

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.7.1

Скин-эффект

Пилюгин Л. С.
Б02-212

Победин Н. К.
Б02-212

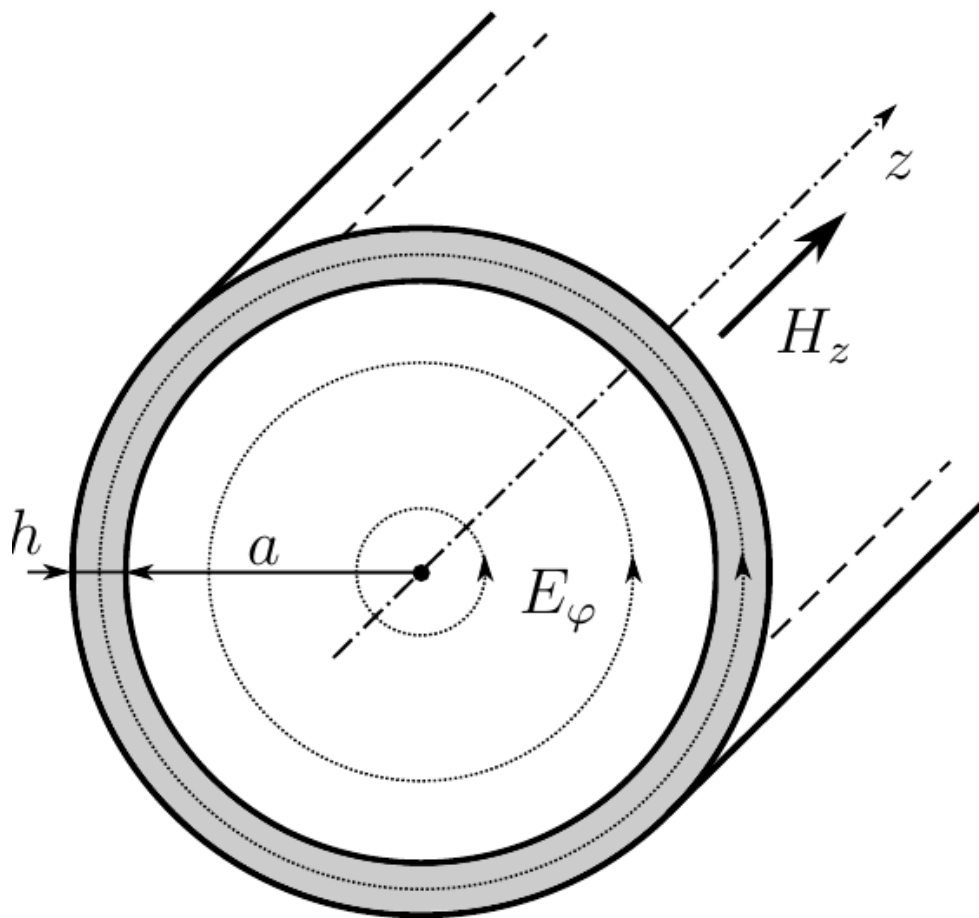
17 января 2024 г.

1 Аннотация

Цель работы: исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

Оборудование: генератор сигналов АКИП-3420, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас, медный экран в виде полого цилиндра, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, двухканальный осциллограф GOS-620, RLC-метр

2 Теоритические сведения



В работе изучается скин-эффект в длинном тонкостенном медном цилиндре, помещённом внутрь соленоида.

Пусть цилиндр достаточно длинный, так что в нём можно пренебречь краевыми эффектами. В этом приближении магнитное поле \vec{H} всюду направлено по оси системы, а вихревое электрическое поле \vec{E} будет всюду перпендикулярно радиусу. Все величины будем считать колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой ω . Тогда

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}$$

$$E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$$

где $H(r)$ и $E(r)$ — комплексные амплитуды колебаний соответствующих полей, зависящие только от расстояния r до оси системы. Заметим, что на границе цилиндра должны быть

непрерывны касательные к поверхности компоненты как \vec{E} , так и \vec{B} , поэтому $E(r)$ и $H(r)$ непрерывны во всей исследуемой области.

Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус a и толщину стенки $h \ll a$. Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться одномерным приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля внутри цилиндра.

