Singular Value Decomposition (SVD)

Gliederung

1. Was ist SVD?

2. Wie funktioniert SVD?

3. Was kann man mit SVD machen?

1. Was ist SVD?

Was ist Singular Value Decomposition?

- Die SVD ist ein Tool zur Datenminimierung.

- Es basiert auf der Theorie von Carl Eckart und Gale Young aus dem Jahr 1936. Die Theorie besagt, dass es möglich ist, eine Matrix durch eine andere Matrix mit niedrigerem Rang zu approximieren.

Jede beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m x n}$ kann als Produkt dreier besonderer Matrizen U, Σ und V geschrieben werden, mit $U \in \mathbb{R}^{m x m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m x n}$ und $V \in \mathbb{R}^{n x n}$:

$$M = U\Sigma V^T$$

mit:

U: ist eine unitäre Matrix mit orthonormalen Spalten- und Zeilenvektoren. Hat die gleichen Dimensionen wie A. Trägt alle Informationen aus den Spalten von A (alle Objekte der Matrix A)

V: ist eine unitäre Matrix mit orthonormalen Spalten- und Zeilenvektoren. Trägt alle Informationen aus den Zeilen von A. (Alle Features der Matrix A)

Σ: Diagonalmatrix mit reellen positiven Einträgen,
die restlichen Einträge sind null,
die Singulärwerte sind absteigend geordnet

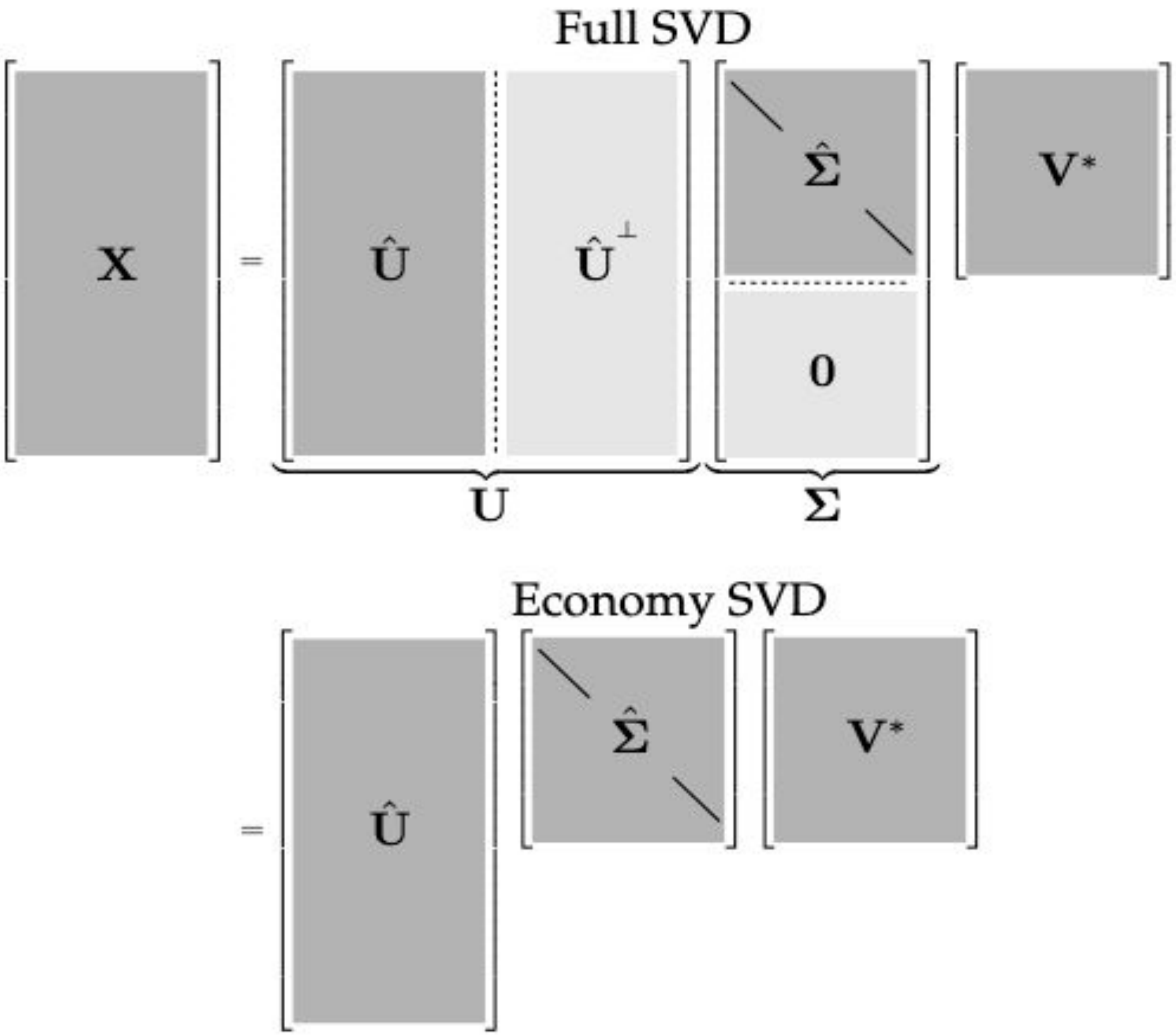
- Die Vektoren der Matrix A können linear unabhängig voneinander ein.

