慶應義塾大学試験問題　物理学D

(試験時間 50 分)

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数 ε_0、磁気定数 μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 同じ中心軸をもつ半径 a および半径 b の導体円筒を両極板とする長さ h のコンデンサーがある $(a < b \ll h)$。両極板の間の空間は誘電体で満たされており、その誘電率は、中心軸からの距離 r の関数として、$\varepsilon(r) = \bar{\varepsilon}\varepsilon_0 \left(\dfrac{b}{r}\right)^4$ で与えられている (図 I-1 参照)。ここで、$\bar{\varepsilon}$ は $\bar{\varepsilon} > 1$ を満たす定数である。内側の電極に Q の、外側の電極に $-Q$ の電荷を与える。両極板の端からの電界の漏洩は無視できるものとする。

導体円筒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 I-2 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。

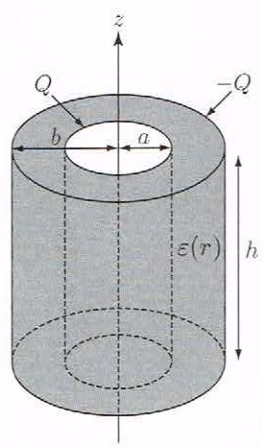

図 I-1

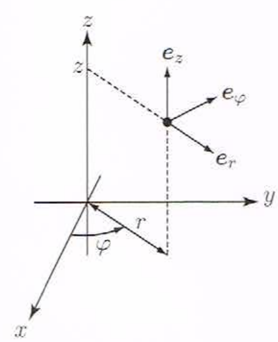

図 I-2

(1) 両極板間の位置 (r, φ, z) における電界 $\boldsymbol{E}(r, \varphi, z)$、電束密度 $\boldsymbol{D}(r, \varphi, z)$、電気分極 $\boldsymbol{P}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

(2) この系の静電エネルギー U_{E} を求めなさい。

(3) 誘電体の内側の表面上の位置 $(r = a, \varphi, z)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(a, \varphi, z)$、誘電体の外側の表面上の位置 $(r = b, \varphi, z)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(b, \varphi, z)$、誘電体内の位置 (r, φ, z) における分極電荷密度 $\rho_{\mathrm{P}}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

ヒント: デカルト座標 (x, y, z) においては、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$、$\boldsymbol{e}_r = \left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, 0\right)$、

$\boldsymbol{e}_\varphi = \left(-\dfrac{y}{r}, \dfrac{x}{r}, 0\right)$、$\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ と表される。

問題 II 物質中で、電界を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、真電荷密度を ρ_{t}、真電流密度を $\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}$ とする。

(1) 物質中のマクスウェル方程式を書きなさい。

(2) 物質が一様で、その誘電率 ε と透磁率 μ が一定の場合を考える。デカルト座標系 (x, y, z) を用い、x, y, z 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。$\rho_{\mathrm{t}} = 0, \boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}$ で、時刻 t、位置 (x, y, z) において $\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = E_y(x, t)\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{B}(x, y, z, t) = B_z(x, t)\boldsymbol{e}_z$ と与えられる平面電磁波を考える。$E_y(x, t)$ の従う波動方程式を書きなさい。さらに、その一般解を、2 回以上微分可能な 2 つの任意の関数 $f(\xi)$, $g(\eta)$ を用いて書きなさい。

(3) $E_y(x, t)$ が (2) の一般解で与えられるとき、$B_z(x, t)$ がどのように表されるか書きなさい。さらに、時刻 t、位置 (x, y, z) における電磁場のエネルギー密度 $u(x, y, z, t)$ とポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(x, y, z, t)$ を求めなさい。

問題 III 半径 a で無限に長い円柱状の導体がある。導体の外側には、導体と同軸で、内半径 $b(> a)$、外半径 $d(> b)$ で無限に長い円筒状の磁性体がある (図 III 参照)。導体円柱、磁性体円筒の中心軸を z 軸にとり、**問題 I** で用いた円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。磁性体は $b < r < d$ の領域にあり、磁性体の透磁率は r の関数として $\mu(r) = \bar{\mu}\mu_0 \left(\dfrac{r}{b}\right)^3$ で与えられている。ここで、$\bar{\mu}$ は $\bar{\mu} > 1$ を満たす定数である。磁性体のない領域の透磁率は μ_0 である。導体に $\boldsymbol{e}_z$ 方向に大きさ I の定常電流を一様に流す。

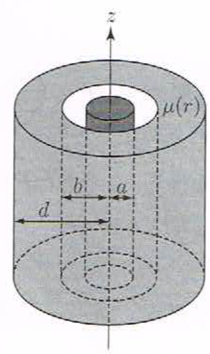

図 III

(1) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$、磁界 $\boldsymbol{H}(r, \varphi, z)$、磁化 $\boldsymbol{J}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

(2) 磁性体の内側の表面上の位置 $(r = b, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b, \varphi, z)$ と磁性体の外側の表面上の位置 $(r = d, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d, \varphi, z)$ を求めなさい。

(3) 磁性体内の位置 (r, φ, z) における磁化電流密度 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。
ヒント: **問題 I** の (3) のヒント参照。

問題 IV 半径 r_1 で単位長さあたりの巻き数 n_1 のソレノイド 1 と、半径 r_2 の単位長さあたりの巻き数 n_2 のソレノイド 2 が、中心軸を共通にして配置されている。$r_1 < r_2$ である。ソレノイド 1 の内部は透磁率 μ の磁性体で満たされている。ソレノイド 1 の外部は真空である。

(1) ソレノイド 1 に大きさ I_1 の電流を、ソレノイド 2 に大きさ I_2 の電流を同じ向きに流したとき、ソレノイド 2 の内側の空間 (中心軸からの距離が r_2 より小さい空間) の単位長さあたりに蓄えられる磁界のエネルギー $\mathcal{U}_{\mathrm{m}}$ を、磁界のエネルギー密度を用いて求めなさい。

(2) ソレノイド 1 の単位長さあたりの自己インダクタンス $\mathcal{L}_{11}$、ソレノイド 2 の単位長さあたりの自己インダクタンス $\mathcal{L}_{22}$ およびソレノイド 1 とソレノイド 2 の単位長さあたりの相互インダクタンス $\mathcal{L}_{12}$ を求めなさい。

(3) ソレノイド 1 に $I_1(t) = I_0 + \beta t$ のように時間 t とともに変化する電流を流した。ここで I_0、β は正の定数である。このとき、ソレノイド 2 に生じる 1 巻あたりの起電力の大きさを求めなさい。また、ソレノイド 2 に生じる起電力の向きはソレノイド 1 に流した電流の向きとどのような関係にあるか。