# Analysis für Informatiker

**Vorlesung WS 2009/2010**
**Prof. Dr. Peter Rentrop**
**Inoffizielles Manuskript**


Markus Grimm
Andreas Heider
Lars Hupel
Michael Kerscher
Philipp Meyer
Janosch Peters
Sylvester Tremmel


21. April 2010

# Vorwort

Das vorliegende Manuskript folgt der Vorlesung „Analysis für Informatiker“ des WS 2009/2010, die von Prof. Dr. P. Rentrop gehalten wurde. Der Vorlesungsstoff orientiert sich an dem Buch „Konkrete Analysis“ von F. Bornemann („Springer“-Verlag). Der Inhalt des Buches ist Basis der Bachelor-Prüfungen in den Fakultäten Mathematik und Informatik der TUM.

# Inhaltsverzeichnis

# Vorlesungsverzeichnis

# 1 Grundlagen: Zahlbegriff

## 1.1 Zahldarstellung

Vorlesung 2009-10-20

### 1.1.1 Natürliche Zahlen zu reelle Zahlen

diskret: 1,2,3, ...
$\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ Menge der natürlichen Zahlen

**Definition** Menge ist Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unserers Denkens ◀

#### Axiomensystem nach Peano

(1) $1 \in \mathbb{N}$ (Anfang)

(2) $n \in \mathbb{N} \implies (n+1) \in \mathbb{N}$ (Nachfolger)

(3) $n \neq m \implies (n+1) \neq (m+1)$

(4) $n \in \mathbb{N} \implies (n+1) \neq 1$

(5) $A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A \wedge (\forall n : n \in A \implies (n+1) \in A) \implies A = \mathbb{N}$ (Vollständigkeitsaxiom, alle natürlichen Zahlen werden erfasst)

#### Erweiterungen

(1) ...zu $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1,0,1,2, \ldots\}$ ganze Zahlen. In $\mathbb{Z}$ Operationen $+, -$

(2) ...zu $\mathbb{Q}$ rationale Zahlen durch $*, /$, $q = \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$\mathbb{Q}$ ist dicht, d.h. zwischen $q_1, q_2$ liegt ein $\tilde{q}$

(3) ...durch $\sqrt{}$ (Wurzelziehen) bzw. Quadrieren $x^2 = a$

$$a = 2 \implies x = \sqrt{a} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \text{ irrational}$$

*Beweis (indirekt).* Aus $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ folgt Darstellung als Bruch $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, „gekürzt“ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p, q$ teilerfremd)
Daraus $2q^2 = p^2 \implies p^2$ gerade $\implies p = 2\hat{p}$ und $2q^2 = 4\hat{p}^2$
$\implies q^2 = 2\hat{p}^2 \implies q = 2\hat{q}$
$\implies$ Widerspruch zur gekürzten Form: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2\hat{p}}{2\hat{q}}$

Aussage: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl. □

Beweistechnik war indirekt, z. z. Aussage $A \implies$ Aussage $B$
indirekt: „nicht“ Aussage $B \implies$ „nicht“ Aussage $A$

*Beispiel: direkte Beweistechnik.* $p \in \mathbb{N}$ gerade $\Leftrightarrow p = 2\hat{p} \Leftrightarrow p^2 = 4\hat{p}^2$ gerade
$p \in \mathbb{N}$ ungerade $\Leftrightarrow p = 2\hat{p} + 1 \Leftrightarrow p^2 = (2\hat{p} + 1)^2 = 4\hat{p}^2 + 4\hat{p} + 1$ ungerade
$\rightsquigarrow$ reelle Zahlen, formaler Weg siehe [Bor08, S. 9ff] □

(4) reelle Zahlen – neue Kandidaten im Vergleich zu $\mathbb{Q}$

- $\sqrt{\ }$-Bildung
- $c = 0,\overline{b_1 \ \ldots \ b_k}$ periodische Zahl
  $c = \dfrac{b_1 \ \ldots \ b_k}{\underbrace{g \ \ldots \ g}_{k\text{-mal}}} \in \mathbb{Q} \implies 10^k c - c = b_1 \ldots b_k$ periodischer Bruch
  (eine neue periodische Zahl, die nicht als Bruch darstellbar ist, wäre z. B. $c = 0{,}101001000100001\ldots$)
- $\infty$-Summen, $\mathrm{e}, \pi, \ldots$

### 1.1.2 Maschinenzahlen $\mathbb{M}$

`INTEGER`-Zahlen (Assoziation: $\mathbb{Z}$), `REAL`-Zahlen (Assoziation: $\mathbb{R}$) sind 2 Typen unterschiedlicher Codierung
4 Byte für `INTEGER`; 4, 8, 10 Byte für `REAL`

**`INTEGER`**

31 Bits für Mantisse, größte Zahl $\pm \underbrace{1 \ldots 1}_{31 \text{ Mal}}$ (im Zweiersystem)
entspricht Zahldarstellung: $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{30} = 2^{31} - 1$
$\rightsquigarrow$ 10er-System: $2^{31} - 1 \mathrel{\widehat{=}} x$, $2^{10} \approx 10^3$
Zahlbereich: -2 Mrd. bis 2 Mrd

**`REAL-4`**

Mantisse 23 Bits, Exponent 7 Bits

$$\pm 0.\underbrace{\_\_\_\_\_ \ldots \_\_\_\_\_}_{\text{Mantisse}} e \pm \underbrace{\_\_\_ \ldots \_\_\_}_{\text{Exponent}}$$

Darstellung ist *normalisiert*, d. h. nach Dezimalpunkt keine Nullen (IEEE 754 $\widehat{=}$ VDE)

- Exponentenspielraum: $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \ldots + 1 \cdot 2^6 = 2^7 - 1 = 127$ Exponent $10^{-127}$ bis $10^{127}$

- Länge der Mantisse im 10er-System:
  $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + \ldots + 1 \cdot 2^{22} = 2^{23} - 1 \,\widehat{=}\, 10^x$
  $2^{23} \,\widehat{=}\, 10^x, x = 23 \log_{10}(2) \approx 6{,}923$
  $m \in \mathbb{M}, m = \pm 0.\_\_\_\_\_ \ldots \_\_\_\_\_ e \pm \_\_\_ \ldots \_\_\_$
  Lücke zwischen $-10^{-127}$ und $10^{-127}$ Faktor $10^7$ groß

### Rundungsfehler

wesentlich mitbestimmt von F. L. Bauer, Samelson, Zenger aus der Informatik und R. Bukisch und Chr. Reinsch aus der Mathematik und Wilkinson
Hilfsmittel: Abbildung von den reellen Zahlen (Alltag) auf den Rechner

**Definition** (Abbildung *rd* bzw. *round* (Rundung)) rd: $\mathbb{R} \to \mathbb{M}$

$$\text{rd: } \left\{ x | x \in [\frac{m_{i-1} + m_i}{2}, \frac{m_i + m_{i+1}}{2}[ \right\} \mapsto m_i$$

◀

**Anmerkung** Intervall-Arithmetik hat sich trotz Hardwareunterstützung nicht bewährt, da die Intervallängen zu pessimistisch waren. ◁

**Definition** (Abbildung) $A$, $B$ Mengen

$$f : A \to B, x \mapsto f(x)$$

Eine Abbildung ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $x = f(x) \in B$ zuordnet. ◀

**Charakterisierung von Abbildungen**

- gehören zu verschiedenen Argumenten verschiedene Funktionswerte, heißt $f$ *injektiv:*
$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$
- Wertebereich $C \subseteq A$:
$$f(C) = \{f(x) | x \in C\}$$
- $f$ heißt *surjektiv*, falls $f(A) = B$
- $f$ injektiv und surjektiv $\Leftrightarrow$ $f$ *bijektiv*

  $f : A \to B$ ist genau dann bijektiv, falls zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$. In diesem Fall existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1}: B \to A$.

Vorlesung 2009-10-21

### 1.1.3 Ungleichungen, Betrag

**Definition** (Ungleichung) Unter einer Ungleichung für reelle Zahlen $x, y$ versteht man einen Größenvergleich

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x < y$ | „kleiner“ | $x \leq y$ | „kleiner gleich“ |
| $x > y$ | „größer“ | $x \geq y$ | „größer gleich“ |

◀

**Abschätzung**

„$x < y$“ heißt: Größe von $x$ durch Größe von $y$ abschätzen
Regelwerk für Abschätzungen (Anordnungsaxiome) $\rightsquigarrow$ Zahlengerade

(1) $x \leq y, a \leq b \implies x + a \leq y + b$

(2) $x < y, 0 \leq a \implies ax \leq ay$
$x < y, 0 < a \implies ax < ay$
$x < y, 0 > a \implies ax > ay$

(3) $0 < x \leq y \implies 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$

**Beispiel** (Typische Aufgabe) Lege $a$ fest mit Eigenschaft

$$-3a - 2 \leq 5 \leq -3a + 4$$

$$\begin{aligned} -3a - 2 &\leq 5 & \qquad 5 &\leq -3a + 4 \\ -3a &\leq 7 & 1 &\leq -3a \\ -\frac{7}{3} &\leq a & a &\leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

◁

**Definition** (Obere Schranke) $S \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, falls eine Zahl $b$ existiert mit $S \subseteq \,]-\infty, b]$. $b$ heißt obere Schranke von $S$. ◀

**Definition** (Supremum) Ist $S \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so heißt die kleinste obere Schranke von $S$ das Supremum $s := \sup S$.
(analog: *Infimum* – „größte untere Schranke“ $u := \inf S$) ◀

**Anmerkung** Die kleinste obere Schranke muss nicht Element von $S$ sein, das *Maximum* hingegen schon. ◁

**Beispiel**

- $\sup\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- $\sup\{[a, b]\} = b \in [a, b]$
- $\inf\{1 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = 1$

◁

**Satz 1** (Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$) *Jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.*

**Anmerkung** $\mathbb{R}$ überabzählbar, $\mathbb{Q}$ abzählbar (siehe [Bor08, S. 11ff]) ◁

**Definition** (Betrag) Betrag $|a|, a \in \mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

◀

### Rechenregeln für Beträge

(1) $-|a| \leq a \leq |a|$

(2) $|-a| = |a|$

(3) $|ab| = |a||b|$

(4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

### Anwendung: Dreiecksungleichung

zu zeigen: $|a+b| \leq |a| + |b|$

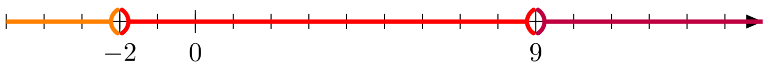
*Beweis.*

$$
\begin{aligned}
-|a| &\leq a && \leq |a| \\
-|b| &\leq b && \leq |b| \\
\implies -(|a|+|b|) &\leq a+b && \leq |a|+|b| \\
-(|a|+|b|) &\leq |a+b| && \leq |a|+|b|
\end{aligned}
$$

$\square$

### Rechenbeispiel

**Beispiel** $x \in \mathbb{R}$ gesucht mit $\frac{3}{|x-9|} > \frac{2}{x+2}$, Nenner $x \neq 9 \wedge x \neq -2$




$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{x \in \mathbb{R} | x < -2\} \\
M_2 &= \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 9\} \\
M_3 &= \{x \in \mathbb{R} | x > 9\}
\end{aligned}
$$

- Diskussion von $M_1 : x < -2$

$$|x-9| > 0 \implies \frac{3}{|x-9|} > 0$$

$$x < -2 \implies x+2 < 0 \implies \frac{2}{x+2} < 0$$

ganz $M_1$ zulässig

- Diskussion von $M_2 : -2 < x < 9$

$$\begin{aligned} \implies & x + 2 > 0 \\ & x - 9 < 0 \implies |x - 9| = 9 - x \end{aligned}$$

  zu prüfen:

$$\begin{aligned} \frac{3}{9-x} &> \frac{2}{x+2} \text{ (Betrag entfernt)} \\ 3x + 6 &> 18 - 2x \\ x &> \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

  erlaubt: $\frac{12}{5} < x < 9$

- Diskussion von $M_3 : x > 9$

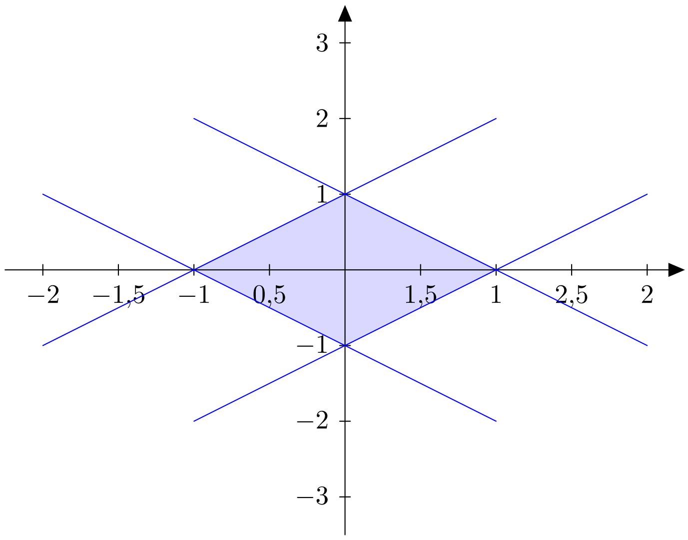
$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{|x - 9|}_{>0} &= x - 9 \\ \frac{3}{x-9} &> \frac{2}{x+2} \\ \implies x &> -24 \end{aligned}$$

  $M_3$ zulässig
  Ergebnis: $\{x | x < -2, \frac{12}{5} < x < 9, 9 < x\}$

$\triangleleft$

**Anwendung: Geometrie**

- Geradenschnitt




$$M = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}; x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} |x| + |y| \leq 1 \implies & x \geq 0, y \geq 0 : x + y \leq 1 \implies y \leq 1 - x \\ & x \geq 0, y < 0 : x - y \leq 1 \implies y \geq -1 + x \\ & x < 0, y \geq 0 : -x + y \leq 1 \implies y \leq 1 + x \\ & x < 0, y < 0 : -x - y \leq 1 \implies y \geq -1 - x \end{aligned}$$

- Kreis um Ursprung mit Fläche
  Radius: $\{(x,y)|x^2 + y^2 \leq r^2\}$
  Kreislinie: $\{(x,y)|x^2 + y^2 = r^2\}$

Vorlesung 2009-10-27

## 1.2 Vollständige Induktion

bisherige Beweistechniken:

(1) direkter Beweis: $A \implies B$

(2) indirekter Beweis: $\neg B \implies \neg A$

jetzt: vollständige Induktion

### 1.2.1 Schema

(1) Induktionsbeginn (bzw. -anfang): zeige, dass Aussage $A(n)$ für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt

(2) Induktionsschluss: $A(n)$ zu $A(n+1)$

**Beispiel**

- $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$
  (1) Induktionsanfang: $n_0 = 1$, $1 = \frac{1}{2}(1+1) = 1$
  (2) Induktionsschluss:
$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{A_n} + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1) + (n+1) = \frac{n+1}{2}(n+2)$$
- $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}$
$$n_0 = 1: \qquad 1 > \frac{1}{3}$$
$$n \to n+1: \qquad \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}_{> \frac{n^3}{3}} + (n+1)^2 > \frac{n^3}{3} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 6n + 3}{3} > \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3}$$

◁

Eng verwandt mit der vollständigen Induktion ist die Rekursion:

- lege $A_0$ fest
- setze $A_k$ als bekannt voraus für $k \leq n$
- definiere $A_n$ aus $A_k$

**Beispiel** (Standard)

- Potenz: $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : a^0 = 1, a^{n+1} = a \cdot a^n$
- Fakultät: $n \in \mathbb{N}_0$ :
$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

◁

**Definition** (Summensymbol)
$$a_j \in \mathbb{R} : a_0 + a_1 + \ldots + a_n =: \sum_{j=0}^{n} (a_j)$$

◀

### 1.2.2 Potenzen, Wurzel

**Satz 2** (Satz zur $m$-ten Potenz)
$x, y \in \mathbb{R}; n, m \in \mathbb{N}_0$

*(1)* $x^n x^m = x^{n+m}$

*(2)* $(x^n)^m = x^{nm}$

*(3)* $(xy)^n = x^n y^n$

*(4)* $y \neq 0 \implies \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

*(5)* $0 < x < y \implies 0 < x^n < y^n$

*(6)* $n \geq 2, 0 < x < 1 \implies x^n < x < 1$

*(7)* $n \geq 2, x > 1 \implies x^n > x > 1$

*(8)* $x > 1, m > n \implies x^m > x^n$

*(Beweis per vollständiger Induktion)*

Hilfsmittel für Abschätzungen: Linearisierungen, Bernoulli-Ungleichung

**Behauptung 1** *für alle* $x > -1, x \neq 0$ *und* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *gilt*

$$\underbrace{(1+x)^n}_{\text{nichtlin. Term}} > \underbrace{1+nx}_{\text{lin. Term}}$$

*Beweis per vollständiger Induktion*

Wunsch: in der Nähe von 1, d. h. $1 + x$ für kleine $x$, soll der lineare Term den nichtlinearen Term ersetzen (Abschätzungstechnik)

**Satz 3** (Elementare Summenformel)
$q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(q^k\right) = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

*Beweis per vollständiger Induktion*

**Definition** ($n$-te Wurzel) $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x \geq 0,\ n \text{ gerade} &\implies \exists_{y \in \mathbb{R}} \left(y \geq 0 \implies y^n = x\right) \\ x \text{ bel.},\ n \text{ ungerade} &\implies \exists_{y \in \mathbb{R}} \left(y^n = x\right) \end{aligned}$$

Bezeichnung: $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
Problem: $\sqrt{-1}$ sprengt $\mathbb{R}$, Definition der imaginären Einheit i
$\rightsquigarrow$ komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ (später) ◀

**Rechenregeln für Wurzeln**

$x, y \in \mathbb{R}$ passend zu $n, m \in \mathbb{N}$

(1) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$

(2) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

(3) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

(4) $x < y \implies \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$

(5) $0 < x < 1, m < n \implies \sqrt[m]{x} < \sqrt[n]{x}$

(6) $x > 1, m < n \implies \sqrt[m]{x} > \sqrt[n]{x}$

(7) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x & n \text{ ungerade} \\ |x| & n \text{ gerade} \end{cases}$

Beweis per vollständiger Induktion
gegen Ende der Vorlesung: $x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \implies x^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$

### 1.2.3 Binomischer Lehrsatz

Zusammenhang zwischen Addition von Zahlen und Potenzbildung: $(a+b)^n$

**Spezialfälle**

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Aufbau der Koeffizienten: „Pascalsches Dreieck“

**Definition** (Binomialkoeffizient („$n$ über $k$“))

$$n, k \in \mathbb{N}_0 : \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(Bruch, aber ganzzahlig) ◀

**Behauptung 2** (rekursive Berechnung) $n, k \in \mathbb{N}, k < n$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis aus Definition/Pascalsches Dreieck

**Behauptung 3** (Binomischer Lehrsatz)

$$x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \implies (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left( \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right)$$

## 1.3 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

**Gründe**

Mathe $\sqrt{-1}$, Nachrichtentechnik, TEX-METAFONT Version 1 (Donald Knuth)
unbehagliche Situation $x^2 + 1 = 0$, in $\mathbb{R}$ nicht lösbar

**intuitiver Zugang**

neues Symbol $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, imaginäre Einheit i

**Definition** (komplexe Zahlen)

$$a, b \in \mathbb{R} : z = \underbrace{a}_{\text{Realteil}} + \mathrm{i} \underbrace{b}_{\text{Imaginärteil}}$$

$$\mathbb{C} = \left\{ z : z = a + \mathrm{i}\, b; a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i} = \sqrt{-1} \right\}$$

◀

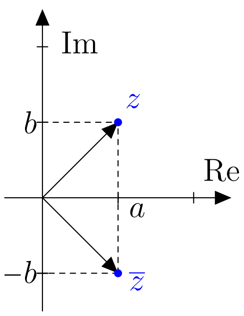
Was ist neu in $\mathbb{C}$: Standardoperationen $\pm$ in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}^2$; Multiplikation von $z_1$ mit $z_2$ ist anders definiert als in $\mathbb{R}^2$

Vorlesung 2009-10-28

### 1.3.1 Grundoperationen in $\mathbb{C}$

**Symbol** imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$

**Komplexe Zahlenebene** $z \in \mathbb{C}$




Darstellung: $z = a + b\,\mathrm{i} \in b; a, b \in \mathbb{R}$
Realteil von $z$: $\mathrm{Re}(z) = a$
Imaginärteil von $z$: $\mathrm{Im}(z) = b$

**Definition** (komplex konjugierte Zahl von $z$)

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$$

◀

**Rechenoperationen**

(1) „±“ $z_1 \pm z_2$

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + \mathrm{i}\, b_1 \\ z_2 &= a_2 + \mathrm{i}\, b_2 \\ z_1 \pm z_2 &= (a_1 \pm a_2) + \mathrm{i} \cdot (b_1 \pm b_2) \end{aligned}$$

(2) „∗“ (intuitiv)

