CHƯƠNG VI

QUAN HỆ TRÊN CÁC TẬP HỢP

I. QUAN HỆ HAI NGÔI:

1.1/ VÍ DỤ MỞ ĐẦU: Cho $S = \{ 0, 1, 2, \ldots , 9, 10 \}$.

$\forall x, y \in S$, đặt $x\Re y$ (ta nói x *có quan hệ* $\Re$ với y) $\Leftrightarrow$ $2x + y = 18$,

nghĩa là $x\overline{\Re}y$ (ta nói x *không có quan hệ* $\Re$ với y) $\Leftrightarrow$ $2x + y \neq 18$.

Ta có $9\Re 0$, $8\Re 2$, $7\Re 4$, $6\Re 6$, $5\Re 8$ và $4\Re 10$. Ngoài ra $2\overline{\Re}3$, $5\overline{\Re}6$, ...

[vì $2(9) + 0 = 2(8) + 2 = 2(7) + 4 = 2(6) + 6 = 2(5) + 8 = 2(4) + 10 = 18 \neq 2(2) + 3$...]

Đặt $\Re = \{ (x, y) \in S^2 \mid x\Re y \} = \{ (9, 0), (8, 2), (7, 4), (6, 6), (5, 8), (4, 10) \} \subset S^2$.

Như vậy từ quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S, ta có tương ứng tập hợp con $\Re$ của S^2.

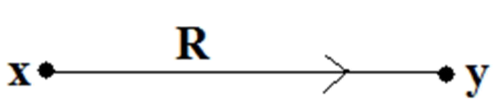
$\forall x, y \in S$, ta viết $[\, x\Re y \Leftrightarrow (x, y) \in \Re \,]$ và $[\, x\overline{\Re}y \Leftrightarrow (x, y) \notin \Re \,]$.

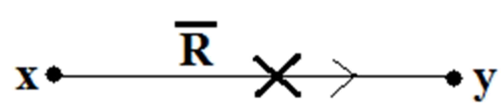
Chẳng hạn như $[\, 7\Re 4 \Leftrightarrow (7, 4) \in \Re \,]$ và $[\, 1\overline{\Re}9 \Leftrightarrow (1, 9) \notin \Re \,]$.

1.2/ ĐỊNH NGHĨA: Một *quan hệ hai ngôi* $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$ thực chất là *một tập hợp con* $\Re$ của tập hợp $S^2 = S \times S$. Tập hợp con này chứa tất cả các cặp (x, y) của S^2 có quan hệ $\Re$. Nói khác đi, mỗi tập hợp con của S^2 xác định một quan hệ hai ngôi trên S. Ta có $\Re = \{ (x, y) \in S^2 \mid x\Re y \} \subset S^2$.

$\forall x, y \in S$, ta viết $[\, x\Re y \Leftrightarrow (x, y) \in \Re \,]$ và $[\, x\overline{\Re}y \Leftrightarrow (x, y) \notin \Re \,]$.

Nếu $| S | = n$ thì $| S^2 | = n^2$ nên ta có 2^{n^2} quan hệ hai ngôi khác nhau trên S.





1.3/ XÁC ĐỊNH QUAN HỆ HAI NGÔI:

Cho tập hợp $S \neq \varnothing$. Có 3 cách xác định một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S như sau:

a) Cách 1: giới thiệu $\Re$ như *một tập hợp con* của S^2 (nếu $\Re$ có ít phần tử).

Ví dụ: $S = \mathbf{Z}$ với các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\Re = \{ (4, -1), (0, 0), (-9, 2), (3, 3), (-5, -6), (7, 4), (-8, -8), (1, 0) \} \subset S^2$.

$\theta = \{ (2k, 5k + 1) \mid k \in \mathbf{Z} \} = \{ (0, 1), (2, 6), (-2, -4), \ldots \} \subset S^2$.

b) Cách 2: giới thiệu *nội dung của quan hệ hai ngôi* $\Re$ (nếu $\Re$ có nhiều phần tử).

Ví dụ: $S = \mathbf{R}$ và $\forall x, y \in S$, đặt $x\Re y \Leftrightarrow 4x^3 > 5y^2 + 1$ (nội dung của quan hệ $\Re$).

Ta kiểm tra được $3\Re(-4)$, $4\overline{\Re}9$, … vì $4.\,3^3 > 5.(-4)^2 + 1$ và $4.\,4^3 > 5.9^2 + 1$, …

c) Cách 3: dùng *ma trận số nhị phân biểu diễn quan hệ hai ngôi* $\Re$ khi S hữu hạn.

Xét $S = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$. Một quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S có thể biểu diễn bằng một bảng ma trận vuông $(n \times n)$ gồm các số nhị phân như sau:

$\mathbf{M}_\Re = \mathbf{M} = (m_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ trong đó $m_{ij} = 1$ (nếu $a_i \Re a_j$) và $m_{ij} = 0$ (nếu $a_i \overline{\Re} a_j$)

M	a_1	…	a_j	…	a_n
a_1	m_{11}	…	m_{1j}	…	m_{1n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_i	m_{i1}	…	m_{ij}	…	m_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_n	m_{n1}	…	m_{nj}	…	m_{nn}

Ví dụ: $S = \{ a, b, c, d \}$ và quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S có ma trận biểu diễn là

$\mathbf{M}_\Re = \mathbf{M} = (m_{ij})_{1 \le i, j \le 4}$

M	a	b	c	d
a	**1**	0	**1**	0
b	0	0	**1**	**1**
c	**1**	0	**1**	**1**
d	**1**	**1**	0	0

Suy ra $\Re = \{ (a, a), (a, c), (b, c), (b, d), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b) \} \subset S^2$.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ HAI NGÔI:

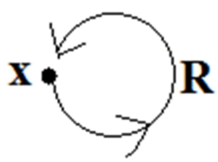
Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

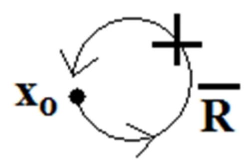
2.1/ TÍNH PHẢN XẠ:

a) $\Re$ *phản xạ* nếu " $\forall x \in S, x\Re x$ " (mọi phần tử của S quan hệ $\Re$ với chính nó).

b) $\Re$ *không phản xạ* nếu " $\exists\, x_o \in S, x_o \overline{\Re} x_o$ ".

(có ít nhất một phần tử x_o của S không quan hệ $\Re$ với chính nó).





Ví dụ:

a) $S = \{ 1, 2, 3 \} \subset T = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

Xét quan hệ hai ngôi $\Re$ trên S (và cũng là quan hệ hai ngôi trên T):

$\Re = \{ (3, 3), (2, 1), (1, 1), (1, 3), (2, 2) \} \subset S^2 \subset T^2$.

$\Re$ (trên S) phản xạ ($\forall x \in S, x\Re x$) nhưng

$\Re$ (trên T) không phản xạ ($\exists\, 4 \in T, 4\overline{\Re}4$) .

b) $S = \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $[\, x\,\gamma\, y \Leftrightarrow x \leq y + 2 \,]$ và $[\, x\,\delta\, y \Leftrightarrow 2x^3 \neq 3y^2 \,]$.

γ phản xạ ($\forall x \in S, x \leq x + 2$ nên $x\,\gamma\, x$).

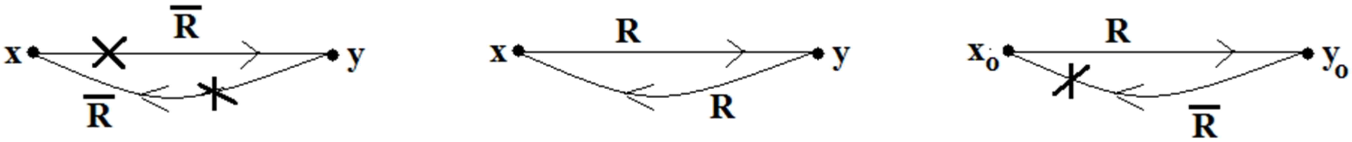
δ không phản xạ ($\exists\, 0 \in S, 2.0^3 = 3.0^2$ nên $0\,\overline{\delta}\,0$).

2.2/ TÍNH ĐỐI XỨNG:

a) $\Re$ *đối xứng* nếu " $\forall x, y \in S, x\Re y \Rightarrow y\Re x$ ". (mọi cặp phần tử của S có quan hệ $\Re$ *theo hai chiều* hoặc *không có quan hệ* $\Re$ *theo bất cứ chiều nào cả*).

b) $\Re$ *không đối xứng* nếu " $\exists\, x_o, y_o \in S, x_o\Re y_o$ và $y_o\overline{\Re}x_o$ " .

(có ít nhất một cặp phần tử x_o , y_o của S *chỉ có quan hệ* $\Re$ *theo một chiều*).

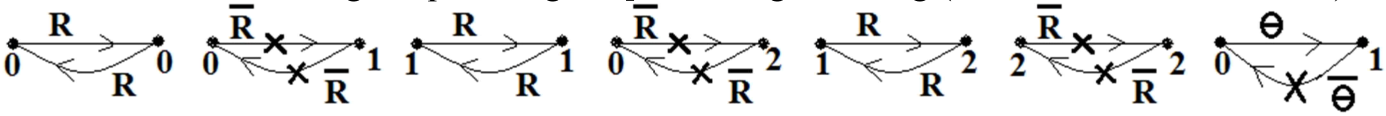


<u>Ví dụ:</u>

a) $S = \{ 0, 1, 2 \}$. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\Re = \{ (0, 0), (2, 1), (1, 1), (1, 2) \} \subset \theta = \Re \cup \{ (0, 1) \} \subset S^2$.

$\Re$ đối xứng [các cặp $(0,0), (1,1), (1,2)$ có quan hệ hai chiều. Các cặp khác vắng mặt thì không có quan hệ gì cả]. θ không đối xứng ($\exists\, 0, 1 \in S, 0\theta 1$ và $1\overline{\theta}0$).



b) $S = \mathbf{Q}$. $\forall x, y \in S$, đặt $[\, x \gamma y \Leftrightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y \,]$ và

$[\, x \delta y \Leftrightarrow 3x^2 + 2y = 3x - 2y^2 \,]$.

γ đối xứng ($\forall x, y \in S, x \gamma y \Rightarrow x^2 + \sin x = y^2 + \sin y \Rightarrow y^2 + \sin y = x^2 + \sin x$ $\Rightarrow y \gamma x$). δ không đối xứng ($\exists\, 1, 0 \in S, 1\delta 0$ và $0\overline{\delta}1$).

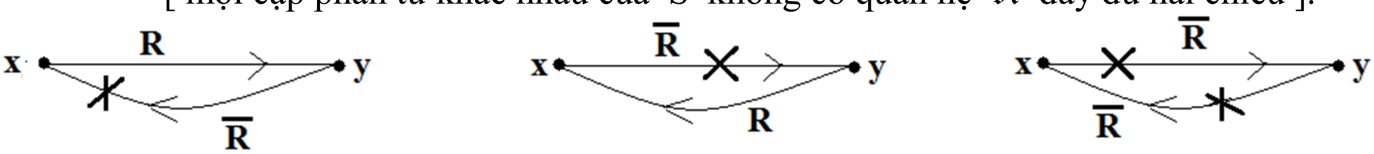
2.3/ <u>TÍNH PHẢN (ĐỐI) XỨNG:</u>

a) $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S, (x\Re y$ và $y\Re x) \Rightarrow x = y$ "

[cặp phần tử nào của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều thì phải trùng nhau].

