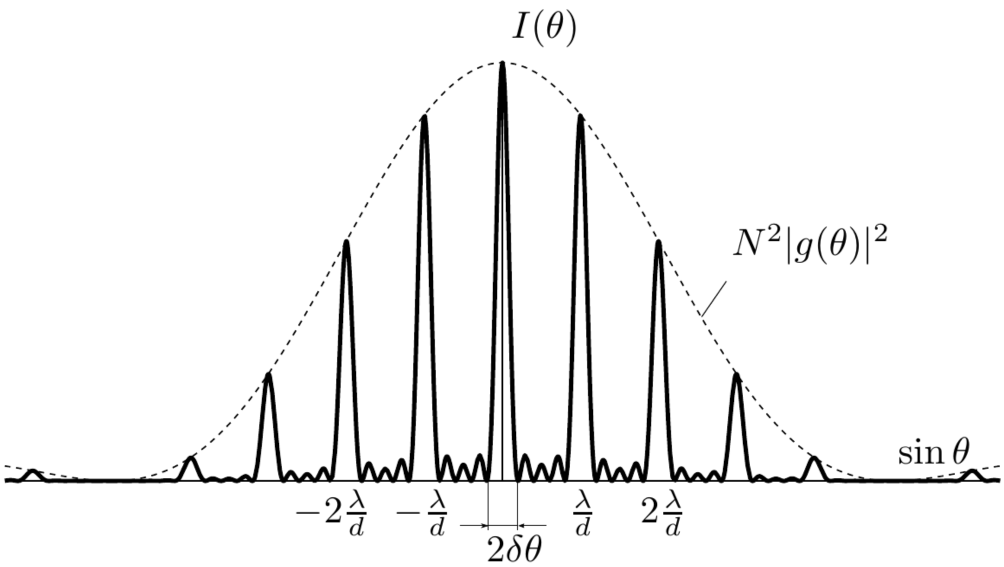
Найдём сумму, построив векторную диаграмму. Каждое слагаемое $e^{im\alpha}$ изобразим вектором единичной длины, угол поворота которого относительно горизонтальной оси равен $m\alpha$. Получим цепочку вектором, показанную на рисунке. Суммарное колебание изображается вектором, соединяющим начало и конец цепочки. Радиус окружности, в которую вписана цепочка векторов, равен $R = \frac{1}{2|\sin\alpha/2|}$, длина результирующего вектора равна $2R\,|\sin N\alpha/2|$. Отсюда получаем амплитуду колебания в точке наблюдения:

$$|g_N(\theta)| = |g(\theta)| \cdot \left| \frac{\sin\frac{Nkd\sin\theta}{2}}{\sin\frac{kd\sin\theta}{2}} \right|$$

Распределение интенсивности $I(\theta) = |g_N(\theta)|^2$ по углам описывается формулой

$$I(\theta) = |g(\theta)|^2 \left| \frac{\sin\frac{Nkd\sin\theta}{2}}{\sin\frac{kd\sin\theta}{2}} \right|^2$$

Здесь первый сомножитель описывает картину дифракции на отдельной щели, а второй связан с интерференцией волн от разных щелей.



Характерной особенностью решётки является наличие узких максимумов, в которые идёт подавляющая доля общего потока энергии. Их положения определяются условием

$$d\sin\theta_m = m\lambda,$$

означающим, что идущие в направлении θ_m волны от всех щелей складываются в одной фазе, так как при этом $-\alpha_m = kd\sin\theta_m = 2\pi m$. Поскольку фазы вкладов от всех щелей одинаковы, амплитуда колебаний в максимумах в N раз больше амплитуды от одной щели, а интенсивность — в N^2.

Угловую полуширину максимумов $\delta\theta$ оценим, найдя ближайшую к какому-либо θ_m точку $\theta = \theta_m + \delta\theta$, в которой функция обращается в нуль. Такая точка соответствует приращению аргумента синуса в числителе на π, то есть

$$\delta(kd\sin\theta) = \frac{2\pi}{N}$$

Для небольших углов оценка угловой полуширины главных дифракционных максимумов есть

$$\delta\theta \approx \frac{\lambda}{Nd}$$

Целое число m называется порядком главного максимума. Максимальное значение m ограничено величиной d/λ. Реально же заметными являются максимумы $m \le d/b$.

