

1. (30 点) 次の関数の 1 階および 2 階偏微分をすべて求めよ. ただし,  $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$  は認めてよく, 計算結果のみを書くこと.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) := x_1 \sin(x_2 x_3).$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a x_1 x_2 + b x_2 x_3 + c x_1 x_3.$$

$$f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \sum_{m=1}^n x_k x_\ell x_m.$$

2. (30 点) (i) 次の極限が存在するかを判定せよ. 存在すればその値を求め, 存在しなければそのことを証明せよ. ただし  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  とする:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x^2 - a^2}$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cos x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3}{x^3} = 0$$

をみたす  $a_0, a_1, a_2, a_3$  を求めよ.

(iii) 次の極限が存在するかを判定せよ. 存在すればその値を求め, 存在しなければそのことを証明せよ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 + (3x+4)y^2}{x^2 + 2y^2}$$

3. (10 点)  $f(x) := \cos x$  としたとき,  $\frac{d^n f}{dx^n}(\pi/3) = f^{(n)}(\pi/3)$  を求め,  $x = \pi/3$  の周りで  $f$  を  $2k+1$  次までテイラー近似したものを答えよ (剰余項は答えなくてよい)

4. (15 点)  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  としたとき,

$$f(x, y) := \begin{cases} 0 & ((x, y) = (0, 0)), \\ \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

5. (10 点)  $f(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\psi(t) \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $z(s, t) := f(s, \psi(t))$  としたとき,  $z_s, z_t$  を  $f_x, f_y$  等を用いて表せ. (答えのみを書くこと)

6. (25 点) (i) 次の関数は  $(x, y) = (0, 0)$  で  $x, y$  に関して偏微分可能かを判定し, その理由を説明せよ:

$$f(x, y) = |y|^{1/2}.$$

(ii)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$  とし,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ ,  $\lim_{y \rightarrow a} g(y) = b$  とするとき,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = b$  が成立するか判定し, 成立するならば証明を, 成立しない場合は反例を挙げよ.