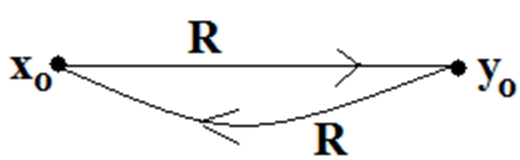
a') $\Re$ *phản xứng* nếu " $\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x\overline{\Re}y$ hay $y\overline{\Re}x)$ "

[mọi cặp phần tử khác nhau của S không có quan hệ $\Re$ đầy đủ hai chiều].



b) $\Re$ *không phản xứng* nếu " $\exists\, x_o, y_o \in S, (x_o\Re y_o$ và $y_o\Re x_o)$ và $x_o \neq y_o$ "

(có ít nhất hai phần tử khác nhau x_o, y_o của S có quan hệ $\Re$ theo hai chiều).



Ví dụ:

a) S = **N**. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\Re = \{ (0, 0), (2, 3), (4, 1), (8, 8), (5, 5) \} \subset \theta = \Re \cup \{ (3, 2) \} \subset S^2$.

$\Re$ phản xứng [$\forall x, y \in S, (x\Re y \text{ và } y\Re x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0)\\(x=8, y=8)\\(x=5, y=5)\end{array}\right. \Rightarrow (x = y)$].

θ không phản xứng [$\exists\, 2, 3 \in S, (2\theta 3 \text{ và } 3\theta 2) \text{ và } 2 \neq 3$].

b) S = **R**. $\forall x, y \in S$, đặt [$x\,\gamma\, y \Leftrightarrow x = y^2$], [$x\,\delta\, y \Leftrightarrow x < y$] và

[$x\,\rho\, y \Leftrightarrow 2x^2 \geq 4y^3 - 5$].

γ phản xứng [$\forall x, y \in S, (x\,\gamma\, y \text{ và } y\,\gamma\, x) \Rightarrow (x = y^2 \text{ và } y = x^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x = x^4 \text{ và } y = x^2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(x=0, x=1)\\ \quad y = x^2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0)\\(x=1, y=1)\end{array}\right. \Rightarrow x = y \text{].}$$

[dùng phát biểu a)].

δ phản xứng [$\forall x, y \in S, (x\,\delta\, y \text{ và } y\,\delta\, x) \Rightarrow (x < y \text{ và } y < x) \Rightarrow (x < y < x)$

$\Rightarrow (x < x) \Rightarrow (x = y)$] [dấu $\Rightarrow$ cuối cùng đúng vì $(x < x)$ có chân trị sai]

[dùng phát biểu a)].

δ phản xứng [$\forall x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x > y \text{ hay } y > x) \Rightarrow (x\,\overline{\delta}\, y \text{ hay } y\,\overline{\delta}\, x)$]

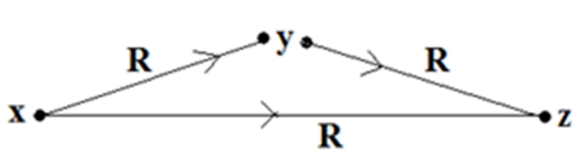
[dùng phát biểu a')].

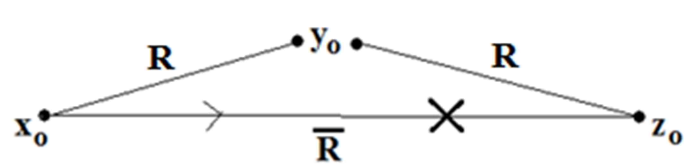
ρ không phản xứng [$\exists\, 1, 0 \in S, (1\rho 0 \text{ và } 0\rho 1) \text{ và } 0 \neq 1$] [dùng phát biểu b)].

2.4/ TÍNH TRUYỀN (BẮC CẦU):

a) $\Re$ *truyền* nếu " $\forall x, y, z \in S, (x\Re \mathbf{y} \text{ và } \mathbf{y}\Re z) \Rightarrow x\Re z$ ".

b) $\Re$ *không truyền* nếu " $\exists\, x_o, y_o, z_o \in S, (x_o\Re \mathbf{y_o} \text{ và } \mathbf{y_o}\Re z_o) \text{ và } x_o\overline{\Re} z_o$ ".





Ví dụ:

a) S = **Z**. Xét các quan hệ hai ngôi $\Re$ và θ trên S như sau:

$\Re = \{ (0, 0), (-5, 4), (-8, -9), (1, 4), (0, -6), (1, -5) \} \subset \theta = \Re \cup \{(-9, 7)\} \subset S^2$.

$\Re$ truyền [$\forall x, y, z \in S$, $(x\Re\mathbf{y}$ và $\mathbf{y}\Re z) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x=0, y=0, z=0)\\(x=0, y=0, z=-6)\\(x=1, y=-5, z=4)\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}0\Re 0\\0\Re(-6)\\1\Re 4\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x \Re z$]. θ không truyền [$\exists (-8), (-9), 7 \in S$, $(-8)\theta(-9)$, $(-9)\theta 7$ và $(-8)\overline{\theta}7$].

b) S = **Q**. $\forall x, y \in S$, đặt [$x \gamma y \Leftrightarrow x + 1 < y$] và [$x \delta y \Leftrightarrow x < y + 1$].

γ truyền [$\forall x, y, z \in S$, $(x \gamma \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \gamma z) \Rightarrow (x + 1 < \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} + 1 < z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x + 1) < \mathbf{y} < \mathbf{y} + 1 < z \Rightarrow (x + 1) < z \Rightarrow x \gamma z \text{].}$$

δ không truyền [$\exists 1, \frac{1}{2}, 0 \in S$, $1\delta\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\delta 0$ và $1\overline{\delta}0$].

III. QUAN HỆ THỨ TỰ:

3.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \varnothing$.

a) $\Re$ là *một quan hệ thứ tự* trên S nếu $\Re$ phản xạ, phản xứng và truyền trên S.

b) Ta dùng ký hiệu $\prec$ để thể hiện *một quan hệ thứ tự tổng quát* trên S.

Ký hiệu $(S, \prec)$ được hiểu là trên tập hợp S có *quan hệ thứ tự* $\prec$.

$\forall x, y \in S$, nếu $x \prec y$ thì ta nói *một cách hình thức* rằng

“ x *nhỏ hơn* y ” hay “ x *kém hơn* y ” hay “ x *đứng trước* y ” hay

“ y *lớn hơn* x ” hay “ y *trội hơn* x ” hay “ y *đứng sau* x ”.

c) Nếu $\Re$ là một *quan hệ thứ tự* trên S và $\varnothing \neq T \subset S$ thì $\Re$ cũng là một *quan hệ thứ tự* trên T. Một quan hệ thứ tự *có thể đối xứng* hoặc *không đối xứng*.

Ví dụ:

a) $\leq$ và $\geq$ là các quan hệ thứ tự trên **R**. Thật vậy, $\leq$ phản xạ ($\forall x \in \mathbf{R}$, $x \leq x$),

$\leq$ phản xứng [$\forall x, y \in \mathbf{R}$, ($x \leq y$ và $y \leq x$) $\Rightarrow$ ($x = y$)] và $\leq$ truyền

[$\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, ($x \leq \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \leq z$) $\Rightarrow$ ($x \leq z$)]. Tương tự cho quan hệ $\geq$.

Do đó $\leq$ và $\geq$ cũng là các quan hệ thứ tự trên **N**, **Z** và **Q**.

b) $|$ và $\vdots$ là các quan hệ thứ tự trên **N**. Thật vậy, $|$ phản xạ ($\forall x \in \mathbf{N}$, $x = 1.\,x$ nên $x \mid x$), $|$ phản xứng [$\forall x, y \in \mathbf{N}$, ($x \mid y$ và $y \mid x$) $\Rightarrow$ ($\exists a, b \in \mathbf{N}$, $y = ax$ và $x = by$)

$$\Rightarrow (x = abx \text{ và } y = ax) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \,\&\, y = 0 \\ hoac \\ x \geq 1, ab = 1, y = ax \end{array}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x = 0 \,\&\, y = 0 \\ hoac \\ x \geq 1, a = b = 1, y = x \end{array}\right) \Rightarrow (x = y) \;]$$

và $|$ truyền [$\forall x, y, z \in \mathbf{N}$, ($x \mid \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \mid z$) $\Rightarrow$ ($\exists a, b \in \mathbf{N}$, $y = ax$ và $z = by$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ($z = abx$ với $ab \in \mathbf{N}$) $\Rightarrow$ ($x \mid z$)]. Tương tự cho quan hệ $\vdots$.

c) $\subset$ và $\supset$ là các quan hệ thứ tự trên $\Pi = \wp(E)$. Thật vậy, $\subset$ phản xạ ($\forall A \in \Pi$, $A \subset A$), $\subset$ phản xứng [$\forall A, B \in \Pi$, ($A \subset B$ và $B \subset A$) $\Rightarrow A = B$], $\subset$ truyền [$\forall A, B, C \in \Pi$, ($A \subset \mathbf{B}$ và $\mathbf{B} \subset C$) $\Rightarrow$ ($A \subset C$)]. Tương tự cho quan hệ $\supset$.

d) $<$ và $>$ không phải là các quan hệ thứ tự trên **R** vì các quan hệ $<$ và $>$ không phản xạ trên **R** ($\exists\, 1 \in \mathbf{R}$, $1 \not< 1$ và $1 \not> 1$).

Để ý các quan hệ $<$ và $>$ vẫn phản xứng và truyền trên **R**.

e) $|$ và $\vdots$ không phải là các quan hệ thứ tự trên **Z** vì các quan hệ $|$ và $\vdots$ không phản xứng trên **Z** [$\exists 1, -1 \in \mathbf{Z}$, $1 \mid (-1)$, $(-1) \mid 1$, $1 \vdots (-1)$, $(-1) \vdots 1$ và $1 \neq -1$].

Để ý các quan hệ $|$ và $\vdots$ vẫn phản xạ và truyền trên **Z**.

3.2/ <u>THỨ TỰ TOÀN PHẦN – THỨ TỰ BÁN PHẦN:</u> Cho $(S, \prec)$.

Có đúng một trong hai trường hợp sau đây xảy ra:

a) Trường hợp 1: $\forall x, y \in S$, $x \prec y$ hay $y \prec x$ (x và y *so sánh được với nhau* bởi quan hệ thứ tự $\prec$). Ta nói $\prec$ là một *thứ tự toàn phần* trên S.

b) Trường hợp 2: $\exists\, x_o, y_o \in S$, $x_o \overline{\prec} y_o$ và $y_o \overline{\prec} x_o$ (x_o và y_o *không so sánh được với nhau* bởi quan hệ thứ tự $\prec$). Ta nói $\prec$ là một *thứ tự bán phần* trên S.

Ví dụ:

a) ($\mathbf{R}, \le$) và ($\mathbf{R}, \ge$) lần lượt là các tập hợp có quan hệ thứ tự *toàn phần* $\le$ và $\ge$.

