

# Сборник заметок по линейной алгебре и сопряженным вопросам

Подвойский А.О.

## Содержание

1 Ранг матрицы	2
2 Базис линейного пространства. Координаты векторов	2
3 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора	3
4 Мера обусловленности матрицы	4
5 Линейно зависимые и линейно независимые системы	5
5.1 Свойства линейно зависимых и линейно независимых столбцов . . . . .	5
6 Система $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными	6
7 Теорема (правило) Крамера	6
8 Условие совместности системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли	7
9 Общее решение системы линейных алгебраических уравнений	7
10 Решение систем уравнений с помощью полуобратных матриц	8
11 Псевдорешения системы линейных уравнений	9
12 Свойства решений однородной системы	10
13 Функциональные матрицы скалярного аргумента	10
14 Производные скалярной функции по векторному аргументу	11
15 Производные от векторной функции векторного аргумента	13
16 Правила дифференцирования по векторному аргументу	13
17 Производные матричной функции по векторному аргументу	15
18 Линейные и квадратичные формы	15
Список литературы	16

## 1. Ранг матрицы

*Базисный минор* – это отличный от нуля минор наивысшего порядка.

*Ранг* матрицы это наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы. Отличные от нуля миноры наивысшего порядка называют *базисными*. Столбцы матрицы, на которых располагается хотя бы один базисный минор этой матрицы *линейно независимы* и называются *базисными столбцами*.

Если ранг матрицы совпадает с числом ее столбцов  $\text{rg } A_{m \times n} = n$ , то все столбцы этой матрицы линейно независимы [4, стр. 31]. Существенным является то, что ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях [4, стр. 34].

Ранг матрицы можно вычислить методом окаймляющих миноров [1], [4, стр. 31].

## 2. Базис линейного пространства. Координаты векторов

Всякую систему векторов линейного пространства  $X$  называют *базисом* или *базой этого пространства*, если эта система векторов *линейно независима* и любой вектор пространства  $X$  линейно выражается через векторы этой системы.

Если базис пространства конечен, т.е. состоит из конечного числа векторов, то он представляет собой конечную максимальную линейно независимую систему векторов пространства, и обратно, *любая конечная максимальная линейно независимая система векторов* линейного пространства является *базисом* этого пространства.

Линейное пространство  $X$  называют конечномерным, если оно обладает хотя бы одним базисом, состоящим из конечного числа векторов. Конечномерное пространство может обладать многими различными базисами. Число векторов в каждом базисе конечномерного пространства одинаково. Это число называют *размерностью* пространства и обозначают  $\dim X = n$ . Пространство  $X$  при этом называют  $n$ -мерным.

То есть размерность пространства  $\dim X$  – это число векторов в базисе пространства.

Пусть линейное пространство  $X_n$  обладает базисом

$$e : e_1, e_2, \dots, e_n.$$

Тогда любой вектор  $x$  из  $X_n$  единственным образом представляется в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = e \cdot [x]_e.$$

Числа  $x_1, x_2, \dots$  в разложении называют координатами вектора  $x$  в базисе и записывают  $x (x_1, x_2, \dots, x_n)_e^T$ .

Система линейных уравнений, имеющая *хотя бы одно* решение, называется *совместной*. Если у системы *нет решений*, то она называется *несовместной* [4, стр. 41].

Система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $A$  системы равен рангу расширенной матрицы  $A|b$ :  $\text{rg } A = \text{rg}(A|b)$ . Ранг матрицы определяется порядком базисного минора.

Если ранг матрицы совпадает с числом неизвестных и система совместна, то она имеет строго одно решение. Если же ранг матрицы меньше числа неизвестных и матрица совместна, то она имеет бесконечное множество решений.

Система называется *однородной*, если все свободные члены ее уравнения равны нулю. Кроме того, *однородная система всегда совместна*, так как она обладает, по крайней мере, нулевым решением  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

Для того чтобы система линейных *однородных* уравнений имела *только нулевое* решение необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы совпадал с числом неизвестных системы,  $\text{rg } A_{n \times n} = n$  [4, стр. 43]. В частности, однородная система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет только нулевое решение, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель однородной системы отличен от нуля, то это значит, что ранг матрицы совпадает с числом столбцов (неизвестных), а однородная система всегда совместна. В этом случае может существовать только одно решение – нулевое.

