

## Цифровые фильтры

### 1 Введение

**Цифровой фильтр** - фильтр, обрабатывающий цифровой сигнал с целью выделения и (или) подавления определённых частот этого сигнала.

Разделяют два больших класса цифровых фильтров:

- Фильтры с конечной импульсной характеристикой (**КИХ-фильтры, FIR**)
- Фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (**БИХ-фильтры, IIR**)

Зачем они нужны? Чем нас не устраивают аналоговые фильтры? Давайте рассмотрим преимущества и недостатки цифровых фильтров.

**Преимущества цифровых фильтров:**

- Высокая точность и воспроизводимость (у аналоговых фильтров это определяется разбросом номиналов компонентов)
- Гибкость (можно изменять характеристику, не затрагивая аппаратную часть)
- Компактность (например, аналоговые ФНЧ могут занимать много места, в то время как цифровые имеют одинаковые габариты при любой форме АЧХ в пределах одной частоты дискретизации)

**Недостатки цифровых фильтров:**

- Сложность работы в реальном времени (все вычисления должны пройти менее, чем за один период дискретизации)
- Высокая стоимость

Начнём изучение фильтров с наиболее простого типа – КИХ-фильтров.

### 2 КИХ-фильтры

Давайте сразу рассмотрим пример. Сгенерируем в Matlab запущённый сигнал частотой 0.5 Гц, оцифрованный с частотой дискретизации 10 Гц. Для начала, объявим переменную `fs`, которой присвоим значение частоты дискретизации, создадим массив временных отсчётов `ts`, и переменную `N`, которой присвоим количество получившихся отсчётов:

Листинг 1 – Скользящее среднее, часть 1

```

1 fs = 10;
2 ts = 0: 1/fs : 10-1/fs;
3 N = length(ts);

```

Теперь создадим сам синусоидальный сигнал  $x$  с частотой 0.5 Гц, запущенный случайным сигналом, амплитуда которого изменяется в диапазоне от  $a=-0.01$  до  $b=0.1$ :

Листинг 2 – Скользящее среднее, часть 2

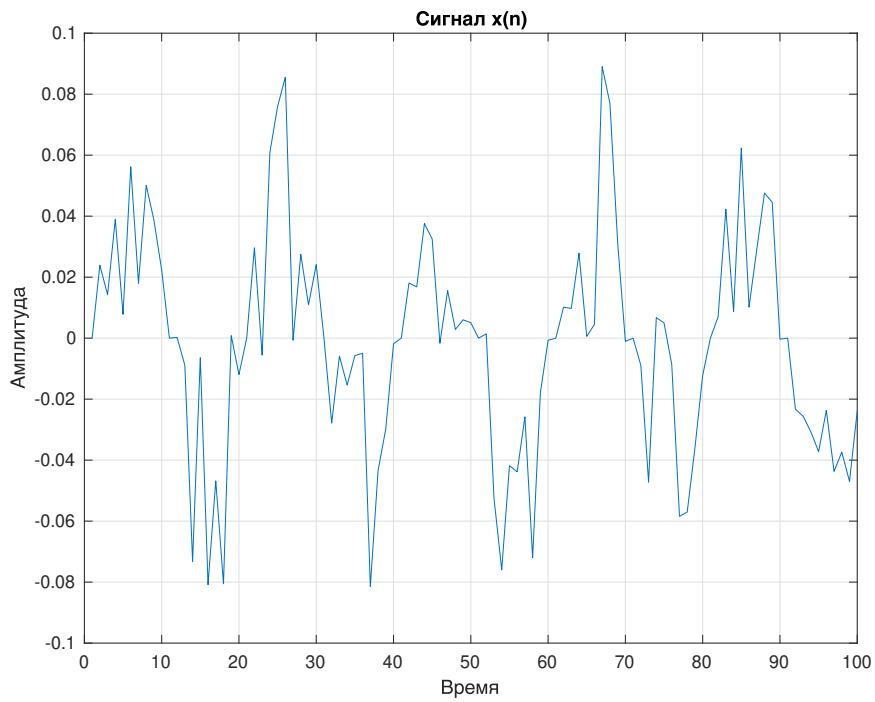
```
4 a = -0.01;
5 b = 0.1;
6 x = (a + (b - a) * rand(1, N)).*sin(2*pi*0.5*ts);
```

Построим график сигнала  $x$ :

Листинг 3 – Скользящее среднее, часть 3

```
7 plot(x), grid on;
8 xlabel('Время');
9 ylabel('Амплитуда');
10 title('Сигнал x(n)');
```

Полученный результат показан на рисунке 1.

Рис. 1 – Сгенерированный сигнал  $x(n)$ 

Теперь возьмём первые пять отсчётов с  $x(1)$  по  $x(5)$ , найдём их среднее арифметическое, запишем его в новый массив в элемент  $y(1)$ , затем возьмём отсчёты с  $x(2)$  по  $x(6)$ , также рассчитаем их среднее значение и запишем его в элемент  $y(2)$  и так далее, пока не пройдём по всему сигналу:

Листинг 4 – Скользящее среднее, часть 4

```

11 y = zeros(1,N+6);
12 for i = 6 : length(x)
13     y(i) = (x(i-1) + x(i-2) + x(i-3) + x(i-4) + x(i-5))/5;
14 end

```

А теперь построим сигналы  $x$  и  $y$  друг под другом в одном окне:

Листинг 5 – Скользящее среднее, часть 5

```

15 subplot(2,1,1);
16 plot(x), grid on;
17 xlabel('Время');
18 ylabel('Амплитуда');
19 title('Сигнал x(n)');
20
21 subplot(2,1,2);
22 plot(y(1:100)), grid on;
23 xlabel('Время');
24 ylabel('Амплитуда');
25 title('Сигнал y(n)');

```

Результаты выполнения скрипта показаны на рисунке 2.

