



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA CLÁSICA DE BOSONES
INTERACTUANTES EN 3 POZOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

Licenciado en Física

PRESENTA:

Leonel Mayorga López

TUTOR:

Dr. Luis Benet Fernández



Ciudad Universitaria, CDMX, 2025

Declaración de autenticidad

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquier otra Universidad. Esta tesis es resultado de mi propio trabajo y no incluye nada que sea el resultado de algún trabajo realizado en colaboración, salvo que se indique específicamente en el texto.

Leonel Mayorga López. Ciudad Universitaria, CDMX, 2025

Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	IX
1. Modelo	1
1.1. Modelo cuántico	1
1.2. Aproximación clásica	2
1.3. Análisis dinámico	4
1.4. Equilibrio	6
1.4.1. Bifurcaciones de equilibrio	8
1.5. Órbitas periódicas	9
1.5.1. Bifurcaciones de órbitas periódicas	10
2. Métodos	13
2.1. Teorema de la Función Implícita	13
2.2. Continuación por Pseudo-Longitud de Arco	14
2.3. Ramas de equilibrio	16
2.3.1. Sistema extendido para soluciones de equilibrio	17
2.3.2. Sistema extendido para puntos límite	17
2.3.3. Sistema extendido para puntos de ramificación	18
2.3.4. Cambio de rama de equilibrio	18
2.3.5. Continuación de bifurcaciones	19
2.4. Ramas de órbitas periódicas	19
2.4.1. Sistema extendido para soluciones de órbitas periódicas en sistemas conservativos	19
2.4.2. Multiplicadores de Floquet	21
2.4.3. Sistema extendido para la duplicación de periodo	22
2.4.4. Transición a la rama de doble periodo	23
2.4.5. Continuación de doblamientos de periodo	23
2.5. Sección de Poincaré	24

ÍNDICE GENERAL

3. Análisis de resultados	27
3.1. Soluciones de equilibrio sincronizadas	27
3.1.1. Ramas de equilibrio	27
3.1.2. Ramas de bifurcación	29
3.2. Soluciones de equilibrio antisincronizadas	30
3.2.1. Ramas de equilibrios	30
3.3. Soluciones de equilibrio con fase frustrada	33
3.4. Soluciones de equilibrio mixtas	33
3.5. Soluciones periódicas	38
Bibliografía	43

Índice de figuras

1.1. Esquema del modelo anular con acoplamientos simétricos k_2 y uno independiente k_1	5
1.2. Distribución de los multiplicadores de Floquet en el círculo unitario	10
3.1. (a) Ramas de equilibrio sincronizadas proyectadas en la coordenada J_2 en función de \tilde{k} . (b) Espectro lineal correspondiente, proyectado en el plano complejo positivo en función de \tilde{k} . Los puntos azules en (a) indican bifurcaciones de punto límite, los rojos bifurcaciones de ramificación, los negros bifurcaciones de Hopf hamiltoniana y los naranjas puntos en los que la solución alcanza la frontera del sistema (1.19). Las bifurcaciones de Hopf hamiltoniana y los puntos de frontera se identifican de manera aproximada a partir de los valores más cercanos disponibles en la rama. Los puntos azules en (b) indican que el espectro está en el plano imaginario o real mientras que los rojos indican que el espectro es un número complejo con componentes imaginaria y real no nulas.	28
3.2. Ramas de bifurcaciones asociadas a los equilibrios sincronizados en función de dos parámetros: (a) \tilde{k} y K , (b) \tilde{x} , (c) $\tilde{\omega}$. Las curvas azules corresponden a bifurcaciones de punto límite, las rojas a bifurcaciones de ramificación y los círculos naranjas indican la intersección con la frontera del dominio permitido para las acciones J_i	29
3.3. Las ramas de equilibrio antisincronizadas (a) en la coordenada J_2 respecto a \tilde{k} y su espectro (b) mapeado en el plano complejo. Los puntos azules en (a) indican bifurcaciones de tipo límite, los rojos de ramificación, los negros hopf hamiltoniana y los naranjas son puntos donde se llega a una frontera de J_i	30
3.4. Ramas de bifurcaciones antisincronizadas en función de \tilde{k} y K (a), \tilde{x} (b) y $\tilde{\omega}$ (c). Las ramas azules representan bifurcaciones de tipo límite, las rojas bifurcaciones de ramificación y los círculos naranjas fronteras de J_i	32
3.5. Las ramas de equilibrio frustradas (a) en la coordenada ψ_2 respecto a \tilde{k} y su espectro (b) mapeado en el plano complejo. Los puntos rojos indican bifurcaciones de tipo ramificación.	34

ÍNDICE DE FIGURAS

3.6. Ramas de puntos de ramificación de la rama $F1$ (a), $F2$ (b) y $F3$ (c) en función de \tilde{k} y K . Los puntos negros indican una anulación total del espectro, los naranjas una frontera de las variables J_i , los colores intensos representan equilibrios con un par real y los colores tenues con un par imaginario.	35
3.7. Ramas de puntos de ramificación de la rama $F1$ (a), $F2$ (b) y $F3$ (c) en función de \tilde{k} y \tilde{x} . Los puntos negros indican una anulación total del espectro, los naranjas una frontera de las variables J_i , los colores intensos representan equilibrios con un par real y los colores tenues con un par imaginario.	36
3.8. Ramas de puntos de ramificación de la rama $F1$ (a), $F2$ (b) y $F3$ (c) en función de \tilde{k} y $\tilde{\omega}$. Los puntos negros indican una anulación total del espectro, los naranjas una frontera de las variables J_i , los colores intensos representan equilibrios con un par real y los colores tenues con un par imaginario.	37
3.9. Las ramas de equilibrio mixtas (a) y (c) en la coordenada J_2 respecto a \tilde{k} y sus espectros (b) y (d) mapeados en el plano complejo respectivamente siendo (e) el espectro de la rama de color verde en (c). Los puntos azules en (a) y (c) indican bifurcaciones de punto límite, los rojos de ramificación los negros de hopf hamiltonianas mientras que los naranjas indican puntos de frontera en J_i	39
3.10. Ramas de puntos límite (azul) y puntos de ramificación (rojo) de la rama $M1$ en función de \tilde{k} y K ((a) y (b)) y \tilde{x} ((c) y (d)).	40
3.11. Ramas de puntos límite (azul) y puntos de ramificación (rojo) de las ramas $M2$ en función de \tilde{k} y K ((a) y (b)) y \tilde{x} ((c) y (d)).	41
3.12. Ramas de puntos límite (azul) y puntos de ramificación (rojo) de la rama $M1$ (a) y de las ramas $M2$ (b) en función de \tilde{k} y $\tilde{\omega}$	41

Índice de tablas

Capítulo 1

Modelo

En este capítulo se aborda teóricamente el modelo de bosones interactuantes distribuidos en tres pozos, su aproximación clásica y las herramientas de análisis dinámico aplicables a este sistema Hamiltoniano con conservación de la energía.

1.1. Modelo cuántico

Se considera un sistema de partículas bosónicas en un potencial periódico externo $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{r}_l)$, donde $\vec{r}_l = l_1 d_1 \vec{e}_1 + l_2 d_2 \vec{e}_2 + l_3 d_3 \vec{e}_3$ con $l_k \in \mathbb{N}$ y $d_k \in \mathbb{R}$. El Hamiltoniano cuántico [ende](#) segunda cuantización que resulta de este potencial, bajo el supuesto de interacciones débiles entre pares de partículas, está dado por [12]

$$\hat{H} = \int d^3 r \hat{\Phi}^\dagger(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right) \hat{\Phi}(\vec{r}) + \frac{g}{2} \int d^3 r \hat{\Phi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Phi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\Phi}(\vec{r}) \hat{\Phi}(\vec{r}), \quad (1.1)$$

donde m es la masa de las partículas y g es la constante de acoplamiento entre ellas, la cual es positiva en el caso de interacciones repulsivas y negativa para interacciones atractivas [12]. A lo largo de esta tesis, se emplearán unidades escaladas donde $\hbar = m = 1$.

El operador de campo bosónico $\hat{\Phi}(\vec{r})$ puede expresarse como una expansión en términos de operadores de aniquilación:

$$\hat{\Phi}(\vec{r}) = \sum_{n,m} \phi_{n,m}(\vec{r}) \hat{a}_{n,m}. \quad (1.2)$$

Aquí, el índice n identifica el pozo potencial ([de entre tres](#)), mientras que m se refiere a los estados excitados de cada pozo. Dado que se considera un condensado de Bose-Einstein a temperaturas suficientemente bajas, se asume que sólo se ocupa el estado fundamental ($m = 1$) [12].

Al sustituir la expansión (1.2) en (1.1) y despreciar los términos de cuarto orden en operadores con diferentes modos, se obtiene el Hamiltoniano de Bose-Hubbard para

1. MODELO

tres pozos acoplados. A diferencia del modelo lineal tratado en [12], aquí se considera una geometría anular, donde el primer y el último pozo están también acoplados.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}, \quad (1.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 = & \omega_1 \frac{\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger}{2} + \omega_2 \frac{\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger}{2} + \omega_3 \frac{\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_3 \hat{a}_3^\dagger}{2} \\ & + x_1 \left(\frac{\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger}{2} \right)^2 + x_2 \left(\frac{\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger}{2} \right)^2 \\ & + x_3 \left(\frac{\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_3 \hat{a}_3^\dagger}{2} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\hat{W} = -\frac{k_{12}}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1) - \frac{k_{23}}{2}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3 + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_2) - \frac{k_{31}}{2}(\hat{a}_3^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3). \quad (1.5)$$

En estas expresiones, \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger son los operadores de aniquilación y creación en el pozo $k \in \{1, 2, 3\}$, respectivamente, que satisfacen las relaciones de commutación bosónicas $[\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger] = \delta_{kl}$ y $[\hat{a}_k, \hat{a}_l] = 0$. Los parámetros ω_k representan las frecuencias de oscilación en cada pozo, x_k son las no linealidades debidas a las interacciones entre partículas en el mismo pozo, y k_{kl} son las constantes de acoplamiento entre los pozos k y l .

Siguiendo las reglas de commutación, se obtiene que la parte integrable \hat{H}_0 del Hamiltoniano (1.3) corresponde a una matriz diagonal mientras que la parte de interacción \hat{W} contiene los términos de acoplamiento entre pozos no diagonales [12].

Para simplificar el parámetro de interacciones, se asume que las no linealidades son iguales en cada pozo siguiendo la idea de [12], es decir, $x_1 = x_2 = x_3 = x$, que permite una comparación más directa con resultados experimentales y manteniendo las colisiones entre bosones independientes del pozo.

Este Hamiltoniano descarta un término constante en la energía para facilitar el análisis posterior. Además, se considera que los potenciales de cada pozo son iguales, es decir, $x_1 = x_2 = x_3 = x$, lo cual permite una comparación más directa con resultados experimentales [12].

Finalmente, se introduce el operador número total de partículas $\hat{N} = \hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \hat{n}_3$, el cual commuta con el Hamiltoniano total (1.3), asegurando la conservación del número de partículas en el sistema [12].

1.2. Aproximación clásica

Para realizar un análisis clásico del sistema cuántico, se construye la aproximación clásica del Hamiltoniano mediante las reglas de sustitución de Heisenberg:

$$\hat{a}_k \rightarrow \sqrt{I_k} e^{i\varphi_k}, \quad \hat{a}_k^\dagger \rightarrow \sqrt{I_k} e^{-i\varphi_k}, \quad (1.6)$$

donde la variable de acción clásica I_k (con unidades de \hbar) se relaciona con el número cuántico n mediante

$$I \leftrightarrow n + \frac{1}{2}. \quad (1.7)$$

Los métodos semiclásicos suelen ofrecer resultados precisos en los dos primeros órdenes de \hbar (órdenes 0 y 1), con errores del orden de \hbar^2 [12]. Al aplicar las sustituciones en el Hamiltoniano (1.3) y desarrollar los términos exponenciales, se obtiene el Hamiltoniano clásico:

$$\begin{aligned} H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, I_1, I_2, I_3) = & \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 + x_1 I_1^2 + x_2 I_2^2 + x_3 I_3^2 \\ & - k_{12} \sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & - k_{23} \sqrt{I_2 I_3} \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ & - k_{31} \sqrt{I_3 I_1} \cos(\varphi_3 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Este Hamiltoniano describe un sistema clásico de tres osciladores anharmónicos acoplados, expresado en coordenadas de acción-ángulo, con $\varphi_k \in [0, 2\pi]$, $I_k > 0$ e $I_k < N$. La parte integrable H_0 del sistema (sin términos de acoplamiento) conserva las acciones, mientras que los términos de interacción W las modifican al depender de las diferencias angulares y acoplamientos entre osciladores.

El corchete de Poisson entre H y el observable

$$K = I_1 + I_2 + I_3 \quad (1.9)$$

es igual a cero, lo que corresponde con su análogo cuántico: la conservación del número total de partículas [12]. Nótese que, de acuerdo con la definición (1.7), se tiene que $K = N + 3/2$. La simetría $\{H, K\} = 0$ permite reducir el número de grados de libertad de tres a dos mediante una transformación canónica. Utilizando la función generadora

$$G(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, J_1, J_2, K) = J_1(\varphi_1 - \varphi_2) + J_2(\varphi_3 - \varphi_2) + K\varphi_2, \quad (1.10)$$

con las nuevas acciones (J_1, J_2, K) se obtienen las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \varphi_2, & \psi_2 &= \varphi_3 - \varphi_2, & \vartheta &= \varphi_2, \\ I_1 &= J_1, & I_3 &= J_2, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $(\psi_1, \psi_2, \vartheta)$ son los nuevos ángulos. El Hamiltoniano expresado en estas nuevas coordenadas toma la forma:

$$\begin{aligned}
 H = & \omega_1 J_1 + \omega_2(K - J_1 - J_2) + \omega_3 J_2 \\
 & + x_1 J_1^2 + x_2(K - J_1 - J_2)^2 + x_3 J_2^2 \\
 & - k_{12} \sqrt{J_1(K - J_1 - J_2)} \cos \psi_1 \\
 & - k_{23} \sqrt{J_2(K - J_1 - J_2)} \cos \psi_2 \\
 & - k_{31} \sqrt{J_1 J_2} \cos(\psi_2 - \psi_1),
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

observando que no hay dependencia de ϑ , lo que confirma que K es una constante del movimiento como se verá más adelante en el análisis dinámico.

