

# Классические и продвинутое темы теории вероятностей и математической статистики

Подвойский А.О.

Здесь приводятся заметки по некоторым вопросам, касающимся машинного обучения, анализа данных, программирования на языках Python, R и прочим сопряженным вопросам так или иначе, затрагивающим работу с данными.

## Содержание

1	Эмпирическая и теоретическая функции распределения	1
2	Неравенства Чебышева, Маркова и Высочанского-Петунина	2
3	Доверительные интервалы	2
4	Центральная предельная теорема	3
5	Фактический (достигаемый) уровень значимости	4
6	Теоретические и выборочные квантили	5
7	Ошибки I и II рода	5
8	Критерий Холлендера-Прохана	6
	Список литературы	7

## 1. Эмпирическая и теоретическая функции распределения

Построим по выборке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  случайную ступенчатую функцию  $\hat{F}_n(x)$ , возрастающую скачками величины  $1/n$  в точках  $X_{(i)}$  ( $i$ -ая порядковая статистика). Эта функция называется *эмпирической функцией распределения*. Чтобы задать значения в точках разрывов, формально определим ее так, чтобы она была непрерывна справа

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_{(i)} \leq x\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{\{X_i \leq x\}}.$$

В отличие от эмпирической функции распределения выборки, интегральную функцию  $F(x)$  распределения генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*.

Различие между эмпирической и теоретической функциями распределения  $F(x)$  состоит в том, что теоретическая функция определяет *вероятность* события  $X_i \leq x$ , а эмпирическая функция  $\hat{F}_n(x)$  определяет *относительную частоту* этого события. Из теоремы Бернулли следует, что относительная частота события  $X_i \leq x$ , т.е.  $\hat{F}_n(x)$  *стремится по вероятности* к вероятности

$F(x)$  этого события, т.е.  $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$ . Другими словами числа  $\hat{F}_n(x)$  и  $F(x)$  мало отличаются одно от другого [1, 191].

## 2. Неравенства Чебышева, Маркова и Высочанского-Петунина

*Неравенство Маркова* дает грубую оценку вероятности события, состоящего в том, что неотрицательная случайная величина  $X$  с конечным математическим ожиданием  $\mu = \mathbf{E}X$  превысит некоторую положительную детерминированную величину  $a$

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mu}{a}, \quad a > 0.$$

*Неравенство Чебышева* дает грубую оценку вероятности события, состоящего в том, что случайная величина  $X$  отклонится от своего конечного среднего  $\mu$  на величину небольшую  $a$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2},$$

где  $\sigma^2$  – дисперсия  $X$ .

*Неравенство Высочанского-Петунина* дает оценку вероятности события, состоящего в том, что неотрицательная случайная величина  $X$  с одномодальным распределением, конечными средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$  не отклонится от своего среднего больше чем на  $\lambda\sigma$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq \lambda\sigma) \leq \frac{4}{9\lambda^2}.$$

В приложениях математической статистики используется эвристическое правило  $\lambda = 3$ , что соответствует верхней границе вероятности  $\frac{4}{81} \approx 0.04938$ .

## 3. Доверительные интервалы

*Доверительный интервал* – интервал, покрывающий неизвестный скалярный параметр  $\theta$  с заданной *доверительной вероятностью*  $(1 - \alpha)$

$$P(\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha,$$

где  $\hat{\theta}_{1,2}$  – нижняя и верхняя граница доверительного интервала (*случайные величины*),  $\alpha$  – уровень значимости (она же вероятность ошибки первого рода).

Наиболее часто уровень значимости принимают равным 0.05 или 0.01. Если, например, принят уровень значимости равный 0.05, то означает, что в пяти случаях из ста мы рискуем допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу) [1, 284].

*Границы доверительного интервала* являются *случайными величинами* – функциями от выборки (или другими словами границы доверительного интервала являются *статистиками*) – поэтому правильнее говорить не о вероятности попадания  $\theta$  в доверительный интервал, а о вероятности того, что доверительный интервал покроет неизвестный параметр  $\theta$  [1, 216].

**Интервалы в нормальной модели** Допустим, что элементы выборки  $X_i$  распределены по закону  $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ , причем параметр масштаба  $\sigma$  известен, а параметр сдвига  $\theta$  – нет. Эту модель

часто применяют к данным, полученным при независимых измерениях некоторой величины  $\theta$  с помощью прибора (или метода), имеющего известную среднюю погрешность (стандартную ошибку)  $\sigma$ .

