



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Учебно-методический комплект
по дисциплине
«Цифровая обработка сигналов»

Конспект лекции
«Вейвлет-преобразование»

В.В. Леонидов

1 Введение

Ранее для анализа нестационарных сигналов мы рассматривали такой инструмент спектрального анализа, как частотно-временное преобразование Фурье. Мы брали окно фиксированной ширины, разбивали исследуемый сигнал на участки, равные ширине данного окна, брали ДПФ от каждого такого участка, а затем строили график в трёхмерной системе координат, показывающий, какие частотные составляющие в какой момент времени присутствуют в исследуемом сигнале. В качестве недостатка такого преобразования мы отметили неопределённость: чем уже окно, тем лучше разрешение по времени и хуже по частоте; чем шире окно – тем лучше разрешение по частоте и хуже по времени. В случае, если в сигнале частоты по времени распределены неравномерно, этот метод не очень подходит, в таких случаях используют **Вейвлет-преобразование (Wavelet transform)**, которое позволяет иметь хорошее разрешение по времени на высоких частотах, а на низких – по частоте.

Давайте в очередной раз вспомним, что из себя представляет преобразование Фурье в тригонометрической форме записи:

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\cos \frac{2\pi nm}{N} - j \sin \frac{2\pi nm}{N} \right) \quad (1)$$

Можно сказать, что это корреляция исследуемого сигнала $x[n]$ с набором синусоид и косинусоид с частотами $m \cdot f_s/N$, где m – индекс частоты, f_s – частота дискретизации, N – количество отсчётов.

Идея вейвлет-преобразования схожа, только вместо набора синусоид и косинусоид будут использоваться другие функции, которые называются **вейвлетами**.

2 Вейвлеты

В переводе с английского вейвлет (wavelet) – это «маленькая волна», а по факту – это математическая функция (обозначим её $\Psi(t)$), которая должна удовлетворять следующим условиям:

- Среднее значение функции должно быть равно нулю (площадь под графиком, находящимся ниже оси x должна быть равна площади под графиком, находящимся над осью x):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0 \quad (2)$$

- Функция должна обладать конечной энергией (иными словами, она должна быть локализована на временной оси):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt < \infty \quad (3)$$

Рассмотрим несколько таких функций. Возьмём косинусоидальный сигнал, который умножим на Гауссову функцию, а затем построим график полученного сигнала и его ДПФ:

Листинг 1 – Построение вейвлета Морле

```
1 clear, clc, close all
```

```
2
3 fs = 50;
4 T = 5;
5 ts = -T:1/fs:T-1/fs;
6
7 c = cos(2*pi*ts); %косинусоида
8 g = exp(-ts.^2/2); %Гауссова функция
9 w = c.*g; %произведение Гаусса на синусоиду
10
11 subplot(4,1,1)
12 plot(ts, c), grid on
13 title('Косинусоидальный сигнал')
14 xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
15
16 subplot(4,1,2)
17 plot(ts, g), grid on
18 title('Гауссова функция')
19 xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
20
21 subplot(4,1,3)
22 plot(ts, w), grid on
23 title('Вейвлет Морле')
24 xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
25
26 %ДПФ вейвлета
27 W = abs(fft(w));
28 N = length(w);
29 f = 0:fs/N:fs-fs/N;
30
31 subplot(4,1,4)
32 plot(f(1:N/2),W(1:N/2)), grid on
33 title('ДПФ вейвлета Морле')
34 xlabel('Частота'), ylabel('Амплитуда')
```

Результат показан на рисунке 1. Полученная функция называется **вейвлетом Морле**. И она действительно удовлетворяет сформулированным выше условиям. Если посмотреть на график ДПФ, увидим что-то, напоминающее узкополосный фильтр, который позволяет выделить из анализируемого сигнала заданную частоту.

