数学 A1 演習問題ヒントと略解（第５回）

1. f の偏導関数を計算すると

   $f_x = 3x^2 - 8x - 2y + 1,\ f_y = -2x - 2y + 2,$

   $f_{xx} = 6x - 8,\ f_{xy} = -2,\ f_{yy} = -2.$

   $f_x = f_y = 0$ を解くと，$(x, y) = (1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}),\ (1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ となりこの 2 つが停留点である．

   次に $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 8 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ とすると $\det H = -12x + 12.$

   (i) $(x, y) = (1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ のとき
   $\det H < 0$ より点 $(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ は極大点でも極小点でもない.

   (ii) $(x, y) = (1 - \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3})$ のとき
   $\det H > 0$ かつ $f_{xx} < 0$ より点 $(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{2\sqrt{3}}{3})$ は極大点.

2. $(x, y) = (1, 0)$: 極小点

   $(x, y) = (-1, 0), (2, 3), (2, -3)$: 停留点だが極小点, 極大点のどちらでもない

3. $f_x = f_y = 0$ を解くと，停留点は $(x, y) = (0, k)\ (k \in \mathbb{R})$. このとき

   $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6k - 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より $\det H = 0$ となり判定できない．ここで $f(0, k) = 0$, $f(x, y) = x^2(x^2 + 3y - 2)$. 任意の x に対し $x^2 \geq 0$ より $f(x, y)$ の符号は $x^2 + 3y - 2$ の符号と同じ. $x^2 + 3y - 2 = 0$ のグラフを考えると

   (i) $k > \frac{2}{3}$ のとき $(0, k)$ の十分近くでは $x^2 + 3y - 2 > 0$ となり，このとき $f(x, y) \geq 0 = f(0, k)$. よって極小.

   (ii) $k < \frac{2}{3}$ のとき $(0, k)$ の十分近くでは $x^2 + 3y - 2 < 0$ となり，このとき $f(x, y) \leq 0 = f(0, k)$. よって極大.

   (iii) $k = \frac{2}{3}$ のとき $(0, k)$ の十分近くで $x^2 + 3y - 2 < 0, x^2 + 3y - 2 > 0$ のどちらもある．よってこのとき極大, 極小のどちらでもない.

4. $f_x = f_y = 0$ を解くと，停留点は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

   $(x, y) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ に対してはいずれの場合も $\det H > 0$ かつ $f_{xx} > 0$ となりこれらは極小点. $(x, y) = (0, 0)$ に対しては $\det H = 0$ となり判定できない．ここで $f(0, 0) = 0$. $f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -2x^2(1 - \frac{1}{2}x^2)$. よって $0 < |x| < \sqrt{2}$ のとき $f(x, 0) < 0$. また $f(x, x) = 2x^4 \geq 0$. 以上より $(0, 0)$ は極小点, 極大点のどちらでもない.

5. $f(x, y) = x^3 - x^2 + y^2 - 2xy,\ \phi(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1$ に対し

   $$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\phi(x, y) = x^3 - x^2 + y^2 - 2xy - \lambda(2x^2 - 2xy + y^2 - 1)$$

   とおく．F の偏導関数を計算すると

   $F_x = 3x^2 - 2x - 2y - 4\lambda x + 2\lambda y,\ F_y = -2x + 2y + 2\lambda x - 2\lambda y,\ F_\lambda = -(2x^2 - 2xy + y^2 - 1).$

   ここで $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ を解く．$F_y = 0$ より $\lambda = 1$ または $y = x$.

(i) $\lambda = 1$ のとき

$F_x = 0$ より $x = 0, 2$. ここで $x = 0$ のとき $F_\lambda = 0$ より $y = \pm 1$. $x = 2$ のとき $F_\lambda = 0$ を満たす実数 y は存在しない.

(ii) $x = y$ のとき

$F_\lambda = 0$ より $x = y = \pm 1$.

まとめると $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ を満たす (x, y) は $(x, y) = (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$.

また $\phi_x = 4x - 2y, \phi_y = -2x + 2y$ より $\phi_x = \phi_y = \phi = 0$ を満たす (x, y) は存在しない.

以上より条件 $\phi(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の極値を与える点の候補は

$(x, y) = (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)$.

ここで $f(x, y)$ は連続関数であり，$2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ のとき $2(x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$. したがって $2(x - \frac{1}{2}y)^2 = 1 - \frac{1}{2}y^2 \geq 0$ より $|y| \leq \sqrt{2}$. また $(x - y)^2 + x^2 = 1$ より $(x - y)^2 = 1 - x^2 \geq 0$. よって $|x| \leq 1$. 故に集合 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x^2 - 2xy + y^2 = 1\}$ は有界閉集合となり，条件 $2x^2 - 2xy + y^2 = 1$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の最大値，最小値が存在する．$f(0, -1) = f(0, 1) = 1, f(1, 1) = -1, f(-1, -1) = -3$ とあわせると点 $(0, 1), (0, -1)$ で最大値 1, 点 $(-1, -1)$ で最小値 -3 となる.

6. $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ のとき最大値 4, $(x, y) = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$ のとき最小値 0