
Rapport mini-projet

Modélisation – Représentations et analyse des modèles

Sujet No.12
Modélisation en Finance

Réalisé par le groupe N :
Oualid YACOUBI
Louis FONTENIAUD
Thomas PHAN

17 janvier 2025

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte et objectif	1
1.2	État de l’art	1
1.3	Contribution	1
1.4	Structure du rapport	2
2	Modèle à état continu	3
3	Résultats de simulation et analyse du modèle à état continu	5
3.1	Résultats des simulations	5
3.2	Analyse du modèle à état continu	6
3.2.1	Point de vue mathématique (premier cas)	6
3.2.2	Point de vue économique (premier cas)	7
3.2.3	Point de vue mathématique (second cas)	7
3.2.4	Point de vue économique (second cas)	8
3.2.5	Point de vue mathématique (troisième cas)	9
3.2.6	Point de vue économique (troisième cas)	9
4	Modélisation d’un Réseau de Petri pour le Budget d’une Association	10
4.1	Places	10
4.2	Transitions	11
4.3	Réseau de Petri	12
5	Conclusion	13
5.1	Conclusion sur les modèles proposés	13
5.2	Perspectives	13
A	Illustration humoristique	14
A.1	Théorème de Lyapunov	14

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte et objectif

Les dynamiques financières modernes se caractérisent par des comportements chaotiques et des interactions complexes entre des variables clés comme les taux d'intérêt, les investissements et les stocks. Ces phénomènes, souvent amplifiés par la volatilité des marchés, échappent à l'analyse des modèles financiers linéaires traditionnels. Ces derniers, bien qu'efficaces pour des analyses simplifiées, ne suffisent pas à capturer la richesse des variations réelles observées dans les systèmes financiers.

Dans ce contexte, cette étude s'inscrit dans une démarche visant à mieux comprendre les mécanismes sous-jacents à ces dynamiques complexes.

1.2 État de l'art

Depuis la formulation du système de Lorenz en 1963, de nombreux travaux ont exploré son application à des domaines variés, y compris la finance. Le modèle de Lorenz a été adapté pour analyser les fluctuations des taux d'intérêt, des dynamiques d'investissement et des indices de prix [1].

Une analogie intéressante peut être établie entre la mécanique des fluides, domaine d'origine du système de Lorenz, et les dynamiques des marchés financiers. La finance de marché et la mécanique des fluides partagent en effet des fondements mathématiques similaires, en s'appuyant sur des équations différentielles pour modéliser des systèmes complexes. Les équations de Navier-Stokes, à l'origine du système dynamique de Lorenz étudié ici, modélisent le comportement des fluides en tenant compte de la vitesse, de la pression et des forces agissant sur eux. De manière analogue, l'équation de Black-Scholes en finance est utilisée pour estimer la valeur des options. Cette dernière s'appuie sur une description des fluctuations des prix des actifs financiers, comparable au mouvement brownien des particules dans un fluide [2].

Des études telles que "*Expectations, Price Fluctuations and Lorenz Attractor*" [1] ont été pionnières en liant l'attracteur de Lorenz aux cycles économiques. D'autres recherches [3] ont mis en évidence les régions paramétriques qui favorisent un comportement chaotique, offrant une perspective théorique sur l'instabilité financière. Par ailleurs, les méthodes modernes, comme les approches spectrales, facilitent la simulation numérique des systèmes chaotiques avec une grande précision [4].

Enfin, dans un contexte plus large, les méthodes spectrales comme celles basées sur les polynômes de Tchebychev ont été utilisées pour résoudre des équations différentielles dans des systèmes chaotiques, offrant une grande précision et une convergence rapide, voire exponentielle. Ces méthodes permettent d'analyser les systèmes avec un haut degré de sensibilité aux conditions initiales, réduisant les erreurs numériques et facilitant l'analyse de stabilité [5].

1.3 Contribution

Cette étude propose une exploration des dynamiques financières à travers deux approches complémentaires. La première contribution réside dans le développement d'un modèle dynamique à états continus, inspiré du système de Lorenz. Ce modèle, basé sur des équations différentielles non linéaires, permet d'analyser la stabilité des équilibres et d'identifier les paramètres favorisant des comportements oscillatoires ou chaotiques.

La seconde contribution repose sur une modélisation discrète sous la forme d'un réseau de Petri. Ce cadre met en lumière les processus opérationnels liés à la gestion des projets et des finances associatives. Il décrit les différentes étapes du cycle de vie des projets, depuis leur soumission jusqu'à leur financement et réalisation, en tenant compte des interactions entre les différents rôles au sein de l'association (trésorier, président, vice-président chargé des relations entreprises).

1.4 Structure du rapport

Le Chapitre 2 présente le *modèle mathématique inspiré de Lorenz*. Le Chapitre 3 porte sur l'*analyse des résultats de simulation obtenus*. Le Chapitre 4 porte sur la *modélisation d'un réseau de Petri pour le budget d'une association*. Enfin, les conclusions et perspectives sont abordées.

Chapitre 2

Modèle à état continu

Équations du modèle

Le modèle proposé est défini par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - \beta z,\end{aligned}\tag{2.1}$$

avec :

- x : taux d'intérêt net,
- y : niveau d'investissement,
- z : stocks physiques (inventaires de produits) ou réserves financières (fonds de réserve, trésorerie non allouée),
- $\sigma, \rho, \beta > 0$: paramètres ajustables représentant respectivement, le nombre de Prandtl, le rapport entre le nombre de Rayleigh et le nombre de Rayleigh critique, et la géométrie du système.