Если взять вторую производную от Гауссовой функции g , получим ещё один вейвлет, который из-за своей

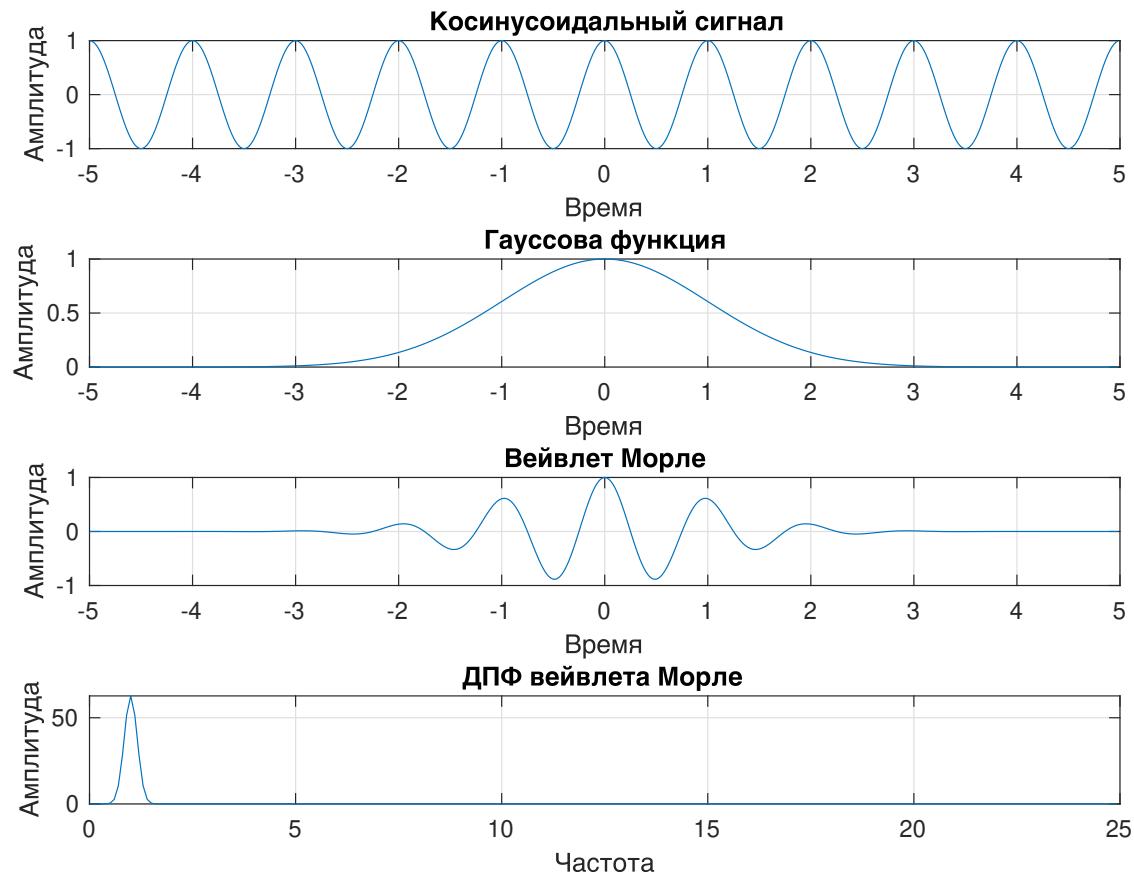


Рис. 1 – Получение вейвлета Морле

причудливой формы называется «Мексиканская шляпа»:

Листинг 2 – Построение вейвлета "Мексиканская шляпа"

```

35 clear, clc, close all
36
37 fs = 50;
38 T = 5;
39 ts = -T:1/fs:T-1/fs;
40
41 g = exp(-ts.^2/2);           % Гауссова функция
42 dg = -diff(g,2);            % вторая производная от Гауссовой функции
43
44 subplot(2,1,1)
45 plot(ts(1:length(ts)-2), dg), grid on
46 title('Вейвлет Мексиканская "шляпа"')

```

```

47 xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
48
49 %ДПФ вейвлета
50 W = abs(fft(dg));
51 N = length(dg);
52 f = 0:fs/N:fs-fs/N;
53
54 subplot(2,1,2)
55 plot(f(1:N/2),W(1:N/2)), grid on
56 title('ДПФ вейвлета Мексиканская "шляпа"')
57 xlabel('Частота'), ylabel('Амплитуда')

