

Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа - это интегральное преобразование, связывающее функцию $F(s)$ комплексного переменного (изображение) с функцией $f(t)$ вещественного переменного (оригинал). Используется для решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также для анализа динамических систем. Нас сейчас интересует последнее.

Прямое преобразование Лапласа для вещественного $f(t)$ выглядит так:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1)$$

где:

- $f(t)$ - оригинал;
- $F(s)$ - изображение функции $f(t)$;
- $s = \sigma + j\omega$;
- σ - некое число;
- ω - комплексная частота, рад./с.

Т.к. e^{-st} не имеет размерности, s должен иметь размерность *1/время*, или размерность *частоты*. Поэтому переменную Лапласа s называют **комплексной частотой**. А ещё e^{-st} представляет собой общую форму решения линейных дифуров.

По сути, преобразование Лапласа можно рассматривать как непрерывную функцию, значение которой при некотором s представляет собой **корреляцию** функции $f(t)$ и затухающей синусоиды e^{-st} , частота которой равна ω , а коэффициент затухания σ . Давайте запишем e^{-st} следующим образом:

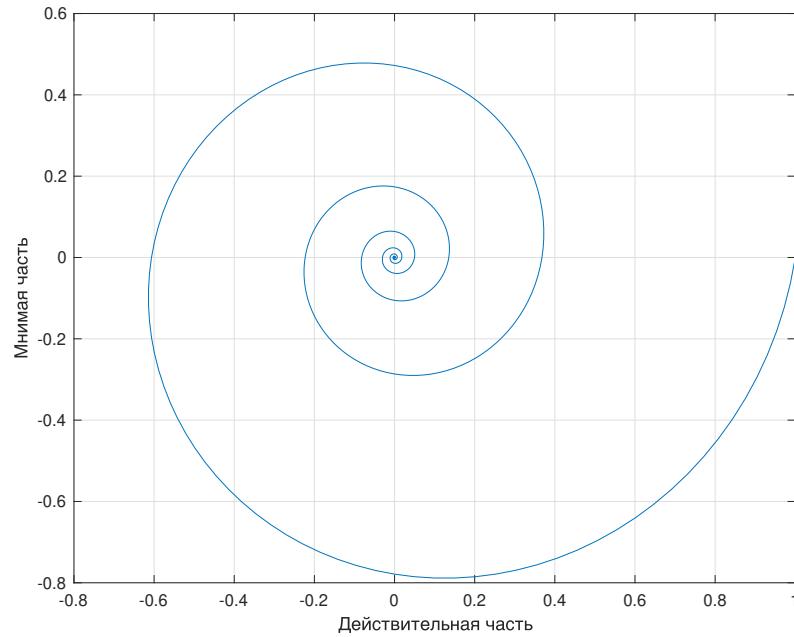
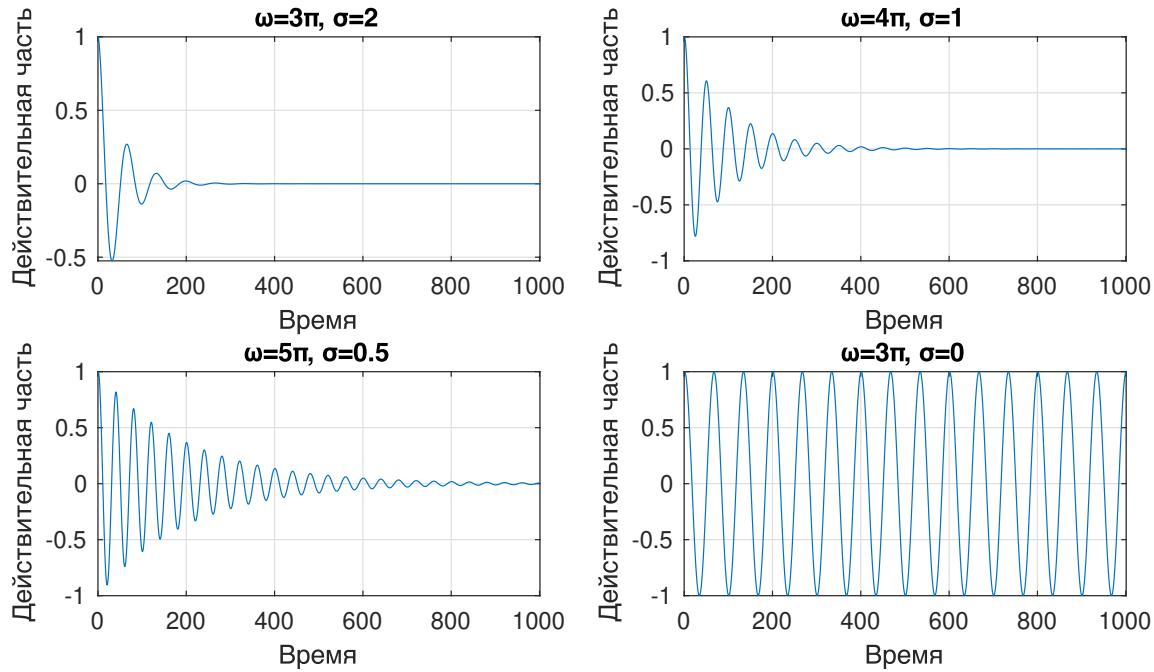
$$e^{-st} = e^{-\sigma t - j\omega t} = \frac{e^{-j\omega t}}{e^{\sigma t}} \quad (2)$$

