1/1

数学A4 春学期末試験問題

(担当 : 石井一平)2010 年 7 月 26 日(月) 6時限

試験時間 90 分　持ち込み不可　答案用紙２枚　計算用紙１枚（回収不要）

[1] 次の行列式の値を求めよ。(計算過程も示すこと)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

[2] 次の行列が正則であることを示し、その逆行列を求めよ。(計算過程も示すこと)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3]

(1) ３次行列の行列式の「交代性」および「多重線形性」とはどのような性質であるかを答えよ。(証明は不要)

(2) 行列式の交代性、多重線形性は既知として、次の (a), (b) に答えよ。

(a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ が１次従属であるとき、$\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$ であることを示せ。

(b) 未知数 x_1, x_2, x_3 に関する連立１次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad \left(A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

が解 x_1, x_2, x_3 を持てば、その解は

$$x_1 \cdot |A| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 \cdot |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 \cdot |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

を満たすことを示せ。

[4] 次のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ について、$\vec{d}$ が $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の1次結合となるように t を定めよ。また、その定めた値以外の t について、$\vec{d}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の1次結合ではないことを示せ。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} t \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[5] $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -3 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。

(a) A の行列式の値を求めよ。

(b) $A\vec{x} = \vec{0}$ の解を求めよ。

(c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は、方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ を満たすことを示せ。

(d) 上の (b), (c) の結果より、$A\vec{x} = \vec{b}$ の解を求めよ。

[6] 次の連立1次方程式の解の自由度はどのようになるか。

$$\begin{cases} ax + by + cz = a \\ bx + cy + az = b \\ cx + ay + bz = c \end{cases}$$