И что же мы видим? Сигнал  $y(n)$  (на рисунке снизу) похож на сигнал  $x(n)$  (сверху), однако имеет некоторую задержку и более гладкую форму. Получается, что мы только что применили к сигналу  $x(n)$  фильтр нижних частот (ФНЧ)! Спроектированный нами фильтр называется **скользящее среднее**. Уравнение данного фильтра имеет вид:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k), \text{ где } \sum_{k=0}^M h(k) = 1 \quad (1)$$

Структурная схема данного фильтра представлена на рисунке 3.

В каждый момент времени берётся текущий отсчёт и 4 предыдущих, каждый из которых умножается на коэффициент  $1/5$ , затем эти результаты складываются и полученная сумма поступает на выход. Процедура повторяется, пока весь сигнал не будет обработан.

## 2.1 Свёртка

А что, если вместо коэффициентов  $1/5$  взять что-то другое? На самом деле, уравнение (1) представляет собой частный случай операции **свёртки**:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k), \quad (2)$$

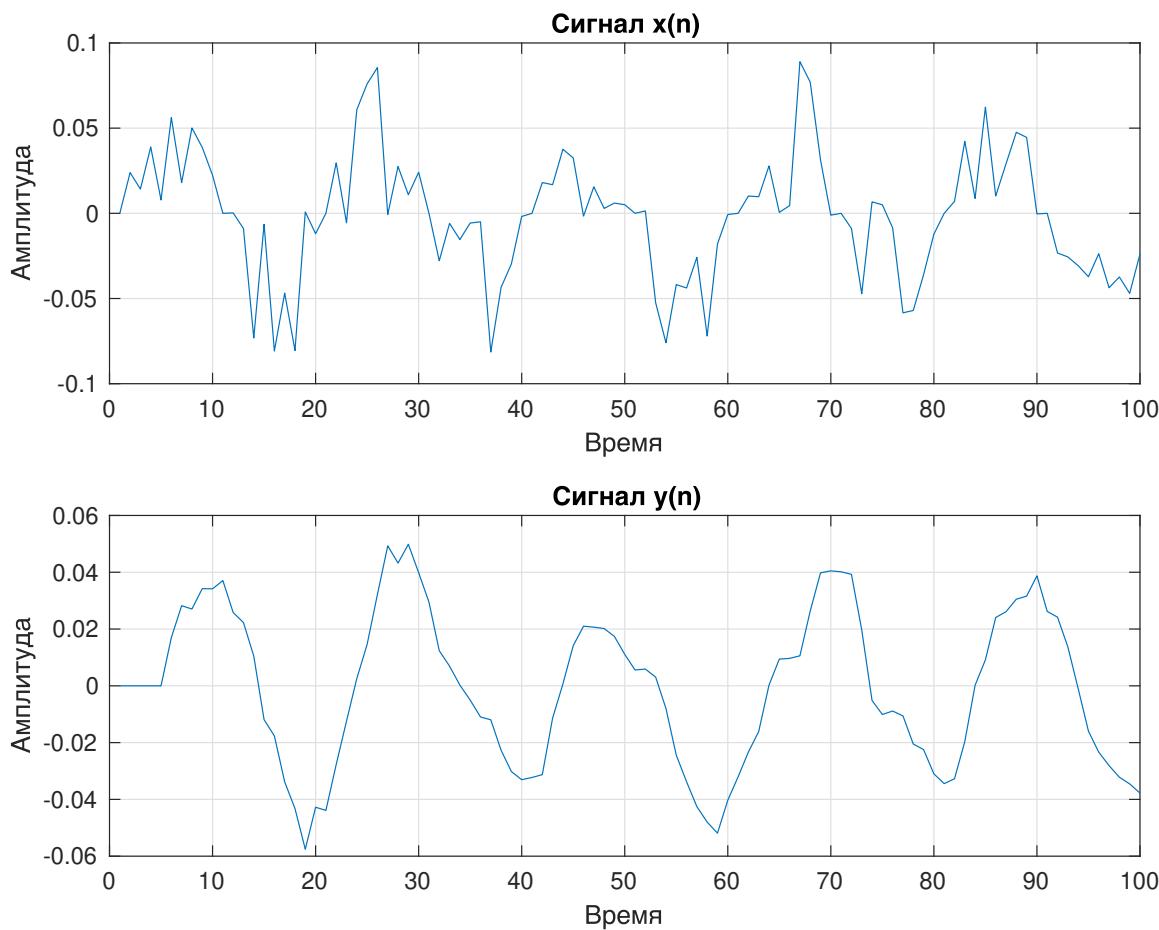


Рис. 2 – Результаты работы фильтра «скользящее среднее»

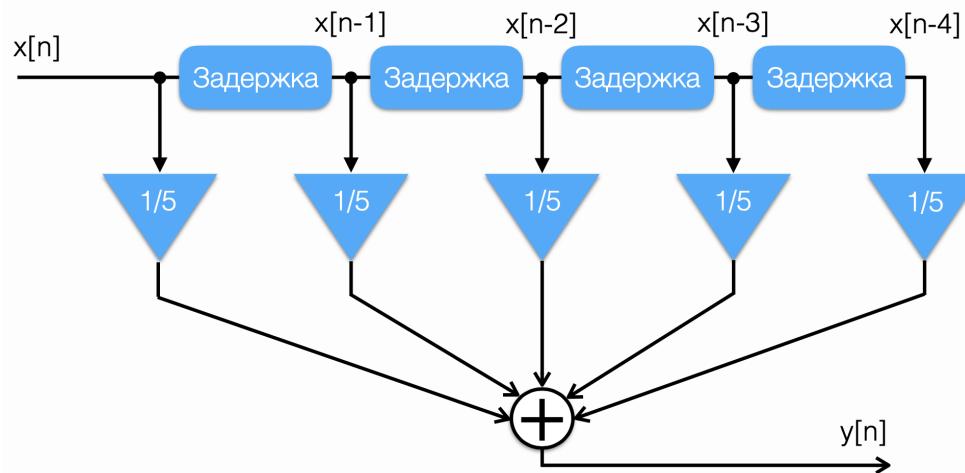


Рис. 3 – Структурная схема фильтра «скользящее среднее», состоящего из пяти отсчётов

где  $M = N_1 + N_2 - 1$ ,  $N_1$  – длина  $x[n]$ ,  $N_2$  – длина  $h[n]$

Это уравнение и является уравнением КИХ-фильтра. Его структурная схема представлена на рисунке 4.