Поскольку внутри цилиндра ток отсутствует, магнитное поле там является однородным

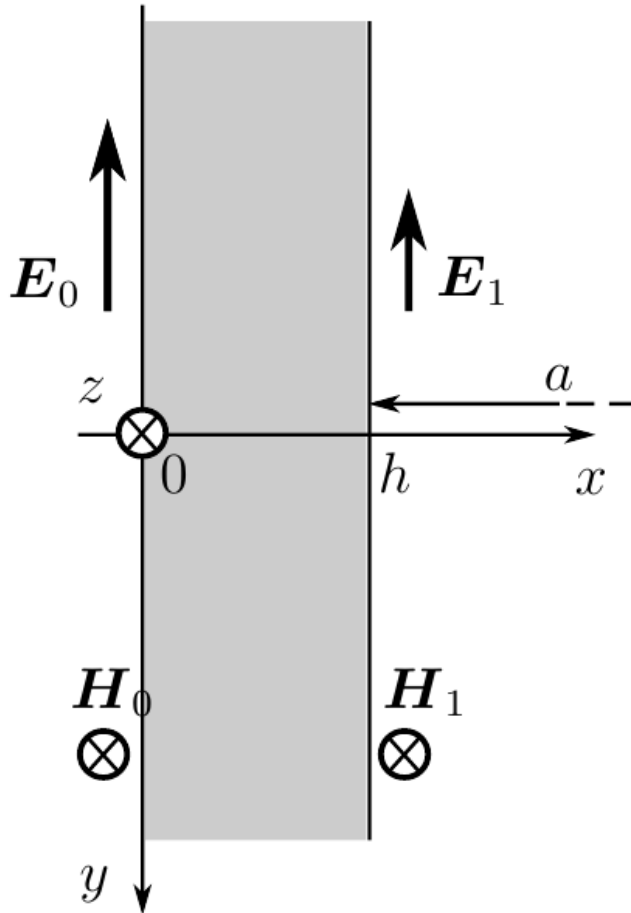
$$H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$$

где $H_1 = \text{const}$ — амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции в интегральной форме:

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

Отсюда получим связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2}i\omega a\mu_0 H_1$$



Поле внутри тонкой стенки цилиндра описывается уравнением скин-эффекта в плоской геометрии.

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega\sigma\mu_0 H$$

$\mu \approx 1$.

Граничные условия

$$H(0) = H_0, \quad H(h) = H_1$$

H_0 — амплитуда колебаний магнитного поля на внешней границе цилиндра. Её значение определяется только током в обмотке соленоида, и совпадает с полем внутри соленоида в отсутствие цилиндра. Величина H_1 также поддаётся непосредственному измерению — это амплитуда колебаний однородного поля внутри цилиндра. Поля H_0 и H_1 не являются независимыми — они связаны через решение уравнений поля вне проводника.

$$H(x) = H_0 e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{sh} \alpha x$$
$$\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4}$$
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}}$$

δ — глубина скин-слоя.

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch} \alpha h + \frac{1}{2} \alpha a \operatorname{sh} \alpha h}$$

При малых частотах ($\alpha h \ll 1$)

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{\alpha h}{\delta^2}}$$

При $h \ll \delta \ll \alpha$

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (ah\sigma\mu_0 w)^2}}$$

Колебания H_1 отстают по фазе от H_2 на ψ

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{ah}{\delta^2}$$

При больших частотах $\delta \ll h$ и $\alpha h \gg 1$ и $\alpha a \gg 1$

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}}{a} e^{-h/\delta} e^{-i(\pi/4 + h/\delta)}$$

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}$$

3 Оборудование

Переменное магнитное поле создается с помощью соленоида 1, намотанного на цилиндрический каркас 2 из поливинилхлорида, который подключается к генератору сигналов ЗГ (канал А). Внутри каркаса расположен медный экран 3 в виде полого цилиндра.

Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется цифровым амперметром А. Действующее значение переменного напряжения на измерительной катушке 4 измеряется цифровым вольтметром В.

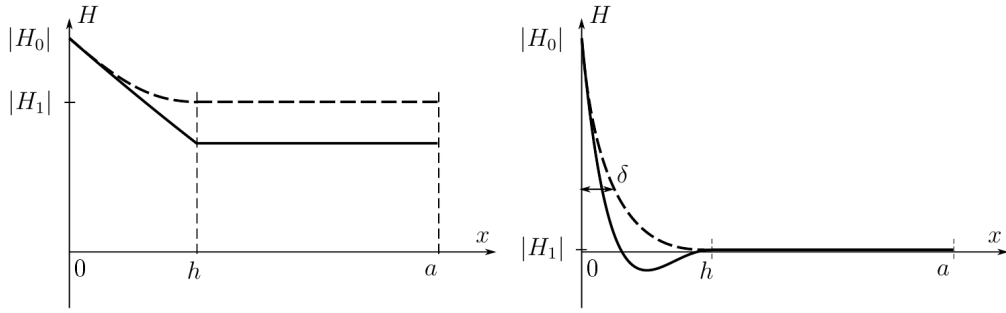


Рис. 3. Распределение амплитуды колебаний магнитного поля (пунктир) и его мгновенного значения при некотором t (сплошная) в зависимости от расстояния до внешней стенки цилиндра. Слева случай низких частот ($\delta \gg h$), справа — скин-эффект при высоких частотах ($\delta \ll h$)

Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На канал Y осциллографа подается напряжение с измерительной катушки, а на канал X — напряжение с резистора R, которое пропорционально току в цепи соленоида.

