



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Н.Э. БАУМАНА

## Учебное пособие

Учебно-методический комплект  
по дисциплине  
«Цифровая обработка сигналов»

Конспект лекции  
«Преобразование Лапласа  
и z-преобразование»

В.В. Леонидов

## Преобразование Лапласа

**Преобразование Лапласа** – это интегральное преобразование, связывающее функцию  $F(s)$  комплексного переменного (изображения) с функцией  $f(x)$  вещественного переменного (оригиналом). Используется для решения дифференциальных и интегральных уравнений, а также для анализа динамических систем. Нас сейчас интересует последнее.

Прямое преобразование Лапласа для вещественного  $f(t)$  выглядит так:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (1)$$

где:

- $f(t)$  - оригинал;
- $F(s)$  - изображение функции  $f(t)$ ;
- $s = \sigma + j\omega$ ;
- $\sigma$  – некое число;
- $\omega$  – комплексная частота, рад./с.

Т.к.  $e^{-st}$  не имеет размерности,  $s$  должен иметь размерность *1/время*, или размерность *частоты*. Поэтому переменную Лапласа  $s$  называют **комплексной частотой**. А ещё  $e^{-st}$  представляет собой общую форму решения линейных дифуров.

По сути, преобразование Лапласа можно рассматривать как непрерывную функцию, значение которой при некотором  $s$  представляет собой **корреляцию** функции  $f(t)$  и затухающей синусоиды  $e^{-st}$ , частота которой равна  $\omega$ , а коэффициент затухания  $\sigma$ . Давайте запишем  $e^{-st}$  следующим образом:

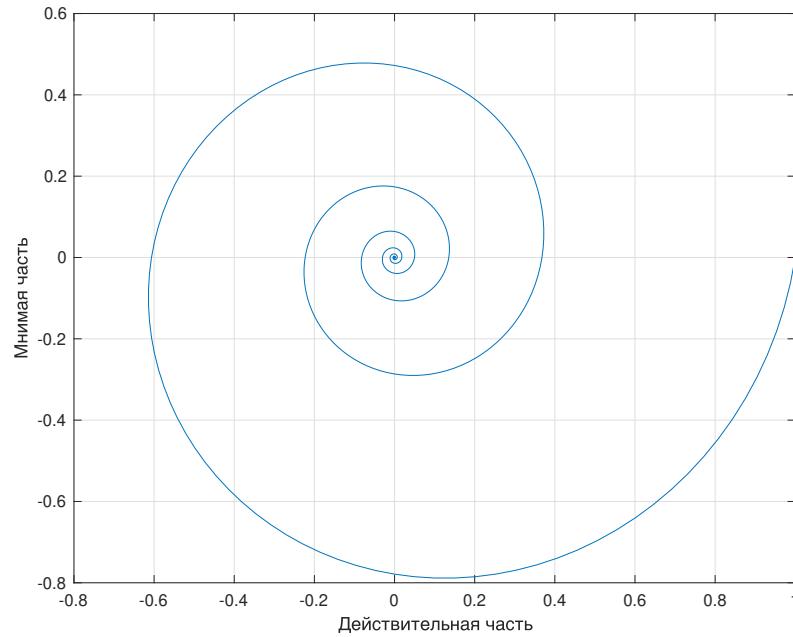
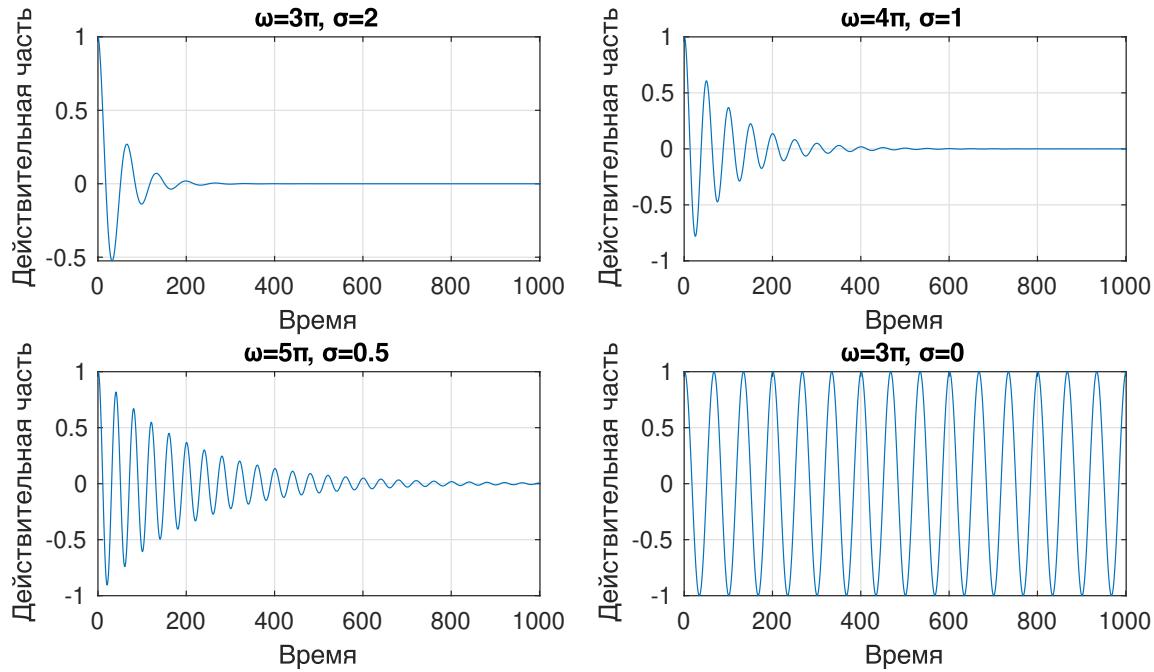
$$e^{-st} = e^{-\sigma t - j\omega t} = \frac{e^{-j\omega t}}{e^{\sigma t}} \quad (2)$$