```

График вейвлета «Мексиканская шляпа» показан на рисунке 2. Действительно, похоже на шляпу. Спектр

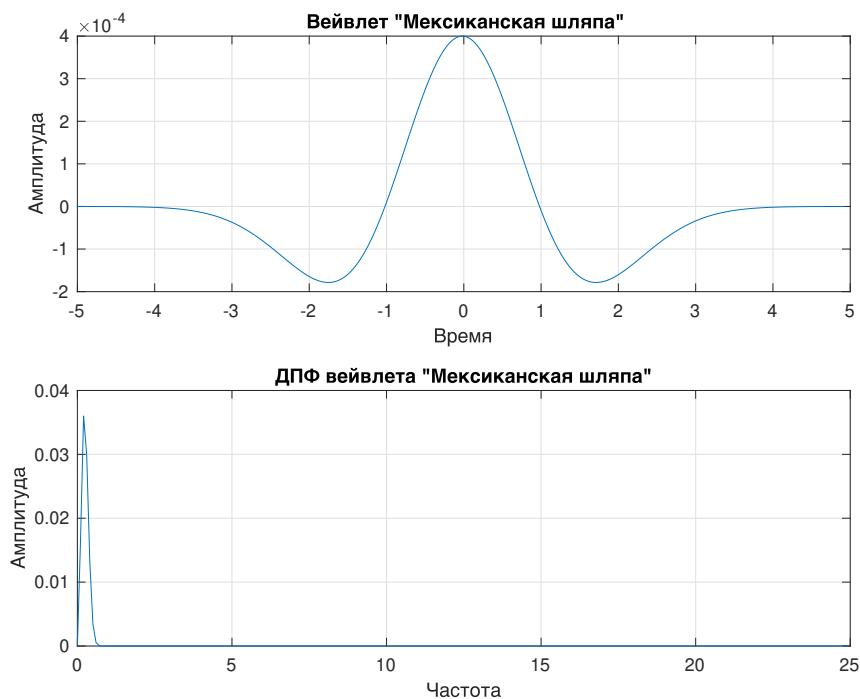


Рис. 2 – Вейвлет «Мексиканская шляпа»

данного вейвлета также похож на узкополосный фильтр, но имеет более узкую полосу пропускания, чем у вейвлета Морле.

И ещё один вейвлет, который мы рассмотрим – это дискретный **вейвлет Хаара**. Он представляется

выражением:

$$\Psi[x] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x < 1/2, \\ -1, & \text{при } 1/2 \leq x < 1, \\ 0, & \text{при } x \notin [0, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

Проиллюстрируем выражение (4) с помощью Matlab, а заодно построим ДПФ вейвлета Хаара:

Листинг 3 – Построение вейвлета Хаара

```

1 clear, clc, close all
2
3 fs = 100;
4 T = 1.5;
5 ts = -T:1/fs:T-1/fs;
6 N = length(ts);
7
8 x = zeros(1,N);
9 x((ts >= 0) & (ts < 0.5)) = 1;
10 x((ts >= 0.5) & (ts < 1)) = -1;
11
12 plot(ts, x, 'LineWidth',2), grid on
13 title('Дискретный вейвлет Хаара')
14 xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
```

Полученный результат показан на рисунке 3. Наверняка вы обратили внимание, что спектр данного вейвлета имеет уже знакомую нам форму функции $\sin(x)/x$, это связано с его прямоугольной формой.

Существует большое множество вейвлетов, мы рассмотрели самые базовые из них. Теперь давайте разбираться, что с ними делать.

