第 III 章

過去問の解答集

6　力のモーメント，角運動量，中心力

6.1

(1) 半径 r の球の全質量 M_r は

$$M : M_r = R^3 : r^3 \quad \Rightarrow \quad M_r = \frac{M}{R^3} r^3$$

となる．よって，働く力の大きさは次のように求まる．

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{GmM_r}{r^2} = \frac{Gm}{r^2}\frac{M}{R^3}r^3 = \frac{GmM}{R^3}r$$

(2) 力の x 成分は上の結果から次のようになる．

$$F_x = -|\boldsymbol{F}|\cos\theta = -\frac{GmM}{R^3}r\frac{x}{r} = -\frac{GmM}{R^3}x$$

(3) $m\ddot{x} = F_x$ より次式を得る．

$$m\ddot{x} = -\frac{GmM}{R^3}x$$

(4) 上の (3) の結果は，調和振動の方程式と同形であるから，その一般解は

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

となる．ここで $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ であり，A と δ は積分定数である．また周期は次のとおりである．

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

6.2

(1) 保存力はポテンシャルの勾配で与えられるから，次のように求められる．

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = -\left(\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\right) = -\frac{dU(r)}{dr}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) = \frac{A}{r^2}\boldsymbol{e}_r$$

ここで，$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルであり，また次の関係が用いられている．

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

(2) 角運動量は

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}$$

と書けるので，これを時間で微分すれば

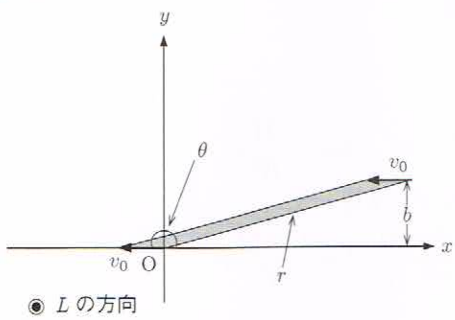
$$\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{r}} \times m\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \frac{A}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{0}$$

となる．この結果がゼロベクトルになるのは，2 つの平行なベクトルの外積によるものである．

(3) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}$ は時間によらないので，どこでも同じである．$x = +\infty$ で計算すると，$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}_0$ であるから，その大きさは

$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r}| m v_0 \sin\theta$$

となる．

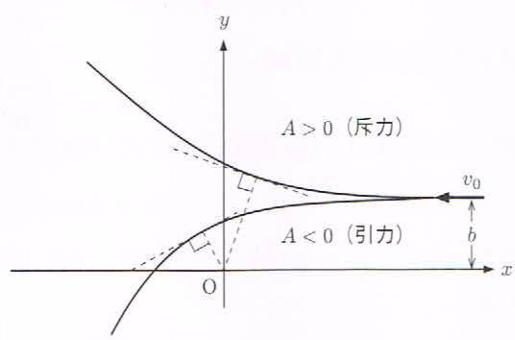


図のように $\boldsymbol{v}_0$ を平行移動させて $\boldsymbol{r}$ の始点にそろえれば，$|\boldsymbol{L}|/m$ は斜線の面積である．$|\boldsymbol{r}|\sin\theta = b$ であるから，

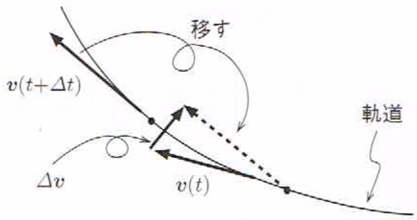
$$|\boldsymbol{L}| = m v_0 b$$

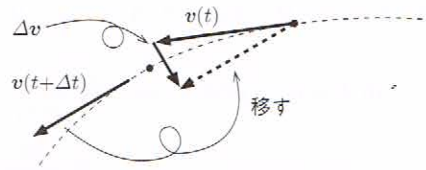
となる．向きは $\boldsymbol{r}$ から θ だけ $\boldsymbol{v}_0$ 方向へ右ネジを回したときに，そのネジの進む向き，すなわち図の ⊙ 方向 ($+z$ 方向) となる．

(4) 右図のとおり．

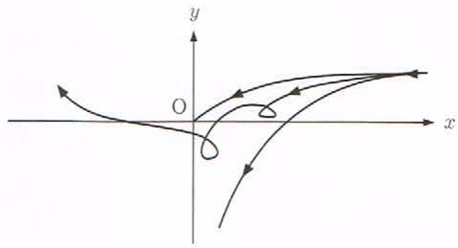


いま，Newton の第 2 法則を　$m\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{F}$,　　$\therefore \Delta\boldsymbol{v} = \dfrac{\Delta t}{m}\boldsymbol{F}$　と書く．これは「$\boldsymbol{v}$ の変化分は $\boldsymbol{F}$ の方向を向いている」という定理を表している．また，　$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$　であるから，この軌道において力は，次の図中の太い矢印の方向を向いている．





【注】軌道の形，角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ の保存などから，右図のような現象は起こらないことに注意されたい．



(5) エネルギー保存則より，全ての $\boldsymbol{r}$ で

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{A}{r} = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

である．ここで，$r \to +\infty$ において $U \to 0$ であることが用いられている．一方，角運動量保存則より，全ての $\boldsymbol{r}$ で

$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}| = mv_0 b$$

が成立する．粒子が最も原点に近づくとき，速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ に垂直である．このことは以下のように証明される．$r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$ を t で微分すれば，

$$2r\frac{dr}{dt} = 2\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

となる．原点に最も近づくときは，

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = 0$$

すなわち，$\boldsymbol{r} \perp \dot{\boldsymbol{r}}$ となる．したがって，最も近づいた時の距離を d として，角運動量の大きさは

$$|\boldsymbol{L}| = |\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}| = |\boldsymbol{r}||m\dot{\boldsymbol{r}}|\sin\theta = |\boldsymbol{r}||m\dot{\boldsymbol{r}}| = md|\dot{\boldsymbol{r}}|$$

となる．これが $mv_0 b$ に等しいから，$|\dot{\boldsymbol{r}}| = bv_0/d$ を得る．これをエネルギーの式に代入すれば

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{bv_0}{d}\right)^2 + \frac{A}{d} = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

となり，整理して次式を得る．

$$d^2 - \frac{2A}{m{v_0}^2}d - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore d = \frac{A}{m{v_0}^2} + \sqrt{\left(\frac{A}{m{v_0}^2}\right)^2 + b^2}$$