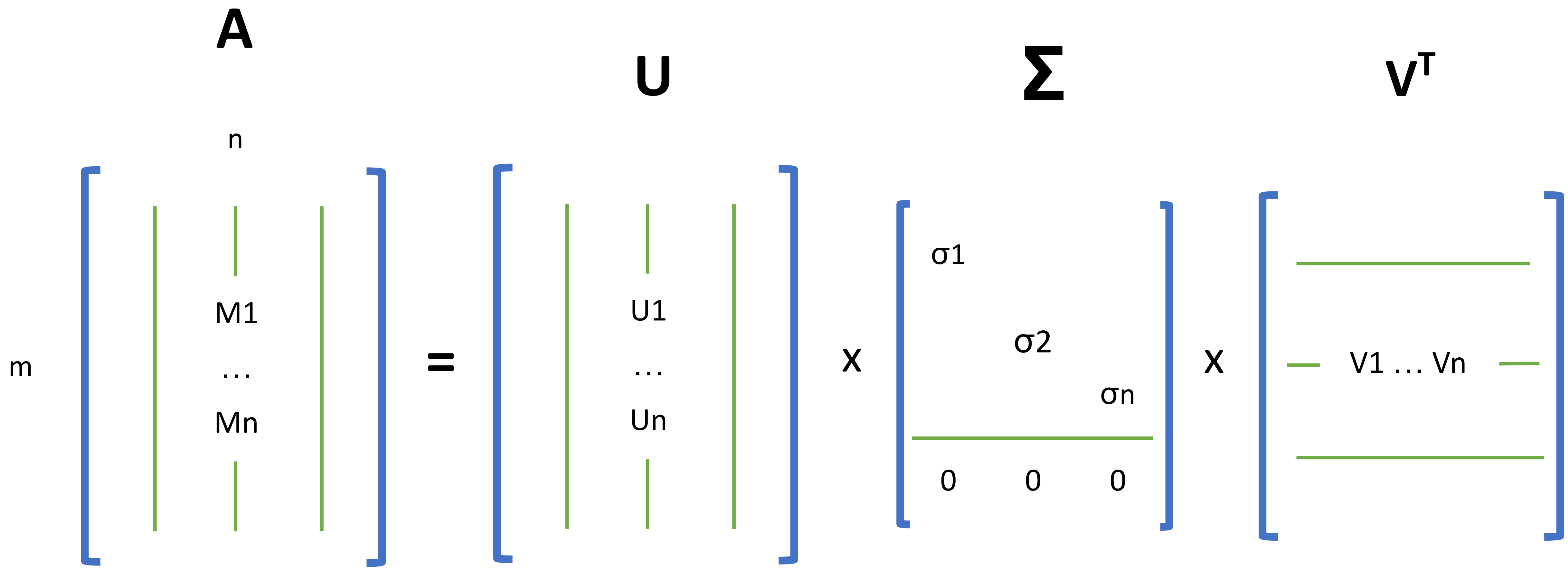
- Die Werte in den jeweiligen zerlegten Matrizen sind hierarchisch nach Wichtigkeit geordnet:

    - U1 > U2 > … Ur
    - σ1 > σ2 > … > σr
    - V1 > V2 >... Vr

- Die Werte der SVD sind einzigartig und garantiert.