1.3. Análisis dinámico

Para llevar a cabo el análisis dinámico del Hamiltoniano (1.12), es conveniente reducir el número de parámetros libres. Como se indicó anteriormente, se igualan los parámetros x_k a un único parámetro x . Además, se fijan las frecuencias como $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = 0$ y $\omega_3 = -\omega$, buscando una simetría de frecuencias respecto al pozo 2 de modo que los pozos 1 y 3 tengan frecuencias de igual magnitud pero con signos opuestos. Finalmente, se establecen las constantes de acoplamiento $k_{12} = k_{23} = k_2$, mientras que $k_{31} = k_1$ se mantiene como parámetro libre. Bajo estas condiciones, el Hamiltoniano se expresa como:

$$\begin{aligned}
 H = & \omega(J_1 - J_2) \\
 & + x(J_1^2 + (K - J_1 - J_2)^2 + J_2^2) \\
 & - k_1 \sqrt{J_1 J_2} \cos(\psi_2 - \psi_1) \\
 & - k_2 \left[\sqrt{J_1(K - J_1 - J_2)} \cos \psi_1 + \sqrt{J_2(K - J_1 - J_2)} \cos \psi_2 \right].
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Este Hamiltoniano contiene cuatro parámetros libres. El esquema del sistema correspondiente es:

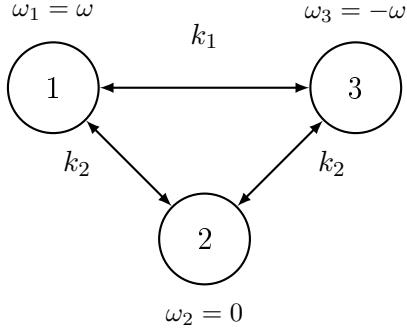


Figura 1.1: Esquema del modelo anular con acoplamientos simétricos k_2 y uno independiente k_1 .

Es posible reducir un parámetro adicional dividiendo todo el Hamiltoniano entre uno de los parámetros. A lo largo de este trabajo, se utiliza k_2 como unidad de referencia. Así, se define:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \tilde{\omega}(J_1 - J_2) \\ & + \tilde{x}(J_1^2 + (K - J_1 - J_2)^2 + J_2^2) \\ & - \tilde{k}\sqrt{J_1 J_2} \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ & - \left[\sqrt{J_1(K - J_1 - J_2)} \cos \psi_1 + \sqrt{J_2(K - J_1 - J_2)} \cos \psi_2 \right], \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde $\tilde{H} = H/k_2$, $\tilde{\omega} = \omega/k_2$, $\tilde{x} = x/k_2$ y $\tilde{k} = k_1/k_2$. Por las propiedades de los corchetes de Poisson, este nuevo Hamiltoniano conserva las mismas propiedades dinámicas que el original (1.12).

Para llegar a las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de este sistema clásico, se desarrolla

$$\tilde{F}(\tilde{\xi}, \tilde{p}) = \dot{\tilde{\xi}} = J \nabla_{\tilde{\xi}} \tilde{H}(\tilde{\xi}, \tilde{p}), \quad (1.15)$$

donde J es una matriz simpléctica, $\tilde{p} = (\tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}) \in \mathbb{R}^3$ y $\tilde{F} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^6$. Si $\tilde{\xi} = (\psi_1, \psi_2, \theta, J_1, J_2, K) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^6)$, se tienen las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{J}_1 &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_1}, & \dot{\psi}_1 &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_1} \\ \dot{J}_2 &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi_2}, & \dot{\psi}_2 &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_2} \\ \dot{K} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vartheta}, & \dot{\vartheta} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial K}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Como el Hamiltoniano (1.14) no depende de ϑK , Kesta variable pasa a ser un parámetro del sistema al no depender del tiempo y ϑ es una variable cíclica. En consecuencia, las ecuaciones para $\dot{\vartheta}$ y \dot{K} son:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} &= 2\tilde{x}(K - J_2 - J_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{K - J_1 - J_2}{J_1}} \cos \psi_1 + \sqrt{\frac{K - J_1 - J_2}{J_2}} \cos \psi_2 \right), \\ \dot{K} &= 0.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Por ello, el sistema (1.15) puede reducirse a

$$F(\xi, p) = \dot{\xi} = J\nabla_\xi H(\xi, p),\tag{1.18}$$

donde $p = (\tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}, K) \in \mathbb{R}^4$, $F : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $\xi = (\psi_1, \psi_2, J_1, J_2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$. El sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente es:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= \tilde{\omega} + 2\tilde{x}(2J_1 + J_2 - K) - \frac{\tilde{k}}{2} \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{K - J_1 - J_2}{J_1}} - \sqrt{\frac{J_1}{K - J_1 - J_2}} \right) \cos \psi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J_2}{K - J_1 - J_2}} \cos \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\tilde{\omega} + 2\tilde{x}(2J_2 + J_1 - K) - \frac{\tilde{k}}{2} \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \cos(\psi_2 - \psi_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{K - J_1 - J_2}{J_2}} - \sqrt{\frac{J_2}{K - J_1 - J_2}} \right) \cos \psi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J_1}{K - J_1 - J_2}} \cos \psi_1, \\ \dot{J}_1 &= -\sqrt{J_1(K - J_1 - J_2)} \sin \psi_1 - \tilde{k} \sqrt{J_1 J_2} \sin(\psi_2 - \psi_1), \\ \dot{J}_2 &= -\sqrt{J_2(K - J_1 - J_2)} \sin \psi_2 + \tilde{k} \sqrt{J_1 J_2} \sin(\psi_2 - \psi_1).\end{aligned}\tag{1.19}$$

Este sistema será el objeto principal de estudio en esta tesis.

1.4. Equilibrio

Una solución $\xi_{eq} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4)$ del sistema (1.18) se denomina de equilibrio si satisface $F(\xi_{eq}, p) = \mathbf{0}$. Cabe señalar que este equilibrio no corresponde necesariamente a un

equilibrio del sistema clásico completo descrito por el Hamiltoniano (1.8), ya que, debido a la transformación (1.11), el equilibrio en los ángulos ψ_i implica un **equilibrio relativo** de los ángulos φ_i (con $i \in \{1, 3\}$) respecto a la evolución del ángulo independiente φ_2 .

Las soluciones de equilibrio pueden clasificarse linealmente como estables, inestables o no hiperbólicas, dependiendo del conjunto de autovalores del jacobiano evaluado en dicha solución [11]. La clasificación es la siguiente:

- **Estabilidad lineal:** Todas las partes reales de los autovalores del jacobiano son negativas. En este caso, una pequeña perturbación induce una evolución que converge al equilibrio.
- **Inestabilidad lineal:** Al menos un autovalor posee parte real positiva, lo que implica que una pequeña perturbación aleja la trayectoria del equilibrio.
- **No hiperbólica:** Alguno de los autovalores tiene parte real exactamente igual a cero, mientras que los restantes tienen parte real menor o igual que cero. En este caso, la estabilidad no puede determinarse únicamente mediante el análisis lineal, y es necesario considerar términos de orden superior.

Sin embargo, la estructura simpléctica del jacobiano del sistema (1.18) garantiza que los autovalores siempre aparecen en pares simétricos respecto a los ejes real e imaginario. Es decir, si λ es un autovalor, entonces también lo son $-\lambda$, $\bar{\lambda}$ y $-\bar{\lambda}$ [11]. Como consecuencia, el sistema (1.19) no puede presentar soluciones de equilibrio estables en el sentido lineal, ya que la presencia de un autovalor real negativo implica necesariamente la existencia de uno positivo. Además, la estabilidad lineal en este contexto supondría la existencia de dissipación de energía, lo cual contradice la naturaleza conservativa del sistema.

En los casos en que los autovalores son puramente reales o puramente imaginarios, se observan dos pares simétricos. Si un autovalor tiene parte real e imaginaria distintas de cero, el conjunto completo de autovalores se obtiene por simetría conjugada respecto a ambos ejes.

Para estudiar la estabilidad de un equilibrio con autovalores puramente imaginarios (parte real nula), es necesario analizar el Hamiltoniano en términos de la función de Lyapunov. En tales casos, se considera que el equilibrio es estable en el sentido de Lyapunov si el Hamiltoniano (1.14) posee un máximo o mínimo local en dicho punto y es inestable cuando posee un punto silla, de acuerdo con el teorema de Dirichlet [11]. Si el Hamiltoniano presenta una matriz Hessiana singular en el equilibrio, no es posible determinar la estabilidad mediante los autovalores del método lineal y se requiere un análisis de orden superior para determinar la geometría del Hamiltoniano en el equilibrio. En términos generales, este sigue siendo un problema abierto [3]. Si el Hamiltoniano presenta un punto silla o un punto degenerado en el equilibrio con autovalores puramente imaginarios, la estabilidad no puede determinarse de manera concluyente, y es necesario realizar un análisis de orden superior del Hamiltoniano. En términos generales, este sigue siendo un problema abierto [3].

1. MODELO

Por tanto, si se adopta como función de Lyapunov el polinomio de grado 2 H_2 de la expansión de Taylor [3], en este trabajo se propone la siguiente clasificación para las soluciones de equilibrio:

- **Estable (en el sentido de Lyapunov):** Existen dos pares simétricos de autovalores puramente imaginarios (parte real cero) y la función de Lyapunov tiene un mínimo o máximo local en el equilibrio. Una pequeña perturbación induce oscilaciones alrededor del equilibrio, manteniendo constante la energía.
- **Inestable:** Existe al menos un autovalor con parte real distinta de cero. Una perturbación hace que el sistema se aleje del equilibrio, conservando la energía.
- **No concluyente:** Se presentan autovalores puramente imaginarios y la matriz Hessiana de la función de Lyapunov es singular en el equilibrio. En este caso, podrían surgir inestabilidades no lineales asociadas a resonancias. Se presentan autovalores puramente imaginarios, pero el Hamiltoniano no exhibe un máximo ni un mínimo local. En este caso, podrían surgir inestabilidades no lineales asociadas a resonancias.

1.4.1. Bifurcaciones de equilibrio

Cuando una solución de equilibrio presenta un autovalor cuya parte real e imaginaria son nulas, se dice que ocurre una bifurcación. A lo largo de este trabajo se considerarán dos tipos de bifurcaciones de equilibrio: el **punto límite** y el **punto de ramificación**.

Otra bifurcación de interés es la bifurcación de Hopf; sin embargo, en sistemas Hamiltonianos su análisis es considerablemente más complejo, debido a la simetría de los autovalores y a las posibles inestabilidades inducidas por resonancias [8]. Por esta razón, dichas soluciones no serán abordadas en el presente trabajo.

- **Punto límite:** También conocida como **saddle-node**, esta bifurcación se caracteriza por una solución de equilibrio cuyo jacobiano presenta un defecto de rango igual a 1; es decir, su núcleo (espacio nulo) tiene dimensión 1 [6].

Es importante destacar que, debido a la estructura simpléctica del sistema, si un autovalor es cero, otro autovalor también debe serlo por simetría. No obstante, ambos comparten el mismo autovector [11]. Por tanto, si el otro par de autovalores no es nulo, el espacio nulo del jacobiano sigue siendo unidimensional.

Esto implica que, aunque el autovalor cero tenga multiplicidad algebraica 2, el autovector correspondiente es único. Esta situación permite la existencia de bifurcaciones tipo punto límite.

- **Punto de ramificación:** Esta bifurcación ocurre cuando el jacobiano de una solución de equilibrio presenta un defecto de rango igual a 2; es decir, su espacio nulo es bidimensional [6].

Siguiendo la misma lógica que en el caso del punto límite, esta situación se da cuando existen dos pares de autovalores nulos, cada uno con su respectivo autovector independiente. En otras palabras, el núcleo del jacobiano tiene dimensión 2.

1.5. Órbitas periódicas

Una órbita periódica de periodo $T > 0$ del sistema de ecuaciones (1.18) es una solución $\xi \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^4)$ que satisface:

$$\dot{\xi}(t) = F(\xi(t), p), \quad \xi(0) = \xi(T), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.20)$$

Al igual que las soluciones de equilibrio, las órbitas periódicas pueden clasificarse según su estabilidad. La herramienta matemática central para este análisis es la **teoría de Floquet** [11], la cual considera perturbaciones infinitesimales a lo largo de la órbita periódica. Para ello, se introduce una función de variación $v(t) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^4)$ tal que la condición inicial perturbada es:

$$\tilde{\xi}(0) = \xi(0) + \epsilon v(0), \quad (1.21)$$

y al sustituir esta condición en (1.20) se obtiene la ecuación variacional para $v(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= F_\xi(\xi(t), p) v(t), \\ F_\xi(\xi(t), p)_{ij} &= \left. \frac{\partial F_i}{\partial \xi_j} \right|_{\xi=\xi(t)}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

La solución de esta ecuación define un mapeo de evolución:

$$v(T) = Mv(0), \quad (1.23)$$

donde M es la **matriz de Floquet**. Los autovalores de M se denominan **multiplicadores de Floquet** y caracterizan la estabilidad de la órbita periódica. Todo sistema autónomo posee al menos un multiplicador igual a 1, correspondiente a la dirección tangente a la órbita.

La clasificación de estabilidad es la siguiente:

- **Estable:** Todos los multiplicadores de Floquet se encuentran dentro del círculo unitario complejo. Si hay multiplicadores sobre el círculo, deben ser *simples* (es decir, con multiplicidad algebraica igual a su multiplicidad geométrica). En este caso, pequeñas perturbaciones no provocan que la trayectoria se aleje de la órbita.
- **Inestable:** Al menos un multiplicador se encuentra fuera del círculo unitario complejo, lo que implica que una pequeña perturbación se amplifica con el tiempo.

1. MODELO

En el contexto Hamiltoniano, se deben considerar propiedades adicionales. La conservación de la energía implica que siempre existen al menos dos multiplicadores unidad sobre el círculo unitario. A diferencia del caso de equilibrio, aquí los dos autovalores unidad están asociados a autovectores *linealmente independientes*, lo cual refleja la existencia de una familia continua de órbitas periódicas cercanas.

Los dos multiplicadores restantes aparecen con simetría respecto a la inversión y conjugación compleja: si μ es un multiplicador distinto de 1, entonces el conjunto completo es $\{1, 1/\bar{\mu}, \bar{\mu}, 1/\mu\}$. Como máximo en el sistema (1.18) puede haber 4 autovalores, entonces con la simetría del conjunto se deduce que los autovalores con parte imaginaria no nula siempre permanecen sobre el círculo unitario complejo [11].