Для другой схемы RLC-метр, измеряющий индуктивность, подключается к катушке 1 через клеммы 5 и 6 на панели установки. Другие приборы при этом должны быть отсоединены от цепи, т.к. RLC-метр измеряет индуктивность активным образом.

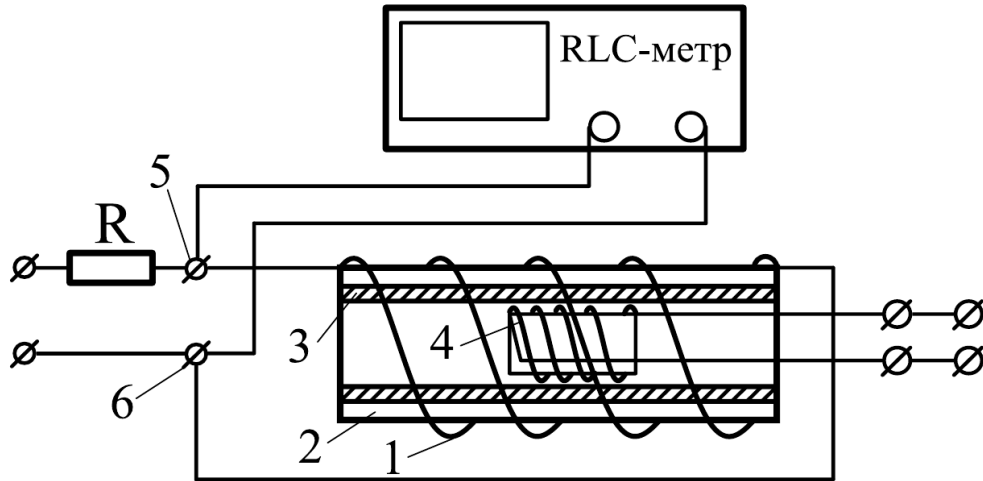


Рис. 5. Схема подключения RLC-метра

3.1 Измерение отношения амплитуд магнитного поля внутри и вне экрана

С помощью вольтметра V измеряется действующее значение ЭДС индукции, которая возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле $H_1 e^{i\omega t}$. Комплексная амплитуда ЭДС индукции в измерительной катушке равна

$$U = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega \mu_0 SN H_1 e^{i\omega t}$$

Показания вольтметра, измеряющего это напряжение:

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 H_1$$

$$\frac{H_1 U/\nu}{H_0 I} = \text{const} \cdot \frac{U}{\nu I}$$

Таким образом, отношение амплитуд магнитных полей снаружи и вне экрана может быть измерено по отношению $U/\nu I$ при разных частотах. При низких частотах

$$\frac{H_1}{H_0} \rightarrow 1$$

3.2 Определение проводимости материала экрана по фазовому сдвигу

В установке в качестве экрана используется медная труба промышленного производства. Технология изготовления труб оказывает заметное влияние на электропроводимость. Из-за наличия примесей проводимость меди нашей трубы отличается от табличного значения в меньшую сторону. Для определения σ предлагается использовать частотную зависимость фазового сдвига между магнитными полями внутри и вне экрана при низких частотах и зависимость при высоких частотах.

$\text{tg } \psi(\nu)$ — линейная зависимость, проходящая через 0 (для низких частот). Для высоких частот такой зависимостью аппроксимируется $\psi(\sqrt{\nu}) - \pi/4$.

На входной канал Y осциллографа подаётся сигнал с измерительной катушки, который пропорционален не полю внутри экрана, а его производной по времени, а это означает, что появляется дополнительный сдвиг по фазе на $\pi/2$. Поэтому

$$\varphi = \psi + \pi/2$$

3.3 Влияние скин-эффекта на индуктивность катушки

Из-за скин-эффекта индуктивность соленоида с медным цилиндрическим экраном внутри будет зависеть от частоты тока. На высоких частотах магнитное поле не проникает внутрь соленоида (за экран), поэтому суммарный магнитный поток, пронизывающий катушку, уменьшается, и, соответственно, уменьшается и индуктивность. При низких частотах, когда толщина скин-слоя δ больше толщины медного экрана h , магнитное поле проникает внутрь катушки, однако его амплитуда падает и возникает разность фаз между колебаниями поля за экраном и перед ним. Из-за чего также изменяется магнитный поток, а следовательно — и индуктивность.