3 Вейвлет-преобразование

Из каждой рассмотренной выше функции (назовём их материнскими вейвлетами) можно составить целые семейства вейвлетов. Каждый материнский вейвлет можно, во-первых, масштабировать (растянуть или сжать), а во-вторых, сдвинуть влево или вправо вдоль временной оси. Таким образом, вейвлет можно записать в виде следующей функции:

$$\Psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \quad (5)$$

где a – масштаб, τ – временной сдвиг. Теперь, по аналогии с ДПФ, запишем выражение для вейвлет-преобразования:

$$W(a, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi_{a,\tau}^*(t) dt \quad (6)$$

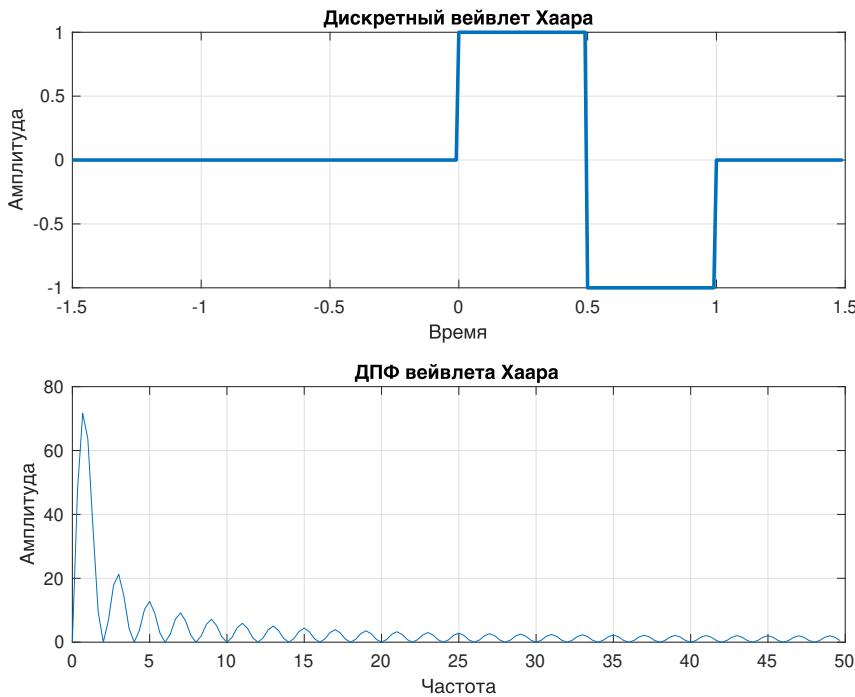


Рис. 3 – Вейвлет Хаара

где $x(t)$ – анализируемый сигнал, $\Psi_{a,\tau}^*$ – комплексно-сопряженный вейвлет.

Получается, что в процессе вейвлет-преобразования мы находим корреляцию исходного сигнала с набором вейвлетов, каждый из которых имеет различный масштаб и сдвиг относительно начала исследуемого сигнала. В случае, если сигнал на каком-либо участке похож на заданный вейвлет с заданным масштабом, мы увидим всплеск функции $W(a, \tau)$.

Чтобы понять разницу между частотно-временным ДПФ и вейвлет-преобразованием, нужно взглянуть на рисунок 4. На нём показано разбиение частотно-временной плоскости на анализируемые участки, имеющие одинаковую площадь. В случае с ДПФ, все участки одинаковы по форме, что приводит к вышеупомянутой неопределённости. В случае с вейвлет-преобразованием, на низких частотах анализируются длинные отрезки времени (получаем хорошее разрешение по частоте), а на высоких частотах анализируются короткие отрезки времени (в результате чего получаем хорошее разрешение по времени).

Не нужно лишних слов, перейдём к примеру. Как мы делали на лекции по частотно-временному преобразованию Фурье, создадим сигнал, состоящий из трёх друг за другом идущих синусоид с частотами 10 Гц, 20 Гц и 30 Гц, построим график ДПФ данного сигнала, а затем воспользуемся функцией `cwt` Matlab, чтобы произвести вейвлет-преобразование. В качестве вейвлета выберем вейвлет Морле.