2.8 Угловая дисперсия амплитудной решетки

Угловая дисперсия $D(\lambda)$ характеризует угловое расстояние между близкими спектральными линиями:

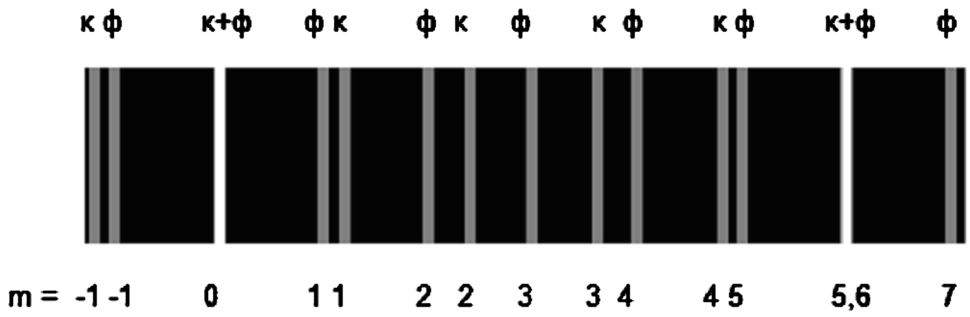
$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - m^2\lambda^2}} \approx \frac{m}{d}$$

2.9 Разрешающая способность амплитудной решетки

Рассмотрим изображения спектра для двух узких спектральных линий с длинами волн λ и $\lambda+\delta\lambda$. Для минимального значения $\delta\lambda$, которое может быть определено по результатам измерений, вводят важнейшую характеристику спектрального прибора — разрешающую способность:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

Решётку изготавливают с помощью делительной машины или методами литографии, далее её размножают или распечатывают. Копия эталонной решётки называется репликой. В учебных лаборато риях используются именно реплики. На большие решётки делительная машина наносит 10^4–10^5 штрихов, шаг решётки составляет величину порядка микрометра. Если на одном участке решётки шаг чуть больше, а на других чуть меньше среднего, то в изображении спектра могут возникать ложные линии спектра. Они называются «<духами»>. Естественной причиной уменьшения разрешающей способности спектральных приборов является их старение и нарушение правил обращения с ними.



Приведённые выше соображения относятся к техническим требованиям изготовления спектрального прибора. Рассмотрим физические ограничения разрешающей способности. На рисунке изображения спектральных линий являются изображениями входной щели коллиматора. Начнём уменьшать размер щели. В начале этого процесса будет уменьшаться интенсивность линий и их ширина. Начиная с некоторого момента будет уменьшаться только интенсивность, а ширина линий изменяться не будет. Достигнут физический предел ширины линии, и он определяется дифракцией света на апертуре решётки. Определим угловое расстояние между максимумом линии и её первым нулем — полуширину линии $\delta\varphi$. Пусть на решётку, состоящую из N штрихов, падает параллельный пучок света перпендикулярно её поверхности. Если $N = 2$, то две волны погасят друг друга, если между ними возникнет разность хода $\lambda/2$, если $N = 3$, то $\lambda/3$. В общем случае N штрихов для полуширины линии $\delta\varphi$ получаем уравнение, решение которого при $\delta\varphi \ll 1$ имеет вид

$$d\sin(\varphi_m + \delta\varphi) = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

$$\delta\varphi = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m}$$

$ND\cos\varphi_m$ — видимый под углом φ_m размер решётки. Угловое расстояние между двумя линиями определяется дисперсией

$$\Delta\varphi \approx D\delta\lambda = \frac{m}{d\cos\varphi_m}\delta\lambda$$

Для сравнения между собой различных спектральных приборов Релей предложил приравнять полуширину $\delta\varphi$ и расстояние между линиями $\Delta\varphi$. Критерий Релея удобен для различных оценок. Согласно ему для дифракционных решёток разрешающая способность определяется порядком спектра и числом штрихов:

$$R = Nm$$

Здесь под N следует понимать число одновременно работающих штрихов решётки, которое, вообще говоря, не равно суммарному числу штрихов освещённого участка решётки. Число штрихов N определяется качеством реплики, размером источника света и т.д. Например, если источник является однородной линией шириной b на расстоянии z от решётки, то размер области решётки, засвеченной когерентно, определяется формулой $\rho \approx \lambda/\psi$, где $\psi = b/z$ — угловой размер источника.

Основная числовая характеристика условия Релея — отношение интенсивности света в провале между линиями к максимальному значению. Численное значение этой характеристики для решетки равно $2\left(\frac{\sin\pi/2}{\pi/2}\right)^2 \approx 0{,}81$. В экспериментальной спектроскопии разрешающая способность спектрального прибора превосходит разрешение по критерию Релея при использовании вместо глаза малошумящих приемников света. Измеряется отношение ширины суммарной к ширине отдельной линиина уровне половинной мощности: для критерия Релея это отношение равно 2.

