$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

数学 4 A 中間試験問題

2016 年 6 月 8 日

Masato KURIHARA

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin & \cos \end{pmatrix}$$

1. 連立方程式

$$\begin{cases} x+2y-z+w=-4 & 1-4-2+1=-4 \\ 2x+y+3z+w=7 & 2-2+6+1=7 \\ -2x-y+z+w=3 & -2+2+2+1=3 \\ 3x-y+z-3w=4 & 3+2+2-3=4 \end{cases}$$

を行基本変形することによって解け (行基本変形も書くこと)。

$x+2y=0$ $\qquad y=-2(z+w)$

$-y-2z-2w=0$ $\qquad x=4(z+w)$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & s \\ 2 & 5 & 2 & s+4 \\ 1 & 2 & 0 & s+2 \end{pmatrix}$ とおく。 $2x+5y+2z+2w=0$

$x+2y=0$ $\qquad 8(z+w)+2(z+w)-10(z+w)=0$

(1) A の階数 (rank) が 4 より小さくなるような s の値を求めよ。また、s がこの値を取るときの A の階数 (rank) を求めよ。

(2) s を (1) で求めた値とするとき、連立方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を解け。また、この方程式の解の自由度を求めよ。

3. x, y 平面上の曲線 $6x^2+2\sqrt{3}xy+4y^2=1$ を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転して得られる図形の方程式を求めよ。

[裏へ続く]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin & \cos \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A \times A^{-1} = I$

4. (1) $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を

$\mathbf{R}^n$ の標準基底とする。$\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への一次変換 f を

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_n,\ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_{n-1},\ \ldots,\ f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_1$$

となるように定める。f に対応する行列 A を求めよ (つまり、$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる行列 A を求めよ)。[答だけでよい。]

(2) (1) で求めた行列 A の逆行列を求めよ。

5. n 次行列 A は正則行列である (逆行列を持つ) とする。$\mathbf{R}^n$ のベクトル $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$ が 1 次独立のとき、$A\mathbf{a}_1,\ldots,A\mathbf{a}_r$ も 1 次独立であることを証明せよ。

6. 3 次元空間における平面 $ax + by + cz = 0$ (ただし $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ とする) に関する対称移動の行列を A とする。

(1) $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ をみたす 3 次元ベクトル $\mathbf{x}$ で、$\mathbf{0}$ (ゼロベクトル) でないものをひとつ求めよ。

$AX = X$

(2) I を 3 次の単位行列とする。$A + I$ に逆行列が存在するかどうか判定せよ。

$AX = Y$　　$AX = X$

以上

$AX = X$

$IX = X$

慶應義塾大学　答案用紙

キリトリ

数字記入例 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
(OCR上では特に4と9の区別がしにくいので、4は上を閉じないこと)

学籍番号		採点欄	
氏名		ページ	

(ページ数は必ずご記入ください)

科目名	担当者
数学4A	栗原
2016年 6月 8日(水) 2 時限	学科(学門)　　年　組
	学科出席番号

注1 学籍番号は数字記入例を参照の上、丁寧に記すこと
注2 左上にある黒い「基準マーク」付近には何も記さないこと
注3 裏面を使用する場合には、矢印記号⇒の位置から書き始めること(天地を逆転させないこと)
注4 用紙が複数枚に及ぶ場合、氏名は全ての用紙に記入すること

1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{(iii)}+2\times\text{(i)} \\ \text{(iv)}-3\times\text{(i)}}]{\text{(ii)}-2\times\text{(i)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 15 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -7 & 4 & -6 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iv)}+2\times\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 15 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{(ii)}-3\times\text{(iv)} \\ \text{(iii)}+3\times\text{(iv)}}]{\text{(i)}+2\times\text{(iv)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 13 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(ii)と(iv)を入れかえ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(iv)}\times(-1)]{\text{(ii)}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{(ii)}+2\times\text{(iv)} \\ \text{(iii)}-5\times\text{(iv)}}]{\text{(i)}-3\times\text{(iv)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iii)と(iv)を入れかえ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(iv)}\times(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{(ii)}-2\times\text{(iv)} \\ \text{(iii)}-\text{(iv)}}]{\text{(i)}+2\times\text{(iv)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $x=1$　$y=-2$　$z=2$　$w=1$

2.(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & s \\ 2 & 5 & 2 & s+4 \\ 1 & 2 & 0 & s+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(iv)}-\text{(i)}]{\text{(iii)}-2\times\text{(i)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & s \\ 0 & 1 & 2 & s+4 \\ 0 & 0 & 0 & s+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(ii)}+\text{(iii)}]{\text{(i)}-2\times\text{(iii)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2s-8 \\ 0 & 0 & s+2 & 2s+4 \\ 0 & 1 & 2 & s+4 \\ 0 & 0 & 0 & s+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(ii)と(iii)を入れかえ}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2s-8 \\ 0 & 1 & 2 & s+4 \\ 0 & 0 & s+2 & 2s+4 \\ 0 & 0 & 0 & s+2 \end{pmatrix}$$

よって $s \neq -2$ のとき $\operatorname{rank} A = 4$

$s=-2$ のとき 上は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので $\operatorname{rank} A = 2$

(2) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} x-4z-4w=0 \\ y+2z+2w=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解の自由度は 2

3. 原点中心 $\frac{\pi}{3}$ 回転の行列は $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ なので $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X+\sqrt{3}Y \\ -\sqrt{3}X+Y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $6x^2 + 2\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1$ に代入すると

$$6(X+\sqrt{3}Y)^2 + 2\sqrt{3}(X+\sqrt{3}Y)(-\sqrt{3}X+Y) + 4(-\sqrt{3}X+Y)^2 = 4$$

展開して整理すると

$$3X^2 + 7Y^2 = 1$$

答 $3x^2 + 7y^2 = 1$

4. (1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & & 1 & 1 & & 0 \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{第2行と第}n-1\text{行を入れ替え} \\ \vdots}]{\text{第1行と第}n\text{行を入れ替え}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & & 0 & 0 & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ 0 & & 1 & 1 & & 0 \end{array}\right)$$

と行基本変形されるので

$$A^{-1} = A = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

5. $c_1 A\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r A\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ とする。 —— ①

A は正則行列なので A^{-1} が存在する。①に A^{-1} を左からかけて

$$A^{-1}(c_1 A\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r A\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore\ c_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_r \boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_r$ は1次独立なので $c_1 = \cdots = c_r = 0$

よって $A\boldsymbol{a}_1, \cdots, A\boldsymbol{a}_r$ は1次独立である。

6. (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ととると $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であり $\boldsymbol{x}$ は平面 $ax + by + cz = 0$ の法線ベクトルなので

$A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ となる。

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ととると $A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ だから $(A+I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である

もし $A+I$ に逆行列が存在すると仮定すると $(A+I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に左から $(A+I)^{-1}$ をかけて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る。

これは $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ に矛盾する。

よって $A+I$ には逆行列は存在しない。