Если случайная величина  $X$  распределена нормально  $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ , то выборочная средняя  $\bar{X}$ , найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения таковы [1]

$$\mathbf{E}(\bar{X}) = \theta, \sqrt{\mathbf{D}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \bar{X} \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2/n).$$

Для центрированной и нормированной случайной величины  $\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$  в качестве границ интервала с доверительной вероятности  $1 - \alpha$  можно взять

$$\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sigma/\sqrt{n} x_{1-\alpha/2}, \quad \hat{\theta}_2 = \bar{X} + \sigma/\sqrt{n} x_{1-\alpha/2}.$$

Таким образом, с вероятностью 0.95 истинное значение параметра сдвига  $\theta$  находится в интервале  $\bar{X} \pm 1.96 \sigma/\sqrt{n} \approx \bar{X} \pm 2 \sigma/\sqrt{n}$  (правило двух сигм) [2, 147].

На практике, если значение  $\sigma$  неизвестно, то его заменяют на *состоятельную оценку*  $\hat{\sigma} = S$ , где  $S^2 = \frac{1}{2} \sum (X_i - \hat{X})^2$ .

А вот если выборка *маленькая*, про ее параметры ничего неизвестно и объем выборки небольшой ( $n \leq 30$ ), тогда вместо нормального распределения используют *распределение Стьюдента* ( $t$ -распределение).

Тогда доверительный интервал будет иметь вид

$$\left( \bar{x} - \frac{\sqrt{n}}{s} t_{\alpha}(n-1); \bar{x} + \frac{\sqrt{n}}{s} t_{\alpha}(n-1) \right),$$

где  $t_{\alpha}(n-1)$  – это квантиль распределения Стьюдента уровня  $1 - \alpha/2$  с  $n - 1$  степенями свободы.

#### Замечание

Распределение Стьюдента стремится к нормальному распределению при  $n \rightarrow \infty$

*Число степеней свободы* зависит от того, сколько имеется связей между наблюдениями. Так как мы знаем среднее, то наблюдения связаны одним равенством и степеней свободы становится на одну меньше.

Оценка  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$  называется *состоятельной*, если для всех  $\theta \in \Theta$  последовательность

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь  $\xrightarrow{\mathbf{P}}$  обозначает *сходимость по вероятности*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

*Состоятельность* оценки (а точнее – последовательности оценок  $\{\hat{\theta}_n\}$ ) означает концентрацию вероятностной массы около истинного значения параметра  $\theta$  с ростом размера выборки  $n$  [2, 75].

## 4. Центральная предельная теорема

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  – независимые одинаково распределенные случайные величины. Положим  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ .

Если  $0 < \sigma^2 = \mathbf{D}X_1 < \infty$ , то

$$S_n^* = \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{\sqrt{\mathbf{D}S_n}} = \frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z, \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $Z$  – стандартная нормальная случайная величина,  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

По центральной предельной теореме среднее значение одинаково распределенных случайных величин стремится к нормальному распределению. Более того верна теорема.

*Теорема:* Если распределение генеральной совокупности имеет конечные математические ожидания и дисперсию, то при  $n \rightarrow \infty$  основные выборочные характеристики (среднее, дисперсия, эмпирическая функция распределения) являются нормальными.

**Пример** Пусть случайные величины  $Z_1, \dots, Z_k$  распределены по закону  $\mathcal{N}(0, 1)$  и независимы. Тогда распределение случайной величины  $R_k^2 = Z_1^2 + \dots + Z_k^2$  называют распределением  $\chi^2$  с  $k$  степенями свободы (кратко  $R_k^2 \sim \chi_k^2$ ).

Отметим, что каждое слагаемое имеет гамма-распределение с параметрами  $\alpha = \lambda = 1/2$ , т.е.  $Z_i^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ .

Поскольку  $R_k^2$  – это сумма независимых и одинаково распределенных случайных величин  $Z_i^2$ , то согласно *центральной предельной теореме* имеет место *сходимость по распределению*

$$(R_k^2 - \mathbf{E}R_k^2) / \sqrt{\mathbf{D}R_k^2} = (R_k^2 - k) / \sqrt{2k} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad k \rightarrow \infty.$$

Нормальное приближение является довольно точным уже при  $k > 30$ .