Justification du modèle

Ce modèle est conçu pour capturer les dynamiques non linéaires observées dans les systèmes financiers :

- L'équation $\dot{x} = \sigma(y - x)$ modélise l'ajustement du taux d'intérêt net (x) en fonction du niveau d'investissement (y), avec un facteur d'amortissement proportionnel σ . Cette équation traduit la réaction du taux d'intérêt à la variation des investissements réalisés.
- L'équation $\dot{y} = x(\rho - z) - y$ décrit la dynamique de l'investissement (y). Le terme $x(\rho - z)$ indique que l'investissement croît proportionnellement au taux d'intérêt net (x), mais est limité par les stocks disponibles (z), avec ρ modélisant un seuil critique d'augmentation. Cette dynamique reflète l'idée que des stocks insuffisants peuvent freiner les décisions d'investissement.
- L'équation $\dot{z} = xy - \beta z$ représente l'évolution des stocks physiques ou financiers (z). Ces stocks augmentent grâce aux interactions positives entre les taux d'intérêt (x) et les investissements (y), mais diminuent à cause d'un facteur d'amortissement β qui inclut des coûts, des pertes, ou des consommations liées.

Les termes non linéaires, tels que $x(\rho - z)$ et xy , introduisent des interactions complexes entre les variables économiques. Ces interactions mettent en évidence l'importance des stocks (z) en tant que ressource critique, capable d'influencer directement les investissements et les taux d'intérêt. Ce cadre peut générer des comportements oscillatoires ou chaotiques pour certaines valeurs des paramètres σ , ρ , et β , offrant ainsi une base pour l'analyse des dynamiques économiques et financières complexes.

Analyse des points d'équilibre

Les points d'équilibre sont obtenus en résolvant $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. Ils sont donnés par :

- $E_0 = (0, 0, 0)$: point trivial d'origine.
- $E_+ = \left(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1 \right)$ pour $\rho > 1$
- $E_- = \left(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1 \right)$ pour $\rho > 1$

Stabilité des points d'équilibre

L'analyse de stabilité est effectuée en calculant la matrice jacobienne :

$$J = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

En évaluant J aux points E_0 , E_+ et E_- , on cherche à obtenir des informations sur les valeurs propres afin de vérifier si le théorème de Lyapunov s'applique à l'aide du critère de Routh. Les polynômes caractéristiques que l'on trouve dans chacun des cas sont :

- Pour le point d'équilibre $(0, 0, 0)$:

$$P(X) = X^3 + (\sigma + \beta + 1)X^2 + (\beta \cdot (\sigma + 1) + \sigma \cdot (1 - \rho))X + \beta\sigma \cdot (1 - \rho)$$

Pour lequel tous les coefficients sont positifs si et seulement si $\rho < 1$.

- Pour les équilibres $\left(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1 \right)$ et $\left(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1 \right)$ définis pour $\rho > 1$:

$$P(X) = X^3 + (\sigma + \beta + 1)X^2 + \beta \cdot (\sigma + \rho)X + 2\beta\sigma \cdot (\rho - 1)$$

Pour lequel tous les coefficients sont positifs.

- En appliquant le critère de Routh, on trouve que :
 - E_0 est stable pour $\rho < 1$ et devient instable pour $\rho > 1$.
 - E_{\pm} sont stables dans une plage de valeurs paramétriques étroitement liée à β et σ et plus précisément, avec $\rho > 1$, si $\beta \cdot (\rho + \sigma) \cdot (\beta + \sigma + 1) - 2\beta\sigma \cdot (\rho - 1) > 0$

Le critère de stabilité de E_0 est cohérent avec la définition de ρ .

Cette analyse offre des indications précieuses sur la manière dont les paramètres influencent les transitions vers le chaos, et donc les dynamiques économiques observées.

Chapitre 3

Résultats de simulation et analyse du modèle à état continu

Le Chapitre 3 porte sur la *présentation des résultats de simulation* et l'*analyse des résultats de simulation obtenus en utilisant le modèle à état continu*. Ce chapitre permettra de valider en simulation le modèle à état continu, complétant les réponses aux questions I.1, I.2 et I.3 du sujet.

3.1 Résultats des simulations

Le système de Lorenz s'avère être un modèle emblématique pour étudier la dynamique chaotique et la sensibilité aux conditions initiales.

Dans notre simulation, réalisée avec Python, nous avons résolu les équations différentielles du système de Lorenz ($\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$) à l'aide de la méthode numérique des différences finies, en utilisant le schéma de Runge-Kutta. Nous avons d'abord considéré un unique jeu de conditions initiales $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ afin d'observer l'évolution de la solution dans le temps.

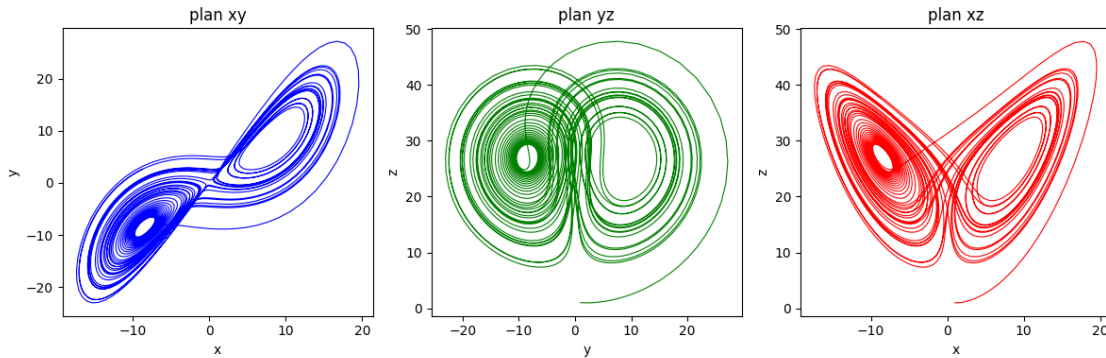


FIGURE 3.1 – Attracteur étrange du système de Lorenz pour les conditions initiales $(1, 1, 1)$