ここで根号の前の符号が正をとるのは，$d > 0$ だからである．

(6) $A = a > 0$（斥力）と $A = -a < 0$（引力）のときの d の差は以下のようになる．

$$\begin{aligned} d(A=a) - d(A=-a) &= \frac{a}{m{v_0}^2} + \sqrt{\left(\frac{a}{m{v_0}^2}\right)^2 + b^2} - \left(\frac{-a}{m{v_0}^2} + \sqrt{\left(\frac{-a}{m{v_0}^2}\right)^2 + b^2}\right) \\ &= \frac{2a}{m{v_0}^2} > 0 \end{aligned}$$

よって，$A < 0$（引力）の方が原点に近づき，差は $2a/m{v_0}^2$ である．

6.3

(1) $\boldsymbol{N} = (2,-1,1) \times (-2,1,-2) = (1,2,0)$

(2) $\boldsymbol{L}/m = (1,1,1) \times (1,-1,-2) = (-1,3,-2)$. 平面の式 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ より $-x+3y-2z = 0$

(3) ポテンシャルを $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{K}{2}(\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_2^2) + \frac{A}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$ とおくと

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\nabla_1 U = -K\boldsymbol{r}_1 + A\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}, \quad m\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\nabla_2 U = -K\boldsymbol{r}_2 - A\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}$$

6.4

(1) $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}$.
運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{e}_r$ より，$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} \times m\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times m\ddot{\boldsymbol{r}} = 0 + \boldsymbol{r} \times f(r)\boldsymbol{r}/r = 0$,
よって $\boldsymbol{L}$ は保存する．
$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r} = m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{r} = 0$, また $\boldsymbol{L}$ は定数ベクトル．$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ は $\boldsymbol{L}$ に垂直で原点を通る平面の方程式であるので，質点の運動はこの平面内に限られる．

(2) (i) $\boldsymbol{L} = (1,1,-2) \times (1,1,1) = (3,-3,0)$. (ii) $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{r} = 3(x-y) = 0$, よって $x = y$.

6.5

(1) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ より $\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \frac{d}{dt}(r\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$. 運動方程式は $m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta] = -\dfrac{k}{r^3}\boldsymbol{e}_r$.

(2) 設問 (1) より $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$. よって $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$.

(3) 設問 (1) より $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k/r^3$. h を用いて $\dot{\theta}$ を消去すると，$m\ddot{r} = (mh^2 - k)/r^3$.
よって $\ddot{r} < 0$ の条件は $mh^2 - k < 0$.

7　二体問題と多体系

7.1

(1) 天体 A, B の運動方程式はそれぞれ $m\ddot{\boldsymbol{r}}_A = \dfrac{Gm^2}{2r^2}\boldsymbol{e}_r$, $\dfrac{m}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}_B = -\dfrac{Gm^2}{2r^2}\boldsymbol{e}_r$. この 2 式より，重心の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_G = \dfrac{m\boldsymbol{r}_A + (m/2)\boldsymbol{r}_B}{m + m/2} = \dfrac{2\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B}{3}$ の満たす方程式 $\ddot{\boldsymbol{r}}_G = 0$,
相対座標ベクトルの満たす方程式 $\dfrac{m}{3}\ddot{\boldsymbol{r}} = -\dfrac{Gm^2}{2r^2}\boldsymbol{e}_r$ を得る．

(2) $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}_G$ の表式を $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ について解くと，$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_G - \boldsymbol{r}/3$, $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_G + 2\boldsymbol{r}/3$.

(3) 全角運動量は $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_A \times m\dot{\boldsymbol{r}}_A + \boldsymbol{r}_B \times (m/2)\dot{\boldsymbol{r}}_B = (3m/2)\boldsymbol{r}_G \times \dot{\boldsymbol{r}}_G + (m/3)\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$. $\dot{\boldsymbol{r}}_G = 0$ であるから $\boldsymbol{L} = (m/3)\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$. よって $\dot{\boldsymbol{L}} = (m/3)(\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}) = 0 - \boldsymbol{r} \times (Gm^2/2r^2)\boldsymbol{e}_r = 0$.

7.2

(1) $m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 - \ell)$, $m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2 - \ell)$.

(2) 設問 (1) の 2 式より $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$, $\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)k(x_1 - x_2 - \ell)$. 重心座標は $x_{\mathrm{G}} = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2)$ であるから $\ddot{x}_{\mathrm{G}} = 0$. また $\mu\ddot{x} = -k(x - \ell)$.

(3) $y = x - \ell$ とおくと $\ddot{y} = -(k/\mu)y$, この一般解は $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ $(\omega = \sqrt{k/\mu})$. x の一般解は $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \ell$.

(4) 2 体系に撃力が加わった直後の重心の速度 $\dot{x}_{\mathrm{G}}(0)$ は，$(m_1 + m_2)\dot{x}_{\mathrm{G}}(0) = \bar{F}$. 初期位置は $x_{\mathrm{G}}(0) = \frac{m_1\ell}{m_1+m_2}$ より $x_{\mathrm{G}}(t) = \frac{\bar{F}}{m_1+m_2}t + \frac{m_1\ell}{m_1+m_2}$. 一方，$m_1\dot{x}_1(0) = 0$, $m_2\dot{x}_2(0) = \bar{F}$ より $\dot{x}(0) = \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = -\bar{F}/m_2$. 設問 (3) の一般解を考えると $\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$. 初期条件から $x(0) = A + \ell = \ell$, $\dot{x}(0) = B\omega = -\bar{F}/m_2$. よって $x(t) = -\frac{\bar{F}}{m_2\omega}\sin\omega t + \ell$.

7.3

(1) $m_1\ddot{x}_1 = -\dfrac{k}{(x_1 - x_2)^3}$, $m_2\ddot{x}_2 = \dfrac{k}{(x_1 - x_2)^3}$.

(2) 設問 (1) の 2 式より，$\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_1}\right)\dfrac{k}{(x_1 - x_2)^3}$. 換算質量 $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ を用いると $\mu\ddot{x} = -k/x^3$.

(3) 設問 (2) の解の両辺に $\dot{x}$ をかけて t で積分すると (エネルギー積分), $\dfrac{1}{2}\mu\dot{x}^2 = -\displaystyle\int \frac{k}{x^3}dx = \dfrac{k}{2x^2} + C$. 初期条件より $C = \dfrac{1}{2}\mu v_0^2 - \dfrac{k}{2\ell^2}$. よって $\dot{x}^2 = v_0^2 + \dfrac{k}{\mu}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\ell^2}\right)$.

(4) $\dot{x}^2 > 0$ が $x \to \infty$ でも成り立つことから $v_0^2 > k/(\mu\ell^2)$.