## 5. Фактический (достигаемый) уровень значимости

При проверке статистических гипотез в общем случае задается малое число  $\alpha$  – вероятность, с которой мы можем позволить себе отвергнуть верную гипотезу (скажем, 0.05). Это число называют *уровнем значимости*.

Исходя из предположения, что гипотеза  $H$  верна, определяется *наименьшее* (самое крайнее левое) значение  $x_{1-\alpha}$ , удовлетворяющее условию

$$\mathbf{P}(T(X_1, \dots, X_n) \geq x_{1-\alpha} | H) = \int_{x_{1-\alpha}}^{+\infty} p_T(x) dx \leq \alpha.$$

Другими словами, вероятность события, состоящего в том, что статистика примет значение большее  $(1 - \alpha)$ -квантиля (вероятность маловероятного события) должна быть не больше заранее заданного уровня значимости  $\alpha$ .

Если функция распределения статистики  $T$  непрерывна, то  $x_{1-\alpha}$  является, очевидно, ее  $(1 - \alpha)$ -квантилью. Такое  $x_{1-\alpha}$  называют *критическим значением*: гипотеза  $H$  отвергается, если

$$t_0 = T(x_1, \dots, x_n) \geq x_{1-\alpha}$$

(произошло маловероятное событие), и принимается – в противном случае.

При этом величина

$$\alpha_0 = \mathbf{P}(T(X_1, \dots, X_n) \geq t_0 | H) = \int_{t_0}^{+\infty} p_T(x) dx$$

задает *фактический (достигаемый) уровень значимости*. Он равен вероятности того, что статистика  $T$  (измеряющая степень отклонения полученной реализации от наиболее типичной) за счет случайности примет значение  $t_0$  или даже больше. Другими словами, фактический (достигаемый) уровень значимости оценивает вероятность того, что случайная величина  $T(X_1, \dots, X_n)$  попадет в область  $[t_0, +\infty)$ , где  $t_0$  – это значение статистики, найденное по выборке.

Фактический (достигаемый) уровень значимости<sup>1</sup> – наименьший уровень значимости, на котором проверяемая (нулевая) гипотеза принимается<sup>2</sup> [2, 161].

Фактический (достигаемый) уровень значимости – это вероятность получить значение статистики как в эксперименте или более экстремальное ее значение при условии справедливости нулевой гипотезы.

Подытожив сказанное выше, можно получить следующее правило: если фактический (достигаемый) уровень значимости  $\alpha_0$  меньше заранее заданного уровня значимости  $\alpha$ , то говорят, что данные свидетельствуют против нулевой гипотезы  $H_0$  в пользу альтернативной и у нас есть основания отвергнуть нулевую гипотезу

если $\alpha_0 < \alpha$ тогда <del><math>H_0</math></del>
--

Критическое значение  $x_{1-\alpha}$  допускается интерпретировать как квантиль уровня  $(1-\alpha)$  только для статистик с непрерывной функцией распределения

Вычисление фактического (достигаемого) уровня значимости нередко позволяет избежать категоричных (и при этом ошибочных) выводов, сделанных только на основе сравнения наблюдаемого значения статистики  $t_0$  с критическим значением  $x_{1-\alpha}$ , найденным для формально заданного  $\alpha$ .

## 6. Теоретические и выборочные квантили

Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ . Для непрерывной функции распределения  $F$  теоретической  $\alpha$ -квантилью  $x_\alpha$  (или квантилью уровня  $\alpha$ ) называется решение уравнения  $F(x_\alpha) = \alpha$ , т.е.  $x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ .

Так же, как и в случае медианы ( $\alpha = 1/2$ ) это решение может быть не единственным.

Оценить  $x_\alpha$  можно с помощью порядковой статистики  $X_{([\alpha n]+1)}$ , где  $[\cdot]$  – обозначает целую часть. Эту оценку называют *выборочной  $\alpha$ -квантилью*.

## 7. Ошибки I и II рода

**Пример** рассмотрим модель  $X_i \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ , где дисперсия известна, а математическое ожидание нет. Для проверки гипотезы  $H_0 : \theta = \theta_0$  можно применить критерий, основанный на статистике  $T(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}$ .