Les trajectoires observées en (3.1) forment des boucles qui ne sont ni parfaitement concentriques ni entièrement sur le même plan, mais qui finissent par dessiner des figures caractéristiques en forme d'aile de papillon. Cette tendance des trajectoires à converger autour d'un motif distinct est en effet une caractéristique des systèmes chaotiques.

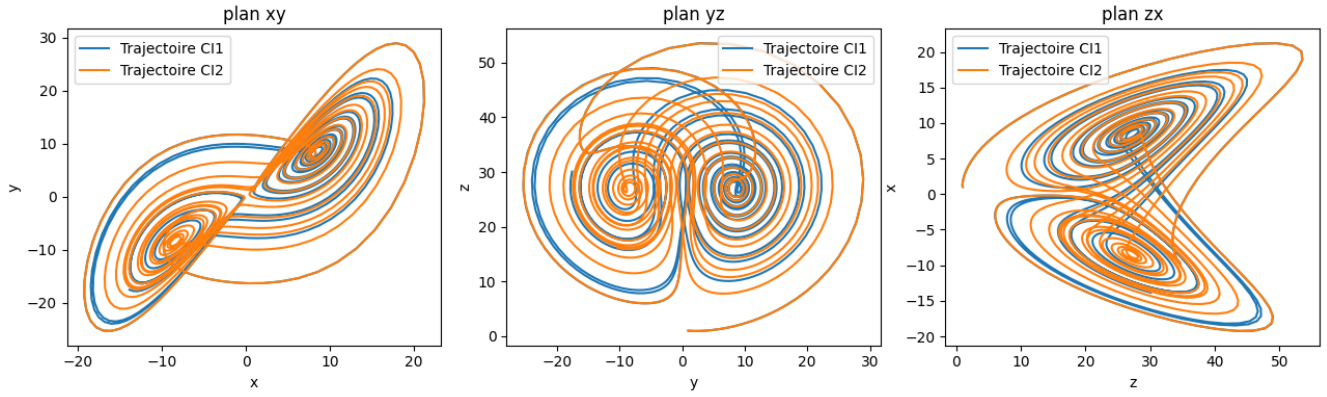


FIGURE 3.2 – Simulation avec $CI1 = (1,1,1)$ et $CI2 = (1.01,1,1)$

Afin d'illustrer la sensibilité extrême à de petites perturbations, nous avons effectué une seconde simulation avec un jeu de conditions initiales très proche du premier (x_1, y_1, z_1) = (1.01, 1, 1). Malgré cette différence minimale, on constate, en observant le graphe (3.2), que les trajectoires finissent par diverger et se distinguer nettement après un temps relativement court. Cette divergence exponentielle souligne le comportement chaotique intrinsèque du système de Lorenz et met en évidence l'importance des conditions initiales dans la prévision du comportement à long terme.

3.2 Analyse du modèle à état continu

3.2.1 Point de vue mathématique (premier cas)

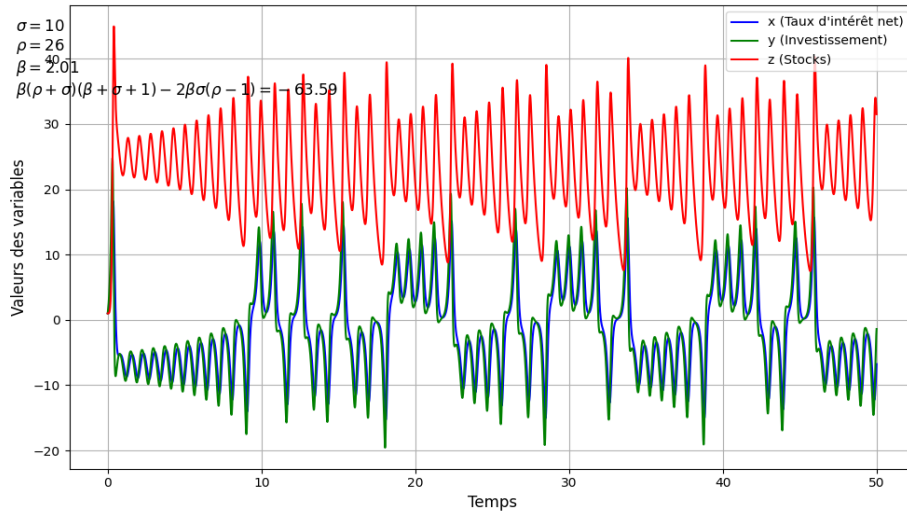


FIGURE 3.3 – Modèle oscillant

Pour obtenir le graphe (3.3), nous avons choisi les paramètres suivants : $\rho = 26 > 1$, $\sigma = 10$ et $\beta = 2.01$. Avec ces valeurs, nous obtenons $\beta(\rho + \sigma)(\beta + \sigma + 1) - 2\beta\sigma(\rho - 1) < 0$. Dans cette configuration d'après les calculs menés en (2) nous nous attendons à n'avoir aucune convergence de x , y et z vers quelconque points d'équilibres.