[$\forall x, y \in \mathbf{R}$, ($x \le y$ hay $y \le x$) và ($x \ge y$ hay $y \ge x$)].

b) $S = \{ a = 2^n \mid n \in \mathbf{N} \} \subset \mathbf{N}$. Do $\mid$ và $\vdots$ là các quan hệ thứ tự trên $\mathbf{N}$ nên $(S, \mid)$ và $(S, \vdots)$ cũng là các tập hợp có quan hệ thứ tự $\mid$ và $\vdots$. Hơn nữa đây là các thứ tự *toàn phần* [$\forall x = 2^p, y = 2^q \in S$, ($x \mid y \Leftrightarrow p \le q$) và ($x \vdots y \Leftrightarrow p \ge q$)].

c) ($\mathbf{N}, \mid$) và ($\mathbf{N}, \vdots$) là các tập hợp có quan hệ thứ tự *bán phần* $\mid$ và $\vdots$

($\exists\, 2, 3 \in \mathbf{N}$, $\overline{2 \mid 3}$ và $\overline{3 \mid 2}$ cũng như $\overline{2 \vdots 3}$ và $\overline{3 \vdots 2}$).

d) $\subset$ và $\supset$ là các quan hệ thứ tự *bán phần* trên $\Pi = \wp(E)$ nếu $|E| \ge 2$. Thật vậy, với $E = \{ a, b, \ldots \}$ và $\Pi = \{ \varnothing, A = \{a\}, B = \{b\}, C = \{a,b\}, \ldots \}$ thì $\exists A, B \in \Pi$, $A \not\subset B$ và $B \not\subset A$. Nếu $E = \varnothing$ hoặc $E = \{ a \}$ thì $\Pi = \{ \varnothing \}$ hoặc $\Pi = \{ \varnothing, \{a\} \}$ nên ta thấy ngay $\subset$ và $\supset$ là các quan hệ thứ tự *toàn phần* trên $\Pi = \wp(E)$.

3.3/ KHÁI NIỆM KỀ NHAU TRONG QUAN HỆ THỨ TỰ:

Cho $(S, \prec)$ và $x, y \in S$ với $x \ne y$.

a) Nếu $x \prec y$ và không có $\mathbf{z} \in S \setminus \{ x, y \}$ thỏa $x \prec \mathbf{z} \prec y$ thì ta nói "x *kề với* y (với vị thế x *kém* y *trội*)" hay "y là *một trội trực tiếp* của x".

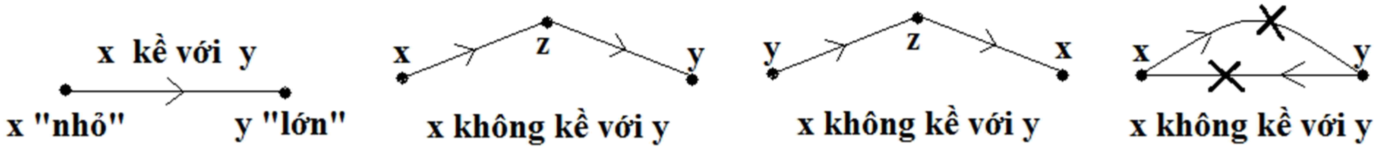
Ta vẽ *đoạn thẳng (cong) có mũi tên định hướng* nối trực tiếp từ x đến y: $x \rightarrow y$.

b) Suy ra x và y *không kề nhau* nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

* $x \overline{\prec} y$ và $y \overline{\prec} x$ (x và y không so sánh được với nhau bởi quan hệ thứ tự $\prec$).

* $\exists\, \mathbf{z} \in S \setminus \{ x, y \}$ thỏa ($x \prec \mathbf{z} \prec y$ hay $y \prec \mathbf{z} \prec x$).

Lúc này không có đoạn thẳng (hay đoạn cong) nào nối trực tiếp từ x đến y.



<u>Ví dụ:</u>

a) $\forall k \in (\mathbf{Z}, \leq)$, ta có k và $(k + 1)$ là kề nhau [$k \leq k + 1$ và $\forall a \in \mathbf{Z}$, không xảy ra $k < a < k + 1$] nhưng k và $k + 2$ không kề nhau [$\exists (k + 1) \in \mathbf{Z}$, $k < k + 1 < k + 2$].

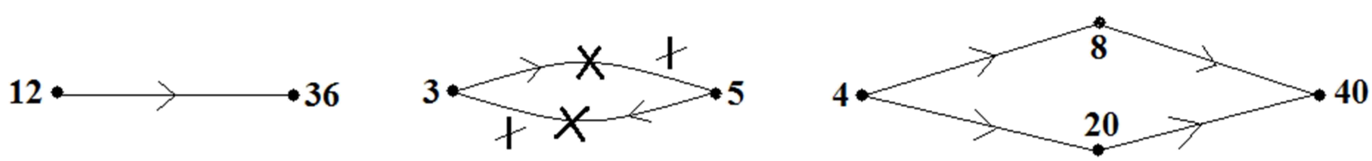
b) Trong $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$, không có cặp phần tử nào kề nhau.

[$\forall x, y \in \mathbf{R}$ mà $x < y$ (tức $y > x$), $\exists z = 2^{-1}(x + y) \in \mathbf{R}$, $x < z < y$ (tức $y > z > x$)].

c) Trong $(\mathbf{N}, |)$:

12 và 36 kề nhau ($12 \mid 36$ và không có $a \in \mathbf{N}$ thỏa $12 \mid a$, $a \mid 36$ và $12 \neq a \neq 36$). 3 và 5 không kề nhau ($\overline{3|5}$ và $\overline{5|3}$).

4 và 40 không kề nhau ($\exists\, 8 \in \mathbf{N}$ thỏa $4 \mid 8$, $8 \mid 40$ và $4 \neq 8 \neq 40$).

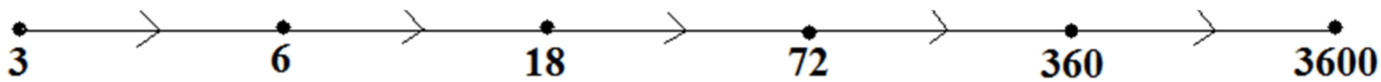


d) Xét *quan hệ thứ tự ước số* (hoặc *quan hệ thứ tự bội số*) trên $\mathbf{N}$ và $a, b \in \mathbf{N}$.

* Nếu $a = \mathbf{q}b$ với $\mathbf{q}$ là *số nguyên tố* thì a và b kề nhau.

* Nếu $a = \mathbf{q}b$ với $\mathbf{q}$ là *số không nguyên tố* thì không có kết luận về a và b.

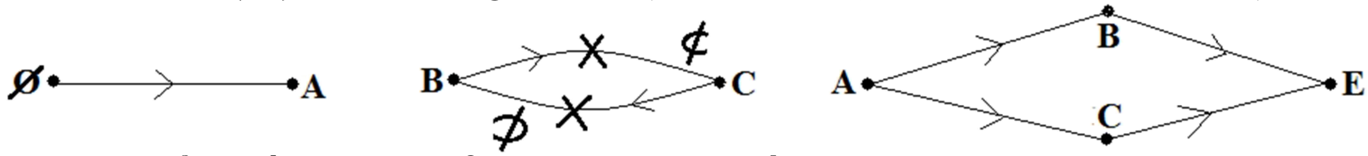
Chẳng hạn $S = \{ 3, 6, 18, 72, 360, 3600 \}$ với quan hệ thứ tự ước số $|$.



$6 = \mathbf{2} \times 3$, $18 = \mathbf{3} \times 6$ và $360 = \mathbf{5} \times 72$ với $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}$ là các số nguyên tố nên 3 kề với 6, 6 kề với 18 và 72 kề với 360.

$18 = \mathbf{6} \times 3$ và $3600 = \mathbf{10} \times 360$ với $\mathbf{6}, \mathbf{10}$ là các số không nguyên tố. Tuy nhiên 3 không kề với 18 và 360 lại kề với 3600.

e) Xét $(\wp(E), \subset)$ với $E = \{ a, b, c \}$. Khi đó: $\varnothing$ và $A = \{ a \}$ kề nhau ($\varnothing \subset A$) $A = \{ a \}$ và $B = \{ a, b \}$ kề nhau $(A \subset B)$. $A = \{ a \}$ và $C = \{ a, c \}$ kề nhau ($A \subset C$). $B = \{ a, b \}$ và $C = \{ a, c \}$ không kề nhau (vì $B \not\subset C$ và $C \not\subset B$).
$A = \{ a \}$ và E không kề nhau (vì $A \subset \mathbf{B = \{ a, b \}} \subset E$ và $A \neq \mathbf{B} \neq E$).



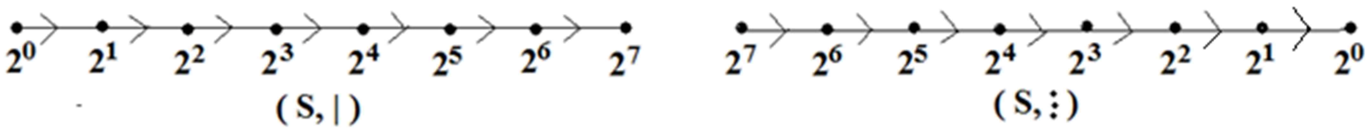
3.4/ <u>BIỂU ĐỒ HASSE CỦA QUAN HỆ THỨ TỰ:</u> Cho $(S, \prec)$ với S *hữu hạn*.

a) Vẽ *cạnh nối* (*có mũi tên định hướng*) cho tất cả các cặp phần tử kề nhau trong $(S, \prec)$. Hình vẽ có được gọi là *biểu đồ Hasse* của $(S, \prec)$.

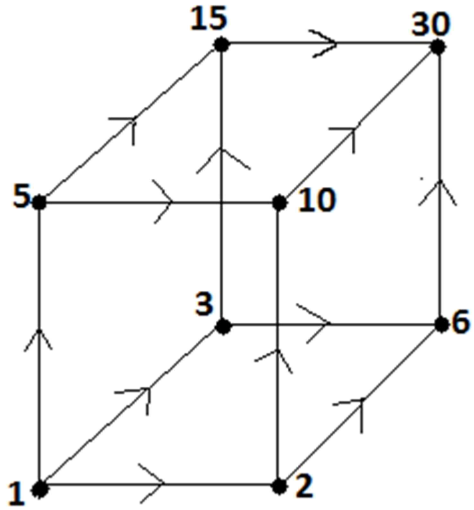
b) Nếu $\prec$ là *một thứ tự toàn phần* trên S thì biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ có thể vẽ một cách đơn giản trên một đoạn thẳng. Nếu $\prec$ là *một thứ tự bán phần* trên S thì biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ phải rẽ thành nhiều nhánh.

<u>Ví dụ:</u>

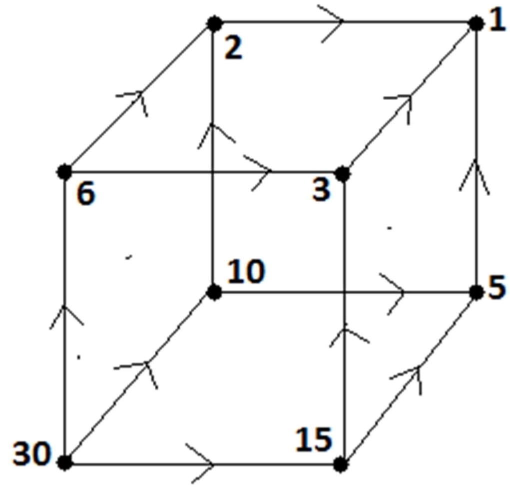
a) $S = \{ a = 2^k \mid k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \}$. Ta có $\mid$ và $\vdots$ đều là các quan hệ thứ tự toàn phần trên S [$\forall x = 2^p, y = 2^q \in S$, ($x \mid y \Leftrightarrow p \leq q$) và ($x \vdots y \Leftrightarrow p \geq q$)] nên biểu đồ Hasse của chúng có thể vẽ trên một đoạn thẳng lần lượt như sau:



b) $T = \{$ các ước số dương của $30 \} = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 \}$. Ta có $\mid$ và $\vdots$ đều là các quan hệ thứ tự bán phần trên T ($\overline{2 \mid 3}$, $\overline{3 \mid 2}$, $\overline{2 \vdots 3}$ và $\overline{3 \vdots 2}$) nên biểu đồ Hasse của chúng sẽ rẽ nhánh như sau:



(T, |)



(T, ⋮)

3.5/ <u>PHẦN TỬ CỰC TIỂU (NHỎ NHẤT) VÀ CỰC ĐẠI (LỚN NHẤT):</u>

Cho $(S, \prec)$.

a) Ta nói a là *phần tử nhỏ nhất* (*phần tử cực tiểu*) của $(S, \prec)$

[ký hiệu $a = min(S, \prec)$] nếu $a \in S$ và $a \prec x, \forall x \in S$.

b) Ta nói b là *phần tử lớn nhất* (*phần tử cực đại*) của $(S, \prec)$

[ký hiệu $b = max(S, \prec)$] nếu $b \in S$ và $x \prec b, \forall x \in S$.

c) Phần tử *min* (*cực tiểu, nhỏ nhất*) và *max* (*cực đại, lớn nhất*) của $(S, \prec)$ hoặc *không tồn tại* hoặc *tồn tại duy nhất*.