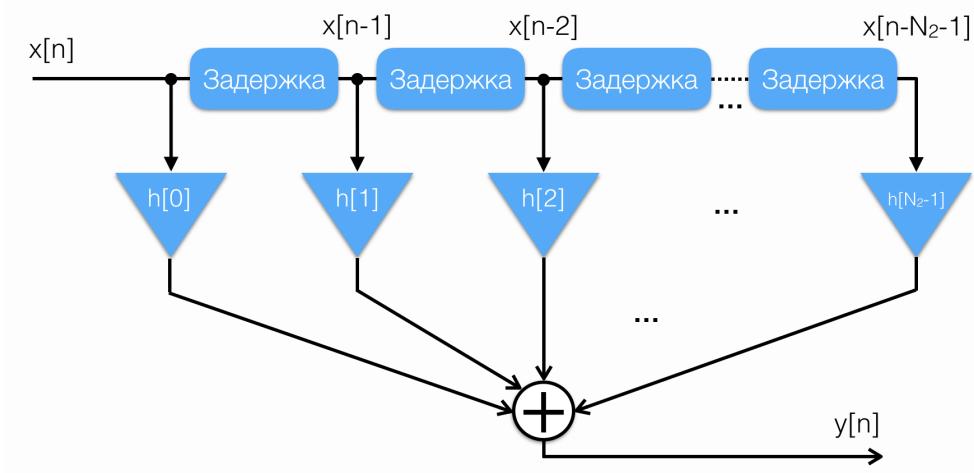


Рис. 4 – Структурная схема КИХ-фильтра

## 2.2 Теорема о свёртке

Со свёрткой связана следующая теорема:

**Теорема 1** Если две последовательности во временной области  $x[n]$  и  $h[n]$  имеют дискретные преобразования Фурье (ДПФ)  $X[m]$  и  $H[m]$  соответственно, то ДПФ свёртки  $x[n] * h[n]$  представляет собой произведение  $X[m] \cdot H[m]$ :

$$x[n] * h[n] \xrightarrow[\text{ОДПФ}]{\text{ДПФ}} X[m] \cdot H[m] \quad (3)$$

И действует это в обе стороны. Получается, что, когда мы делаем свёртку исходного сигнала с коэффициентами фильтра, мы перемножаем амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) исходного сигнала и АЧХ фильтра, тем самым убираем ненужные частоты. А это и есть фильтрация.

Мы выше говорили: «фильтры с конечной импульсной характеристикой, фильтры с бесконечной импульсной характеристикой». А что же такое «импульсная характеристика»? Давайте вспомним на примере фильтров.

## 2.3 Импульсная характеристика КИХ-фильтра

**Импульсная характеристика фильтра** – это выходная последовательность фильтра во временной области при подаче на вход фильтра **дельта-функции**, или функции Дирака – единственного отсчёта, равного единице (единичного импульса), которому предшествуют и за которым следуют нулевые отсчёты.

Возьмём предыдущий пример из Matlab и вместо исходного сигнала  $x$  подставим в него функцию Дирака:

Листинг 6 – Импульсная характеристика скользящего среднего

```

1 clear;
2 fs = 10;
3 ts = 0: 1/fs : 10-1/fs;
4 N = length(ts);

```

```

5
6 x = zeros(N,1);
7 x(5) = 1;
8
9 subplot(2,1,1);
10 stem(x), grid on;
11 xlabel('Время');
12 ylabel('Амплитуда');
13 title('Функция Дирака');
14
15 y = zeros(1,N+6);
16 for i = 6 : length(x)
17     y(i) = (x(i-1) + x(i-2) + x(i-3) + x(i-4) + x(i-5))*1/5;
18 end
19
20 subplot(2,1,2);
21 stem(y(1:100)), grid on;
22 xlabel('Время');
23 ylabel('Амплитуда');
24 title('Импульсная характеристика');

```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 5.

Из рисунка видно, что импульсная характеристика фильтра представляет собой 5 отсчётов амплитудой 0.2 (или 1/5). Получается, что мы с вами видим ни что иное, как коэффициенты фильтра. Поэтому **коэффициенты КИХ-фильтра также называют его импульсной характеристикой**.

## 2.4 Проектирование КИХ-фильтров

Теперь возникает вопрос: как рассчитать коэффициенты, чтобы получить требуемую АЧХ фильтра? Самый простой способ: «рисуем» необходимую АЧХ в частотной области, делаем обратное ДПФ от этой АЧХ и получаем набор коэффициентов во временной области. Наверняка, каждый из вас мечтает увидеть фильтр с идеально прямоугольной АЧХ. Возможно ли такое? Давайте разбираться. Что из себя представляет ДПФ от идеально прямоугольного сигнала? Правильно, функцию *sinc*, которую мы рассматривали, когда изучали растекание спектра ДПФ (см. рисунок 6).