En observant (3.3), nous constatons que x , y et z présentent toutes les trois un caractère oscillant. Cette observation semble donc aller dans le sens de nos calculs.

Ce caractère oscillant s'explique en grande partie par la nature non linéaire de notre système d'équations différentielles. En effet, de par les termes croisés nous obtenons par exemple dans la Jacobienne des termes tels que

$\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = \rho - z$ ou encore $\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} = \rho - x$. Ces termes ont une influence directe sur les coefficients du polynôme caractéristique et donc les valeurs propres, en particulier sur le caractère réel ou imaginaire qui dans le cas échéant introduit donc des oscillations.

Par exemple, les termes croisés xy et $x(\rho - z)$ engendrent ces oscillations. Les interactions de nos variables x , y et z au sein de ces termes couplés tendent à amplifier ou réduire les variations de chacune de ces variables, créant ainsi des cycles.

En effet, l'augmentation de y engendre une augmentation de x ($\dot{x} = \sigma(y - x)$) qui à son tour viendra freiner la croissance de y par le terme $x(\rho - z)$.

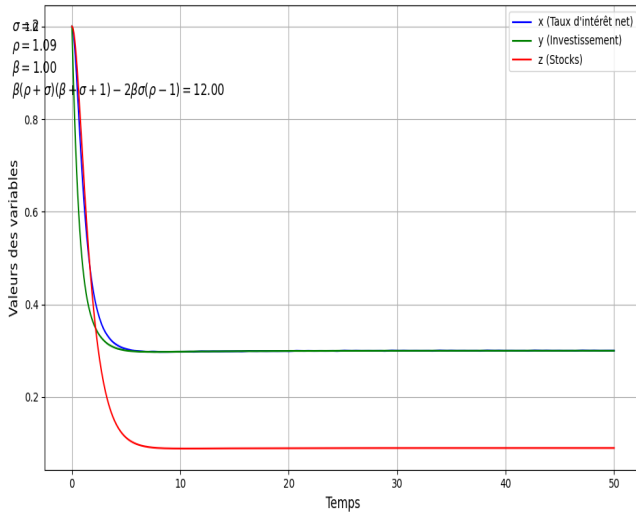
3.2.2 Point de vue économique (premier cas)

Dans notre modèle, x (le taux d'intérêt) est directement relié à y (investissement). Lorsque y augmente, alors x suit afin d'équilibrer l'offre et la demande. Tandis que si les investissements baissent, alors x diminue aussi. La quasi-superposition de x et y s'explique ainsi. Plus précisément, la superposition de x et y et donc le temps de réponse des taux face aux investissements est en partie influencé par σ qui ajuste la différence $y - x$.

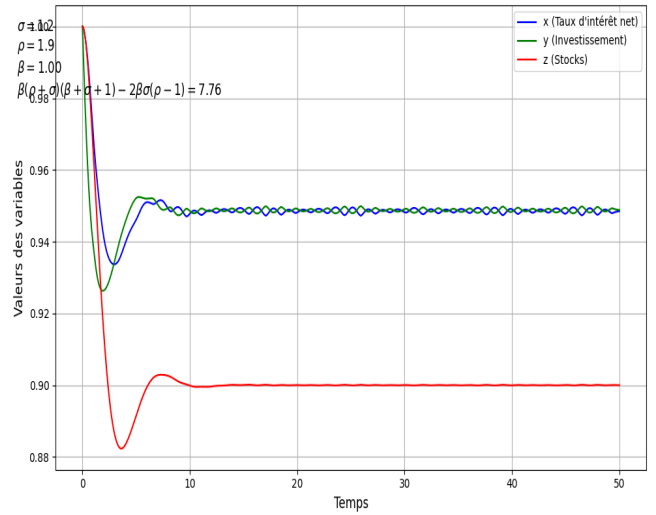
De plus, nous observons que lorsque le stock z tend à diminuer alors les taux d'intérêt x eux augmentent tout comme les investissements. Cela reflète une raréfaction ou bien une forte demande (d'où la diminution des stocks) d'un certain produit. Et donc pour compenser ou simplement répondre à cette pénurie qui approche les investissements augmentent et les taux aussi. Le terme $x(\rho - z)$ semble a priori être le terme à surveiller pour faire le bon investissement, la baisse de z engendre une augmentation de y , $\dot{y} = x(\rho - z) - y$.

Puis les stocks se remplissent à nouveau grâce aux investissements passés et le marché connaît petit à petit une chute de la consommation.

3.2.3 Point de vue mathématique (second cas)



(a) $\rho = 1.09$, $\sigma = 1.2$ et $\beta = 1.00$



(b) $\rho = 1.9$, $\sigma = 1.2$ et $\beta = 1.00$

FIGURE 3.4 – Cas où E_{\pm} est stable

Pour obtenir le graphe (3.4a), nous avons choisi les paramètres suivants : $\rho = 1.09$, $\sigma = 1.2$ et $\beta = 1.00$. Et pour le graphe (3.4b), nous avons choisi les paramètres suivants : $\rho = 1.9$, $\sigma = 1.2$ et $\beta = 1.00$.

Avec ces valeurs, nous obtenons $\beta(\rho + \sigma)(\beta + \sigma + 1) - 2\beta\sigma(\rho - 1) > 0$. Dans cette configuration d'après les calculs menés en (2) nous nous attendons à avoir E_{\pm} stable et donc convergence de x , y et z vers des points d'équilibres.