3.6/ <u>NHẬN XÉT:</u> Cho $(S, \prec)$.

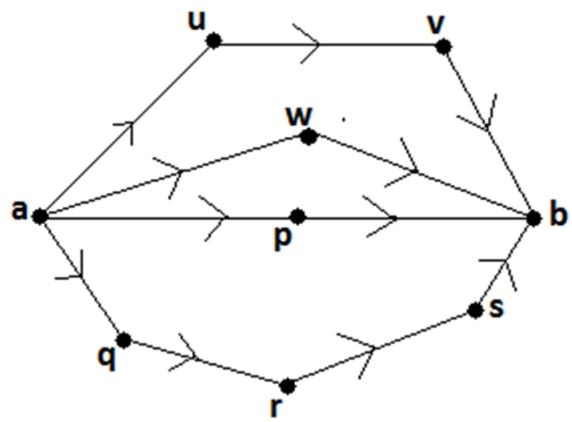
a) Trên biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$, phần tử min (nếu có) là *điểm xuất phát chung của mọi nhánh* và phần tử max (nếu có) là *điểm kết thúc chung của mọi nhánh*.

b) Nếu S *hữu hạn* ($|S| = n$) và $\prec$ là *thứ tự toàn phần* thì $(S, \prec)$ luôn có min và max. Trong hình dưới đây, $min(S, \prec) = a_1$ và $min(S, \prec) = a_n$.

c) Nếu tồn tại $a = min(S, \prec)$ và $b = max(S, \prec)$ thì hiển nhiên $a \prec b$.

Ví dụ:

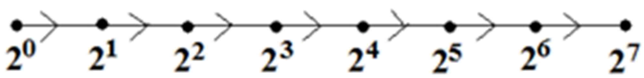
a) Cho $(S, \prec)$ có biểu đồ Hasse như sau:



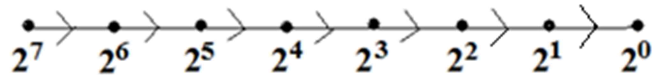
$(S, \prec)$.

Ta có $a = \min(S, \prec)$ và $b = \max(S, \prec)$.

b) Xét các tập S và T trong **Ví dụ** (**3.4**). Ta có

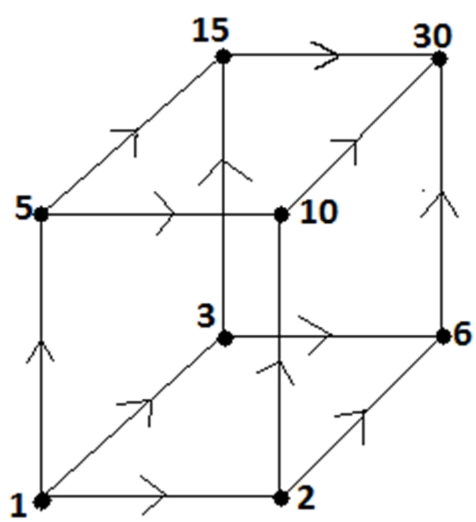


(S, |)

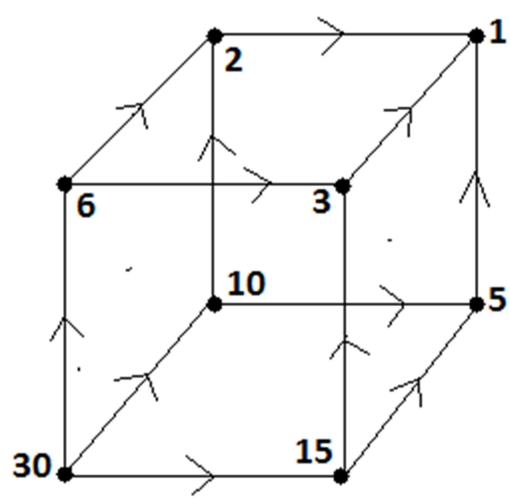


(S, ⋮)

$\min(S, |\,) = \mathbf{2^o}$, $\max(S, |\,) = \mathbf{2^7}$, $\min(S, ⋮) = \mathbf{2^7}$ và $\max(S, ⋮) = \mathbf{2^o}$.



(T, |)



(T, ⋮)

$\min(T, |\,) = \mathbf{1}$, $\max(T, |\,) = \mathbf{30}$, $\min(T, ⋮) = \mathbf{30}$ và $\max(T, ⋮) = \mathbf{1}$.

c) Cho $S = [-3, 8] \subset \mathbf{R}$. Khi đó

$\min(S, \le) = \mathbf{-3}$ và $\max(S, \le) = \mathbf{8}$ (vì $\mathbf{-3}, \mathbf{8} \in S$ và $\forall x \in S, \mathbf{-3} \le x \le \mathbf{8}$).

$\min(S, \ge) = \mathbf{8}$ và $\max(S, \ge) = \mathbf{-3}$ (vì $\mathbf{8}, \mathbf{-3} \in S$ và $\forall x \in S, \mathbf{8} \ge x \ge \mathbf{-3}$).

d) $\min(\mathbf{N}, |\,) = \mathbf{1}$ và $\max(\mathbf{N}, |\,) = \mathbf{0}$ (vì $\mathbf{1}, \mathbf{0} \in \mathbf{N}$ và $\forall x \in \mathbf{N}, \mathbf{1} \mid x$ và $x \mid \mathbf{0}$).

$\min(\mathbf{N}, \vdots\,) = \mathbf{0}$ và $\max(\mathbf{N}, \vdots\,) = \mathbf{1}$ (vì $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathbf{N}$ và $\forall x \in \mathbf{N}, \mathbf{0} \vdots x$ và $x \vdots \mathbf{1}$).

e) $\min(\ \Pi = \wp(E), \subset\ ) = \varnothing$ và $\max(\ \Pi = \wp(E), \subset\ ) = \mathbf{E}$

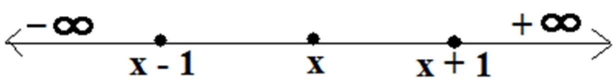
(vì $\varnothing, \mathbf{E} \in \Pi$ và $\forall A \in \Pi,\ \varnothing \subset A \subset \mathbf{E}$).

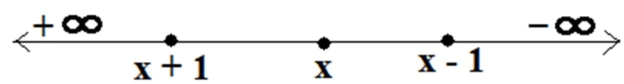
$\min(\ \Pi = \wp(E), \supset\ ) = \mathbf{E}$ và $\max(\ \Pi = \wp(E), \supset\ ) = \varnothing$

(vì $\mathbf{E}, \varnothing \in \Pi$ và $\forall A \in \Pi,\ \mathbf{E} \supset A \supset \varnothing$).

f) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ không có min và max vì $\forall x \in \mathbf{R}, \exists\ (x-1), (x+1) \in \mathbf{R}$,

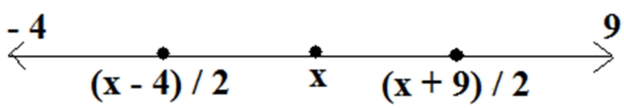
$x - 1 < x < x + 1$ và $x + 1 > x > x - 1$.

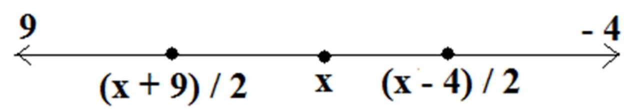




g) Cho $T = (-4, 9) \subset \mathbf{R}$. Khi đó $(T, \leq)$ và $(T, \geq)$ không có min và max vì

$\forall x \in T, \exists\ \frac{x-4}{2}, \frac{x+9}{2} \in T,\ \frac{x-4}{2} < x < \frac{x+9}{2}$ và $\frac{x+9}{2} > x > \frac{x-4}{2}$.





3.7/ <u>PHẦN TỬ TỐI TIỂU VÀ TỐI ĐẠI:</u> Cho $(S, \prec)$.

a) Ta nói a là *một phần tử tối tiểu* của $(S, \prec)$ nếu $a \in S$ và *không có*

$a' \in S \setminus \{a\}$ thỏa $a' \prec a$.

Phần tử min của $(S, \prec)$ [nếu có] là một phần tử tối tiểu đặc biệt và duy nhất.

b) Ta nói b là *một phần tử tối đại* của $(S, \prec)$ nếu $b \in S$ và *không có*

$b' \in S \setminus \{b\}$ thỏa $b \prec b'$.

Phần tử max của $(S, \prec)$ [nếu có] là một phần tử tối đại đặc biệt và duy nhất.

c) Phần tử tối tiểu và tối đại của $(S, \prec)$ hoặc *không tồn tại* hoặc *tồn tại mà không nhất thiết duy nhất.*

3.8/ <u>NHẬN XÉT:</u> Cho $(S, \prec)$.

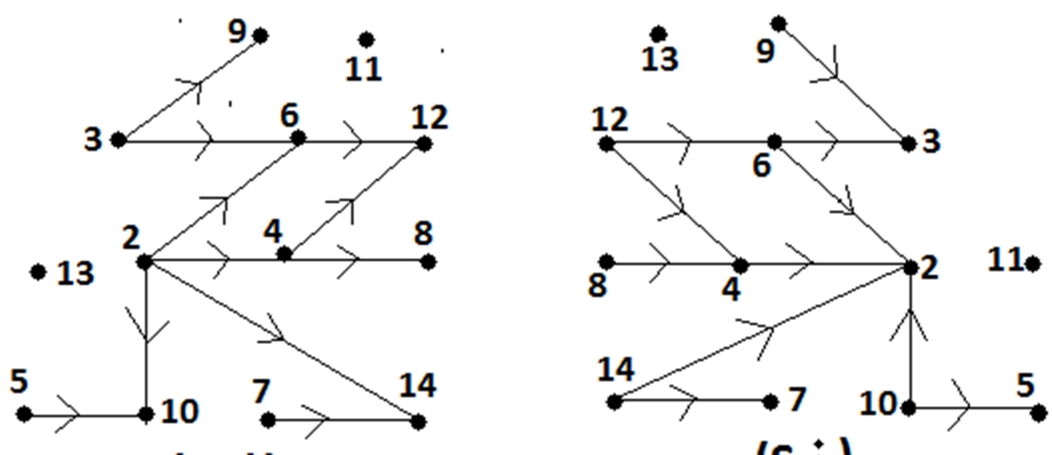
a) Trên biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$, phần tử tối tiểu (nếu có) là *điểm xuất phát của ít nhất một nhánh* và phần tử tối đại (nếu có) là *điểm kết thúc của ít nhất một nhánh*. *Các phần tử cô lập* (nếu có) của $(S, \prec)$ [phần tử cô lập là phần tử không so sánh được với mọi phần tử khác] được xem như là *các nhánh cụt* có điểm xuất phát trùng với điểm kết thúc nên chúng vừa là phần tử tối tiểu vừa là phần tử tối đại của $(S, \prec)$.

b) Nếu S *hữu hạn* và $\prec$ là *thứ tự tùy ý* thì $(S, \prec)$ có các phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

<u>Ví dụ:</u>

a) Cho $S = \{ 2, 3, 4, \ldots , 12, 13, 14 \}$ với các quan hệ $|$ và $\vdots$ trên S.

