

论数学在物理学中的“不合理有效性”

周无寒

北京大学信息科学技术学院

2025 年 6 月 3 日

摘要

本文探讨数学在物理学中的“不合理有效性”这一现象。本文首先回顾数学与物理学的历史渊源，进而分析若干典型案例，讨论数学为何能够如此精确地描述物理世界，尝试从哲学角度解释这一现象的深层原因。

1 引言

物理学家 Eugene Wigner 在他的论文《数学在自然科学中的不合理有效性》[7] 中提出一个引人深思的问题：数学作为人类心智的抽象创造，为何却能以惊人的精准度描述自然规律。这一问题引发了哲学家和科学家的广泛讨论。Wigner 在文中举了几个例子说明这种不合理有效性：圆周率来自于几何学，却在统计学的正态分布公式中出现；复数的出现是纯数学的创造，但在量子力学的世界中发现虚数是必不可少的。最初人类用自然语言描述自然规律，随着科学的发展，数学逐渐成为了描述物理规律的普遍语言，这种转变引发深刻哲学追问：数学是否内在于自然结构？抑或是人类认知的偶然选择？

然而，也有人，如 Derek Abbot[1]，认为这种现象并非奇特，而是有深层合理性的。数学是人类中心主义的产物，正因为物理学家选择了与现实相符的数学结构，才使得数学工具能够如此精准地刻画现象。本文将从数学与物理学的关系和实践入手，探讨数学缘何在物理中居于至关重要的地位，并试图给出数学在物理中“不合理有效性”的可能合理解释：数学提供大一统的框架，而物理学家在其中不断筛选并应用满足实验与观测的模型，最终实现二者的高度契合。

2 “不合理有效性”的含义

要想解释数学在物理中“不合理有效性”的原因，首先要明确数学与物理的本质。Wigner 认为数学是为了有技巧的运用概念与规则而发明的科学，主要强调的是概念

的发明。初等的数学是为了直观地描述真实世界，而高等数学如复数、代数则是为了展示数学家的巧思和数学的美妙形式。

物理则是对自然规律，尤其是非生命规律的探索。在如此复杂的现实世界中能提炼出例如 Newton 定律、量子力学等规律——尤其是这些定律非常接近现实——是十分惊人的事实。更惊人的是，这些规律最终都选用了数学的语言来表达，比如 $F = ma$ 、 $E = mc^2$ 等。

Wigner 认为物理规律表现为数学形式的原因之一在于同一种连结，可能有不同的语言来描述，而在历史上人们恰好选择了数学。物理所研究的自然律在命题的限制条件内是非常精确的，数学为这种精确性提供了一种适合的语言，因此自然而然，几乎所有的物理规律都基于数学建立起来。这是充分的理由，但不是必然的。

数学和物理的对应体现了抽象创造和现实存在的一种奇迹对应。更进一步，数学不仅是计算工具，更是物理理论的建构语言，比如复数的结构在量子力学中是不可或缺的[5]。同时，数学在某些时候还可以超前“预言”物理的深层理论。高斯、罗巴切夫斯基等在 19 世纪替换了欧氏几何的第五公理，提出了各种非欧几何。当时非欧几何只是一种纯粹数学的研究，但到了 20 世纪，Einstein 的相对论发现时空的性质正需要用这种非欧的黎曼几何来描述，数学的这种预见性让人惊叹。

3 多种哲学解释

3.1 经验主义

经验主义者认为数学来源于对自然的观察归纳，是一种精炼的感官产物。比如算术中的“ $1+1=2$ ”是从观察到的一个苹果加上另一个苹果得到两个苹果的经验中归纳出来的；几何中“平行”、“角度”等概念也是从对周围世界图形与空间的直观感知演化而来。这样的看法将数学视为对现实世界的抽象和总结。Bas van Fraassen 的建构经验论认为科学理论有效性的判据是经验适当性。从现实世界抽象而来的数学自然是经验适当的，在物理学中表现出“不合理有效性”也就不足为奇。

但这种观点存在致命的问题，有些数学完全没有经验直观，但在物理中却不可或缺。最重要的例子就是虚数 i 的产生。我们很难想象现实世界中有一个东西是 i ，但量子力学基础假设 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(x, t) + V(x) \Psi(x, t) \quad (1)$$

需要 i 才能写出演化算符。当然，经验主义者可能会说，虚数的来源可以是向量的旋转等等，但是这样解释量子力学中的虚数是牵强的，量子力学中的 i 和实数有本质的不同。更加复杂抽象的，诸如群论、拓扑学、李代数等数学分支，几乎完全脱离日常经验，却在粒子物理与凝聚态物理中发挥关键作用。因此，经验主义者对于先验的数学结构为何存在的问题是缺少说服力的。

3.2 柏拉图主义

柏拉图主义者会承认抽象对象的存在，而数学正是一种不依赖于时间或空间，既非物理的也非心灵的抽象对象。Plato 提出“理型”一词，现象只是在不同的情况下对于理型的描绘，而非事物的理型本身。也就是说，物理只是数学世界的现实投射。在这一视角下，数学与物理的对应并非偶然，而源于二者在本体上的同一性。