7.4

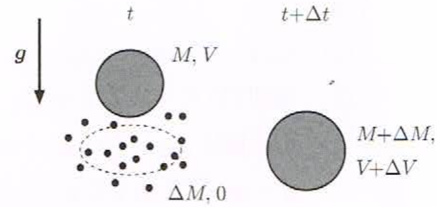
(1) $x_G = \dfrac{mx_1 + Mx_2}{m + M}$.　(2) $(m + M)\ddot{x}_G = 0$.

(3) $\dot{x}_G = C$ であるが，ヒントより $C = 0$. ゆえに $x_G = C'$, よって $mx_1^0 + Mx_2^0 = mx_1' + Mx_2'$.

(4) 設問 (3) の解に $x_1^0 = x_2^0 - \ell/2$, $x_1' = x_2' + \ell/2$ を代入すると $x_2' - x_2^0 = -\dfrac{m}{m + M}\ell$. よって $|x_2' - x_2^0| = \dfrac{m}{m + M}\ell$.

7.5

(1) 1 次元問題である．鉛直下方の速度を正にとる．$\dot{P} = F$ (P は全運動量，F は外力の合力) を短い時間間隔 Δt で積分して得られる式 $\Delta P = F\Delta t$ を用いる．図のように t と $t + \Delta t$ の間に，質量 M, 速度 V の雨粒が，静止している質量 ΔM の水蒸気をくっつけて，質量 $M + \Delta M$, 速度 $V + \Delta V$ の雨粒となるものとする．これを全系として，その全運動量の変化は ΔM, ΔV の 1 次までとって，



$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t)$$
$$= (M+\Delta M)(V+\Delta V) - (M\cdot V + \Delta M\cdot 0)$$
$$\simeq M\cdot\Delta V + \Delta M\cdot V.$$

(2) 一方，$F\Delta t = Mg\Delta t$ でよく（$(M+\Delta M)g\Delta t$ としても違いは $g\Delta M\Delta t$ であり，これは 2 次の微少量），結局

$$M\cdot\Delta V + \Delta M\cdot V = Mg\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad M\frac{\Delta V}{\Delta t} = Mg - \frac{\Delta M}{\Delta t}V.$$

$\Delta t \to 0$ として，$M\dot{V} = Mg - \dot{M}V.\ \Rightarrow\ M\dot{V} + \dot{M}V = Mg\ \Rightarrow\ \dfrac{dP}{dt} = Mg$

(3) 両辺を M で割って変数分離し，積分する．

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = g - \frac{\dot{M}}{M}V = g - \alpha V \quad \Rightarrow \frac{dV}{g-\alpha V} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dV}{g-\alpha V} = \int dt$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{dV}{V - \frac{g}{\alpha}} = -\alpha\int dt \quad \Rightarrow \quad \log\left|V - \frac{g}{\alpha}\right| = -\alpha t + C,$$

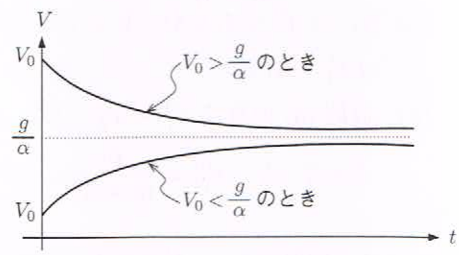
$t=0$ で $V=V_0$より $C = \log\left|V_0 - \dfrac{g}{\alpha}\right|$. よって

$$\log\left|\frac{V-\frac{g}{\alpha}}{V_0-\frac{g}{\alpha}}\right| = -\alpha t \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{V-\frac{g}{\alpha}}{V_0-\frac{g}{\alpha}}\right| = \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \frac{V-\frac{g}{\alpha}}{V_0-\frac{g}{\alpha}} = \pm\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

$t=0$ で　左辺=+1, よって + をとる．結局 $V = \left(V_0 - \dfrac{g}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\alpha t} + \dfrac{g}{\alpha}$.

(4) 図を参照．

V_0 が g/α より大きいか小さいかによって図のような振る舞いになる．いずれの場合も速度 V は $V_\infty = g/\alpha$ に近づく．この結果の物理的意味を，各自，考察しなさい．



7.6

鎖全体 (机から離れている部分と机の上に溜まっている部分の和) の全運動量の時間変化の式を用いる．一つ一つの鎖がお互いに及ぼしあう力は内力なので，全運動量の式には入らない．

(1) $v = gt$, $x = \dfrac{1}{2}gt^2$ から，t を消去して，$v^2 = 2gx$.

(2) 机と離れている部分は速度 v で運動していて，机の上に溜まった部分は静止しているので，$P = \rho(L-x)v + \rho x 0 = \rho(L-x)v$.

(3) 全運動量の時間変化率は，全外力に等しいと言う式を使う．全外力は鎖全体に働く重力と

机からの抗力である．

$$\frac{dP}{dt} = \rho L g + F \qquad (*)$$

(4) 前問の (3) と (2) と (1) から

$$\begin{aligned} F &= \frac{dP}{dt} - \rho L g = \frac{d\Big(\rho(L-x)v\Big)}{dt} - \rho L g \\ &= -\rho \dot{x} v + \rho(L-x)\dot{v} - \rho L g \\ &= -\rho v^2 - \rho x g = -3\rho x g \end{aligned}$$

一方，全長 x の鎖が静かに机の上に置いてあるときの抗力は $\rho g x$ であるから，それの 3 倍の抗力が働いている．$F = -\rho g x - 2\rho g x$ と書けば，$-2\rho g x$ が上向きの抗力 N で (マイナスは N が上向きであることを意味する)，この抗力が，机に衝突した鎖の部分の運動量を瞬時にゼロにしているのである．

(参考 1); 効力 N は次のように別の考えで求められる．鎖が長さ x だけ机の上に溜まっているとき，時間間隔 dt の間に机に衝突して速度を失う部分の速度は $v = \sqrt{2gx}$，質量は $dm = \rho dx$．よって $t \sim t + dt$ の間に失われる運動量は $dP = P(t+dt) - P(t) = 0 - (dm)v = 0 - (\rho dx)v = -\rho v dx$．これが力積 $N dt$ に等しいので，$N dt = dP = -(\rho dx)v$．よって $N = -\rho(dx/dt)v = -\rho v^2$．この問題では $v^2 = 2gx$ であるから $N = -2\rho g x$．