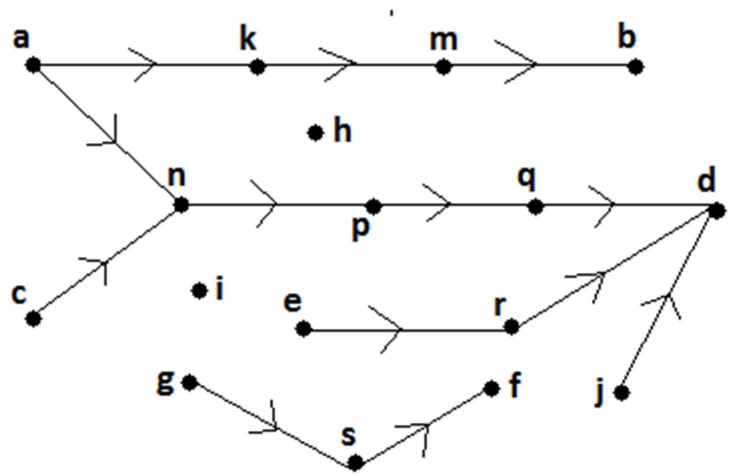
Biểu đồ Hasse của $(S, |)$ và $(S, \vdots)$ lần lượt là



(S, |) (S,⋮)

$(S, |)$ có các phần tử tối tiểu là 2, 3, 5, 7, 11, 13 và các phần tử tối đại là 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14. $(S, \vdots)$ có các phần tử tối tiểu là 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 và các phần tử tối đại là 2, 3, 5, 7, 11, 13.

b) Cho $(S, \prec)$ có biểu đồ Hasse như sau:

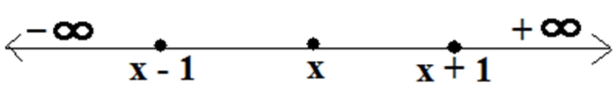


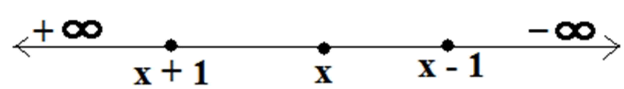
$(S, \prec)$.

$(S, \prec)$ có các phần tử tối tiểu a, c, e, g, j, **h**, **i** và có các phần tử tối đại là b, d, f, **h**, **i**.

c) $(\mathbf{R}, \leq)$ và $(\mathbf{R}, \geq)$ không có các phần tử tối tiểu và tối đại vì

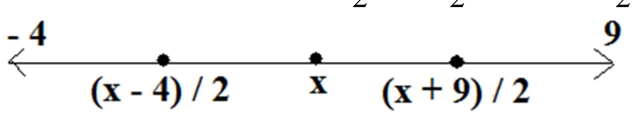
$\forall x \in \mathbf{R}, \exists (x-1), (x+1) \in \mathbf{R}, x - 1 < x < x + 1$ và $x + 1 > x > x - 1$.

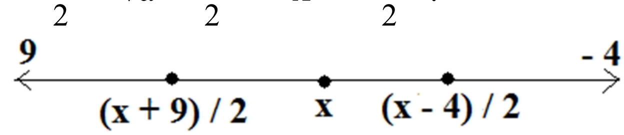




d) Cho $T = (-4, 9) \subset \mathbf{R}$. Khi đó $(T, \leq)$ và $(T, \geq)$ không có tối tiểu và tối đại vì

$\forall x \in T, \exists \dfrac{x-4}{2}, \dfrac{x+9}{2} \in T, \dfrac{x-4}{2} < x < \dfrac{x+9}{2}$ và $\dfrac{x+9}{2} > x > \dfrac{x-4}{2}$.





e) Đặt $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ và $\mathbf{N}^{**} = \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$. Ta có $\min(\mathbf{N}^*, |) = 1$ và $(\mathbf{N}^*, |)$ không có phần tử tối đại. Ta có $\max(\mathbf{N}^*,) = 1$ và $(\mathbf{N}^*, \vdots)$ không có phần tử tối tiểu. $(\mathbf{N}^{**}, |)$ có vô số phần tử tối tiểu là các số nguyên tố dương và không có phần tử tối đại. $(\mathbf{N}^{**}, \vdots)$ có vô số phần tử tối đại là các số nguyên tố dương và không có phần tử tối tiểu.

3.9/ <u>TOÀN PHẦN HÓA MỘT THỨ TỰ BÁN PHẦN (SẮP XẾP TOPO):</u>

Cho $(S, \prec)$ với S *hữu hạn* ($|S| = n$) và $\prec$ là *thứ tự bán phần* trên S.

Ta muốn xây dựng *một thứ tự toàn phần* $\prec^*$ trên S *nới rộng* thứ tự bán phần $\prec$.

(nghĩa là $\forall x, y \in S, x \prec y \Rightarrow x \prec^* y$).

Quá trình xây dựng thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S gọi là *một sự sắp xếp topo* $(S, \prec)$.

a) Thuật toán dựa trên *các phần tử tối tiểu*.

Chọn phần tử tối tiểu tùy ý a_1 của S và đặt $S_1 = S \setminus \{ a_1 \}$.

$\forall j \in \{ 2, 3, \ldots . n - 1 \}$, chọn phần tử tối tiểu tùy ý a_j của S_{j-1} và đặt

$S_j = S_{j-1} \setminus \{ a_j \}$. Ta có $| S_{n-1} | = 1$ và viết $S_{n-1} = \{ a \}$. Chọn $a_n = a$.

Sắp thứ tự $a_1 \prec^* a_2 \prec^* a_3 \prec^* \cdots \prec^* a_{n-2} \prec^* a_{n-1} \prec^* a_n$.

Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là

Ta có $\prec^*$ là một thứ tự toàn phần trên S nới rộng thứ tự bán phần $\prec$.

b) Thuật toán dựa trên *các phần tử tối đại*: hoàn toàn tương tự như thuật toán dựa trên các phần tử tối tiểu nhưng ta chọn các phần tử tối đại (thay vì tối tiểu) và sắp theo thứ tự ngược lại $a_n \prec^* a_{n-1} \prec^* a_{n-2} \prec^* \cdots \prec^* a_3 \prec^* a_2 \prec^* a_1$.

Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là

Thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S *không duy nhất* do việc chọn tùy ý các phần tử tối tiểu (hoặc tối đại) trong thuật toán.

<u>Ví dụ:</u> S = {Văn (V), Sử (Su), Địa (Đ), Toán (T), Lý (L), Hóa (H), Sinh (Si), Anh (A)}

Ký hiệu $x \prec y$ được hiểu là môn x thi trước môn y. Ta muốn sắp một lịch thi cho 8 môn học trong S sao cho $H \prec V$, $V \prec T$, $T \prec A$, $V \prec Si$, $Đ \prec Si$ và $Si \prec Su$ (môn Lý thì sắp tùy ý). Hãy vẽ biểu đồ Hasse cho $(S, \prec)$ rồi sắp xếp topo cho nó để có thứ tự toàn phần $(S, \prec^*)$ phục vụ cho việc sắp lịch thi 8 môn học. Biểu đồ Hasse của $(S, \prec)$ là

$$
\begin{array}{lcr}
H \to V \to T \to A & & \\
\downarrow & & .\ L \\
Đ \to Si \to Su & &
\end{array}
$$

Cách 1: Với thứ tự $\prec$, lần lượt chọn các phần tử tối tiểu Đ, H, V, Si, L, Su, T, A của các tập hợp S, $S_1 = S \setminus \{ Đ \}$, $S_2 = S_1 \setminus \{ H \}$, $S_3 = S_2 \setminus \{ V \}$, $S_4 = S_3 \setminus \{ Si \}$, $S_5 = S_4 \setminus \{ L \}$, $S_6 = S_5 \setminus \{ Su \}$, $S_7 = S_6 \setminus \{ T \}$. ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S là $Đ \prec^* H \prec^* V \prec^* Si \prec^* L \prec^* Su \prec^* T \prec^* A$.

Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là

$$Đ \to H \to V \to Si \to L \to Su \to T \to A$$

Cách 2: Với thứ tự $\prec$, lần lượt chọn các phần tử tối đại L, A, Su, Si, T, V, Đ, H của các tập hợp S, $S_1 = S \setminus \{ L \}$, $S_2 = S_1 \setminus \{ A \}$, $S_3 = S_2 \setminus \{ Su \}$, $S_4 = S_3 \setminus \{ Si \}$, $S_5 = S_4 \setminus \{ T \}$, $S_6 = S_5 \setminus \{ V \}$, $S_7 = S_6 \setminus \{ Đ \}$. Ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ trên S là $H \prec^* Đ \prec^* V \prec^* T \prec^* Si \prec^* Su \prec^* A \prec^* L$.

Biểu đồ Hasse của $(S, \prec^*)$ là

$$H \to Đ \to V \to T \to Si \to Su \to A \to L$$

3.10/ **THỨ TỰ TỪ ĐIỂN:**

Cho $(S, \prec)$ với S hữu hạn và $\prec$ là thứ tự toàn phần trên S. Mỗi phần tử của S được gọi là một " ký tự ".

Đặt $\prod$ = Tập hợp tất cả các chuỗi ký tự được thành lập từ S, nghĩa là

$\prod = \{ \alpha = a_1a_2 \ldots a_m \mid m$ nguyên ≥ 1 và $a_1, a_2, \ldots, a_m \in S \}$ và ta có $S \subset \prod$.

Ta muốn xây dựng *một thứ tự toàn phần* $\prec^*$ trên $\prod$ *nới rộng thứ tự* $\prec$ trên S.

$\forall\alpha = a_1a_2 \ldots a_m$, $\beta = b_1b_2 \ldots b_n \in \prod$, ta sắp $\alpha \prec^* \beta$ nếu α và β thỏa một trong các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \le n$ và $a_i = b_i$ ($1 \le i \le m$), nghĩa là α là *một đoạn đầu* của β.

Trường hợp 2 : $a_1 \prec b_1$ và $a_1 \ne b_1$ (α và β *có sự khác biệt ở ngay ký tự đầu tiên*).

Trường hợp 3 : $p = \min\{ m, n \} \ge 2$ và $\exists k \in \{ 1, \ldots , p - 1 \}$ sao cho

$a_i = b_i$ $(1 \le i \le k)$, $a_{k+1} \prec b_{k+1}$ và $a_{k+1} \ne b_{k+1}$ (α và β *giống nhau ở* k *ký tự đầu tiên* và *có sự* khác biệt ở *ký tự thứ* k + 1).

Trường hợp 2 có thể xem như tương tự với *trường hợp* 3 ứng với $k = 0$.

Thứ tự toàn phần $\prec^*$ gọi là *thứ tự từ điển* trên $\prod$ nới rộng thứ tự $\prec$ trên S.

Các từ trong một cuốn từ điển và các số nguyên dương được sắp theo thứ tự này.

Ví dụ:

a) S = {0, 1, 2, … , 7, 8, 9} với thứ tự toàn phần tự nhiên $0 < 1 < 2 < \cdots < 8 < 9$.

$\prod$ = Tập hợp tất cả các dãy số được thành lập từ S. Ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ được xây dựng trên $\prod$ gọi là thứ tự từ điển.