Листинг 4 – Вейвлет-преобразование для нестационарного сигнала

```

1 clear, clc, close all
2
3 fs = 100;

```

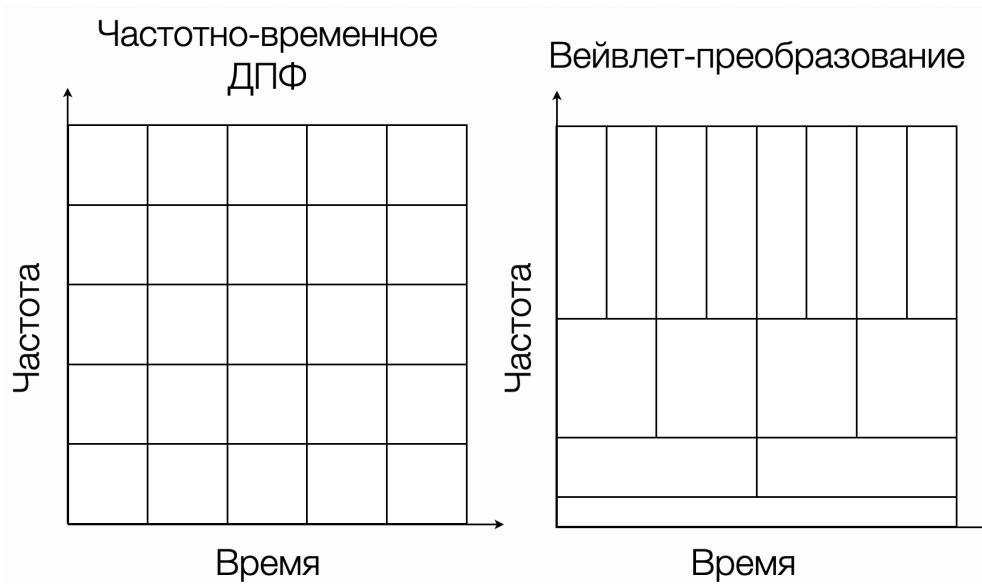


Рис. 4 – Сравнение частотно-временного преобразования Фурье и Вейвлет-преобразования

```

4
5 f1 = 10;
6 f2 = 20;
7 f3 = 30;
8
9 % Задаём сигнал с тремя подряд идущими частотами
10 t1= 0 : 1/fs : 1-1/fs;
11 lt1 = length(t1);
12 x(1 : lt1)=sin(2*pi*10*t1);
13
14 t2= 1 : 1/fs : 2-1/fs;
15 lt2 = length(t2);
16 x(lt1 + 1 : lt1 + lt2) = sin(2*pi*20*t2);
17
18 t3= 2 : 1/fs : 3-1/fs;
19 lt3 = length(t3);
20 x(lt1 + lt2 + 1 : lt1 + lt2 + lt3) = sin(2*pi*30*t3);
21
22 t = [t1 t2 t3];
23 N = length(t);
24
25 subplot(2,1,1)
26 plot(t,x), grid on, title('Сигнал с тремя подряд идущими частотами')

```

```

27 xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
28
29 X = 2*abs(fft(x))/N;
30 f = 0: fs/N : fs-fs/N;
31
32 subplot(2,1,2)
33 stem(f,X), grid on, title('Спектр данного сигнала')
34 xlabel('Частота'), ylabel('Амплитуда')
35
36 figure
37 cwt(x, 'amor', fs)

```

Запустим скрипт и посмотрим на результаты. Нестационарный сигнал x и его ДПФ показаны на рисунке 5. Вейвлет-преобразование от сигнала x показано на рисунке 6. Серым цветом на графике показана зона недо-