这种观点在数学史上有着悠久的传统，大约从 Pythagoras 的“万物皆数”起，人们就对数学对象的存在性有着强烈的信仰。Penrose 在《通向实在之路：宇宙法则完整指南》中主张理解物理世界必须先掌握对应的数学工具，而非由物理经验来被动地套用数学 [4]。也就是说，数学的内部结构是更基本的，物理是数学的一种现实显化。

而最激进的柏拉图主义者恐怕非 Max Tegmark 莫属。Tegmark 提出了数学宇宙假说：我们所追求的万有理论可能本质上就是认为所有数学结构都物理存在的理论，即“终极系综理论”[6]。在这种视角下，物理的尽头就是数学，然而为物理寻求数学解释的动机似乎有本末倒置之嫌。柏拉图主义对于数学的信任有合理性，但我们应该如何区分“真实宇宙的数学”与“纯数学虚构”？若“数学结构”包含不可计算系统，其物理实在性如何检验？

3.3 工具主义

工具主义将数学看作一种工具，其价值仅在于对经验现象的“操作性”描述及预测能力，而非揭示某种“终极实在”或“真理本质”。数学之所以能有效描述物理规律是因为人类可以自主地选择符合规律的数学工具，用满足条件的数学模型进行建模。正如 Abbott 所言，物理定律是数学的一种“有损压缩”，是对数学模型进行人择。Duhem-Quine 论题提出“我们的观察材料不能用来单个地检验科学假设，这些材料只能检验我们科学假设的整个体系”。工具主义者将数学视为庞大科学网络中的一个节点，当整个系统不能满足观测现实时，我们可以微调网络中的各个节点来拟合。因此，数学有效的原因是它嵌入在一个庞大的，可调整的科学网络中。

工具主义的例证是很多数学的来源是物理等具体问题。Dirac 函数是 Fourier 在《热分析理论》第一次提出，为了解决物理中方程而引入的不严格数学工具。过了几个世纪，直到 Schwartz 建立了广义函数的理论后，才纳入严格数学的范畴，在当下偏微分方程的理论中占据重要的地位。

诚然，有些数学理论确实由物理启发而来，比如计数几何的一些问题。但实际上，这是物理预见性地指出了完备数学体系中缺失的部分，而非纯粹功利地发展实用的数学。后来发现，这些从物理中来的数学本身就具有相当优美的结构和重要的性质。并且在历史上，更多的情况是群论、李代数等数学分支先于物理学家发现其在物理中的应用。

3.4 结构主义

现代数学，尤其是代数，更多的是在研究一种广泛的结构，希望可以用统一的语言去描述各种数学对象。结构主义者将物理世界视为一种关系网络，数学为这种网络提供了一种可以嵌入的框架。数学是一种人类认知的先天框架，物理是去选择适配某种框架的具体理论。回顾数学与物理的历史，物理重大理论和数学工具的对应关系是架构性的。Lagrange 力学选择了 Riemann 几何的框架，而 Hamilton 力学则选择了辛几何的框架；Newton 力学建立在欧氏几何的基础之上，后来的广义相对论依赖于 Riemann 几何，量子力学则依赖于 Hilbert 空间的结构。纵观这段历史，数学体系本身并未随物理需求而改变；改变的是物理家选择并“嵌入”到物理建构中的那部分数学结构。

Kant 对于数学的观点和结构主义者很相似。Kant 在《纯粹理性批判》中提出“数学是先天综合的判断”[2]。数学的先天性体现在数学真理普遍必然，无论在哪一个平行宇宙 (如果有的话)， $1 + 1 = 2$ 都是成立的；数学的综合性体现在人类可以在数学中扩展知识，比如在有了 1 的基础上，我们可以定义 1 的后继为 2，进而定义加法、乘法等运算。这种“先天综合判断”的描述融合了理性主义和经验主义。

我认为这种结构主义的解释是最合理的，兼顾了数学的客观性与物理对数学的依赖，并且某种意义上可以说调和了柏拉图主义和工具主义。区别在于工具主义会更加注重数学的实用性和功利性，但实际上数学的建构从来都是独立于世的，没有人为选择的成分，因此结构主义更符合数学的本质逻辑。物理学发展的动机和数学有着本质上的差别，物理学是对自然现象的解释。至少大部分的物理学家不会从“宇宙本质上是数学结构”的角度来思考自然运行的规律。数学，是作为当今最简洁，最一般性，且最严格的语言来构建物理大厦的基石的。

4 数学的“不有效性”

Wigner 看到的是数学在物理学中的有效性，但也有一些物理学问题找不到合适的数学理论。数学理论在面对现实的物理世界是有边界的。

一是复杂性的边界。最著名的三体问题中，Poincaré 证明了三体问题初始条件微扰下，最后的结果会指数发散，不可能有解析解。二是认知和逻辑的边界。Gödel 不完备性定理指出：任何自治的形式系统都必存在不可证真伪的命题。也就是说，如果如 Tegmark 所言宇宙就是一个数学结构，那么存在永远无法认知的真理，数学的有效性在某种程度上是有限的。

