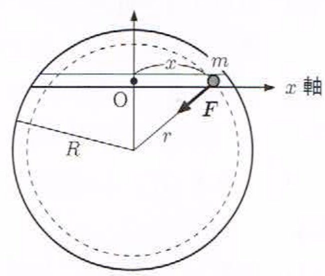
第 II 章

過去問集

6　力のモーメント，角運動量，中心力

6.1

地球の表面上の二点を結んで，真っ直ぐで滑らかなトンネルを掘る．地球を密度が一様な球と考えると，このトンネル内にある質量 m の質点に働く万有引力 $\boldsymbol{F}$ は，中心から質点までの距離 r を半径とする球の中の全質量が地球中心に集中した場合と同じである．ここで，地球の半径を R，全質量を M，重力定数を G としたとき，以下の問いに答えよ．



(1) $\boldsymbol{F}$ の大きさ F を求めよ．

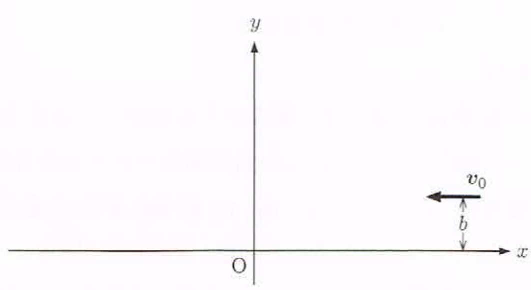
(2) トンネルの中点 O を原点として，トンネル方向に x 軸を取る．質点が位置座標 x にいるとき，質点に働く力の x 成分 F_x を求めよ．ただし，向きに注意せよ．

(3) x に対する運動方程式を記せ．

(4) 運動の一般解を記し，その周期を求めよ．

6.2

中心力ポテンシャル $U(r) = A/r$,（A は定数，$r^2 = x^2 + y^2$）の下での質量 m の質点の x, y 平面内での運動を考える．z 軸は紙面に垂直上向きとする．質点は $x = +\infty$ の無限遠では，$-x$ 方向へ速さ v_0 で動いている．無限遠での粒子と x 軸との間の距離を衝突係数 b という (図参照).



このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\boldsymbol{r} = (x\ ,y)$ の位置で粒子が受ける力 $\boldsymbol{F}$ を求めなさい．

(2) 原点に関する角運動量 $\boldsymbol{L}$ は保存されることを示しなさい．

(3) 原点に関する角運動量の大きさと向きを求めなさい.

(4) 図中の矢印の方向に動き出した質点がどのように動いていくか, $A > 0$ の場合（実線）, $A < 0$ の場合（破線）それぞれについて, その概略を図中に書き込みなさい.

(5) 粒子が原点に最も近づく時の距離 d を求めなさい.

(6) $A = a > 0$（a は定数）という反発力の場合と, $A = -a < 0$ という引力の場合のどちらがより原点に近づくかを議論しなさい. また, この 2 つの場合の最近接距離の差を求めなさい.

6.3

3 次元空間において, 次の設問に答えなさい.

(1) 力の場が $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xy, y^2, -xz)$ のとき, $\boldsymbol{r} = (2, -1, 1)$ における力のモーメント $\boldsymbol{N}$ を求めなさい.

(2) 原点から中心力を受けて運動する 1 個の粒子を考える. 初期の位置が $\boldsymbol{r} = (1, 1, 1)$, 速度が $\dot{\boldsymbol{r}} = (1, -1, -2)$ のとき, この粒子が運動する平面の式を求めなさい.

(3) 2 個の質点の運動を考える. 質点 1 (質量 m_1) の位置を $\boldsymbol{r}_1$, 質点 2 (質量 m_2) の位置を $\boldsymbol{r}_2$ とする. 外力, 内力ともに保存力で, ポテンシャルは $\frac{K}{2}(\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_2^2) + \frac{A}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}$ で与えられる (K, A は定数). 質点 1, 質点 2 の運動方程式をそれぞれ書きなさい.

6.4

(1) 質量 m の質点が, 位置 $\boldsymbol{r}$ において速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ で運動している. この質点の, 原点 O に関する角運動量 $\boldsymbol{L}$ を記しなさい. この質点に力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$ がはたらいている. ここで $r = |\boldsymbol{r}|$ は原点から質点までの距離であり, $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ である. このとき原点 O に関する角運動量が保存することを示しなさい. また, 質点が平面内を運動することを示しなさい.

(2) 原点 O から中心力を受けて運動する質量 $m = 1$ の質点がある. 初期時刻に位置 $\boldsymbol{r} = (1, 1, -2)$ で速度 $\dot{\boldsymbol{r}} = (1, 1, 1)$ を持っていた (単位は適当に取ってある). (i) この質点の初期時刻での角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を求めなさい. (ii) この質点の運動する平面を表す方程式を求めなさい.

6.5

質量 m の質点が, 原点からの距離 r で決まる中心力 $\boldsymbol{F}(r) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{e}_r$ (k は正の定数) を受けて運動している. 質点の角運動量ベクトルの方向に z 軸をとり, 軌道面内 (xy 平面) に 2 次元極座標 (r, θ) をとる. $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ をそれぞれ r, θ が増加する方向の単位ベクトルとする. 必要であれば $\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ を用いてよい.

(1) 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を使って質点の運動方程式を書きなさい.

(2) 設問 (1) の方程式より, $h = r^2\dot{\theta}$ が保存することを示しなさい.