(参考 2); エネルギーはどうなっているの？この問題を考えるために，(*) の両辺に $P dt = \rho(L-x)v dt$ を掛けて，$t = 0$ から t まで積分する．$v dt = dx$ である．さらに，$t = 0$ を手を離した時刻とすると，$t = 0$ では $x = 0$，$v = 0$ であるから $P(t = 0) = 0$．$P(t)$ を P，$x(t) = x$ と書いて

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{dt} P dt = (\rho L g + F)\rho(L-x) v dt = (\rho L g + F)\rho(L-x) dx, \\ &\Rightarrow \quad P dP = (\rho L g - 3\rho g x)\rho(L-x) dx, \\ &\Rightarrow \quad \int_0^P P dP = \int_0^x dx(\rho L g - 3\rho g x)\rho(L-x) dx, \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}P^2 = \rho^2 g \int_0^x dx\Big(L - 3x\Big)\rho(L-x) dx = \rho^2 g x (L-x)^2 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho^2 (L-x)^2 v^2 = \rho^2 g x (L-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho(L-x) v^2 = \rho g x (L-x) \end{aligned}$$

(この計算は (*) の両辺に $v dt$ を掛けて積分する方が，仕事積分が現れるのでわかりやすいであろう) この最後の式の右辺を次のように変形する．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\rho(L-x)v^2 = \rho g\left(\frac{x-L}{2} + \frac{x+L}{2}\right)(L-x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho(L-x)v^2 + \rho g\frac{(L-x)^2}{2} = \rho g\frac{L^2}{2} - \rho g\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

左辺第 1 項は運動している鎖の部分の運動エネルギー，第 2 項は机から離れている鎖のポテンシャルエネルギー (その部分の重心が机から測って $(L-x)/2$ の高さの位置にあることに注意)，右辺第 1 項が $t=0$ でのポテンシャルエネルギー (運動エネルギーはゼロ) なので，最後の右辺第 2 項がなければエネルギー保存則となっている．この余計な項 $-\rho g x^2/2$ は負で，机に衝突する鎖の輪が瞬時に止まるために失われる (熱などの形で別のエネルギー形態で存在するのではあるが) エネルギーである．

7.7

(1) $\dfrac{d}{dt}(mv)=0$ (噴射された物質の運動量は 0 であるから，系の全運動量は mv)

(2) $mv=m_0v_0$　(3) $m=m_0-\mu t$

(4) $v=\dfrac{m_0v_0}{m}=\dfrac{m_0v_0}{m_0-\mu t}$ を積分すると，$x=0+\displaystyle\int_0^t \frac{m_0v_0}{m_0-\mu t'}dt'=\frac{m_0v_0}{\mu}\log\frac{m_0}{m_0-\mu t}$

8　慣性モーメント

8.1

(1) 点 (x,y) の位置にある $dm=\sigma dxdy$ の微小質量を考える．

$$I^{(A)}=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x^2+y^2)\sigma dxdy=2a\sigma(x^3/3)\Big|_{-a/2}^{a/2}=a^4\sigma/6=M_Aa^2/6$$

ここで，$M_A=a^2\sigma$ を用いた．

(2)

$$I^{(B)}=\sigma\int_0^{a/2}\int_0^{a/2}(x^2+y^2)dxdy=2(a/2)\sigma(x^3/3)\Big|_0^{a/2}=\sigma a^4/24=M_Ba^2/6$$

ここで，$M_B=\sigma a^2/4$ を用いた．(もちろん並行軸の定理などを駆使して求めてもよい．)

(3) $M_A=4M/3$, $M_B=M/3$ であるから，

$$I=I^{(A)}-I^{(B)}=(M_A-M_B)a^2/6=(4/3-1/3)Ma^2/6=Ma^2/6.$$

8.2

(1) $I=\displaystyle\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}r^2\sigma rdrd\theta=\sigma\int_0^R r^3dr\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta=\sigma\frac{R^4}{4}\cdot 2\alpha=\sigma\alpha\frac{R^4}{2}.$

(2) 板の全質量は $M=\displaystyle\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}\sigma rdrd\theta=\sigma\int_0^R rdr\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta=\sigma\alpha R^2$. $x=r\cos\theta$ より

$$x_{\rm G}=\frac{1}{M}\int_0^R\int_{-\alpha}^{\alpha}x\sigma rdrd\theta=\frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2dr\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta d\theta=\frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3}\Big[\sin\theta\Big]_{-\alpha}^{\alpha}=\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}.$$

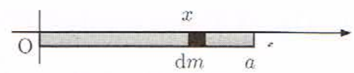
対称性より $y_{\rm G}=0$ であるから $(x_{\rm G},y_{\rm G})=\left(\dfrac{2R\sin\alpha}{3\alpha},0\right)$.

(3) 平行軸の定理より，$I_G=I-Mx_G^2=\sigma\alpha R^4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{4\sin^2\alpha}{9\alpha^2}\right)$.

8.3

(1) $I=\int dI$,　$dI=x^2dm=x^2\sigma dx$,　(σ : 線密度)

$$I = \int_0^a x^2 \sigma dx = \sigma \frac{x^3}{3}\bigg|_0^a = \frac{\sigma a^3}{3} = \frac{\sigma a}{3} a^2 = \frac{m}{3} a^2$$



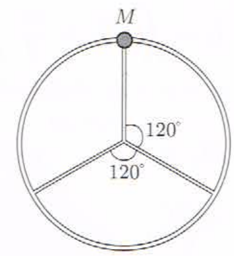
または, $I = I_G + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 = \frac{1}{3}ma^2$

(2) 3本の棒の慣性モーメント： $3 \times \frac{m}{3}a^2$

円環の慣性モーメント： ma^2（円環はすべての部分が中心から等距離 a にある.）

M の慣性モーメント： Ma^2

$I_1 = 3 \times \frac{m}{3}a^2 + ma^2 + Ma^2 = (2m+M)a^2$



(3) 中心力で M を移動させたので，全体の角運動量は保存する.