Рассмотрим магнитный поток через катушку как сумму двух магнитных потоков: пронизывающий область между катушкой и цилиндрическим экраном Φ_{out} и пронизывающий область за экраном Φ_{in} .

$$\Phi = \Phi_{out} + \Phi_{in} = H_0 S_0 + H_1 S_1 = LI$$

H_0 и H_1 — мгновенные значения магнитного поля внутри и снаружи цилиндра при данном токе I , S_0 и S_1 — площади внешней и внутренней (по отношению к цилиндрическому экрану) областей соответственно.

Очевидно, что минимальная индуктивность будет в случае, когда $\Phi_{in} = 0$.

$$L_{min} = \frac{\Phi_{out}}{I}$$

$$\Phi_{in} = H_1 S_1 = \frac{H_1 S_1}{H_0 S_0} \Phi_{out} = \frac{\Phi_{out}}{n} \frac{S_1}{S_0}$$

$$n = \frac{H_0}{H_1} \frac{1}{\cos \psi}$$

$$\Phi_{max} = \Phi_{out} + \Phi_{in_{max}} = H_0 (S_0 + S_1) = L_{max} I_m$$

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{min}}$$

$$L = L_{min} + \frac{L_{max} - L_{min}}{n}$$

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2$$

По углу наклона прямой можно определить σ .

4 Результаты измерений

$$D = 45 \text{ мм}$$

$$a = D/2$$

$$h = 1,5 \text{ мм}$$

Таблица 1. Низкие частоты

ν , Гц	V , В	I , мА
$20,00 \pm 0,10$	$(1389,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$495,550 \pm 0,010$
$30,00 \pm 0,10$	$(2047,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$492,800 \pm 0,010$
$40,00 \pm 0,10$	$(2666,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$488,080 \pm 0,010$
$50,00 \pm 0,10$	$(3240,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$482,240 \pm 0,010$
$60,00 \pm 0,10$	$(3766,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$475,740 \pm 0,010$
$70,00 \pm 0,10$	$(4243,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$468,820 \pm 0,010$
$80,00 \pm 0,10$	$(4670,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$461,730 \pm 0,010$
$90,00 \pm 0,10$	$(5050,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$454,680 \pm 0,010$
$100,00 \pm 0,10$	$(5387,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$447,810 \pm 0,010$
$110,00 \pm 0,10$	$(5684,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$441,220 \pm 0,010$
$120,00 \pm 0,10$	$(5946,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-4}$	$434,940 \pm 0,010$

$$b = 5116 \pm 4 \text{ Гц}^2 \cdot \text{А}^2/\text{В}^2$$

$$k = (17844 \pm 9) \cdot 10^{-5} \text{ А}^2/\text{В}^2$$

$$\xi_0 = \sqrt{1/b} = (13981 \pm 6) \cdot 10^{-6} \text{ В}/\text{Гц} \cdot \text{А}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{k/b}}{\pi a h \mu_0} = (4432 \pm 2) \cdot 10^4 \text{ СМ}/\text{М}$$