Та же мысль, но немного по-другому. Пусть определитель матрицы коэффициентов  $A_{n \times n}$  *однородной* системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля,  $\det A_{n \times n} \neq 0$ . Это значит, что можно записать

$$Ax = 0, \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0, \rightarrow \underline{x=0} \text{ (при } \det A \neq 0)$$

То есть если матрица коэффициентов однородной СЛАУ имеет полный столбцовый ранг (столбцы линейно независимы), то у этой однородной системы может быть только тривиальное нулевое решение.

Для того чтобы *однородная* система имела *ненулевые* решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был меньше числа неизвестных системы,  $\text{rg } A < \#x_k$ . В частности, *однородная* система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет *ненулевые* решения, когда ее определитель равен нулю,  $\det A_{n \times n} = 0$ . Любая однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных имеет ненулевые решения.

Однородная СЛАУ имеет ненулевые решения при нулевом определителе потому, что в этом случае у СЛАУ  $\text{rg } A_{n \times n} < n$ , то есть уравнений меньше, чем неизвестных. А это значит, что матрица коэффициентов, например для СЛАУ с тремя неизвестными, выглядит так

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что определитель такой матрица равен  $\det A = 0$ . Потому и получается, что если у однородной СЛАУ уравнений меньше, чем неизвестных, то определитель матрицы коэффициентов у нее обнуляется.

Характеристические числа линейного оператора, принадлежащие основному полю  $P$ , и только они, являются собственными значениями этого оператора [4, стр. 65].

### 3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Ненулевой вектор  $x$  из  $X_n$  называют *собственным вектором оператора*  $\varphi$ , если этим оператором он переводится в вектор  $\lambda x$ , т.е.

$$\varphi x = \lambda x,$$

где  $\lambda$  – некоторое число из поля  $P$ , называемое *собственным значением оператора*  $\varphi$ . При этом говорят, что собственный вектор  $x$  принадлежит собственному значению  $\lambda$ .

В матричной форме

$$AX = \lambda X.$$

Отсюда получаем

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Эта однородная система имеет ненулевые решения с координатами из поля  $P$  только тогда, когда определитель  $\det(A - \lambda E) = 0$  и  $\lambda$  принадлежит полю  $P$ . Но это означает, что  $\lambda$  является корнем характеристического многочлена  $\det(A - \lambda E)$  и принадлежит полю  $P$ .

Множество всех собственных значений линейного оператора (каждое собственное значение берется столько раз, какова его кратность в характеристическом многочлене) называют *спектром линейного оператора*. Если матрицу отождествляют с оператором, то множество всех ее собственных значений называют *спектром матрицы*.

То есть для отыскания всех собственных значений оператора с матрицей  $A$  нужно найти все характеристические числа матрицы  $A$  из них выбрать лишь те, которые принадлежат основному полю, а для отыскания всех собственных векторов оператора с матрицей  $A$  нужно найти все ненулевые решения системы  $(A - \lambda E)X = 0$  при каждом собственном значении  $\lambda$  [4, стр. 65].

Собственные векторы линейного оператора  $\varphi$  с матрицей  $A$ , принадлежащие одному и тому же собственному значению  $\lambda$ , вместе с нулевым вектором образуют подпространство, которое называют *собственным подпространством оператора*  $\varphi$  по  $\lambda$ .

Размерность собственного подпространства оператора  $\varphi$  по собственному значению  $\lambda$  равна  $n - r_\lambda$ , где  $n$  – порядок матрицы  $A$ ,  $r_\lambda$  – ранг матрицы  $A - \lambda E$ . Эту размерность называют *геометрической кратностью собственного значения*  $\lambda$ .

Другими словами, геометрической кратностью собственного значения  $\lambda$  (то есть  $n - r_\lambda$ ) называют *максимальное число линейно независимых собственных векторов* оператора  $\varphi$ , принадлежащих собственному значению  $\lambda$  [4, стр. 66].

Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраической кратности, т.е. кратности, с которой  $\lambda$  входит корнем в характеристический многочлен  $\det(A - \lambda E)$ .

Собственные векторы линейного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы. Их линейные комбинации, вообще говоря, не являются собственными векторами оператора  $\varphi$ .

Если отождествлять оператор с его матрицей, то естественно говорить о *собственных значениях* и *собственных векторах матрицы*. На практике так обычно и делают.