En la Figura 1.2 se muestra la distribución típica de los multiplicadores de Floquet en el plano complejo para una órbita periódica en un sistema Hamiltoniano conservativo.

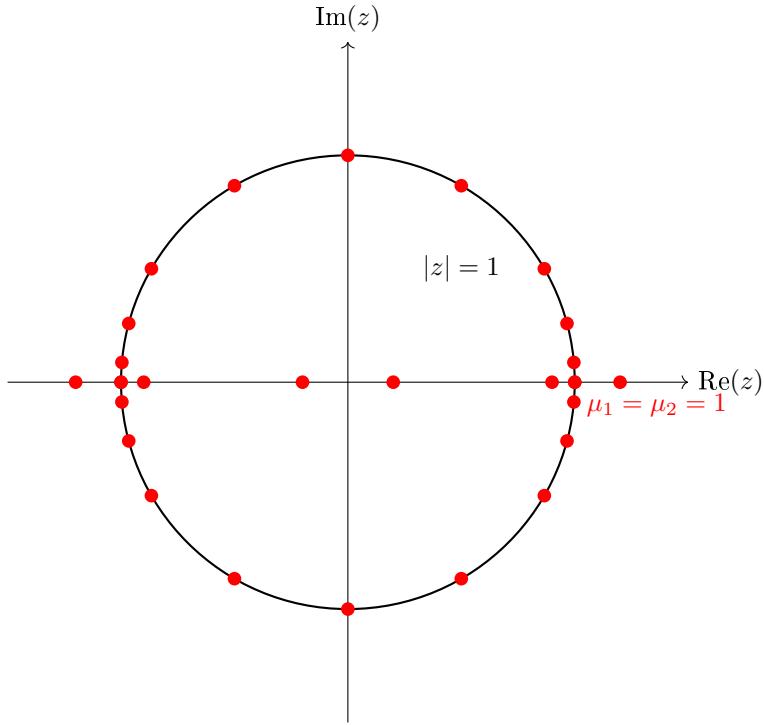


Figura 1.2: Distribución de los multiplicadores de Floquet en el círculo unitario

1.5.1. Bifurcaciones de órbitas periódicas

Con base en lo discutido en la sección anterior, existen dos tipos de órbitas periódicas particularmente relevantes en el sistema que se está estudiando: aquellas en las que todos los multiplicadores de Floquet son iguales a 1, y aquellas en las que un par de multiplicadores es igual a 1 y el otro par es igual a -1 . Estos dos casos están asociados a bifurcaciones específicas de órbitas periódicas:

- **Ciclo de ramificación límite:** Esta bifurcación ocurre cuando todos los multiplicadores de Floquet son iguales a 1. Debido a la simetría de los multiplicadores, sólo se tienen asociados 3 autovectores linealmente independientes, esto es lo que permite obtener este tipo de bifurcaciones [5]. La órbita inicial de esta nueva rama de órbitas periódicas que emerge de esta bifurcación no aumenta en periodo. Esta bifurcación ocurre cuando dos multiplicadores de Floquet son iguales a 1 y están asociados a autovectores linealmente independientes. Debido a la simetría espectral de los sistemas Hamiltonianos, el multiplicador 1 aparece con multiplicidad algebraica 4, pero con multiplicidad geométrica 3 además que se puede simplificar un multiplicador con su autovector, reduciendo el problema a un multiplicador con multiplicidad algebraica 3 y geométrica 2 [5]. Esta degeneración permite que, aun habiendo múltiples multiplicadores iguales a 1, pueda producirse una bifurcación en ese punto.

Duplicación de periodo: Esta bifurcación ocurre cuando dos multiplicadores de Floquet son iguales a -1 . Nuevamente por la simetría de los multiplicadores, sólo se tiene asociado 1 autovector linealmente independiente a este par de autovalores [5]. La órbita inicial de esta nueva rama de órbitas periódicas que emerge de esta bifurcación duplica el periodo. Esta bifurcación tiene lugar cuando un multiplicador de Floquet es igual a -1 . Aunque en sistemas Hamiltonianos este multiplicador aparece por pares (es decir, hay dos valores iguales a -1), la estructura del espacio propio, junto con la simetría de los multiplicadores, permite la existencia de esta bifurcación. El resultado es una órbita periódica cuyo nuevo periodo es el doble del original.

Capítulo 2

Métodos

En este capítulo se describen los métodos matemáticos y numéricos empleados para analizar los sistemas dinámicos estudiados en este trabajo. Primero, se presentan los fundamentos teóricos, incluyendo el Teorema de la Función Implícita y la técnica de continuación por pseudo-longitud de arco. Luego, se desarrollan los sistemas extendidos para continuar ramas de equilibrio, detectar bifurcaciones y estudiar órbitas periódicas, incluyendo su duplicación de periodo. Finalmente, se introduce la sección de Poincaré como herramienta para visualizar la dinámica en el espacio de fases y reconocer estructuras periódicas y caóticas.

2.1. Teorema de la Función Implícita

Para establecer la existencia, unicidad, parametrización y diferenciabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales, es fundamental recurrir a resultados clásicos del análisis funcional, en particular al Teorema de la Función Implícita y a sus extensiones [2].

Teorema 1 (Teorema de la Función Implícita). *Sea $\mathbf{G} : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{B}$, donde \mathcal{B} es un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$, que satisface las siguientes condiciones:*

- $\mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = 0$, para $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{B}$ y $\boldsymbol{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^m$.
- $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ es invertible con inversa acotada, es decir, $\|\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)^{-1}\| < M$ para algún $M > 0$.
- \mathbf{G} y $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}$ son continuas de Lipschitz. En particular, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S_{\rho}(\mathbf{u}_0) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{B} \mid \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}\| \leq \rho\}$ y para todo $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in S_{\rho}(\boldsymbol{\lambda}_0)$, existe una constante $K_L > 0$

2. MÉTODOS

tal que:

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})\| \leq K_L (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}\|),$$

$$\|\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})\| \leq K_L (\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}\|).$$

Entonces, existe δ , con $0 < \delta \leq \rho$, y una función $\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda})$ única y continua en $S_{\delta}(\boldsymbol{\lambda}_0)$

tal que [2]:

- $\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda}_0) = \mathbf{u}_0$,
- $\mathbf{G}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}) = 0$ para toda $\boldsymbol{\lambda} \in S_{\delta}(\boldsymbol{\lambda}_0)$.

Teorema 2. *Bajo las hipótesis del Teorema de la Función Implícita, si además la derivada $\mathbf{G}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ es continua en $S_{\rho}(\mathbf{u}_0) \times S_{\rho}(\boldsymbol{\lambda}_0)$ [2], entonces la rama de soluciones $\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda})$ posee una derivada continua respecto de $\boldsymbol{\lambda}$, es decir, $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda})$, en $S_{\delta}(\mathbf{u}_0) \times S_{\delta}(\boldsymbol{\lambda}_0)$.*

En este contexto, si $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_0) = 0$ representa un sistema de ecuaciones y $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ es invertible con inversa acotada, se dice que \mathbf{u}_0 es una *solución aislada* de $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_0) = 0$ [2]. Bajo estas condiciones, y suponiendo la continuidad de Lipschitz de \mathbf{G} , el Teorema de la Función Implícita garantiza la existencia de una *rama de soluciones* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda})$ definida localmente, con $\mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda}_0) = \mathbf{u}_0$ y única en un entorno de $\boldsymbol{\lambda}_0$ [2].

2.2. Continuación por Pseudo-Longitud de Arco

Sea $\mathbf{G} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que cumple las hipótesis del Teorema de la Función Implícita. Sea Consideremos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. En estas condiciones, la función $\mathbf{u}(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ existe, es continua y además derivable respecto a λ [1, 2].

Para resolver el sistema $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = 0$ para un valor fijo de λ , se utiliza el método de Newton-Raphson, el cual se escribe como:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(\nu)}, \lambda) \Delta \mathbf{u}^{(\nu)} = -\mathbf{G}(\mathbf{u}^{(\nu)}, \lambda), \\ \mathbf{u}^{(\nu+1)} = \mathbf{u}^{(\nu)} + \Delta \mathbf{u}^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

La efectividad de este método depende crucialmente de la elección del punto inicial $(\mathbf{u}^{(0)}, \lambda)$, pues de ello depende la convergencia del procedimiento. Una estrategia común consiste en partir de una solución conocida $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ tal que $\mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) = 0$. Gracias a la derivabilidad de $\mathbf{u}(\lambda)$, se puede obtener un punto inicial $\mathbf{u}^{(0)}$ suficientemente cercano a \mathbf{u} mediante una aproximación lineal:

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_0 + (\lambda - \lambda_0) \left. \frac{d\mathbf{u}}{d\lambda} \right|_{\lambda_0}. \quad (2.2)$$

La convergencia será más rápida cuanto más próximo sea λ a λ_0 . Una vez obtenida la solución mediante (2.1), esta pasa a convertirse en el nuevo punto de partida en (2.2), permitiendo así calcular sucesivamente nuevas soluciones de la *rama de soluciones*. Este procedimiento recibe el nombre de *continuación de parámetro* [2, 7].

Reescribiendo la notación, sea $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Una solución \mathbf{x}_0 de $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$ se denomina *regular* si la matriz Jacobiana $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$, de tamaño $n \times (n + 1)$, tiene rango máximo. Es decir, si

$$\text{Rank}(\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)) = n \quad \text{y} \quad \text{Nullity}(\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)) = 1.$$

Como se establece en [2], se cumple el siguiente resultado:

Teorema 3. *Sea $\mathbf{x}_0 \equiv (\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ una solución regular de $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$. Entonces, en un entorno de \mathbf{x}_0 , existe un continuo unidimensional de soluciones $\mathbf{x}(s)$, denominado familia de soluciones o rama de soluciones, tal que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.*

El teorema anterior garantiza que, aunque el Jacobiano $\mathbf{G}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$ pueda volverse singular, en una solución regular sigue existiendo una parametrización en el sentido del Teorema de la Función Implícita. Esto se logra reemplazando una de las columnas linealmente dependientes del Jacobiano por la columna $\mathbf{G}_{\lambda}(\mathbf{x}_0)$, lo que sugiere que el parámetro de la rama de soluciones puede pasar a ser una de las coordenadas de \mathbf{u}_0 en lugar de λ_0 .

Este resultado es fundamental, pues permite inducir una parametrización más general de $\mathbf{x}(s) = (\mathbf{u}(s), \lambda(s))$, con $\mathbf{G}(\mathbf{x}(s)) = 0$ y $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ solución regular. Además, su derivada $\mathbf{x}'(0) = \frac{d\mathbf{x}_0}{ds}$ existe y pertenece al espacio nulo de $\mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$, es decir,

$$\mathbf{G}'(0) = \mathbf{G}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{x}'(0) = 0. \quad (2.3)$$

Para llevar a cabo la continuación de soluciones regulares se utiliza el método de *continuación por pseudo-longitud de arco* propuesto por Keller [7]. SiSupongamos que se dispone de una solución regular $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ de $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = 0$, junto con el vector tangente $(\mathbf{u}'_0, \lambda'_0)$ obtenido del espacio nulo en dicha solución. La continuación por pseudo-longitud de arco plantea el siguiente sistema para $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{u}_1, \lambda_1) = 0, \\ (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)^T \mathbf{u}'_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \lambda'_0 - \Delta s = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

donde Δs representa el paso en la parametrización a lo largo de la rama de soluciones.

El método de Newton-Raphson para resolver este sistema se escribe como:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{G}_{\mathbf{u}}^1)^{(\nu)} & (\mathbf{G}_{\lambda}^1)^{(\nu)} \\ \mathbf{u}'_0^T & \lambda'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^{(\nu)} \\ \Delta \lambda_1^{(\nu)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_1^{(\nu)}, \lambda_1^{(\nu)}) \\ (\mathbf{u}_1^{(\nu)} - \mathbf{u}_0)^T \mathbf{u}'_0 + (\lambda_1^{(\nu)} - \lambda_0) \lambda'_0 - \Delta s \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

2. MÉTODOS

donde

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{(0)} \\ \lambda_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} + \Delta s \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_0 \\ \lambda'_0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Con el fin de evitar el recálculo del espacio nulo del Jacobiano en cada iteración, se actualizan las direcciones resolviendo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{u}}^1 & \mathbf{G}_{\lambda}^1 \\ \mathbf{u}'_0^T & \lambda'_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \lambda'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

y posteriormente se reescala cada nueva dirección de manera que $\|\mathbf{u}'_1\|^2 + \|\lambda'_1\|^2 = 1$ [2].

Algoritmo 1. Continuación por Pseudo-Longitud de Arco (PALC)

Entrada: Solución regular inicial $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$, vector tangente $(\dot{\mathbf{u}}_0, \dot{\lambda}_0)$, paso Δs

Salida: Rama de soluciones

Paso 1: Predicción

Calcular el punto inicial para el paso de continuación:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^{(0)} \\ \lambda_1^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix} + \Delta s \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \dot{\lambda}_0 \end{pmatrix}.$$

Paso 2: Corrección

Resolver el sistema extendido usando Newton-Raphson:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{G}_{\mathbf{u}}^1)^{(\nu)} & (\mathbf{G}_{\lambda}^1)^{(\nu)} \\ \dot{\mathbf{u}}_0^T & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^{(\nu)} \\ \Delta \lambda_1^{(\nu)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_1^{(\nu)}, \lambda_1^{(\nu)}) \\ (\mathbf{u}_1^{(\nu)} - \mathbf{u}_0)^T \dot{\mathbf{u}}_0 + (\lambda_1^{(\nu)} - \lambda_0) \dot{\lambda}_0 - \Delta s \end{pmatrix}.$$

Paso 3 Tangente

Calcular y normalizar nueva dirección tangente:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{\mathbf{u}}^1 & \mathbf{G}_{\lambda}^1 \\ \dot{\mathbf{u}}_0^T & \dot{\lambda}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\lambda}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\dot{\mathbf{u}}_1\|^2 + \|\dot{\lambda}_1\|^2 = 1$$

Paso 4 Repetición

Guardar el valor de $(\mathbf{u}_1, \lambda_1)$, sustituir $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_1$ y $\lambda_0 \rightarrow \lambda_1$ y repetir los pasos 1–4 para continuar la rama de soluciones.

2.3. Ramas de equilibrio

Para estudiar una *rama de equilibrio* del sistema (1.18), se debe fijar un parámetro de continuación respecto del cual dependa ξ , de modo que se cumpla

$$F(\xi(\lambda), \lambda) = 0,$$

en un entorno de una solución de equilibrio *regular*. En este caso, el parámetro de interés es \tilde{k} .