Таблица 2. Высокие частоты

ν , Гц	V , В	I , мА	φ	T
120,0 ± 1,0	(5946,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(4349400,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,80 ± 0,05	8,40 ± 0,05
170,0 ± 1,0	(6847,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(4081000,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,20 ± 0,05	5,90 ± 0,05
220,0 ± 1,0	(7327,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3904800,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,70 ± 0,05	4,60 ± 0,05
270,0 ± 1,0	(7590,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3783600,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,10 ± 0,05	7,50 ± 0,05
320,0 ± 1,0	(7735,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3694500,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,60 ± 0,05	6,30 ± 0,05
370,0 ± 1,0	(7803,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3625700,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,70 ± 0,05	5,50 ± 0,05
420,0 ± 1,0	(7839,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3568900,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,60 ± 0,05	4,80 ± 0,05
470,0 ± 1,0	(7844,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3519300,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,40 ± 0,05	4,30 ± 0,05
520,0 ± 1,0	(7824,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3473700,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,10 ± 0,05	3,90 ± 0,05
570,0 ± 1,0	(7789,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3430600,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	1,80 ± 0,05	3,60 ± 0,05
620,0 ± 1,0	(7743,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3389000,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	1,70 ± 0,05	3,20 ± 0,05
670,0 ± 1,0	(7688,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3348200,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,60 ± 0,05	7,50 ± 0,05
720,0 ± 1,0	(7628,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3307300,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,60 ± 0,05	7,00 ± 0,05
770,0 ± 1,0	(7561,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3267500,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,40 ± 0,05	6,60 ± 0,05
820,0 ± 1,0	(7488,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3227400,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,10 ± 0,05	6,20 ± 0,05
870,0 ± 1,0	(7411,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3187700,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,90 ± 0,05	5,80 ± 0,05
920,0 ± 1,0	(7331,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3147600,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,70 ± 0,05	5,50 ± 0,05
970,0 ± 1,0	(7247,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3107400,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	5,20 ± 0,05	10,40 ± 0,05
1020,0 ± 1,0	(7161,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3067200,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	4,90 ± 0,05	9,80 ± 0,05
1070,0 ± 1,0	(7074,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(3026800,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	4,70 ± 0,05	9,40 ± 0,05
1120,0 ± 1,0	(6984,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(2986500,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	4,50 ± 0,05	9,00 ± 0,05
1407,0 ± 1,0	(6459,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(2756000,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,60 ± 0,05	7,20 ± 0,05
1767,0 ± 1,0	(5819,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(2483700,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,70 ± 0,05	5,70 ± 0,05
2219,0 ± 1,0	(5099,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(2182700,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	4,90 ± 0,05	9,20 ± 0,05
2787,0 ± 1,0	(4346,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(1872300,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,90 ± 0,05	7,20 ± 0,05
3501,0 ± 1,0	(3611,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(1572100,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,30 ± 0,05	5,80 ± 0,05
4397,0 ± 1,0	(2933,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(1297400,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	2,70 ± 0,05	4,60 ± 0,05
5523,0 ± 1,0	(2331,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(1055900,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	5,50 ± 0,05	8,80 ± 0,05
6936,0 ± 1,0	(1814,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(849200,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	4,50 ± 0,05	7,10 ± 0,05
8712,0 ± 1,0	(1386,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(675400,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,90 ± 0,05	5,60 ± 0,05
10942,0 ± 1,0	(1042,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(528000,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	6,50 ± 0,05	9,00 ± 0,05
13744,0 ± 1,0	(766,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(396710,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	5,50 ± 0,05	7,20 ± 0,05
17262,0 ± 1,0	(573,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(288010,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	4,80 ± 0,05	5,80 ± 0,05
21681,0 ± 1,0	(387,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(188040,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	3,90 ± 0,05	4,60 ± 0,05
27232,0 ± 1,0	(265,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(92870,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	6,60 ± 0,05	7,30 ± 0,05
34203,0 ± 1,0	(149,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	(29238,0 ± 1,0) · 10 ⁻⁴	6,40 ± 0,05	6,80 ± 0,05

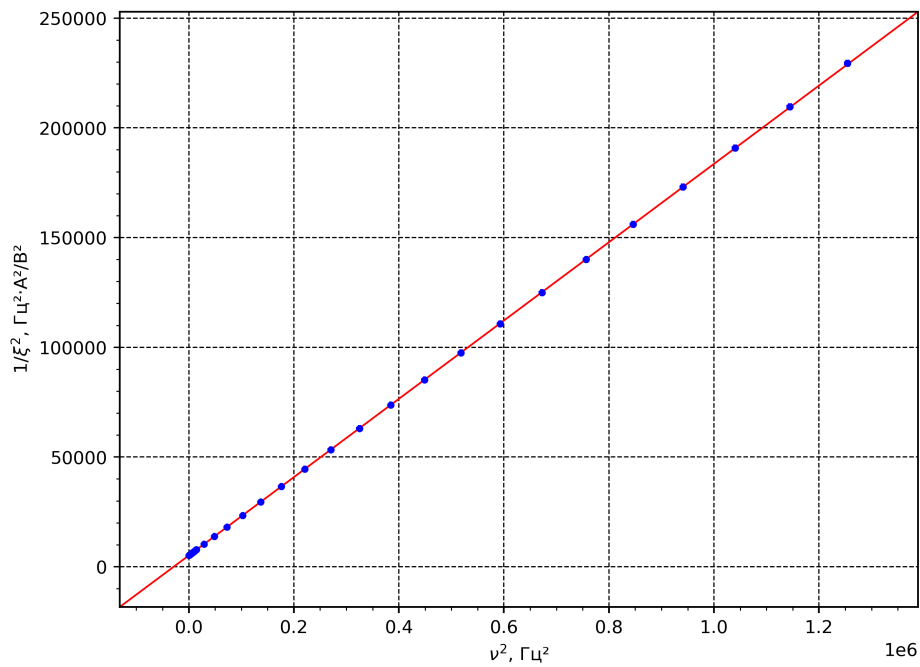
$$k = (-7 \pm 7) \cdot 10^{-3} \text{ Гц}^{-1}$$

$$\sigma = \frac{2k}{ah\mu_0} = (-3 \pm 3) \cdot 10^8 \text{ См/м}$$

Значение сильно отличается от истины и погрешность велика, т.к. погрешность тангенса сильно растет при приближении к π , а также точности определения разности фаз