(3) $\ddot{r}$ が常に負であるための条件を書きなさい.

7　二体問題と多体系

7.1

質量 m の天体 A，質量 $m/2$ の天体 B が万有引力を及ぼし合って運動している．天体 A，B の位置ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$ とする．相対座標を表すベクトルを $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$，その方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ (ただし $r = |\boldsymbol{r}|$) で表すと，天体 A が天体 B に及ぼす万有引力は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -(Gm^2/2r^2)\boldsymbol{e}_r$ となる．ここで G は万有引力定数である．天体 A，B には万有引力以外の力ははたらかないとして，以下の設問に答えなさい．

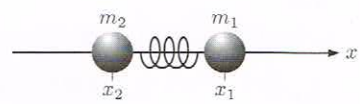
(1)　2 つの天体の重心の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_G$，および相対座標を表すベクトル $\boldsymbol{r}$ が満たす運動方程式をそれぞれ書きなさい．

(2)　$\boldsymbol{r}_A$ および $\boldsymbol{r}_B$ を，$\boldsymbol{r}_G$ と $\boldsymbol{r}$ を用いて表しなさい．

(3)　重心が静止しているとき ($\dot{\boldsymbol{r}}_G = 0$)，系の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存することを示しなさい．

7.2

図のように，質量 m_1 と質量 m_2 の粒子 1, 2 が，バネ定数が k で自然長が ℓ のバネにつながれて，水平な x 軸上を運動している．粒子 1, 2 の座標をそれぞれ x_1, x_2 として，以下の設問に答えなさい．ただし換算質量 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ を用いてよい．



(1)　外力がないとき，粒子 1, 2 の運動方程式をそれぞれ書きなさい．

(2)　外力がないとき，重心に関する運動方程式，相対座標 $x = x_1 - x_2$ に関する運動方程式をそれぞれ書きなさい．

(3)　相対座標に関する運動方程式を解き，一般解を求めなさい．

(4)　最初 2 つの粒子はつりあいの位置に静止していた．すなわち $x_1 = \ell, x_2 = 0$ であったとする．時刻 $t = 0$ で，粒子 2 にのみに撃力 $\bar{F}$ を与えた．時刻 t $(t > 0)$ での重心座標 $x_G(t)$，および相対座標 $x(t)$ を求めなさい．

7.3

1 次元 x 座標上に質量 m_1 の粒子 1 と質量 m_2 の粒子 2 がある．それぞれの座標を x_1，x_2 とおく．これらの粒子間には，大きさが互いの距離の 3 乗に反比例する引力がはたらいている．その比例定数を k (> 0) とするとき，以下の設問に答えなさい．

(1)　それぞれの粒子に対する運動方程式を立てなさい．

(2)　相対座標を $x = x_1 - x_2$ で定義する．このとき x に関する運動方程式を導きなさい．

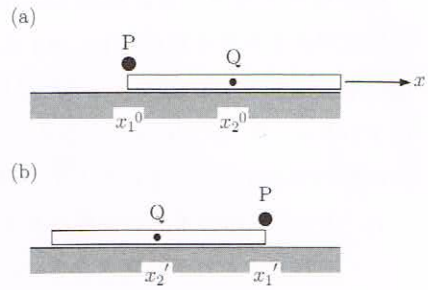
(3)　$t = 0$ で $(x_1, x_2) = (\ell, 0)$，$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (v_0, 0)$ であった．ただし，ℓ, v_0 はともに正である．このとき x での $\dot{x}^2$ の値を求めなさい．

(4)　設問 (3) の初期条件のとき，2 粒子間の距離は離れ続けた．ℓ と v_0 の間にはどのような関係があるか答えなさい．

7.4

図 (a) に示すように，滑らかで水平な床に置かれた長さ ℓ，質量 M の棒を考え，その重心を

Q とする．質量 m の人 P がこの棒の上を歩く．最初 P が棒の左端から初速度 0 で歩き出して棒の右端に到達したとき棒はどのくらい移動するか，以下の設問にしたがって答えなさい．ただし，棒は一様で Q は棒の中心にあるものとする．



(1) 図 (a) のように x 軸を定め，P, Q の座標をそれぞれ x_1，x_2 とする．P，Q からなる 2 体の重心 G の座標 x_G を求めなさい．

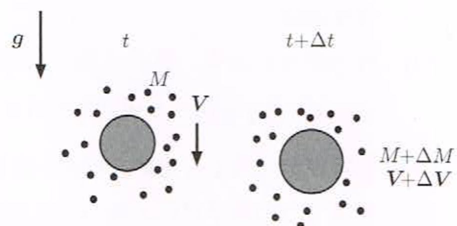
(2) P, Q ともに水平方向には外力が加わらないとする．x_G の運動方程式を立てなさい．

(3) 図 (a) のように P が左端にあるときの P，Q の座標をそれぞれ x_1^0，x_2^0，図 (b) のように P が右端に到達したときの座標を x_1'，x_2' とする．x_1^0，x_2^0，x_1'，x_2' の間の関係式を求めなさい．(ヒント：P が左端にいるとき初速度は P，Q ともにゼロであるから $m\dot{x}_1 + M\dot{x}_2 = 0$ である．)

(4) $x_2^0 - x_1^0 = \ell/2$，$x_2' - x_1' = -\ell/2$ であることを利用して，棒の移動距離 $|x_2' - x_2^0|$ を求めなさい．

