慶應義塾大学試験問題　物理学C

2014年11月19日（水）1時限（試験時間50分）　問題用紙 回収不要

担当者　神成、木下、齊藤、高野

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。 また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数ε_0、磁気定数μ_0、真空中の光速cの記号は断りなしに使ってよい。

問題I 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ が

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \rho_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^2 & \cdots \quad r \le a, \\ 0 & \cdots \quad r > a \end{cases}$$

で与えられる場合を考える。ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ は原点からの距離、$a(>0)$、 ρ_0 は定数である。

(1) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) 無限遠点を基準点として、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(3) この系の全静電エネルギー U_{E} を求めなさい。

問題II 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ が

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \phi_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^2 & \cdots \quad r \le a, \\ \phi_0 \left(\dfrac{a}{r}\right)^2 & \cdots \quad r > a \end{cases}$$

で与えられる場合を考える。ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ は原点からの距離、$a(>0)$、 ϕ_0 は定数である。

(1) $r \neq a$ の場合に、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) $r \neq a$ の場合に、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(3) $r = a$ の球面上の電荷の面密度 ω を求めなさい。

問題 III 図 III-1 のように、半径 a、高さ h の円筒状の電極 A と半径 b、高さ h の円筒状の電極 B が中心軸を共通にして、高さをそろえて配置してある。$a < b$ である。中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 III-2 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。A と B の間は、位置 (r, φ, z) における電気伝導率 $\sigma(r, \varphi, z)$ が

$$\sigma(r, \varphi, z) = \sigma_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 \quad \cdots \quad a \leq r \leq b$$

となるように導体が詰めてある。ここで、 $\sigma_0\ (> 0)$ は定数である。AB 間の電位差が一定に保たれ、A から B に一定電流 I が流れている場合を考える。

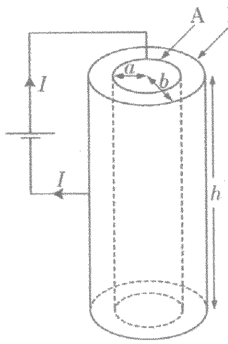

図 III-1

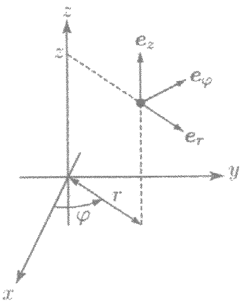

図 III-2

(1) AB 間の位置 (r, φ, z) における電流密度 $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z)$ と電界 $\boldsymbol{E}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

(2) AB 間の電位差 V を求め、AB 間の全電気抵抗 R を求めなさい。

(3) $a < r_1 < r_2 < b$ とするとき、中心軸からの距離 r が $r_1 < r < r_2$ の範囲で単位時間に発生するジュール熱 $P(r_1, r_2)$ を求めなさい。

問題 IV 真空中に内半径 a、外半径 b の円筒状の無限に長い導体がある。円筒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。問題 III で定義した互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す (図 III-2 参照)。この導体に定常電流が流れている。位置 (r, φ, z) における電流密度 $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z)$ は

$$\boldsymbol{i}(r, \varphi, z) = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \cdots \quad r < a \quad (\text{真空中}) \\ i_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \boldsymbol{e}_z & \cdots \quad a \leq r \leq b \quad (\text{導体中}) \\ \boldsymbol{0} & \cdots \quad b < r \quad (\text{真空中}) \end{cases}$$

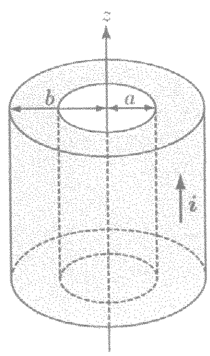

図 IV

で与えられている (図 IV 参照)。

(1) $a \leq r_1 < r_2 \leq b$, $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ とするとき、$r_1 \leq r \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2$, $z =$ 一定 で指定される部分 (円環の一部) を貫く全電流 $I(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$ を求めなさい。

(2) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。