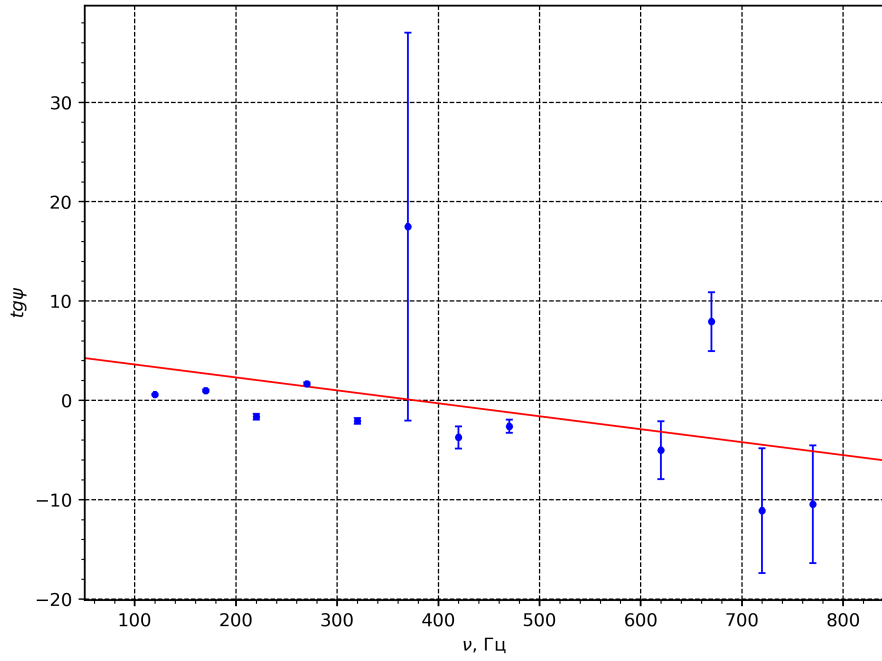
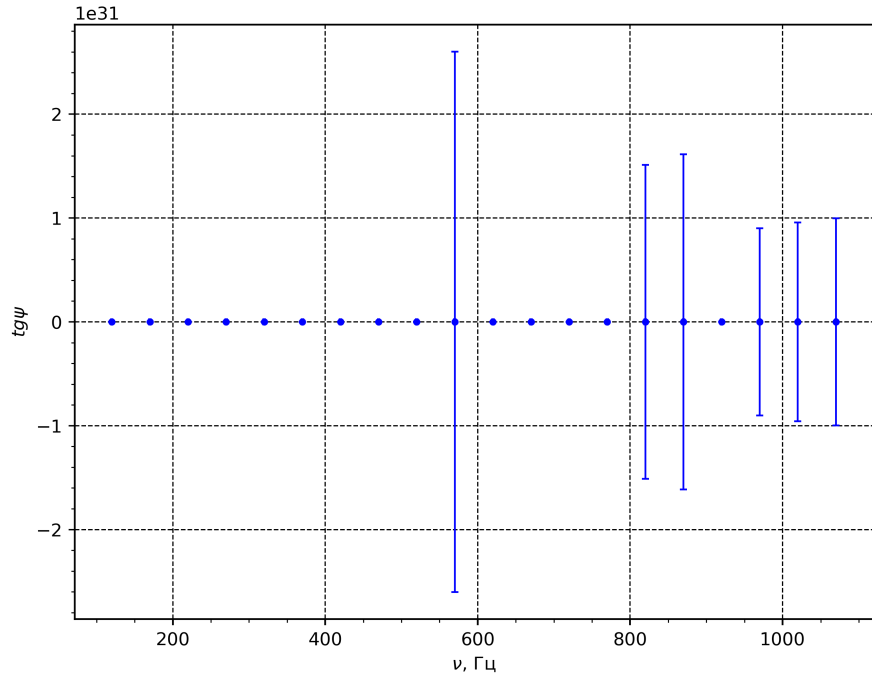
Таблица 3. Индуктивность

ν , Гц	L , мГн
50,0	9,6
75,0	9,02
100,0	8,29
150,0	6,91
250,0	5,02
300,0	4,46
500,0	3,314
800,0	2,816
1500,0	2,525
2000,0	2,44
2500,0	2,38
3000,0	2,35
5000,0	2,37
6000,0	2,402
7500,0	2,426
10000,0	2,475
15000,0	2,744
20000,0	3,25
25000,0	4,4
30000,0	11,629



осциллографом не хватает.

