数学 2B　第 13 回（正定値行列、極値問題と 2 次形式）

2020 年 1 月 7 日（火）

担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

復習：8.2 行列の対角化，実対称行列の対角化，正定値行列

定理 8.2.3 任意の正方行列は，あるユニタリ行列によって三角化される．

定理 8.2.5 任意の実対称行列は，直交行列によって対角化可能である．

8.2.3 正定値行列

8.3 極値問題と 2 次形式

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい

問題 12-1(再掲).　次の実対称行列について，正定値，負定値，いずれでもない，のどれに該当するか判定しなさい．

$$(1)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad (2)\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},\quad (3)\begin{bmatrix} -1 & m & 0 \\ m & -2 & m \\ 0 & m & -3 \end{bmatrix}$$

問題 12-3(再掲).　任意の $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ に対して，3 次実対称行列 A が

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = (\alpha+1)x_1^2 + (\alpha-1)x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2\alpha x_1x_3 + 2x_2x_3$$

を満たすように定められているとする．このとき，A は，正定値，負定値，いずれでもない，のどれに該当するか (α の値に応じて) 判定しなさい．

問題 13-1.　実数に対して定義される次の各関数について, (a) 勾配ベクトルを求めなさい, (b) 停留点をすべて求めなさい, (c) 各停留点におけるヘッセ行列を求めなさい，また, (d) 極値をすべて求めなさい．

(1) $f(x,y) = 3x^2 + xy^2 + y^2$

(2) $f(x,y,z) = 1 - x - 2y - z + xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2$

問題 13-2(宿題).　実数に対して定義される関数

$$f(x,y,z) = x^2e^x + y^3 - 3yz + z^3$$

について, (a) 勾配ベクトルを求めなさい, (b) 停留点をすべて求めなさい, (c) 各停留点におけるヘッセ行列を求めなさい，また, (d) 極値をすべて求めなさい．

問題 12-1, 2 の解答

問題 12-1．(1) 正定値（$\because$ 固有値 $(\lambda = 1, 2, 4)$ が全て正）
(2) いずれでもない（$\because$ 固有値 $(\lambda = 0, 3, 4)$ に 0 が含まれている (半正定値)）
(3) $-\sqrt{\dfrac{3}{2}} < m < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ならば，負定値（$\because$ 固有多項式 $(f_A(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + (11 - 2m^2)\lambda + (6 - 4m^2))$ の係数が全て正)
$m \leq -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $m \geq \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ならば，いずれでもない（$\because$ 固有多項式の係数に関する条件を満たさない) □

問題 12-3. $A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,3}$（つまり，(i, j) 成分が a_{ij}）とすると，任意の $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j $$

となる．よって，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = (\alpha+1)x_1^2 + (\alpha-1)x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2\alpha x_1x_3 + 2x_2x_3$ を満たす 3 次実対称行列 A は

$$ A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix} $$

であり，この A に対する固有多項式は

$$ \begin{aligned} f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-(\alpha+1) & 0 & -\alpha \\ 0 & \lambda-(\alpha-1) & -1 \\ -\alpha & -1 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 3\alpha\lambda^2 + 2(\alpha^2-1)\lambda - (\alpha^2 - 2\alpha - 1) \end{aligned} $$

である．3 次多項式 $f_A(\lambda)$ の各係数について

$$ c_2 = -3\alpha, \quad c_1 = 2(\alpha^2-1), \quad c_0 = -(\alpha^2 - 2\alpha - 1) $$

と置くと，系 8.2.12. より，

$$ c_2 < 0, c_1 > 0, c_0 < 0 \Leftrightarrow A \text{ が正定値}, \qquad c_2 > 0, c_1 > 0, c_0 > 0 \Leftrightarrow A \text{ が負定値} $$

であり，その他の場合は A はいずれでもない．この各条件に当てはまる α を求めると

$$ \alpha > 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow A \text{ が正定値}, \qquad \alpha \leq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow A \text{ はいずれでもない} $$

を得る． □