Dado que la función F satisface las hipótesis de los teoremas 1, 2 y 3 para valores de $\psi_i \in (-\pi, \pi]$ y

$$(J_1, J_2) \in \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 \mid J_1 > 0, J_2 > 0, J_1 + J_2 < K\},$$

se sigue que, en una solución de equilibrio regular (ξ_0, \tilde{k}_0) con parámetros fijos $(\tilde{\omega}, \tilde{x}, K)$, existe una rama de equilibrio que puede calcularse mediante un procedimiento de continuación, implementando el Algoritmo 1.

2.3.1. Sistema extendido para soluciones de equilibrio

El sistema extendido asociado a la continuación de soluciones de equilibrio está dado por

$$\begin{cases} F(\xi_1, \tilde{k}_1; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K) = 0, \\ (\xi_1 - \xi_0)^T \xi'_0 + (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_0) \tilde{k}'_0 - \Delta s = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde Δs representa el paso de pseudo-longitud de arco en la parametrización de la rama [2].

2.3.2. Sistema extendido para puntos límite

Para detectar puntos límite a lo largo de una rama de soluciones de equilibrio, es necesario identificar un cambio de signo en cada paso de la continuación. Esto se logra mediante la función ϕ_{LP} , definida como:

$$\phi_{LP}(i) = \tilde{k}'_i, \quad (2.9)$$

que indica la proximidad a un punto límite [10]. Una vez localizado uno de los dos puntos donde ocurre el cambio de signo, se toma como punto inicial $(\xi_{LP}^{(0)}, \tilde{k}_{LP}^{(0)})$ para resolver el sistema extendido mediante el método de Newton-Raphson:

$$\begin{cases} F(\xi_{LP}, \tilde{k}_{LP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K) = 0, \\ F_\xi(\xi_{LP}, \tilde{k}_{LP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K) v = 0, \\ v \cdot v = 1, \end{cases} \quad (2.10)$$

donde se incluye el autovector v del Jacobiano en $(\xi_{LP}, \tilde{k}_{LP})$ como variable independiente, inicializando con el autovector $v^{(0)}$ correspondiente al autovalor cuya parte real está más cercana a cero en $(\xi_{LP}^{(0)}, \tilde{k}_{LP}^{(0)})$ [10].

2.3.3. Sistema extendido para puntos de ramificación

De manera análoga a los puntos límite, un punto de ramificación se identifica mediante un cambio de signo de una función de prueba ϕ_{BP} , definida como

$$\phi_{BP} = \det \begin{pmatrix} F_{(\xi, \tilde{k})}(\xi_i, \tilde{k}_i; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K) \\ (\xi', \tilde{k}')^T \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

que indica la cercanía a un punto de ramificación [10]. Una vez detectado un cambio de signo, se toma como punto inicial $(\xi_{BP}^{(0)}, \tilde{k}_{BP}^{(0)})$ para resolver el sistema extendido mediante Newton-Raphson:

$$\begin{cases} F(\xi_{BP}, \tilde{k}_{BP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K) + b\psi = 0, \\ F_\xi(\xi_{BP}, \tilde{k}_{BP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K)^T \psi = 0, \\ F_{\tilde{k}}(\xi_{BP}, \tilde{k}_{BP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K)^T \psi = 0, \\ \psi \cdot \psi = 1, \end{cases} \quad (2.12)$$

donde se incluye un parámetro de perturbación b que empieza en $b^{(0)} = 0$ y el autovector ψ del Jacobiano transpuesto como variable independiente, inicializando con el autovector $\psi^{(0)}$ correspondiente al autovalor del Jacobiano transpuesto cuya parte real es más cercana a cero en $(\xi_{BP}^{(0)}, \tilde{k}_{BP}^{(0)})$ [10].

2.3.4. Cambio de rama de equilibrio

En un punto de ramificación, para continuar por una rama distinta a la principal es necesario determinar la dirección de la rama emergente. En este caso ya no es suficiente tomar un vector del espacio nulo, pues al ser un punto no regular dicho espacio nulo es de dimensión mayor y contiene múltiples direcciones posibles.

Para caracterizar la dirección de la rama $(\dot{\xi}_1, \dot{\tilde{k}}_1)$, emergente a partir de la rama de equilibrio inicial, es necesario distinguir dos situaciones [10]:

- Si $\dim \mathcal{N}(F_\xi(\xi_{BP}, \tilde{k}_{BP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K)) = 1$, entonces

$$\xi'_0 = v_0, \quad \tilde{k}'_0 = 0, \quad \xi'_1 = v_1, \quad \tilde{k}'_1 = q_1,$$

donde v_0 genera el espacio nulo y (v_1, q_1) se obtiene resolviendo

$$\begin{cases} F_\xi(\xi_{BP}, \tilde{k}_{BP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K) v_1 + F_{\tilde{k}}(\xi_{BP}, \tilde{k}_{BP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K) q_1 = 0, \\ v_0^T v_1 = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

con la normalización $v_1^T v_1 + q_1^2 = 1$.

- Si $\dim \mathcal{N}(F_\xi(\xi_{BP}, \tilde{k}_{BP}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, K)) = 2$, entonces

$$\xi'_0 = v_0, \quad \tilde{k}'_0 = 0, \quad \xi'_1 = v_1, \quad \tilde{k}'_1 = 0,$$

con v_0, v_1 vectores que generan el espacio nulo.

2.3.5. Continuación de bifurcaciones

Los sistemas (2.10) y (2.12) satisfacen también las condiciones de los teoremas 1, 2 y 3, por lo que son candidatos a continuación de soluciones. Para ello, se agrega la ecuación de proyección

$$(\xi_1 - \xi_0)^T \xi'_0 + (v_1 - v_0)^T v'_0 + (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_0) \tilde{k}'_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \lambda'_0 - \Delta s = 0, \quad (2.14)$$

$$(\xi_1 - \xi_0)^T \xi'_0 + (\psi_1 - \psi_0)^T \psi'_0 + (\tilde{k}_1 - \tilde{k}_0) \tilde{k}'_0 + (\lambda_1 - \lambda_0) \lambda'_0 - \Delta s = 0, \quad (2.15)$$

donde λ representa un segundo parámetro del sistema (en este caso, $\tilde{\omega}$ o \tilde{x}). Con esta formulación es posible implementar el algoritmo 1 para realizar la continuación [10].

2.4. Ramas de órbitas periódicas

Para estudiar una *rama de órbitas periódicas* del sistema (1.18), se introduce un parámetro de continuación respecto del cual dependen tanto ξ como el periodo T . De esta forma, el problema se formula como

$$\frac{d\xi}{dt} = F(\xi(t, \lambda), \lambda; \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}, K), \quad \xi(0) = \xi(T(\lambda), \lambda), \quad \forall t \in [0, T(\lambda)]. \quad (2.16)$$

A diferencia de una solución de equilibrio, el sistema ahora considera como variables la trayectoria periódica $\xi(\cdot)$, el periodo $T > 0$ y el parámetro de continuación λ . Con el fin de normalizar el intervalo temporal, se realiza el cambio de variable [2]

$$\frac{d\xi}{dt} = T(\lambda) F(\xi(t, \lambda), \lambda; \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}, K), \quad \xi(0) = \xi(1, \lambda), \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (2.17)$$

2.4.1. Sistema extendido para soluciones de órbitas periódicas en sistemas conservativos

El sistema extendido para la continuación de órbitas periódicas se plantea como

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = TF(\xi, \lambda; \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}, K), \\ \xi(0) = \xi(1), \\ \int_0^1 \xi(t)^T \dot{\xi}_0(t) dt = 0, \\ \int_0^1 (\xi(t) - \xi_0(t))^T \xi'_0(t) dt + (T - T_0) T'_0 + (\lambda - \lambda_0) \lambda'_0 = \Delta s, \end{cases} \quad (2.18)$$

donde $\xi_0(\cdot)$ es una órbita periódica de referencia con periodo T_0 y parámetro λ_0 , mientras que $\xi'_0(\cdot)$, T'_0 , λ'_0 representan la dirección de continuación para calcular la siguiente órbita [2].

2. MÉTODOS

Como la variable desconocida es la trayectoria completa ξ en el intervalo del periodo, se requiere discretizarla. Para ello se implementa el método de *múltiple disparo* [4]. En primer lugar, se define el flujo

$$\varphi^t(\xi^{(0)}, T, \lambda),$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $\varphi^t : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$,
- $\varphi^0(\xi^{(0)}, T, \lambda) = \xi^{(0)}$,
- $\varphi^{t+\tau}(\xi^{(0)}, T, \lambda) = \varphi^t(\varphi^\tau(\xi^{(0)}, T, \lambda), T, \lambda)$,
- $\frac{d}{dt}\varphi^t(\xi^{(0)}, T, \lambda) = TF(\varphi^t(\xi^{(0)}, T, \lambda), \lambda; \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}, K)$.

El método consiste en particionar uniformemente el intervalo $[0, 1]$ en N subintervalos de tamaño $\Delta t = 1/N$, y asociar a cada nodo i el vector $\xi^{(i)} = \xi(i\Delta t)$, con $i = 0, \dots, N$. Cada nodo se considera como una variable independiente y se integra desde él para obtener el flujo $\varphi^{\Delta t}(\xi^{(i)}, T, \lambda)$. Con ello, se construye el sistema

$$G(\xi, T, \lambda) = \begin{cases} \varphi^{\Delta t}(\xi^{(i)}, T, \lambda) - \xi^{(i+1)}, & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \xi^{(N)} - \xi^{(0)}, \\ \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} \xi^{(k)T} \dot{\xi}_0^{(k)} + \Delta t \sum_{k=2}^{N-1} \xi^{(k)T} \dot{\xi}_0^{(k)}, \end{cases} \quad (2.19)$$

junto con la ecuación de continuación discretizada

$$\frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} (\xi^{(k)} - \xi_0^{(k)})^T \xi_0'^{(k)} + \Delta t \sum_{k=1}^{N-1} (\xi^{(k)} - \xi_0^{(k)})^T \xi_0'^{(k)} + (T - T_0) T'_0 + (\lambda - \lambda_0) \lambda'_0 = \Delta s, \quad (2.20)$$

lo que da un total de $4N + 5$ ecuaciones (sin incluir la condición de continuación) para un número de variables igual a $4N + 6$.

Para determinar la dirección de continuación $(\xi'_0(\cdot), T'_0, \lambda'_0)$, se calcula el espacio nulo del jacobiano completo del sistema extendido G , es decir,

$$G_{(\xi, T, \lambda)}(\xi_0, T_0, \lambda_0) \begin{pmatrix} \xi'_0 \\ T'_0 \\ \lambda'_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.21)$$

De esta manera, la dirección de continuación corresponde a un vector no trivial en el núcleo del Jacobiano completo $G_{(\xi, T, \lambda)}$, el cual garantiza que las nuevas iteraciones permanezcan sobre la curva de soluciones periódicas.

Partiendo del dominio permitido para J_i y ψ_i , se observa que el sistema (2.19) no satisface los teoremas anteriores para ningún valor de los parámetros, ya que en un

sistema conservativo toda órbita periódica no constituye una solución regular [13]. En efecto, en cada órbita periódica el sistema (2.19) presenta un espacio nulo de dimensión mayor a uno.

Siguiendo el enfoque propuesto en [13], es posible introducir un parámetro de perturbación λ que permite formular las órbitas periódicas como soluciones regulares. Dicho parámetro, aunque siempre nulo en la práctica, habilita la continuación con respecto a la cantidad conservada en la órbita, es decir, la energía. El sistema perturbado se define como

$$\tilde{G}(\xi, T, \lambda) = \begin{cases} \tilde{\varphi}^{\Delta t}(\xi^{(i)}, T, \lambda) - \xi^{(i+1)}, & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \xi^{(N)} - \xi^{(0)}, \\ \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} \xi^{(k)^T} \dot{\xi}_0^{(k)} + \Delta t \sum_{k=2}^{N-1} \xi^{(k)^T} \dot{\xi}_0^{(k)}, \end{cases} \quad (2.22)$$

manteniendo la misma ecuación de continuación, pero con un flujo modificado $\tilde{\varphi}^t$ cuya derivada cumple [13]

$$\frac{d}{dt} \tilde{\varphi}^t(\xi_0, T, \lambda) = T (F(\tilde{\varphi}^t(\xi_0, T, \lambda), p) + \lambda \nabla_\xi H(\tilde{\varphi}^t(\xi_0, T, \lambda), p)).$$

De esta forma, las órbitas periódicas se convierten en soluciones regulares de (2.22), cumpliendo las hipótesis de los teoremas 1, 2 y 3 para realizar la continuación de soluciones. En consecuencia, el sistema extendido final para continuar órbitas periódicas queda formulado como

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}^{\Delta t}(\xi^{(i)}, T, \lambda) - \xi^{(i+1)} = 0 & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \xi^{(N)} - \xi^{(0)} = 0, \\ \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} \xi^{(k)^T} \dot{\xi}_0^{(k)} + \Delta t \sum_{k=2}^{N-1} \xi^{(k)^T} \dot{\xi}_0^{(k)} = 0, \\ \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} (\xi^{(k)} - \xi_0^{(k)})^T \xi_0'^{(k)} + \Delta t \sum_{k=2}^{N-1} (\xi^{(k)} - \xi_0^{(k)})^T \xi_0'^{(k)} \\ + (T - T_0) T'_0 + (\lambda - \lambda_0) \lambda'_0 - \Delta s = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Con esta formulación es posible implementar el algoritmo 1 para realizar la continuación [10].

2.4.2. Multiplicadores de Floquet

Para determinar la estabilidad de las órbitas periódicas y detectar bifurcaciones, es necesario calcular los *multiplicadores de Floquet*. Estos se obtienen a partir de la *matriz de Floquet*, construida mediante los flujos en cada nodo de la discretización [9].

La matriz de Floquet se calcula como el producto sucesivo de los jacobianos de los flujos en cada nodo:

$$M = M^{(N-1)} M^{(N-2)} \dots M^{(1)} M^{(0)}, \quad (2.24)$$

donde cada bloque $M^{(k)}$ se define como

2. MÉTODOS

$$M_{ij}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial \xi_j^{(k)}} \tilde{\varphi}_i^{\Delta t}(\xi^{(k)}, T, \lambda). \quad (2.25)$$

Los multiplicadores de Floquet son los autovalores de M . Para un gran número de nodos, los errores numéricos en el cálculo de los autovalores se pueden reducir utilizando métodos de factorización estables; en este trabajo se empleó la *descomposición de Schur* [9].