Квадратную матрицу называют *простой*, если для каждого собственного значения матрицы ее геометрическая кратность совпадает с алгебраической кратностью. В противном случае матрицу называют *дефектной*.

## 4. Мера обусловленности матрицы

Мера (или число) обусловленности матрицы  $A$  определяется как [3, стр. 306]

$$\nu(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Поскольку *любая* норма матрицы не меньше своего наибольшего по модулю собственного значения, то  $\|A\| \geq \max |\lambda_A|$  и поскольку собственные значения матриц  $A$  и  $A^{-1}$  взаимно обратны, то

$$\|A^{-1}\| \geq \max \frac{1}{|\lambda_A|} = \frac{1}{\min |\lambda_A|}$$

Таким образом, мера обусловленности матрицы  $A$

$$\nu(A) \geq \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|} \geq 1$$

В частности, при  $A = A^T$  (то есть если матрица симметричная) имеем  $\|A\|_2 = \max |\lambda_A|$ .

Следовательно, в случае нормы  $\|\cdot\|_2$

$$\nu(A) = \frac{\max |\lambda_A|}{\min |\lambda_A|}.$$

## 5. Линейно зависимые и линейно независимые системы

Система из  $k$  столбцов  $A_1, \dots, A_k$  называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  не все равные нулю одновременно, что [1, стр. 128]

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_k A_k = o,$$

где  $o$  – нулевой вектор соответствующего размера.

То есть другими словами система  $k$  столбцов называется *линейно зависимой*, если эти столбцы *суммируются в нулевой столбец* для нетривиального случая коэффициентов  $\alpha_i$  (когда эти коэффициенты не все одновременно равны нулю).

Система из  $k$  столбцов называется *линейно независимой*, если  $\sum_{j=1}^k \alpha_j A_j = o$  возможно только в тривиальном случае, т.е. когда  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ .

### 5.1. Свойства линейно зависимых и линейно независимых столбцов

---

---

#### Замечание

Понятия линейной зависимости и линейной независимости формулируются одинаково как для строк, и так для столбцов

---

---

- Если в систему входит *нулевой столбец*, то она *линейно зависима*,
- Если в систему входит *два равных столбца*, то она *линейно зависима*,
- Если в системе столбцов имеется два пропорциональных столбца  $A_i = \lambda A_j$ , то она линейно зависима,

- Любые столбцы, входящие в *линейно независимую систему*, образуют *линейно независимую подсистему*,
- Система столбцов, содержащая *линейно зависимую подсистему*, сама *линейно зависима*,
- Если система столбцов  $A_1, \dots, A_k$  – линейно независима, а после присоединения к ней столбца  $A$  – оказывается линейно зависимой, то столбец  $A$  можно разложить по столбцам  $A_1, \dots, A_k$  и притом единственным образом, т.е. коэффициенты определяются однозначно.

## 6. Система $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными

Матричная запись неоднородной системы уравнений имеет вид

$$Ax = b,$$

а однородной

$$Ax = o,$$

где  $o$  в правой части обозначает нулевой столбец размеров  $m \times 1$ .

Эту матричную запись неоднородной системы уравнений можно представить в эквивалентной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда решение системы представляется столбцом

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

и удовлетворяете равенству

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

т.е. столбец свободных членов  $b$  является линейной комбинацией столбцов матрицы системы.

## 7. Теорема (правило) Крамера

Система называется **совместной**, если она имеет *хотя бы одно решение*. Система называется **несовместной**, если она *не имеет ни одного решения*.

Если определитель  $\Delta = \det A$  матрицы системы  $n$  линейных независимых уравнений с  $n$  неизвестными отличен от нуля ( $\det A \neq 0$ ), то система имеет *единственное* решение, которое

находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\Delta = \det A \neq 0),$$

где  $\Delta_i$  – определитель матрицы, полученной из матрицы системы  $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$  заменой  $i$ -ого столбца столбцом свободных членов.

ЗАМЕЧАНИЕ: на практике при больших  $n$  правило Крамера не применяется!

Если  $\Delta = 0$  (матрица коэффициентов системы вырождена) и хотя бы один определитель  $\Delta_i \neq 0$ , то система *несовместна*, т.е. не имеет ни одного решения. Если же  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots, \Delta_n = 0$ , то возможны два случая: либо система несовместна (не имеет ни одного решения), либо система имеет бесконечно много решений [1, стр. 188].