$e^{-j\omega t}$ - вектор, модуль которого равен единице, вращающийся вокруг начала координат в комплексной плоскости с частотой ω . Ещё его называют **фазором**. $e^{\sigma t}$ - комплексное число, равное единице при $t = 0$, значение которого увеличивается с увеличением t . Таким образом, e^{-st} на комплексной плоскости представляет собой спираль (см. рисунок 1).

На рисунке 2 показана действительная часть $e^{-j\omega t}$ при разных значениях ω , и σ . Получается, что в процессе расчёта $F(s)$ мы делаем корреляцию нашего сигнала с сигналом, имеющим различную сходимость и частоту колебаний. Отсюда можно сделать вывод о поведении анализируемой нами системы. Одной из основных характеристик системы является **устойчивость**. Простыми словами: система является устойчивой, если при ограниченном входном сигнале, на выходе также получается ограниченный сигнал, который после устранения входного воздействия самостоятельно возвращается к некоторому установившемуся значению.

Первое, что нам нужно найти при анализе системы - её **передаточная характеристика**. Это отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3)$$

Рис. 1 – Функция e^{-st} при $\omega = 2\pi$, $\sigma = 1$ Рис. 2 – Действительная часть e^{-st} при разных значениях ω , и σ

Давайте разберём пример. Возьмём передаточную функцию некоторой системы, запишем её изображение в виде:

$$H(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s}{s^2 + 3s + 2} \quad (4)$$

И построим график $|H(s)|$:

Листинг 1 – Анализ передаточной функции $H(s)$ б) часть 1

```

1 b = [1 2 -1 0];
2 a = [1 3 2];
3
4 omega = linspace(-2.5, 2.5);
5 sigma = linspace(-2.5, 0.5);
6
7 [sigmagrid, omegagrid] = meshgrid(sigma, omega);
8 sgrid = sigmagrid + 1i*omegagrid;
9 H = polyval(b, sgrid)./polyval(a, sgrid);
10
11 mesh(sigma, omega, abs(H));
12 xlabel('σ');
13 ylabel('jω');
14 zlabel('|H(s)|');

```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 3. Мы наблюдаем 3D-поверхность, устремляющуюся в