はじめの角運動量 $= I_1\omega_1 = (2m+M)a^2\omega_1$

あとの角運動量 $= I_2\omega_2$

ここで，$I_2 = 2ma^2$ である.（M は中心にあるので，I_2 には効かない.）

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ より，$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{(2m+M)a^2}{2ma^2}\omega_1 = (1+\frac{M}{2m})\omega_1$

8.4

(1) $I_z = \frac{2}{5}(Ma^2 + mb^2)$

(2) 球2に対して平行軸の定理を用いると $I_x = \frac{2}{5}(Ma^2+mb^2) + m(a+b)^2$

(3) $z_G = \frac{M \cdot 0 + m(a+b)}{M+m} = \frac{m(a+b)}{M+m}$

(4) 平行軸の定理より $I_x = I_G + (M+m)(0-z_G)^2$. よって $I_G = I_x - \frac{m^2}{M+m}(a+b)^2 = \frac{2}{5}(Ma^2+mb^2) + \frac{Mm}{M+m}(a+b)^2$

8.5

(1) リング上の点は全て回転軸から同じ a の距離にあるから，$I = \int |\boldsymbol{r}_\perp|^2 dm = a^2 \int dm = Ma^2$

(2) 面密度を σ とすると，$M = 4\pi a^2 \sigma$. 図のリングの面積は $(2\pi a \sin\theta)ad\theta$ で，半径は $a\sin\theta$ であるから，この部分の慣性モーメント dI は (1) の結果を用いて，$dI = \sigma(2\pi a\sin\theta)ad\theta(a\sin\theta)^2 = \sigma 2\pi a^4 \sin^3\theta d\theta$. これを $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で積分する. $\cos\theta = y$ とおけば $\sin\theta d\theta = -d(\cos\theta)$. こうして $I = \int dI = -\sigma 2\pi a^4 \int_1^{-1}(1-y^2)dy = (8\sigma/3)\pi a^4 = 2Ma^2/3$.

8.6

(1) $x_{\mathrm{G}} = \frac{m\cdot 0 + m\cdot 4a + 2m\cdot 0}{m+m+2m} = a$, $y_{\mathrm{G}} = \frac{m\cdot 0 + m\cdot 0 + 2m\cdot 2a}{m+m+2m} = a$. よって $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}}) = (a, a)$.

(2) $I_{\mathrm{A}} = m\cdot 0^2 + m\cdot(4a)^2 + 2m\cdot(2a)^2 = 24ma^2$.

(3) 平行軸の定理より $I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{G}} + (m+m+2m)(a^2+a^2)$. これより $I_{\mathrm{G}} = 16ma^2$.

8.7

(1)　まず $z \sim z+dz$ の薄い円板を考える．半径は $\sqrt{a^2-z^2}$, 面密度 $\sigma = \rho dz$, 慣性モーメント dI_z は $dI_z = \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r^2 dm = (\rho dz)\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r^2 2\pi r dr = \dfrac{\pi(\rho dz)}{2}(a^2-z^2)^2$.
$I_z = \int_0^a dI_z = \dfrac{\pi\rho}{2}\int_0^a (a^2-z^2)^2 dz = \dfrac{4\pi\rho}{15}a^5 = \dfrac{2Ma^2}{5}$. 途中 $\rho = \dfrac{M}{2\pi a^3/3}$ を使った．

(2)　$x \sim x+dx$ の薄い半円板の半径は $\sqrt{a^2-x^2}$, 慣性モーメント dI_x は
$dI_x = \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} r^2 dm = (\rho dx)\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} r^2 \pi r dr = \dfrac{\pi(\rho dx)}{4}(a^2-z^2)^2$. $I_x = \int_{-a}^a dI_x = \dfrac{2Ma^2}{5}$.

(*)　別解: 半球を 2 つ合わせた半径 a, 質量 $2M$ の球を考える．その慣性モーメントを求めると $I_z = I_x = \frac{4Ma^2}{5}$. 半球の慣性モーメントはその $\frac{1}{2}$. なお，半球は薄板ではないから「薄板の定理」を使って I_z から I_x を求めると不正解となるので注意.

(3)　$z \sim z+dz$ の円板の質量は $dm = \pi(\rho dz)(a^2-z^2)$. 重心の高さ h は $h = \dfrac{1}{M}\int_0^a z dm = \dfrac{\pi\rho}{M}\int_0^a z(a^2-z^2)dz = \dfrac{3}{8}a$. 平行軸の定理より $I_G = I_x - Mh^2 = \frac{83}{320}Ma^2$.

9　剛体のつりあい，固定軸周りの回転

9.1

(1) 水平方向; $T\sin\theta - f = 0$,　　鉛直方向; $T\cos\theta + S - Mg = 0$.

(2) $MgL\cos\pi/6 - S2L\cos\pi/6 - f2L\sin\pi/6 = 0$,　つまり　$\sqrt{3}(Mg-2S)/2 - f = 0$ ……　(*)

(3) (1) から T を消去して，$f\cos\pi/6 + (S-Mg)\sin\pi/6 = 0$. つまり $\sqrt{3}f + (S-Mg) = 0$.
(2) から $S = Mg/2 - f/\sqrt{3}$. これを第 1 式に代入して，$\sqrt{3}f + (Mg/2 - f/\sqrt{3} - Mg) = 0$.
こうして $f = (Mg/2)/(\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}) = (\sqrt{3}/4)Mg$.

(4) θ は一般の角度とする．(1) から T を消去して，$f = \tan\theta(Mg-S)$. この式と (2) の (*) から，$\tan\theta/\sqrt{3} = \alpha$ と置いて，$S = (1/2-\alpha)/(1-\alpha)Mg$, $f = (\sqrt{3}/2)\alpha/(1-\alpha)Mg$.
滑らない条件は，$f/S \le \mu_0$. よって μ_0 の下限は，$(\sqrt{3}/2)\alpha/(1/2-\alpha)$.　$\theta = \pi/6$ のときは $\alpha = 1/3$ なので，$\mu_0 \ge \sqrt{3}$.
(注); 角度 θ の最大値は $\pi/3$. このとき糸が棒と一直線になる．よって $0 \le \theta \le \pi/3$ で考えると，$0 < \alpha < 1/\sqrt{3}$. この範囲では，$f > 0$, (もちろん $S > 0$.) θ をこの範囲に固定して μ_0 を減少させていくと，上で得た下限で棒は滑り始める．棒が接触している水平面上の点は右方向へ滑りだす．μ_0 を固定して θ を変えたとき (符号を含めて)，どのようになるか考えてみると面白い.

9.2

(1) $I_0 = \int x^2 dM = \int x^2 \sigma dx = \dfrac{\ell^3}{3}\sigma = \dfrac{\ell\sigma}{3}\ell^2 = \dfrac{M}{3}\ell^2$ ただし，σ は質量の線密度である．

(2) $I = I_0 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)\ell^2$

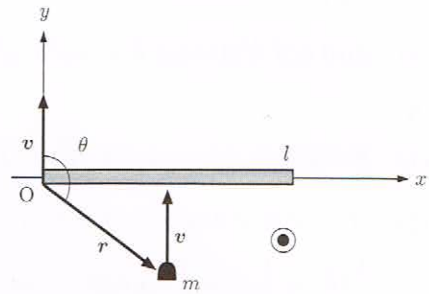
(3) $\boldsymbol{L}_{前} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$；　方向は $\odot$ の方向．$\boldsymbol{L}_{前}$ の大きさは

$L_{前} = |\boldsymbol{r}| \cdot |m\boldsymbol{v}| \sin\theta = mv|\boldsymbol{r}|\sin\theta = mv\frac{\ell}{2}$.