Данная функция бесконечна во временной области, поэтому для реализации идеально прямоугольной АЧХ нам потребуется бесконечное количество коэффициентов фильтра. Получается, чем больше мы используем коэффициентов  $h[n]$ , тем больше АЧХ фильтра будет похожа на прямоугольную. Вроде бы логично – возьми побольше коэффициентов, получишь хороший фильтр. Но не всё так просто: в реальности мы не можем увеличивать количество коэффициентов фильтра, т.к. это приведёт к дополнительным операциям

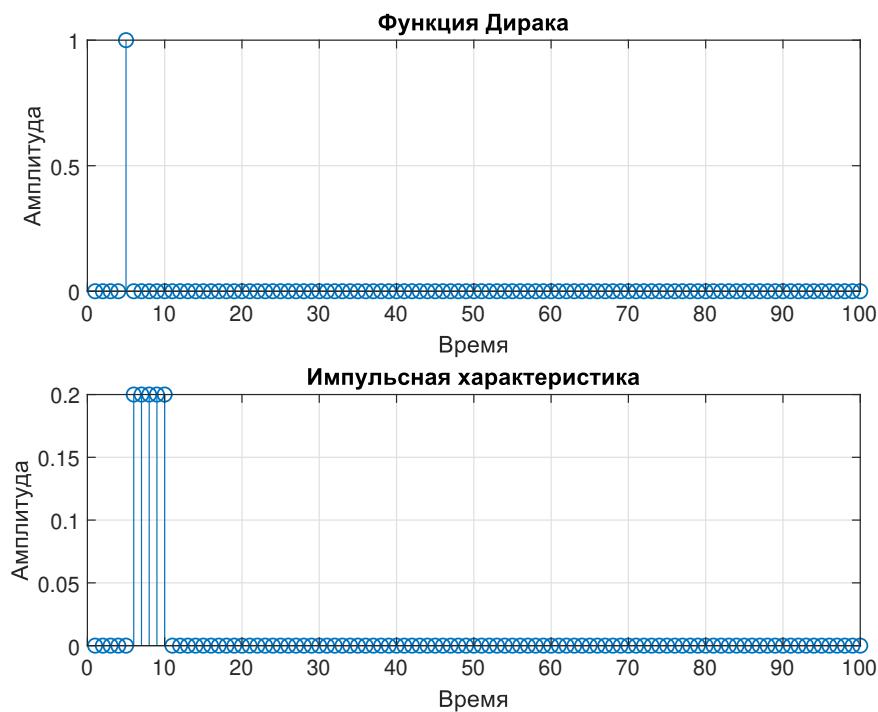


Рис. 5 – Функция Дирака и реакция на неё скользящего среднего из пяти отсчётов

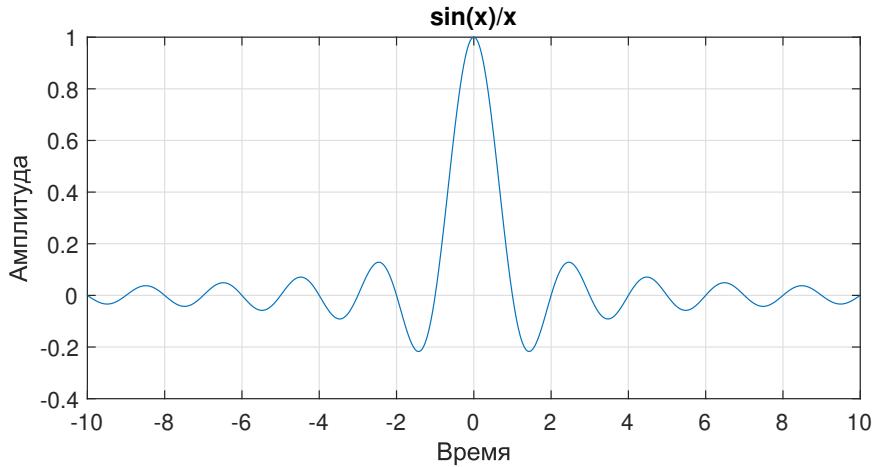


Рис. 6 – Функция sinc

перемножения, каждая из которых вызывает задержку. Для того, чтобы система работала в реальном времени, нужно, чтобы все вычисления по формуле (2) производились за время, не превышающее один период дискретизации. Вот и простейшее ограничение.

Давайте попробуем на примере. Создадим сигнал  $x(n)$ , состоящий из  $N$  нулевых отсчётов, затем присвоим первым 200 отсчётом значение 1. Это будет наша требуемая форма АЧХ:

Листинг 7 – Анализ АЧХ фильтра, часть 1

```
1 | clear;
```

```

2 fs = 1000; % частота дискретизации
3 ts = 0:1/fs:1-1/fs; % массив временных отсчётов
4 N = length(ts); % длина массива временных отсчётов
5
6 x = zeros(N,1);
7 x(1:200) = 1;

```

Рассчитаем ОДПФ от сигнала  $x(n)$ , для удобства сдвинем его с помощью `ifftshift`, отбросим мнимую часть и присвоим полученный результат сигналу  $y(n)$ . Далее построим графики сигнала  $x(n)$ , и, чтобы лучше рассмотреть сигнал  $y(n)$ , график его 200 центральных отсчётов.

Листинг 8 – Анализ АЧХ фильтра, часть 2

```

8 y = real(ifftshift(ifft(x)));
9
10 subplot(2,1,1);
11 plot(x), grid on;
12 xlabel('Частотные отсчёты');
13 ylabel('Амплитуда');
14 title('Ожидаемая АЧХ, x(n)');
15
16 subplot(2,1,2);
17 plot(N/2-100:N/2+100-1,y(N/2-100:N/2+100-1)), grid on;
18 xlabel('Временные отсчёты');
19 ylabel('Амплитуда');
20 title('Фрагмент полученной импульсной характеристики, y(n)');

```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 7.