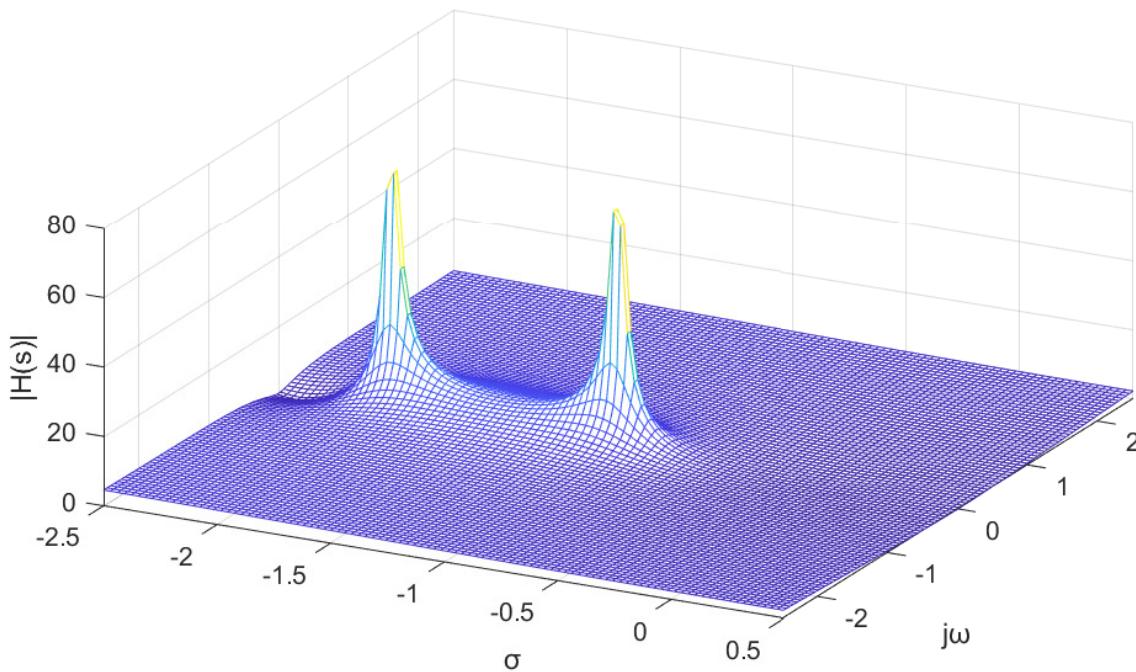


Рис. 3 – Функция $|H(s)|$

бесконечность в двух точках: при $j\omega = 0, \sigma = -2$ и $j\omega = 0, \sigma = -1$. Это **полюсы системы**. Для того, чтобы

найти полюсы системы, нужно прировнять её знаменатель к нулю и найти корни получившегося уравнения. Если проделать аналогичную процедуру с числителем, т.е. найти точки, где $H(s) = 0$, мы получим **нули системы**.

Если взять и посмотреть сечение поверхности $|H(s)|$ при $\sigma = 0$, получим ни что иное, как преобразование Фурье данной системы, или её АЧХ. Это легко проверить, подставив в уравнение (1) $s = j\omega$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

Правда, знакомая формула? Да это и есть преобразование Фурье непрерывного сигнала.

Давайте подробнее рассмотрим полюсы системы. Для этого построим их в двумерной плоскости, где по оси x будет σ , по оси y - $j\omega$. В Matlab это делается очень просто. Добавим в листинг 1 пару строчек:

Листинг 2 – Анализ передаточной функции $H(s)$, часть 2

```
15 Hs = tf(b, a); % передаточная функция
16 iopzmap(Hs), grid on; % график нулей и полюсов
```

Полученный результат показан на рисунке 4. Нули отмечены крестиками, полюсы – кружками.