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{i}\, b_1) \cdot (a_2 + \mathrm{i}\, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{i} \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2) \in \mathbb{C}$

(Term: $\mathrm{i}\, b_1 \cdot \mathrm{i}\, b_2 = i^2 b_1 b_2 = -b_1 b_2$)

(3) Division, $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \mathrm{i}\, b_1}{a_2 + \mathrm{i}\, b_2} = \frac{(a_1 + \mathrm{i}\, b_1) \cdot (a_2 - \mathrm{i}\, b_2)}{\underbrace{(a_2 + \mathrm{i}\, b_2) \cdot (a_2 - \mathrm{i}\, b_2)}_{a_2^2 - \mathrm{i}^2\, b_2^2 = a_2^2 + b_2^2}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,\mathrm{i}$$

**Formale Einführung**

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\overset{\text{bij.}}{\longleftrightarrow} \mathbb{C} \\ (x, y) &\longleftrightarrow z = x + \mathrm{i}\, y \end{aligned}$$

(1) Addition von 2-Tupeln $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{C}$

$(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) := (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$

(2) Multiplikation von 2-Tupeln im $\mathbb{R}^2$ (Division analog)

$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

**Anmerkung**

(1) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind eingebettet in $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a \in \mathbb{R} &\mapsto (a, 0) \in \mathbb{C} \\ \mathrm{i} = \sqrt{-1} &\mapsto (0, 1) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

(2) Es gibt keine Anwendung für $<$ oder $>$ in $\mathbb{C}$
$\rightarrow$ Hilfskonstruktion

◁

### Anwendungen komplexe Zahlen

- D. Knuth: Mathematical Typography Bulletin of the AMS Nr. 1 (1979) S. 337-372
- heute: METAFONT/TEX
- gegeben: Punkte in der Ebene ($\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}$)
- Aufgabe: konstruiere zu den Punkten eine schön aussehende Kurve
- Idee: ein Buchstabe aus vielen stückweise aneinandergesetzten Kurven; Kurvenstücke sind kubische Polynome mit komplexen Koeffizienten
- Formal: Parameter $t \in [0,1]$

  $$z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \text{ mit } a_i \in \mathbb{C}$$

  1 Buchstabe aus vielen (10-12) $z(t)$ Kurven. Verschiedene $z(t)$ möglichst „rund“ aneinander setzen.

### Anmerkung (Achtung!)

- bisher: $f : \underbrace{I}_{\subset \mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$

  „Funktion“: $x$ aus $I$ bekommt eindeutig ein $y \in \mathbb{R} : y = f(x)$ zugewiesen.
  $\rightarrow$ für Buchstaben zu eng
- neu: Kurve

  $$\begin{aligned} C : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- neu: Buchstaben

  $$\begin{aligned} C : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ C(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{\mathbb{C}}{\overset{\mathbb{R}^2}{=}} z(t) \end{aligned}$$

$\triangleleft$

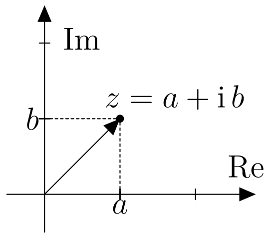
Offen in $\mathbb{C}$ sind *Anordnungsfragen.*
Abhilfe aus der Vektorrechnung: Entfernung vom Ursprung (Länge)

**Definition** (Betrag einer komplexen Zahl $z$)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Mit Hilfe von $\overline{z}$:

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$$




◀

**Rechenregeln für Beträge**

(1)

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ \mathrm{Im}(z) &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \overline{z}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} |z| &\geq 0 \\ |z| &= 0, \text{ falls } z = 0 \\ |w \cdot z| &= |w| \cdot |z| \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} |\overline{z}| &= |z| \\ |z - w| &= |w - z| \end{aligned}$$

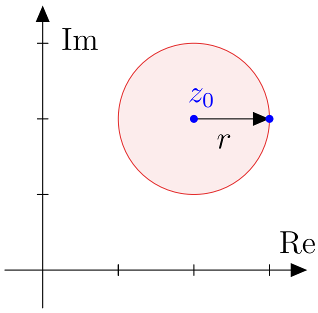
$$-|z| \leq \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z) \end{array} \right\} \leq |z|$$

(4) Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |w + z| &\leq |w| + |z| \\ |w - z| &\geq |w| - |z| \end{aligned}$$

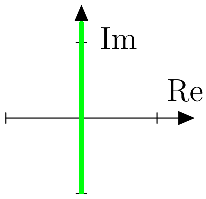
**Arbeiten mit Beträgen**

(1) Kreisscheibe (inkl. Rand) um $z_0$ mit Radius $r$




$$K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

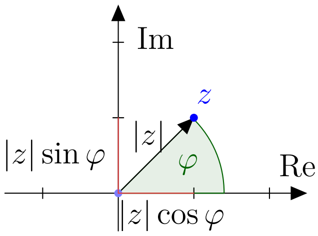
(2) alle $z$ aus $\mathbb{C}$ gesucht, mit $|z+1| = |z-1|$




analytisch:

$$\begin{aligned} |z+1|^2 &= |z-1|^2 \\ (z+1)(\overline{z}+1) &= (z-1)(\overline{z}-1) \\ 2(z+\overline{z}) &= 0 \\ \mathrm{Re}(z) &= 0 \end{aligned}$$

## 1.3.2 Polarform, Satz von Moivre



**Definition** (Polarform einer komplexen Zahl $z$)

$$\begin{aligned} z &= |z| \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi) \\ a &= |z| \cdot \cos\varphi \\ b &= |z| \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

◀

**Messung des Winkels $\varphi$**

- $\varphi$ *Gradmaß*: $0°$ bis $360°$
- $\varphi$ *Bogenmaß*: das ist die Länge des Kreisbogens mit Radius 1

Umrechnung:

$$\begin{aligned} 360° &\mathrel{\widehat{=}} 2\pi \\ \varphi \text{ Bogenmaß } &\mathrel{\widehat{=}} \alpha \text{ Gradmaß} \\ \varphi &= \frac{2\pi}{360} \cdot \alpha \end{aligned}$$

Vorlesung 2009-11-03

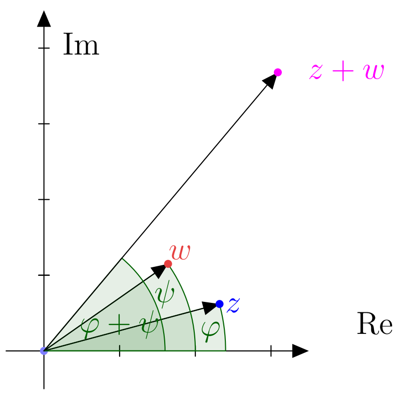
**Deutung für das Produkt zweier komplexer Zahlen**

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ w &= |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \\ \Longrightarrow \quad zw &= |z||w|\left((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \mathrm{i}(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\right) \end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen folgt:

$$= |z||w|\left(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)\right)$$

Produkt $z \cdot w$: Produkt der Beträge und Addition der Winkel



### Formel von Moivre (Potenzbildung)

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ z^2 &= |z|^2(\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi) \\ &\vdots \\ z^n &= |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) \end{aligned}$$

für $|z| = 1 \implies z^n = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$ (Formel von Moivre)

Rückwärts gelesen als „Wurzel ziehen“

$$\left(\cos\frac{\psi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\psi}{n}\right)^n = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi$$

speziell: $\psi = 2\pi$

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + \underbrace{\mathrm{i}\sin 2\pi}_{=0} = 1$$

(obiges ist eine Interpretation für $\sqrt[n]{1}$)

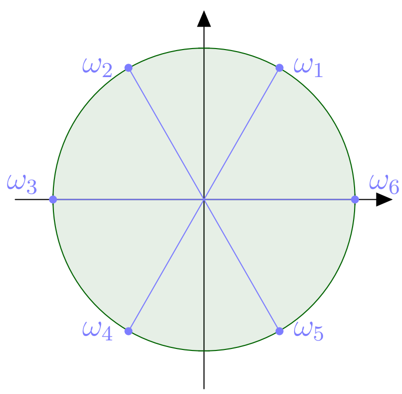
**Definition** (n-te Einheitswurzel $\omega_k$)

$$\begin{aligned} \omega_k &:= \cos\frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n} \\ &\text{mit } k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ \implies \omega_k^n &= 1 \end{aligned}$$

(mit $\cos(2\pi k) = 1$ und $\sin(2\pi k) = 0$) ◀

**Beispiel**

$$\omega^6 = 1 \implies \omega = \sqrt[6]{1}$$



$n = 6$, d. h. teile Einheitskreis (mit Unfang $2\pi$) in 6 Teile. 1 Teil $\widehat{=} \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}(60°)$
(hier: $k = 1, \dots, n$ (statt $0, \dots, n-1$)) $\triangleleft$

Ohne Beschränkung auf Länge 1:

$$a = |a|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha) \in \mathbb{C}$$

$$\implies z_n = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right) \text{ mit } k = 0, \dots, n-1 \dots \text{„}n\text{-Wurzeln“}$$

**Anmerkung** Ist das reelle $\sqrt{}$-ziehen eingebettet?

$$a \in \mathbb{R} \implies \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \cos 0 &= 1, & \sin 0 &= 0 \quad (k = 0) \\ \cos\pi &= -1, & \sin\pi &= 0 \quad (k = 1) \end{aligned}$$

Daher ergeben sich folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{|a|} \cdot 1 \\ x_2 &= \sqrt{|a|} \cdot (-1) \end{aligned}$$

$\triangleleft$

**Anmerkung** (Euler-Formel)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

(Basis für die Fast-Fourier-Transformation) $\triangleleft$

**Anmerkung** Interessante Gleichung: $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ $\triangleleft$

## 1.4 Elementares aus $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^n$

### 1.4.1 Kartesisches Koordinatensystem

**Definition** (Graph einer Funktion)

$$\begin{aligned} &f : I \to \mathbb{R} \text{ mit } I \subseteq \mathbb{R} \\ &G : \{(x, y) | x \in I, y = f(x)\} \\ &\quad (I\text{: Definitionsbereich, } f(I)\text{: Wertebereich}) \end{aligned}$$

$\blacktriangleleft$

### Kurven

**Definition** (Kurve in $\mathbb{R}$, erweiterter Funktionsbegriff)

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\} \text{ (implizite Darstllung)}$$
$$\text{Achtung: keine Form } y = f(x) \text{ erforderlich}$$

◀

**Beispiel** (Kreislinie)

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

◁

**Anmerkung** (Parameterdarstellung)

- TEX-METAFONT: Kurve als Parameterdarstellung

$$\text{Parameter } t \in I : C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

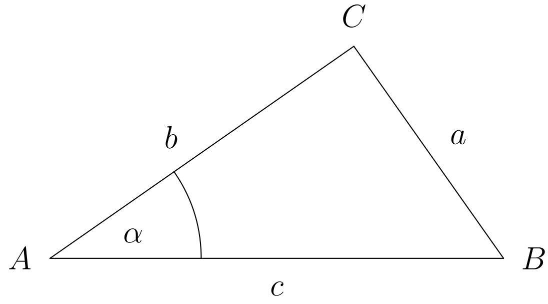
- falls $t = x$: siehe oben, entspricht Funktion
- andere Kreisdarstellung:

$$0 \le t < 2\pi : \left.\begin{array}{l} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \end{array}\right\}$$

- Wahl des Parameters $t$: nahezu „Lottospiel“ (d. h. beliebig). Beste Wahl: $t = s$ (Bogenlänge; ist im Allgemeinen ein implizites Problem.)

◁

**Wiederholung** (Trigonometrische Funktionen)



Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c}$
- $a^2 + b^2 = c^2$
- falls $c = 1 \rightsquigarrow$ Bogenmaß

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ |

Tabelle 1.1: Typische Werte

**Graphen**

*(die Graphen von Sinus und Kosinus sollten bekannt sein, Anm. d. Verfasser)*

**Eigenschaften**

- $\sin x$, $\cos x$ sind $2\pi$-periodisch, d.h. $\sin(x+2\pi k) = \sin x$; $\cos(x+2\pi k) = \cos x$ mit $k \in \mathbb{Z}$
- $\cos x$ ist eine gerade Funktion: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin x$ ist eine ungerade Funktion: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\triangleleft$

### 1.4.2 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ (Winkel, Längen)

**Definition** (Vektor)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\blacktriangleleft$

Die folgenden Darstellungen sind äquivalent (weil eine Bijektion existiert):

- Zahlenpaar im $\mathbb{R}^2$
- Punkt im $\mathbb{R}^2$
- Vektor im $\mathbb{R}^2$
- Pfeil im $\mathbb{R}^2$

Standardvektorraum ist der $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^n$ über dem Zahlenkörper $\mathbb{R}$.

### Rechnen

- Addition zweier Vektoren $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$
- skalare Multiplikation ($\lambda \in \mathbb{R}$): $\lambda\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

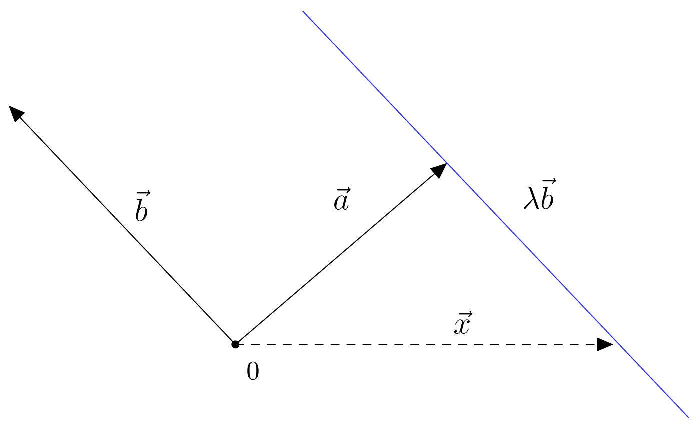
**Anmerkung** Drehen von Vektoren $\rightsquigarrow$ Matrizeneinführung $Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\lhd$

Vorlesung 2009-11-04

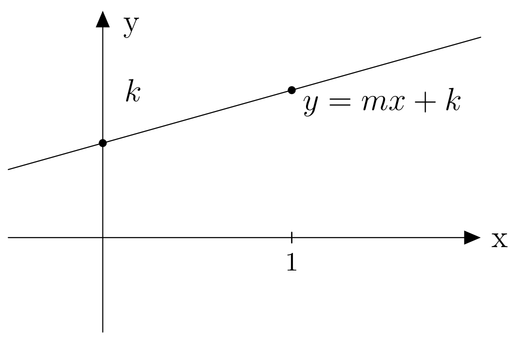
### Anwendung: Darstellung einer Geraden

Idee: Charakterisiere die Gerade durch „Aufpunkt“ und „Richtungsvektor“

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$$




Erinnerung:



Zusammenhang:

- $k \mathrel{\widehat{=}} \vec{a}$
- $m \mathrel{\widehat{=}} \vec{b}$
- $x \mathrel{\widehat{=}} \lambda$

Geradengleichung in Koordinaten:

$$\begin{array}{ccccccccc} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x \\ mx+k \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} & + & x & \cdot & \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \vec{a} & & \lambda & & \vec{b} \end{array}$$

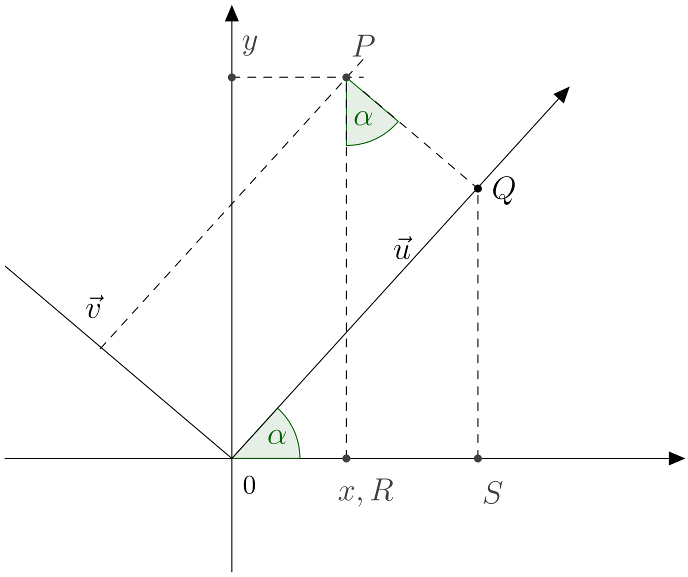
Drehen eines Vektors $\longrightarrow$ Matrizenbeschreibung
allgemein: Matrizen entsprechen linearen Abbildungen

$$\begin{array}{lllll} V, W: & \text{Vektorraum} & & & \\ f: & V & \mapsto & W & \text{lineare Abbildung bijektiv zu Matrizen} \\ f: & v & \mapsto & w & y = Ax \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & x & \mapsto & y & \end{array}$$

$V, W$ als Vektorraum, $\mathbb{R}^n \mapsto$ A: (n x n)-Matrix
A staucht, dehnt, rotiert Vektor x.

$$A \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \text{ Diagonalgestalt} \\ \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ Jordannormalform} \end{cases}$$

### Drehung




Gegeben:

- $x, y$, d. h. $P$
- $\alpha$

Wie sehen $u$, $v$ aus?

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{OS} - \overline{RS} \\
\cos\alpha &= \frac{\overline{OS}}{u} \\
\sin\alpha &= \frac{\overline{TQ}}{v} = \frac{\overline{RS}}{v}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Ergebnis: } x = u\cos\alpha - v\sin\alpha
$$
$$
\text{analog: } u\sin\alpha + v\cos\alpha
$$

### Matrix-Vektor-Notation

**Definition** $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ◀

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\alpha \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R_\alpha^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

Weiterhin gilt:

$$
R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha} = R_\alpha^T
$$

**Anmerkung** Drehung liefert Anlass für Matrix-Vektor-Produkt und Matrix-Matrix-Produkt ◁

Zwei Drehungen um $\angle\alpha$ und $\angle\beta$

$$R_\beta R_\alpha = R_{\beta+\alpha}$$

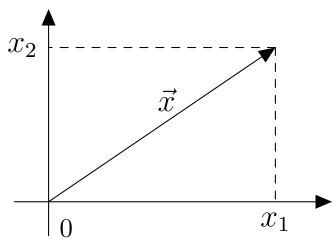
Drehungen im $\mathbb{R}^n$ in der Ebene $(i, j)$

$$R_\alpha = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{\begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix}} & i & \phantom{\begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix}} & j & \phantom{\begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix}} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & & & & 0 \\ & \cos\alpha & & -\sin\alpha & \\ & \vdots & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} & \vdots & \\ & \sin\alpha & & -\cos\alpha & \\ 0 & & & & \begin{smallmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{smallmatrix} \end{pmatrix} \end{array}$$

**Anwendung in $\mathbb{R}^2$: Längenmessung/Abstand**

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

**Definition** Länge von $\vec{x}$ als $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ◀




**Anmerkung** Abstand zweier Vektoren entspricht der Länge des Differenzvektors $\vec{x} - \vec{y}$ ◁

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \left| \begin{matrix} (x_1 - y_1) \\ (x_2 - y_2) \end{matrix} \right| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

**Anwendung: Rechte Winkel**

**Satz 4**

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{x} - \vec{y}|^2$$

*wegen*

$$\begin{aligned} |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ \Longrightarrow\ x_1y_1 + x_2y_2 &= 0 \\ S = x^T y &= 0 \end{aligned}$$

**Formale Beschreibung**

**Definition** (Skalarprodukt)

- $x, y \in \mathbb{R}^2$
- Notation: „$\langle , \rangle$“; „$( , )$“; „$x^T y$“ o. ä.
- $\langle , \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ pos. def. symm. Bilinearform

◀

d. h.

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \lambda x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \lambda \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0 = 0$ falls $x = 0$

Das Skalarprodukt induziert eine Länge (Norm):

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Definition** (euklidischer Vektorraum) Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt heißt *euklidischer Vektorraum.* ◀

### 1.4.3 Ungleichung von Cauchy-Schwarz

gegeben: $x, y \in \mathbb{R}^n$
in kompakter Notation:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \, \|y\|$$

ausgeschrieben:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

$n = 1$:

$$x_1y_1 \leq x_1y_1$$

$n = 2$:

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 &\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ (x_1y_1 + x_2y_2)^2 &\leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \\ 2x_1y_1x_2y_2 &\leq x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 \\ (x_1y_2 - x_2y_1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

allgemeiner Beweis: siehe [Bor08, S. 16f.]