Chẳng hạn như $37952 \prec^* 37952041$ (trường hợp 1), $6589617 \prec^* 9109$ (trường hợp 2), $543018 \prec^* 543092$ (trường hợp 3 ứng với $k = 4$).

b) T = {a, b, c, … , x, y, z} với thứ tự toàn phần tự nhiên $a < b < c < \cdots < y < z$.

$\prod$ = Tập hợp tất cả các từ (có nghĩa trong tiếng Anh) được thành lập từ S.

Ta có thứ tự toàn phần $\prec^*$ được xây dựng trên $\prod$ gọi là thứ tự từ điển.

Chẳng hạn như home $\prec^*$ homework (trường hợp 1), comedy $\prec^*$ nature (trường hợp 2), architect $\prec^*$ artist (trường hợp 3 ứng với $k = 2$).

IV. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG:

4.1/ ĐỊNH NGHĨA: Cho quan hệ hai ngôi $\Re$ trên tập hợp $S \neq \emptyset$.

a) $\Re$ là *một quan hệ tương đương* trên S nếu $\Re$ phản xạ, đối xứng và truyền trên S. Một quan hệ tương đương có thể *phản xứng* hoặc *không phản xứng*.

b) Ta dùng ký hiệu $\sim$ để thể hiện *một quan hệ tương đương tổng quát*.

Ký hiệu $(S, \sim)$ được hiểu là trên tập hợp S có *quan hệ tương đương* $\sim$.

$\forall x, y \in S$, nếu $x \sim y$ thì ta nói một cách hình thức rằng " x *tương đương với* y "

c) Nếu $\Re$ là một *quan hệ tương đương* trên S và $\emptyset \neq T \subset S$ thì $\Re$ cũng là một *quan hệ tương đương* trên T.

Ví dụ:

a) S = Tập hợp mọi người trên trái đất.

$$\forall x, y \in S, \text{ đặt } x \sim y \Leftrightarrow x \textit{ cùng tuổi với } (\textit{ctv})\ y.$$

Ta có $\sim$ là một quan hệ tương đương trên S. Thật vậy,

$\sim$ phản xạ ($\forall x \in S$, x *ctv* x nên $x \sim x$),

$\sim$ đối xứng ($\forall x, y \in S$, $x \sim y \Rightarrow x$ *ctv* $y \Rightarrow y$ *ctv* $x \Rightarrow y \sim x$),

$\sim$ truyền [$\forall x, y, z \in S$, $(x \sim \mathbf{y}$ & $\mathbf{y} \sim z) \Rightarrow (x$ *ctv* $\mathbf{y}$ & $\mathbf{y}$ *ctv* $z) \Rightarrow x$ *ctv* $z \Rightarrow x \sim z$].

b) $S = \mathbf{R}$ và hàm số tùy ý $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $x \Re y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

Ta có $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S vì

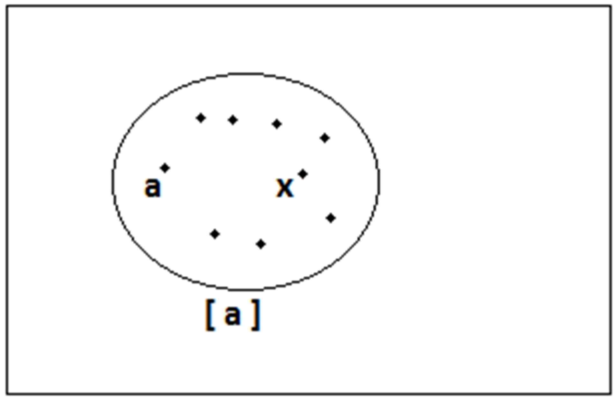
$\Re$ phản xạ [$\forall x \in S$, $f(x) = f(x)$ nên $x \Re x$],

$\Re$ đối xứng [$\forall x, y \in S$, $x \Re y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y \Re x$] và

$\Re$ truyền [$\forall x, y, z \in S$, $(x \Re \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \Re z) \Rightarrow \{ f(x) = f(\mathbf{y})$ và $f(\mathbf{y}) = f(z) \}$

$\Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x \Re z$].

4.2/ <u>LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA MỘT PHẦN TỬ:</u> Cho $(S, \sim)$ và $\boldsymbol{a} \in S$.



$(S, \sim)$.

Đặt $\bar{a} = \{ x \in S \mid x \sim \boldsymbol{a} \} = \{ \boldsymbol{a}, \dots \}$ (vì $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{a}$ do tính phản xạ của quan hệ $\sim$).

Ta có $\varnothing \neq \bar{a} \subset S$ và ta nói $\bar{a}$ là *lớp tương đương của* **a** (*xác định bởi quan hệ tương đương* $\sim$) trên S. Ta cũng có thể dùng ký hiệu $[\, \boldsymbol{a} \,]$ thay cho $\bar{a}$.

<u>Ví dụ:</u>

a) S = { An^{18}, $Lý^{21}$, $Tú^{18}$, $Hà^{19}$, $Vũ^{20}$, Hy^{19}, $Sĩ^{18}$, $Sử^{19}$, $Tá^{20}$, Vy^{18} } (có tuổi đi kèm).

$\forall x, y \in S$, đặt $x \sim y \Leftrightarrow x$ *cùng tuổi với* y.

Ta có $\sim$ là một quan hệ tương đương trên S [xem **Ví dụ (4.1)**]. Lúc đó

[**An**] = {x ∈ S | x ~ **An**} = {**An**, Tú, Sĩ, Vy}, [**Lý**] = {x ∈ S | x ~ **Lý**} = {**Lý**}

[**Hy**] = { x ∈ S | x ~ **Hy** }={**Hy**, Hà, Sử}, [**Tá**] = {x ∈ S | x ~ **Tá**}={**Tá**, Vũ}.

b) $S = \mathbf{R}$. $\forall x, y \in S$, đặt $x\Re y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ trong đó $f(t) = t^3 - 3t, \forall t \in \mathbf{R}$.

Ta có $\Re$ là một quan hệ tương đương trên S [xem **Ví dụ (4.1)**].

Ta tìm $\bar{0}$, $\bar{2}$, $\overline{-5}$ và $\bar{a}$ với $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$.

$\bar{0} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x\Re\mathbf{0} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x = 0 \} = \{ \mathbf{0}, \sqrt{3}, -\sqrt{3} \}$.

$\bar{2} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x\Re\mathbf{2} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x - 2 = 0 \} =$

$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x+1)^2(x-2) = 0 \} = \{ \mathbf{2}, -1 \}$.

$\overline{-5} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x\Re(-\mathbf{5}) \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x + 110 = 0 \} =$

$= \{ x \in \mathbf{R} \mid (x + 5)(x^2 - 5x + 22) = 0 \} = \{ -\mathbf{5} \}$.

$\overline{a} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x\Re\boldsymbol{a} \} = \{ x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x = \boldsymbol{a}^3 - 3\boldsymbol{a} \} =$

$= \{x \in \mathbf{R} \mid (x - \boldsymbol{a})(x^2 + \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{a}^2 - 3) = 0\}$. Như vậy $\overline{a}$ có từ 1 đến 3 phần tử.

Đặt $g(x) = x^2 + \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{a}^2 - 3$ có $\Delta = 3(4 - \boldsymbol{a}^2)$ và $g(\boldsymbol{a}) = 3(\boldsymbol{a} - 1)(\boldsymbol{a} + 1)$. Ta có

$|\,\overline{a}\,| = 3 \Leftrightarrow [\,\Delta > 0$ và $g(\boldsymbol{a}) \neq 0\,] \Leftrightarrow (\,1 \neq |\,\boldsymbol{a}\,| < 2\,)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a} \in (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$.

Lúc đó $\overline{a} = \{\, \boldsymbol{a}, \dfrac{-a + \sqrt{3(4 - a^2)}}{2}, \dfrac{-a - \sqrt{3(4 - a^2)}}{2} \,\}$.

$|\,\overline{a}\,| = 1 \Leftrightarrow \{\Delta < 0$ hay $[\Delta = 0$ và $g(\boldsymbol{a}) = 0]\} \Leftrightarrow [\boldsymbol{a}^2 > 4$ hay $(\boldsymbol{a}^2 = 4$ và $\boldsymbol{a}^2 = 1)]$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}^2 > 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Lúc đó $\overline{a} = \{ \boldsymbol{a} \}$.

$|\,\overline{a}\,| = 2 \Leftrightarrow \{\, [\,\Delta > 0$ và $g(\boldsymbol{a}) = 0\,]$ hay $[\,\Delta = 0$ và $g(\boldsymbol{a}) \neq 0\,]\,\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\,(\boldsymbol{a}^2 < 4$ và $\boldsymbol{a}^2 = 1)$ hay $(\boldsymbol{a}^2 = 4$ và $\boldsymbol{a}^2 \neq 1)\,] \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

Lúc đó $\overline{-2} = \overline{1} = \{ -2, 1 \}$ và $\overline{2} = \overline{-1} = \{ -1, 2 \}$.

$(S, \Re)$ được phân hoạch thành vô hạn lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp tương đương có từ 1 đến 3 phần tử.

4.3/ <u>SỰ PHÂN HOẠCH THÀNH CÁC LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG:</u> Cho $(S, \sim)$.

Quan hệ tương đương $\sim$ sẽ phân hoạch S thành *các lớp tương đương rời nhau từng đôi một* và mỗi lớp tương đương đều có dạng $\overline{a}$ (với a nào đó thuộc S).

$\forall x \in \overline{a}$, ta có $\overline{x} = \overline{a}$ và ta nói x là *một phần tử đại diện của lớp tương đương* $\overline{a}$.

Hai phần tử (của S) có quan hệ $\sim$ sẽ thuộc cùng một lớp tương đương.

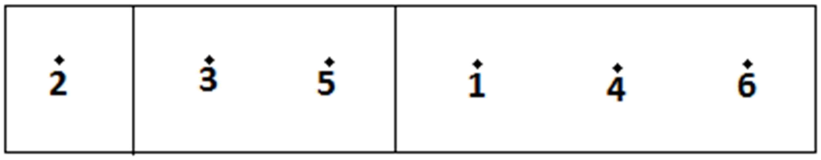
Hai phần tử (của S) không có quan hệ $\sim$ sẽ thuộc hai lớp tương đương rời nhau.

$\forall x, y \in S$, ta có

$x \sim y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \in \overline{y} \Leftrightarrow y \in \overline{x} \Leftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$ (không rời = trùng nhau).

$x \overline{\sim} y \Leftrightarrow \overline{x} \neq \overline{y} \Leftrightarrow x \notin \overline{y} \Leftrightarrow y \notin \overline{x} \Leftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$ (rời nhau = không trùng)

<u>Ví dụ:</u> $\Re$ là một quan hệ tương đương trên $T = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ và $(T, \Re)$ có sơ đồ phân lớp như sau:



$T = \{ 2 \} \cup \{ 3, 5 \} \cup \{ 1, 4, 6 \}$ (T được phân hoạch thành 3 lớp tương đương).

Ta có $\overline{2} = \{ 2 \}$, $\overline{3} = \overline{5} = \{ 3, 5 \}$, $\overline{1} = \overline{4} = \overline{6} = \{ 1, 4, 6 \}$, $T = \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3}$ và

$\Re = \{(2,2), (3,3), (5,5), (3,5), (5,3), (1,1), (4,4), (6,6), (1,4), (4,1), (1,6), (6,1), (4,6), (6,4)\}$.