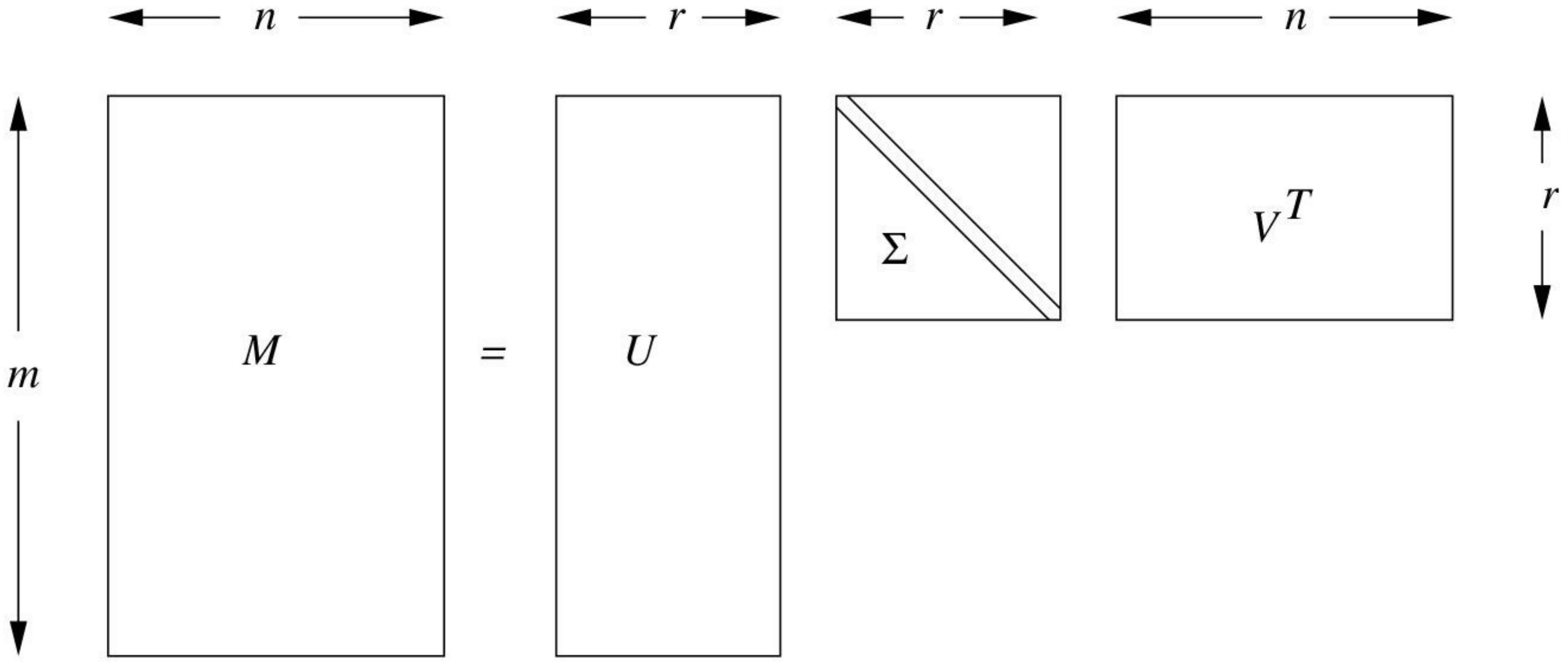
- Die Singulärwerte der Σ-Matrix sind eindeutig durch A bestimmt, die der U- und V-Matrizen dagegen nicht.