## 8. Условие совместности системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными. Составим блочную матрицу, приписав к матрице  $A$  справа столбец свободных членов  $b$ . Получим *расширенную матрицу системы*

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}_{m \times (n+1)}$$

Эта матрица содержит всю информацию о системе уравнений, за исключением обозначений неизвестных.

*Теорема Кронекера-Капелли.* Система  $Ax = b$  *совместна* (т.е. имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы  $\text{rg } A = \text{rg}(A \mid b)$ .

Если  $\text{rg } A \neq \text{rg}(A \mid b)$ , то система несовместна – не имеет решений.

Если система имеет решение, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы системы. Поэтому при вычеркивании столбца  $b$  из расширенной матрицы  $(A \mid b)$  ее ранг не изменяется. Следовательно,  $\text{rg}(A \mid b) = \text{rg } A$ .

ЗАМЕЧАНИЕ: теорема Кронекера-Капелли дает лишь критерий существования решения системы, но не указывает способа отыскать этого решения.

## 9. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений

Неизвестные, которым соответствуют столбцы, входящие в базисный минор, называются *базисными переменными*, остальные неизвестные – *свободными переменными*.

Общее решение системы, выражающее базисные переменные через свободные, имеет вид [1, стр. 192]

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1,n}x_n, \\ \dots \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{r,n}x_n, \end{cases}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_r$  – базисные переменные;  $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$  – свободные переменные.

Частное решение системы – решение системы, получающееся из общего решения, заданием конкретных значений свободными переменным.

Пусть  $x$  – решение неоднородной системы. Тогда любое решение  $x$  неоднородной системы можно представить в виде  $x = x^h + x^o$ , где  $x^o$  – решение однородной системы.

Говорят, что общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы [1, стр. 200]

$$x = x^h + C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_{n-r}\varphi_{n-r}.$$

## 10. Решение систем уравнений с помощью полуобратных матриц

Требуется решить систему линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где  $A$  – произвольная матрица размера  $m \times n$ .

Если матрица системы нулевая  $A = O$ , то система либо несовместна (при  $b = o$ ), либо имеет бесконечное множество решений (при  $b = o$  любой подходящий по размерам столбец  $x$  является решением). Далее рассматривается случай ненулевой матрицы  $A$ .

Пусть  $A^{-1}$  – матрица, полуобратная к матрице системы  $A$ . Используя определение полуобратной матрицы, неоднородную систему  $Ax = b$  можно переписать так

$$AA^{-1}Ax = b.$$

Если  $x$  – решение системы, то подставляя  $Ax = b$  в левую часть последнего соотношения

$$AA^{-1}Ax = b, \quad \rightarrow \quad AA^{-1}b = b.$$

Тогда

$$(E_m - AA^{-1})b = o.$$

Это необходимое и достаточное условие совместности системы.

Решением системы будет  $x = A^{-1}b$ . Но поскольку полуобратная матрица определена неоднозначно, то эта формула фактически задает множество решений системы. Преобразуем так, чтобы была видна структура этого множества, в частности, выявим количество независимых



параметров

$$A_0^{-1} = T\Lambda^T S = T \left( \begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) S,$$

где  $S$  и  $T$  – элементарные матрицы порядков  $n$  и  $m$  соответственно,  $\Lambda$  – матрица простейшего вида, эквивалентная матрице  $A$  ( $\Lambda \sim A$ ),  $\text{rg } A$ .

*Теорема о совместности неоднородной системы и о структуре ее общего решения.* Неоднородная система  $Ax = b$  совместна тогда и только тогда, когда столбец свободных членов является решением однородной системы  $\Psi b = o$ . Если система  $Ax = b$  совместна, то ее общее решение имеет вид [1, стр. 205]

$$x = x^h + x^o = A_0^{-1} b + \Psi c = T \left( \begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) S b + T \left( \begin{array}{c} O \\ \hline E_{n-r} \end{array} \right) c, \quad \Psi = \left( O \mid E_{m-r} S \right),$$

где  $T, S$  – элементарные преобразующие матрицы,  $c = (C_1 \dots C_{n-r})^T$  – столбец произвольных постоянных.