$e^{-j\omega t}$  – вектор, модуль которого равен единице, врачающийся вокруг начала координат в комплексной плоскости с частотой  $\omega$ . Ещё его называют **фазором**.  $e^{\sigma t}$  – комплексное число, равное единице при  $t = 0$ , значение которого увеличивается с увеличением  $t$ . Таким образом,  $e^{-st}$  на комплексной плоскости представляет собой спираль (см. рисунок 1).

На рисунке 2 показана действительная часть  $e^{-j\omega t}$  при разных значениях  $\omega$ , и  $\sigma$ . Получается, что в процессе расчёта  $F(s)$  мы делаем корреляцию нашего сигнала с сигналом, имеющим различную сходимость и частоту колебаний. Отсюда можно сделать вывод о поведении анализируемой нами системы. Одной из основных характеристик системы является **устойчивость**. Простыми словами: система является устойчивой, если при ограниченном входном сигнале, на выходе также получается ограниченный сигнал, который после устранения входного воздействия самостоятельно возвращается к некоторому установившемуся значению.

Первое, что нам нужно найти при анализе системы – её **передаточная характеристика**. Это отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (3)$$

Рис. 1 – Функция  $e^{-st}$  при  $\omega = 2\pi$ ,  $\sigma = 1$ Рис. 2 – Действительная часть  $e^{-st}$  при разных значениях  $\omega$ , и  $\sigma$ 

Давайте разберём пример. Возьмём передаточную функцию некоторой системы, запишем её изображение в виде:

$$H(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - s}{s^2 + 3s + 2} \quad (4)$$

И построим график  $|H(s)|$ :