7.5

静止した水蒸気に満ちた空気中を雨滴が落下し，少しずつ質量が増加し，速度も変化する．時刻 t で水滴の質量を M，速度を V，$t + \Delta t$ でのものを各々 $M + \Delta M$, $V + \Delta V$ とする．一様な重力定数を g として，以下の問いに答えなさい．



(1) 運動量の変化分 $\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$ を $\Delta M, \Delta V$ の一次まで求めなさい．

(2) $\Delta t \to 0$ として運動方程式をたてなさい．この運動方程式を，雨粒の全運動量 $P = MV$ の時間変化を表す式に書き直しなさい．

(3) 単位時間当たり，単位質量あたりの質量の増加率 $\dot{M}/M = \alpha > 0$ を t によらない一定値とする．このとき，$t = 0$ で $V = V_0$ として，時刻 t における速度 V を，V_0，α，g，t で表しなさい．

(4) V を t の関数として大略を図示し，$t \to \infty$ での V の値 V_∞ を求めなさい．

7.6

全長 L，質量の線密度 ρ の鎖の一端を手で持って重力場中で吊るし上げ，鎖の下端が机にちょうど触れるようにした．この状態で静かに手を離す．すると鎖の動いている部分は一定の重力加速度 $\boldsymbol{g}$ で自由落下する．一方，机とぶつかる部分は完全非弾性衝突をして，直ちに机の上で完全に静止し，次々にたまっていく．以下では机の上に静止した鎖の長さが x となった時を考える．鎖の落下速度を v とすると，$\dot{x} = v$, $\dot{v} = g$ の関係がある．

(1) v を x の関数として時間 t を含まない形で求めなさい．

(2) 鎖の全運動量 P を記しなさい．

(3) 机が鎖に及ぼす抗力を F とする．F と重力を用いて，鎖全体に対する運動方程式を表しなさい．ただし，重力は鎖全体に対して働いていることに注意しなさい．(抗力 F は机の上に静止している鎖を支える力とは一致しないことにも注意しなさい．)

(4) 机の抗力 F は，全長 x の鎖が静かに置いてある場合の抗力の何倍になるか求めなさい．

7.7

滑らかな水平面上において，後方に単位時間あたり質量 μ の物質を噴射して，x 軸上を正の方向に進む物体がある．時刻 $t=0$ での質量，速度をそれぞれ m_0, v_0 とし，一般の時刻 t での質量，速度を m, v とする．噴射された物質が静止するように噴射速度は物体から見て $-v$ に調整されている．また，噴射する物質が途中で不足することはないものとする．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1)　系全体の運動量の時間変化を考え，運動方程式を書きなさい．

(2)　設問 (1) の結果と初期条件を用いて，時刻 t における系全体の運動量を求めなさい．

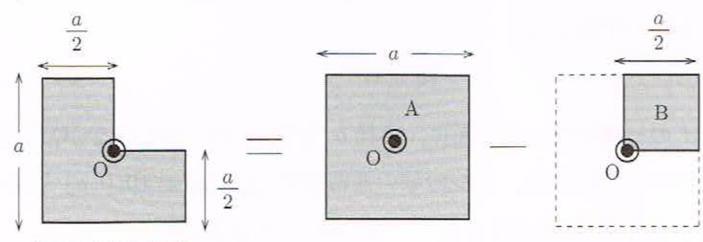
(3)　題意より，時刻 t における質量 m を求めなさい．

(4)　時刻 $t=0$ で物体が $x=0$ にあるとして，時刻 t での位置を求めなさい．

8　慣性モーメント

8.1

図のような一定密度の L 字型薄板の剛体がある (質量を M とする)．点 O を通り薄板に垂直な軸についての慣性モーメント I を求めたい．この剛体を正方形の薄板 A から B を切り抜いたものと考え，以下の設問に答えなさい．



(1)　正方形 A の，点 O を通り薄板に垂直な軸についての慣性モーメント $I^{(A)}$ を求めなさい．まず面密度 σ を使った積分の形で書き，最後に正方形 A の質量 M_A と a を使って表すこと．

(2)　正方形 B の，点 O を通り薄板に垂直な軸についての慣性モーメント $I^{(B)}$ を，正方形 B の質量 M_B と a を使って表しなさい．

(3)　題意の慣性モーメント I を，質量 M と a を使って表しなさい．

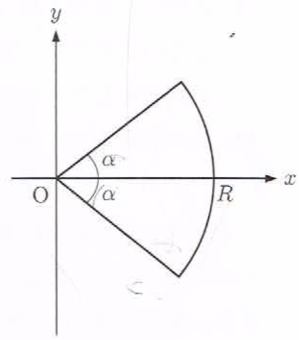
8.2

図のように，一様な面密度 σ の扇型の板が xy 平面内に置かれている．扇型の弧の部分は半径 R の円弧で，中心角は 2α である．図の原点 O を通り，xy 平面と垂直に z 軸をとる．

(1)　z 軸まわりの慣性モーメントを求めなさい．(ヒント: 2 次元極座標 (r,θ) を用いて，微小面積要素 $rdrd\theta$ の慣性モーメントを $0 \leq r \leq R$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ で積分する)