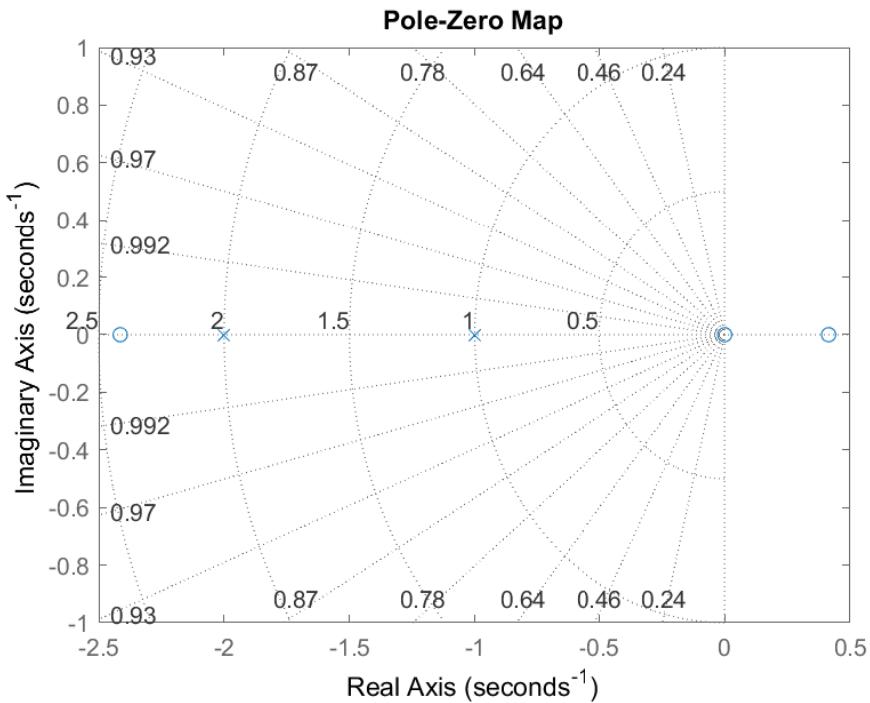


Рис. 4 – Нули и полюсы системы $H(s)$

Если все полюсы системы расположены слева от оси $j\omega$, система является устойчивой. Если хоть один полюс расположен справа от этой оси – система является неустойчивой. Если все полюсы расположены на оси $j\omega$, система находится на границе устойчивости (условно устойчива), к таким системам относят, например, генераторы.

Z-преобразование

Преобразование Лапласа применяют для непрерывных сигналов, для анализа дискретных сигналов используют **z-преобразование**. Для дискретного сигнала $x[n]$ z-преобразование $X[z]$ выглядит так:

$$X[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}, \quad (6)$$

где z - комплексное число. Запишем его как $z = re^{j\omega}$, где r - модуль, а ω - аргумент комплексной переменной. Получается, при $r = 1$ выражение (6) принимает вид:

$$X[z]|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad (7)$$

Выражение (7) представляет из себя ДПФ от сигнала $x[n]$. В общем случае, $X[z]$ представляет собой поверхность, если взять её сечение цилиндром $|z| = 1$, то на поверхности данного цилиндра будет отображаться АЧХ нашего дискретного сигнала.

Анализ устойчивости здесь производится аналогично преобразованию Лапласа. За исключением того, что мы смотрим расположение полюсов не относительно оси $j\omega$, а относительно единичной окружности $|z| = 1$, центр которой находится в начале координат.

Рассмотрим пример в пакете Matlab. Возьмём систему с передаточной характеристикой:

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 10s + 5}{s^3 + 8s^2 + 4s + 2} \quad (8)$$

Это будет прямая связь. И вторую систему:

$$C(s) = \frac{2s + 1}{2s + 3} \quad (9)$$

Это будет обратная связь. Далее дискретизируем их с помощью функции `c2d` (в результате чего получаем $G_d[z]$ и $C_d[z]$ соответственно) и соединяем согласно схеме, показанной на рисунке 5 (в нашем случае $K = 1$). Затем строим график нулей и полюсов получившейся системы на комплексной плоскости:

Листинг 3 – Анализ устойчивости дискретной системы, часть 1

```

1 clear
2
3 G = tf([0.1 10 5],[1 8 4 2]);
4 Gd = c2d(G,0.1);
5 C = tf([2 1],[2 3]);
6 Cd = c2d(C,0.1);
7 sys = feedback(Gd,Cd);
8
9 figure
10 rlocus(sys), grid on;