L'observation de ces deux graphiques (3.4a) et (3.4b), ainsi que du caractère convergent des trois courbes x , y et z semble comme précédemment aller dans le sens de nos calculs menés en (2).

Pour le graphique (3.4a)

Par ailleurs, nous nous attendons à ce que x , y et z convergent vers les trois valeurs suivantes : $(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$, ce qui nous indique que x et y convergent vers la même limite. Et après application numérique, nous obtenons les trois limites suivantes : $(0.3, 0.3, 0.09)$.

Les valeurs propres de la Jacobienne au point d'équilibre $(0.3, 0.3, 0.09)$ nous donnent 3 valeurs propres réelles et négatives $\approx (-2.20, -0.88, -0.11)$. De par le caractère réel et négatif de nos 3 valeurs propres, nous nous attendons donc à observer la convergence de x , y et z sans oscillations. Et c'est ce qui se passe.

Par observation, nous remarquons bel et bien la convergence de x , y et z vers ces trois limites. Les conditions initiales étant $(1, 1, 1)$, nous comprenons mieux cette décroissance des courbes qui convergent vers $(0.3, 0.3, 0.09)$ ($1 > 0.3$). Le système étant hors de son équilibre stable, il tend à revenir vers cet équilibre.

Pour le graphique (3.4b) :

Dans ce cas-là nous avons $\rho = 1.9$ qui est plus grand que dans le cas précédent. Ce changement modifie à la fois les valeurs propres de la Jacobienne au point d'équilibre $\approx (0.95, 0.95, 0.90)$, point vers lequel nous nous attendons à voir converger les courbes représentatives de x , y et z , mais aussi les interactions entre variables notamment par le terme $\dot{y} = x(\rho - z)$. Ce changement dans la Jacobienne influence notamment la nature réelle ou complexe des valeurs propres et donc la "façon" et la vitesse de convergence de nos courbes. En effet, soit nos courbes convergent directement, soit elles connaissent une phase oscillante avant. Plus précisément plus $|\Re(\lambda)|$ est grand plus la convergence est rapide ($\lambda \in Sp(J)$), mais ce n'est valable que si $\Re(\lambda) < 0$.

De plus en calculant les valeurs propres de la Jacobienne aux points d'équilibres $\approx (0.95, 0.95, 0.90)$ nous trouvons 3 valeurs propres $(-2.24, -0.47 + 0.86i, -0.47 - 0.86i)$ dont deux sont complexes conjugués. Ce qui explique en particulier la présence d'oscillations pour x et y . Les parties réelles étant toutes négatives nous nous attendons à une convergence.

3.2.4 Point de vue économique (second cas)

Pour le graphique (3.4a)

Nous avons vu que le système tend à revenir à son état d'équilibre. Ici, économiquement, cela pourrait représenter une réponse à un déséquilibre, déséquilibre qui peut être lié à une surproduction ou une soudaine baisse de la consommation. Afin de rééquilibrer l'offre et la demande le système réduit rapidement ses stocks d'où la soudaine décroissance de z . Pour y , les investissements s'alignent avec la chute de la consommation et des stocks les investisseurs réduisent leurs dépenses. Ce mouvement se fait sans à-coup (oscillation), ce qui peut témoigner d'une réponse efficace des investisseurs. Idem pour les taux d'intérêt x qui, à l'origine, étaient "élevés" et tendent vers leur équilibre, ce qui est cohérent avec le modèle d'une économie stable.

Pour le graphique (3.4b)

Dans ce cas, nous avons aussi convergence vers un état d'équilibre. Comme précédemment le système cherche à répondre à un déséquilibre. Pour cette même raison nous observons encore une décroissance des stocks z qui semble suivre la même tendance que les courbes x et y tout en présentant moins d'oscillations, ce qui montre que les stocks ne sont pas si sensibles que ça face aux variations des taux et investissements. Ce qui semble logique car un stock prend du temps à se constituer. Ici, de par la nature complexe des valeurs propres il y a des oscillations et donc la réponse du système est un peu moins efficace. Ce qui se traduit économiquement, par exemple pour x , par une certaine volatilité des taux et donc de la monnaie. En réponse, y essaie de s'ajuster à x en oscillant aussi, les investisseurs veulent s'aligner sur les taux mais leur réponse n'est pas directe d'où la non-superposition. La lente convergence de x et y reflète un système financier un peu plus complexe.

Par ailleurs, après plusieurs simulations, nous comprenons mieux le rôle des conditions initiales. Elles sont l'image de l'état de l'économie et représentent ce fameux déséquilibre à compenser. Nous pouvons donc les choisir en choisissant de bonnes conditions initiales, et ainsi simuler un cas de surproduction comme en 1929, par exemple, en choisissant des conditions initiales très grandes.