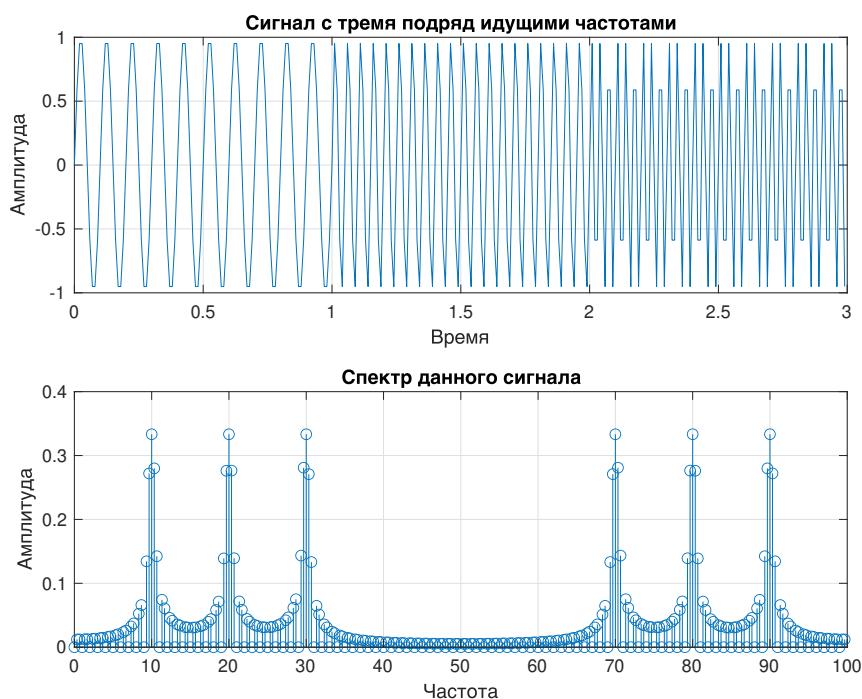
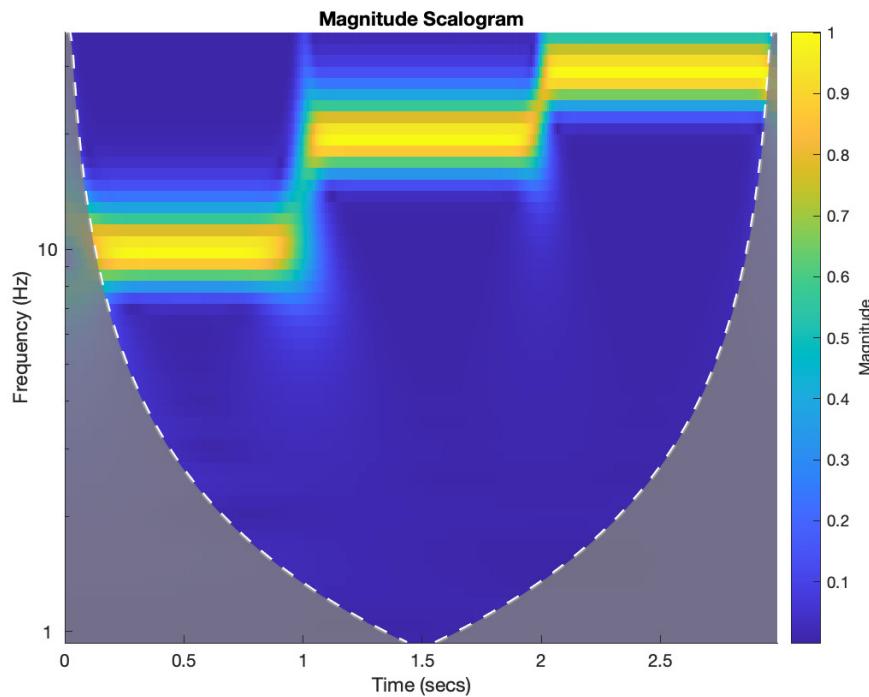


Рис. 5 – Сигнал с подряд идущими частотами 10 Гц, 20 Гц и 30 Гц, и его ДПФ

стоверности, которая связана с краевым эффектом вейвлет-преобразования. На графике отчётливо видны три частотные составляющие с частотами, которые были заданы в скрипте (можете проверить с помощью курсоров – следует учесть, что шкала частоты нелинейная).