**Definition** (Norm eines Vektors)
$x \in \mathbb{R}^n$:

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

◀

**Anmerkung** Im $\mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_2$ die euklidische Norm.
Die ersten beiden Eigenschaften sind trivial, nur die Dreiecksungleichung ist zu zeigen:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

◁

**Anmerkung** (zwei weitere Normen)

- Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max\left(\{|x_k|; k = 1 \ldots n\}\right)$
- $\ell_1$-Norm $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$

◁

# 2 Funktionen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

## 2.1 Funktionen, Polynome

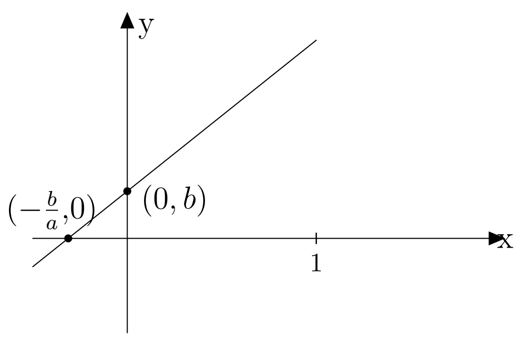
Vorlesung 2009-11-10

### 2.1.1 Grundbegriffe zu Funktionen

Reellwertige Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

**Beispiel**

- Lineare Funktion $f(x) = ax + b$
  Gerade durch $(0, b)$ und $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$
  Erinnerung:




- Quadratische Funktion (Parabel)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

$$= \underbrace{(x-x_0)^2}_{\substack{\text{Scheitelpunkt}\\ \text{in } x\text{-Richtung}\\ \text{verschoben}}} + \underbrace{y_0}_{\substack{\text{Scheitelpunkt}\\ \text{in } y\text{-Richtung}\\ \text{verschoben}}} \qquad x_0 = -\frac{b}{2a} \qquad y_0 = c - \frac{b^2}{4a}$$

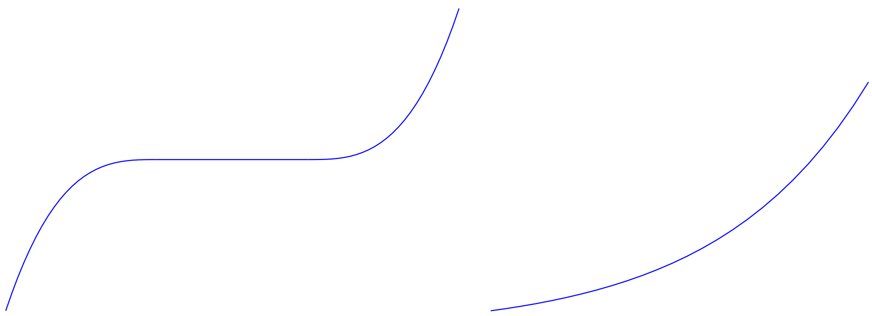
$\triangleleft$

**Definition** (Eigenschaften von Funktionen)

- Symmetrie

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| gerade: | $f(-x) = f(x)$ | Beispiele: | $f(x) = x^2$; | $f(x) = \cos(x)$ |
| ungerade: | $f(-x) = -f(x)$ | | $f(x) = x^{2n+1}$; | $f(x) = \sin(x)$ |

- Monotonie
  $f : D \to \mathbb{R}$ heißt
  - *monoton wachsend*, wenn $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
  - *streng monoton wachsend*, wenn $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$



(a) Monoton (b) Streng monoton

Abbildung 2.1: Beispiele für monoton wachsende Funktionen

$\blacktriangleleft$

**Definition** (Operationen) $f, g : D \to \mathbb{R}$

- $(f \overset{+}{\underset{*}{-}} g)(x) = f(x) \overset{+}{\underset{*}{-}} g(x)$
- $a \in \mathbb{R}, (af)(x) = af(x)$
- für $g \neq 0$ gilt $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

- Komposition (Hintereinanderausführung)

$$f : I \to \mathbb{R} \qquad g : D \to \mathbb{R} \qquad g(D) \subseteq I \qquad h : D \to \mathbb{R}$$
$$h = f \circ g \text{ ist definiert durch } h(x) = f(g(x))$$

◀

**Anmerkung** $f \circ g$ im Allgemeinen $\neq g \circ f$

$$f(x) = \cos(x) \qquad g(x) = 1 - x^2 \qquad D = I = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x^2) = \cos(1 - x^2)$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\cos(x)) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

◁

### 2.1.2 Polynome und rationale Funktionen

Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Polynom vom Grade $n$, falls $p$ die Darstellung besitzt:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Monome $x^k, k = 0, \ldots, n$;

Polynomkoeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$

**Operationen**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k$$

Umordnung möglich, da $n$ endlich.

**Verbindung zur Linearen Algebra**

$x^0, x^1, \ldots, x^n$ Basis der Polynome vom Grade $\leq n$
span$\{x^0, \ldots, x^n\} = \Pi_n$ Vektorraum im Reellen der Polynome vom Grade $\leq n$

### Evaluieren von Polynomen

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

naiv:

- $n$ Multiplikationen $a_k x^k$
- $(n-1)$ Potenzen als Multiplikation $x^k = x(x^{k-1})$
- $n$ Additionen

besser: *Hornerschema* ($\approx$ 1800)

$$p(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x \ldots)x + a_0$$

```
p := a[n];
for k := n - 1 to 0 do
        p := p * x + a[k];
print(x,p);
```

Bei dieser Codierung des Hornerschemas wird nur ein Speicherplatz für $p$ belegt.

### Polynom-Nullstellen

**Definition** Als Nullstelle einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ wird jede Lösung $\widehat{x} \in D$ der Gleichung $f(\widehat{x}) = 0$ bezeichnet. ◀

Speziell die Polynome $b \in \mathbb{R}$ haben genau dann eine Nullstelle, falls der Linearfaktor $(x - b)$ abspaltbar ist, d. h.

$$p(x) = (x - b) \cdot r(x) \qquad \mathrm{grad}(r) = n - 1$$

$\ell$-fache Nullstellen:

$$p(x) = (x - b)^\ell \cdot q(x) \qquad \mathrm{grad}(q) = n - \ell$$

**Satz 5** (Fundamentalsatz der Algebra) *$p$ zerfällt über $\mathbb{C}$ in $n$ Linearfaktoren (mit Vielfachheiten gezählt)*

### Anmerkung

$n = 2 \to$ quadratische Gleichung
$n = 3 \to$ Cardano
$n = 4 \to$ noch analytisch lösbar
$n > 4 \to$ nicht mehr analytisch, nur noch iterativ lösbar

◁

### Wachstum der Polynome

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_n - 1}{a_n \cdot x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n \cdot x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n \cdot x^n}\right),$$

wobei $a_n \neq 0$ sowie $x \neq 0$

Asymptotisches Verhalten: $x \longrightarrow \pm\infty : p(x) \longrightarrow a_n x^n$
„Wie verhält sich eine Funktion, wenn x über alle Maßen wächst?“

**Definition** (Rationale Funktion)

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad p, q \text{ sind Polynome}$$

◀

Die Nullstelle des Nenners ($q(x) = 0$) nennt man Polstelle. Die Division von Polynomen kann man mit dem Euklidischen Algorithmus durchführen (siehe auch [Bau56] und [Knu75]).

### Polynominterpolation

**1. Fragestellung:** Konstruiere ein Polynom zu $n + 1$ Messdaten.

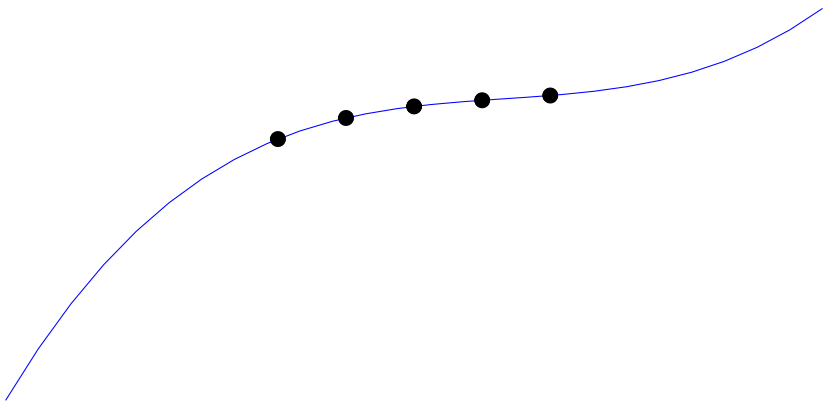


Abbildung 2.2: Konstruktion eines Polynoms durch Stützpunkte/Messdaten

**2. Fragestellung:** Möglichst gutes Approximieren einer unbekannten Funktion $f(x)$. Von $f$ sind Messwerte bekannt.

**3. Fragestellung:** „Schöne Bilder“, Buchstaben, etc. zeichnen. (TEX)

**Satz 6** (Gut gestelltes Problem)

- *eine Lösung existiert*
- *die Lösung ist eindeutig*
- *kleine Änderungen der Daten bedingen kleine Änderungen der Lösung*

Vorlesung 2009-11-11

### 2.1.3 Polynom-Interpolation (Basis CAD/CAGD)

**Interpolation**

gegeben: Daten $(x_k, y_k)$ $k = 0, \ldots, n$
konstruiere Polynom $P(x)$: $P(x_k) = y_k$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ &\vdots \\ &a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \implies A \cdot \vec{x} = b$$

det(van der Monde-Matrix) $\neq 0 \implies A$ regulär

**Behauptung 4** *Zu $(n+1)$ Daten existiert ein Polynom vom Grad $\leq n$, welches interpoliert. (Praxis: $n < 5$)*

**Anmerkung** (Trade-Off in Komplexität)

- $n$ Daten: $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen (lineares Gleichungssystem)
- 1. Basiswechsel: Monome $x^j$ zu Lagrange-Polynome $L_n(x)$: $\mathcal{O}(n^2)$-Komplexität (siehe Numerikvorlesung Th. Huckle)
- 2. Basiswechsel: Bernsteinpolynome: $\mathcal{O}(n)$-Komplexität

$\leadsto$ Bézier-Techniken/Bézier-Splines, Kontrollpunkte (siehe Abbildung 2.3 auf Seite 39)

$\triangleleft$

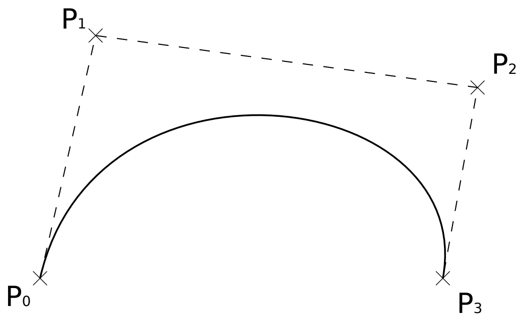



Abbildung 2.3: Beispiel einer Bézier-Kurve [1]

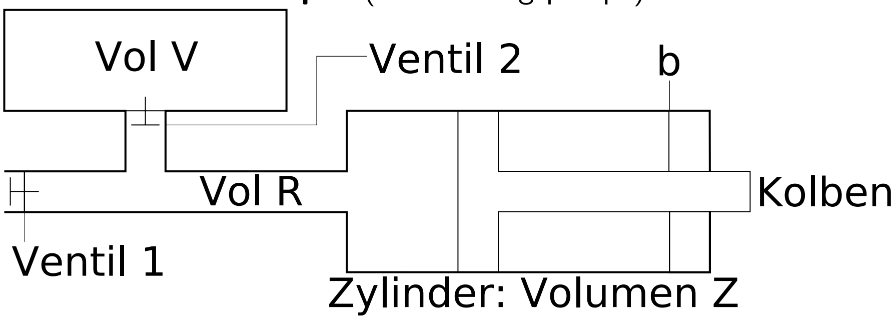
**Approximation**

gegeben: unbekanntes $f(x)$ über Messungen
gesucht: g(x) mit $\|f-g\|$ klein
analytische Lösung wie Abschnitt „Interpolation“ (siehe S. 38)

## 2.2 Grenzwerte, Stetigkeit

### 2.2.1 Zahlenfolgen, Grenzwerte

**Beispiel** (Evakuierungspumpe)




$p_0$ : Außendruck
$V$ : zu evakuierendes Volumen
$R$ : Restvolumen des Gestänges

**Satz 7** (Gasgesetz von Boyle-Mariotte)

$$p \cdot V = C \cdot m$$

*$p$ : Druck*
*$V$ : Volumen*
*$m$ : Masse*
*$C$ : Boltzmann-Konstanteg*

### Funktionsweise

- Kolben in Stellung b; Ventil 1 offen; Ventil 2 geschlossen; d.h. Außenluft
- Kolben fährt nach a; Ventil 2 geschlossen; Ventil 2 geschlossen
- Kolben fährt nach b; Ventil 1 geschlossen; Ventil 2 offen; d.h. evakuiert V

Ergebnis: schrittweise Änderung des Drucks

### Modellierung

(1) Kolbenhub (Stellung a)

$$\left.\begin{array}{l} p_0 \cdot (V+R) = C \cdot (m_v + m_r) \\ \text{Kolben zu b} = p_1 \cdot (V+R+Z) \end{array}\right\rangle p_1 = \frac{p_0 \cdot V + p_0 \cdot R}{V+R+Z}$$

(2) Kolbenschub

$$p_1 \cdot V + p_0 \cdot R = p_2 \cdot (V+R+Z) \quad \text{Außendruck in R durch Öffnen des Ventils 1}$$

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V + p_0 \cdot R}{V+R+Z}$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{p_{n-1} \cdot V + p_0 \cdot R}{V+R+Z}$$

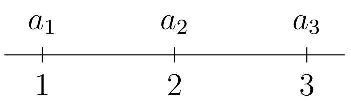
- Gibt es einen Grenzdruck $p_n \to p^*$?
- Auslegung von Z, R

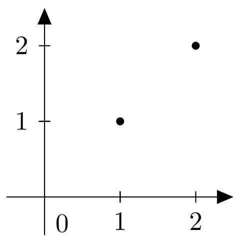
◁

**Definition** (Zahlenfolge) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt reelle (Zahlen)folge.
Notation: $f_n$ oder $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ◀

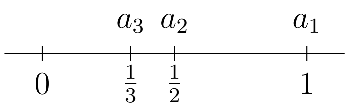
### Beispiel

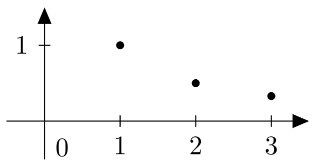
(1) $a_n = n$: $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots$



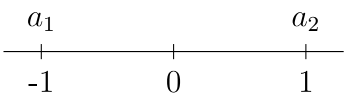



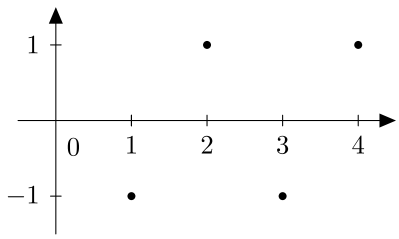
(2) $a_n = \frac{1}{n}$: $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$




(3) $a_n = (-1)^n$: $a_1 = -1, a_2 = 1, \ldots$




◁

**Frage** Streben die Folgen gegen ausgezeichnete Werte? Im Beispiel 2 ist es der Null-Wert: $a_n \to 0$.
Zentrale Werkzeuge: Schranken und Monotonie

**Definition** (Beschränktheit) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, falls ein reelles $L$ existiert mit

$$a_n \leq L$$

analog: nach unten beschränkt

$$a_n \geq L$$

◀

**Beispiel**

(1) untere Schranke 1, keine obere Schranke

(2) untere Schranke 0, obere Schranke 1

(3) untere Schranke $-1$, obere Schranke 1

◁

**Beispiel** (Evakuierungspumpe, Fortsetzung) Druckfolge $p_n$

- nach unten durch 0 beschränkt (da nur positive Terme)

- nach oben durch $p_0$ beschränkt

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0 \cdot \frac{V+R}{V+R+Z} < p_0 \\
p_2 &= \frac{p_1 \cdot V + p_0 \cdot R}{V+R+Z} < \frac{p_0 \cdot V + p_0 \cdot R}{V+R+Z} < p_0 \\
p_n &\text{ analog}
\end{aligned}$$

$\triangleleft$

**Definition** (Monotonie) Eine reelle Folge heißt monoton wachsend, wenn $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$ und streng monoton wachsend, wenn $a_n < a_{n+1}$. Analog: (streng) monoton fallend. $\blacktriangleleft$

Anschaulich: monoton wachsend + obere Schranke $\implies$ Grenzwert existiert $\equiv$ Supremumaxiom $\mathbb{R}$

Vorlesung 2009-11-17

**Anmerkung** Falls eine Folge monoton und beschränkt ist, dann ist der Grenzwert die kleinste obere/untere Schranke. (im Prinzip wäre man fertig, aber Folgen wie $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ würden nicht erfasst. $\rightsquigarrow$ Formalisierung erforderlich) $\triangleleft$

**1. Schritt:** $\varepsilon$-Charakterisierung des Grenzwertes $\alpha$
zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $n_\varepsilon$ mit $\alpha - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$

**2. Schritt:**

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \; \forall n \geq n_\varepsilon : \; |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

**Definition** (Grenzwert) Eine Zahl $\alpha$ heißt Grenzwert (*Limes*) einer Folge $a_n$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_\varepsilon : \; |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

Symbol: $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} (a_n)$
Eine Folge heißt *konvergent*, falls sie einen Grenzwert besitzt. $\blacktriangleleft$

**Anmerkung** (rekursiv definierte Folge) das $n$-te Folgenelement berechnet sich aus den Vorgängern $\triangleleft$

**Beispiel** (rekursiv definierte Folge) Evakuierungspumpe: $p_n$ aus $p_{n-1}$ und $p_0$ $\triangleleft$

**Anmerkung** (Grenzwert in drei Schritten)

(1) beschränkt

(2) monoton

(3) Grenzwert berechnen durch Einsetzen $p^* = \lim_{n\to\infty} (p_n)$

◁

**Beispiel** (Evakuierungspumpe)

$$p_n = \frac{p_{n-1}V + p_0 R}{V + R + Z}$$

(1) nach unten durch 0 beschränkt

(2) monoton fallende Folge

$\Longrightarrow$ es existiert ein Infimum $\inf p_n \mathrel{\widehat{=}}$ Grenzwert

(3)

$$\lim_{n\to\infty} (p_n) = \frac{\lim_{n\to\infty} (p_{n-1}V) + p_0 R}{V + R + Z} \implies p^* = \frac{p^* V + p_0 R}{V + R + Z} = \frac{p_0 R}{R + Z}$$

◁

**Begriffe**

**Konvergenz** es existiert ein Grenzwert

**Divergenz** es existiert kein Grenzwert

**Nullfolge** es existiert ein Grenzwert, dieser ist 0

**Rechenregeln für Nullfolgen**

**Anmerkung** konvergente Folge $a_n$ mit Grenzwert $\alpha \neq 0$ kann in Nullfolge transformiert werden: $b_n = a_n - \alpha$ ist Nullfolge ◁

(1) $a_n, b_n$ Nullfolgen $\implies a_n + b_n$ Nullfolge

(2) $a_n$ Nullfolge, $b_n$ beschränkt $\implies a_n \cdot b_n$ Nullfolge

(3) $|b_n| < |a_n|$, $a_n$ Nullfolge $\implies b_n$ Nullfolge

**Lemma 1** (Eindeutigkeit des Grenzwerts) *Jede Folge $a_n$ hat höchstens einen Grenzwert.*

*Beweis.* Angenommen, es existieren zwei Grenzwerte $\widehat{a}$ und $\overline{a}$, dann gilt nach Definition:

$$\begin{aligned}|a_n - \widehat{a}| &< \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_1(\varepsilon)\\ |a_n - \overline{a}| &< \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_2(\varepsilon)\end{aligned}$$

wähle $n \geq \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon))$

$$\begin{aligned}|\widehat{a} - \overline{a}| &= |\widehat{a} - a_n + a_n - \overline{a}|\\ &\leq \underbrace{|\widehat{a} - a_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - \overline{a}|}_{<\varepsilon}\\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \overline{a} = \widehat{a}$, da $\varepsilon$ beliebig klein aber $> 0$ □

**Beispiel** (Anwendungen)

(1)

$$\lim_{n\to\infty}(x^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1 \text{ (Nullfolge)}\\ 1 & \text{für } x = 1\\ \infty & \text{für } x > 1\\ \text{unbest.} & \text{für } x \leq -1\end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned}a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty - \infty = ?\\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

(3) geometrische Reihe

$$s_n = 1 + x + \ldots + x^n = \begin{cases}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{für } x \neq 1\\ n+1 & \text{für } x = 1\end{cases}$$

aus Beispiel 1: nur konvergent für $|x| < 1$
für $|x| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty}(s_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}\left(x^{n+1}\right)}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

(4) harmonische Reihe
Folge $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ist divergent, denn

$$\begin{aligned} s_{2k+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^k+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \ldots + 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{k+3}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(s_{2k+1}) = \infty$

**Anmerkung** Mantissenlänge (Zahldarstellung) und Taktzahl müssen so abgestimmt sein, dass ein unerfahrenere Nutzer in ca. 1 Tag Rechenzeit keine Konvergenz der harmonischen Reihe erzielt (bisheriger Standard $R*8$ nicht mehr ausreichend). $\triangleleft$

(5) Eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$

$$\mathrm{e} := \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\right) \to \text{ Grenzwert der Zahlenfolge}$$