Алгоритм применения полуобратной матрицы:

1. Привести матрицу  $A$  системы  $Ax = b$  к простейшему виду:  $\Lambda = SAT$ . При этом находятся элементарные преобразующие матрицы  $S$  и  $T$ , а также ранг  $r = \text{rg } A \geq 1$ .
2. Проверить условие совместности системы  $\Psi b = o$ . При  $r = m$  система совместна. Если  $r < m$ , то составить матрицу  $\Psi = (O \mid E_{m-r}) S$  и проверить условие  $\Psi b = o$ . Если условие выполняется, то система совместна. В противном случае система несовместна и процесс решения заканчивается.
3. Найти частное решение неоднородной системы по формуле

$$x^h = A_0^{-1} b = T \left( \begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array} \right) S b$$

4. Составить фундаментальную матрицу

$$\Phi = T \left( \begin{array}{c} O \\ \hline E_{n-r} \end{array} \right)$$

5. Записать общее решение системы в виде

$$x = x^h + \Phi c,$$

где  $c = (C_1 \dots C_{n-r})^T$  – столбец произвольных постоянных.

## 11. Псевдорешения системы линейных уравнений

Система  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными  $Ax = b$  может иметь единственное решение, бесконечно много решений или вообще не иметь решений. Нужно изменить понятие решения так, чтобы любая система линейных уравнений имела бы единственное в некотором смысле «решение».

Поставим каждому столбцу в соответствие неотрицательное действительное число, а именно норму (модуль)

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

*Псевдорешением* системы линейных уравнений называется наименьший по норме столбец  $\tilde{x}$  среди всех столбцов, минимизирующих величину  $|Ax - b|$ .

ЗАМЕЧАНИЕ: *любая* система имеет единственное псевдорешение [1, стр. 209]

$$\tilde{x} = A^{\sim 1}b,$$

где  $A^{\sim 1}$  – псевдообратная матрица для матрицы системы.

Понятие псевдорешения позволяет обойти не только факт неединственности, но и факт несуществования решений.

Если система несовместна, то псевдорешение  $\tilde{x}$  обеспечивает наименьшую величину погрешности  $\varepsilon(x) = |Ax - b|$ .

Если система совместна, то псевдорешение  $\tilde{x}$  является ее решением, т.е.  $\varepsilon(\tilde{x}) = 0$ , причем наименьшим по норме.

Алгоритм нахождения псевдорешения неоднородной системы:

1. Найти псевдообратную матрицу  $A^{\sim 1}$ .
2. Найти псевдорешение  $\tilde{x} = A^{\sim 1}b$ .

ЗАМЕЧАНИЕ: *полуобратная* матрица определена неоднозначно и потому задает не конкретное решение, а *множество решений* системы. *Псевдорешение*, полученное с помощью псевдообратной матрицы, всегда вычисляется в *конкретное решение*.

## 12. Свойства решений однородной системы

Общее решение однородной системы  $Ax = 0$  имеет вид [1, стр. 194]

$$\begin{cases} x_1 = -a'_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1,n}x_n, \\ \dots \\ x_r = -a'_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{r,n}x_n. \end{cases}$$

Некоторые свойства:

- Если столбцы  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  – решения однородной системы уравнений, то любая их линейная комбинация  $\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_k \varphi_k$  также является решением однородной системы,
- Если ранг матрицы однородной системы равен  $r$ , то система имеет  $(n - r)$  *линейно независимых решений*.

Любая совокупность  $(n - r)$  линейно независимых решений  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-r}$  однородной системы называется *фундаментальной системой решений*.

*Теорема об общем решении однородной системы.* Если  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-r}$  – фундаментальная система решений однородной системы уравнений, то столбец

$$x = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_{n-r}\varphi_{n-r} \tag{1}$$

при любых значениях произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$  также является решением системы  $Ax = o$ , и, наоборот, для каждого решения  $x$  этой системы найдутся такие значения произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ , при которых это решение  $x$  удовлетворяет равенству (1).

### 13. Функциональные матрицы скалярного аргумента

*Функциональной матрицей скалярного аргумента  $t$*  называется матрица, элементы которой являются функциями независимой переменной  $t$

$$A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^{m,n}$$

Производная функциональной матрицы

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left[ \frac{da_{ij}(t)}{dt} \right]_{i,j=1}^{m,n}.$$

Производная обратной матрицы (если она существует)

$$\frac{dA^{-1}(t)}{dt} = -A^{-1}(t) \frac{dA(t)}{dt} A^{-1}(t).$$

Производная определителя квадратной матрицы  $A(t)$   $n$ -ого порядка

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}(t) \frac{da_{ij}(t)}{dt} = \operatorname{tr} \left[ A^+(t) \frac{dA(t)}{dt} \right],$$

где  $A_{ij}(t)$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}(t)$  матрицы  $A(t)$ ;  $A^+(t)$  – присоединенная матрица.