(2)　重心の座標 $(x_{\mathrm{G}}, y_{\mathrm{G}})$ を求めなさい．

(3)　重心を通り，z 軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントを求めなさい．

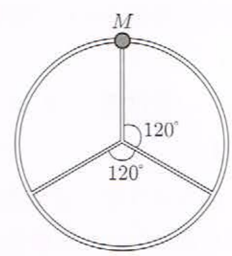


8.3

(1) 長さ a，質量 m の一様な棒の端点を通り，棒に垂直な軸についての慣性モーメント I を求めなさい．

(2) (1) の棒 3 本と，半径 a，質量 m の一様な円環を図のように組み合わせる．さらに，質量 M で大きさを無視できるおもりを一本の棒と円環が接する点につける．この物体の中心を通り紙面に垂直な軸（中心軸）についての慣性モーメント I_1 を求めなさい．

(3) (2) の物体が外力を受けない状態で，中心軸の周りに一定の角速度 ω_1 で回転している．そこで，中心と円環を結ぶ軸に沿う方向に力を加えて，質量 M のおもりを円環に接する点から，中心まで移動させると，角速度は ω_2 となった．ω_2 を M, m, ω_1 を用いて表しなさい．



8.4

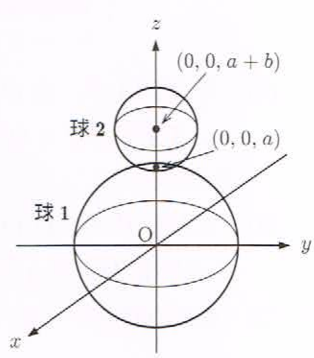
半径 a, 質量 M の一様な球 1 の表面に，半径 b, 質量 m の一様な球 2 が接するように連結されている．球 1 の中心が原点 O，二つの球の連結点が $(x,y,z)=(0,0,a)$ となるように x, y, z 軸をとる．球 1 の中心を通る軸まわりの慣性モーメントは $\frac{2}{5}Ma^2$ で与えられる．以下の設問では，球 1 と球 2 が連結された全系について答えなさい．

(1)　z 軸まわりの慣性モーメントを求めなさい．

(2)　x 軸まわりの慣性モーメントを求めなさい．

(3)　重心の z 座標を求めなさい．

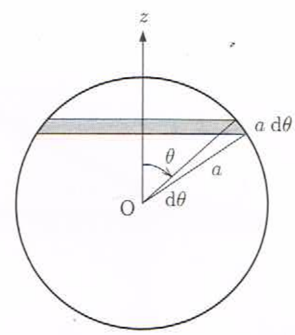
(4)　重心を通り x 軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントを求めなさい．



8.5

(1) 半径 a，質量 M の一様なリングがある．その重心を通り，リングの作る平面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを求めなさい．

(2) 半径 a で質量 M が一様に分布した中空の球殻がある．その重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めなさい．(ヒント：図のように球殻を輪切りにしたリングの集まりとみなすと，和の定理が使える．リングを見込む微小角 $d\theta$ を用いると，リングの微小面積は円周の長さに $ad\theta$ をかけたものである．)



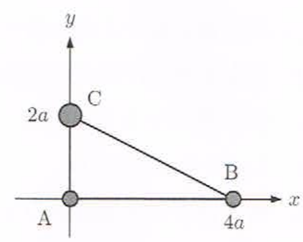
8.6

図のように，質量がそれぞれ $m, m, 2m$ の 3 つの質点 A, B, C が軽い棒でつながれて，xy 平面上に置かれている．質点の座標は $A(0,0)$, $B(4a,0)$, $C(0,2a)$ である (a は正の定数).

(1) この質点系の重心 G の座標 (x_G, y_G) を求めなさい．

(2) A を通り xy 平面に垂直な軸のまわりの，この質点系の慣性モーメント I_A を求めなさい．

(3) 重心 G を通り xy 平面に垂直な軸のまわりの，この質点系の慣性モーメント I_G を求めなさい．



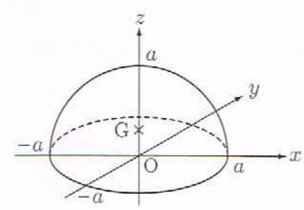
8.7

図のように，中が一様に詰まった半径 a, 質量 M の半球がある．

(1) z 軸周りの慣性モーメント I_z を求めなさい．

(2) x 軸周りの慣性モーメント I_x を求めなさい．

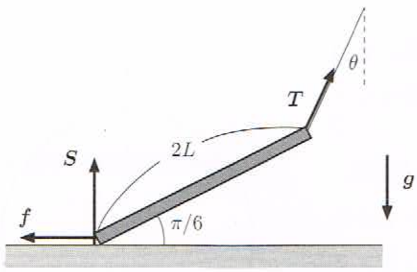
(3) この半球の重心 G を通って，x 軸に平行な軸の周りの慣性モーメント I_G を求めなさい．



9 剛体のつりあり，固定軸周りの回転

9.1

質量 M, 長さ $2L$ の一様で真っ直ぐな剛体棒が，その一端を荒い水平面につけ，他の端を糸でつられて，一様重力場中でつりあっている．棒と水平面の間の角度は $\pi/6$, 糸と鉛直線の間の角度は θ である．糸の張力を T, 水平面からの垂直抗力と摩擦力をそれぞれ S, f とし，重力加速度の大きさを g とする．