(a) nach oben beschränkt

$$0 \leq 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

wobei $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \leq \frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2} = \frac{1}{2^k}$, damit:

$$\leq 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{\text{geometrische Reihe mit } q=\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Summenformel, siehe Punkt 3 auf S. 44

$$= 1 + 2 = 3$$

(b) monoton wachsend

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n$$

$\Longrightarrow$ konvergent, Grenzwert $\leq 3$

$\triangleleft$

Vorlesung 2009-11-18

weitere Darstellung von e:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) \text{ (langsam konvergent)}$$

Weg zur Einführung der e-Funktion:

$$\text{z. z.} \forall x \in \mathbb{R} \, \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ konvergent}$$

Beweis siehe [Bor08, S. 32]

**Anmerkung** Bisher wurde in allen Definitionen und Erläuterungen Kenntnis eines Grenzwerts vorausgesetzt.
Frage: Reichen Folgenelemente eventuell aus?
Antwort: Cauchy'sche Folge $\triangleleft$

**Definition** (Cauchy-Folge) Die Folge $a_n$ heißt Cauchy-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \, \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$\blacktriangleleft$

**Behauptung 5** *$a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ $a_n$ ist Cauchyfolge*

*Beweis.*

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \text{ (Grenzwert } \alpha \text{ existiert)} \\ &\leq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| \,, \text{ mit } n, m \geq N(\varepsilon) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

setze $\overline{N}(\varepsilon) = N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, damit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) 1780-1860
Beweisidee:

- Beschränktheit der Cauchy-Folge
- $\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, 1+\frac{2}{n}, 2+\frac{2}{n}, \ldots$ [1]
  mehrere Kandidaten für Grenzwerte – Häufungspunkte [2]
- Teilfolge, die gegen den Häufungspunkt konvergiert
- Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt; eine konvergente Teilfolge ist auswählbar
- eindeutiger Grenzwert für Cauchy-Folge lim sup bzw. lim inf
- Beweis siehe [Bor08, S. 29ff]

□

### 2.2.2 Stetige Funktionen

Idee: Übertrage Grenzwerte im Definitionsbereich auf den Wertebereich
„gutmütige“ Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, die einen Grenzprozess übertragen

#### formal

$$\left.\begin{array}{lll} \text{linksseitiger Grenzwert} & x \longrightarrow a^+ & \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = c \\ \text{rechtsseitiger Grenzwert} & x \longrightarrow a^- & \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{stetig}$$

**Definition** (Stetigkeit) $f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in I$, falls

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

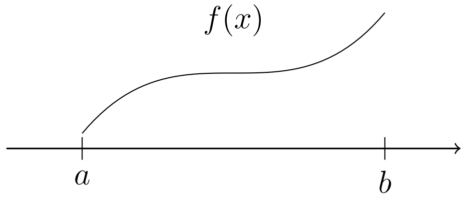
(alle denkbaren Folgen, die gegen $x_0$ konvergieren, sind zugelassen)
$f$ heißt stetig, falls $f$ stetig in allen $x_0 \in I$ ist. ◀

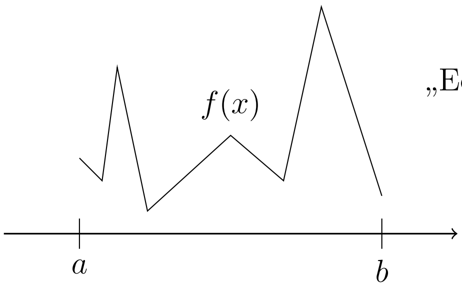
#### anschaulich

„Zeichnen ohne den Stift abzusetzen“

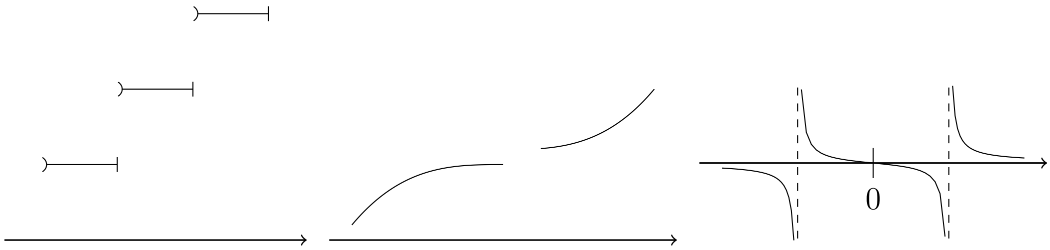
[1] abwechselnd die Folgeglieder der Folgen $\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n}$ und $2+\frac{1}{n}$, Anm. d. Verfasser

[2] Häufungspunkt wird ähnlich wie der Grenzwert definiert; jedoch brauchen nicht *alle*, sondern nur *unendlich viele* Folgeglieder in der $\varepsilon$-Umgebung liegen, Anm. d. Verfasser




„Ecken erlaubt“




(a) Sprünge (b) Lücken (c) Polstellen

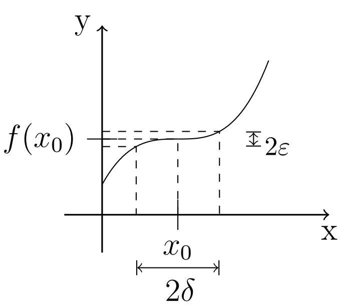
Abbildung 2.4: Unstetigkeiten

**Satz 8** ($\delta$-$\epsilon$-Charakterisierung analog zur Folgenkonvergenz) *Für $f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$ sind äquivalent:*

*(1) $f$ stetig in $x_0$ (d. h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)*

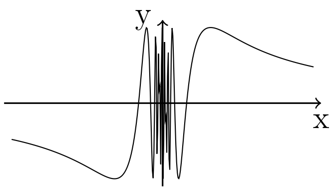
*(2)*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ \left( \underbrace{|x - x_0| < \delta}_{\textit{Definitionsbereich}} \implies \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \epsilon}_{\textit{Wertebereich}} \right)$$

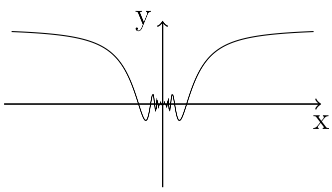


**Beispiel**

- $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$: unstetig




- $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$: stetig ergänzbar an der Stelle 0, da Nullfolge · beschränkte Folge = Nullfolge (siehe Rechenregeln auf Seite 43)




◁

**Rechenregeln stetiger Funktionen**

$f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig

(1) $f \pm g$ stetig

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha \cdot f$ stetig

(3) $f \cdot g$ stetig (Produkt der Funktionswerte)

(4) $g(x) \neq 0$: $\frac{f}{g}$ stetig

(5) Komposition/Hintereinanderausführung

$$g(I) \subseteq I : \qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ stetig}$$

Beweise per $\delta - \epsilon$-Charakterisierung, siehe [Bor08]

## Folgerungen

(1) jedes Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ist stetig
Argumentation:

$$\begin{aligned} & f(x) = x \text{ stetig} \\ \Longrightarrow\ & x^2, \ldots, x^k \text{ stetig} \\ \Longrightarrow\ & a_k x^k, \ldots, a_1 x \text{ stetig} \\ \Longrightarrow\ & \text{Summe stetig} \end{aligned}$$

(2) jede rationale Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist bis auf Nullstellen im Nenner stetig

## Eigenschaften stetiger Funktionen

$f$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$

(1) $f$ ist beschränkt

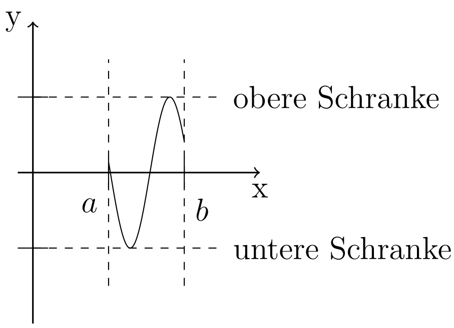
**Anmerkung** Zentral hierbei ist, dass es sich um ein abgeschlossenes Intervall handeln muss.

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x}$, halboffenes Intervall ]0,1], $\lim\limits_{x \to 0^+} = \infty \implies$ Polstelle $\implies$ nicht beschränkt $\triangleleft$

(2) $f$ nimmt Minimum/Maximum in diesem Intervall an (Extremwertsatz)

(3) falls $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann existiert ein $x^*$ mit $f(x^*) = 0$ (Zwischenwertsatz)

(Beweis per Bisektionsverfahren, Intervallhalbierung)



Vorlesung 2009-11-24

## 2.3 Differenzierbarkeit

### 2.3.1 Ableitungsbegriff

bisher: Stetige Funktion, die den Grenzprozess im Definitionsbereich auf den Wertebereich überträgt.
Frage: Ist es *lokal* möglich eine Funktion $f(x)$ genauer zu beschreiben?

Wie sieht eine Funktion $p(x)$ bzw. eine Gerade aus, die $f(x)$ in $x_0$ möglichst gut beschreibt?

$$p(x) = ax + b$$

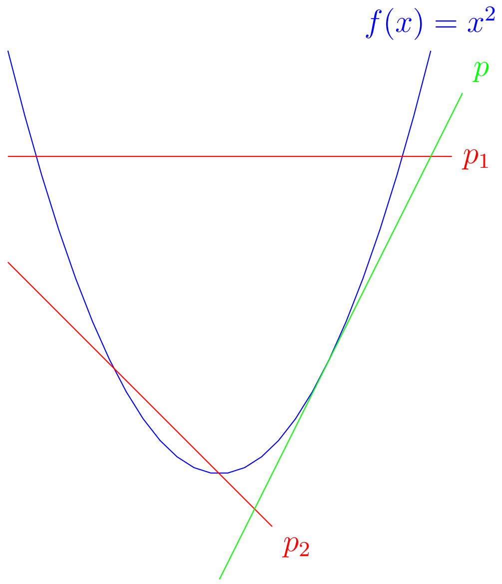



Abbildung 2.5: Die Geraden $p_1(x)$ bzw. $p_2(x)$ aus der Interpolation sind keine guten Repräsentanten. $p(x)$ als Tangente in $f(x_0)$ liegt hingegen gut.

Konstruktion der Geraden $p(x)$, die die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0$ gut beschreibt:

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad D \subseteq \mathbb{R} \qquad x_0 \in D$$

**1. Forderung** $p(x_0) = f(x_0)$

$$p(x) = ax + b$$
$$f(x_0) = ax_0 + b$$

$$\implies b = f(x_0) - ax_0$$
$$\implies p(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$$

**2. Forderung** $d(x) = f(x) - p(x)$ soll in der Nähe von $x_0$ möglichst klein werden. Damit gilt $d(x) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$

**1. Versuch** $f(x)$ stetig

$$\lim_{x \to x_0} d(x) = \lim_{x \to x_0} (\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\to 0} - a \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0}) = 0$$

Dies ist nichts Neues, da die Information von $a$ durch den Faktor $(x - x_0)$ verdeckt wird.

**2. Versuch** Forderung an Parameter $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} \right) \overset{!}{=} 0$$

**Definition** (Lineare Approximierbarkeit) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt linear approximierbar in $x_0 \in D$, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} \right) = 0$$

◀

**Anmerkung**

- Die Herleitung ist auch auf $\mathbb{R}^n$ übertragbar.
- $f$ heißt auch *differenzierbar* in $x_0$

◁

**Beispiel**

$$f(x) = x^2 \qquad x_0 = 1 \implies f(x_0) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} &= \frac{x^2 - 1 - a(x - 1)}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1) - a(x - 1)}{x - 1} \\ &= x + 1 - a \end{aligned}$$

nach Def. der linearen Approximierbarkeit – Grenzwertbildung

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to x_0}(x+1-a) \\ &= (x_0+1-a) \\ \implies a &= 2 \end{aligned}$$

◁

**Definition** (1. Ableitung) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$ falls obiger Grenzwert existiert. ◀

**Anmerkung** Die durch $f$ und $x_0$ festgelegte Zahl $a$ heißt 1. Ableitung von $f$ in $x_0$.

$$f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) =: \text{„Differentialquotient“}$$

◁

**Anmerkung** Graph von $p(x)$ lässt sich deuten als Tangente an $f$ im Punkt $x_0$ (siehe 2.5) ◁

**Beispiel** (Einfache Differentiationsgleichung $f(x) = x^n$)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}\right) \\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x_0^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x_0^{n-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^n \quad \text{allg.: } \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

◁

Idee von Leibniz: approximiere die Steigung der Tangente in $x_0$ durch Sekanten

$$\begin{gathered} \text{Grenzprozess } x \to x_0 \\ \Leftrightarrow \\ \text{Sekantensteigung } \mathrel{\widehat{=}} \text{ Tangentensteigung} \\ \Leftrightarrow \\ \text{Differentialquotient} \leftrightarrow \text{Differenzenquotient} \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \frac{\Delta f}{\Delta x} \end{gathered}$$

**Bezeichnungen**

$$f'(x_0) \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

setze $x = x_0$:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

### 2.3.2 Rechenregeln für Funktionen

**Satz 9** (Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit) *Jede in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktion $f$ ist stetig in $x_0$.*

*Beweis.*

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0) - \underbrace{f'(x_0)}_{\in\mathbb{R}\text{ und fest}}\underbrace{(x-x_0)}_{\longrightarrow 0}) = 0$$

□

**Satz 10** (Stetigkeit $\not\Rightarrow$ Differenzierbarkeit) *Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar.*

**Beispiel**

$$f(x) = |x| \qquad \text{in } x_0 = 0 \text{ hat die Funktion eine „Spitze“}$$

$$\text{formal: } \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

Fallunterscheidung:

- von links
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} = -1$$
- von rechts
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} = 1$$

◁

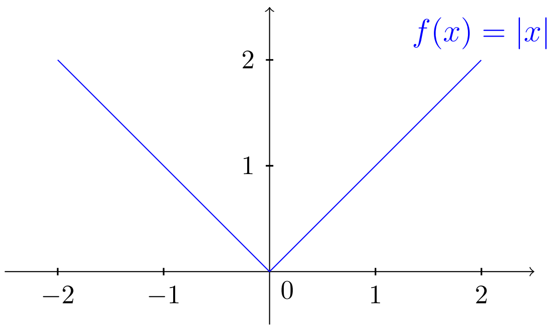



Abbildung 2.6: Betragsfunktion $f(x) = |x|$

### Einfache differenzierbare Funktionen

(1) $f(x) = c$ (Konstante) $\implies f'(x) = 0$

(2) $f(x) = ax + b \implies f'(x) = a$

(3) $f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$

(4) $f(x) = \sqrt{x} \qquad x > 0 \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

*Beweis.*

$$x_0 > 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

□

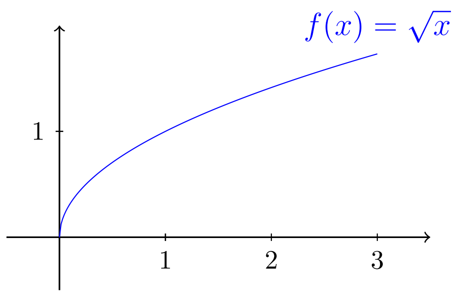



Abbildung 2.7: Wurzelfunktion: an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar

### Rechenregeln

$f, g : D \to \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ differenzierbar

(1) $f \pm g$ differenzierbar mit $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(2) $c \cdot f$ differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$, $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

(3) Produktregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(4) Quotientenregel, $g(x) \neq 0$, $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

speziell: $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

*Beweis.*

(1) trivial

(2) trivial

(3) Herleitung:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h) + (g(x+h) - g(x)) \cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \\
&= f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)
\end{aligned}$$

(4) Herleitung:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)'
\end{aligned}$$

Nebenrechnung: Kehrwertregel

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f(x)}\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h \cdot f(x+h) \cdot f(x)}
\end{aligned}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x+h)\cdot f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

damit folgt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)^2}\\ &= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

□

Vorlesung 2009-11-25

**Folgerungen**

(1) Polynome sind überall differenzierbar

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\\ \Longrightarrow\quad p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}\end{aligned}$$

**Anmerkung** Berechnung von Polynom und Ableitung gleichzeitig über *vernetztes Hornerschema* möglich ◁

(2) rationale Funktionen sind bis auf Polstellen differenzierbar[3]

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{p(x)}{q(x)}\\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2}\\ \left(\frac{1}{x^n}\right)' &= -\frac{n}{x^{n+1}}\quad (x\neq 0)\end{aligned}$$

Herleitung (siehe auch Beweis der Quotientenregel auf Seite 56):

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h}$$

[3] bei rationalen Funktionen können auch Definitionslücken auftreten, die aber stetig fortsetzbar sind, Anm. d. Verfasser

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x_0 - x_0 - h}{x_0(x_0+h)}\right) \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{1}{x_0(x_0+h)} \\
&= -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

**Trigonometrische Funktionen**

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

*Beweis.*

(1)

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Additionstheorem:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

damit

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 0*} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 1} \\
&= \cos x
\end{aligned}
$$

letzter Schritt zu zeigen über:

- Dreiecke
- Potenzreihen

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots
\end{aligned}
$$

(2) Additionstheorem $\cos(x+h)$

(3) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \implies$ Quotientenregel $\implies 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$[4]

$\square$

### Kettenregel (Chain Rule)

Anwendung bei Neuronalen Netzen: Lernregeln $\hat{=}$ Kettenregeln
$f, g$ seien differenzierbar
Komposition/Hintereinanderausführung

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$g : I \to \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, g(I) \in D$$
$$(f \circ g)'(x_0) = \underbrace{f'(g(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Kurzform[5]:

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

Beweisidee (nicht sauber, da der Nenner eventuell 0 wird):

$$\begin{aligned}
\frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} &= \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{h} \\
&= \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\
&\phantom{=} \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\
&\xrightarrow{h \to 0} \qquad f'(g)(x_0) \qquad\quad \cdot \qquad\quad g'(x_0)
\end{aligned}$$

**Beispiel** Kubische Hermite-Polynome

$$p(t) : \; t = \frac{x - x_0}{h}$$

(1)

$$\begin{aligned}
h(x) &= (x^2 + 3x + 1)^4 \\
f(x) &= x^4 && \text{äußere Funktion}
\end{aligned}$$

---

[4] identisch wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ („trigonometrischer Pythagoras“), Anm. d. Verfasser
[5] Kürzen von $\mathrm{d}g$ ist *keine* gültige Operation, Anm. d. Verfasser

$$g(x) = x^2 + 3x + 1 \qquad \text{innere Funktion}$$

$$h'(x) = \underbrace{4(x^2 + 3x + 1)^3}_{\substack{\text{äußere Ableitung} \\ \text{f'(g)}}} \cdot \underbrace{(2x + 3)}_{\substack{\text{innere Ableitung} \\ \text{g'(x)}}}$$

(2)

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{x^3 + \sqrt{x^5}} & & \\ f(x) &= \sqrt{x} & & \text{äußere Funktion} \\ g(x) &= x^3 + \sqrt{x^5} & & \text{1. innere Funktion} \\ k(x) &= \sqrt{x^5} & & \text{2. innere Funktion} \end{aligned}$$

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\left(3x^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^5}\right)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^5} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x^5}}}_{\frac{1}{2k(x)}} 5x^4$$

◁

**Definition** (Höhere Ableitungen)

$$\begin{aligned} & f : D \to R \text{ beliebig oft differenzierbar} \\ & f^{(0)}(x) := f(x) \\ (k \geq 0) \quad & f^{(k+1)}(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f^{(k)}(x)\right) \end{aligned}$$

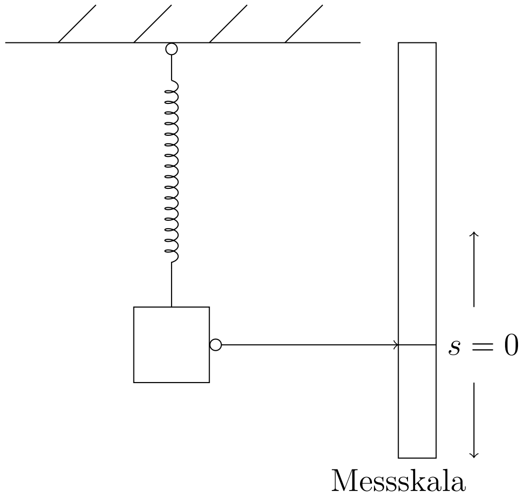
◀

$$\begin{array}{lllll} & f & & & \\ \text{1. Ableitung} & f' & = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f & \text{Geschwindigkeit} & \\ \text{2. Ableitung} & f'' & = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f' & \text{Beschleunigung} & \\ \text{3. Ableitung} & f''' & = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'' & \rightsquigarrow \text{Autobahnausfahrt} & \end{array}$$

### 2.3.3 Schwingungsgleichung – Gewöhnliche Differentialgleichung

(siehe auch [Bor08, Kap. 8])

#### Schwingung einer Feder




Anfangsauslenkung führt zu einer Schwingung (ohne Schwerkraft)
Weg-Zeit-Diagramm

- Eichung: $t = 0$
- Ruhelage $s = 0$
- Anfangsgeschwindigkeit $v \neq 0$
- Weg $s(t)$
- Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$
- Beschleunigung $\ddot{s}(t)$

Kräftegleichgewicht:

- Newton-Kraft: $k_1 = m\ddot{s}(t)$
- Federgesetz: $k_2$ entspricht Auslenkung $k_2 = Ds(t)$

Prinzip D'Alembert: „Summe aller Kräfte“ = 0

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 0 \\ m\ddot{s} + Ds &= 0 \\ \implies \ddot{s}(t) + \frac{D}{m}s(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$k = \sqrt{\frac{D}{m}} \text{ Frequenz: } s^{-1}$$

Schwingungsgleichung:

$$\mathbf{\ddot{s}(t) + k^2 s(t) = 0}$$

Aufgabe: Suche $s(t)$, welches obige Gleichung unter den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = v_0$ erfüllt.