### 14. Производные скалярной функции по векторному аргументу

Рассмотрим скалярную (числовую) функцию нескольких переменных  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Упорядоченный набор переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  будем называть *векторным аргументом* этой функции.

*Первый дифференциал* функции  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет вид

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n.$$

Сумму в правой части можно представить как произведение строки  $\frac{df(x)}{dx} = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$  на столбец  $dx = (dx_1 \dots dx_n)^T$ , либо как произведение строки  $dx^T$  на столбец  $dx = \frac{df(x)}{dx^T} = \left( \frac{df(x)}{dx} \right)^T$ .

Так как первый дифференциал  $\underset{1 \times 1}{df(x)}$  – это одноэлементная матрица (а одноэлементная матрица совпадает со своей транспонированной), то  $\underset{1 \times 1}{df(x)} = \underset{1 \times 1}{(df(x))^T}$

$$\underset{1 \times 1}{df(x)} = \underset{1 \times n}{\frac{df(x)}{dx}} \underset{n \times 1}{dx} = \left( \underset{1 \times n}{\frac{df(x)}{dx}} dx \right)^T = dx^T \left( \underset{1 \times n}{\frac{df(x)}{dx}} \right)^T = \underset{1 \times n}{dx}^T \underset{n \times 1}{\frac{df(x)}{dx^T}}.$$

Второй дифференциал функции имеет вид

$$d^2 f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Обозначим через  $\frac{d^2 f(x)}{dx^T dx} = \left[ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} \right]_{i,j=1}^n$  квадратную матрицу частных производных второго порядка (*матрицу Гессе*). Определитель матрицы Гессе называется *гессианом*.

Тогда можно переписать

$$\underset{1 \times 1}{d^2 f(x)} = \underset{1 \times n}{dx}^T \underset{n \times n}{\frac{d^2 f(x)}{dx^T dx}} \underset{n \times 1}{dx}.$$

Для скалярной функции скалярного аргумента второй дифференциал будет иметь вид

$$d^2 f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx^2.$$

Для записи производных можно использовать символические векторы (столбцы или строки)

$$\nabla = \frac{d}{dx} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad \nabla^T = \frac{d}{dx^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

При этом дифференцирование функции формально записывается как умножение функции на символический вектор производных. Например, градиент функции есть произведение вектора  $\nabla$  на функцию  $f(x)$

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, \dots, x_n) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \\ \underset{n \times 1}{\nabla}^T \underset{1 \times n}{\nabla} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n. \end{aligned}$$

Найти первую и вторую производные сложной функции  $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ , применяя матричные обозначения.

Находим производные функции, заменяя суммирование операциями умножения соответствующих матриц. Первая производная

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{df(x(t))}{dx} \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

В случае скалярной функции скалярного аргумента первая производная от функции  $g(x)$  будет выглядеть так же.

Вторая производная скалярной функции векторного аргумента

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x(t))}{\partial x_j \partial x_i} \cdot \frac{dx_i(t)}{dt} \cdot \frac{dx_j(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x(t))}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i^2(t)}{dt^2} = \dots \\ &\dots = \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^T \frac{d^2 f(x(t))}{dx^T dx} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{df(x(t))}{dx} \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}. \end{aligned}$$

В случае скалярной функции скалярного аргумента вторая производная будет выглядеть так

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} = \frac{d^2 f(x(t))}{dx^2} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \frac{df(x(t))}{dx} \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}.$$

Выражения для первой производной совпадают, а для второй производной – отличаются незначительно, причем полное совпадение будет, если учесть, что  $x^T = x$  для скалярной величины  $x$ .

## 15. Производные от векторной функции векторного аргумента

Пусть задан столбец

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

функций нескольких переменных (говорят, что задана *вектор-функция векторного аргумента*).

Первый дифференциал вектор-функции имеет вид

$$df(x) = \begin{pmatrix} df_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ df_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} dx_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} dx_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_j} \end{pmatrix} dx_j$$

Обозначим через

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left[ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^{m,n}$$

матрицу частных производных первого порядка заданных функций (*матрицу Якоби*).