---

<sup>1</sup>p-value

<sup>2</sup>Наверное, правильнее говорить *не отвергается*

Если  $H_0$  верна, то  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\theta_0, \sigma^2/n)$ . Найдем *критическое значение*  $t_\alpha$  из условия

$$\alpha = \mathbf{P}_{\theta_0}(\bar{X} \geq t_\alpha).$$

Тогда (центрируем и нормируем случайную величину  $\bar{X}$ )

$$\alpha = \mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{\sigma} \geq \frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_0)}{\sigma}\right), \text{ так как } \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

где  $\Phi(x)$  – функция распределения закона  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Из последнего соотношения получаем *критическое значение*

$$t_\alpha = \theta_0 + \sigma x_{1-\alpha}/\sqrt{n}.$$

Если значение выборочного среднего  $\bar{x} \geq t_\alpha$ , то гипотеза  $H_0$  отвергается. Если нулевая гипотеза верна, то неравенство  $\bar{X} \geq t_\alpha$  выполняется с вероятностью  $\alpha$ . Отвергая в этом случае верную гипотезу  $H_0$ , мы совершаем *ошибку I рода*.

С другой стороны, может оказаться, что на самом деле верна не гипотеза  $H_0$ , а ее альтернатива  $H_1 : \theta = \theta_1$ . Если при этом случится, что  $\bar{x} < t_\alpha$ , то мы примем ошибочную гипотезу  $H_0$  вместо  $H_1$ , тем самым допустив *ошибку II рода*.

Найдем вероятность  $\beta$  ошибки II рода для рассматриваемой модели. Когда верна альтернативная гипотеза, выборочное среднее распределено по закону  $\mathcal{N}(\theta_1, \sigma^2/n)$ , поэтому

$$\beta = \mathbf{P}_{\theta_1}(\bar{X} < t_\alpha) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(t_\alpha - \theta_1)}{\sigma}\right) = \Phi\left(x_{1-\alpha} - \frac{\sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)}{\sigma}\right).$$

Обобщить сказанное выше можно так

$$\alpha = \mathbf{P}(\text{Rej } H_0^+), \text{ ошибка I рода,}$$

$$\beta = \mathbf{P}(\text{Rej } H_1^+) = \mathbf{P}(\neg \text{Rej } H_0^-), \text{ ошибка II рода.}$$

Гипотеза  $H_0$  заключается в том, что  $\theta \in \Theta_0$ , а альтернатива  $H_1$  – в том, что  $\theta \in \Theta_1$ . Когда множество  $\Theta_0(\Theta_1)$  состоит из единственной точки, гипотеза  $H_0$  (альтернатива  $H_1$ ) называется *простой*, иначе – *сложной*.

## 8. Критерий Холлендера-Прошана

В задачах теории надежности экспоненциальное распределение наработки на отказ  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  характеризуется значением параметра  $\lambda = \text{const}$ , т.е. постоянством интенсивности отказов изделия во времени.

Отсюда следует, что вероятность безотказной работы изделия за время  $\Delta t$  определяется только промежутком времени  $\Delta t$  и не зависит от того, работало изделие раньше или нет.

Другими словами, вероятность безотказной работы нового изделия и изделия, проработавшего часть времени, должна быть одинакова. Проверка этого обстоятельства и является целью *критерия Холлендера-Прошана* [3, 295].

Статистикой Холлендера-Прошана является величина [2, 182]

$$T_n = \sum_{i>j>k} \psi(X_{(i)}, X_{(j)} + X_{(k)}),$$

где

$$\psi(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a > b, \\ 1/2, & \text{если } a = b, \\ 0, & \text{если } a < b. \end{cases}$$

Суммирование здесь производится по всем  $n(n-1)(n-2)/6$  упорядоченным тройками  $(i, j, k)$ , для которых  $i > j > k$ .

Для достаточно большой выборки можно воспользоваться нормальным приближением (на основании центральной предельной теоремы)

$$\frac{T_n - \mathbf{E}T_n}{\sqrt{\mathbf{D}T_n}} \xrightarrow{d} \xi \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

где

$$\mathbf{E}T_n = n(n-1)(n-2)/8, \quad \mathbf{D}T_n = \frac{3}{2}n(n-1)(n-2) \left[ \frac{5}{2592}(n-3)(n-4) + \frac{7}{432}(n-3) + \frac{1}{48} \right].$$

## Список литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1972. – 368 с.
2. Лагутин М.Б. Наглядная математическая статистика. – М.: БИНОМ, 2009. – 472 с.
3. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 816 с.