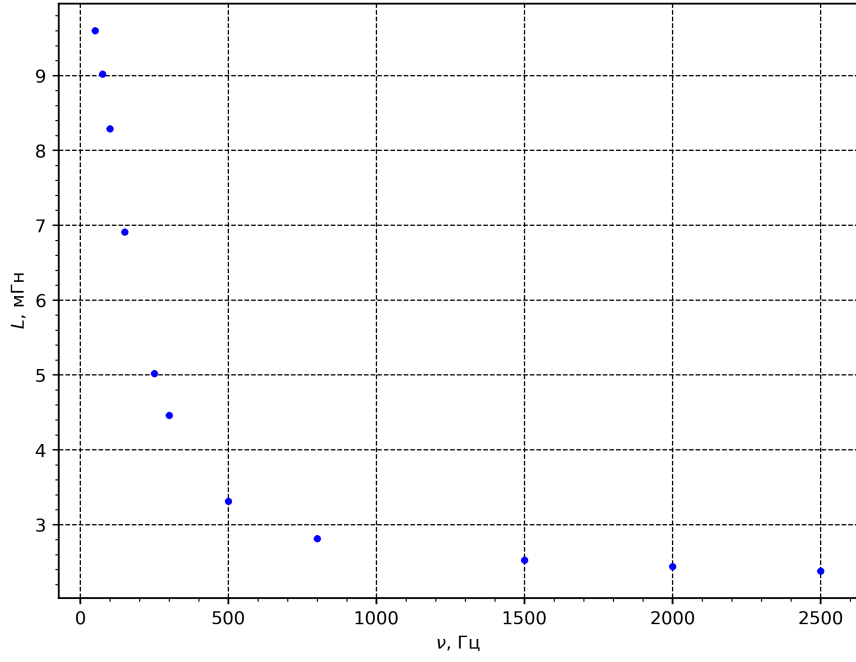
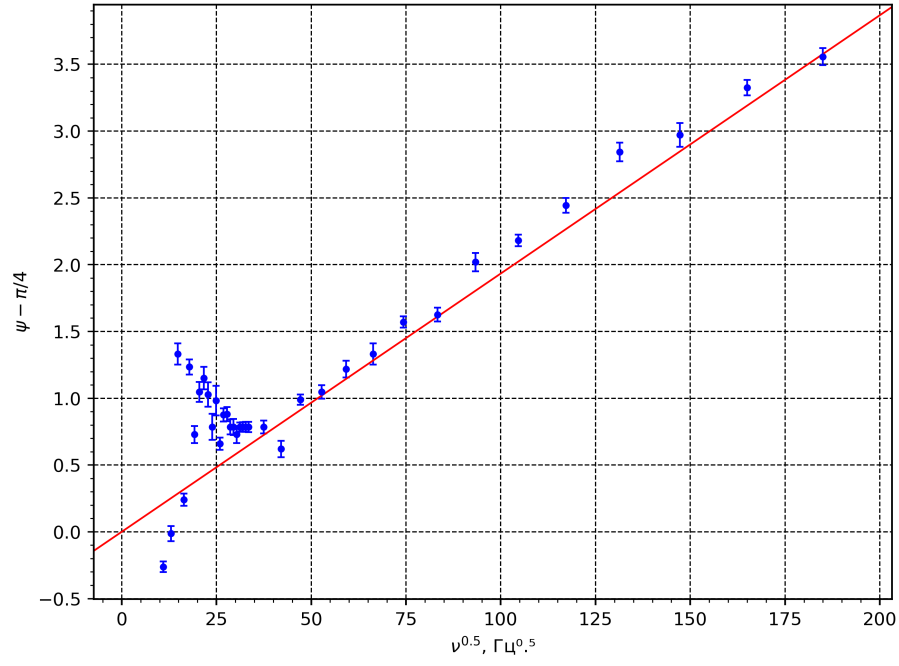
$$k = (193 \pm 7) \cdot 10^{-4} \text{ Гц}^{-0.5}$$



$$\sigma = \frac{k^2}{h^2 \pi \mu_0} = (42 \pm 3) \cdot 10^6 \text{ C}_M/\text{M}$$