これが衝突前の $\boldsymbol{L}_{前}$ の z 成分である．

(4) $\boldsymbol{L}_{後}$ も $\odot$ 方向を向いていて，その大きさは $I\omega$ である．

よって $(\boldsymbol{L}_{後})_z = \left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)\ell^2\omega$.



(5) 弾丸と棒の間の力は全系で考えると内力である．よって，$\boldsymbol{L}_{後} = \boldsymbol{L}_{前}$．したがって，$|\boldsymbol{L}_{後}| = |\boldsymbol{L}_{前}|$ より

$$\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)\ell^2\omega = mv\frac{\ell}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{mv}{2\left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)\ell}$$

9.3

おもり m_1，m_2 と滑車の運動方程式は

$$m_1; \qquad m_1\ddot{y} = m_1 g - T_1 \tag{A}$$

$$m_2; \qquad m_2\ddot{y} = -m_2 g + T_2 \tag{B}$$

$$\text{滑車}; \qquad I\ddot{\theta} = T_1 a - T_2 a \tag{C}$$

$$y \text{ と } \theta \text{ の関係}; \qquad y = a\theta + \text{定数，これから} \qquad \ddot{y} = a\ddot{\theta} \tag{D}$$

(A) (B) (D) を (C) に代入すると

$$I\frac{\ddot{y}}{a} = (-m_1\ddot{y} + m_1 g)a - (m_2\ddot{y} + m_2 g)a$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}\right)\ddot{y} = (m_1 - m_2)g,$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{a^2}}g = \frac{(m_1 - m_2)a^2}{(m_1 + m_2)a^2 + I}g$$

(参考); (C) から

$$T_1 - T_2 = I\frac{\ddot{\theta}}{a} = I\frac{\ddot{y}}{a^2} = \frac{(m_1 - m_2)I}{(m_1 + m_2)a^2 + I}g$$

この T_1 と T_2 の違いで滑車を回転させているのである．糸の張力は滑車に巻きついた部分で連続的に変化している (不連続であるとそこで糸が切れる！).

9.4

(1)　$I_G = 2\int_0^{\ell} x^2 \rho dx = \frac{2}{3}\rho\ell^3 = \frac{M}{3}\ell^2$　(ここで $M = 2\rho\ell$).

(2)　平行軸の定理より $I = M(a^2 - \ell^2) + I_G = M\left(a^2 - 2\ell^2/3\right)$.

(3) $I\ddot{\theta} = -Mg\sqrt{a^2 - \ell^2}\sin\theta$. [注: 円周から棒にはたらく垂直抗力は O の周りの力のモーメントがゼロであることに注意.] 設問 (2) で求めた I を代入すると $(a^2 - 2\ell^2/3)\,\ddot{\theta} = -g\sqrt{a^2 - \ell^2}\sin\theta$.

(4) $\sin\theta \approx \theta$ を用いると $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$, $\omega^2 = \dfrac{g\sqrt{a^2 - \ell^2}}{a^2 - 2\ell^2/3}$. 周期は $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^2 - 2\ell^2/3}{g\sqrt{a^2 - \ell^2}}}$.

9.5

(1) 棒の質量は $M = \sigma\ell$ であるから $I\ddot{\theta} = N = \dfrac{\ell}{2}Mg\cos\theta = \dfrac{1}{2}\sigma\ell^2 g\cos\theta$.

(2) (1) の方程式の両辺に $\dot{\theta}$ をかけると $\dfrac{1}{2}I\dfrac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) = \dfrac{1}{2}\sigma\ell^2 g\cos\theta\dot{\theta}$. 時間 t で積分すると $\dfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{2}\sigma\ell^2 g\displaystyle\int\cos\theta d\theta = \dfrac{1}{2}\sigma\ell^2 g\sin\theta + C$. $\theta = 0$ のとき $\dot{\theta} = 0$ より $C = 0$, よって $\dot{\theta} = \sqrt{\sigma\ell^2 g\sin\theta/I}$.

(3) 点 A 周りの角運動量の保存則から $I\omega + 0 = I\omega' + \ell mv$, よって $\omega' = \omega - \ell mv/I$.

9.6

(1) $I = ma^2$　(2) $|dF| = \mu' gdm$

(3) $N = \displaystyle\int adF = -\mu' ga\int dm = -\mu' mga$. よって $I\dot{\omega} = -\mu' mga$ (ゆえに $\dot{\omega} = -\mu' g/a$)

(4) 設問 (3) の式より $\omega = \omega_0 - \dfrac{\mu' mga}{I}t$. 静止までの時間は $t = \dfrac{I}{\mu' mga}\omega_0$ $\left(\text{ゆえに}\dfrac{\omega_0 a}{\mu' g}\right)$

9.7

(1) 棒が円筒から受ける抗力の水平成分を R_x, 鉛直成分を R_y とすると, 力の合力のつりあいより $R_x = 0$, $R_y = Mg + mg$. 抗力の大きさを R とすると $R_y = R$ であるから, $R = (M + m)g$.

(2) 棒の中心を C′ とすると, 題意より C′D$= a\alpha$, DB$= \ell - a\alpha$. 点 D のまわりの力のモーメントは $Mga\alpha\cos\alpha - mg(\ell - a\alpha)\cos\alpha = [Ma\alpha - m(\ell - a\alpha)]g\cos\alpha = 0$.

(3) 設問 (2) より $m = \dfrac{Ma\alpha}{\ell - a\alpha}$. 設問 (1) の結果に代入すると $R = \left(1 + \dfrac{a\alpha}{\ell - a\alpha}\right)Mg = \dfrac{\ell}{\ell - a\alpha}Mg$.

10　剛体の平面運動

10.1

(1) $\sigma = \dfrac{m}{l}$ とすると $I_G = \displaystyle\int_{-l/2}^{l/2} x^2\sigma dx = \dfrac{ml^2}{12}$. $L'_z = I_G\omega = \frac{1}{12}ml^2\omega$.