**Definition** Eine Verknüpfung einer unbekannter Funktion $s(t)$ mit ihren Ableitungen heißt *gewöhnliche Differentialgleichung.* ◀

$$\left.\begin{array}{rr} \ddot{s} + k^2 s = 0 & \text{2. Ableitung} \\ s(0) = 0, \dot{s}(0) = v_0 & \text{lineares System} \end{array}\right\} \text{lineare DGL 2. Ordnung}$$

allgemein:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

$$f: \underset{\substack{\downarrow \\ t}}{I} \times \mathbb{R}^{(n)} \to \mathbb{R}^{(n)}$$

Vorlesung 2009-12-01

### Übersicht

- $\ddot{s} + k^2 s = 0$ ist Differentialgleichung (Dgl.) und „verknüpft“ Funktionswerte und Ableitungen der unbekannten (gesuchten) Funktion $s(t)$
- Da nur eine unabhängige Variable (hier die Zeit $t$) existiert handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung (*ODE* – ordinary differential equation).
- Da nur die Anfangswerte $s(0)$ und $\dot{s}(0)$ gegeben sind, ist es ein Anfangswerteproblem *(AWP)* (engl. *IVP* – initial value problem).

**Anmerkung** Existieren mehrere unabhängige Variablen ($x, y, z \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}^+$), handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung (*PDE* – partial differential equation). $\triangleleft$

**Beispiel**

– Wärmeleitung: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$[6]

– Wellengleichung: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

– Laplace-Gleichung: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(t, u)$

$\triangleleft$

- $\ddot{s} + k^2 s = 0$ ist eine DGL zweiter Ordnung, da die höchste enthaltene Ableitung zweiter Ordnung ist.

**Fragen**

(1) Wie berechne ich *eine* Lösung?

(2) Wie berechne ich *alle* Lösungen?

(3) Definitionsbereich einer Lösung?

Obige Fragen sind in der „ODE-Welt“ beantwortbar, erfordern in der „PDE-Welt“ hingegen 1-20 Jahre zur Lösung.

**Spezielle Herangehensweise:** $\ddot{s}(t) + k^2 s(t) = 0 \rightarrow$ Technik des intelligenten Ratens

**Beispiel** (für $k = 1$)

$$
\begin{aligned}
&\ddot{s} + s = 0 \\
&\rightsquigarrow \text{geraten: z. B. } s_1(t) = \sin(t),\ s_2(t) = \cos(t) \\
\Longrightarrow\ & s_1(t) = \sin kt \\
\Longrightarrow\ & s_2(t) = \cos kt \\
&\ddot{s}(t) + k^2 s(t) = 0 \text{ ist linear } \rightsquigarrow \text{ Überlagern } (Ax = 0,\ Ax = b) \\
\Longrightarrow\ & s(t) = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt \text{ allgemeine Lösung, } c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Parameter $c_1$, $c_2$ an Anfagswerte adaptieren

$$
\left.
\begin{aligned}
&\rightsquigarrow s(0) = 0 \implies c_2 = 0 \\
&\rightsquigarrow \dot{s}(0) = v_0 \implies c_1 k = v_0 \implies c_1 = \frac{v_0}{k}
\end{aligned}
\right\} \text{AWT } s(t) = \frac{v_0}{k} \text{ sinkt}
$$

[6]zur Notation: $u_{xx} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$, $u_t$ entsprechend, Anm. d. Verfasser

$$\left.\begin{aligned} s(t) &= c_1 \sin kt \\ \dot{s}(t) &= c_1 k \cos kt \\ \ddot{s}(t) &= c_1 k^2 \sin kt \end{aligned}\right\} \ddot{s}(t) + k^2 s(t) = 0$$

$\lhd$

**Schwingungsgleichung in $\mathbb{C}$:** $\ddot{s} + k^2 s = 0$

**Euler-Formel:** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = -\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\varphi} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi) = \\ &= -k\sin k\varphi + \mathrm{i}\,k\cos k\varphi = \mathrm{i}\,k(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi) = \mathrm{i}\,k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\varphi} = \mathrm{i}^2\,k^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\varphi} = -k^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\varphi}$$

$$S(t) = C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt} + C_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kt}$$

$$\text{mit } C_1 = c_1 + \mathrm{i}\,c_2 \text{ und } C_2 = d_1 + \mathrm{i}\,d_2$$

Es gilt: $s(t) = \mathrm{Re}(S(t))$

### 2.3.4 Anwendung der Differentiation

Ziel: Kurvendiskussion von $f : I \to \mathbb{R}$ (differenzierbar)

**Definition** Lokales Maximum von $f$ in $x_0$ (im Inneren)

$$f(x) \leq f(x_0) \quad |x - x_0| < \delta,\ \delta > 0 \text{ geg.}$$

Im Inneren: waagrechte Tangente $f(x_0) = 0$ charakterisiert lokales Extremum (notwendige Bedingung). ◀

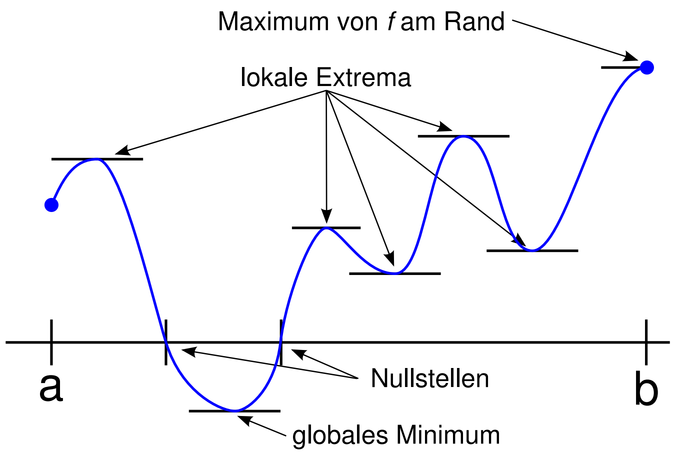


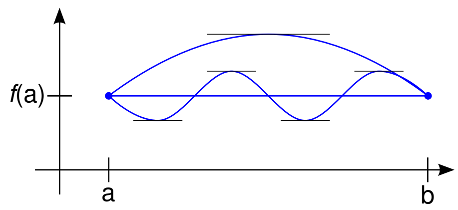
Abbildung 2.8: Nullstellen und Extrema

**Anmerkung** $f(x) = x^3 \rightsquigarrow f'(0) = 0$, jedoch kein lokales Extremum ◁

### Satz von Rolle

Voraussetzung: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und es gilt $f(a) = f(b)$.

**Satz 11** *Es existiert ein $x_0$ mit $a < x_0 < b$ : $f'(x_0) = 0$ oder $f$ ist konstant. Umgangssprachlich: „$f$ ist entweder konstant oder besitzt ein Extremum."*



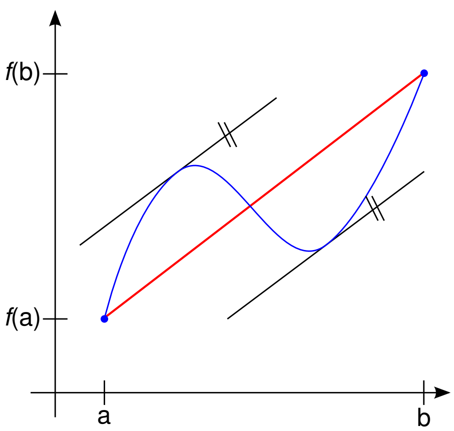

Uminterpretation: Sekantensteigung an Intervallenden: Es existiert ein $x_0$ mit gleicher Tangentensteigung.

### 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung (1. MWS)

Voraussetzung $f(a) = f(b)$ entfällt, aber es gilt: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar.

**Satz 12** *Es existiert ein $x_0$ mit $a < x_0 < b$ so, dass die Sekantensteigung an den Endpunkten parallel zur Tangentensteigung in $x_0$ ist.*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$




*Beweis.* Wende Satz von Rolle an auf:

$$h(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$h'(x) = f'(x) - 1\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wie leicht zu sehen ist gilt:

$$h(a) = f(a) \text{ und } h(b) = f(a)$$

aus dem Satz von Rolle folgt:

$$\exists x_0 : h'(x_0) = 0 \implies f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Folgerung für Differentialgleichungen:

$$\forall x : a < x < b \wedge f'(x) = 0 \implies f(x) = const \text{ einzige Lösung}$$

*Beweis für 1. MWS.*

$$\exists x_0 : 0 = f'(x_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \implies f(x) = f(a) = const$$

$\implies$ Konstante löst allgemein: $\dot{s} = 0 \implies s = c.$ □

### Monotone Funktionen

(1) $f'(x) \geq 0 \implies f$ ist monoton wachsend

(2) $f'(x) \leq 0 \implies f$ ist monoton fallend

**Beispiel** z. z.

$$f'(x_0) < 0 \implies x_1 > x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{\underbrace{x_1 - x_2}_{>0}} = f'(x_0) < 0$$

◁

### Wendepunkte

**Anmerkung** Die zweite Ableitung von $f$ beschreibt die Krümmung. ◁

(1) $f''(x) > 0 \implies y = f(x)$ ist konvex (Linkskrümmung)

(2) $f''(x) < 0 \implies y = f(x)$ ist konkav (Rechtsskrümmung)

Für den Wendepunkt gilt: $f''(x_0) = 0$ ist notwendig ($f'''(x_0) \neq 0$ ist hinreichend).

**Beispiel**

$$f(x) = x^3 \qquad f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad f'''(0) \equiv 6$$

◁

Vorlesung 2009-12-08

### 2.3.5 Regeln von L'Hospital

unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\ldots \approx 1680$ (Bernoulli)

**Beispiel**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$\triangleleft$

Hilfsmittel dazu: 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

**Satz 13** $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und differenzierbar mit* $g'(x) \neq 0$

$$g(a) \neq g(b) \implies \exists x_0 : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

**Anmerkung** nach 1. Mittelwertsatz

$$\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}$$

mit $a < x_1, x_2 < b$, aber nicht $x_1 = x_2$ $\triangleleft$

*Beweis.* Hilfsfunktion: $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$ stetig, differenzierbar

$$\left.\begin{array}{r} h(a) = f(a) \\ h(b) = f(a) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \text{Satz von Rolle: } \exists x_0 : h'(x_0) = 0$$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$$

$$x_0 : h'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x_0)$$

$$\implies \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$\square$

**Satz 14** (Regeln von L'Hospital) *Aus* $f, g : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ *differenzierbar mit* $g'(x) \neq 0$, *außerdem*

$$f(x), g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \text{ oder } f(x), g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$$

*folgt:*

*Falls der Grenzwert* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, dann existiert auch der Grenzwert* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, *wobei*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Anmerkung** Nicht zu verwechseln mit der Quotientenregel! Zähler und Nenner werden getrennt voneinander differenziert. ◁

**Beispiel**

- $\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\text{Form } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{1}\right) = 1$
- nützliche Umformungen

$$f(x)\cdot g(x) \text{ hat Form } 0\cdot\infty \implies f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ hat Form } \frac{0}{0}$$
$$f(x)-g(x) \text{ hat Form } \infty-\infty \implies f(x)\cdot g(x)\cdot\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right) \text{ hat Form } \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

- 

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)}_{\text{Form } \infty-\infty} &= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x - x}{x\cdot \sin x}\right)}_{\text{Form } \frac{0}{0}} \\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\cos x - 1}{x\cdot\cos x + \sin x}\right)}_{\text{Form } \frac{0}{0}} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\sin x}{2\cdot\cos x - x\cdot\sin x}\right) \\
&= \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

◁

**Nachtrag: Differentiation der** e**-Funktion** $\mathrm{e}^x$

Einführung $\mathrm{e}^x$ als Folgengrenzwert:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$$

Definition $g(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$, stetig differenzierbar

$$\begin{aligned}\implies g'(x) &= \frac{n}{n} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} \cdot \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} \cdot g(x) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{x\text{: fest}} g(x)\end{aligned}$$

**Anmerkung** e-Funktion ist so gebaut, dass Ableitung = Funktion $\rightsquigarrow$ gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{y} = y &\implies y(t) = c \cdot \mathrm{e}^t \\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \dot{y} = \lambda y &\implies y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}\end{aligned}$$

(wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{h(t)} = h'(t) \cdot \mathrm{e}^{h(t)}, h(t) = \lambda t$)

$\triangleleft$

### 2.3.6 Kurvendiskussion $y = f(x)$

(1) Definitionsbereich, Wertebereich

(2) Symmetrien (gerade, ungerade)

(3) Stetigkeit, Polstellen

(4) Nullstellen

(5) $f'$ berechnen, $f' = 0$ Nullstellen

(6) Extremwerte: innere Extrema, Randextrema, Monotoniebereiche

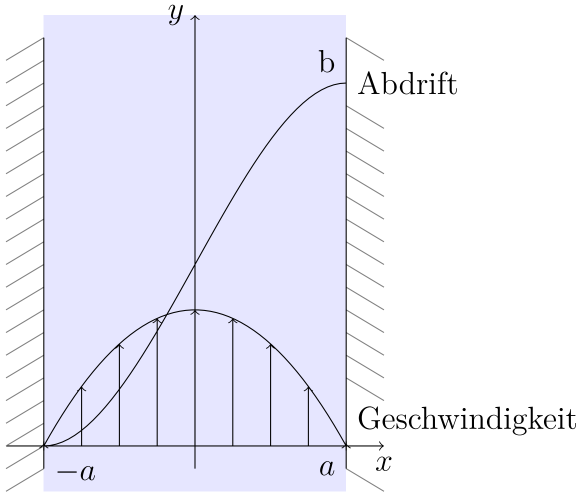
(7) $f''$ berechnen, $f'' = 0$ Nullstellen

(8) Wendepunkte, konvexe/konkave Bereiche

(9) asymptotisches Verhalten $x \to \pm\infty$

(10) Graph

### 2.3.7 Gewöhnliche Differentialgleichungen – 2. Teil




**Beispiel** (Hund springt in Eisbach und driftet ab)

- $v_0$ maximale Geschwindigkeit des Wasser

$$v_0 = 6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

  Wahl: Parabelprofil

$$v_{\text{F}}(x) = v_0 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$v(a) = v(-a) = 0$$

- Hund: konstante Eigengeschwindigkeit

$$v_H = 2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$v_H \parallel x\text{-Achse}$$

- Fragen: Welche Bahn schwimmt der Hund? Wie groß ist seine Abdrift $b$?

$$\tan\alpha = \frac{v_{\text{F}}}{v_{\text{H}}} = y'(x) \quad \Big\rangle \quad y'(x) = \frac{v_0}{v_{\text{H}}} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

- Erraten der Lösung

$$y(x) = c + \frac{v_0}{v_{\text{H}}} \cdot \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

- Abdrift

$$b = \underbrace{y(a)}_{\substack{\text{landet der}\\ \text{Hund}}} - \underbrace{y(-a)}_{\substack{\text{startet der}\\ \text{Hund}}} = \frac{v_0}{v_{\text{H}}} \cdot \underbrace{\left(\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) - \left(-a + \frac{a^3}{3a^2}\right)\right)}_{2a - \frac{2}{3}a}$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{v_0}{v_{\text{H}}} \cdot a$$

  in Zahlen:

$$b = \frac{4}{3} \cdot \frac{6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} \cdot 4\,\text{m} = 16\,\text{m}$$

◁

$y'(x) = f(x)$ einfache Differentialgleichung, da $f$ nur Funktion von $x$ und nicht von $y$ ist. Daher ist das Erraten der Lösung als Integral möglich. Vorlesung 2009-12-09

$$\rightsquigarrow y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Allgemeines Anfangswertproblem:

$$\dot{y}(t) = f(t, y) \qquad y \in \mathbb{R}^n \qquad y(t_0) = y_0$$

Eisbach: allgemeines AWP linear 1. Ordnung/Typs

$$y'(x) = p(x) \cdot y + q(x) \qquad y \in \mathbb{R}^1$$

### 2.3.8 Umkehrfunktionen

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig (evtl. auch etwas weniger stückweise stetig oder auch etwas mehr differenzierbar)

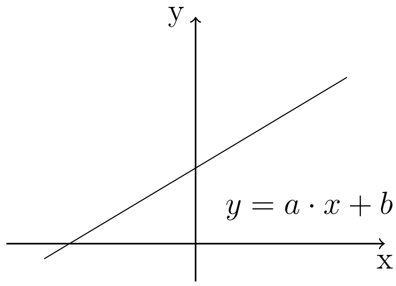
**Definition** (Umkehrbarkeit) $f$ heißt umkehrbar über $D \subseteq I$, falls für alle $y \in f(D)$ gilt: Die Gleichung $y = f(x)$ hat genau eine Lösung $x$

$$\left.\begin{array}{l} g : \underbrace{f(D)}_{\subseteq\mathbb{R}} \to D x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x) \\ g : \text{Umkehrfunktion zu } f : g = f^{-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} g \circ f = f \circ g = id \\ g(f(x)) = x \\ f(g(y)) = y \end{array}$$

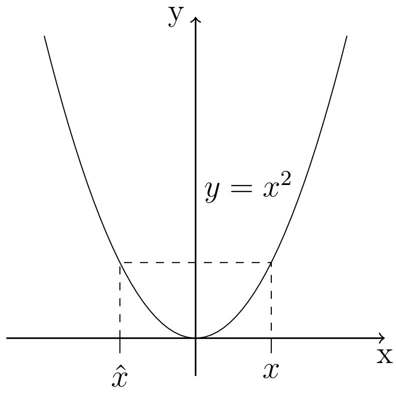
◀

**Beispiel**

(1) $f(x) = ax + b \implies g(y) = \frac{1}{a} \cdot (y - b)$




(2) $y = f(x) = x^2 \implies \begin{cases} x \geq 0 : & g(y) = +\sqrt{y} \\ x < 0 : & g(y) = -\sqrt{y} \end{cases}$




◁

offensichtlich: (streng) monotone Funktionen erlauben Umkehrung
monotone Funktionen werden an $y = x$ gespiegelt $\rightsquigarrow$ $g = f^{-1}$ (siehe Abbildung 2.9 auf Seite 72)

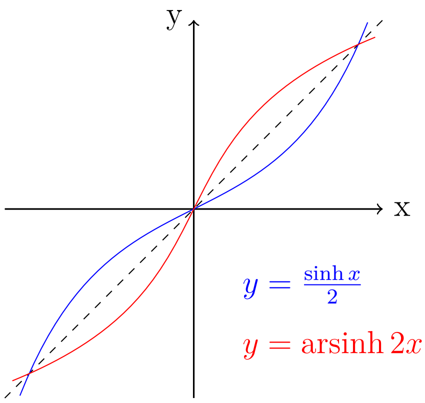



Abbildung 2.9: streng monotone Funktion und zugehörige Umkehrfunktion

### Hauptsatz zu Umkehrfunktionen

(1) Jede streng monotone Funktion $f(x)$ ist umkehrbar.