Теперь давайте анализировать реальную АЧХ от спроектированного фильтра. Для этого создадим сигнал  $a(n)$ , состоящий из  $N$  нулевых отсчётов, затем присвоим первому отсчёту 1. Таким образом, получим функцию Дирака, спектр которой является константой на всей частотной оси:

Листинг 9 – Анализ АЧХ фильтра, часть 3

```

21 a = zeros(N,1);
22 a(1) = 1;

```

Теперь попробуем пропустить функцию Дирака через спроектированный ранее фильтр  $y(n)$ , при этом будем использовать разное количество отсчётов  $y(n)$ :

Листинг 10 – Анализ АЧХ фильтра, часть 4

```

23 figure;

```

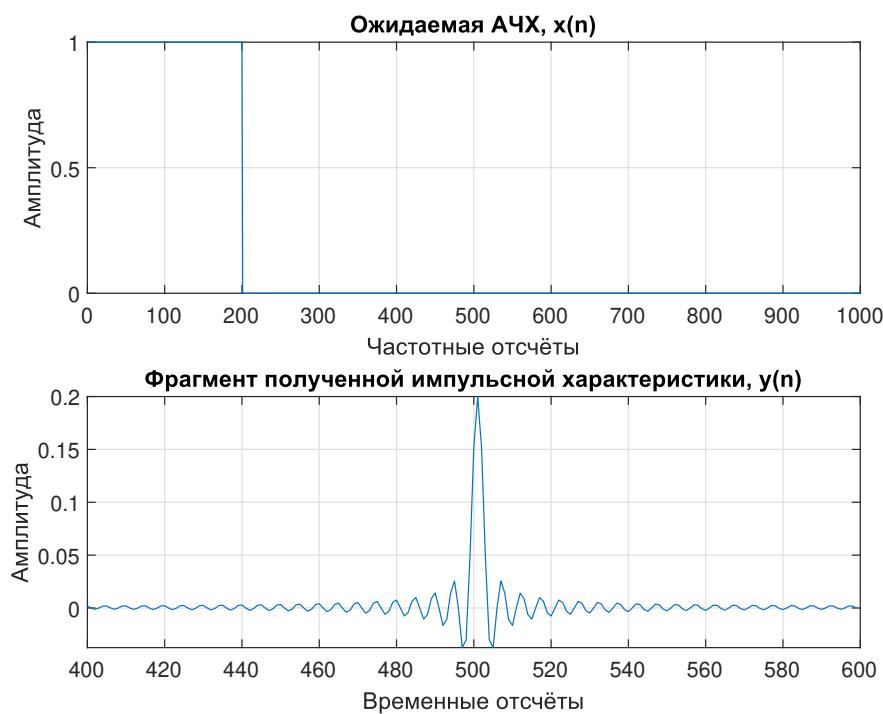


Рис. 7 – Требуемая форма АЧХ фильтра  $x(n)$   
и 200 центральных отсчётов его импульсной характеристики  $y(n)$

```

24
25 Nf1 = 5;
26 af1 = filter(y(N/2-Nf1:N/2+Nf1-1),1,a);
27 subplot(2,2,1);
28 plot(abs(fft(af1))), grid on;
29 xlabel('Частотные отсчёты');
30 ylabel('Амплитуда');
31 title('АЧХ фильтра, N=10');

32
33 Nf2 = 10;
34 af2 = filter(y(N/2-Nf2:N/2+Nf2-1),1,a);
35 subplot(2,2,2);
36 plot(abs(fft(af2))), grid on;
37 xlabel('Частотные отсчёты');
38 ylabel('Амплитуда');
39 title('АЧХ фильтра, N=20');

40
41 Nf3 = 25;

```

```

42 af3 = filter(y(N/2-Nf3:N/2+Nf3-1),1,a);
43 subplot(2,2,3);
44 plot(abs(fft(af3))), grid on;
45 xlabel('Частотные отсчёты');
46 ylabel('Амплитуда');
47 title('АЧХ фильтра, N=50');

48
49 Nf4 = 50;
50 af4 = filter(y(N/2-Nf4:N/2+Nf4-1),1,a);
51 subplot(2,2,4);
52 plot(abs(fft(af4))), grid on;
53 xlabel('Частотные отсчёты');
54 ylabel('Амплитуда');
55 title('АЧХ фильтра, N=100');

```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 8.

Из графиков видно, что, чем больше мы используем отсчётов нашего фильтра (а количество отсчётов – это **порядок цифрового фильтра**), тем более его характеристика становится похожа на идеальную. Однако, стоит обратить внимание, что на вершине АЧХ всех наших фильтров видны пульсации независимо от того, сколько используется отсчётов в импульсной характеристике. Эти пульсации называются **пульсации Гиббса** и возникают из-за медленной сходимости ряда Фурье, которая обусловлена наличием разрыва функции на частоте среза полосы пропускания фильтра. С увеличением числа отсчетов уменьшается длительность выбросов на вершине АЧХ, но их амплитуда не меняется и составляет примерно 9% от амплитуды АЧХ на частоте среза.

## 2.5 Окна при проектировании КИХ-фильтров

Запишем выражение (3) следующим образом:

$$h^\infty[k] \cdot w[k] \xrightarrow[\text{ОДПФ}]{\Delta\text{ПФ}} H^\infty[m] * W[m] \quad (4)$$

где:

- $h^\infty[k]$  – бесконечная импульсная характеристика идеального фильтра
- $w[k]$  – окно, наложенное на бесконечную импульсную характеристику
- $H^\infty[m]$  и  $W[m]$  – их ДПФ

Получается, что, когда мы берём какое-то ограниченное количество отсчётов от импульсной характеристики идеального фильтра, мы умножаем эту импульсную характеристику на прямоугольное окно, спектр которого нам известен (рисунок 6). Эта процедура во временной области эквивалентна свёртке спектра идеальной