(2) $L_G = -(\text{垂線の長さ } h) \times mv_G$. $h = \min(x^2 + y^2) = \min[x^2 + (ax + b)^2]$. $f(x) = x^2 + (ax + b)^2 = (a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2$ とおくと $f' = 2(a^2 + 1)x + 2ab = 0$ のとき $x = -\frac{ab}{a^2+1}$. よって $\min f(x) = f(-\frac{ab}{a^2+1}) = \frac{b^2}{a^2+1}$ より $h = \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}$. $L_G = -\frac{mbv_G}{\sqrt{a^2+1}}$.

(3) $L_z = L_G + L'_z = \frac{1}{12}ml^2\omega - \frac{mbv_G}{\sqrt{a^2+1}}$.

10.2

(1) $(ma^2/2)\ddot{\phi} = Fa$

(2) ヒントの $\boldsymbol{r}$ を原点 O から G にひいたベクトル $\overrightarrow{OG}$ と見なせばよい．$r = |\overrightarrow{OG}|$ であるから，r は時間によらないのでその時間微分はゼロ．よって $\ddot{\boldsymbol{r}} = -r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ となる．こうして，重心 G の $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向の運動方程式は，$m\ddot{\boldsymbol{r}}$=外力 の両辺の θ 方向の成分を取って，$m(R-a)\ddot{\theta} = F - mg\sin\theta$.

(3) $(R-a)\dot{\theta}$.

(4) $a\dot{\phi}$

(5) $(R-a)\dot{\theta} + a\dot{\phi} = 0$

(6) (5) から，$a\ddot{\phi} = -(R-a)\ddot{\theta}$. (1) から $F = (ma/2)(ma/2)\ddot{\phi} = -(m/2)(R-a)\ddot{\theta}$. これを (3) の結果に代入して，$m(R-a)\ddot{\theta} = -(m/2)(R-a)\ddot{\theta} - mg\sin\theta$. こうして，$(3m/2)(R-a)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$.

(7) $(3m/2)(R-a)\ddot{\theta} = -mg\theta$.　　よって　$\ddot{\theta} = -(2g/3(R-a))\theta$, 周期は $2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{3(R-a)/2g}$.

10.3

(1) 円板の重心は，接触点に垂直な方向に運動しない．向心力は $-M(\ell+a)\dot{\theta}^2$ で与えられるから，つりあいの式は $-M(\ell+a)\dot{\theta}^2 = -Mg\cos\theta + N$.

(2) 円板の重心のテーブルに沿った速度は $(\ell+a)\dot{\theta}$ であるから，運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}M(\ell+a)^2\dot{\theta}^2$. エネルギー保存則 $E = K + Mg(\ell+a)\cos\theta = Mg(\ell+a)$ から $\dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{2g(1-\cos\theta)}{\ell+a}}$.

(3) 設問 (1), (2) より $N = Mg\cos\theta - M(\ell+a)\dot{\theta}^2 = 3Mg\cos\theta - 2Mg \geq 0$. テーブルから離れるとき $N = 0$ であるから $\cos\theta_0 = 2/3$.

(4) 初期位置からの接触点の移動距離は，テーブル上を $\ell\theta$, 円板上を $a(\phi-\theta)$ である ($\phi = \theta$ のとき，接触点は円板上を移動しないことに注意)．両者が等しいことから $\dot{\phi} = \dfrac{\ell+a}{a}\dot{\theta}$.
別解: テーブルに沿った円板の重心の速度は $(\ell+a)\dot{\theta}$, 重心から見た円板表面の速度は $a\dot{\phi}$. 接触点が滑る速度 $(\ell+a)\dot{\theta} - a\dot{\phi} = 0$ (過去問 10.2 を参照).

(5) 円板の重心まわりの慣性モーメントは $I = \displaystyle\int_0^a r^2 2\pi r\sigma dr = 2\pi\sigma\frac{a^4}{4} = \frac{1}{2}Ma^2$. エネルギー保存則 $E = \frac{1}{2}M(\ell+a)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + Mg(\ell+a)\cos\theta = Mg(\ell+a)$ に設問 (4) の結果を代入すると $\dot{\theta}^2 = \dfrac{4g(1-\cos\theta)}{3(\ell+a)}$. よって垂直抗力は $N = Mg\cos\theta - M(\ell+a)\dot{\theta}^2 = (7/3)Mg\cos\theta - (4/3)Mg \geq 0$. 円板が離れる角度で $N = 0$ であるから $\cos\theta_r = 4/7$.

10.4

(1) $\bar{F} = \Delta P = MV$

(2) $L' - 0 = (h-a)\bar{F} = (h-a)MV$

(3) 球の角速度を ω とすると $L' = I_G\omega$. 滑らないことから $\omega = V/a$ であるから，設問 (2) の解より $h = a + \dfrac{I_G}{Ma}$.

(4) 球の回転の軸方向に z 軸を取る．z と $z + dz$ の間の円板 (半径 $\sqrt{a^2-z^2}$) の慣性モーメ

ントを dI_z とすると

$$dI_z = \int (x^2+y^2)dm = \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r^2(\rho dz)2\pi r dr = \frac{\pi}{2}\rho(a^2-z^2)^2 dz,$$

$$I_G = \int_{-a}^{a} dI_z = \int_0^a \pi\rho(a^2-z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 = \frac{2}{5}Ma^2.$$

途中 $M = 4\pi\rho a^3/3$ を用いた．

別解として，3 次元極座標を用いると

$$I_G = \int (x^2+y^2)dm = \int_0^a \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2 \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi,$$

または，対称性から

$$I_G = \int (x^2+y^2)dm = \frac{2}{3}\int (x^2+y^2+z^2)dm = \frac{2}{3}\int_0^a r^2\rho 4\pi r^2 dr,$$

等からも計算できる．求めた I_G を設問 (3) の解に代入すると $h = \frac{7}{5}a$.

(＊) 撃力を加えた前後の運動を考えるとき，球と水平面間の摩擦力は無視できることに注意されたい．摩擦力は有限の大きさのため，微小時間の力積には寄与しない．

10.5

(1) $\boldsymbol{L}'_{\mathrm{A}} = I_G \frac{v}{a}\boldsymbol{k}$.

(2) 円板の角速度ベクトルは $\boldsymbol{\omega} = \frac{v'}{a}\boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{L}'_{\mathrm{B}} = I_G\boldsymbol{\omega} = I_G\frac{v'}{a}\boldsymbol{k}$.

(3) $\boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{A})} = M(a-h)\boldsymbol{j}\times(-v\boldsymbol{i}) = M(a-h)v\boldsymbol{k}$. $\boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{B})} = Mav'\boldsymbol{k}$.