(1) 力のつりあいの式を書きなさい．

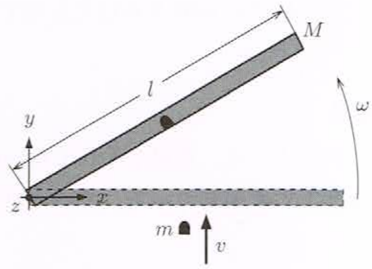
(2) 棒の上端のまわりの力のモーメントのつりあいの式を書きなさい．

(3) $\theta = \pi/6$ のとき，摩擦力 f を求めなさい．

(4) 床の静止摩擦係数 μ_0 の下限を求めなさい．

9.2

長さ ℓ，質量 M の密度一様な棒が，その一端を通り棒に垂直な軸 (これを z 軸とする) を固定軸として，摩擦なく回転できる．いま，図のように，静止している棒の中点に，質量 m の弾丸が速さ v で棒に垂直に打ち込まれて棒の内部で止まるとともに，棒が角速度 ω で回り出したとする．重力は無視する．



(1) 固定軸に関する棒の慣性モーメント I_0 を求めなさい．

(2) 弾丸を含んだ棒の固定軸周りの慣性モーメント I を求めなさい．

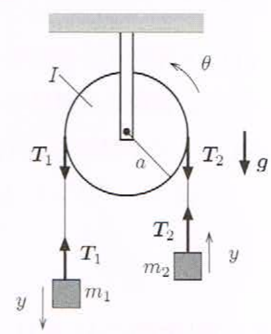
(3) 棒と弾丸からなる系で，原点に関する全角運動量を考える．その z 成分の衝突前の値 $L_{前}$ を求めなさい．

(4) 衝突後の全角運動量の z 成分 $L_{後}$ を求めなさい．

(5) 角速度 ω を求めなさい．

9.3

右図のように，中心を通る固定軸まわりの慣性モーメント I，半径 a の滑車に軽い糸をかけて，両側に質量 m_1, m_2 $(m_1 > m_2)$ のおもりをつける．おもり m_1 の落下距離を y，滑車の回転角を θ とする．おもり m_1 の落下加速度 $\ddot{y}$ を求めなさい．なお，重力加速度は $\boldsymbol{g}$ とし，糸と滑車はすべらないものとする．(ヒント：糸の張力を図のように T_1, T_2 とし，おもり m_1, m_2 の運動方程式，滑車の回転の運動方程式を立てる．それらから T_1 と T_2 を消去する．y と θ の関係に注意しなさい．)



9.4

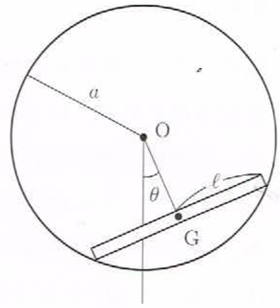
図のように，鉛直面内に半径 a の円が固定され，その円周上に両端が滑らかに固定された長さ 2ℓ $(\ell < a)$，質量 M の一様な棒の運動を考える．鉛直下向きにはたらく重力加速度の大きさを g，円の中心を O，棒の重心を G とする．

(1)　棒の重心周りの慣性モーメント I_G を求めなさい．計算過程も明記すること．

(2)　円の中心 O に関する棒の慣性モーメントを求めなさい．

(3)　図のように，線分 OG と鉛直方向の間の角度を θ とする．θ に関する運動方程式を立てなさい．

(4)　微小な θ に対してこの棒は単振動を行う．この時の周期 T を求めなさい．



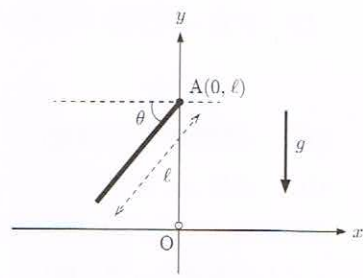
9.5

図のように，鉛直な xy 平面内に拘束された細い棒と質点の運動を考える．棒の端点は点 $\mathrm{A}(0,\ell)$ に固定され，その周りに滑らかに回転できる．棒の線密度は一様で σ，長さは ℓ である．重力加速度は鉛直下向きで大きさは g である．時刻 $t=0$ において，棒は図の水平線から計った角度 $\theta=0$ から静かに回転をし始め，$\theta=\pi/2$ で原点で静止している質量 m の質点に衝突する．以下の設問では，点 A を通り紙面に垂直な軸まわりでの棒の慣性モーメントを I として答えなさい．

(1)　角度 θ $(0<\theta<\pi/2)$ のとき，棒の点 A 周りの回転に関する運動方程式（θ に関する方程式）を書きなさい．

(2)　角度 θ $(0<\theta<\pi/2)$ のとき，角速度 $\dot{\theta}$ を求めなさい．

(3)　棒との衝突後，質点は速度 v (>0) で動き出した．衝突直前の棒の角速度を ω とするとき，衝突直後の棒の角速度を求めなさい．



9.6

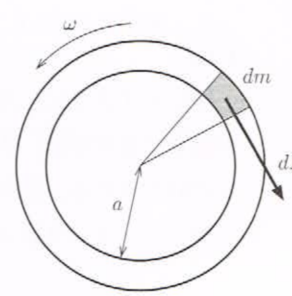
粗い水平な床 (xy 平面) に置かれた自転車のタイヤが，タイヤの中心を通り，タイヤの面に垂直な z 軸のまわりを回転する．スポークと軸受けの質量は無視でき，タイヤは半径 a の一様なリングであると考えてよい．タイヤと床の動摩擦係数を μ'，タイヤの質量を m, 重力加速度を g とする．また，タイヤと床の間以外の摩擦は無視できるものとする．このとき，以下の設問に答えなさい．