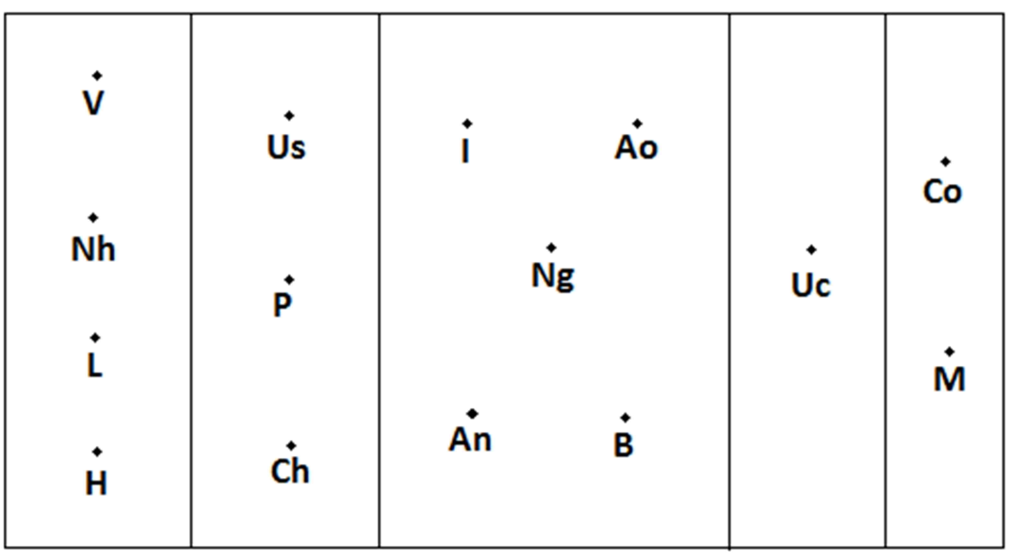
Ta có $1 \Re 4 \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{4} \Leftrightarrow 1 \in \overline{4} \Leftrightarrow 4 \in \overline{1} \Leftrightarrow \overline{1} \cap \overline{4} \neq \varnothing$.

$2 \overline{\Re} 3 \Leftrightarrow \overline{2} \neq \overline{3} \Leftrightarrow 2 \notin \overline{3} \Leftrightarrow 3 \notin \overline{2} \Leftrightarrow \overline{2} \cap \overline{3} = \varnothing$.

b) S = { Việt Nam (V), Hoa Kỳ (Us), Ý (I), Nhật (Nh), Áo (Ao), Úc (Uc), Peru (P), Nga (Ng), Congo (Co), Lào (L), Anh (An), Maroc (M), Hàn (H), Chile (Ch), Bỉ (B)}

$\forall x, y \in S$, đặt $x \sim y \Leftrightarrow$ nước x *cùng châu lục với* nước y.

$\sim$ là một quan hệ tương đương trên S (kiểm tra tương tự như quan hệ *cùng tuổi với*). Ta có các lớp tương đương như sau:



Sơ đồ phân lớp của $(S, \sim)$.

$\overline{V} = \{ x \in S \mid x \sim \mathbf{V} \} = \{ \mathbf{V}, Nh, L, H \} = \overline{Nh} = \overline{L} = \overline{H}$.

$\overline{Us} = \{ x \in S \mid x \sim \mathbf{Us} \} = \{ \mathbf{Us}, P, Ch \} = \overline{P} = \overline{Ch}$.

$\overline{I} = \{ x \in S \mid x \sim \mathbf{I} \} = \{ \mathbf{I}, Ao, Ng, An, B \} = \overline{Ao} = \overline{Ng} = \overline{An} = \overline{B}$.

$\overline{Uc} = \{ x \in S \mid x \sim \mathbf{Uc} \} = \{ \mathbf{Uc} \}$ và $\overline{Co} = \{ x \in S \mid x \sim \mathbf{Co} \} = \{ \mathbf{Co}, M \} = \overline{M}$.

$S = \overline{V} \cup \overline{Us} \cup \overline{I} \cup \overline{Uc} \cup \overline{Co} = \overline{Nh} \cup \overline{P} \cup \overline{Ao} \cup \overline{Uc} \cup \overline{M} = \overline{L} \cup \overline{Ch} \cup \overline{Ng} \cup \overline{Uc} \cup \overline{M}$.

S được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một. Ta có

$V \sim Nh \Leftrightarrow \overline{V} = \overline{Nh} \Leftrightarrow V \in \overline{Nh} \Leftrightarrow Nh \in \overline{V} \Leftrightarrow \overline{V} \cap \overline{Nh} \neq \emptyset$.

$Ng \not\sim P \Leftrightarrow \overline{Ng} \neq \overline{P} \Leftrightarrow Ng \notin \overline{P} \Leftrightarrow P \notin \overline{Ng} \Leftrightarrow \overline{Ng} \cap \overline{P} = \emptyset$.

4.4/ TẬP HỢP THƯƠNG XÁC ĐỊNH BỞI QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG:

Cho $(S, \sim)$.

Đặt $S/\sim$ là tập hợp tất cả các lớp tương đương (xác định bởi quan hệ $\sim$ trên S),

nghĩa là $S/\sim\ = \{ \overline{x} \mid x \in S \}$. Như vậy $\forall x \in S$, ta có $\overline{x} \subset S$ và $\overline{x} \in S/\sim$.

Ta nói $S/\sim$ là *tập hợp thương* của S *xác định bởi quan hệ tương đương* $\sim$.

Ví dụ: Xét lại các quan hệ tương đương $(S, \sim)$ và $(T, \Re)$ trong **Ví dụ** (**4.3**). Ta có

$(S/\sim) = \{ \overline{x} \mid x \in S \} = \{ \overline{V}, \overline{Us}, \overline{I}, \overline{Uc}, \overline{Co} \} = \{ \overline{Nh}, \overline{P}, \overline{Ao}, \overline{Uc}, \overline{M} \} = \{ \overline{L}, \overline{Ch}, \overline{Ng}, \overline{Uc}, \overline{M} \}$

$(T/\Re) = \{ \overline{x} \mid x \in T \} = \{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \} = \{ \overline{4}, \overline{2}, \overline{5} \} = \{ \overline{6}, \overline{2}, \overline{3} \}$.

V. QUAN HỆ ĐỒNG DƯ TRÊN Z:

Cho số nguyên $n \geq 1$.

5.1/ TẬP HỢP $\mathbf{Z}_n$:

Một số nguyên khi chia Euclide cho n sẽ có số dư có thể là $0, 1, 2, ..., (n - 1)$.

$\forall a, b \in \mathbf{Z}$, đặt $a \sim b \Leftrightarrow a$ và b *có cùng số dư* khi chia cho n

$$\Leftrightarrow n \mid (a - b) \Leftrightarrow (a - b) \vdots n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, a = b + nk.$$

Quan hệ $\sim$ là một quan hệ tương đương trên **Z** (kiểm chứng dễ dàng) và $\sim$ được gọi là *quan hệ đồng dư modulo n* trên **Z**. Ta cũng viết $a \sim b$ là $a \equiv b \pmod{n}$.

Đặt $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/\sim = \{\ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z}\ \}$ [liệt kê *dạng tổng quát có trùng lặp*]

$= \{\ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\ \}$ (*) [liệt kê *dạng chuẩn không trùng lặp*]

trong đó $\overline{0} = \{\ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $\mathbf{0}\ \} = \{\ nt \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = n\mathbf{Z}$,

$\overline{1} = \{\ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $\mathbf{1}\ \} = \{\ nt + \mathbf{1} \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = n\mathbf{Z} + \mathbf{1} = \mathbf{1} + n\mathbf{Z}$,

$\overline{2} = \{\ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $\mathbf{2}\ \} = \{\ nt + \mathbf{2} \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = n\mathbf{Z} + \mathbf{2} = \mathbf{2} + n\mathbf{Z}$, … và

$\overline{n-1} = \{\ k \in \mathbf{Z} \mid k$ chia cho n dư $(\mathbf{n-1})\ \} = \{\ nt + (\mathbf{n-1}) \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = n\mathbf{Z} + (\mathbf{n-1})$.

Ta có $\mathbf{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \ldots \cup \overline{n-1}$: **Z** được phân hoạch thành n lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp có vô hạn phần tử.

$\forall k \in \mathbf{Z}$, ta có thể viết $\overline{k}$ về dạng chuẩn (*) như sau :

Chia Euclide $k = qn + \mathbf{r}$ với $0 \le \mathbf{r} < |n| = n$ thì $\overline{k} = \overline{r}$ với $0 \le \mathbf{r} \le n - 1$.

<u>**Ví dụ:**</u> $\mathbf{Z}_5 = \{\ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z}\ \}$ (có trùng lặp) $= \{\ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\ \}$ (không trùng lặp) có

$\overline{0} = \{\ 5t \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\ \}$ (các số chia hết cho 5) = 5**Z**.

$\overline{1} = \{\ 5t + 1 \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 1) = 5**Z** + 1.

$\overline{2} = \{\ 5t + 2 \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 2) = 5**Z** + 2.

$\overline{3} = \{\ 5t + 3 \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 3) = 5**Z** + 3.

$\overline{4} = \{\ 5t + 4 \mid t \in \mathbf{Z}\ \} = \{\ \ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\ \}$ (các số chia 5 dư 4) = 5**Z** + 4.

Ta có $\mathbf{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} \cup \overline{3} \cup \overline{4}$ (**Z** được phân hoạch thành 5 lớp tương đương rời nhau từng đôi một và mỗi lớp có vô hạn phần tử).

Ta qui đổi các phần tử $\overline{245}$, $\overline{-716}$ và $\overline{593}$ trong $\mathbf{Z}_5$ về dạng chuẩn:

Chia Euclide cho 5 : **245** = 81(5) + **0**, **– 716** = – 144(5) + **4** và **593** = 118(5) + **3**.

Ta có $\overline{245} = \overline{0}$, $\overline{-716} = \overline{4}$ và $\overline{593} = \overline{3}$.

5.2/ <u>CÁC PHÉP TOÁN TRÊN $\mathbf{Z_n}$:</u> Cho $\mathbf{Z_n} = \{ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z} \}$(dạng tổng quát). Trên $\mathbf{Z_n}$ ta có thể định nghĩa các phép toán $+, -$ và $.$ *một cách tự nhiên* như sau : $\forall \overline{u}, \overline{v} \in \mathbf{Z_n}$ (u, v $\in \mathbf{Z}$), đặt $\overline{u} + \overline{v} = \overline{u+v} \in \mathbf{Z_n}$, $\overline{u} - \overline{v} = \overline{u-v} \in \mathbf{Z_n}$ và $\overline{u}.\overline{v} = \overline{u.v} \in \mathbf{Z_n}$.

Suy ra $\forall m \in \mathbf{N}^*$, $\forall \overline{u} \in \mathbf{Z_n}$, $\overline{u}^{\,m} = \overline{u^m}$.

<u>Ví dụ:</u> Ta thực hiện các phép tính sau trong $\mathbf{Z_{12}}$: $\overline{725} + \overline{548} = \overline{725+548} = \overline{1273} = \overline{1}$

$\overline{548} - \overline{725} = \overline{548-725} = \overline{-177} = \overline{3}$ $\qquad$ $\overline{692}.\overline{-473} = \overline{692\times(-473)} = \overline{-327316} = \overline{8}$

$\overline{356}.\overline{855} = \overline{356\times 855} = \overline{304380} = \overline{0}$ $\qquad$ $\overline{45}^{\,4} = \overline{45^4} = \overline{45\times45\times45\times45} = \overline{4100625} = \overline{9}$.