В Matlab имеется возможность управлять набором фильтров (вейвлетов), которые будут использоваться функцией `cwt`. Например, мы знаем, что наш сигнал находится в диапазоне от 10 до 30 Гц и хотим проанализировать его с набором вейвлетов, соответствующих этому диапазону частот. Для этого можно дополнить

Рис. 6 – Вейвлет-преобразование от сигнала x

предыдущий листинг следующим образом:

Листинг 5 – Вейвлет-преобразование для нестационарного сигнала

```

38 % формируем набор фильтров
39 fb = cwtfilterbank('SignalLength', numel(x), 'SamplingFrequency', fs, ...
40   'FrequencyLimits', [10 30]);
41 figure
42 freqz(fb)
43
44 % применяем сформированный набор фильтров
45 figure
46 cwt(x, 'FilterBank', fb)

```

В результате получим набор АЧХ сформированных фильтров (рисунок 7) и вейвлет-преобразование с применением этих фильтров (рисунок 8).

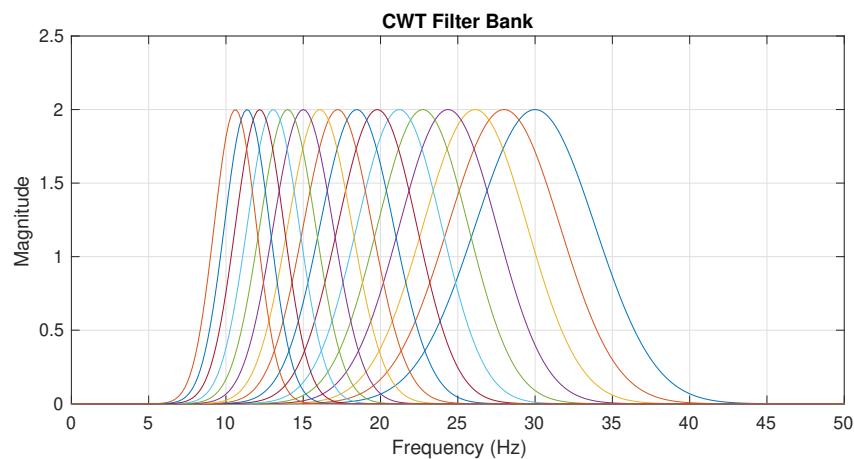


Рис. 7 – АЧХ набора фильтров для вейвлет-преобразования: вейвлеты Морле с частотой от 10 до 30 Гц

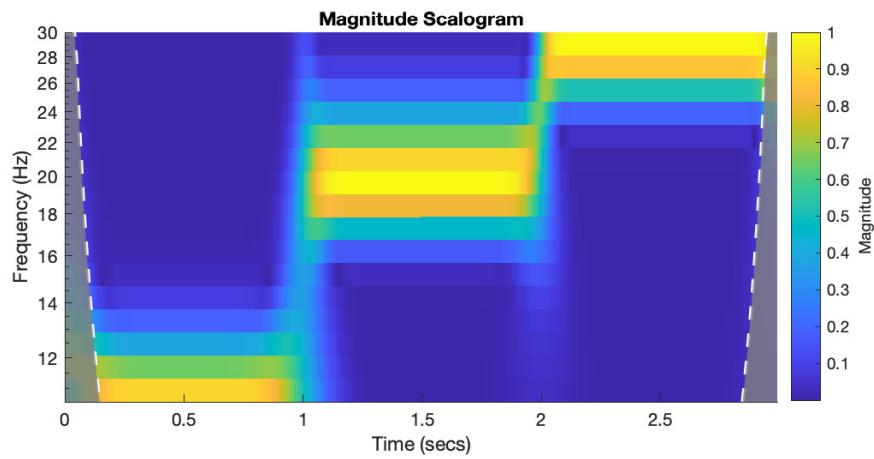


Рис. 8 – Вейвлет-преобразование с использованием набора фильтров

С помощью вейвлет-анализа также можно определить разрывы функции. Давайте создадим синусоидальный сигнал частотой 5 Гц и частотой дискретизации 100 Гц и попробуем убрать из него всего один отсчёт.