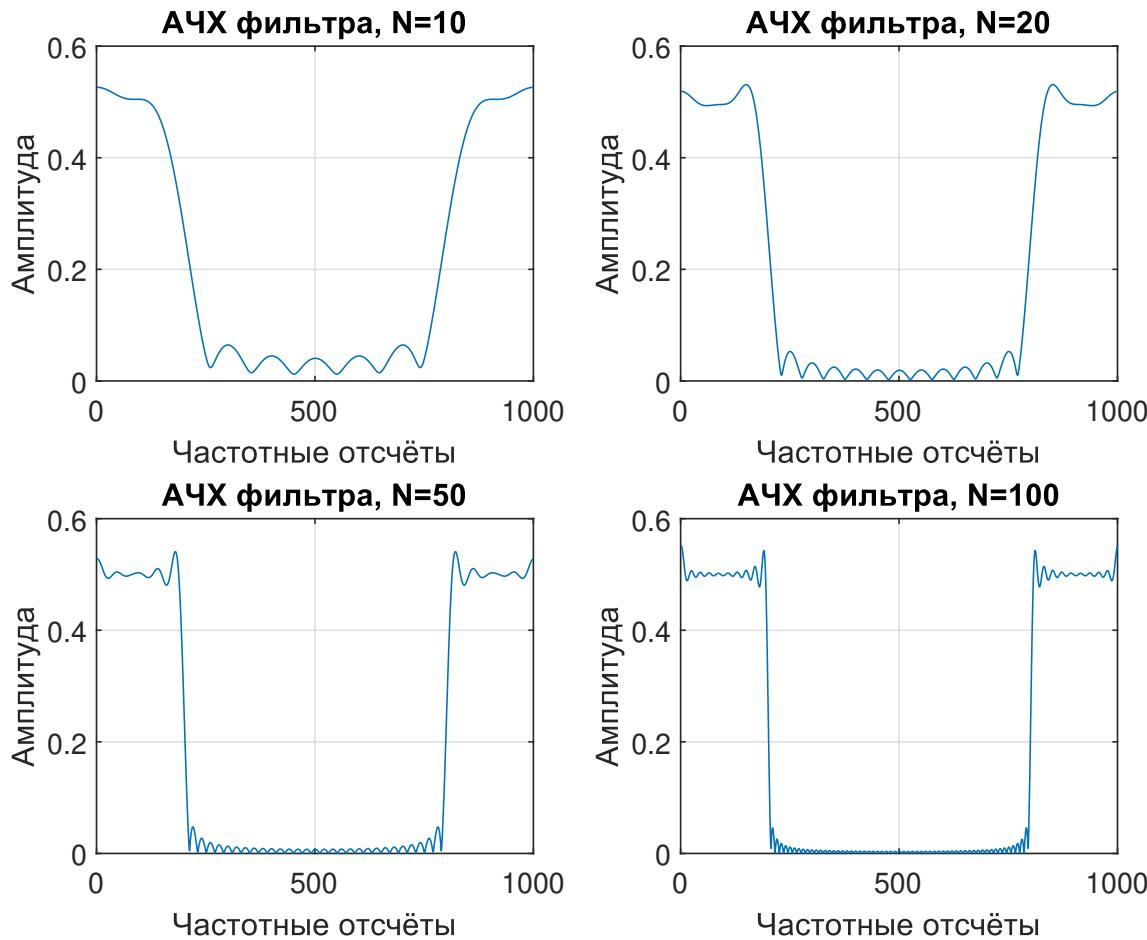


Рис. 8 – Форма АЧХ фильтра в зависимости от количества отсчётов

характеристики и спектра ограниченной импульсной характеристики в частотной области. Ниже приведён листинг, моделирующий выражение (4):

Листинг 11 – Моделирование выражения (4)

```

1 clear;
2 fs = 100; % частота дискретизации
3 ts = -20:1/fs:20-1/fs; % временные отсчёты
4 N = length(ts); % длина массива временных отсчётов
5
6 % Идеальный прямоугольный спектр от бесконечного числа отсчётов
7 Hinf = zeros(N,1);
8 Hinf(N/2-750:N/2+749) = 1;
9
10 % Спектр прямоугольного окна - sinc(x)
11 W = sinc(ts);

```

```

12
13 subplot(2,1,1);
14 plot(Hinf), grid on, hold on;
15 plot(W);
16 xlabel('Частотные отсчёты');
17 ylabel('Амплитуда');
18 title('АЧХ фильтра с бесконечной характеристикой Hinf(n) и окна W(n)');
19
20 % Свёртка спектров
21 c = conv(Hinf, W);
22
23 subplot(2,1,2);
24 plot(c), grid on;
25 xlabel('Частотные отсчёты');
26 ylabel('Амплитуда');
27 title('Свёртка Hinf(n) и W(n)');

```

Результат выполнения скрипта показан на рисунке 9.

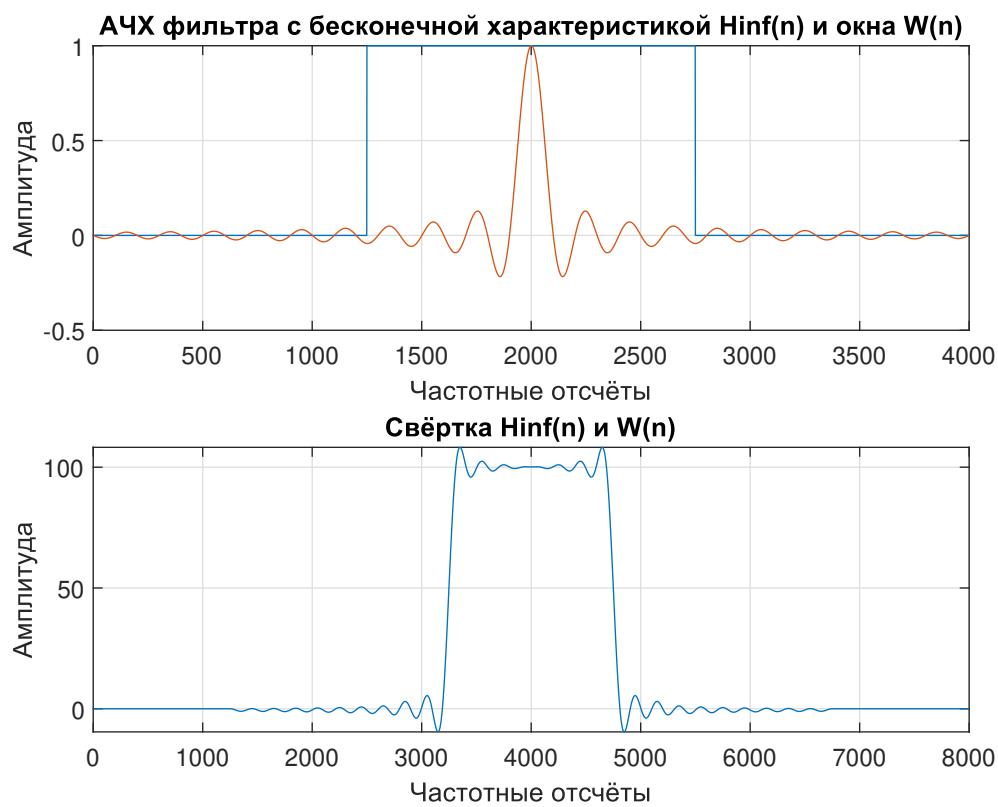


Рис. 9 – Эффект Гиббса

Чтобы уменьшить амплитуду пульсаций, как и в случае с ДПФ, при проектировании КИХ-фильтров используют окна, отличные от прямоугольного. Давайте модифицируем наш листинг 7 и добавим в строчках 26, 34, 42, 50 умножение на окно Хэмминга:

Листинг 12 – Модификация листинга 10

```

1 ...
2 af1 = filter(y(N/2-Nf1:N/2+Nf1-1).*hamming(Nf1*2),1,a);
3 ...
4 af2 = filter(y(N/2-Nf2:N/2+Nf2-1).*hamming(Nf2*2),1,a);
5 ...
6 af3 = filter(y(N/2-Nf3:N/2+Nf3-1).*hamming(Nf3*2),1,a);
7 ...
8 af4 = filter(y(N/2-Nf4:N/2+Nf4-1).*hamming(Nf4*2),1,a);
9 ...

```

Полученные результаты показаны на рисунке 10.

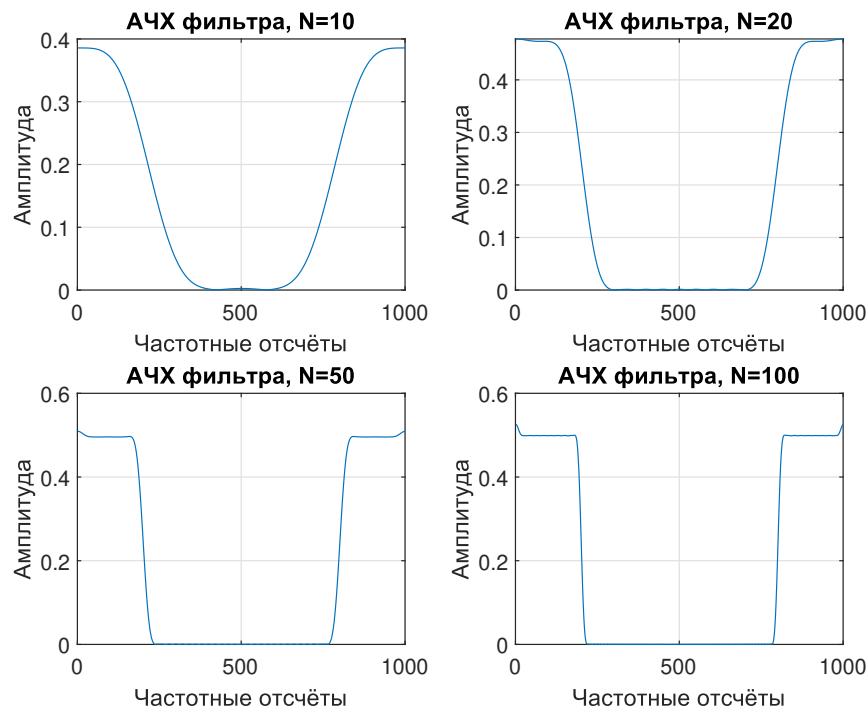


Рис. 10 – Форма АЧХ фильтра, взвешенного окном, в зависимости от количества отсчётов

Другое дело! Пульсации ушли, однако АЧХ фильтра стала более «затянутой». Выбор типа окна зависит от конкретной решаемой задачи. Самые распространённые: параметрическое окно Кайзера, Чебышёва, окно Блэкмана, Хэмминга и др.

### 3 БИХ-фильтры

Основное отличие в структуре БИХ-фильтра от КИХ-фильтра – наличие **обратной связи**. Что такое обратная связь? Это когда на вход устройства подаётся сигнал, пропорциональный сигналу на его выходе. Таким образом, значение выходного сигнала БИХ-фильтра зависит не только от текущего и предыдущего значения входного сигнала, но и от **предыдущего значения выходного сигнала**. Это одновременно и плюс, и минус: наличие обратной связи позволяет значительно сократить количество отсчётов (а значит, и порядок фильтра, а как следствие – количество умножений), однако может привести к неустойчивости его работы, или вообще превратить фильтр в генератор. Из-за того, что при отсутствии входного сигнала на выходе БИХ-фильтра может генерироваться бесконечное количество отсчётов, его и прозвали **фильтром с бесконечной импульсной характеристикой**.

Давайте на примере сравним, сколько же потребуется коэффициентов КИХ- и БИХ-фильтра для реализации одинаковой АЧХ. Спроектируем с помощью filterDesigner два ФНЧ со следующими параметрами:

- $F_s = 44100$  Гц – частота дискретизации;
- $F_{pass} = 10000$  Гц – начало спада АЧХ;
- $F_{stop} = 11000$  Гц – конец спада АЧХ;
- $A_{pass} = 1$  дБ – пульсации в полосе пропускания;
- $A_{stop} = 80$  дБ – подавление в полосе задерживания.

В результате получили два фильтра, АЧХ и ФЧХ которых представлены на рисунке 11.