Листинг 1 – Анализ передаточной функции  $H(s)$ , часть 1

```

1 b = [1 2 -1 0];
2 a = [1 3 2];
3
4 omega = linspace(-2.5, 2.5);
5 sigma = linspace(-2.5, 0.5);
6
7 [sigmagrid, omegagrid] = meshgrid(sigma, omega);
8 sgrid = sigmagrid + 1i*omegagrid;
9 H = polyval(b, sgrid)./polyval(a, sgrid);
10
11 mesh(sigma, omega, abs(H));
12 xlabel('σ');
13 ylabel('jω');
14 zlabel('|H(s)|');
```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 3. Мы наблюдаем 3D-поверхность, устремляющуюся в

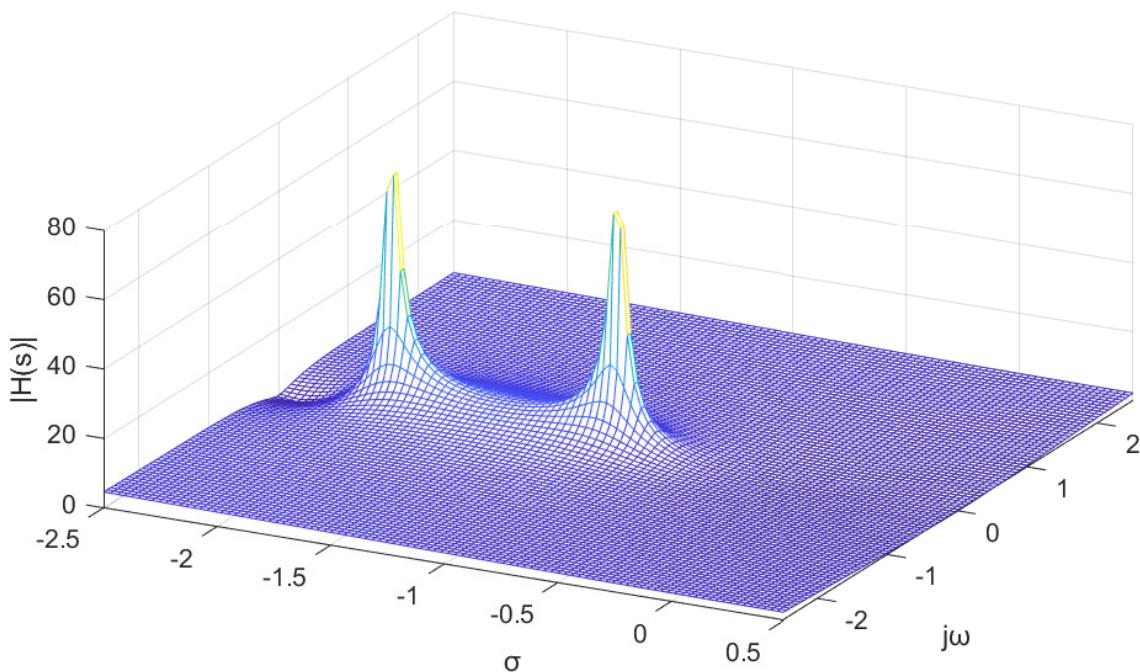


Рис. 3 – Функция  $|H(s)|$

бесконечность в двух точках: при  $j\omega = 0, \sigma = -2$  и  $j\omega = 0, \sigma = -1$ . Это **полюсы системы**. Для того, чтобы

найти полюсы системы, нужно прировнять её знаменатель к нулю и найти корни получившегося уравнения. Если проделать аналогичную процедуру с числителем, т.е. найти точки, где  $H(s) = 0$ , мы получим **нули системы**.

Если взять и посмотреть сечение поверхности  $|H(s)|$  при  $\sigma = 0$ , получим ни что иное, как преобразование Фурье данной системы, или её АЧХ. Это легко проверить, подставив в уравнение (1)  $s = j\omega$ :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

Правда, знакомая формула? Да это и есть преобразование Фурье непрерывного сигнала.