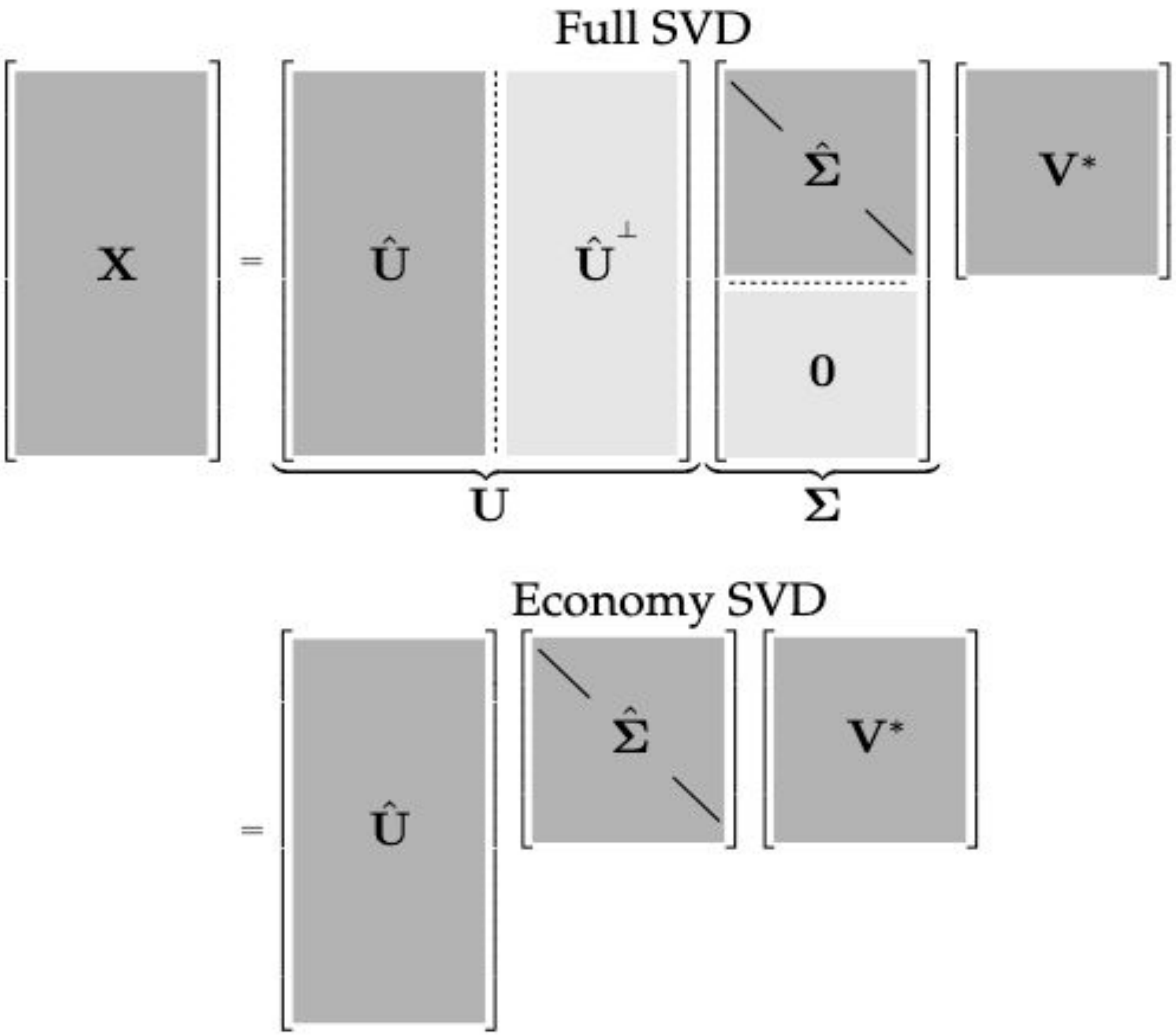

Full SVD
X
=
Û
Û⊥
Σ̂
0
V*
U
Σ
Economy SVD
=
Û
Σ̂
V*



mxn = mxn nxn mxn

Warum ist V transponiert?


n
r
r
n
m
M
=
U
Σ
V^T
r

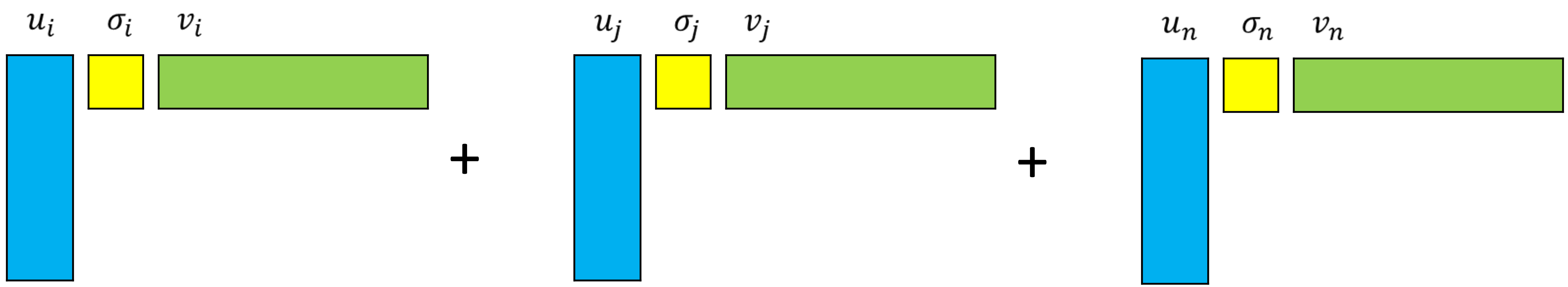

Full SVD
X
=
Û
Û⊥
Σ̂
0
V*
U
Σ
Economy SVD
=
Û
Σ̂
V*

2. Wie funktioniert SVD?

3	4	4	1
5	9	2	6
5	3	5	8
9	7	9	3

A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0,21 & 0,37 & -0,13 & -0,89 \\ -0,52 & -0,7 & 0,43 & -0,23 \\ -0,48 & -0,21 & -0,84 & 0,15 \\ -0,67 & 0,57 & 0,31 & 0,36 \end{bmatrix}}_{U} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 21,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,15 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \times \underbrace{\begin{bmatrix} -0,55 & -0,52 & -0,49 & -0,43 \\ 0,26 & -0,4 & 0,65 & -0,59 \\ 0,07 & 0,7 & -0,22 & -0,68 \\ 0,79 & -0,29 & -0,54 & -0,04 \end{bmatrix}}_{V^T}$$