```

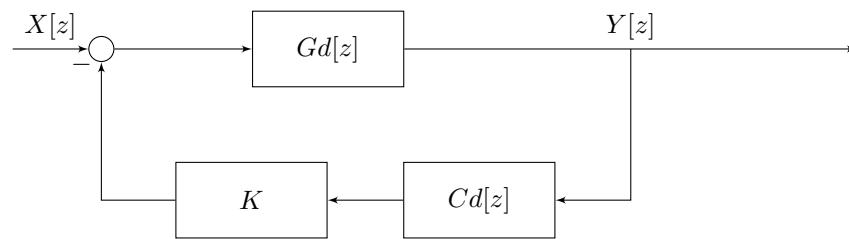


Рис. 5 – Структурная схема системы из листинга 3

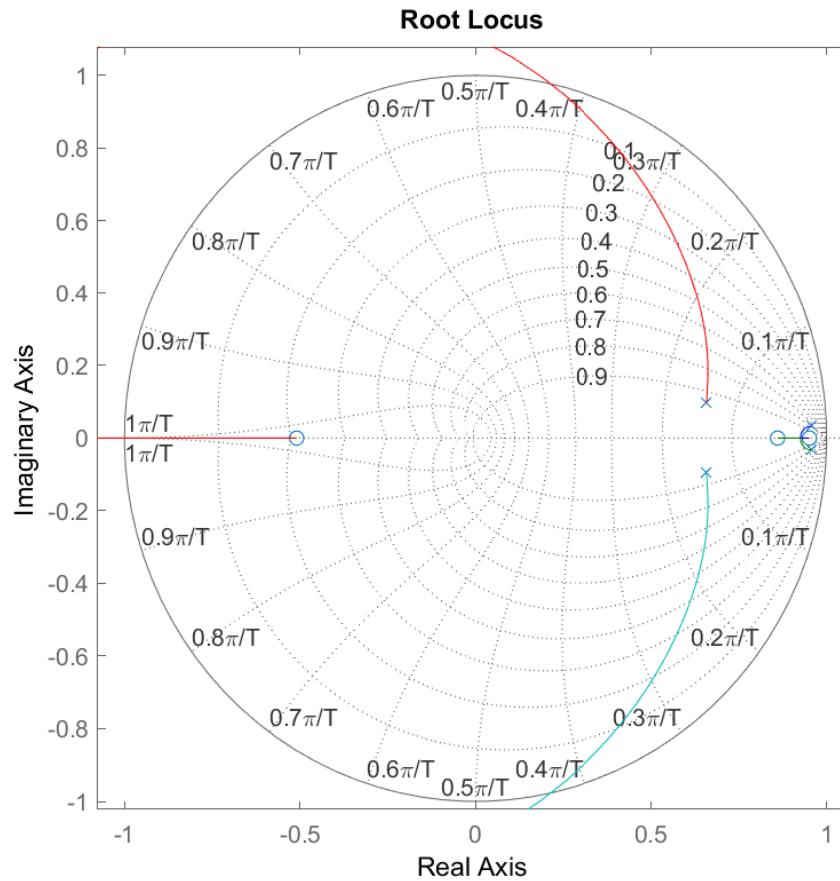


Рис. 6 – Корневой годограф системы из листинга 3

В результате выполнения скрипта получим единичную окружность, на которой крестиками отмечены полюсы системы, кружками - нули системы (см. рисунок 6). Но, помимо этого, на графике видны кривые разных цветов, которые показывают траекторию движения нулей и полюсов при разном коэффициенте усиления K . Получается, что мы с вами построили **корневой годограф**. С его помощью можно отследить, при каких значениях K система будет устойчивой, а при каких – нет, а также величину пререгулирования при ступенчатом воздействии на сигнал (становится видно, если нажать левой кнопкой мыши на графике). В нашем случае граница устойчивости системы – $K = 21$. При большем коэффициенте усиления система становится

неустойчивой.

Построим графики реакции системы из листинга 3 на ступенчатое воздействие (**функция Хевисайда**, или **ступенька** - это сигнал, который при $t < 0$ равен нулю, при $t \geq 0$ равен единице). Дополним код:

Листинг 4 – Анализ устойчивости дискретной системы, часть 2

```

11 figure
12 subplot(2,2,1)
13 sys1 = feedback(Gd,Cd);
14 step(sys1), grid on
15 title('K=1')

16
17 subplot(2,2,2)
18 sys2 = feedback(Gd,Cd*10);
19 step(sys2), grid on
20 title('K=10')

21
22 subplot(2,2,3)
23 sys3 = feedback(Gd,Cd*20);
24 step(sys3), grid on
25 title('K=20')

26
27 subplot(2,2,4)
28 sys4 = feedback(Gd,Cd*25);
29 step(sys4), grid on
30 title('K=25')

```

Результат выполнения данного кода показан на рисунке 7. Из рисунка видно, что с увеличением K появляются колебания на фронте переходной характеристики. При $K = 25$ (больше 21) система не возвращается в состояние равновесия (она неустойчива).

Вернёмся к БИХ-фильтрам. Помните, в его структурной схеме были прямоугольники с надписью "Задержка"? Давайте посмотрим, как она выглядит в z-области. Рассмотрим на примере задержки на 1 такт:

$$y[n] = x[n - 1] \quad (10)$$

Запишем z-преобразование для уравнения (10):

$$Y[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n - 1]z^{-n} \quad (11)$$

Пусть $k = n - 1$, тогда:

$$Y[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-(k+1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}z^{-1} = z^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \quad (12)$$