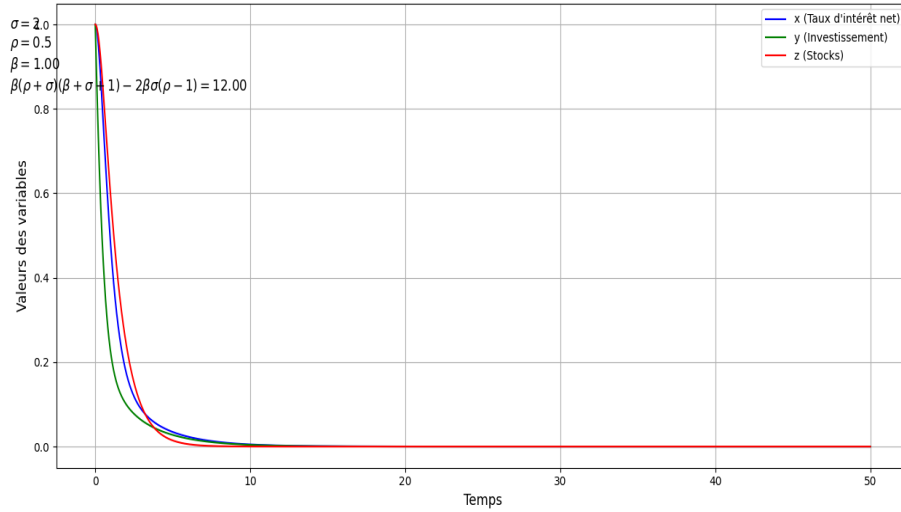


FIGURE 3.5 – Cas E_0 stable

3.2.5 Point de vue mathématique (troisième cas)

Pour obtenir le graphe (3.3), nous avons choisi les paramètres suivants : $\rho = 0.5 < 1$, $\sigma = 2.0$ et $\beta = 1.00$. Avec ces valeurs, nous obtenons $\beta(\rho + \sigma)(\beta + \sigma + 1) - 2\beta\sigma(\rho - 1) > 0$ (seule issue possible). Dans cette configuration d'après les calculs menés en (2) nous nous attendons à avoir E_0 stable et donc convergence de x , y et z vers 0.

Puis, en calculant les valeurs propres de la Jacobienne évaluée au point $(0, 0, 0)$, nous trouvons trois valeurs propres réelles et négatives $\approx (-2.62, -0.38, -1.00)$. Ces valeurs propres sont négatives et réelles, donc nous nous attendons à observer une convergence de x , y et z sans oscillations, ce que nous observons bien sur le graphique (3.5).

3.2.6 Point de vue économique (troisième cas)

Comme dans le cas précédent, le système tend à revenir à son état d'équilibre. La rapide convergence, par exemple de x indique une stabilisation rapide entre l'offre et la demande de crédit (x le taux d'intérêt). Concernant les entreprises, elles sont moins sensibles aux variations des taux d'intérêt $\dot{y} = \rho x - xz - y$ avec $\rho = 0.5 < 1$. Le paramètre ρ détermine la sensibilité de y à x , ici une faible valeur de ρ indique une diminution de l'influence et de la rétroaction de x sur y . Ce cas peut correspondre à une économie où les marchés financiers ont moins d'influence. On est donc dans une économie où les subventions publiques peuvent être plus importantes. Enfin, les stocks z s'ajustent rapidement à la demande, il y a une gestion efficace des stocks qui reflète un environnement économique stable.

L'absence d'oscillations et la rapide décroissance indiquent une économie stable où toutes les institutions financières, marchés, entreprises et politiques sont coordonnées. La convergence vers $(0, 0, 0)$ peut être vue comme un environnement stable où ni les emprunts ni les prêts ne sont favorisés. La chute de l'investissement traduit une économie où toutes les ressources ou opportunités ont déjà été exploitées et donc nous sommes dans une économie stagnante, voire en déclin. Les stocks qui tendent vers 0 indiquent une parfaite gestion des stocks et une réponse efficace entre offre et demande, ce qui réduit le gaspillage, par exemple. Cette économie, où il n'y a pas d'incitation à investir, produire ou emprunter, reflète donc une économie qui a déjà connu une croissance et se stabilise, ou bien une économie vieillissante.

Chapitre 4

Modélisation d'un Réseau de Petri pour le Budget d'une Association

Nous avons entrepris de modéliser le fonctionnement général des associations à CentraleSupélec en nous appuyant sur notre expérience au sein de la vie associative de l'école.

Par exemple, lors des campagnes et pré-campagnes du BDE, nous avons levé 15 500 euros tout en prospectant activement des entreprises pour obtenir des sponsors. L'organisation générale de la liste reflétait déjà une structure similaire à celle représentée par ce réseau de Petri, notamment pour la coordination des événements, des soirées et des barspés. Ce modèle d'organisation reste encore largement utilisé aujourd'hui. De manière comparable, l'association CS Finance adopte un fonctionnement similaire, centré sur des projets tels que des afterworks et des hackathons.

Plus précisément, à CS Finance, le pôle "Finance d'entreprise" joue un rôle clé en prospectant des entreprises pour obtenir des sponsors, comme *Eight Advisory*, qui soutient l'association cette année. Ce pôle collabore également avec des entreprises souhaitant organiser des événements tels que des afterworks ou hackathons pour rencontrer les étudiants. En échange, CS Finance reçoit des fonds, que ce soit pour prendre en charge l'organisation de l'événement ou pour renforcer les ressources propres de l'association.

En ce qui concerne l'association d'intelligence artificielle, la gestion financière repose sur une étroite collaboration entre plusieurs pôles. Le trésorier est responsable de la gestion des budgets, en veillant à financer les projets tout en maintenant une vue d'ensemble sur les flux de trésorerie. Ce rôle exige des interactions régulières avec le Vice-Président chargé des relations entreprises (VP Ent), qui prospecte des sponsors, et le Président (Prez), garant des orientations stratégiques. Par exemple, le pôle relations entreprises négocie des contrats avec des partenaires comme Alan ou Instadeep, tandis que le trésorier s'assure de leur bonne exécution et du suivi des subventions obtenues auprès du BDE ou d'autres organismes. Bien que l'association soit différente de CS Finance et du BDE, son fonctionnement reste très similaire.