$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{U}{\begin{bmatrix} -0,21 & 0,37 & -0,13 & -0,89 \\ -0,52 & -0,7 & 0,43 & -0,23 \\ -0,48 & -0,21 & -0,84 & 0,15 \\ -0,67 & 0,57 & 0,31 & 0,36 \end{bmatrix}} \times \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} 21,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,15 \end{bmatrix}} \times \underset{V^T}{\begin{bmatrix} -0,55 & -0,52 & -0,49 & -0,43 \\ 0,26 & -0,4 & 0,65 & -0,59 \\ 0,07 & 0,7 & -0,22 & -0,68 \\ 0,79 & -0,29 & -0,54 & -0,04 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 21.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,21 \\ -0,52 \\ -0,48 \\ -0,67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,55 & -0,52 & -0,49 & -0,43 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2,51 & 2,37 & 2,22 & 1,97 \\ 6,07 & 5,72 & 5,37 & 4,77 \\ 5,63 & 5,31 & 4,99 & 4,43 \\ 7,88 & 7,43 & 6,98 & 6,19 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{U}{\begin{bmatrix} -0{,}21 & 0{,}37 & -0{,}13 & -0{,}89 \\ -0{,}52 & -0{,}7 & 0{,}43 & -0{,}23 \\ -0{,}48 & -0{,}21 & -0{,}84 & 0{,}15 \\ -0{,}67 & 0{,}57 & 0{,}31 & 0{,}36 \end{bmatrix}} \times \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} 21{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}15 \end{bmatrix}} \times \underset{V^T}{\begin{bmatrix} -0{,}55 & -0{,}52 & -0{,}49 & -0{,}43 \\ 0{,}26 & -0{,}4 & 0{,}65 & -0{,}59 \\ 0{,}07 & 0{,}7 & -0{,}22 & -0{,}68 \\ 0{,}79 & -0{,}29 & -0{,}54 & -0{,}04 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 21.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}21 \\ -0{,}52 \\ -0{,}48 \\ -0{,}67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}55 & -0{,}52 & -0{,}49 & -0{,}43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}37 \\ -0{,}7 \\ -0{,}21 \\ 0{,}57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}26 & -0{,}4 & 0{,}65 & -0{,}59 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2{,}51 & 2{,}37 & 2{,}22 & 1{,}97 \\ 6{,}07 & 5{,}72 & 5{,}37 & 4{,}77 \\ 5{,}63 & 5{,}31 & 4{,}99 & 4{,}43 \\ 7{,}88 & 7{,}43 & 6{,}98 & 6{,}19 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3{,}15 & 1{,}41 & 3{,}79 & 0{,}56 \\ 4{,}87 & 7{,}53 & 2{,}44 & 7{,}43 \\ 5{,}28 & 5{,}85 & 4{,}12 & 5{,}22 \\ 8{,}85 & 5{,}96 & 9{,}36 & 4{,}03 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}} = \underset{U}{\begin{bmatrix} -0,21 & 0,37 & -0,13 & -0,89 \\ -0,52 & -0,7 & 0,43 & -0,23 \\ -0,48 & -0,21 & -0,84 & 0,15 \\ -0,67 & 0,57 & 0,31 & 0,36 \end{bmatrix}} \times \underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} 21,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,15 \end{bmatrix}} \times \underset{V^T}{\begin{bmatrix} -0,55 & -0,52 & -0,49 & -0,43 \\ 0,26 & -0,4 & 0,65 & -0,59 \\ 0,07 & 0,7 & -0,22 & -0,68 \\ 0,79 & -0,29 & -0,54 & -0,04 \end{bmatrix}}$$

$$21.2 \begin{bmatrix} -0,21 \\ -0,52 \\ -0,48 \\ -0,67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,55 & -0,52 & -0,49 & -0,43 \end{bmatrix} + 6,4 \begin{bmatrix} 0,37 \\ -0,7 \\ -0,21 \\ 0,57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,26 & -0,4 & 0,65 & -0,59 \end{bmatrix} + 4,9 \begin{bmatrix} -0,13 \\ 0,43 \\ -0,84 \\ 0,31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,07 & 0,7 & -0,22 & -0,68 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 2,51 & 2,37 & 2,22 & 1,97 \\ 6,07 & 5,72 & 5,37 & 4,77 \\ 5,63 & 5,31 & 4,99 & 4,43 \\ 7,88 & 7,43 & 6,98 & 6,19 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3,15 & 1,41 & 3,79 & 0,56 \\ 4,87 & 7,53 & 2,44 & 7,43 \\ 5,28 & 5,85 & 4,12 & 5,22 \\ 8,85 & 5,96 & 9,36 & 4,03 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3,1 & 0,96 & 3,93 & 0,99 \\ 5,03 & 8,99 & 1,98 & 6 \\ 4,98 & 3,01 & 5,01 & 8 \\ 8,96 & 7,02 & 9,03 & 3 \end{bmatrix}$$