2.4.3. Sistema extendido para la duplicación de periodo

Para detectar bifurcaciones de duplicación de periodo, se define la siguiente *función de prueba*:

$$\phi_{PD}(i) = \prod_{i=1}^4 (\mu_i + 1), \quad (2.26)$$

la cual cambia de signo al cruzar la bifurcación durante la continuación de la órbita periódica [10].

El sistema extendido para calcular bifurcaciones de duplicación de periodo se formula como

$$\begin{cases} \frac{d\xi_{PD}}{dt} = T_{PD} F(\xi_{PD}, \lambda_{PD}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}, K), \\ \xi_{PD}(0) = \xi_{PD}(1), \\ \int_0^1 \xi_{PD}(t)^T \dot{\xi}_0(t) dt = 0, \\ \frac{dv}{dt} = T_{PD} F_\xi(\xi_{PD}, \lambda_{PD}; \tilde{\omega}, \tilde{x}, \tilde{k}, K) v, \\ v(0) = -v(1), \\ \int_0^1 v(t) \cdot v(t) dt = 1, \end{cases} \quad (2.27)$$

donde v es la eigenfunción definida en (1.22) [10]. Los puntos iniciales $(\xi_{PD}^{(0)}(\cdot), \lambda_{PD}^{(0)}, T_{PD}^{(0)})$ corresponden a una solución de la continuación donde la función de prueba ϕ_{PD} cambia de signo, y $v^{(0)}(\cdot)$ es la eigenfunción asociada al multiplicador de Floquet más cercano a -1 en ese mismo punto.

Siguiendo la estrategia del *método de múltiple disparo*, la versión discreta del sistema extendido se escribe como

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}^{\Delta t}(\xi_{PD}^{(i)}, T_{PD}, \lambda_{PD}) - \xi_{PD}^{(i+1)} = 0, & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \xi_{PD}^{(N)} - \xi_{PD}^{(0)} = 0, \\ \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} \xi_{PD}^{(k)T} \dot{\xi}_0^{(k)} + \Delta t \sum_{k=2}^{N-1} \xi_{PD}^{(k)T} \dot{\xi}_0^{(k)} = 0, \\ \tilde{\Phi}^{\Delta t}(v^{(i)}, T_{PD}, \lambda_{PD}) - v^{(i+1)} = 0, & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ v^{(N)} + v^{(0)} = 0, \\ \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} v^{(k)T} v^{(k)} + \Delta t \sum_{k=2}^{N-1} v^{(k)T} v^{(k)} = 1, \end{cases} \quad (2.28)$$

donde $\tilde{\Phi}^t(\cdot)$ representa el flujo perturbado análogo a $\tilde{\varphi}^t(\cdot)$ aplicado a la eigenfunción v , y satisface la ecuación variacional

$$\frac{d}{dt} \tilde{\Phi}^t(v^{(0)}, T, \lambda) = T \left(F_\xi(\tilde{\varphi}^t(\xi^{(0)}, T, \lambda), p) + \lambda \nabla_\xi^2 \tilde{H}(\tilde{\varphi}^t(\xi^{(0)}, T, \lambda), p) \right) \tilde{\Phi}^t(v^{(0)}, T, \lambda).$$

2.4.4. Transición a la rama de doble periodo

Una vez detectada la bifurcación de duplicación de periodo $(\xi_{PD}(\cdot), \lambda_{PD}, T_{PD})$, se puede continuar hacia la rama emergente de doble periodo duplicando el periodo y seleccionando la dirección correcta para la continuación.

Duplicación del periodo: Duplicar el periodo implica establecer $T = 2T_{PD}$ y, de manera consistente, duplicar el número de nodos en la discretización. Esto conduce a $\Delta t = 1/(2N)$ y $i = 0, 1, \dots, 2N$, con

$$\xi^{(i)} = \begin{cases} \xi_{PD}^{(i)}, & i \leq N, \\ \xi_{PD}^{(i-N)}, & i > N, \end{cases} \quad (2.29)$$

para reconstruir la órbita inicial de doble periodo.

Dirección de la rama emergente: La dirección de la nueva rama se obtiene a partir de la eigenfunción $v(\cdot)$ en la bifurcación:

$$\xi_0'^{(i)} = \begin{cases} v^{(i)}, & i \leq N, \\ -v^{(i-N)}, & i > N, \end{cases} \quad (2.30)$$

mientras que $\lambda'_0 = 0$ y $T'_0 = 0$ [10].

2.4.5. Continuación de doblamientos de periodo

El sistema (2.28), de manera análoga a las bifurcaciones de equilibrio, también cumple con las hipótesis de los teoremas 1, 2 y 3 [10]. Por lo tanto, es posible realizar la continuación numérica de este tipo de bifurcación.

Para ello, se introduce la ecuación de proyección

$$\begin{aligned} \Delta s = & \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} (\xi^{(k)} - \xi_0^{(k)})^T \xi_0'^{(k)} + \Delta t \sum_{k=1}^{N-1} (\xi^{(k)} - \xi_0^{(k)})^T \xi_0'^{(k)} \\ & + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k \in \{0, N\}} (v^{(k)} - v_0^{(k)})^T v_0'^{(k)} + \Delta t \sum_{k=1}^{N-1} (v^{(k)} - v_0^{(k)})^T v_0'^{(k)} \\ & + (T - T_0) T'_0 + (\lambda - \lambda_0) \lambda'_0 + (\mu - \mu_0) \mu'_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

2. MÉTODOS

donde μ representa un segundo parámetro del sistema (por ejemplo, $\tilde{\omega}$, \tilde{k} o \tilde{x}).

Con esta formulación, se puede aplicar directamente el algoritmo 1 para llevar a cabo la continuación de la bifurcación de doblamiento de periodo.

2.5. Sección de Poincaré

Para visualizar la dinámica del sistema en el espacio de fases, en este trabajo se selecciona el plano (ψ_2, J_2) , de modo que el análisis se reduce a la intersección de una hipersuperficie de energía $H = E$ con la superficie $\psi_1 = 0$. En esta intersección pueden coexistir varias ramas de energía que cumplen $H = E$, por lo que la dinámica se restringe a los puntos donde la velocidad de cruce en J_1 es positiva y la curvatura de la energía respecto a J_1 satisface una determinada condición de concavidad [12].

Formalmente, las condiciones utilizadas para construir la sección de Poincaré de interés son:

$$\begin{aligned} \psi_1 &\in \{0, \pi\}, \\ \tilde{H}(\psi_1, \psi_2, J_1, J_2) &= \tilde{E}, \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial J_1} &= \dot{\psi}_1 > 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial J_1^2} &> 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

De manera explícita:

1. La superficie de Poincaré se toma en $\psi_1 = 0$ o en $\psi_1 = \pi$, dependiendo de la situación.
2. Se restringe a la hipersuperficie de energía $\tilde{H} = \tilde{E}$.
3. Se consideran solo los puntos donde la velocidad de cruce de J_1 es positiva: $\dot{\psi}_1 > 0$.
4. Se seleccionan los puntos donde la energía es localmente convexa respecto a J_1 : $\partial^2 \tilde{H} / \partial J_1^2 > 0$.

En esta sección, la dinámica del sistema puede visualizarse mediante distintos tipos de comportamiento en el espacio de fases:

- *Toros quasi-periódicos*: conjuntos de puntos que se acumulan a lo largo de curvas cerradas.
- *Órbitas periódicas*: puntos fijos o centrales alrededor de los toros.
- *Zonas caóticas*: regiones donde los puntos no muestran una estructura aparente.

La sección de Poincaré implementada en este trabajo se utiliza para localizar órbitas periódicas que sirvan como condiciones iniciales para la continuación. El procedimiento geométrico seguido es el siguiente:

1. Se identifica un toro que contiene una órbita periódica cercana.
2. Se aproxima la órbita periódica mediante el *punto promedio* del conjunto de puntos del toro.
3. Se genera un nuevo toro centrado en este punto promedio, más cercano a la órbita periódica real.
4. Se repite el proceso hasta que la desviación estándar del conjunto de puntos del toro sea suficientemente pequeña, garantizando así una aproximación precisa de la órbita periódica.

De esta manera, se obtiene una estimación confiable de la órbita periódica, que puede emplearse como semilla inicial para métodos de continuación numérica.

Con el objetivo de visualizar las secciones de Poincaré de forma cerrada, se hace una transformación a coordenadas esféricas siguiendo las relaciones

$$\begin{aligned} X &= \frac{2\sqrt{J_2(K - J_2)} \cos(\psi_2)}{K}, \\ Y &= \frac{2\sqrt{J_2(K - J_2)} \sin(\psi_2)}{K}, \\ Z &= \frac{2J_2 - K}{K}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Geométricamente, esta transformación mapea la sección de Poincaré en una esfera unitaria donde los polos corresponden a los valores extremos de J_2 (es decir, $J_2 = 0$ y $J_2 = K$), y el ecuador representa el valor intermedio $J_2 = K/2$. Esta representación facilita la visualización y el análisis de la dinámica del sistema en el espacio de fases.

Análisis de resultados

3.1. Soluciones de equilibrio sincronizadas

3.1.1. Ramas de equilibrio

Los resultados obtenidos mediante la continuación numérica de las soluciones de equilibrio se muestran en la Figura 3.1. En este caso se presentan los equilibrios sincronizados, definidos por la condición $\psi_1 = \psi_2 = 0$, o equivalentemente $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. Estas ramas están asociadas al equilibrio inicial $\tilde{\xi}_S$ = (agregar punto de equilibrio inicial) en $\tilde{k} = 0$.

La simbología empleada en las gráficas (que será utilizada de manera análoga en las siguientes secciones) consiste en una letra mayúscula que identifica el tipo de equilibrio, un superíndice que indica la clase espectral y un subíndice que señala el número de direcciones linealmente inestables.

La continuación numérica revela la presencia de una bifurcación de punto límite, una bifurcación de ramificación y dos bifurcaciones de Hopf hamiltoniana. Estas últimas se localizan de forma aproximada mediante los puntos más cercanos en la discretización de la rama.

La estructura de bifurcaciones permite distinguir tres regiones relevantes en el parámetro \tilde{k} :

- (i) Una región $\tilde{k} < (\text{lp}.k)$ en la que no existen equilibrios asociados a $\tilde{\xi}_S$.
- (ii) Una región intermedia $(\text{lp}.k) \leq \tilde{k} \leq (\text{bp}.k)$ caracterizada por la coexistencia de equilibrios con distintos tipos de estabilidad lineal.
- (iii) Una región $(\text{bp}.k) < \tilde{k} < 100$ en la que los equilibrios asociados no presentan direcciones linealmente inestables.

En este contexto, adquiere particular interés la interpretación física e implementación experimental de valores $\tilde{k} < 0$, ya que es en esta región donde se observa la mayor diversidad de configuraciones espectrales para los equilibrios sincronizados.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

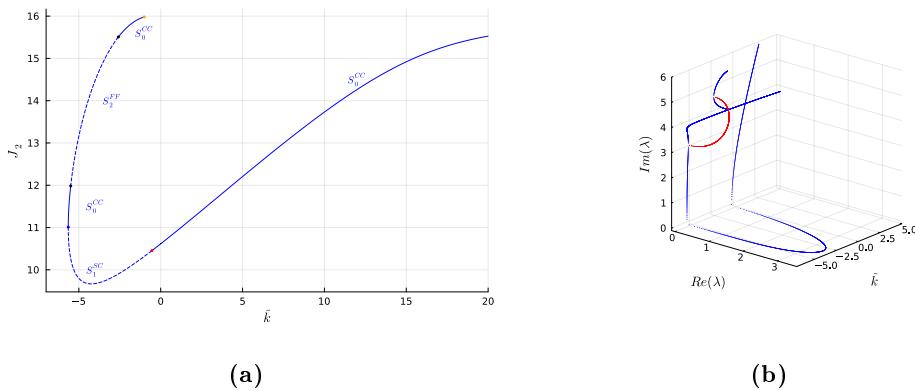


Figura 3.1: (a) Ramas de equilibrio sincronizadas proyectadas en la coordenada J_2 en función de \tilde{k} . (b) Espectro lineal correspondiente, proyectado en el plano complejo positivo en función de \tilde{k} . Los puntos azules en (a) indican bifurcaciones de punto límite, los rojos bifurcaciones de ramificación, los negros bifurcaciones de Hopf hamiltoniana y los naranjas puntos en los que la solución alcanza la frontera del sistema (1.19). Las bifurcaciones de Hopf hamiltoniana y los puntos de frontera se identifican de manera aproximada a partir de los valores más cercanos disponibles en la rama. Los puntos azules en (b) indican que el espectro está en el plano imaginario o real mientras que los rojos indican que el espectro es un número complejo con componentes imaginaria y real no nulas.

3.1.2. Ramas de bifurcación

La continuación numérica de las bifurcaciones de punto límite y de ramificación respecto a un segundo parámetro conduce a las ramas mostradas en la Figura 3.2.