Давайте подробнее рассмотрим полюсы системы. Для этого построим их в двумерной плоскости, где по оси  $x$  будет  $\sigma$ , по оси  $y$  -  $j\omega$ . В Matlab это делается очень просто. Добавим в листинг 1 пару строчек:

Листинг 2 – Анализ передаточной функции  $H(s)$ , часть 2

```
15 Hs = tf(b, a); % передаточная функция
16 iopzmap(Hs), grid on; % график нулей и полюсов
```

Полученный результат показан на рисунке 4. Нули отмечены кружками, полюсы – крестиками.

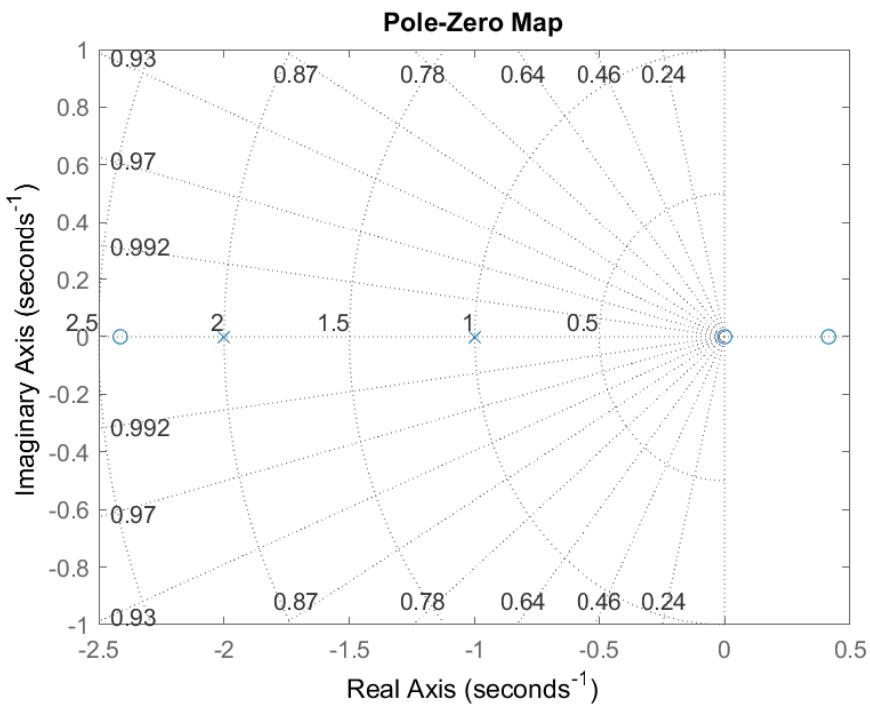


Рис. 4 – Нули и полюсы системы  $H(s)$

Если все полюсы системы расположены слева от оси  $j\omega$ , система является устойчивой. Если хоть один полюс расположен справа от этой оси – система является неустойчивой. Если все полюсы расположены на оси  $j\omega$ , система находится на границе устойчивости (условно устойчива), к таким системам относят, например, генераторы.

## Z-преобразование

Преобразование Лапласа применяют для непрерывных систем, а для анализа интересующих нас дискретных систем используют **z-преобразование**. Для дискретного сигнала  $x[n]$  z-преобразование  $X[z]$  выглядит так:

$$X[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}, \quad (6)$$

где  $z$  – комплексное число. Запишем его как  $z = re^{j\omega}$ , где  $r$  – модуль, а  $\omega$  – аргумент комплексной переменной. Получается, при  $r = 1$  выражение (6) принимает вид:

$$X[z]|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad (7)$$

Выражение (7) представляет из себя ДПФ от сигнала  $x[n]$ . В общем случае,  $X[z]$  представляет собой поверхность, если взять её сечение цилиндром  $|z| = 1$ , то на поверхности данного цилиндра будет отображаться АЧХ нашего дискретного сигнала.