这启示我们看到尽管数学在解释物理上有过惊人的有效性，但也只是一种语言，一种模型，不是万能的神。实际上，数学的“不合理有效性”在于提供了大量的理论，而物理只需要选取其中符合的那一个。而在少数情况下，数学还没有发展到足以描述物理现象的程度，数学就会显得“不有效”。

5 数学与物理学的实践启示

从数学史和物理学史上来看，数学和物理两者的发展往往是相辅相成的。一方面，物理学家会从数学中发现新框架来描述新理论，比如 Einstein 发现相对论时得知了黎曼几何恰好与他的物理设想相符，于是就用黎曼几何来描述时空的性质。另一方面，数学家也会从物理学中获得灵感，发展出新的数学理论。而现代数学的很多分支已经发展得非常成熟，需要新的动机来推动其发展。这时候，动机往往来源于物理，因为物理在暂时没有合适的语言描述理论时就会发明没有严格化的新数学，数学就可以研究这些新问题使其严格化。比如，弦论的产生就带来了数学物理领域的很多新问题，如 Gromov-Witten 不变量等几何问题。

数学的“不合理有效性”不是纯粹的奇迹，而是数学固有结构和人类探索过程共同作用的结果。Johannes Lenhard 和 Michael Otte 提出了数学的发展有基础化和探索化两种可能的方式 [3]。数学的发展从宏观而言不是基础化的，而是探索化的，因为基础化排除尚未完全映射到固定论域的探索式建模，这就无法解释群论等与以往数学完全不同的分支的产生。

目前我们眼中的物理世界的内在结构是天然适配数学语言的。物理学高度强调对称性及其结果，如时间平移对称可以推出能量守恒；物理学中广泛存在的最小作用量原理和数学中的各种极值问题有着奇妙的对应。Einstein 说：“宇宙最不可理解之处，是它竟然可以被数学理解。”其实，这就是物理学适配数学语言的结果。

人类对数学的探索是一个追求深层统一结构的过程。从最原始的结绳记事到自然数的发明，从自然数到群环域等代数结构，再到代数几何概型的更高层次统一，数学在抽象中不断涵盖更普遍的规律。物理也是一门追求大一统的学科，最宏大的愿景是希望有一个“万有理论”可以统一所有物理现象。当下的物理中，量子力学是一种数学，而广义相对论则是另一种数学，如果存在万有理论，那对应的必定是一种能统一这两种数学的更一般的数学。

数学可以视为一个巨大的仓库，里面存放着各种各样的数学结构。物理学家在探索自然规律时，就像在这个仓库中寻找合适的工具和结构来描述他们所观察到的现象。当然，也会有仓库中暂时没有工具的时候，这就对应了“不有效”的情况。

6 结论

引用 Wigner 原文中的一句话作结：“数学语言在表述自然律时的适当性是一项奇迹，它是我们既不理解也不配拥有的奇妙天赐。”Wigner 问题至今无定论，但正是这种张力推动了科学哲学与数学、物理学的交叉创新。数学为物理学提供了简介有效且强有力的语言，这正是物理学精确性所需要的。

科学哲学的探讨启示我们数学结构为物理理论提供一种蓝本和框架，物理学的大一统趋势与这种结构性的模型有着密不可分的关系。因此数学的“不合理有效性”并非偶

然或是奇迹，反映了一种更基本的结构实在和美学追求。

总体而言，数学与物理的关系并非单向支配，也非纯粹巧合。数学是一种研究框架、结构的学科，而物理学正是框架的最好具体注解。

参考文献

- [1] Derek Abbott. The reasonable ineffectiveness of mathematics [point of view]. *Proceedings of the IEEE*, 101(10):2147–2153, 2013.
- [2] I. Kant and J.M.D. Meiklejohn. *Critique of Pure Reason*. Bohn’s philosophical library. Henry G. Bohn, 1855.
- [3] Johannes Lenhard and Michael Otte. The applicability of mathematics as a philosophical problem: Mathematization as exploration. *Foundations of Science*, 23(4), 2018.
- [4] R. Penrose. *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Science: Astrophysics. Jonathan Cape, 2004.
- [5] Marc-Olivier Renou, David Trillo, Mirjam Weilenmann, Thinh P. Le, Armin Tavakoli, Nicolas Gisin, Antonio Acín, and Miguel Navascués. Quantum theory based on real numbers can be experimentally falsified. *Nature*, 625–629(7890), 2021.
- [6] Max Tegmark. Is “the theory of everything” merely the ultimate ensemble theory? *Annals of Physics*, 270(1):1–51, November 1998.
- [7] Eugene P. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. richard courant lecture in mathematical sciences delivered at new york university, may 11, 1959. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1):1–14, 1960.