(1)　このタイヤの z 軸まわりの慣性モーメント I を求めなさい．

(2)　図のようにリングの微小領域を考え，この部分の質量を dm としたとき，この微小領域に生じる摩擦力 dF の大きさを答えなさい．

(3)　回転するタイヤの角速度を ω，リングの慣性モーメントを I として，ω に関する運動方程式を書きなさい．

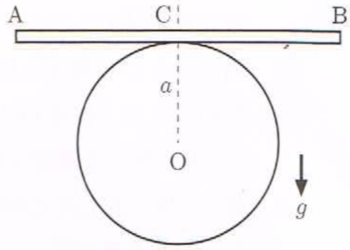
(4)　このタイヤが時刻 $t=0$ で角速度 ω_0 で回転していたとする．タイヤが静止するまでの時間を求めなさい．

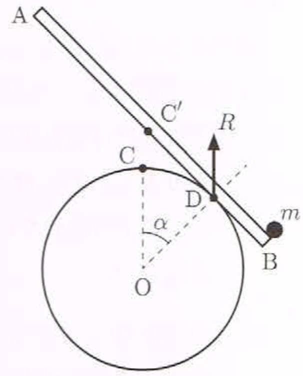


上から見た図：軸受け，スポークは省略

9.7

図のように，半径 a の粗い円筒が，軸が水平方向になるように固定されている．はじめに，長さ 2ℓ，質量 M の一様な棒 AB を，円筒軸の垂直面内で棒の中心を円筒の頂部 C に載せて水平に保った．次に棒の先端 B に質量 m のおもりをつけたところ，棒は滑らずに回転し，棒と円筒の接点 D が $\angle\mathrm{COD} = \alpha$ $(0 < \alpha < \pi/2)$ となる位置で静止した．このときの棒のつりあいについて，以下の設問に答えなさい．ただし，重力加速度の大きさを g とする．





(1) 棒が円筒から受ける抗力 (垂直抗力と摩擦力の合力) の大きさを R する．力の合力のつりあいの式から，R を M, m, g を用いて表しなさい．

(2) 点 D のまわりの力のモーメントのつりあいの式を書きなさい．

(3) 質量 m と抗力の大きさ R をそれぞれ求めなさい．

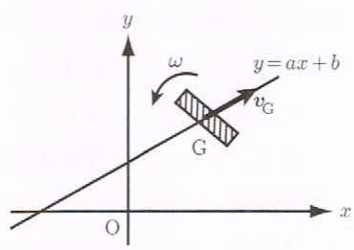
10　剛体の平面運動

10.1 質量 m, 長さ l の一様な棒が，二次元 xy 平面内に横たわって運動している．棒の重心 G は直線 $y = ax + b$ 上を図の矢印の向きに速さ v_G で等速直線運動をしていて，棒は G を中心にして角速度 ω で回転している．ここで，$a \neq 0, b > 0$ とする．

(1) 重心 G 周りの棒の角運動量の z 成分 L'_z を求めなさい．

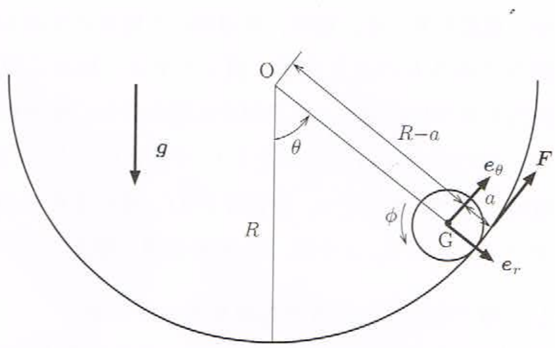
(2) 全質量が重心 G に集まったとして，原点 O: $(x, y) = (0, 0)$ から見た重心の角運動量の z 成分 L_G を求めなさい．

(3) 原点 O の周りの棒の全角運動量 $\boldsymbol{L}$ の z 成分 L_z を求めなさい．



10.2

図に示すように，中心 O，半径 R の動かない円筒状の面の内側を，質量 m，半径 a の円柱が滑らずに転がる．円柱の重心 G と O を結ぶ線と鉛直線のなす角度を θ，円柱の重心 G まわりの回転角を ϕ，円筒面と円柱の摩擦力の大きさを F として，以下の問いに答えなさい．円柱の慣性モーメントは $ma^2/2$ であり，重力加速度を g とする．



(1) 円柱の重心 G まわりの回転に関する ϕ の運動方程式を，F を用いて書きなさい．

(2) 重心 G の角度 $\boldsymbol{e}_\theta$ 方向の運動方程式を記しなさい．(一般に，重心の座標を $\boldsymbol{r}$ とすると，重心の加速度は極座標で $\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$ と書かれる．)

(3) 重心 G の速さを記しなさい．

(4) 重心 G から見た円柱表面の速さを記しなさい．

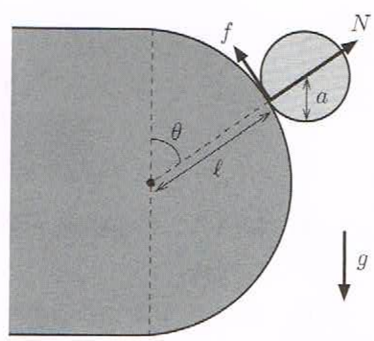
(5) 円柱が円筒面上を滑らずに転がっているときは，接点の速度は零になっている．このときの $\dot{\theta}$ と $\dot{\phi}$ の間の関係を求めなさい．