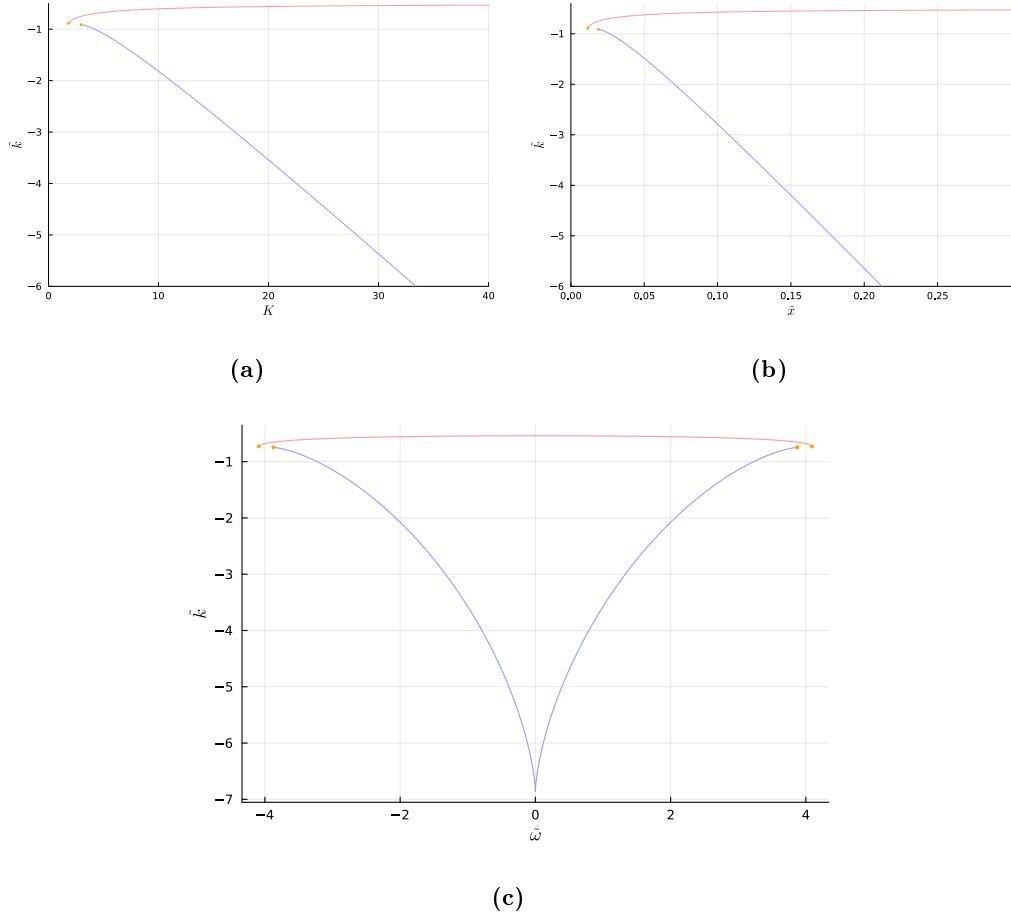


Figura 3.2: Ramas de bifurcaciones asociadas a los equilibrios sincronizados en función de dos parámetros: (a) \tilde{k} y K , (b) \tilde{x} , (c) $\tilde{\omega}$. Las curvas azules corresponden a bifurcaciones de punto límite, las rojas a bifurcaciones de ramificación y los círculos naranjas indican la intersección con la frontera del dominio permitido para las acciones J_i .

El análisis de las regiones delimitadas por estas ramas permite construir un diagrama de fases en el espacio de parámetros. En particular, pueden identificarse tres dominios cualitativamente distintos:

- (i) La región situada por debajo de la rama de puntos límite, donde no existen equilibrios que se continúen desde $\tilde{k} = 0$.
- (ii) La región comprendida entre las ramas de punto límite y de ramificación, en la

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

que coexisten equilibrios con diferentes configuraciones espectrales.

(iii) La región por encima de la rama de ramificación, donde las soluciones presentes carecen de direcciones linealmente inestables.

Es importante enfatizar que esta clasificación sólo es válida en los intervalos de parámetros donde coexisten simultáneamente las ramas de punto límite y de ramificación. Si alguna de ellas desaparece al alcanzar la frontera del dominio mientras la otra persiste, el carácter dinámico del sistema por encima o por debajo de la rama restante no puede determinarse únicamente a partir de la estructura de bifurcaciones y requiere un análisis directo de las ramas de equilibrio emergentes.

3.2. Soluciones de equilibrio antisincronizadas

3.2.1. Ramas de equilibrios

La continuación numérica ahora para las soluciones de equilibrio antisincronizadas, aquellas con diferencias de fase máximas entre pozos $\psi_1 = \psi_2 = \pi$, asociadas a la solución de equilibrio $\xi_{AS} = (\text{añadir equilibrio})$ se expone en la Figura 3.3(a).

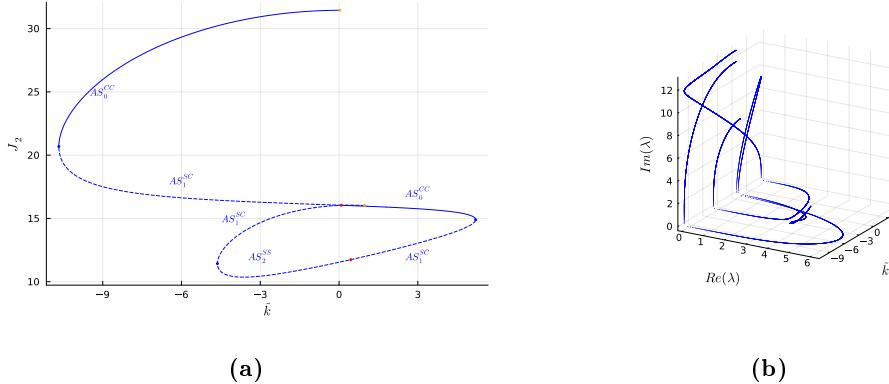


Figura 3.3: Las ramas de equilibrio antisincronizadas (a) en la coordenada J_2 respecto a \tilde{k} y su espectro (b) mapeado en el plano complejo. Los puntos azules en (a) indican bifurcaciones de tipo límite, los rojos de ramificación, los negros hopf hamiltoniana y los naranjas son puntos donde se llega a una frontera de J_i .

Para valores de $\tilde{k} > 0$ se observa que las ramas antisincronizadas exhiben espectros de tipo silla-silla, silla-centro y centro-centro. Esto indica que, para esta configuración de fases, es posible la coexistencia de distintos tipos de estabilidad en regiones de acoplamiento positivo. Este comportamiento es consistente con el hecho de que la antisincronización maximiza la energía del sistema, lo cual favorece la aparición de inestabilidades. Como consecuencia, en este régimen de \tilde{k} aparecen bifurcaciones que no

están presentes en el caso sincronizado, aun cuando la rama sincronizada no colapsa en ninguna degeneración en esta región del parámetro.

En $\tilde{k} = 0$ se identifican tres equilibrios antisincronizados que presentan al menos una dirección inestable, junto con una degeneración en las variables J_i . Este resultado contrasta con el caso sincronizado, en el cual únicamente existe un equilibrio en este punto y no se observan direcciones inestables.

Para valores negativos de \tilde{k} , las ramas antisincronizadas colapsan en una degeneración de las variables J_i , de manera análoga al caso sincronizado. No obstante, a diferencia de este último, en la región $\tilde{k} < 0$ sólo se presentan bifurcaciones de punto límite, descartándose la existencia de ramas bifurcadas que crucen soluciones antisincronizadas en este régimen.

A partir de las bifurcaciones de punto límite y de ramificación mostradas en la Figura 3.3(a), se calcularon las ramas asociadas a la variación de los demás parámetros del sistema. Estas se presentan en las Figuras 3.4(a) a 3.4(c).

En las Figuras 3.4(a) y 3.4(b) se observa una nueva aproximación de bifurcación en la cual todos los autovalores del espectro se anulan simultáneamente. Esta propiedad puede inferirse a partir de la codificación cromática empleada: los tonos intensos indican espectros reales, mientras que los tonos claros corresponden a espectros puramente imaginarios. En consecuencia, el punto intermedio donde ocurre la transición entre ambos regímenes debe corresponder necesariamente a un espectro nulo, lo cual se confirma explícitamente en las Figuras ?? a ??.

Además, se garantiza la existencia de multiestabilidad antisincronizada tanto en el régimen positivo como en el negativo de \tilde{k} al variar los parámetros \tilde{x} y K , siempre que estos superen los valores críticos asociados a las bifurcaciones degeneradas entre ramas con espectro imaginario y real. En particular, se destaca la aparición de equilibrios de tipo silla–silla, los cuales surgen de la conexión entre puntos límite y puntos de ramificación con espectro real. Esta conexión implica un cambio en el número de direcciones inestables, de una a dos.

A diferencia del caso sincronizado, donde la rama de puntos límite desaparece primero por degeneración dejando un intervalo con puntos de ramificación aislados, en el caso antisincronizado los puntos de ramificación son los primeros en desaparecer al disminuir \tilde{x} y K por debajo de la degeneración del espectro. Esto deja inicialmente dos puntos límite conectados, los cuales eventualmente convergen en uno solo, mientras que un segundo punto límite aislado persiste hasta desaparecer finalmente en una degeneración de las variables J_i .

Finalmente, en la Figura 3.4(c) también se observan ramas con tonalidades diferenciadas; sin embargo, a diferencia de los casos anteriores, no se produce una conexión entre ramas con espectro real e imaginario. Esto se debe a la presencia de degeneraciones en las variables J_i , las cuales impiden la continuidad entre ramas de tonos intensos y tenues. En este caso, las regiones de multiestabilidad antisincronizada se encuentran delimitadas por dos figuras semicerradas formadas entre puntos límite y de ramificación. Al aumentar el parámetro $\tilde{\omega}$, desaparecen primero las regiones asociadas a bifurcaciones con espectro real, eliminando la garantía de existencia de equilibrios tipo silla–silla.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

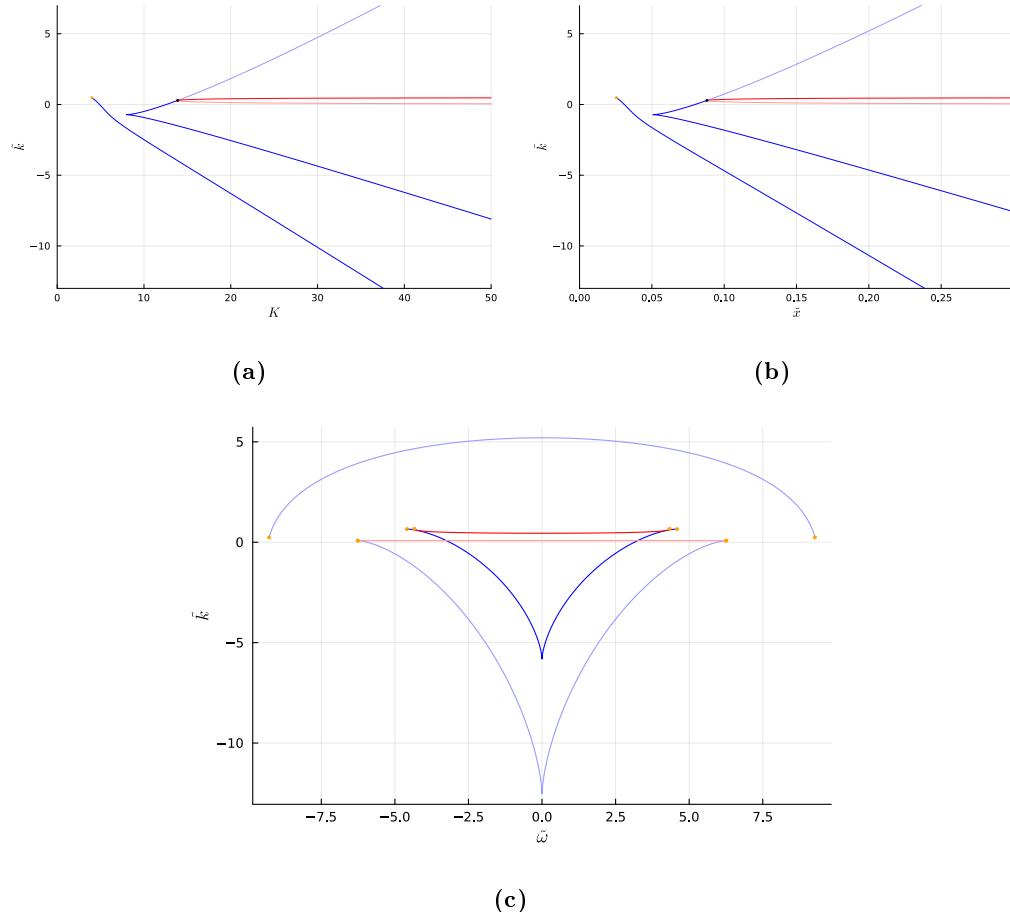


Figura 3.4: Ramas de bifurcaciones antisincronizadas en función de \tilde{k} y K (a), \tilde{x} (b) y $\tilde{\omega}$ (c). Las ramas azules representan bifurcaciones de tipo límite, las rojas bifurcaciones de ramificación y los círculos naranjas fronteras de J_i .

Posteriormente, desaparecen las regiones con espectro imaginario, dejando finalmente un único punto límite aislado, el cual también colapsa al incrementar aún más el parámetro. Nuevamente, se observa que $\tilde{\omega}$ actúa de manera opuesta a K y \tilde{x} en lo que respecta a la separación de las bifurcaciones.

3.3. Soluciones de equilibrio con fase frustrada

Las soluciones de equilibrio de fase frustrada cumplen las condiciones $\psi_1 = \psi_2 = \psi^* \neq 0, \pi$. Estas soluciones sólo se pueden obtener al continuar las ramas bifurcadas de los puntos de ramificación de las soluciones sincronizadas y antisincronizadas, donde el caso $F1$ corresponde a la rama bifurcada de las soluciones sincronizadas, el caso $F2$ corresponde a la rama bifurcada del punto de ramificación antisincronizado con espectro imaginario y $F3$ a la rama bifurcada del punto de ramificación antisincronizado con espectro real. Las ramas de equilibrio correspondientes se muestran en las Figuras 3.5(a) a 3.5(e), mientras que sus espectros asociados se presentan en las Figuras 3.5(b) a 3.5(f).

La principal novedad respecto a los casos sincronizado y antisincronizado es que estas ramas bifurcadas sirven como puentes para encontrar ramas de equilibrio con fases mixtas y ramas que no cruzan $\tilde{k} = 0$, como se verá en la siguiente sección. Antes de ver las ramas que conectan estas ramas bifurcadas, es importante destacar que una solución de equilibrio de este tipo es muy importante ya que no es trivial obtener una configuración de acciones y ángulos que cumplan las condiciones de equilibrio, siendo la continuación numérica el medio más efectivo y accesible para localizarlos.

Como se observa en las Figuras 3.5(a) a 3.5(e), las ramas de equilibrio de fase frustrada se caracterizan por ser topológicamente cerradas, compuestas en cada caso por 2 ramas de equilibrio simétricas respecto a ψ_2 con límites en los puntos de ramificación. Siendo cerradas, se observa que no hay ramas de fase frustrada que cruzen $\tilde{k} = 0$, concordando con el sistema de ecuaciones (1.18) ya que un requisito indispensable en este valor es que los ángulos $\psi_i \in \{0, \pi\}$. Reforzando el argumento del párrafo anterior acerca del mejor camino para encontrar estas soluciones.

De las 3 ramas de equilibrio frustrado, sólo una presenta multiestabilidad asegurada (Figura 3.5(e)) ya que conecta 2 puntos de ramificación con espectros reales e imaginarios respectivamente. Este tipo de cambios de estabilidad genera un tipo distinto de bifurcación de hopf hamiltoniana donde hay una trancisión de un espectro tipo silla-silla a un espectro tipo foco-foco, algo que no se observa en los casos sincronizado, antisincronizado y en los equilibrios frustrados $F1$ y $F2$.