Тогда выражение для первого дифференциала можно записать в виде  $df(x) = \frac{df(x)}{dx} dx$ , т.е.  $\frac{df(x)}{dx}$  – производная вектор-функции векторного аргумента.

Как и в случае с аргументом  $x$ , упорядоченный набор функций можно считать не матрицей-столбцом, а матрицей-строкой  $(f(x))^T$ . Этот случай сводится к предыдущему, учитывая, что операции дифференцирования и транспонирования можно выполнять в любом порядке, так как  $d(f^T) = (df)^T$ . Тогда из равенства  $df = \frac{df}{dx} dx$  получаем  $df^T = (dx)^T \left( \frac{df}{dx} \right)^T = (dx)^T \frac{df^T}{dx^T}$ , где

$$\left( \frac{df(x)}{dx} \right)^T = \frac{df^T}{dx^T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

– транспонированная матрица Якоби вектор-функции векторного аргумента.

## 16. Правила дифференцирования по векторному аргументу

Векторный аргумент  $x$ , его приращение  $dx$  считаем вектор-столбцами размеров  $n \times 1$ .

Первый дифференциал скалярной функции векторного аргумента  $f(x_1, \dots, x_n)$  (одноэлементная матрица) имеет вид

$$df = \frac{df}{dx} dx = dx^T \frac{df}{dx^T},$$

где  $\frac{df}{dx} = \left( \frac{df}{dx_1} \dots \frac{df}{dx_n} \right)$  – градиент функции, а  $\left( \frac{df}{dx} \right)^T = \frac{df}{dx^T}$ , так как функция скалярная.

Второй дифференциал скалярной функции векторного аргумента  $f(x_1, \dots, x_n)$

$$d^2 f = dx^T \frac{d^2 f}{dx^T dx} dx,$$

где  $\frac{d^2 f}{dx^T dx} = \left[ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1}^n$  – матрица Гессе.

Первый дифференциал вектор-функции векторного аргумента (вектора-столбца)  $f(x)$  имеет вид

$$df = \frac{df(x)}{dx} dx,$$

где  $\frac{df(x)}{dx}$  – матрица Якоби.

Первый дифференциал вектора-строки

$$(df)^T = d(f^T) = dx^T \frac{df^T}{dx^T}.$$

В частном случае, когда  $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ , получаем

$$\frac{dx}{dx} = E, \quad \frac{dx^T}{dx^T} = E,$$

где  $E$  – единичная матрица  $n$ -ого порядка.

Числовую матрицу  $C$  соответствующих размеров можно выносить за знак производной

$$\frac{d(Cf)}{dx} = C \frac{df}{dx}, \quad \frac{d(f^T C)}{dx^T} = \frac{df^T}{dx^T} C$$

Производные суммы, разности и произведения вектор-функций векторного аргумента  $u(x)$  и  $v(x)$  одинаковых размеров  $m \times 1$

$$\begin{aligned} \frac{d(u+v)}{dx} &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}, & \frac{d(u-v)}{dx} &= \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}, \\ \frac{d(u^T v)}{dx} &= u^T \frac{dv}{dx} + v^T \frac{du}{dx}, & \frac{d(u^T v)}{dx^T} &= \frac{du^T}{dx^T} v + \frac{dv^T}{dx^T} u. \end{aligned}$$

Производная сложной функции  $z(y(x))$ , где  $z = z(y) = \begin{pmatrix} z_1(y) \\ \vdots \\ z_k(y) \end{pmatrix}$  и  $y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{pmatrix}$ ,

вычисляется по формуле  $\frac{dz(y(x))}{dx} = \frac{dz(y(x))}{dy} \frac{dy(x)}{dx}$  или, опуская аргументы,  $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$ .  
 $k \times m$     $m \times n$

След матрицы Якоби (при  $m = n$ ) определяет *дивергенцию*

$$\operatorname{div} f = \operatorname{tr} \frac{df}{dx} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

где  $f(x)$  – векторная функция векторного аргумента.

## 17. Производные матричной функции по векторному аргументу

Рассмотрим функциональную матрицу  $A(x)$ , элементами которой служат скалярные функции  $a_{ij}(x)$  векторного аргумента  $x$ . То есть такая матрица представляет собой трехмерную сущность, в которой на пересечении строки и столбца стоит скалярная функция, имеющая «глубину» в виде вектора аргументов.