2.10 Дисперсионная область амплитудной решетки

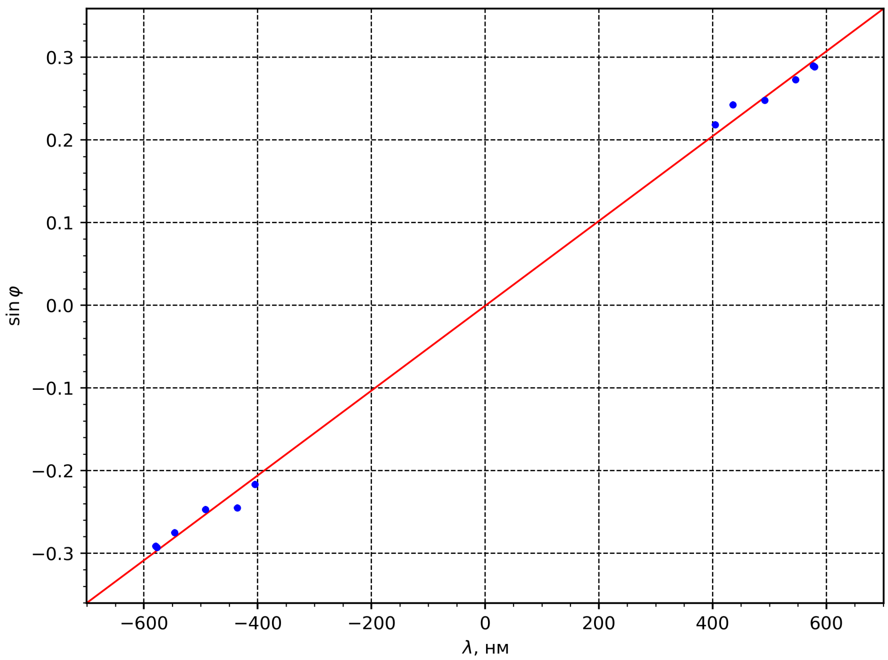
При большой ширине спектра спектры различных порядков могут накладываться друг на друга. Предельная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой спектры соседних порядков перекрываются своими границами, называется дисперсионной областью. При этом $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m+1)\lambda$ и

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

3 Результаты измерений

$\varphi_0 = 179°56'37'' \pm 5''$

λ, нм	1 порядок, $\pm 5''$	-1 порядок, $\pm 5''$
404,7	$167°24'48''$	$192°33'57''$
435,8	$165°45'43''$	$193°59'9''$
491,6	$165°37'33''$	$194°18'9''$
546,1	$163°58'12''$	$195°46'25''$
577	$162°53'54''$	$196°42'49''$
579,1	$163°00'00''$	$196°46'25''$



$$d = 1{,}95 \pm 0{,}02 \text{ мкм}$$

Для второго порядка положения линий дуплета $144°38'35''$ и $144°29'9''$.

порядок	левый край	правый край
-1	$196°46'16''$	$196°45'13''$
1	$162°59'49''$	$162°59'22''$
2	$144°29'33''$	$144°30'00''$

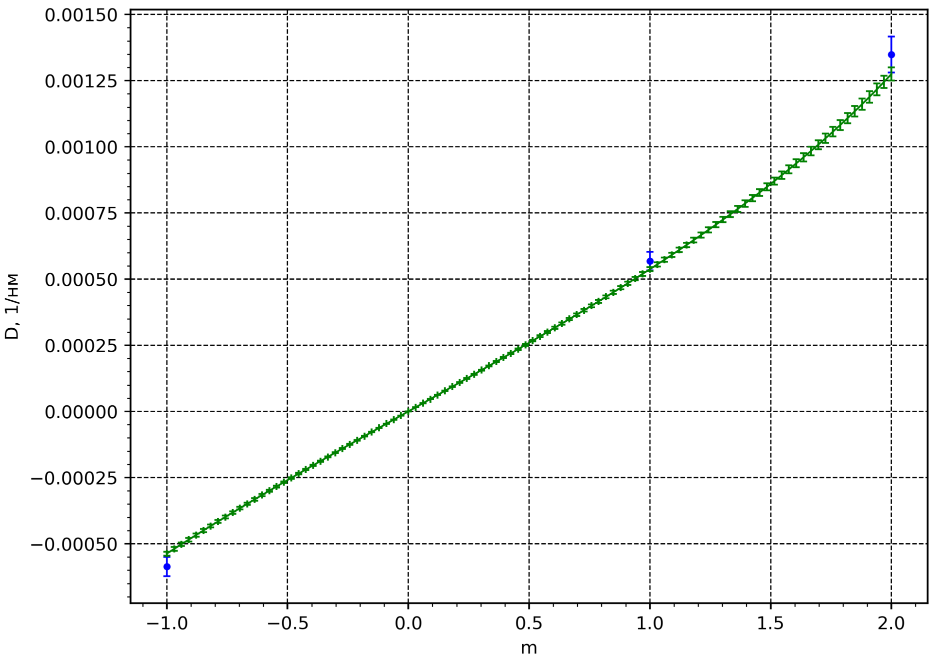
По 1 порядку

$$\delta\lambda = 0{,}26 \pm 0{,}09 \text{ нм}$$

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 2000 \pm 700$$

$$n = R/m = R = 2000 \pm 700$$

$$L = nd = 4 \pm 1 \text{ мм}$$



4 Вывод

При помощи гониометра Г5 были определены спектральные харктеристики угловой решетки: период, угловая дисперсия, разрешающая способность.