3.4. Soluciones de equilibrio mixtas

Hay 2 tipos de soluciones mixtas: aquellas con $\psi_1 = \pi, \psi_2 = 0$ (identificadas con $M1$) y las que cumplen $\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi$ (identificadas con $M2$). Sus respectivas ramas

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

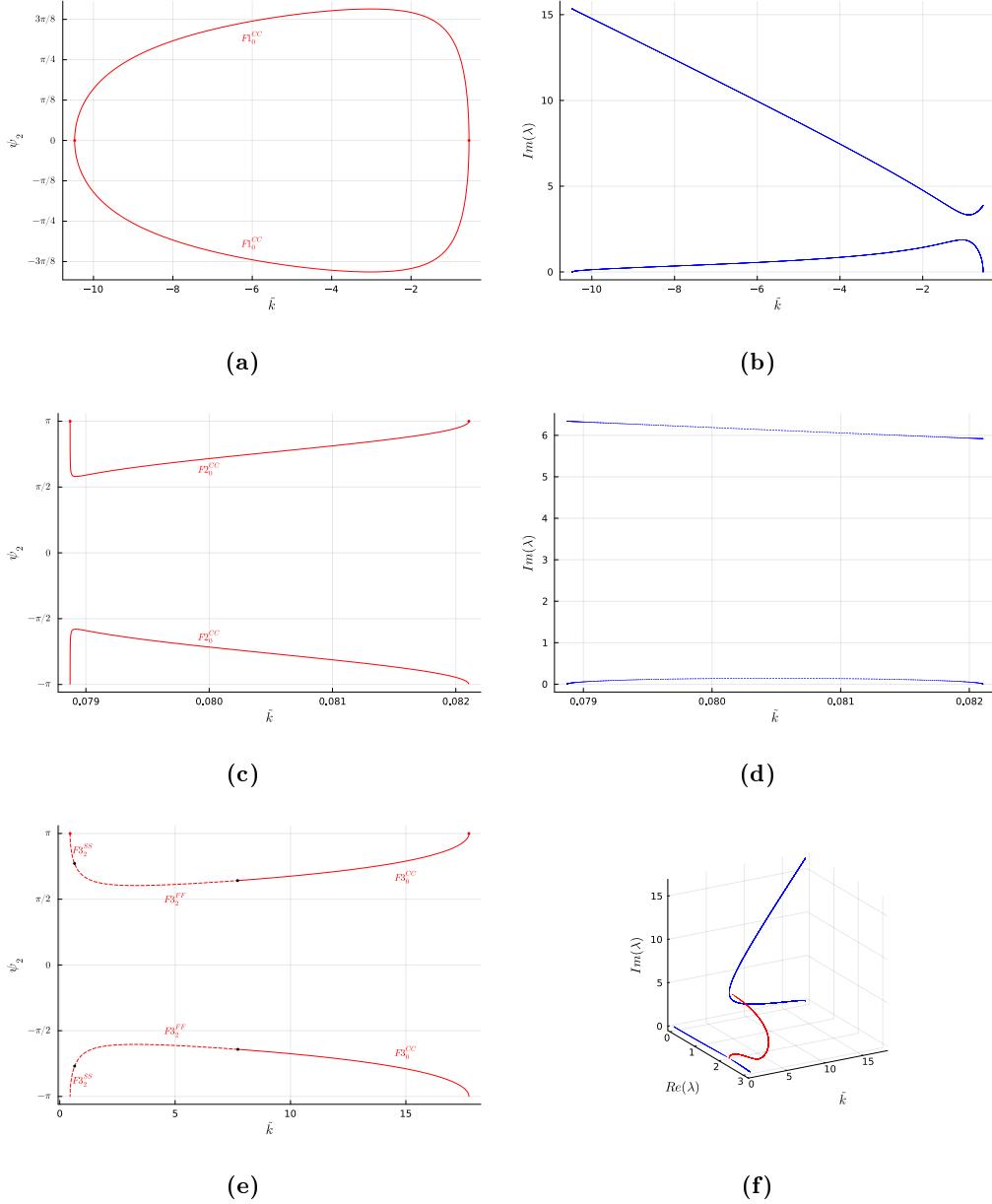


Figura 3.5: Las ramas de equilibrio frustradas (a) en la coordenada ψ_2 respecto a \tilde{k} y su espectro (b) mapeado en el plano complejo. Los puntos rojos indican bifurcaciones de tipo ramificación.

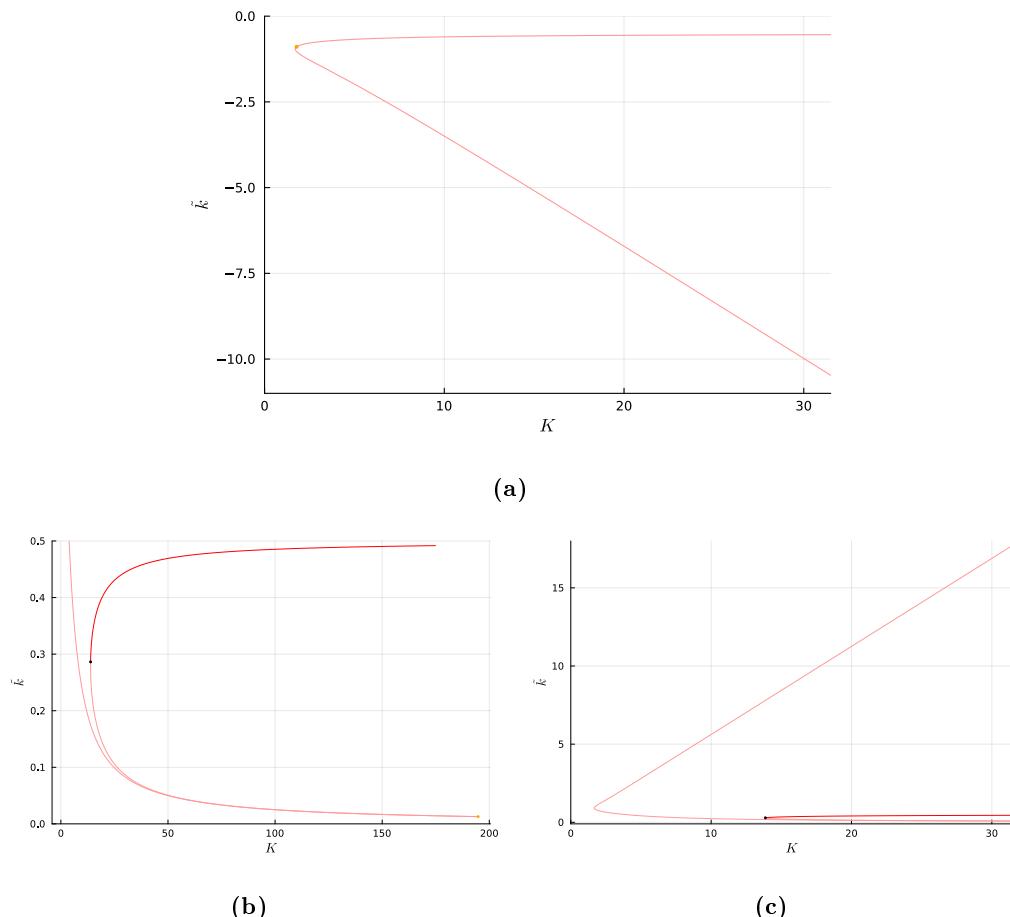


Figura 3.6: Ramas de puntos de ramificación de la rama $F1$ (a), $F2$ (b) y $F3$ (c) en función de \tilde{k} y K . Los puntos negros indican una anulación total del espectro, los naranjas una frontera de las variables J_i , los colores intensos representan equilibrios con un par real y los colores tenues con un par imaginario.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

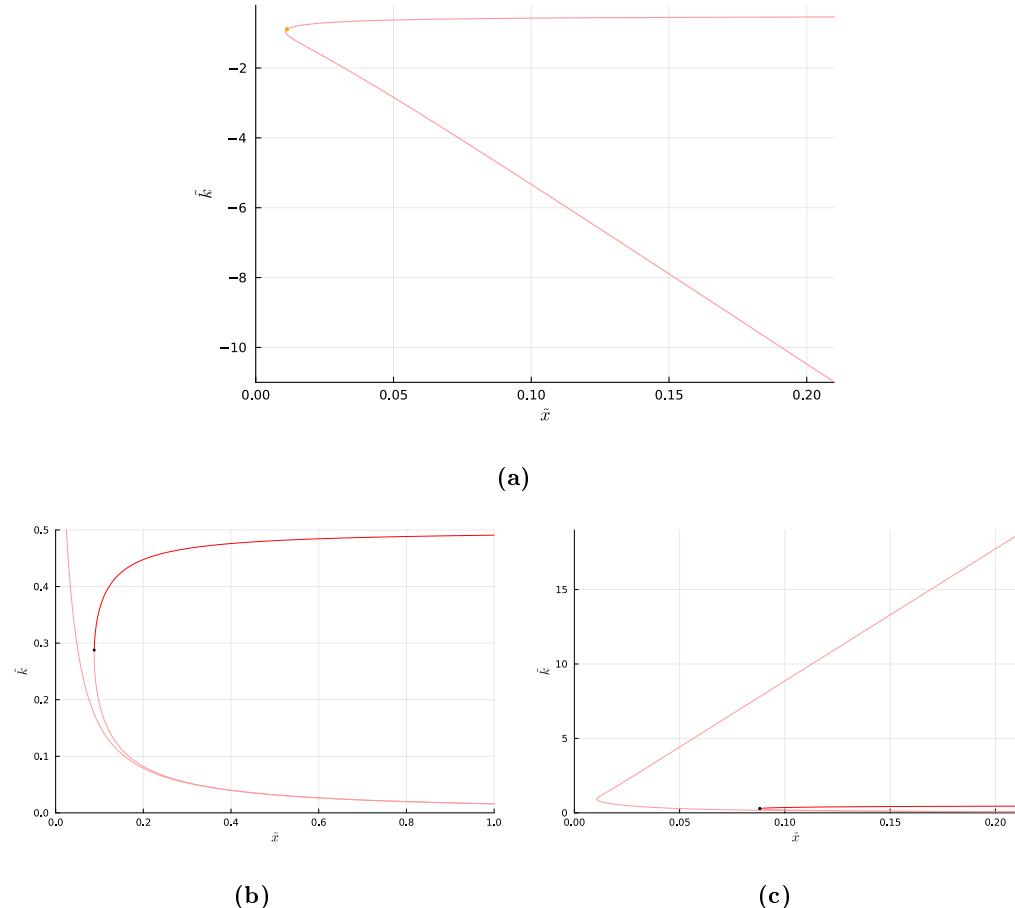


Figura 3.7: Ramas de puntos de ramificación de la rama $F1$ (a), $F2$ (b) y $F3$ (c) en función de \tilde{k} y \tilde{x} . Los puntos negros indican una anulación total del espectro, los naranjas una frontera de las variables J_i , los colores intensos representan equilibrios con un par real y los colores tenues con un par imaginario.

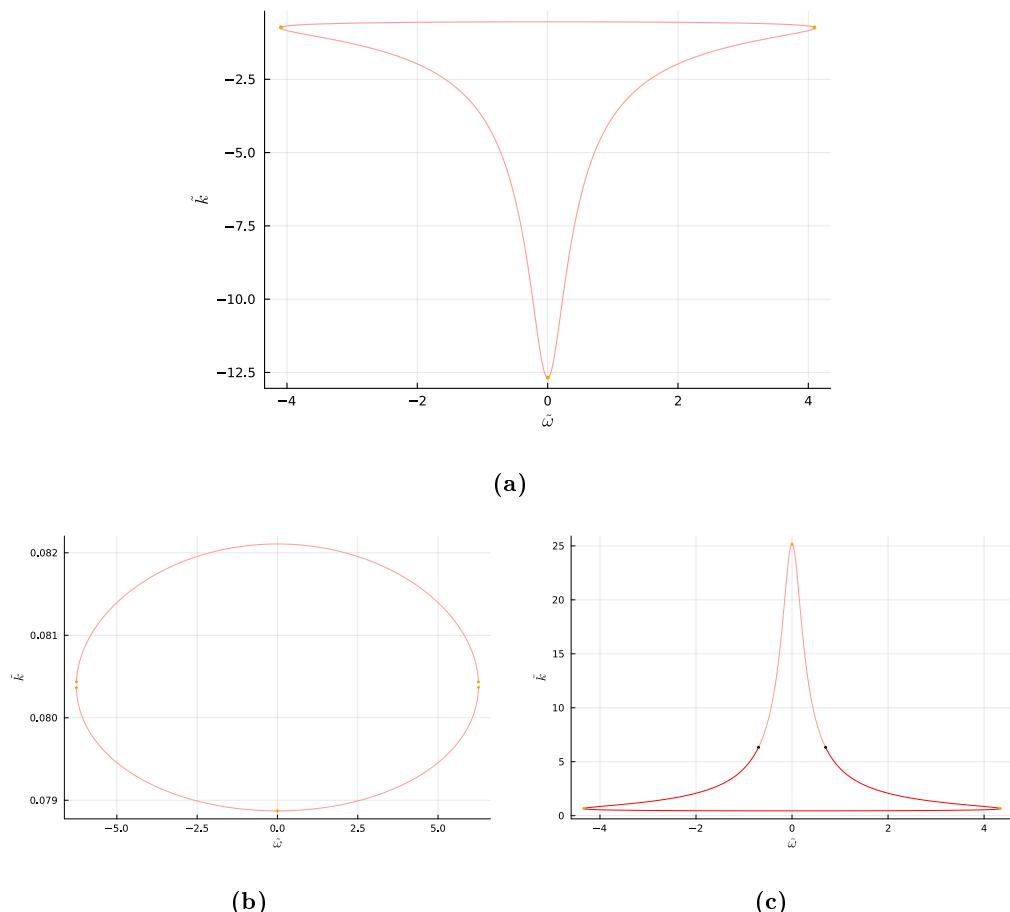


Figura 3.8: Ramas de puntos de ramificación de la rama $F1$ (a), $F2$ (b) y $F3$ (c) en función de \tilde{k} y $\tilde{\omega}$. Los puntos negros indican una anulación total del espectro, los naranjas una frontera de las variables J_i , los colores intensos representan equilibrios con un par real y los colores tenues con un par imaginario.

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

de equilibrio se muestran en las Figuras [3.9\(a\)](#) y [3.9\(c\)](#), mientras que sus espectros se presentan en las Figuras [3.9\(b\)](#) a [3.9\(e\)](#).