Le cycle de vie d'un projet peut être décomposé en plusieurs étapes successives, représentées notamment par les **places** du réseau de Petri :

4.1 Places

- **Projet en attente** : Le projet est soumis et attend d'être pris en charge.
- **Prez Dispo** : Le président est disponible pour examiner le projet.
- **Examen dossier** : Le dossier du projet est étudié pour validation.
- **Annulation du Projet** : Le projet est rejeté par le président.
- **Dossier validé** : Le dossier est accepté pour être transmis au trésorier.
- **Trez Dispo** : Le trésorier est disponible pour traiter le projet.
- **Prise en main par le Trez** : Le trésorier prend en charge le projet.
- **Suffisamment Argent** : Les fonds nécessaires au projet sont disponibles.

- **Projet financé** : Le projet est entièrement financé.
- **Prise en main par le Prez** : Le président supervise la mise en œuvre du projet.
- **Réalisation du projet** : Le projet est mené à bien.
- **Pas suffisamment argent** : Les fonds disponibles sont insuffisants.
- **VP Ent Dispo** : Le vice-président chargé des relations entreprises est disponible.
- **Accord budget et choix entreprise** : Un accord est trouvé sur le budget et l'entreprise partenaire.
- **Prise en main par le VP Ent** : Le VP Ent initie les démarches avec les entreprises.
- **Entretien/Négociations** : Discussions avec les entreprises partenaires.
- **Projet avorté** : Le projet est abandonné faute de financements ou d'accords.
- **Accord avec entreprise** : L'entreprise partenaire accepte de soutenir le projet.
- **Attente transfert de fonds** : Les fonds promis par les partenaires sont en attente de réception.
- **Trésorerie renflouée** : Les fonds sont reçus, augmentant la trésorerie disponible.
- **Ré-examen du projet** : Un projet initialement rejeté est réexaminé après renflouement des fonds.

4.2 Transitions

Les transitions, quant à elles, modélisent les événements ou actions provoquant un changement d'état :

- **Transmission au Prez** : Le projet est soumis au président pour examen.
- **Dossier invalidé** : Le dossier est rejeté après examen.
- **OK** : Le dossier est validé après examen.
- **Transmission au Trez** : Le dossier validé est transmis au trésorier.
- **Vérification des caisses** : Le trésorier évalue les fonds disponibles.
- **Financement projet** : Le projet est approuvé pour financement.
- **Transmission au Prez (financement)** : Le projet financé est transmis au président pour exécution.
- **Mise en place du projet** : Les étapes pratiques pour la réalisation du projet sont initiées.
- **Contact VP Ent** : Le trésorier sollicite le VP Ent en cas de manque de fonds.
- **Libération Trez** : Le trésorier ne s'occupe plus du projet (temporairement).
- **Contact de l'entreprise** : Le VP Ent engage des discussions avec des entreprises partenaires.
- **Demande de subvention refusée** : L'entreprise refuse de financer le projet.
- **Demande de subvention acceptée** : L'entreprise accepte de financer le projet.
- **Libération Prez** : Le président ne s'occupe plus du projet (temporairement).
- **Réception de l'argent** : Les fonds fournis par l'entreprise sont reçus par l'association.
- **Libération VP Ent** : Le VP Ent ne s'occupe plus du projet.
- **Ré-examen du projet** : Le projet est réexaminé après renflouement de la trésorerie.
- **Transmission au Prez (réalisé)** : Le projet est transmis au président après finalisation.
- **Mise en place du projet (finalisée)** : Les étapes finales du projet sont exécutées.