$$
\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}}
=
\underset{U}{\begin{bmatrix} -0{,}21 & 0{,}37 & -0{,}13 & -0{,}89 \\ -0{,}52 & -0{,}7 & 0{,}43 & -0{,}23 \\ -0{,}48 & -0{,}21 & -0{,}84 & 0{,}15 \\ -0{,}67 & 0{,}57 & 0{,}31 & 0{,}36 \end{bmatrix}}
\times
\underset{\Sigma}{\begin{bmatrix} 21{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}15 \end{bmatrix}}
\times
\underset{V^T}{\begin{bmatrix} -0{,}55 & -0{,}52 & -0{,}49 & -0{,}43 \\ 0{,}26 & -0{,}4 & 0{,}65 & -0{,}59 \\ 0{,}07 & 0{,}7 & -0{,}22 & -0{,}68 \\ 0{,}79 & -0{,}29 & -0{,}54 & -0{,}04 \end{bmatrix}}
$$

$$
21.2 \begin{bmatrix} -0{,}21 \\ -0{,}52 \\ -0{,}48 \\ -0{,}67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}55 & -0{,}52 & -0{,}49 & -0{,}43 \end{bmatrix}
+ 6{,}4 \begin{bmatrix} 0{,}37 \\ -0{,}7 \\ -0{,}21 \\ 0{,}57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}26 & -0{,}4 & 0{,}65 & -0{,}59 \end{bmatrix}
+ 4{,}9 \begin{bmatrix} -0{,}13 \\ 0{,}43 \\ -0{,}84 \\ 0{,}31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}07 & 0{,}7 & -0{,}22 & -0{,}68 \end{bmatrix}
+ 0{,}15 \begin{bmatrix} -0{,}89 \\ -0{,}23 \\ 0{,}15 \\ 0{,}36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}79 & -0{,}29 & -54 & -0{,}04 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 2{,}51 & 2{,}37 & 2{,}22 & 1{,}97 \\ 6{,}07 & 5{,}72 & 5{,}37 & 4{,}77 \\ 5{,}63 & 5{,}31 & 4{,}99 & 4{,}43 \\ 7{,}88 & 7{,}43 & 6{,}98 & 6{,}19 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 3{,}15 & 1{,}41 & 3{,}79 & 0{,}56 \\ 4{,}87 & 7{,}53 & 2{,}44 & 7{,}43 \\ 5{,}28 & 5{,}85 & 4{,}12 & 5{,}22 \\ 8{,}85 & 5{,}96 & 9{,}36 & 4{,}03 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 3{,}1 & 0{,}96 & 3{,}93 & 0{,}99 \\ 5{,}03 & 8{,}99 & 1{,}98 & 6 \\ 4{,}98 & 3{,}01 & 5{,}01 & 8 \\ 8{,}96 & 7{,}02 & 9{,}03 & 3 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{bmatrix}
$$

3. Was kann man mit SVD machen?

Ein Anwendungsbeispiel

$$
A = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{Matrix} & \text{Inception} & \text{Alien} & \text{Romeo + Juliet} & \text{Titanic} \end{array} \\
\text{Zuschauer} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\
5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 2
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\mathbf{U}
\begin{bmatrix}
0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}01 & 0 & -0{,}98 & -0{,}12 & -0{,}06 \\
0{,}41 & -0{,}07 & 0{,}03 & 0 & 0 & 0 & 0.90 \\
0{,}55 & -0{,}09 & 0{,}04 & 0 & 0 & 0{,}78 & -0{,}25 \\
0{,}68 & -0{,}11 & 0{,}05 & 0 & 0{,}19 & -0{,}60 & -0{,}32 \\
0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}65 & -0{,}44 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}07 & 0{,}73 & 0{,}67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}07 & 0{,}29 & 0{,}32 & 0{,}89 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\times
\mathbf{\Sigma}
\begin{bmatrix}
12{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 9{,}5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1{,}3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\times
\mathbf{V^T}
\begin{bmatrix}
0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\
-0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\
0{,}40 & -0{,}80 & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \\
0 & 0 & 0 & -0{,}70 & 0{,}07 \\
-0{,}70 & 0 & 0{,}70 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} 12{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}01 & 0 & -0{,}98 & -0{,}12 & -0{,}06 \\ 0{,}41 & -0{,}07 & 0{,}03 & 0 & 0 & 0 & 0.90 \\ 0{,}55 & -0{,}09 & 0{,}04 & 0 & 0 & 0{,}78 & -0{,}25 \\ 0{,}68 & -0{,}11 & 0{,}05 & 0 & 0{,}19 & -0{,}60 & -0{,}32 \\ 0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}65 & -0{,}44 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}73 & 0{,}67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}07 & 0{,}29 & 0{,}32 & 0{,}89 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times$$

$$\mathbf{V}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ -0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\ 0{,}40 & -0{,}80 & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}70 & 0{,}07 \\ -0{,}70 & 0 & 0{,}70 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} 12{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 \end{bmatrix}$$

x

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}41 & -0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}55 & -0{,}09 & 0{,}04 \\ 0{,}68 & -0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}65 \\ 0{,}07 & 0{,}73 & 0{,}67 \\ 0{,}07 & 0{,}29 & 0{,}32 \end{bmatrix}$$

x

$$\mathbf{V}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ -0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\ 0{,}40 & -0{,}80 & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$

<u>Warum hat $\sum$ gerade 3 Werte?</u>

Def.: Der Rang einer Matrix

Unter dem Rang einer Matrix versteht man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten- bzw. Zeilenvektoren.