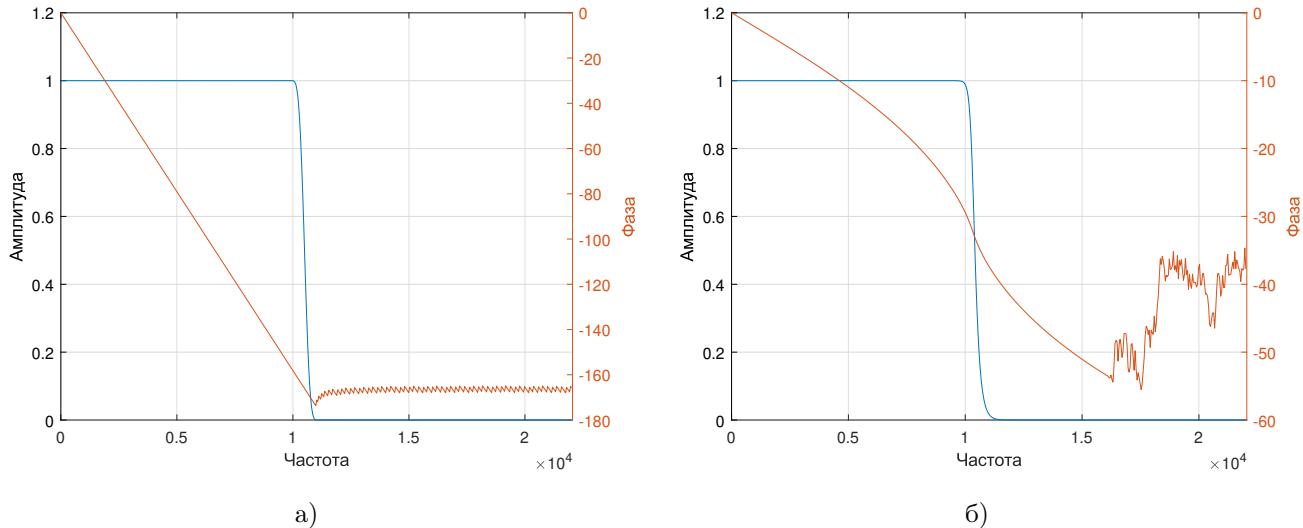


Рис. 11 – АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтра (а) и БИХ-фильтра (б)

Из рисунка 11 видно, что АЧХ фильтров действительно схожи, однако, для реализации КИХ-фильтра нам потребовалось 222 коэффициента, а для реализации БИХ-фильтра – всего 41. Получается, что в случае с БИХ-фильтром, операций умножения требуется в 5 раза меньше.

Следует также обратить внимание на график фазы. У КИХ-фильтров ФЧХ гарантированно линейная, у БИХ-фильтров она гарантированно нелинейная, о чём нужно помнить.

Рассмотрим структуру БИХ-фильтра, она представлена на рисунке 12. Он состоит из двух частей: прямой и обратной связи. Прямая связь повторяет структурную схему КИХ фильтра, обратная связь напоминает зеркальную копию прямой связи.

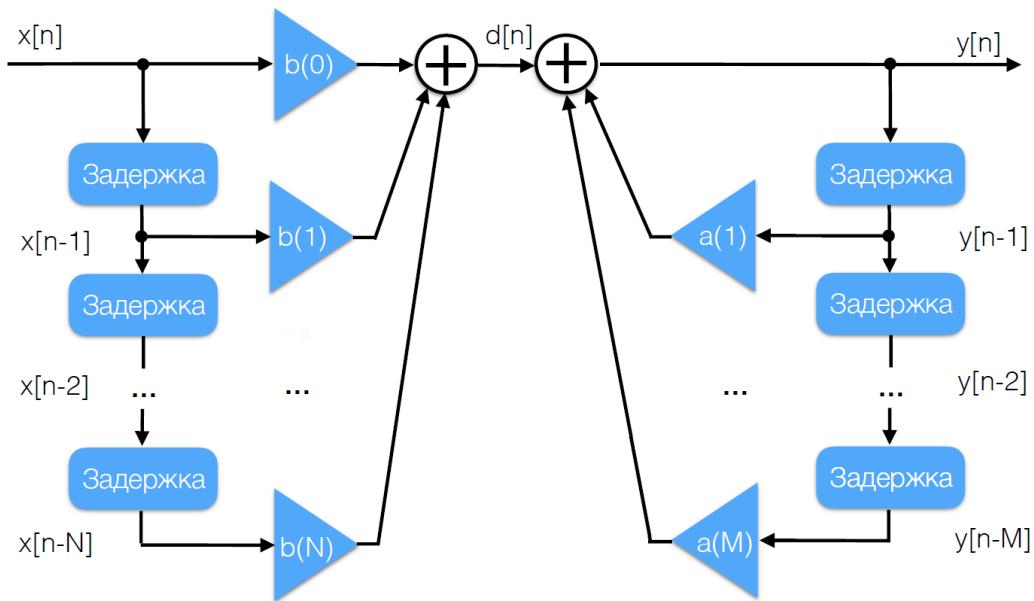


Рис. 12 – Структурная схема БИХ-фильтра

Таким образом, разностное уравнение БИХ-фильтра имеет вид:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N b(i) \cdot x(n-i) - \sum_{k=1}^M a(k) \cdot y(n-k), \quad (5)$$

где:

- $x(n)$  и  $y(n)$  – входной и выходной сигналы соответственно;
- $b(i)$  – коэффициенты прямой связи;
- $a(k)$  – коэффициенты обратной связи;
- $N$  и  $M$  – порядок прямой и обратной связи соответственно;

При проектировании БИХ-фильтров используют z-преобразование, корни которого идут от преобразования Лапласа. Второе преобразование вам точно знакомо, его должны были изучать на курсе математического анализа. Давайте вспомним, что это такое, а затем перейдём к изучению z-преобразования. Но это на следующей лекции.

#### 4 Задания к семинару:

1. Разработать свой усредняющий фильтр для произвольного сигнала и построить его импульсную характеристику.
2. Изучить пакет Matlab filterDesigner.
3. Сгенерировать сигнал, содержащий несколько частотных составляющих, затем разработать с помощью filterDesigner КИХ-фильтр, который убирает и оставляет как минимум одну из этих частотных составляющих.
4. Разработать и применить КИХ-фильтр произвольной АЧХ к произвольному звуковому файлу.
5. Разработать в пакете Matlab Simulink эквалайзер на базе БИХ-фильтров. Количество каналов должно быть не менее четырёх.