Анализ устойчивости здесь производится аналогично анализу с помощью преобразованию Лапласа. За исключением того, что мы смотрим расположение полюсов не относительно оси  $j\omega$ , а относительно единичной окружности  $|z| = 1$ , центр которой находится в начале координат. Если все полюсы находятся внутри единичной окружности, система является устойчивой. Если хоть один полюс находится снаружи – система является неустойчивой. Полюсы, расположенные на единичной окружности говорят об условной устойчивости системы.

Рассмотрим пример в пакете Matlab. Возьмём систему с передаточной характеристикой:

$$G(s) = \frac{0.1s^2 + 10s + 5}{s^3 + 8s^2 + 4s + 2} \quad (8)$$

Это будет прямая связь. И вторую систему:

$$C(s) = \frac{2s + 1}{2s + 3} \quad (9)$$

Это будет обратная связь. Далее дискретизируем их с помощью функции `c2d` (в результате чего получаем  $Gd[z]$  и  $Cd[z]$  соответственно) и соединяем согласно схеме, показанной на рисунке 5 (в нашем случае  $K = 1$ ). Затем строим график нулей и полюсов получившейся системы на комплексной плоскости:

Листинг 3 – Анализ устойчивости дискретной системы, часть 1

```

1 clear
2
3 G = tf([0.1 10 5],[1 8 4 2]);
4 Gd = c2d(G,0.1);
5 C = tf([2 1],[2 3]);
6 Cd = c2d(C,0.1);
7 sys = feedback(Gd,Cd);
8

```

```

9 figure
10 rlocus(sys), grid on;

```

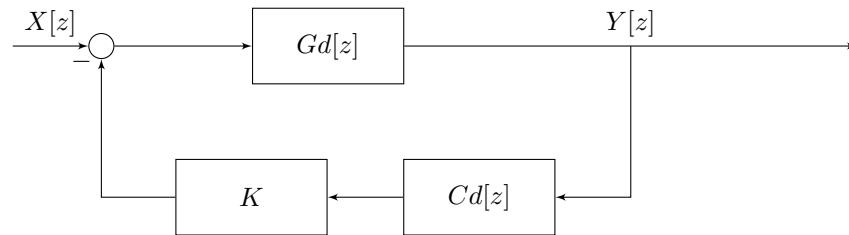


Рис. 5 – Структурная схема системы из листинга 3

В результате выполнения скрипта получим единичную окружность, на которой крестиками отмечены полюсы системы, кружками - нули системы (см. рисунок 6). Но, помимо этого, на графике видны кривые разных