Def.: Lineare Unabhängigkeit

Eine Folge $v_1 \ldots v_n$ heißt linear unabhängig genau dann, wenn die einzige Weise den Nullvektor als Linearkombination $v_1 \ldots v_n$ zu erhalten, ist: $0*v_1+\ldots+0*v_n$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}41 & -0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}55 & -0{,}09 & 0{,}04 \\ 0{,}68 & -0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}65 \\ 0{,}07 & 0{,}73 & 0{,}67 \\ 0{,}07 & 0{,}29 & 0{,}32 \end{bmatrix} \times \mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} 12{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 \end{bmatrix} \times \mathbf{V^T} \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ -0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\ 0{,}40 & -0{,}80 & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$

$$
V^T \quad \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ -0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\ 0{,}40 & -0{,}80 & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \text{Matrix} & \text{Inception} & \text{Alien} & \text{Romeo + Juliet} & \text{Titanic} \end{array} \\
V^T & \begin{bmatrix} \mathbf{0{,}56} & \mathbf{0{,}59} & \mathbf{0{,}56} & 0{,}09 & 0{,}09 \\ -0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & \mathbf{0{,}69} & \mathbf{0{,}69} \\ 0{,}40 & \mathbf{-0{,}80} & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Film - Genre

$$
V^T \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\text{Matrix} & \text{Inception} & \text{Alien} & \text{Romeo + Juliet} & \text{Titanic}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
\mathbf{0{,}56} & \mathbf{0{,}59} & \mathbf{0{,}56} & 0{,}09 & 0{,}09 \\
-0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & \mathbf{0{,}69} & \mathbf{0{,}69} \\
0{,}40 & \mathbf{-0{,}80} & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Science Fiction

Liebes-
filme

?

U

$$\begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}41 & -0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}55 & -0{,}09 & 0{,}04 \\ 0{,}68 & -0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}65 \\ 0{,}07 & 0{,}73 & 0{,}67 \\ 0{,}07 & 0{,}29 & 0{,}32 \end{bmatrix}$$

U

Zuschauer

$$
\begin{array}{c}
A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G
\end{array}
\begin{bmatrix}
\mathbf{0{,}13} & -0{,}02 & 0{,}01 \\
\mathbf{0{,}41} & -0{,}07 & 0{,}03 \\
\mathbf{0{,}55} & -0{,}09 & 0{,}04 \\
\mathbf{0{,}68} & -0{,}11 & 0{,}05 \\
0{,}15 & \mathbf{0{,}59} & \mathbf{0{,}65} \\
0{,}07 & \mathbf{0{,}73} & \mathbf{0{,}67} \\
0{,}07 & \mathbf{0{,}29} & \mathbf{0{,}32}
\end{bmatrix}
$$

Zuschauer - Genre

Science Fiction

$$\mathbf{U}\qquad \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{0{,}13} & -0{,}02 & 0{,}01 \\ \mathbf{0{,}41} & -0{,}07 & 0{,}03 \\ \mathbf{0{,}55} & -0{,}09 & 0{,}04 \\ \mathbf{0{,}68} & -0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & \mathbf{0{,}59} & \mathbf{0{,}65} \\ 0{,}07 & \mathbf{0{,}73} & \mathbf{0{,}67} \\ 0{,}07 & \mathbf{0{,}29} & \mathbf{0{,}32} \end{bmatrix}$$

Zuschauer

Liebes-filme

?

$$\mathbf{\Sigma}$$

$$\begin{bmatrix} 12{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 \end{bmatrix}$$

Σ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{12{,}4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{9{,}5} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1{,}3} \end{bmatrix}$$

Genre -Gewichtung

Liebes-
filme

$$\Sigma$$

Science
Fiction

$$\begin{bmatrix} 12{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 \end{bmatrix}$$

?