5.3/ <u>TẬP HỢP U($\mathbf{Z_n}$):</u> Cho $\mathbf{Z_n} = \{ \overline{k} \mid k \in \mathbf{Z} \}$(dạng tổng quát). Đặt

U($\mathbf{Z_n}$) = $\{ \overline{k} \in \mathbf{Z_n} \mid \exists \overline{k'} \in \mathbf{Z_n}, \overline{k}.\overline{k'} = \overline{1} \} = \{ \overline{1}, \overline{n-1} = \overline{-1}, \dots \}$. Ta có $\overline{0} \notin$ U($\mathbf{Z_n}$).

$\forall \overline{k} \in$ U($\mathbf{Z_n}$), ta nói $\overline{k}$ là *một phần tử khả nghịch* trong $\mathbf{Z_n}$ và phần tử duy nhất $\overline{k'} \in \mathbf{Z_n}$ thỏa $\overline{k}.\overline{k'} = \overline{1}$ gọi là *phần tử nghịch đảo của* $\overline{k}$ và ta ký hiệu $\overline{k'} = \overline{k}^{\,-1}$.

Dĩ nhiên $\overline{k'}$ cũng khả nghịch trong $\mathbf{Z_n}$ [$\overline{k'} \in$ U($\mathbf{Z_n}$)] và $\overline{k'}^{\,-1} = \overline{k}$.

Như vậy U($\mathbf{Z_n}$) là *tập hợp các phần tử khả nghịch* trong $\mathbf{Z_n}$.

<u>Ví dụ:</u>

a) U($\mathbf{Z_8}$) = $\{ \overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7} \}$ [do $\overline{1}.\overline{1} = \overline{3}.\overline{3} = \overline{5}.\overline{5} = \overline{7}.\overline{7} = \overline{1}$ nên mỗi phần tử của U($\mathbf{Z_8}$) đều là nghịch đảo của chính nó : $\overline{1}^{\,-1} = \overline{1}$, $\overline{3}^{\,-1} = \overline{3}$, $\overline{5}^{\,-1} = \overline{5}$ và $\overline{7}^{\,-1} = \overline{7}$].

b) U($\mathbf{Z_9}$) = $\{ \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8} \}$ (do $\overline{1}.\overline{1} = \overline{2}.\overline{5} = \overline{4}.\overline{7} = \overline{8}.\overline{8} = \overline{1}$ nên $\overline{1}^{\,-1} = \overline{1}$, $\overline{2}^{\,-1} = \overline{5}$, $\overline{5}^{\,-1} = \overline{2}$, $\overline{4}^{\,-1} = \overline{7}$, $\overline{7}^{\,-1} = \overline{4}$ và $\overline{8}^{\,-1} = \overline{8}$).

5.4/ <u>MỆNH ĐỀ:</u>

a) U($\mathbf{Z_n}$) = $\{ \overline{k} \in \mathbf{Z_n} \mid (k, n) = 1 \} = \{ \overline{k} \in \mathbf{Z_n} \mid 1 \le k \le n-1$ và $(k, n) = 1 \}$.

b) Nếu p là *một số nguyên tố* ≥ 2 thì $U(\mathbf{Z_p}) = \mathbf{Z_p} \setminus \{\overline{0}\} = \{\overline{k} \mid 1 \leq k \leq p-1\}$.

c) $\forall \overline{k} \in U(\mathbf{Z_n})$, do $(k, n) = 1$ nên có $r, s \in \mathbf{Z}$ thỏa $rk + sn = 1$, nghĩa là

$\overline{rk} = \overline{r}.\overline{k} = \overline{1}$ và $\overline{k}^{-1} = \overline{r}$.

Ví dụ:

a) $U(\mathbf{Z_{15}}) = \{\overline{k} \in \mathbf{Z_{15}} \mid 1 \leq k \leq 14$ và $(k, 15) = 1\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$

(để ý $\overline{1}.\overline{1} = \overline{2}.\overline{8} = \overline{4}.\overline{4} = \overline{7}.\overline{13} = \overline{11}.\overline{11} = \overline{14}.\overline{14} = \overline{1}$).

b) $U(\mathbf{Z_{20}}) = \{\overline{k} \in \mathbf{Z_{20}} \mid 1 \leq k \leq 19$ và $(k, 20) = 1\} = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}\}$

(để ý $\overline{1}.\overline{1} = \overline{3}.\overline{7} = \overline{9}.\overline{9} = \overline{13}.\overline{17} = \overline{19}.\overline{19} = \overline{1}$).

c) $U(\mathbf{Z_{11}}) = \mathbf{Z_{11}} \setminus \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{9}, \overline{10}\}$ $(\overline{1}.\overline{1} = \overline{2}.\overline{6} = \overline{3}.\overline{4} = \overline{5}.\overline{9} = \overline{7}.\overline{8} = \overline{10}.\overline{10} = \overline{1})$

d) Ta có $(31)21 + (-13)50 = 1$ nên $(21, 50) = 1$. Suy ra $\overline{21} \in U(\mathbf{Z_{50}})$ và $\overline{21}^{-1} = \overline{31}$.

5.5/ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRÊN $\mathbf{Z_n}$:

Cho $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbf{Z_n}$. Ta tìm $\overline{x} \in \mathbf{Z_n}$ thỏa $\overline{a}.\overline{x} = \overline{b}$ (1).

a) Nếu $\overline{a} = \overline{0} \neq \overline{b}$ thì phương trình *vô nghiệm*.

b) Nếu $\overline{a} = \overline{0} = \overline{b}$ thì phương trình *có nghiệm* là $\overline{x}$ tùy ý thuộc $\mathbf{Z_n}$ (*n nghiệm*).

c) Nếu $\overline{a} \in U(\mathbf{Z_n})$ thì phương trình *có nghiệm duy nhất* là $\overline{x} = \overline{a}^{-1}.\overline{b}$.

d) Khi $\overline{a} \neq \overline{0}$ và $\overline{a} \notin U(\mathbf{Z_n})$: Đặt $\mathbf{d} = (a, n) \geq 2$, $a = a'\mathbf{d}$ và $n = n'\mathbf{d}$.

* Nếu $\overline{b \,\vdots\, d}$, ta có phương trình (1) *vô nghiệm* từ một trong hai cách giải thích sau:

Cách 1 (chỉ ra sự mâu thuẫn từ phương trình $\overline{a}.\overline{x} = \overline{b}$) :

$\overline{a}.\overline{x} = \overline{b} \Leftrightarrow (ax - b) \,\vdots\, n \Rightarrow (ax - b) \,\vdots\, d$: mâu thuẫn vì $ax \,\vdots\, d$ (từ $a \,\vdots\, d$) và $\overline{b \,\vdots\, d}$.

Cách 2 : Ta có $\overline{a}.\overline{x} = \overline{b} \Rightarrow \overline{n'}.\overline{a}.\overline{x} = \overline{n'}.\overline{b}$ với $\overline{n'}.\overline{a} = \overline{0} \neq \overline{n'}.\overline{b}$: mâu thuẫn.

(giải thích $\overline{n'}.\overline{a} = \overline{n'.a} = \overline{n'.d.a'} = \overline{n.a'} = \overline{0}$. Do $\overline{b \,\vdots\, d}$ nên $\overline{n'b \,\vdots\, n'd}$, nghĩa là

$\overline{n'b \,\vdots\, n}$ và $\overline{n'}.\overline{b} = \overline{n'b} \neq \overline{0}$).

* Nếu b $\vdots$ **d** : viết b = b'**d**. Phương trình (1) trong $\mathbf{Z_n}$ (n = **d**.n') là $\overline{d}\,.\overline{a'}.\overline{x} = \overline{d}\,.\overline{b'}$

Phương trình này *tương ứng với* phương trình $\overline{a'}.\overline{X} = \overline{b'}$ (2) trong tập mới $\mathbf{Z_{n'}}$.

Để ý (a', n') = 1 nên $\overline{a'} \in U(\mathbf{Z_{n'}})$ và phương trình (2) có nghiệm duy nhất

$\overline{X} = \overline{a'}^{-1}.\overline{b'}$ trong $\mathbf{Z_{n'}}$. Đặt $\overline{a'}^{-1}.\overline{b'} = \overline{c} \in \mathbf{Z_{n'}}$ thì phương trình (1) *có đúng*

d nghiệm trong $\mathbf{Z_n}$ là $\overline{x} = \overline{c + jn'}$ ($0 \le j \le d - 1$).

<u>Ví dụ:</u>

a) Trong $\mathbf{Z_6}$: Phương trình $\overline{18}.\overline{x} = \overline{47} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{5} \neq \overline{0}$ vô nghiệm.

b) Trong $\mathbf{Z_7}$: Phương trình $\overline{35}.\overline{x} = \overline{-56} \Leftrightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{0}$ có $\overline{x}$ tùy ý $\in \mathbf{Z_7}$ (7 nghiệm).

c) Trong $\mathbf{Z_9}$: Phương trình $\overline{22}.\overline{x} = \overline{-13} \Leftrightarrow \overline{4}.\overline{x} = \overline{5} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{4}^{-1}.\overline{5} = \overline{7}.\overline{5} = \overline{35} = \overline{8}$.

d) Trong $\mathbf{Z_{18}}$: Phương trình $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14}$ có a = 12, n = 18 và b = 14. Ta có

$\overline{12} \notin U(\mathbf{Z_{18}})$ vì **d** = (a, n) = 6, b không chia hết cho **d** và n = n'**d** [n' = 3].

Phương trình $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14}$ vô nghiệm vì một trong hai cách giải thích:

Cách 1: $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14} \Rightarrow (12x - 14) \vdots 18 \Rightarrow (12x - 14) \vdots 6$: mâu thuẫn vì $12 \vdots 6$ và $\overline{14 \vdots 6}$.

Cách 2 : $\overline{12}.\overline{x} = \overline{14} \Rightarrow \overline{3}.\overline{12}.\overline{x} = \overline{3}.\overline{14} \Rightarrow \overline{0}.\overline{x} = \overline{42} = \overline{6} \neq \overline{0}$: mâu thuẫn.

e) Phương trình $\overline{33}.\overline{x} = \overline{45}$ (trong $\mathbf{Z_{57}}$) (1) có a = 33, n = 57 và b = 45. Ta có

$\overline{33} \notin U(\mathbf{Z_{57}})$ do **d** = (a, n) = **3** và b chia hết cho **d**.

Do 33 = 11 × **3**, 45 = 15 × **3**, 57 = 19 × **3** nên (1) tương ứng với phương trình

$\overline{11}.\,\overline{X} = \overline{15}$ (trong $\mathbf{Z_{19}}$) (2). Ta có $\overline{11} \in U(\mathbf{Z_{19}})$ vì (11, 19) = 1. Hơn nữa

$\overline{11}^{-1} = \overline{7}$ từ đẳng thức 7(11) – 4(19) = 1.

Phương trình (2) cho $\overline{X} = \overline{11}^{-1}.\overline{15} = \overline{7}.\overline{15} = \overline{105} = \overline{10}$ (trong $\mathbf{Z_{19}}$). Suy ra (1)

có đúng 3 nghiệm trong $\mathbf{Z_{57}}$ là $\overline{x} = \overline{10}$, $\overline{x} = \overline{10 + 19} = \overline{29}$ và $\overline{x} = \overline{10 + 2(19)} = \overline{48}$.

5.6/ KẾT LUẬN:

a) Quan hệ " = " là *quan hệ hai ngôi duy nhất* có đủ 4 tính chất phản xạ, đối xứng, phản xứng và truyền. Các quan hệ hai ngôi khác chỉ có tối đa 3 tính chất mà thôi.

b) Quan hệ " = " là *quan hệ hai ngôi duy nhất* vừa là quan hệ thứ tự vừa là quan hệ tương đương.