4.3 Réseau de Petri

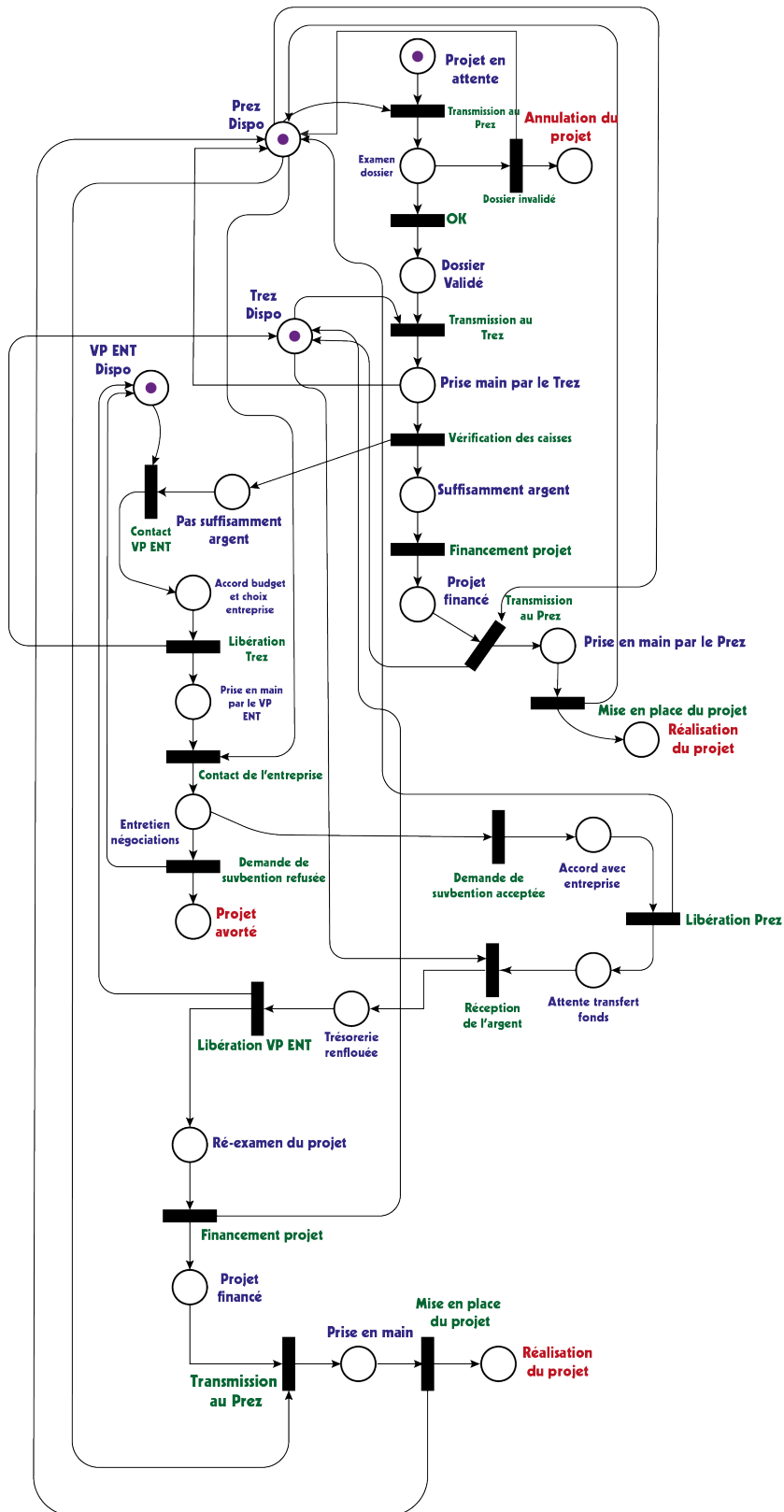


FIGURE 4.1 – Réseau de Petri

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Conclusion sur les modèles proposés

Ce projet a permis de modéliser les dynamiques financières à travers deux approches complémentaires : un modèle à état continu inspiré du système de Lorenz et un modèle à événements discrets sous forme de réseau de Petri. Les résultats obtenus montrent que les interactions non linéaires entre les variables économiques telles que les taux d'intérêt, les investissements, et les stocks peuvent générer des comportements oscillatoires ou convergents, selon les paramètres choisis. Ces observations sont en accord avec les prévisions théoriques et renforcent la pertinence de ce modèle pour analyser des phénomènes financiers complexes.

Le modèle à état continu a mis en évidence l'importance des points d'équilibre et des paramètres du système dans la stabilité des dynamiques économiques. Par ailleurs, la modélisation discrète a offert une vision pratique des processus décisionnels et opérationnels des associations, illustrant le cycle de vie des projets, depuis leur soumission jusqu'à leur financement et leur réalisation.

5.2 Perspectives

En terme de perspectives, plusieurs axes auraient pu être envisagés. En effet, dans le modèle continu, on aurait pu intégrer des délais dans les équations différentielles, par exemple sur la variable représentant les investissements ou les stocks, ce qui permettrait de mieux capturer la latence inhérente aux décisions économiques et aux flux financiers et rendrait le modèle plus général et plus réaliste.

En outre, l'introduction de perturbations stochastiques dans le système permettrait d'étudier l'effet de fluctuations aléatoires, comme des retards imprévus dans les subventions, des changements dans les priorités des partenaires ou des imprévus financiers liés aux projets. Une telle extension offrirait une analyse plus robuste de la stabilité financière des associations et permettrait de simuler des scénarios plus complexes.

Annexe A

Illustration humoristique

A.1 Théorème de Lyapunov



FIGURE A.1 – Stabilité et ivresse

Le dessin A.1 illustre de manière humoristique le lien entre la stabilité des systèmes dynamiques et le théorème de Lyapunov. Dans ce théorème, la stabilité d'un système dépend de la partie réelle des valeurs propres de la matrice jacobienne associée au système linéarisé autour d'un point d'équilibre. Si toutes les parties réelles des valeurs propres sont strictement négatives, le système est localement asymptotiquement stable; sinon, des instabilités peuvent apparaître. Dans le dessin, le personnage "instable" symbolise un système dont les parties réelles des

valeurs propres sont positives, entraînant un comportement oscillatoire ou divergent (ce qui est caricaturé par sa perte d'équilibre due à l'alcool). Cette métaphore illustre la nécessité de vérifier la partie réelle des valeurs propres pour évaluer correctement la stabilité d'un système.

Bibliographie

- [1] "Expectations, Price Fluctuations and Lorenz Attractor", MPRA Paper. Disponible sur : https://mpra.ub.uni-muenchen.de/89105/1/MPRA_paper_89105.pdf
- [2] "Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique" de Jean-François Le Gall.
- [3] "Understanding Lorenz Attractor for Financial Decision Making", Alphanome.ai. Disponible sur : <https://www.alphanome.ai/post/understanding-lorenz-state-space-for-investment-decision-making>
- [4] "Adaptive Fixed-Time Synchronization of Lorenz Systems with Application in Chaotic Finance Systems", ResearchGate. Disponible sur : https://www.researchgate.net/publication/359429770_Adaptive_fixed-time_synchronization_of_Lorenz_systems_with_application_in_chaotic_finance_systems
- [5] "A robust spectral integral method for solving chaotic finance systems", Claude Rodrigue Bambe Moutsinga, Edson Pindza, Eben Mare. *AEJ : Applied Economics*, 2020. Disponible sur : <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.01.016>