(2) $f$ und $g = f^{-1}$ gegeben $\implies$ Graph von $g$ ist symmetrisch zu Graph von $f$ bzgl. $y = x$. (siehe Skizzen)

(3) $$\left.\begin{array}{l} f : I \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar und umkehrbar} \\ g : f(I) \to \mathbb{R} \text{ Umkehrfunktion} \\ \text{es gilt: g differenzierbar und } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Kettenregel } f(g(x)) = x \\ \text{differenziere } f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \end{array}$$

**Beispiel** (Umkehrfunktionen)

(1) n-te Wurzel für rationale Exponenten:

bisher $y = \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow y^n = x \quad \begin{cases} x \geq 0 & n \text{ gerade} \\ x < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Umschreibung:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Potenzbildung:

$$x^{\frac{m}{n}} := \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Ableitung:

$$f(x) = x^n \qquad g(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{n \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

Kettenregel: Exponent $\frac{m}{n}$ zu berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}$$

(2) Arkus-Funktion:
trigonometrische Funktionen sind nicht *global* umkehrbar
Umkehrung möglich in $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

**Definition** (Umkehrfunktion von $\sin x$) Die Umkehrfunktion von $\sin x$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist $\arcsin x \ : [-1{,}1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ◀

Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\underbrace{\cos}_{f'}(\underbrace{\arcsin x}_{g})}$$

Mit Pythagoras $1 = \sin^2 x + \cos^2 x \implies \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (wegen Abschnitt „$+\sqrt{\ }$“) folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Analog für $\cos x, \tan x, \cot x$:

$$\arccos x : [-1{,}1] \to [0, \pi]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

◁

### 2.3.9 Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

**Eigenschaften von** $\mathrm{e}^x$

- Definiert aus Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n =: \mathrm{e}^x = \exp(x)$
- Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$ (hebt $\mathrm{e}^x$ aus allen $f(x)$ heraus)
- Positivität: $\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \mathrm{e}^x > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} = 2{,}718281828459\ldots\text{Euler'sche Zahl}$$

- Wachstum: $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$

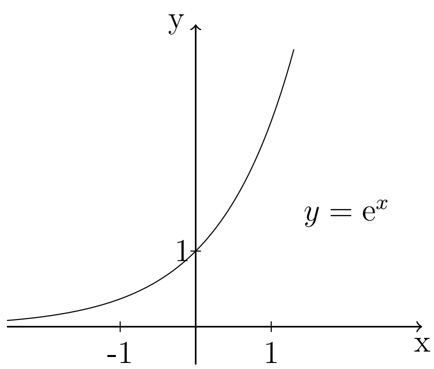
$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$$

- Vergleich mit Wachstum von $x^n$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{n \cdot x^{n-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{n!} = \infty$$

„e-Funktion wächst schneller als jede Potenz von $x^n$“ (L'Hospital, Seite 67)

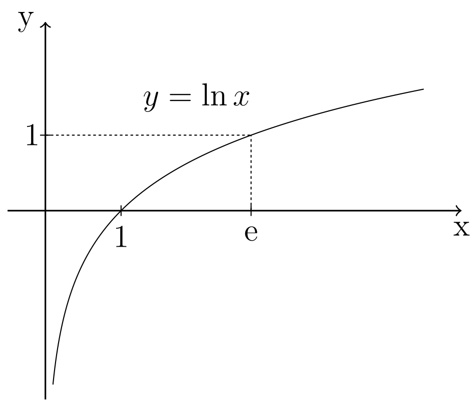
- Umkehrbarkeit: $\mathrm{e}^x$ ist monoton $\implies$ $\mathrm{e}^x$ ist umkehrbar



**Definition** (Logarithmus Naturalis) Die Umkehrfunktion von $e^x$ ist der natürliche Logarithmus $\ln x$.

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$$
$$0 < x < 1 \implies \ln x < 0$$
$$x > 1 \implies \ln x > 0$$
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\underbrace{\exp}_{f'} \underbrace{(\ln x)}_{g}} = \frac{1}{x}$$

◀




**Rechenregeln**

(1) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

(2) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad (y \neq 0)$

**Allgemeine Potenzen zu $x^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$**

Idee: allgemeine Potenzfunktion $a^x$ mit $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

$$a^x = \exp(\ln a^x) = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

Berechne $x^\alpha$ und die Ableitung ($x > 0$):

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{d}{dx} e^{\alpha \ln x} = \alpha \underbrace{e^{\alpha \ln x}}_{x^\alpha} \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

**Rechenregeln**

(1) $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$

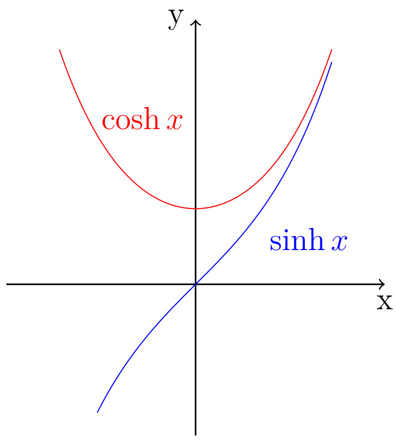
(2) $(a^x)^y = a^{(x \cdot y)}$

(3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

(4) $\ln(a^x) = x \cdot \ln a \quad | a > 0$

**Definition** (Hyperbelfunktion)

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$




Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Vorlesung 2009-12-15

**Umkehrfunktionen**

$$\left.\begin{array}{l} \sinh x \text{ ist streng monoton} \rightsquigarrow \text{umkehrbar} \\ \sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\} \operatorname{arsinh} x \text{ (Areasinus hyperbolicus)}$$

**Explizite Angabe von** $\operatorname{arsinh} x$

$$\begin{aligned}
y = \sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ Auflösen nach } x \\
\implies 2y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \quad | \cdot \mathrm{e}^x \\
\implies 2y\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^x - \underbrace{\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}}_{=1} \\
\implies \mathrm{e}^{2x} - 2y\,\mathrm{e}^x = 1 \\
\implies (\mathrm{e}^x - y)^2 = 1 + y^2 \\
\implies \mathrm{e}^x = y + \sqrt{1+y^2} \\
\implies x = \ln(y + \sqrt{1+y^2}) = \operatorname{arsinh} y
\end{aligned}$$

**Folgerung**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

### 2.3.10 Fixpunkte, Iterationsverfahren

Einer der ersten Schritte der Kurvendiskussion ist die Nullstellenbestimmung.

**Nullstelle als Fixpunkt formulieren**

**Definition** $x^* \in [a,b]$ heißt Fixpunkt, falls gilt: $f : [a,b] \to \mathbb{R} : f(x^*) = x^*$ ◀

**Lemma 2** *Jeder Fixpunkt $x^*$ von $f$ ist Nullstelle der Funktion $g(x) = f(x) - x$. Umgekehrt: Jede Nullstelle von $f$ ist Fixpunkt von $g(x) = f(x) + x$.*

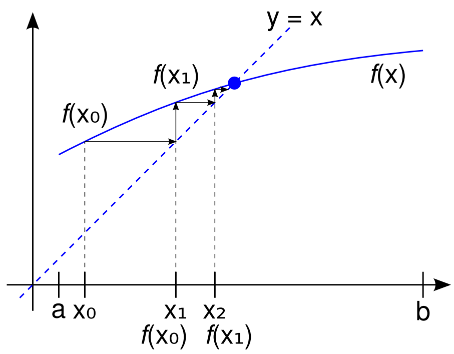
**Definition** (Einstellige Fixpunktiteration)

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad n \geq 0 \quad \text{zu gegebenem } x_0$$

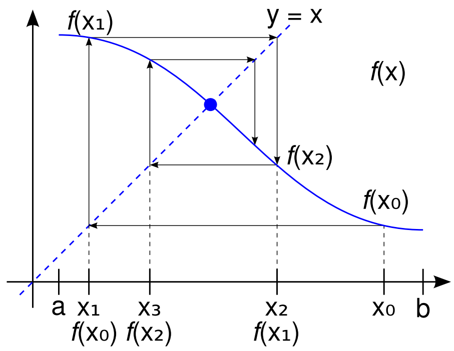
(Im Folgenden sind alle Fixpunktiterationen einstellig.) ◀

**Iterationsverläufe**

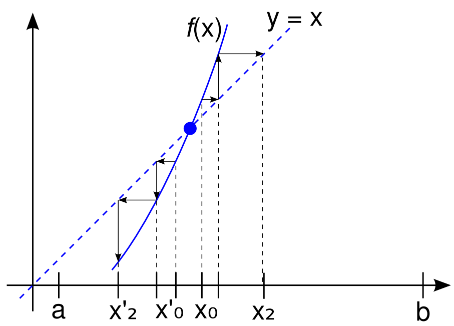
(1) $f(x) : 0 < f'(x) < 1$ (konvergente Iteration)




(2) $f(x): -1 < f'(x) < 0$ (konvergente Iteration)




(3) $f(x): f'(x) > 1$ (divergente Iteration)




**Definition** (Lipschitz-Stetigkeit) Eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig auf $[a, b]$, falls eine Lipschitz-Konstante $L$ existiert, mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad x_1, x_2 \in [a, b]$$

$f$ heißt *kontrahierend*, falls $L < 1$. ◀

**Anmerkung** Aus dem 1. MWS folgt: $L = \max\limits_{x \in ]a,b[} |f'(x)|$ ◁

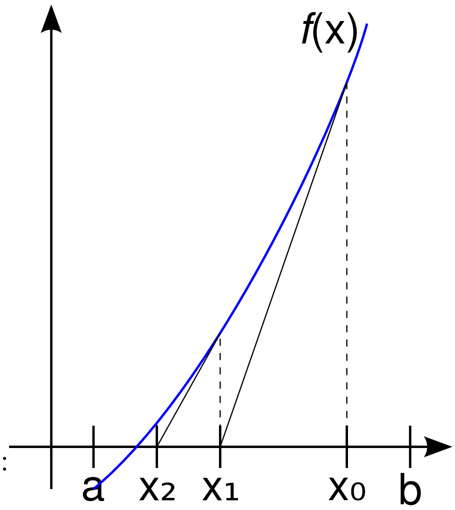
**Fixpunktsatz von Banach**

Wesentliche Voraussetzung: $f$ ist kontrahierend $\implies x_{n+1} = f(x_n)$ ist konvergent

**Anmerkung** Für nicht-kontrahierende Funktionen ist das Newton-Verfahren eine Abhilfe zur Nullstellensuche:

$$\begin{aligned} \text{Startwert} &: x_0 \\ n \geq 0 &: x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

(Schnittgleichung: Tangente $\leftrightarrow$ x-Achse)




Das Newton-Verfahren ist (im Wesentlichen als einziges Verfahren) auf $\mathbb{R}^n$ verallgemeinerbar:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta x_n \\ \mathrm{D}f(x_n)\Delta x_n &= -f(x_n) \\ \Delta x_n &= -\mathrm{D}f^{-1}(x_n)f(x_n) \end{aligned}$$

$\lhd$

Vorlesung 2009-12-16

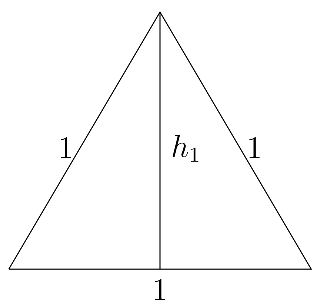
## 2.4 Reihen, Potenzreihen, Taylorreihen

### 2.4.1 Schneeflockenkurve nach Koch, Reihen

Passend zu Weihnachten: Konstruktion einer Schneeflocke mit $\infty$-großem Umfang, aber endlicher Fläche

**Konstruktion**

Start: gleichseitiges $\triangle s_1$ der Kantenlänge 1: Fläche $F_1$, Umfang $U_1$



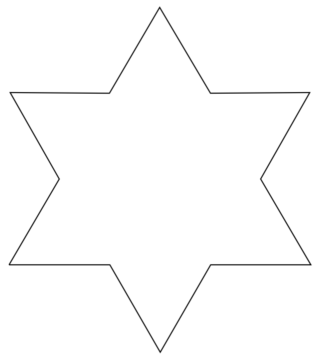
$$
\begin{aligned}
g_1 &= 1 \\
h_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1^2 \\
F_\triangle &= \frac{gh}{2} \\
\implies h_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

zu $\triangle s_1$:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 3g_1 = 3 \\
F_1 &= \frac{1}{4}\sqrt{3} \qquad (g_1 h_1 \colon 2)
\end{aligned}
$$

**1. Schritt (Rekursion für alle Schritte):**

Drittle jede Seite und errichte über dem Mittelstück ein gleichseitiges $\triangle$



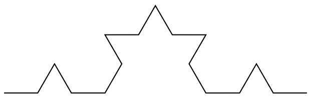
$$
\begin{aligned}
F_2 &= F_1 + 3F_{\text{kl}\triangle} \\
F_{\text{kl}\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot g_2 \cdot h_2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h_2^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
\implies h_2 &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow F_{\mathrm{kl}\triangle} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)$$
$$U_2 = U_1 + 3 \cdot g_2 = 4$$

**2. (allgemeiner) Schritt:**

Drittelung über alle Begrenzungsgeraden von $s_2$ liefert den 18-zackigen Stern $s_3$



Konstruktionsprinzip: 3 Zacken werden vervierfacht

$$F_3 = F_2 + 3 \cdot 4 \cdot F_{\mathrm{neu}}$$
$$U_3 = U_2 + 12 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{neu}} &= \frac{1}{2} \cdot h_3 \cdot g_3 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{9^2} \end{aligned}$$

allgemein ($n > 2$):

$$F_n = F_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-2}\left(\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{9^{n-1}}\right)$$
$$U_n = U_{n-1} + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}$$

Beweis: vollständige Induktion, Beweismittel sind bereits erläutert
Auflösen der 2-Term-Rekursion:

$$F_n = \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right)$$
$$U_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^k$$

**Begriffe zu Reihen**

Idee: führe die Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Folgen zurück

**Definition** (Partialsumme) Zu jeder reellen Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die Folge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

die $n$-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ◀

Grenzwert der Reihe $\widehat{=}$ Folgengrenzwert der Partialsummen

**Definition** Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent (divergent) falls die Folge der Partialsummen konvergent (divergent) ist. ◀

Für Konvergenz-/Divergenz-Untersuchungen haben wir *nur* ein *zentrales Werkzeug*: die geometrische Reihe.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \quad \text{Konvergenz} \\ \infty & |x| \geq 1 \quad \text{Divergenz} \end{cases}$$

**Anmerkung** Die Formel für $|x| < 1$ ergibt sich aus der allgemeinen Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} x^k \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) = \frac{1}{1 - x}$$

◁

### Anwendung: Schneeflockenkurve

$$\begin{aligned} F_n : x &= \frac{4}{9} \leq 1 \implies \text{Konvergenz, endliche Fläche} \\ U_n : x &= \frac{4}{3} \geq 1 \implies \text{Divergenz, unendliche Fläche} \end{aligned}$$

### Intuitive Kriterien

(1) Notwendig für Konvergenz der Reihe: Folgenelemente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine *Nullfolge*

(2) umgekehrter Schluss: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge $\not\Rightarrow$ Konvergenz der Reihe
Gegenbeispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty$ (siehe frühere Zweier-Potenzen)
harmonische Reihe ist divergent

**Anmerkung** „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge“ ist *notwendig*, aber nicht *hinreichend*. ◁

**Beispiel** Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert, obwohl

$$a_k = \frac{1}{k}$$

eine Nullfolge ist. $\triangleleft$

**Anmerkung** Allerdings ist

$$\epsilon > 0 : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\epsilon}}$$

konvergent. $\triangleleft$

**Rechenregeln für konvergente Reihenelemente**

(1)

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \ b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a \pm b$$

(2)

$$c \in \mathbb{R} \implies \sum_{k=1}^{\infty} c a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a$$

(3)

$$a_k \leq b_k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Vorlesung 2010-01-13

### 2.4.2 Konvergenzkriterien

**Idee: Majoranten-/Minorantenkriterium**

$0 \leq a_n < b_n$

$$\begin{array}{llcll} \sum_{k=0}^{\infty} b_k & \text{konvergiert} & \implies & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ \text{konvergiert} & \text{„Majorante“} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k & \text{divergiert} & \implies & \sum_{k=0}^{\infty} b_k \ \text{divergiert} & \text{„Minorante“} \end{array}$$

**Beispiel** (Konvergenz) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(k^3+5\right)}{3^k+1}$$

ist konvergent, da

$$\begin{aligned} \sin^2\left(k^3+5\right) &\leq 1 \\ \frac{1}{3^k+1} &\leq \frac{1}{3^k} \\ \text{folglich: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(k^3+5\right)}{3^k+1} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{aligned}$$

und $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ konvergent ist. ◁

**Beispiel** (Divergenz)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergent, da

$$0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$\Longrightarrow$ harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist Minorante und divergent ◁

**Fazit**
Versucht man Konvergenz zu zeigen, konstruiert man eine bekannte Majorante.
Versucht man Divergenz zu zeigen, konstruiert man eine bekannte Minorante.

einziges Werkzeug: Geometrische Reihe

**Idee: vergleiche $\sum a_k$ mit $x^k$**

ab festem $k_0$:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_k \leq x^k & \qquad k \geq k_0 \\ \Longrightarrow 0 \leq \sqrt[k]{a_k} \leq x & \end{aligned}$$

allgemein:

$$\begin{aligned} &0 \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq x \\ &0 < x < 1 \Longrightarrow \text{Konvergenz} \end{aligned}$$

**Satz 15** (Wurzelkriterium) *Ist eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegeben mit* $0 \leq a_n$ *und existiert* $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, *so gilt*

*(1)* $r < 1 \implies$ *Konvergenz*

*(2)* $r > 1 \implies$ *Divergenz*

*(3)* $r = 1 \implies$ *nicht entscheidbar*

**Idee: bilde Quotienten**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x < 1 \implies a_{n+1} \leq a_n x$$

rekursiv:

$$a_{n+1} \leq a_n x \leq a_{n-1}x^2 \leq \ldots \leq a_1 x^{n+1} \implies a_n \leq a_1 x^n$$

**Satz 16** (Quotientenkriterium) *Ist eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegeben mit* $0 \leq a_n$ *und existiert* $s = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *so gilt*

*(1)* $s < 1 \implies$ *Konvergenz*

*(2)* $s > 1 \implies$ *Divergenz*

*(3)* $s = 1 \implies$ *nicht entscheidbar*

**Idee: alternierende Reihen**

**Definition** (Alternierende Reihe) Eine Reihe, deren Elemente wechselnde Vorzeichen haben, heißt alternierende Reihe.

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad a_n \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$$

◀

**Satz 17** (Leibniz-Kriterium) *Bilden* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Nullfolge* ($a_n > a_{n+1}$)*, so ist die alternierende Reihe konvergent.*

*Beweisidee.* Betrachte Partialsummen mit geraden bzw. ungeraden Indizes:

$$S_{2n+2} = S_{2n} + \underbrace{a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{>0} > S_{2n} \quad \text{monoton wachsend}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{-a_{2n} + a_{2n+1}}_{<0} < S_{2n-1} \quad \text{monoton fallend}$$

$S_{2n}$ ist oben durch $S_1$ beschränkt
$S_{2n+1}$ ist unten durch $S_2$ beschränkt

Grenzwert = Konvergenz $S_{n+2} \to S_{n+1}$ □

**Anmerkung** (Alternierende Reihen in der Datenverarbeitung) Es gelte

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

In der Praxis relevant: $0 < (-1)^n (S - S_n) < a_{n+1}$. D. h. falls die Berechnung der Reihe nach $n$ Termen abgebrochen wird, ist der Fehler stets kleiner als der letzte Reihenterm. Bis ca. 1985 war dies u. A. für die Implementierung von $\sin(x)$ wichtig.

$$x \in \mathbb{M} \quad x \to 2\pi \to \frac{\pi}{2} \to \dots$$

◁

### 2.4.3 Absolut konvergente Reihen

bisherige Notation war $a_n \geq 0$, Erweiterung auf beliebige reelle bzw. komplexe $a_n$

**Definition** (Absolut konvergente Reihe) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Zahlenfolge in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$, dann heißt die zugehörige Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. ◀

**Anmerkung** Definition ist sehr rigide:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. ◁

allgemein:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &\leq \left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k| \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_k &\geq -\left|\sum a_k\right| \geq -\sum |a_k| \end{aligned}$$

**Anmerkung** Jede absolut konvergente Reihe ist implizit eine konvergente Reihe, aber nicht umgekehrt. ◁

**Beispiel**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k \qquad |z| \leq 1$$

Versuch: Konvergenz über absolute Konvergenz und Majorantenkriterium nachweisen

$$0 \leq \left| \frac{z^k}{k^2} \right| = \frac{|z^k|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \qquad \text{da } |z| \leq 1$$

Frage: Ist $\sum \frac{1}{k^2}$ eine Majorante?