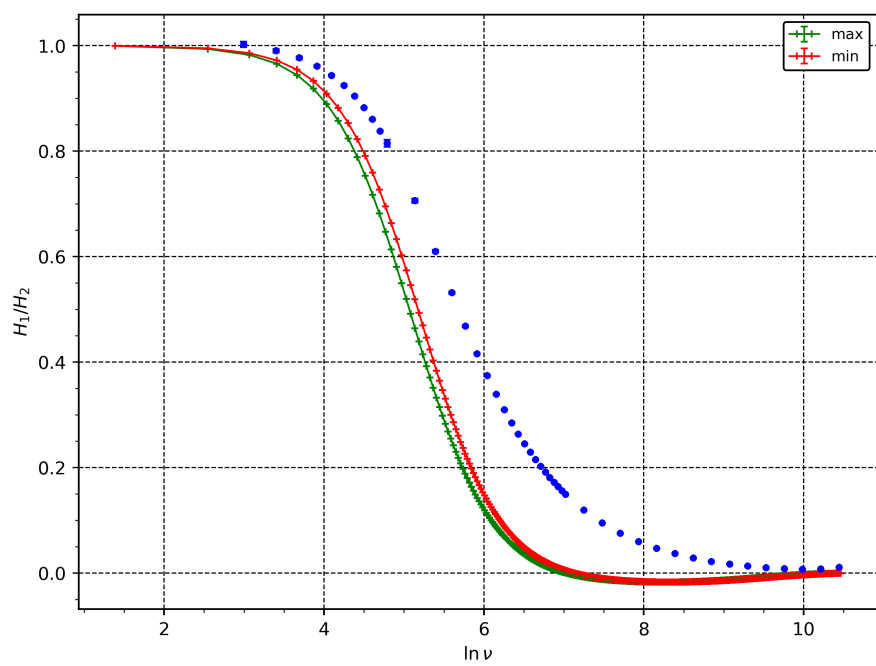
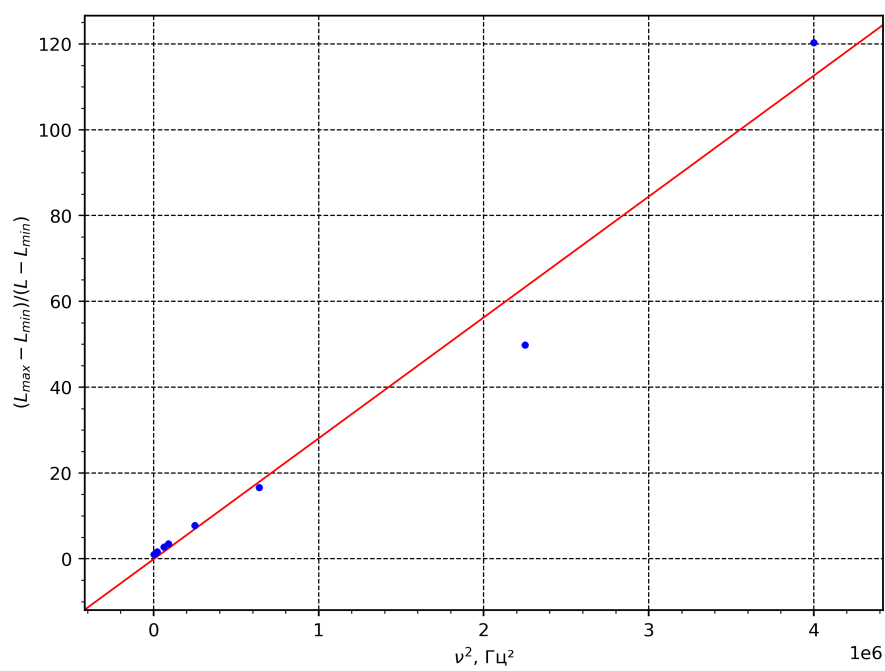
$$L_{\text{max}} = 9,6 \text{ мГн} \quad L_{\text{min}} = 2,38 \text{ мГн}$$

$$k = (28,2 \pm 1,4) \cdot 10^{-6} \Gamma_{\text{Ц}}^{-2}$$



$$\sigma = \frac{\sqrt{k}}{\pi a h \mu_0} = (39,8 \pm 1,0) \cdot 10^6 \text{ C}_{\text{M/M}}$$

$$\sigma_0 = 5,9 \cdot 10^7 \text{ C}_{\text{M/M}}$$



5 Вывод

В работе были получены значения удельной проводимости меди 4-мя способами и исследована зависимость ослабления магнитного поля от частоты.