Dimensionalitätsreduzierung

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}41 & -0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}55 & -0{,}09 & 0{,}04 \\ 0{,}68 & -0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}65 \\ 0{,}07 & 0{,}73 & 0{,}67 \\ 0{,}07 & 0{,}29 & 0{,}32 \end{bmatrix} \times \mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} 12{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 \end{bmatrix} \times \mathbf{V^T} \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ -0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\ 0{,}40 & -0{,}80 & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$

Dimensionalitätsreduzierung

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{U} \begin{bmatrix} 0{,}13 & -0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}41 & -0{,}07 & 0{,}03 \\ 0{,}55 & -0{,}09 & 0{,}04 \\ 0{,}68 & -0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}59 & 0{,}65 \\ 0{,}07 & 0{,}73 & 0{,}67 \\ 0{,}07 & 0{,}29 & 0{,}32 \end{bmatrix} \times \boldsymbol{\Sigma} \begin{bmatrix} 12{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{1{,}3} \end{bmatrix} \times \mathbf{V}^{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} 0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\ -0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\ 0{,}40 & -0{,}80 & 0{,}40 & 0{,}09 & 0{,}09 \end{bmatrix}$$

Dimensionalitätsreduzierung

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\
5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 4 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 2
\end{bmatrix} =
$$

$$
\mathbf{U}
\begin{bmatrix}
0{,}13 & -0{,}02 & \cancel{0{,}01} \\
0{,}41 & -0{,}07 & \cancel{0{,}03} \\
0{,}55 & -0{,}09 & \cancel{0{,}04} \\
0{,}68 & -0{,}11 & \cancel{0{,}05} \\
0{,}15 & 0{,}59 & \cancel{0{,}65} \\
0{,}07 & 0{,}73 & \cancel{0{,}67} \\
0{,}07 & 0{,}29 & \cancel{0{,}32}
\end{bmatrix}
\times
\boldsymbol{\Sigma}
\begin{bmatrix}
12{,}4 & 0 & 0 \\
0 & 9{,}5 & 0 \\
0 & 0 & \cancel{1{,}3}
\end{bmatrix}
\times
\mathbf{V}^{\mathbf{T}}
\begin{bmatrix}
0{,}56 & 0{,}59 & 0{,}56 & 0{,}09 & 0{,}09 \\
-0{,}12 & -0{,}02 & -0{,}12 & 0{,}69 & 0{,}69 \\
\cancel{0{,}40} & \cancel{0{,}80} & \cancel{0{,}40} & \cancel{0{,}09} & \cancel{0{,}09}
\end{bmatrix}
$$

Approximation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{0{,}92} & \mathbf{0{,}95} & \mathbf{0{,}92} & 0{,}01 & 0{,}01 \\ \mathbf{2{,}91} & \mathbf{3{,}01} & \mathbf{2{,}91} & -0{,}01 & -0{,}01 \\ \mathbf{3{,}90} & \mathbf{4{,}04} & \mathbf{3{,}90} & 0{,}01 & 0{,}01 \\ \mathbf{4{,}82} & \mathbf{5{,}00} & \mathbf{4{,}82} & 0{,}03 & 0{,}03 \\ 0{,}70 & \mathbf{0{,}53} & 0{,}70 & \mathbf{4{,}11} & \mathbf{4{,}11} \\ -0{,}69 & 1{,}34 & -0{,}69 & \mathbf{4{,}78} & \mathbf{4{,}78} \\ 0{,}32 & \mathbf{0{,}23} & 0{,}32 & \mathbf{2{,}01} & \mathbf{2{,}01} \end{bmatrix}$$

Wie viele Werte von Sigma darf man streichen?

Erhalte etwa mind. 90% der „energy“ von der Ursprungsmatrix ∑!

Frobeniusnorm:

$$\sum_{i}^{k} \sigma_i^2$$

In unserem Beispiel:
$(12{,}4)^2+(9{,}5)^2+(1{,}3)^2 = 245{,}70$ > 99%
$(12{,}4)^2+(9{,}5)^2 = 244{,}01$

Was haben wir heute gelernt?

- Mit SVD kann man jede Matrix in drei ganz besondere Matrizen zerlegen

- Die einzelnen Matrizen tragen nicht nur mathematische, sondern auch semantische Informationen

- Mittels SVD kann statistisches Rauschen effektiv aus datensätzen entfernt werden

Quellen:

- Brunton und Kutz: Data Driven Science & Engineering. Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. Seattle, Washington. 2018. S. 1-16

- Eckart und Young.The approximation of one matrix by another of lower rank. 1936.pdf. Abrufbar unter: https://ccrma.stanford.edu/~dattorro/eckart&young.1936.pdf [zuletzt aufgerufen am: 02.02.2021.]

- Karpfinger, Christian: Höhere Mathematik in Rezepten. Begriffe, Sätze und zahlreiche Beispiele in kurzen Lerneinheiten. Berlin, Heidelberg 2014. S. 392 – 397.

- Ullmann, Jeffrey: Chapter 11. Dimensionality Reduction. abrufbar unter: http://infolab.stanford.edu/~ullman/mmds/ch11.pdf. [zuletzt aufgerufen am: 31.01.2021.]

- Serrano, Luis : Singular Value Decomposition (SVD) and Image Compression. Abrufbar unter https://www.youtube.com/watch?v=DG7YTlGnCEo (zuletzt aufgerufen am 03.02.2021)

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!