La principal novedad respecto a los casos sincronizado y antisincronizado es que en el caso mixto $M2$ se tiene una rama que no cruza $\tilde{k} = 0$ ya que, como se observará en la siguiente sección, esta rama se bifurca de un punto de ramificación que aparece en una de las ramas que a su vez bifurcan de los puntos de ramificación de la rama antisincronizada.

3.5. Soluciones periódicas

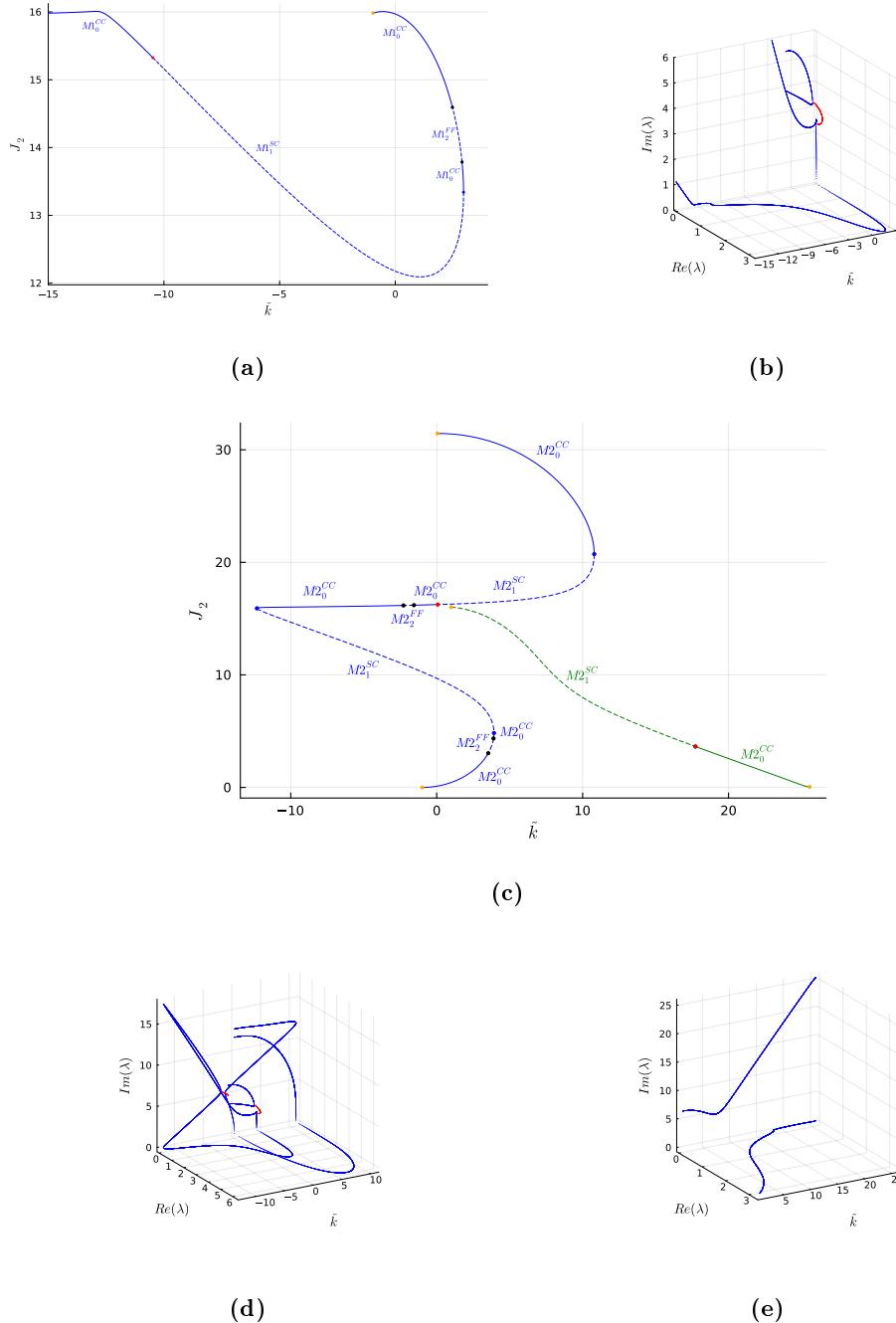


Figura 3.9: Las ramas de equilibrio mixtas (a) y (c) en la coordenada J_2 respecto a \tilde{k} y sus espectros (b) y (d) mapeados en el plano complejo respectivamente siendo (e) el espectro de la rama de color verde en (c). Los puntos azules en (a) y (c) indican bifurcaciones de punto límite, los rojos de ramificación los negros de hopf hamiltonianas mientras que los naranjas indican puntos de frontera en J_i .

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

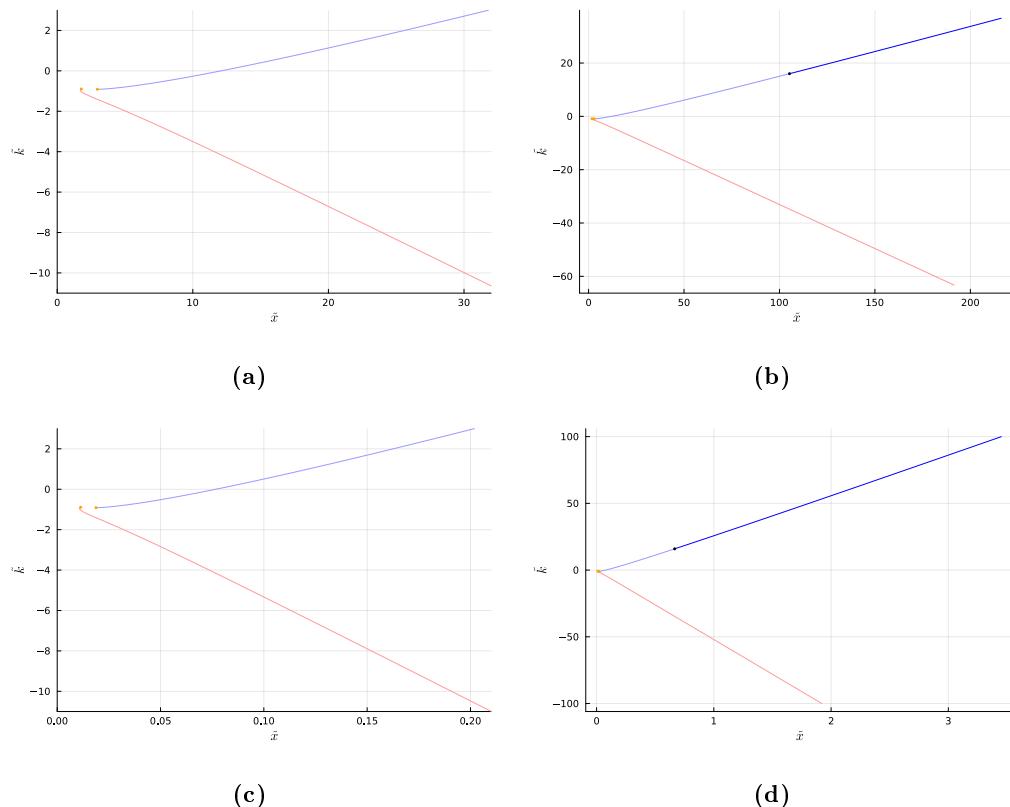


Figura 3.10: Ramas de puntos límite (azul) y puntos de ramificación (rojo) de la rama $M1$ en función de \tilde{k} y K ((a) y (b)) y \tilde{x} ((c) y (d)).

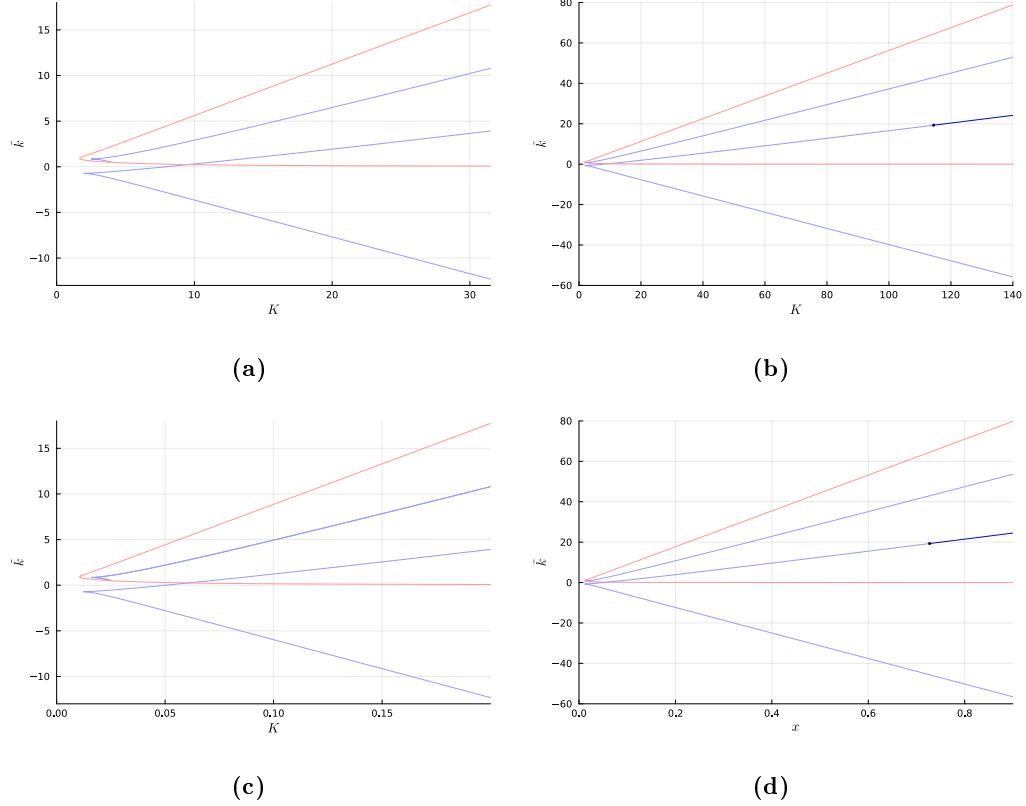


Figura 3.11: Ramas de puntos límite (azul) y puntos de ramificación (rojo) de las ramas $M2$ en función de \tilde{k} y K ((a) y (b)) y \tilde{x} ((c) y (d)).

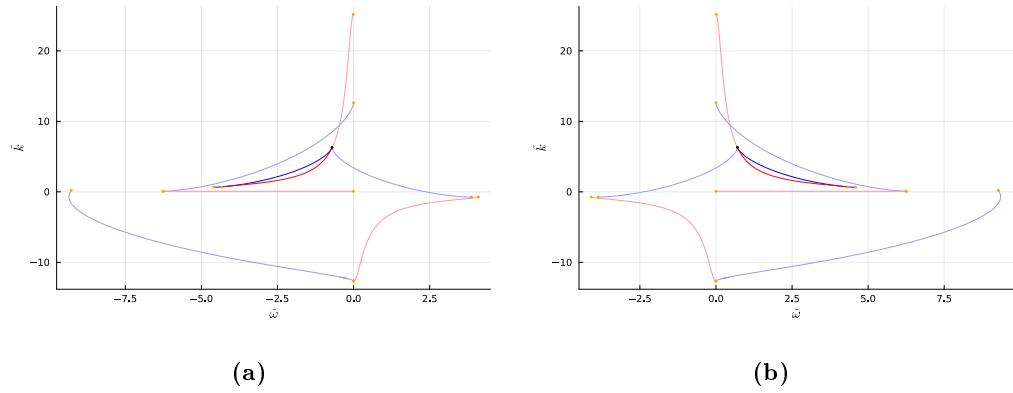


Figura 3.12: Ramas de puntos límite (azul) y puntos de ramificación (rojo) de la rama $M1$ (a) y de las ramas $M2$ (b) en función de \tilde{k} y $\tilde{\omega}$.

Bibliografía

- [1] Allgower, E. L. and Georg, K. (1990). *Introduction*, pages 1–6. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. [14](#)
- [2] Doedel, E. J. (2007). Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations. In Krauskopf, B., Osinga, H. M., and Galán-Vioque, J., editors, *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path following and boundary value problems*, pages 1–49. Springer Netherlands, Dordrecht. [13](#), [14](#), [15](#), [16](#), [17](#), [19](#)
- [3] Dos Santos, F., Mansilla, J. E., and Vidal, C. (2010). Stability of equilibrium solutions of autonomous and periodic hamiltonian systems with n-degrees of freedom in the case of single resonance. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 22:805–821. [7](#), [8](#)
- [4] Farantos, S. C. (1998). Pomult: A program for computing periodic orbits in hamiltonian systems based on multiple shooting algorithms. *Computer Physics Communications*, 108(2):240–258. [20](#)
- [5] Galán-Vioque, J. and Vanderbauwhede, A. (2007). Continuation of periodic orbits in symmetric hamiltonian systems. *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems: Path following and boundary value problems*, pages 269–299. [11](#)
- [6] Govaerts, W. J. F. (2000). *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. Society for Industrial and Applied Mathematics. [8](#)
- [7] Keller, H. B. (1977). Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. *Applications of Bifurcation Theory*. [15](#)
- [8] Lahiri, A. and Roy, M. S. (2001). The hamiltonian hopf bifurcation: an elementary perturbative approach. *International journal of non-linear mechanics*, 36(5):787–802. [8](#)
- [9] LUST, K. (2001). Improved numerical floquet multipliers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 11(09):2389–2410. [21](#), [22](#)

BIBLIOGRAFÍA

- [10] Meijer, H., Dercole, F., and Oldeman, B. (2011). Numerical bifurcation analysis. In Meyers, R. A., editor, *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*, pages 1172–1194. Springer New York, New York, NY. [17](#), [18](#), [19](#), [21](#), [22](#), [23](#)
- [11] Meyer, K. and Hall, G. (1992). *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem*. Number v. 90 in Applied mathematical sciences. U.S. Government Printing Office. [7](#), [8](#), [9](#), [10](#)
- [12] Mossmann, S. and Jung, C. (2006). Semiclassical approach to bose-einstein condensates in a triple well potential. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 74(3):033601. [1](#), [2](#), [3](#), [24](#)
- [13] Muñoz-Almaraz, F., Freire, E., Galán, J., Doedel, E., and Vanderbauwhede, A. (2003). Continuation of periodic orbits in conservative and hamiltonian systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 181(1):1–38. [21](#)