Первый дифференциал этой функции

$$dA(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial A(x)}{\partial x_i} dx_i,$$

где  $\frac{\partial A(x)}{\partial x_i}$  – частная производная матрицы по одной переменной.

Совокупность частных производных (градиент функциональной матрицы) представляет собой объект, элементы которого  $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k}$  нумеруются тремя индексами: номер строки, номер столбца и номер переменной дифференцирования. Поэтому заменить операцию суммирования в правой части формулы операций умножения матриц в данном случае не представляется возможным. Необходимо вводить тензоры и операции над ними.

Элементы матрицы  $A = (a_j^i)$  обозначаются  $a_j^i$ , где  $i$  – номер строки, а  $j$  – номер столбца. В частности,  $x = (x^i)$  – столбец, а  $y = (y_j)$  – строка.

Частную производную функции  $F(x)$  (скалярной, векторной или матричной), то по ним производится суммирование (хотя знак суммы не указывается). Например, если  $A = (a_j^i)$  – матрица

размеров  $m \times n$ ,  $x = (x^j)$  – столбец размеров  $n \times 1$ ,  $y = (y_i)$  – строка размеров  $1 \times m$ , то

$$a_j^i x^j = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j, \quad a_j^i y_i = \sum_{i=1}^m a_j^i y_i, \quad a_j^i x^j y_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_j^i x^j y_i,$$

т.е.  $a_j^i x^j$  –  $i$ -ый элемент столбца  $Ax$ ;  $a_j^i y_i$  –  $j$ -ый элемент строки  $yA$ ;  $a_j^i x^j y_i$  – число  $yAx$ .

Применяя эти соглашения, запишем дифференциалы

$$\begin{aligned} df &= f_{(i)} dx^i, & d^2 f &= f_{(i)(j)} dx^i dx^j, \\ df^i &= f_{(j)}^i dx^j, \\ df_j^i &= f_{j(k)}^i dx^k, \end{aligned}$$

где  $f_{j(k)}^i = \frac{\partial f_j^i}{\partial x^k}$  – частная производная первого порядка элемента  $f_j^i$  функциональной матрицы  $F$  по переменной  $x^k$ .

## 18. Линейные и квадратичные формы

Многочлен первой степени от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  называется выражением вида

$$p_1(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + c_0,$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_n$  – коэффициенты многочлена (предполагается, что среди коэффициентов есть отличные от нуля); коэффициент  $c_0$  называется свободным членом. Многочлен первой степени называется однородным, если  $p_1(\lambda x) = \lambda p_1(x)$  для любого числа  $\lambda$  (это возможно только когда  $c_0 = 0$ ).

*Линейной формой* переменных  $x_1, \dots, x_n$  называется однородный многочлен первой степени

$$g(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

где  $\{c_i\}_{i=1}^n$  – коэффициенты линейной формы.

Составляя из коэффициентов строку  $c = (c_1 \dots c_n)$ , а из переменных – столбец  $x = (x_1 \dots x_n)^T$ , линейную форму можно записать в виде

$$g(x) = cx.$$

Многочлен второй степени от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  называется выражением

$$p_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c_0,$$

где числа  $a_{ij}, b_i, c_0$  – коэффициенты многочлена:  $a_{ij}$  – квадратичные коэффициенты;  $b_i$  – коэффициенты линейных членов;  $c_0$  – свободный член.

Многочлен второй степени называется однородным, если  $p_2(\lambda x) = \lambda^2 p_2(x)$  (это возможно только когда  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0, c_0 = 0$ ).



Квадратичной формой переменных  $x_1, \dots, x_n$  называется однородный многочлен второй степени

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Симметрическая матрица  $A = (a_{ij})$ , составленная из коэффициентов квадратичной формы, называется матрицей квадратичной формы.

Квадратичная форма называется вырожденной, если ее матрица вырожденная ( $\text{rg } A < n$ ), в противном случае, когда матрица невырожденная ( $\text{rg } A = n$ ), квадратичная форма называется невырожденной.

Составляя из переменных столбец  $x = (x_1 \dots x_n)^T$ , квадратичную форму можно записать в виде

$$q(x) = x^T A x.$$

## Список литературы

1. Бортакровский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 624 с.
4. Шевцов Г.С. Численные методы линейной алгебры. – М.: Финансы и статистика, 2012. – 480 с.
5. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. – М.: БИНОМ, 2009. – 472 с.
6. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 816 с.