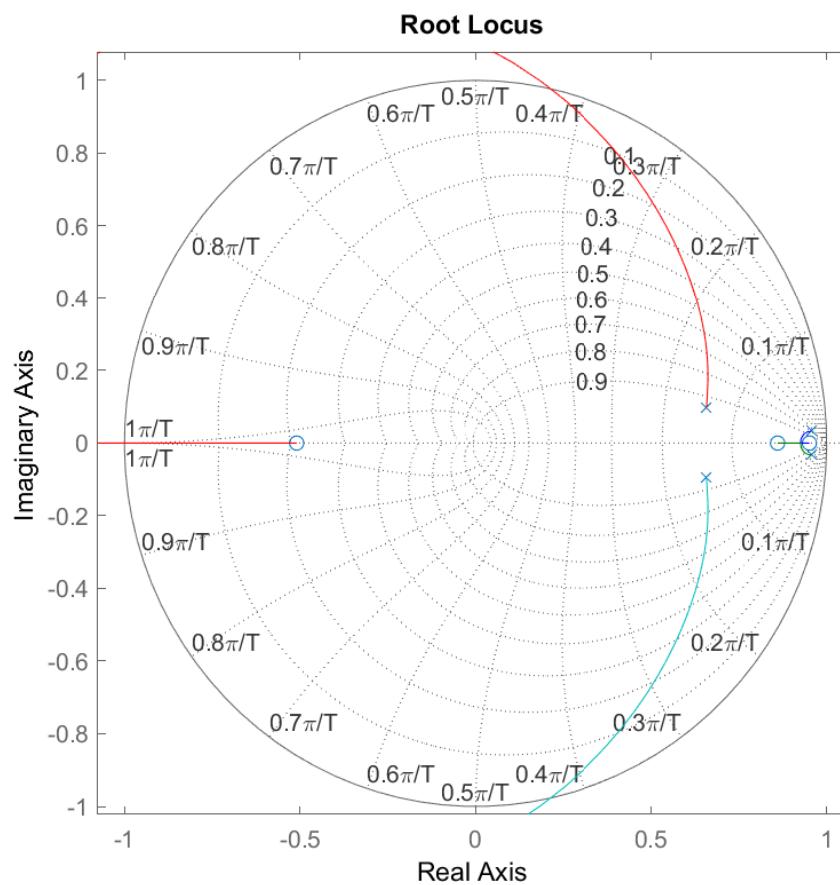


Рис. 6 – Корневой годограф системы из листинга 3

цветов, которые показывают траекторию движения нулей и полюсов при разном коэффициенте усиления  $K$ . Получается, что мы с вами построили **корневой годограф**. С его помощью можно отследить, при каких

значениях  $K$  система будет устойчивой, а при каких – нет, а также величину пререгулирования при ступенчатом воздействии на сигнал (становится видно, если нажать левой кнопкой мыши на графике). В нашем случае граница устойчивости системы –  $K = 21$ . При большем коэффициенте усиления система становится неустойчивой.

Построим графики реакции системы из листинга 3 на ступенчатое воздействие (**функция Хевисайда**, или **ступенька** – это сигнал, который при  $t < 0$  равен нулю, при  $t \geq 0$  равен единице). Дополним код:

Листинг 4 – Анализ устойчивости дискретной системы, часть 2

```

11 figure
12 subplot(2,2,1)
13 sys1 = feedback(Gd,Cd);
14 step(sys1), grid on
15 title('K=1')
16
17 subplot(2,2,2)
18 sys2 = feedback(Gd,Cd*10);
19 step(sys2), grid on
20 title('K=10')
21
22 subplot(2,2,3)
23 sys3 = feedback(Gd,Cd*20);
24 step(sys3), grid on
25 title('K=20')
26
27 subplot(2,2,4)
28 sys4 = feedback(Gd,Cd*25);
29 step(sys4), grid on
30 title('K=25')
```