(1) Quotientenkriterium

$$s = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(k+1)}\right)^2 = 1$$

$$s = 1 \implies \text{nicht entscheidbar}$$

(2) Wurzelkriterium

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[k]{k})^2} = 1 \implies \text{nicht entscheidbar}$$

(3) finde eine weitere Majorante zur möglichen Majorante $\sum \frac{1}{k^2}$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} \leq \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k}$$

Ist $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ konvergent? Umformung:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \qquad \text{„Teleskopsumme“}$$

bilde Partialsummen

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ergebnis: Folge der Partialsummen $S_n = 1 - \frac{1}{n}$ ist konvergent: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 \implies$ $\sum \dfrac{1}{k(k-1)}$ ist konvergenter Majorant zu $\sum \frac{1}{k^2}$. ◁

*(Laut Dozent machte es der Übungsbetrieb erforderlich, die späteren Abschnitte 2.4.6 und 2.4.7 vorzuziehen. Im Skript folgen wir allerdings der ursprünglichen Gliederung des Dozenten, so dass die chronologische Reihenfolge nicht übereinstimmt, Anm. d. Verfasser)*

Vorlesung 2010-01-20 Teil 1

### 2.4.4 Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k x^k\right)$

**Satz 18** (Großer Umordnungssatz) *Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k)$ *absolut konvergent, so ist auch jede umgeordnete Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_{\sigma_k})$ *absolut konvergent mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_{\sigma_k}) = \sum_{k=0}^{\infty}(a_k),$$

*wobei* $\sigma_k$ *eine beliebige Permutation der Indizes* $\{0, \ldots, k, \ldots, \infty\}$ *ist.*

**Satz 19** (Produkte von Reihen) *Seien die Reihen* $\sum a_k, \sum b_k$ *absolut konvergent und* $\sigma, \mu$ *Permutationen. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_{\sigma_k} b_{\mu_k}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

**Satz 20** (Cauchy-Produkt zweier Reihen) *Seien die Reihen* $\sum a_k, \sum b_k$ *absolut konvergent. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\\ &= \underbrace{(a_0 b_0)}_{n=0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{n=1} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{n=2} + \ldots\end{aligned}$$

**Definition** (Potenzreihe) Eine Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

◀

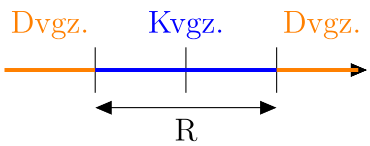
#### Fragen

- Für welche $x$ ist die Reihe konvergent?
- Welchen Wert nimmt die Reihe an?
- Auswertung ✓(Horner-Schema)
- Funktionswert als Potenzreihe, siehe Abschnitte 2.4.6 (Seite 91) und 2.4.7 (Seite 93)

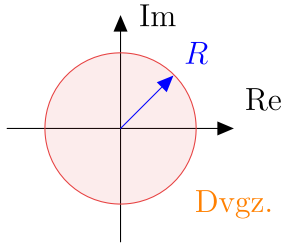
#### Konvergenz-Frage

- $x = 0$ konvergent, aber uninteressant
- für welche $x$ gibt es absolute Konvergenz?
  Erwartung:

in $\mathbb{R}$




in $\mathbb{C}$




Konvergenzkreis mit Radius $R$
(Konvergenzradius)

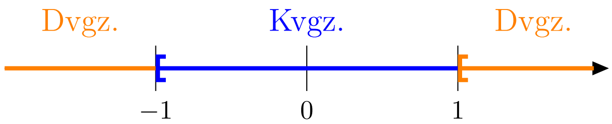
Antwort nach *Cauchy-Hadamard* (Wurzelkriterium, siehe Satz 15 auf Seite 85):

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} \rightsquigarrow R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

Ergebnis: Potenzreihe ist konvergent, falls $|x| < R$

**Beispiel** (Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$)

$$\begin{array}{rcrl} |x| & > & 1 & \text{Divergenz, da Minorante divergent} \\ x & = & 1 & \text{Divergenz, harmonische Reihe} \\ x & = & -1 & \text{Konvergenz, Leibniz-Kriterium} \\ |x| & < & 1 & \text{Konvergenz}^{7} \end{array}$$




◁

### 2.4.5 Potenzreihen spezieller Funktionen

Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (*)$$

[7] benötigt für Taylorreihe $\ln(1+x) = \sum\left((-1)^\nu \cdot \frac{x^\nu}{\nu}\right)$, siehe Abschnitt 2.4.7 (Seite 94)

Suche Funktion $f$ mit Eigenschaft (*)
Normierung: $\underbrace{\underbrace{f(0) = 1}_{a^x}, f'(0) = 1}_{\mathrm{e}^x}$
Idee: Suche Lösung von (*) in Form einer Potenzreihe:
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \rightsquigarrow$ suche $a_k$, bestimme $R$ (Konvergenzradius)
Umsetzung:

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(x+y)^n}_{\text{Binom.}} = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right)}_{\text{Cauchy-Produkt}} = f(x) \cdot f(y)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^k y^{n-k}$$

Da die Potenzen $x^k, y^{n-k}$ passen (auf beiden Seiten), können die Koeffizienten per Induktion abgeglichen werden: $a_n = \frac{1}{n!}$
Normierung $\rightsquigarrow f(x) = \mathrm{e}^x$

*Beweis.*

- Induktionsanfang $\widehat{=}$ Normierung: $a_0 = \frac{1}{0!}$ $a_1 = \frac{1}{1!}$
- Induktionsschritt $n-1 \to n$
  Annahme: für $0 < m < n$ gilt $a_m = \dfrac{1}{m!}$

$$a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} x^k y^{n-k}$$

Herausziehen der Summanden für $k = 0$ und $k = n$

$$a_n \left(\underbrace{\binom{n}{0} y^n}_{k=0} + \underbrace{\binom{n}{n} x^n}_{k=n}\right) + a_n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \underbrace{a_n y^n}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{a_k a_{n-k}}_{\text{Ind.-Ann.}} x^k y^{n-k} + \underbrace{a_n x^n}_{k=n}$$

$$a_n \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^k y^{n-k}$$

Forderung:

$$\forall x, y: \quad \sum_{k-1}^{n-1} \left(\underbrace{a_n \binom{n}{k} - \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!}}_{=0 \text{ (Forderung)}}\right) x^k y^{n-k} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n\binom{n}{k} - \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} &= 0 \\ \frac{a_n n!}{k!(n-k)!} - \frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!} &= 0 \\ \implies a_n &= \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

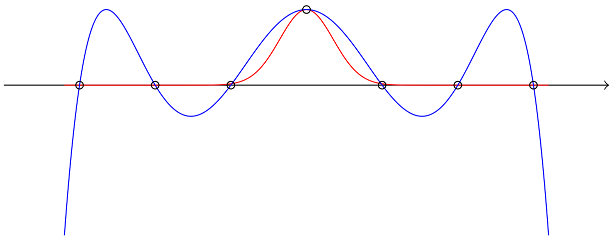
□

Vorlesung 2010-01-19 Einschub

### 2.4.6 Approximation durch Taylorpolynome

Vorteile: Polynome sind bestens bekannt und gut auf einem Rechner implementierbar (Horner-Schema)
Fragen: Lassen sich Funktionen durch Polynome gut darstellen? Wie sieht ein Polynom aus, welches eine gegebene Funktion gut darstellt (approximiert)?

#### 1. Antwort: Lagrange-Interpolationspolynome



rot: „gewünschtes“ Ergebnis
blau: Lagrange-Interpolation – eher globale Sicht, oszilliert stark

#### 2. Antwort: „lokale Sicht“

Ableitungsbegriff: lokale Approximation einer Funktion durch eine Gerade ($\widehat{=}$ Steigung)
weitere Daten: Krümmung (2. Ableitung), höhere Ableitungen an Stelle $x_0$

formalisiert:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar
- Entwicklungspunkt $x_0$: $a < x_0 < b$
- Polynom $p$

Forderung

$$\underbrace{\begin{array}{rcl} f(x_0) & = & p(x_0) \\ f'(x_0) & = & p'(x_0) \\ & \vdots & \\ f^{(n)}(x_0) & = & p^{(n)}(x_0) \end{array}}_{\text{Lsg.: Taylorpolynom}}$$

Erinnerung: Polynominterpolation

$$\begin{array}{rcl} f(x_0) & = & p(x_0) \\ f(x_1) & = & p(x_1) \\ & \vdots & \\ f(x_n) & = & p(x_n) \end{array}$$

**Satz 21** ($n$-tes Taylorpolynom) *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-fach stetig differenzierbar, $a < x_0 < b$ und $f^{(\nu)}(x_0) = p^{(\nu)}(x_0)$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Dann gilt:*

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left( \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot (x - x_0)^\nu \right)$$

**Anmerkung** Man wählt $x_0$ so, dass $f^{(\nu)}(x_0)$ einfach berechenbar ist. ◁

**Beispiel**

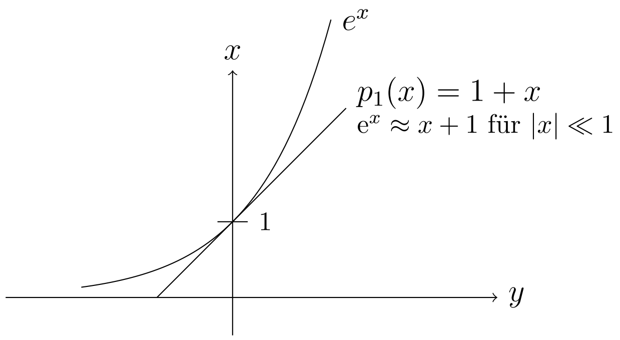
(1) $f(x) = \mathrm{e}^x$

$$f^{(\nu)}(x) = \mathrm{e}^x \quad \nu = 0, \ldots, n$$

- $x_0 = 0$

$$f^{(\nu)}(0) = 1 \quad \nu = 0, \ldots, n$$

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$




- $x_0 = 1$

$$f^{(\nu)}(1) = e \quad \nu = 0, \ldots, n$$

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left( \frac{(x-1)^\nu}{\nu!} \mathrm{e} \right) {}^{8}$$

[8]für $x = 1$ und $\nu = 0$ ist der Zähler $(1-1)^0 = 0^0 = 1$, Anm. d. Verfasser

(2) Trigonometrische Funktionen sin bzw. cos mit $x_0 = 0$

$$\sin^{(k)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cdot \cos x & k = 2m+1 \\ (-1)^m \cdot \sin x & k = 2m \end{cases}$$

$$\sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1$$

- sin

$$p_{2m+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

- cos

$$p_{2m}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

◁

**Anmerkung**

- nach Abschnitt 2.4.4 (Seite 88) sind alle 3 Reihen ($\mathrm{e}^x$, $\sin x$, $\cos x$) konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ (falls $n, m \to \infty$).
- Euler-Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$ ist ablesbar

◁

### 2.4.7 Restglieddarstellung, Taylorreihe

Problem: Wie groß ist die Abweichung der gegebenen Funktion $f$ und des konstruierten Taylorpolynoms?
Restglied: $R_{n+1}(x) = f(x) - p_n(x)$
Praxis: Restglied-Abschätzungen gesucht

**Beispiel** (Berechnung des sin)

$$\text{Eingabe: } x \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow \text{Periodizität}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\downarrow \text{Symmetrie}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow \text{Additionstheorem } \sin 3x$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Berechnung bis} \sim \frac{x^9}{9!} \rightsquigarrow R_{n+1} \approx 10^{-6}$$

◁

**Satz 22** (Taylorformel) *Für jede auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion $f$ gilt*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left( \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot (x - x_0)^\nu \right) + R_{n+1}(x), \ \textit{wobei}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \textit{Restglied nach Lagrange}$$

*$\xi$: Zwischenstelle im Intervall $I$ $(x_0 < \xi < x)$*

Beweis: siehe Abschnitt 2.5.5 auf Seite 112

**Anmerkung** Eine andere Darstellung von $\xi$ ist $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ mit $0 < \vartheta < 1$. $\xi$ ist nicht gegeben, aber $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$ ist abschätzbar (wegen: $f^{(n+1)}$ stetig in $[x_0, x]$ $\Longrightarrow$ es existiert ein Maximum). ◁

**Beispiel** (Logarithmus) $\ln 1 = 0$ ist bekannt $\rightsquigarrow$ sinnvoller Entwicklungspunkt $x_0 = 1$; bzw. es ist günstiger das Intervall zu verschieben, so dass $x_0 = 0$ Entwicklungspunkt ist $\rightsquigarrow$ Betrachtung von $\ln(1 + x)$

$$f(x) = \ln(1 + x) = \sum_{\nu=0}^{n} \left( \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu \right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= \ln 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1 \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(\nu)}(x) &= (-1)^{\nu-1}(\nu-1)! \frac{1}{(1+x)^\nu} & f^{(\nu)}(0) &= (-1)^{\nu-1}(\nu-1)!
\end{aligned}$$

Taylorpolynom

$$p_n(x) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \left( \frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!}{\nu!} x^\nu \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \left( \frac{(-1)^{\nu-1} x^\nu}{\nu} \right)$$

Taylorformel

$$\ln(1+x) = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \left( \frac{(-1)^{\nu-1} x^\nu}{\nu} \right)}_{p_n(x)} + \underbrace{(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}}_{\substack{R_{n+1}(\xi) \\ \text{fällt sehr langsam} \sim \frac{1}{n+1}}}$$

◁

**Definition** (Taylorreihe)

$$p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot (x - x_0)^{\nu} \right)$$

(unter der Voraussetzung, dass $f$ beliebig oft stetig differenzierbar ist) ◀

**Anmerkung** Taylorreihe und $f(x)$ hängen meistens zusammen. ◁

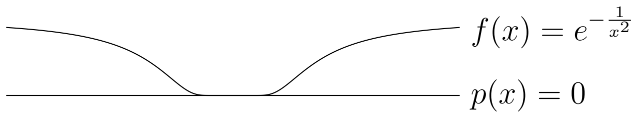
Gegenbeispiel:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(0)$ wird stetig ergänzt

Vorlesung 2010-01-20 Teil 2

**Behauptung 6** $\forall \nu$ *gilt:* $f^{(\nu)}(0) = 0$, *damit* $p(x) = 0$ *zu* $x_0 = 0$




*Beweis.*

- Induktionsvoraussetzung, $\nu = 1$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \frac{2}{x^3} \cdot f(x)$$

  $f'(0)$ stetig ergänzbar zu 0, da $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$

- Induktionsschritt, $\nu = n + 1$
  Annahme: $f^{(\nu)}(x) = q_\nu(x) \cdot f(x)$ mit $\nu = 1 \dots n$, $q_\nu(x)$ rationale Funktion

$$f^{(n+1)}(x) = \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} q_n(x) \right) \cdot f(x) + \frac{2}{x^3} \cdot q_n(x) \cdot f(x) = q_{n+1}(x) \cdot f(x)$$

Ergebnis: $f^{(\nu)}(x) = q_\nu(x) \cdot f(x)$, $q_\nu$ rationale Funktion
Verhalten in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0 \qquad \rightsquigarrow f^{(n)}(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Behauptung 6: Taylorreihe $f \equiv 0 \neq \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ □

Die Taylorformel enthält das Restglied $R_\nu(x)$. Bildet die Folge der Restglieder $(R_\nu(x))_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert die Taylorreihe (als Grenzwert der Taylorpolynome) gegen $f(x)$.

**Anmerkung** Für $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ bilden die Folgenglieder $R_\nu(x)$ keine Nullfolge. $\triangleleft$

Vorlesung 2010-01-26

### 2.4.8 Potenzreihen – Differentialgleichungen

**Airy-DGL**

$$\ddot{u}(t) - t \cdot u(t) = 0$$

(1880 – Radio/Lichtwellen)
der Koeffizient $t$ ist hier variabel, der Ansatz über $\mathrm{e}^{\lambda t}$ deshalb nicht zulässig

**Schwingungsgleichung**

$$\ddot{u} + u = 0$$

hier ist der Koeffizient konstant, der Ansatz $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ funktioniert deshalb

obige Gleichungen sind beide lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

#### Entwicklungssatz

gegeben: DGL 2. Ordnung, linear

$$\ddot{u}(t) + a(t)\dot{u}(t) + b(t)u(t) = s(t)$$

$s(t)$ wird als Quellterm, Source, Inhomogenität oder auch Anregung bezeichnet.

$$\text{Theorie: } Ax = b$$

**Satz 23** (Entwicklungssatz) *Alle Koeffizienten $a(t)$, $b(t)$ und Anregung $s(t)$ sind als Potenzreihen darstellbar $\implies$ $u(t)$ ist als Potenzreihe darstellbar (Analog-Rechner).*

**Beispiel** (zur Schwingungsgleichung: $\ddot{u} + u = 0$) Gesucht wird:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

**Idee** Koeffizientenvergleich, dazu Potenzreihe einsetzen in die DGL:

$$\dot{u}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k$$
$$\ddot{u}(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} t^k$$

Nach Einsetzen ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0$$

Abgleich zu $t^k$ (mit $k \geq 0$):

$$(k+1)(k+2) c_{k+2} + c_k = 0$$

Damit gilt:

$$\left.\begin{aligned} c_2, c_4, \ldots &\text{ sind Funktionen von } c_0 = u(0) \\ c_3, c_5, \ldots &\text{ sind Funktionen von } c_1 = \dot{u}(0) \end{aligned}\right\} \text{Anfangswerte (werden vorgegeben)}$$

**Auflösung**

$$k = 2m \qquad c_{2m+2} = \frac{-1}{(2m+1)(2m+2)} \underbrace{c_{2m}}_{\text{Cosinus-Anteil}}$$
$$k = 2m+1 \qquad c_{2m+1} = \frac{-1}{(2m+2)(2m+3)} \underbrace{c_{2m-1}}_{\text{Sinus-Anteil}}$$

Aus dem $e^{\lambda t}$-Ansatz folgt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda \text{ ist imaginär } u(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t) \\ \alpha_1,\ \alpha_2 \text{ aus Anfangswerten} \end{aligned}\right\} \text{Passt exzellent zusammen!}$$

◁

**Beispiel** (Airy-DGL)

$$\ddot{u}(t) - t \cdot u(t) = 0$$

Variabler Koeffizient $t$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_{k+2}\, t^k}_{\ddot{u}(t)} - \underbrace{t \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k}_{u(t)}}_{\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} t^k} = 0$$

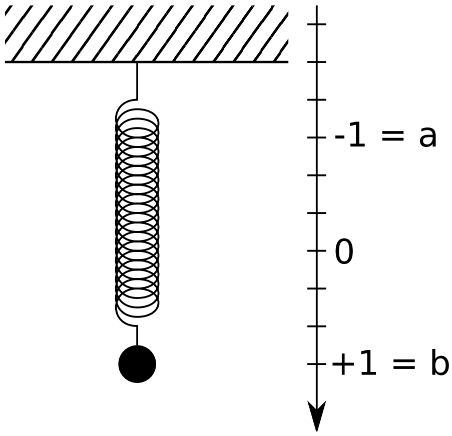
$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\underbrace{(k+1)(k+2)c_{k+2}-c_{k-1}}_{=0}\Big)t^k + 2\underbrace{c_2}_{=0} = 0$$

($c_0$ und $c_1$ aus Anfangswerten)

◁

## 2.5 Integration

### 2.5.1 Bestimmtes Integral

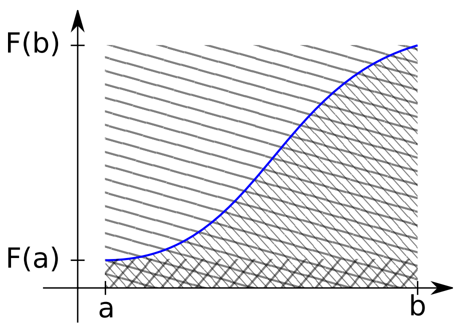



**Beispiel** gesucht: Die Arbeit $W$, um eine Feder ein Stück zu dehnen

$$F\text{: konstant}$$
$$s\text{: Wegstück, um das die Feder gedehnt wird}$$
$$\text{Arbeit} = \text{Kraft}\cdot\text{Weg}$$

Feder aus Position $a$ nach Position $b$ gezogen. Kraft zur Federdehnung sei ortsabhängig. ◁

Diagramm:



Kraftverlauf $F(x)$, Arbeit $W$: eingeschlossene Fläche

$$\text{Einschachteln von } W\text{:} \quad \left.\begin{array}{r} \text{unten: } F(a)(b-a) \\ \text{oben: } F(b)(b-a) \end{array}\right\} \begin{array}{l} F(a)(b-a) \leq W \leq F(b)(b-a) \\ \text{technische Frage: Flächenberechnung} \end{array}$$

**Historie** $F_{\square} = a^2$, $F_{\text{Rechteck}} = ab$, $F_{\bigcirc} = r^2\pi$

**Arbeitsprogramm** Flächenberechnung – Riemann-Integral

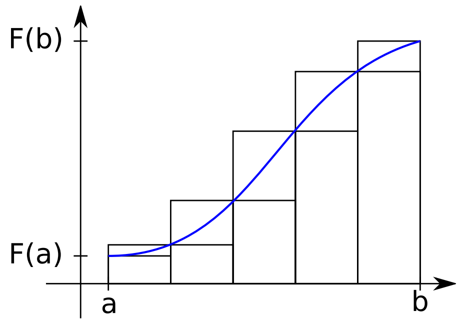
**1. Idee** untere/obere Grenzen aus Rechteckkonstruktion

(1) 2 Rechtecke gefunden, die den Wert von $W$ grob abschätzen

(2) Bekannt: $F_{\text{Rechteck}} = ab$

(3) Bekannt: Kraftverlauf $F(x)$

**2. Idee** Unterteile $[a, b]$ in Teilintervalle




einbeschriebene Rechtecke $\leq$ Fläche
umgeschriebene Rechtecke $\geq$ Fläche

Vorlesung 2010-01-27

- anschaulich: Arbeit, die verrichtet wird $\hat{=}$ Fläche unter dem Kraftverlauf
- allgemeine Maßtheorie – Integralbegriffe:
  - deterministisch: Riemann-, Lebesgue-Integral
  - stochastisch: Itō-, Stratonovich-Kalkül

**Voraussetzung**
Gegeben sei eine *beschränkte* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, d. h. es existiert $m, M \in \mathbb{R}$ so dass $m \leq f(x) \leq M$.

