

Сборник заметок по линейной алгебре и сопряженным вопросам

Подвойский А.О.

Содержание

1 Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными	1
2 Теорема (правило) Крамера	2
3 Условие совместности системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли	2
Список литературы	2

1. Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

Матричная запись неоднородной системы уравнений имеет вид

$$Ax = b,$$

а однородной

$$Ax = o,$$

где o в правой части обозначает нулевой столбец размеров $m \times 1$.

Эту матричную запись неоднородной системы уравнений можно представить в эквивалентной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда решение системы представляется столбцом

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

и удовлетворяете равенству

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

т.е. столбец свободных членов b является линейной комбинацией столбцов матрицы системы.

2. Теорема (правило) Крамера

Система называется **совместной**, если она имеет *хотя бы одно решение*. Система называется **несовместной**, если она *не имеет ни одного решения*.

Если определитель $\Delta = \det A$ матрицы системы n линейных независимых уравнений с n неизвестными отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то система имеет *единственное* решение, которое находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\Delta = \det A \neq 0),$$

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ заменой i -ого столбца столбцом свободных членов.

ЗАМЕЧАНИЕ: на практике при больших n правило Крамера не применяется!

Если $\Delta = 0$ (матрица коэффициентов системы вырождена) и хотя бы один определитель $\Delta_i \neq 0$, то система *несовместна*, т.е. не имеет ни одного решения. Если же $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots, \Delta_n = 0$, то возможны два случая: либо система несовместна (не имеет ни одного решения), либо система имеет бесконечно много решений [1, стр. 188].

3. Условие совместности системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными. Составим блочную матрицу, приписав к матрице A справа столбец свободных членов b . Получим *расширенную матрицу системы*

$$(A | b)_{m \times (n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Эта матрица содержит всю информацию о системе уравнений, за исключением обозначений неизвестных.

Теорема Кронекера-Капелли. Система $Ax = b$ *совместна* (т.е. имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы $\text{rg } A = \text{rg}(A | b)$.

Если система имеет решение, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы системы. Поэтому при вычеркивании столбца b из расширенной матрицы $(A | b)$ ее ранг не изменяется. Следовательно, $\text{rg}(A | b) = \text{rg } A$.

Список литературы

1. Бортакровский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
3. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. – М.: БИНОМ, 2009. – 472 с.

4. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 816 с.