(4) $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{B})} - (\boldsymbol{L}'_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{A})}) = \left[I_G\frac{v'-v}{a} + M\{av' - (a-h)v\}\right]\boldsymbol{k}$.

(5) O に関する力のモーメントは $\boldsymbol{N} = 0$, したがって $\Delta\boldsymbol{L} = 0$.

(6) $v' = \dfrac{I_G + M(a-h)a}{I_G + Ma^2}v$.

10.6

(1) $x = a\theta + \mathrm{const}$

(2) $M\ddot{x} = T - F$,　(*)　　　$m\ddot{x} = mg - T$　　(**)

(3) $I\ddot{\theta} = Ta + Fa$

(4) (1) から $\ddot{x} = a\ddot{\theta}$　(2) の (*)×a+(3) と (**) から

$$2Ta = aM\ddot{x} + I\ddot{\theta} = \left(aM + \frac{I}{a}\right)\ddot{x} = 2a(mg - m\ddot{x}),$$

$$\ddot{x} = \frac{2amg}{Ma + \frac{I}{a} + 2am} = \frac{2amg}{\frac{3Ma}{2} + 2am} = \frac{g}{1 + \frac{3M}{4m}}.$$

10.7

(1) 「全系の重心は部分系の重心の重心」という定理を用いる．棒のみの重心は原点で，そこに棒の質量 M を集中させる．弾丸の位置は $x = L$ でそこに質量 M がある．この仮想的な系の重心を求めればよい．$X = (0M + LM)/(M+M) = L/2$.

(2) I_1 は平行軸の定理から求める．$I_1 = ML^2/3 + M(L/2)^2 = (7/12)ML^2$． $I_2 = M(L/2)^2$．こうして $I = I_1 + I_2 = (7/12 + 1/4)Ml^2 = (5/6)ML^2$．
(別解); (棒+弾丸) の全系に対して並行軸の定理を用いてもよい．O を通り棒に垂直な軸の周りの全系の慣性モーメントを $\tilde{I}$ とすると，並行軸の定理から，$\tilde{I} = I + 2M(L/2)^2$．ところが，$\tilde{I} = ML^2/3 + LM^2 = 4ML^2/3$ 　であるから，$I = \tilde{I} - 2M(L/2)^2 = 4ML^2/3 - 2M(L/2)^2 = (4/3 - 1/2)ML^2 = (5/6)ML^2$．

(3) 衝突の際の力は内力なので, 衝突前後の全運動量が保存する．$2M\dot{X} = 0$，$2M\dot{Y} = MV_0$．これから，$(\dot{X}, \dot{Y}) = (0, V_0/2)$．

(4) 重心 G に関して弾丸が衝突前に持っていた角運動量は，$MV_0L/2$．棒は静止していたので角運動量ゼロ．力は内力なので重心のまわりの角運動量は保存する．よって，$I\dot{\theta} = 0 + MV_0L/2$．これから，$\dot{\theta} = MLV_0/(2I) = (3/5)(V_0/L)$．

(5) 座標が $((L/2)+a, 0)$ である点の衝突直後の速度の y 成分は，$\dot{Y} + a\dot{\theta} = (1/2)V_0 + (3/5)(aV_0/L)$．これがゼロとなるのが静止条件．この条件を満たすためには，$a = -(5/6)L$．x 座標は，$x = (L/2) + a = (L/2) - (5L/6) = -L/3$．

10.8

(1) $M\ddot{X} = F_x + Mg$,　$M\ddot{Y} = F_y$．

(2) $I\ddot{\theta} = F_x h\sin\theta - F_y h\cos\theta$．または，$I\ddot{\theta} = F_x(Y - y_0) - F_x X$ でもよい．

(3) $X = h\cos\theta$,　$Y = y_0 + h\sin\theta$．

(4) $X \simeq h$，$Y \simeq y_0 + h\theta$．運動方程式は $0 = F_x + Mg$,　$M(\ddot{y}_0 + h\ddot{\theta}) = F_y$．

(5) $I\ddot{\theta} = F_x h\theta - F_y h = -Mgh\theta - Mh(\ddot{y}_0 + h\ddot{\theta})$．整理して, $(I + Mh^2)\ddot{\theta} = -Mgh\theta - Mh\ddot{y}_0$．

(6) $\ddot{y}_0 = 0$ のとき，$\ddot{\theta} = -\dfrac{Mgh}{I + Mh^2}\theta$．　これから $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{Mgh}{I + Mh^2}}$．

(7) $\ddot{y}_0 = -a\omega^2\cos\omega t$ を (5) の式に代入．$(I + Mh^2)\ddot{\theta} = -Mgh\theta + Mha\omega^2\cos\omega t$，特殊解を $\theta = C\cos\omega t$ と仮定して求める．代入して，$[-(I + Mh^2)\omega^2 + Mgh]C = Mha\omega^2$．これから，$C = \dfrac{Mha\omega^2}{(I + Mh^2)(\omega_0^2 - \omega^2)}$．$C$ は $\omega = \omega_0$ のとき最大．この現象は「共鳴」と呼ばれる．

10.9

(1) $ML_G = \displaystyle\int_0^{\ell} x2\sqrt{\ell^2 - x^2}\sigma dx = \frac{2\sigma}{3}\ell^3$．$M = \sigma\dfrac{\pi\ell^2}{2}$ より $L_G = \dfrac{4}{3\pi}\ell$．

(2) 重心 G の A に対する高さ $y_G = -L_G\cos\theta$ を用いると $U(\theta) = Mgy_G + C$．$U(0) = 0$ になるようにポテンシャルの原点を選ぶと $U(\theta) = MgL_G(1 - \cos\theta)$．

(3) 角度 θ 傾いたときの A$'$ の座標は $(\ell\theta, 0)$ である (円周の長さ $\ell\theta$ だけ右に移動する)．重心 G の位置は $\boldsymbol{r}_G = (\ell\theta - L_G\sin\theta, -L_G\cos\theta)$．

(4) $\dot{\boldsymbol{r}}_G = \dot{\theta}(\ell - L_G\cos\theta, L_G\sin\theta)$ より，運動エネルギーは $K = \dfrac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{r}}_G^2 + \dfrac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \dfrac{1}{2}M\dot{\theta}^2(\ell^2 - 2\ell L_G\cos\theta + L_G^2) + \dfrac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$．全エネルギーは $E = K + U = \dfrac{1}{2}M\dot{\theta}^2(\ell^2 - 2\ell L_G\cos\theta + L_G^2) + \dfrac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 + MgL_G(1 - \cos\theta)$．