**Anmerkung** Wäre $f$ stetig (oder differenzierbar), dann wäre f sowieso beschränkt, da f auf einem abgeschlossenem Interval $[a, b]$ definiert ist. ◁

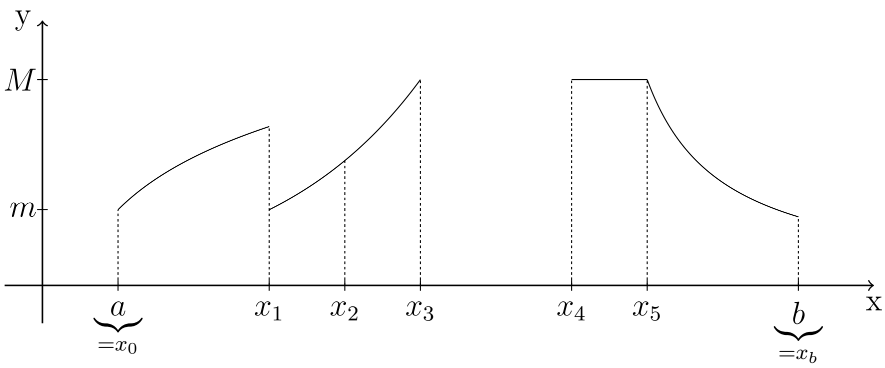



Abbildung 2.10: erlaubtes $f(x)$

$f$ darf Sprünge und Lücken haben – allerdings nicht zu viele (Bsp.: Signalverarbeitung)

pathologisches $f$: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

**Intervallunterteilung (Zerlegung $Z$)**

$$\begin{aligned} h &= \frac{b-a}{n} \\ x_k &= a + k \cdot h \quad k = 0, \ldots, n \\ a &= x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \end{aligned}$$

Die Stützstellen sind dabei (aus Bequemlichkeit) äquidistant. Betrachtet man nun $f$ in den Teilintervallen $[x_{k-1}, x_k]$, so gilt aufgrund der Beschränktheit der Funktion: $m_k \leq f \leq M_k$ auf $[x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{aligned} m_k &= \inf f(x) \\ M_k &= \sup f(x) \end{aligned}$$

**Anmerkung** Ist $f$ stetig, gilt im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\begin{aligned} m_k &= \min f(x) \\ M_k &= \max f(x) \end{aligned}$$

◁

**Definition** (Untersumme von $f$ zur Zerlegung $Z$)

$$\mathcal{U}(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{einbeschriebenes Rechteck}$$

◀

**Definition** (Obersumme von $f$ zur Zerlegung $Z$)

$$\mathcal{O}(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{umbeschriebenes Rechteck}$$

◀

Es gilt: $\mathcal{U}(f,Z) \le \mathcal{O}(f,Z)$, denn

$$\mathcal{O}(f,Z) - \mathcal{U}(f,Z) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\ge 0}\underbrace{(x_n - x_{k-1})}_{>0} \ge 0$$

Verfeinerung der Zerlegung liefert die feinere Unterteilung $Z^\star$:

$$\mathcal{U}(f,Z) \le \mathcal{U}(f,Z^\star) \le \mathcal{O}(f,Z^\star) \le \mathcal{O}(f,Z)$$

Grenzprozess $n \to \infty$: Zerlegungsfolgen $(Z_s)_{s\in\mathbb{N}} \implies$

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \sup \mathcal{U}(f,Z_j) && \text{größte einbeschriebene Rechtecksfläche} \\ \mathcal{O} &= \inf \mathcal{O}(f,Z_j) && \text{kleinste umbeschriebene Rechtecksfläche} \end{aligned}$$

**Definition** (Integrierbarkeit) Sei $f[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so gilt

$$\begin{aligned} &\mathcal{U} = \sup \mathcal{U}(f,Z_j) \\ &\mathcal{O} = \inf \mathcal{O}(f,Z_j) \\ &\mathcal{U} = \mathcal{O} \implies f \text{ ist integrabel} \end{aligned}$$

Die Zahl $\mathcal{U} = \mathcal{O}$ heißt Integral von $f$ über $[a,b]$. ◀

**Anmerkung** $f \ge 0$: Integral $\widehat{=}$ Flächeninhalt ◁

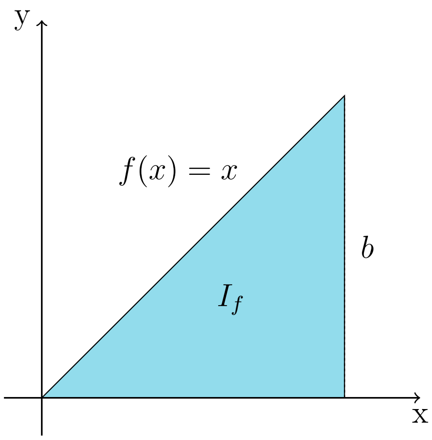
**Bezeichnung**

$$\begin{aligned} f &: \text{ Integrand} \\ x &: \text{ Integrationsvariable} \\ a,b &: \text{ untere/obere Integrationsgrenze} \\ \int_a^b \, \mathrm{d}x &: \text{ Integrationssymbol} \end{aligned}$$

**Beispiel** ($f(x) = x$ in $[0, b]$)

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b x\,\mathrm{d}x = I_f = b \cdot b \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot b^2$$

◁




**Riemann-Formalismus**

Testfall:

$$Z_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \dots, \frac{(n-1)\cdot b}{n}, b\right\}$$

$$h = \frac{b}{n} \quad x_k = h \cdot k \quad k = 0, \dots, n \qquad \text{(äquidistante Stützstellen)}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f, Z_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1)h \cdot h = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} (k-1) \\
&= \frac{b^2}{n^2} \frac{n}{2}(n-1) = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(f, Z_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k(\underbrace{x_k - x_{k-1}}_{h}) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot h \cdot h$$

$$= \left(\frac{b^2}{n^2}\right)\sum_{k=1}^{n} k = \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{n}{2}(n+1) = \frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\implies \underbrace{\frac{b^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\mathcal{U}(f,Z_n)} \leq I_f \leq \underbrace{\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\mathcal{O}(f,Z_n)}$$

Grenzfall $n \to \infty : I_f = \frac{1}{2}b^2 \implies f(x) = x$ ist ein Integral

**Anmerkung**

- gleiche Technik für $\int\limits_0^b x^p \,\mathrm{d}x = \dfrac{b^{p+1}}{p+1},\ p \geq 1$

  Achtung (Umkehrschluss): Differentiation $\dfrac{x^{p+1}}{p+1} \to \underbrace{x^p}_{=\text{Integrand}}$
- monotone Funktion $\rightsquigarrow$ integrabel
- stetige Funktion $\rightsquigarrow$ integrabel

$\triangleleft$

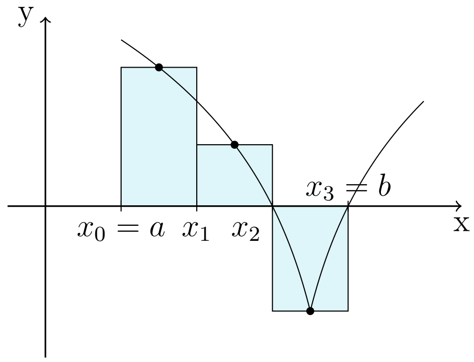
**Numerische Quadratur**

approximiere den Wert des Integrals
(Stammfunktion-Suche über symbolische Verarbeitung (Maple, Bronstein))

- brutal: $y(t) = \int\limits_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \implies$ Differentialgleichung $\quad \dot{y} = f(t)$
  $\rightsquigarrow$ ODE-Software Matlab/Mathematica
- besser: Quadraturformeln

(1) Rechteckregel $[a, b]$

$$x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n} \qquad h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{(äquidistante Stützstellen)}$$
$$t_k = x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{2} = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$

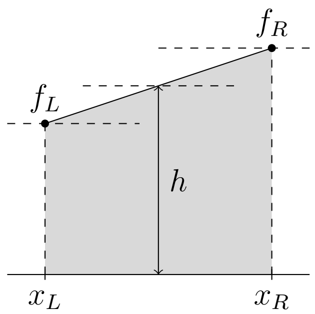



**Definition** (Rechteckregel)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \underbrace{\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(t_k)}_{\text{mittels Rechner auswerten}}$$

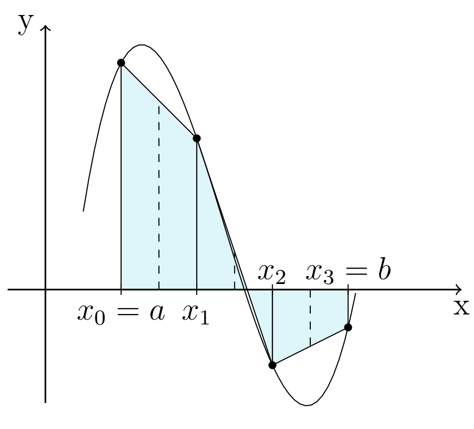
◀

(2) Trapezsummen




$h = \frac{1}{2}(f_L + f_R)$

$F_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2}(x_R - x_L)(f_L + f_R)$



**Definition** (Trapezregel)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \doteq \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$$
$$= \frac{b-a}{n} \left( \frac{1}{2} \cdot f(a) + \left( \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \right) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right)$$

◀

**Anmerkung** Die Trapezsumme ist für $2\pi$-periodische Funktionen (z. B. Signalverarbeitung, Fourierentwicklung) die „beste“ Quadraturformel. ◁

**Praxis**

Auswertungsreihe: $n = 8, 16, 32, 64, \ldots$
vergleiche $I_8, I_{16}, I_{32}, \ldots$ auf stehende führende Dezimale

**Beispiel**

$$\begin{aligned} I_8 &= \underline{1},0578 \\ I_{16} &= \underline{1,2}569 \\ I_{32} &= \underline{1,24}87 \\ I_{64} &= \underline{1,249}3 \end{aligned}$$

◁

Vorlesung 2010-02-02

**Satz 24** (Eigenschaften des Riemann-Integrals) *Seien $f$ und $g$ integrierbar über $[a, b]$.*

(1) *Additivität*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) *Verschiebung*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,\mathrm{d}x$$

(3) *Streckung*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)\,\mathrm{d}x$$

*(4) Orientierung*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

*(5)*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\lambda \in \mathbb{R}: \quad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$\rightsquigarrow \int$ *ist ein* lineares Funktional *mit* $\int : C^0[a,b] \to \mathbb{R}$

*(6)* $(f \cdot g)$ *(Produkt) ist integrierbar*

*(7)* $|f|$ *ist integrierbar*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

*(8)* $f(x) \geq 0$ *auf* $[a,b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

*(9)* $f(x) \geq g(x)$ *auf* $[a,b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

*(10)* $m \leq f(x) \leq M$ *auf* $[a,b] \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

### 2.5.2 Stammfunktion, Hauptsatz

Ziel: Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung
Hinweis: $\int_0^b x^n\,\mathrm{d}x = \frac{b^{n+1}}{n+1} \rightsquigarrow$ Ableitung $x^n$

**Definition** (Stammfunktion $F$) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar (damit beschränkt). Dann ist die Stammfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

◀

**Satz 25** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

*(1) $F$ ist stetig*

*(2) $f$ stetig in $x_0 \implies F$ differenzierbar in $x_0$ mit $F'(x_0) = f(x_0)$*

*(3)* $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

*Beweis.*

(1) $f$ integrierbar $\implies f$ beschränkt, d. h. es existiert ein $L \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq L$ in $a \leq x \leq b$

$$\begin{aligned}
|F(y) - F(x)| &= \left|\int\limits_a^y f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int\limits_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int\limits_x^y |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_x^y L\,\mathrm{d}t \\
&= L \cdot (y - x), \text{ mit } y \geq x\text{:}^{9} \\
&= L \underbrace{|y - x|}_{<\delta}
\end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$, dann folgt mittels Satz 8 (Seite 48) die Behauptung, da:

$$|y - x| < \delta \implies |F(y) - F(x)| < \varepsilon$$

Ergebnis: $F$ ist stetig

(2) zu zeigen: $F'(x) = f(x)$
Differentialquotient: $F'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$
bekannt: $f(x)$ stetig

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int\limits_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x - x_0}\int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

[9] falls $x > y$ ist, so müssen lediglich noch Betragsstriche ergänzt werden, Anm. d. Verfasser

$$= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \underbrace{f(t) - f(x_0)}_{<\varepsilon} \,\mathrm{d}t \right| \quad \text{mit } x > x_0$$

$$\leq \frac{1}{x - x_0} \cdot \varepsilon(x - x_0) = \varepsilon$$

□

**Anmerkung**

- Integrale können jetzt ohne Ober-/Untersummen beschrieben werden
- Integrale können als „Umkehrung“ der Differentiation aufgefasst werden $\rightsquigarrow$ Suche nach Stammfunktion

◁

### 2.5.3 Separable Differentialgleichungen

DGL vom Typ $y'(x) = f(x)g(y)$ – $x$, $y$ treten separiert auf

**Separationsansatz**

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \implies \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{AW } y(x_0) = y_0$$

**Anmerkung** Die Lösung $y$ wird eventuell nur implizit oder als $x(y)$ angegeben. ◁

**Beispiel** (Modell des Bevölkerungswachstums der Erde)

- $y(t)$ Anzahl der Menschen auf der Erde zur Zeit $t$
- jährlicher relativer Bevölkerungszuwachs werde durch $c(t, y)$ modelliert
- einfache DGL $\dot{y}(t) = c(t, y)y(t)$

Aufgabe: lege $c(t, y)$ fest

- 1969 („Club of Rome“): $c(t, y) = c = 0{,}02$ (konstant)
  aufrüttelnde Prognose, aber zu grob
- maximale Anzahl an Menschen, die unter würdigen Bedingungen leben können: $N \approx 18$ Mrd.
  $c(t, y) = \alpha(N - y)^k$ mit $k = 0, 1, 2$
- $y_0 = 3{,}55 \cdot 10^9$ Menschen

**Umskalierung** Vorlesung 2010-02-03

keine absoluten Zahlen, sondern Vielfache des Anfangswerts

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 \cdot \alpha(t) \\
N &= \beta \cdot y_0 \qquad (\text{mit } \beta \approx 5) \\
\implies \quad \dot{u} &= c_0 \left(\frac{\beta - u}{\beta - 1}\right)^k u \\
\text{denn} \quad \dot{y} &= cy = \alpha(N-y)^k \cdot y \\
&= c_0 \cdot \frac{(N-y)^k}{(N-y_0)^k} \cdot y \\
&= c_0 \cdot \frac{(\beta y_0 - y_0 u)^k}{(\beta y_0 - y_0)^k} \cdot y_0 u \\
y_0 \dot{u} &= c_0 \cdot \frac{(\beta - u)^k}{(\beta - 1)^k} \cdot y_0 u \\
\dot{u} &= c_0 \cdot \frac{(\beta - u)^k}{(\beta - 1)^k} \cdot u
\end{aligned}$$

**Diskussion der DGL**

$\dot{u}$ ist separabel

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= c_0 \left(\frac{\beta - u}{\beta - 1}\right)^k u \\
u(0) &= 1 \qquad (\text{Anfangswert von 1969}) \\
c_0 &= 0{,}02 \\
\beta &= 5
\end{aligned}$$

**1. Spiel:** $k = 0$

$$\dot{u} = 0{,}02 \cdot u \implies u(t) = e^{0{,}02 \cdot t}$$

zu „primitiv“

**Anmerkung** lineare Modelle sind für Prognosen untauglich ◁

**2. Spiel:** $k = 1$

$$\dot{u} = c_0 \cdot \frac{\beta - u}{\beta - 1} \cdot u$$

nicht linear ⇝ Kandidat für Prognose

$$
\begin{aligned}
(\beta - 1) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{(\beta - u)u} &= c_0 \mathrm{d}t \\
(\beta - 1) \int_1^u \underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{(\beta - s)s}}_{=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta - s} + \frac{1}{s}\right)} &= \int_0^t c_0 \mathrm{d}x \\
\frac{\beta - 1}{\beta} \left( \int_1^u \frac{\mathrm{d}s}{\beta - s} + \int_1^u \frac{\mathrm{d}s}{s} \right) &= c_0 \int_0^t \mathrm{d}x \\
\frac{\beta - 1}{\beta} \cdot \left( \ln(\beta - s)\Big|_1^u + \ln s\Big|_1^u \right) &= c_0 \left( x\Big|_0^t \right) \\
\frac{\beta - 1}{\beta} \cdot (\ln(\beta - n) - \ln(\beta - 1) + \ln u - \ln 1) &= c_0 t \\
\frac{\beta - 1}{\beta} \cdot \ln \left( \frac{u(\beta - u)}{\beta - 1} \right) &= c_0 t
\end{aligned}
$$

implizite Lösung der DGL

**3. Spiel:** $k = 2$ (Selbststudium)

◁

### 2.5.4 Integrationstechniken

*Ziel:* Zusammenstellung von Techniken um eine Stammfunktion zu berechnen
Hilfsmittel: Umformung von Differentiationsregeln

(1) Integranden der Form $\frac{f'}{f}$

$$
\begin{gathered}
f : [a, b] \quad \text{stetig differenzierbar, } f \neq 0 \\
\int \frac{f'}{f} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c
\end{gathered}
$$

**Beispiel**

$$
\begin{aligned}
\int \tan x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\
&= - \ln|\cos x| + c \\
&= \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + c \\
\text{wobei } (\cos x)' &= - \sin x
\end{aligned}
$$

◁

(2) partielle Integration (aus Produktregel)

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = f'g + fg' \\ \rightsquigarrow &\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g}\underbrace{\sin x}_{f'}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{g}\underbrace{(-\cos x)}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'}\underbrace{(-\cos x)}_{f}\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

◁

(3) Substitutionsregel

$$\begin{aligned} g &: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar} \\ f &: g(I) \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar} \end{aligned}$$

Stammfunktion: $F(y) = \int f(y)\,\mathrm{d}y$

$$\left[\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x))\right]$$

handlicher:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(u))g'(u)\,\mathrm{d}u$$

Merkregel:

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int f(g)\,\mathrm{d}g$$

**Beispiel** Streckung $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit neuer Variablen $t = kx$

$$\begin{aligned} x = a &\implies t = ka \\ x = b &\implies t = kb \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{ka}^{kb} f(t)\frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(t)\,\mathrm{d}t$$

◁

(4) Spezialfälle mit Integranden $\dfrac{1}{1 \pm x^2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ usw.
führen zu Lösungen mit Arcus-, Area-Funktionen

(5) rationale Nenner: Partialbruchzerlegung
in diesen Fällen: Formelsammlungen

### 2.5.5 Restglieder: Taylorformel

*Hilfaussage:* Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$f, g \text{ stetig auf } [a,b], g(x) \geq 0$$

$\implies$ es existiert mindestens eine Zwischenstelle $\xi$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

*Beweisidee:* $f$ stetig $\implies$ es existieren:

$$m, M : m \leq f \leq M$$

$$g \geq 0 : mg \leq fg \leq Mg$$

$$m\int g\,\mathrm{d}x \leq f\int g\,\mathrm{d}x \leq M\int g\,\mathrm{d}x$$

es existiert $c = f(\xi)$:

$$\int\limits_a^b fg\,\mathrm{d}x = c\int_a^b g\,\mathrm{d}x \quad \text{(Zwischenwertsatz)}$$

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad (n+1)\text{-fach stetig differenzierbar}$$
$$x_0 : \text{Entwicklungspunkt}$$

Behauptung:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_{n+1}(x)}$$

*Beweis.*

- $n = 0$:

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} 1 f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) + f(t)\Big|_{x_0}^{x} = f(x)$$

- $n - 1 \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^{n-1}}_{u'}\underbrace{f^{(n)}(t)}_{v}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left( \underbrace{-\frac{(x-t)^n}{n}}_{u}\underbrace{f^{(n)}(t)}_{v}\Bigg|_{x_0}^{x} - \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{-\frac{(x-t)^n}{n}}_{u}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v'}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Bigg|_{x_0}^{x} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_{n+1}} \\
&= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x) \\
f(x) &= T_{n-1}(x) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_{n+1}(x) \\
&= T_n(x) + R_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

□

**Anmerkung** Restglied nach Lagrange: MWS der Integralrechnung

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} - \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= f^{(n+1)}(\xi)(-1)\frac{(x-t)^n + 1}{(n+1)!}\Bigg|_{x_0}^{x} \\
&= f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

◁

# Literaturverzeichnis


[Bau56] Bauer, F. L.: *Direkte Faktorisierung von Polynomen.* Sitz-Ber. bayer. Akad. Wiss. 1956, Seiten 163–303, 1956.

[Bor08] Bornemann, F.: *Konkrete Analysis für Studierende der Informatik.* Springer, 2008, ISBN 978-3-540-70845-2.

[Knu75] Knuth, D. E.: *Son of seminumerical algorithms.* SIGSAM Bull., 9(4):10–11, 1975, ISSN 0163-5824.

# Bildnachweis

[1] Quelle: http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Bezier_curve.svg&oldid=25640402
Autor: MarianSigler
Lizenz: gemeinfrei