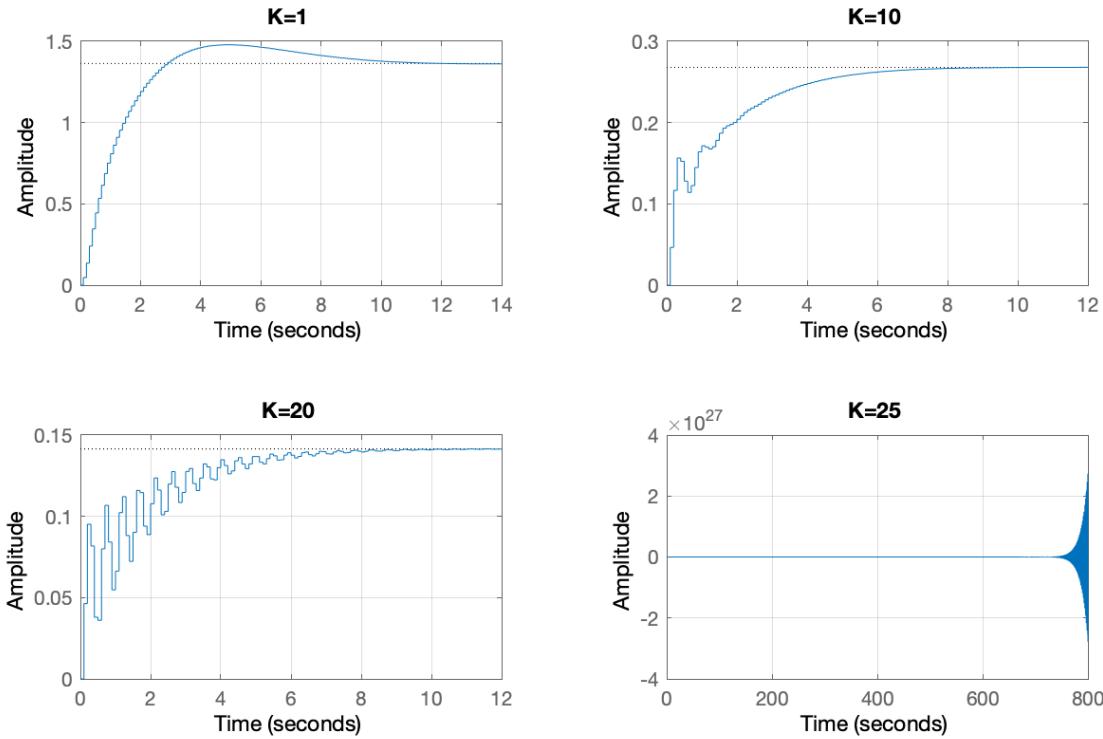
Результат выполнения данного кода показан на рисунке 7. Из рисунка видно, что с увеличением  $K$  появляются колебания на фронте переходной характеристики. При  $K = 25$  (больше 21) система не возвращается в состояние равновесия (она неустойчива).

Вернёмся к БИХ-фильтрам. Помните, в его структурной схеме были прямоугольники с надписью «Задержка»? Давайте посмотрим, как она выглядит в z-области. Рассмотрим на примере задержки на 1 такт:

$$y[n] = x[n - 1] \quad (10)$$

Запишем z-преобразование для уравнения (10):

$$Y[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n - 1]z^{-n} \quad (11)$$

Рис. 7 – Реакция исследуемой системы на ступенчатое воздействие при разных  $K$ 

Пусть  $k = n - 1$ , тогда:

$$Y[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-(k+1)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}z^{-1} = z^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \quad (12)$$

или:

$$Y[z] = X[z] \cdot z^{-1} \quad (13)$$

Получается, чтобы сделать задержку на 1 такт, достаточно умножить сигнал на  $z^{-1}$ , поэтому во многих структурных схемах фильтров вместо надписи «Задержка» можно увидеть просто  $z^{-1}$ . Задержка на  $n$  тактов выглядит как  $z^{-n}$ .

Выражение для БИХ-фильтра в  $z$ -области будет выглядеть следующим образом:

$$Y[z] = X[z] \sum_{k=0}^N b[k]z^{-k} + Y[z] \sum_{k=1}^M a[k]z^{-k} \quad (14)$$

Далее, чтобы составить передаточную характеристику, всё, что относится к выходному сигналу, отнесём в числитель, а входного – в знаменатель. Получим:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\sum_{k=0}^N b[k]z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a[k]z^{-k}} \quad (15)$$

Другим не менее важным параметром фильтра является его частотная характеристика. Чтобы её найти, достаточно в его передаточную функцию (15) подставить  $z = e^{j\omega}$ :

$$H[\omega] = H[z]|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum_{k=0}^N b[k]e^{-jk\omega}}{1 - \sum_{k=1}^M a[k]e^{-jk\omega}} \quad (16)$$

Вот, в целом и всё. Другие критерии устойчивости смотрите в семинаре.

### Задания к семинару:

Для непрерывной и дискретной системы с произвольной передаточной характеристикой провести анализ устойчивости с помощью:

- преобразования Лапласа и z-преобразования (также построить корневые голографы);
- диаграммы Боде;
- критерия Найквиста;
- критерия Гурвица;

Построить импульсную характеристику, а также реакцию на ступенчатое воздействие при разных коэффициентах усиления.