(6) (1)，(2)，(5) の結果から，F と ϕ を消去し，θ だけの運動方程式を導きなさい．

(7) θ が微小な範囲を運動すると，$\sin\theta \approx \theta$ という近似が成り立つ．このとき，θ は単振動を行う．その周期を求めなさい．

10.3

角が丸いテーブルから，半径 a の円柱が重力加速度 g のもとに落ちていく運動を，2 次元の問題として考える (図はこの運動を側面から見たもの)．テーブルの丸い角は半径 ℓ の半円で表される．円柱は，質量 M の一様な面密度を持つ円板と考えてよい．



(I) まず，円板とテーブルの接触点に摩擦力 f がなく，円板が回転せずに滑り落ちる場合を考える．

(1) 円板の重心運動の，接触点に垂直な方向成分に着目する．向心力，垂直抗力 N，重力の間のつりあいの式を書きなさい．

(2) エネルギー保存則を利用して，角度が θ の時の円板の角速度 $\dot{\theta}$ を求めなさい．

(3) 円板がテーブルを離れるときの角度 θ_0 を求めなさい．

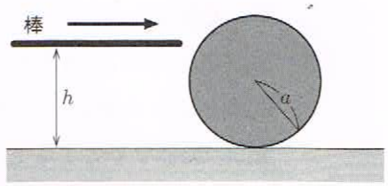
(II) 次に，円板とテーブルの接触点に摩擦力 f があり，円板がテーブルを滑らずに回転しながら落ちる場合を考える．

(4) 円板の回転角を ϕ とする．角速度 $\dot{\phi}$ と $\dot{\theta}$ の関係式を求めなさい．(角度 θ が変わると，円板の重心から接触点への角度もその分だけ変化することに注意しなさい．)

(5) エネルギー保存則から $\dot{\theta}$ の θ 依存性を求めなさい．次に，円板がテーブルを離れるときの角度 θ_r を求めなさい．

10.4

図のように，水平面上に静止している球を棒で衝いた後の運動を考える．棒は，球の中心と接地点を通る鉛直面内で高さ h の点を水平に衝くとする．球はこの鉛直面内を水平に運動し，水平面から離れない．衝かれた直後，球の重心は右向きに速さ V で動き出した．球の密度は一様で，半径を a，全質量を M，重心まわりの慣性モーメントを I_G とする．以下の設問に答えなさい．



(1) 棒で衝かれたときの力積を求めなさい．

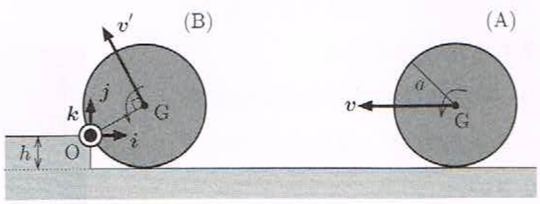
(2) 衝かれた直後の重心まわりの角運動量を求めなさい．

(3) 衝かれた直後，球が滑らなかった．重心まわりの角速度を考えることにより h を求めなさい．

(4) 慣性モーメントの定義にしたがって I_G を求め，前設問の h を a のみを用いて表しなさい．途中の計算も明記すること．

10.5

質量 M，半径 a の一様な円板が，水平面上を滑らずに転がる場合 (図 A) と，それが高さ h ($h < a$) の段差に衝突した瞬間 (図 B) を考える．円板の重心を通り紙面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを I_G とする．段差の角を原点 O とし，図のように単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k}$ は紙面に垂直で裏から表へ向かう) を定義する．図 A では，重心の速さを v (速度 $-v\boldsymbol{i}$) とする．図 B では，重心は O のまわりを速さ v' で円運動をおこなう．以下の設問に対して，ベクトル量は $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いて表すこと．



(1) 図 A で，円板の重心に関する角運動量 $\boldsymbol{L}'_{\mathrm{A}}$ を求めなさい．ヒント: 角速度ベクトルは $(v/a)\boldsymbol{k}$

(2) 図 B で，円板の角速度ベクトル，および重心に関する角運動量 $\boldsymbol{L}'_{\mathrm{B}}$ を求めなさい．ヒント: 角速度ベクトルはどの点から見ても同じである．

(3) 図 A，B で，原点 O に関する重心の角運動量 (重心に全質量が集中したと考えた時の角運動量) $\boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{A})}$，$\boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{B})}$ をそれぞれ求めなさい．

(4) 衝突前後の原点 O に関する全角運動量の差 $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{L}_{\mathrm{A}}$ を計算しなさい．ただし，$\boldsymbol{L}_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{L}'_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{A})}$，$\boldsymbol{L}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{L}'_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{L}_G^{(\mathrm{B})}$ である．

(5) 図 B の衝突の瞬間には O からの撃力のみがはたらくとする．その撃力による原点 O に関する力のモーメント (トルク) を求めなさい．この結果から，設問 (4) の $\Delta\boldsymbol{L}$ はいく

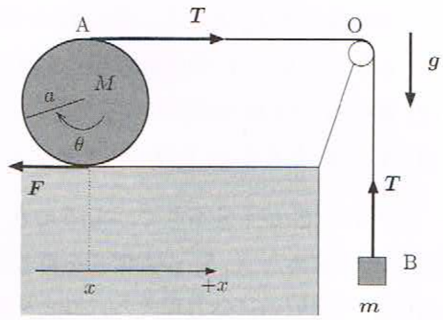
らになるべきか，答えなさい．

(6) 設問 (4), (5) の結果から，衝突後の速度 v' を衝突前の速度 v で表しなさい．

10.6

図のように，質量 M，半径 a の円板 A が粗い水平な机の上にあって，滑らずに転がるものとする．この円板は，質量が無視できる滑車 O を介して質量 m の物体 B と軽い糸で結ばれている．滑車と糸の摩擦は無視できるものとし，AO は水平，OB は鉛直とする．糸の張力を T，円板に働く摩擦力を F，重力定数を g とする．