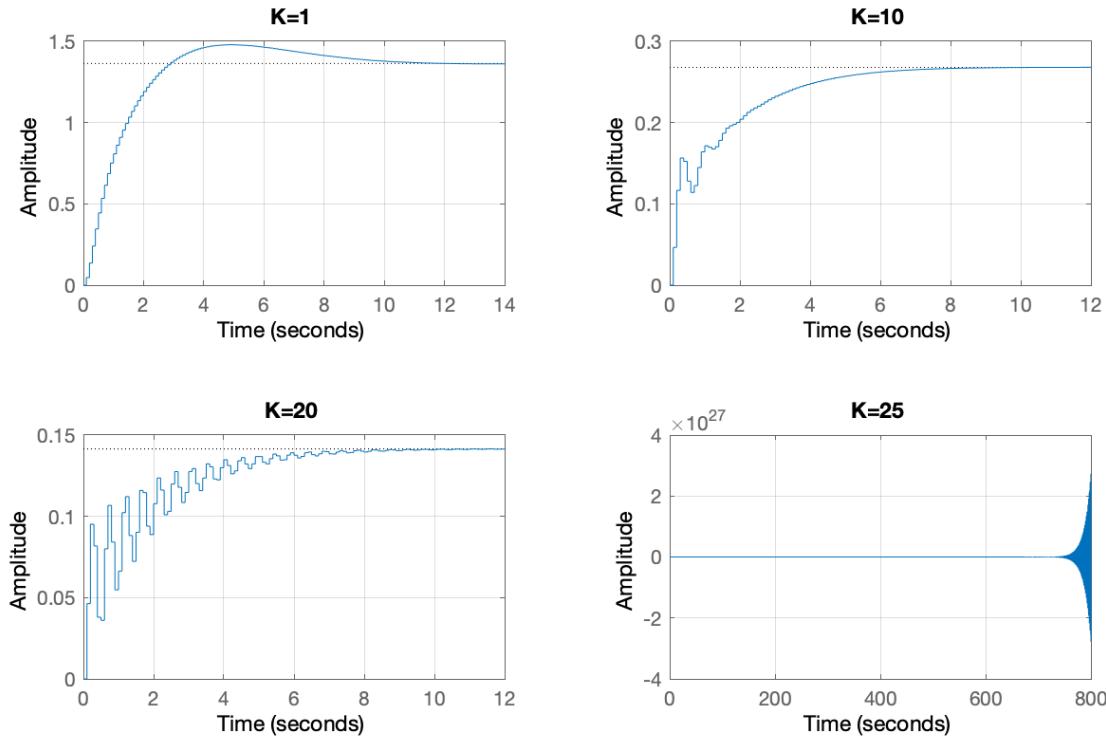


Рис. 7 – Реакция исследуемой системы на ступенчатое воздействие при разных K

или:

$$Y[z] = X[z] \cdot z^{-1} \quad (13)$$

Получается, чтобы сделать задержку на 1 такт, достаточно домножить сигнал на z^{-1} , поэтому во многих структурных схемах фильтров вместо надписи "Задержка" можно увидеть просто z^{-1} . Задержка на n тактов выглядит как z^{-n} .

Выражение для БИХ-фильтра в z-области будет выглядеть следующим образом:

$$Y[z] = X[z] \sum_{k=0}^N b[k]z^{-k} + Y[z] \sum_{k=1}^M a[k]z^{-k} \quad (14)$$

Далее, чтобы составить передаточную характеристику, всё, что относится к выходному сигналу, отнесём в числитель, а входного – в знаменатель. Получим:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\sum_{k=0}^N b[k]z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a[k]z^{-k}} \quad (15)$$

Другим не менее важным параметром фильтра является его частотная характеристика. Чтобы её найти,

достаточно в его передаточную функцию (15) подставить $z = e^{j\omega}$:

$$H[\omega] = H[z]|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{k=0}^N b[k]e^{-jk\omega}}{1 - \sum_{k=1}^M a[k]e^{-jk\omega}} \quad (16)$$

Вот, в целом и всё. Другие критерии устойчивости смотрите в семинаре.

Задания к семинару:

Для непрерывной и дискретной системы с произвольной передаточной характеристикой провести анализ устойчивости с помощью:

- преобразования Лапласа и z-преобразования (также построить корневые годографы);
- диаграммы Боде;
- критерия Найквиста;
- критерия Гурвица;

Построить импульсную характеристику, а также реакцию на ступенчатое воздействие при разных коэффициентах усиления.