Листинг 6 – Определение разрывов функции

```

1 clear, clc, close all
2
3 fs = 100;
4 ts = 0: 1/fs : 3-1/fs;
5
6 x = sin(2*pi*5*ts);
7
8 % убираем из сигнала отсчёт с индексом 100
9 x(100) = [];
10
```

```

11 subplot(2,1,1)
12 plot(ts(1:length(ts)-1),x), grid on, title('Синусоида с разрывом')
13 xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
14
15 % чтобы построить результаты функции cwt внутри subplot,
16 % приходится немножко потанцевать с бубном
17 subplot(2,1,2)
18 [cfs,frq] = cwt(x,'amor',fs);
19 tms = (0:numel(x)-1)/fs;
20 surface(tms,frq,abs(cfs))
21 axis tight
22 shading flat
23 title('Вейвлетпреобразование')
24 xlabel('Время'), ylabel('Частота')

```

Давайте посмотрим на результат (рисунок 9). И что мы видим? Мы убрали всего один отсчёт из синусоиды

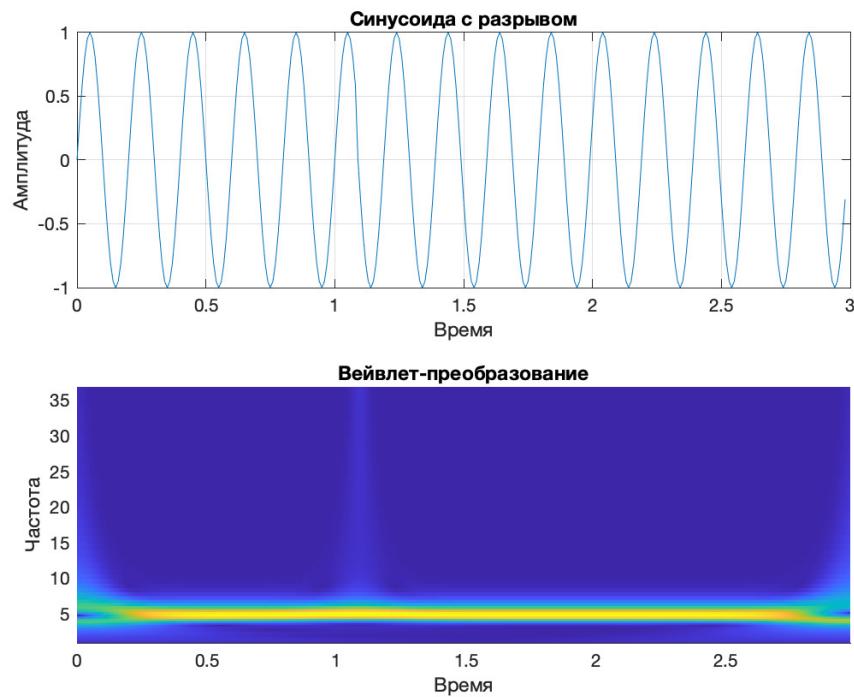


Рис. 9 – Поиск разрыва функции с помощью вейвлет-преобразования

дального сигнала, и это никак не заметно на графике во временной области. Я думаю, вы понимаете, что преобразование Фурье в этом случае тоже ничего не покажет (можете проверить, построив ДПФ от сигнала x). Зато на графике вейвлет-преобразования в районе отсчёта с индексом 100 (момент времени 1 с) явно виден всплеск.

Мы рассмотрели самые базовые понятия о вейвлет-преобразовании. На самом деле, его область применения очень широка: спектральный анализ, анализ данных, сжатие данных, удаление шумов, обработка изображений и многое другое, но об этом в другой раз.

4 Задания к семинару

1. Построить семейство (минимум 5 штук на графике) вейвлетов Морле, «Мексиканская шляпа», Хаара, Добеши.
2. Провести спектральный анализ нестационарного сигнала, в составе которого имеется минимум 5 частотных составляющих, часть из которых присутствуют одновременно.
3. Изучить пакет `waveletAnalyzer` Matlab и провести сего помощью анализ сигнала из задания 2 (использовать 2 любых вейвлета).
4. Изучить функцию `wdenoise` Matlab и очистить произвольный сигнал от шума с помощью вейвлет-преобразования.