机の表面にそって x 軸を取り，円板の重心の x-座標を x，回転角を図のように測って θ とする．円板の慣性モーメントは $Ma^2/2$ であることを用いなさい．



(1) 円板が滑らずに転がる条件を書きなさい．

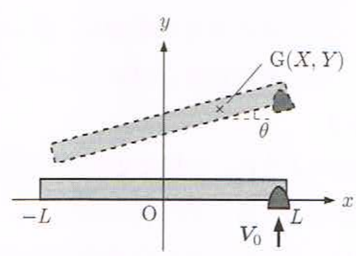
(2) x に関する運動方程式を書きなさい (A, B 両方に関して)．

(3) θ に関する運動方程式を書きなさい．

(4) 加速度 $\ddot{x}$ を求めなさい．

10.7

質量 M, 長さ $2L$ の一様な剛体棒が滑らかな水平面上に静止している (図のように xy 軸を取る)．この剛体棒の中点を通り，棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $ML^2/3$ である．この水平面内で，棒の一端に，質量 M の弾丸が速さ V_0 で棒に垂直に打ち込まれて棒の内部で止まり，棒と一体となって運動を始めた．



(1) 棒と弾丸から成る系の重心 G の座標を (X, Y) とする．弾丸が衝突した直後の X を求めなさい．

(2) 棒と弾丸から成る系の重心 G を通り，棒に垂直な軸まわりの慣性モーメント I を求めなさい．(ヒント: G のまわりの棒の慣性モーメントを I_1, G のまわりの弾丸の慣性モーメントを I_2 とし，まずそれらを計算する．)

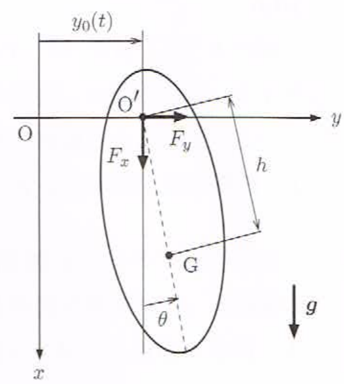
(3) 衝突直後の重心 G の速度 $(\dot{X}, \dot{Y})$ を求めなさい．

(4) 重心 G のまわりの回転角を θ とする．重心 G のまわりの角運動量の保存則から，衝突直後の $\dot{\theta}$ を求めなさい．

(5) 衝突直後に動き出さない点の x 座標を求めなさい．

10.8

点 O' を支点として x-y 面内で回転できる剛体を考える (鉛直下向きに x 軸，水平方向に y 軸をとる)．支点 O' は y 軸上を動くことができ，その位置は時間の関数 $y_0(t)$ で与えられている．剛体の質量を M, 支点 O' から距離 h にある重心 G を通り x-y 平面に垂直な軸まわりの慣性モーメントを I とする．剛体の x 軸からの回転角を θ, 重力加速度の大きさを g とする．



(1) 支点 O' で剛体にはたらく抗力の x 方向成分を F_x，y 方向成分を F_y とする．重心 G の座標を (X,Y) とするとき，X と Y の運動方程式をそれぞれ書きなさい．

(2) 重心 G のまわりの回転の運動方程式を書きなさい．

(3) X と Y を θ と y_0 を使ってそれぞれ表しなさい．

以下では $|\theta|$ が十分小さく，$\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ と近似できる場合を考える．

(4) (3) で求めた X, Y の近似式を書きなさい．それを (1) の運動方程式に代入しなさい．

(5) (2) の回転の運動方程式の近似式を書きなさい．次に，(4) の結果を用いて抗力を消去し，回転の運動方程式を書き直しなさい．

(6) 支点 O' の加速度 $\ddot{y}_0 = 0$ のとき，剛体振り子の角振動数 ω_0 を求めなさい．

(7) 支点 O' を次式のように，振幅 a, 角振動数 ω で周期的に振動させる: $y_0(t) = a\cos\omega t$. このときの $\theta(t)$ の特解を，$\theta = C\cos\omega t$ と仮定して C を求めなさい．剛体の振幅が最大になる角振動数 ω はいくつか．この現象を何と呼ぶか．

10.9

図のように，一様な 2 次元半円板が重力 g の下で床の上を滑らずに左右に揺れる鉛直面内の運動を考える．半円板の半径は ℓ，全質量は M である．半円板の円周の中心を A とする．

(1)　半円板の重心 G と点 A の間の距離 L_G を求めなさい．

半円板が図のように角度 θ 傾き，円周の中心 A が A′ に移動した．A も A′ も床から ℓ の高さにあることに注意して，以下の設問に答えなさい．必要なら L_G, 重心周りの慣性モーメント I_G，点 A の周りの慣性モーメント I_A を使って良い．

(2)　ポテンシャル $U(\theta)$ を求めなさい．ただし，$U(0) = 0$ とする．

(3)　θ を用いて，重心 G の位置ベクトル r_G を $\theta = 0$ の時の A を原点とした x, y 座標で表しなさい．

(4)　全エネルギーを θ を使って表しなさい．ただし $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ とする．