中間試験問題(数学Ｂ３)

２０１０年１２月１３日
(担当　井口達雄)

答案用紙は１人２枚配布する．答案用紙１枚目の表面に問題 $\boxed{1}$，裏面に問題 $\boxed{2}$，答案用紙２枚目の表面に問題 $\boxed{3}$，裏面に問題 $\boxed{4}$ を解答せよ．

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x$ および閉区間 $I=[a,b]$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 区間 I の任意の分割 Δ に対して，f の Riemann 和 $S(f,\Delta,\xi)$ が次の不等式を満たすことを示せ．

$$\left|S(f,\Delta,\xi)-\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right|\le|\Delta|(b-a)$$

(2) f が I で Riemann 可積分であり，その積分が次式で与えられることを，定義より直接示せ．

$$\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+x-2}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{2x^3+x^2}{(x^2+2)(x-1)^2}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}dx$

$\boxed{4}$ 自然数 m,n および実定数 a,b に対して

$$I_{m,n}:=\int_a^b(x-a)^m(b-x)^n dx$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $m\ge1$ のとき，$I_{m,n}=\dfrac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) $I_{m,n}$ を求めよ．

中間試験問題（数学Ｂ３）の略解

$\boxed{1}$ (1) $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ および $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ($\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \leq j \leq n$) とすると，

$$S(f,\Delta,\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2}(x_j^2 - x_{j-1}^2) + \left(\xi_j (x_j - x_{j-1}) - \frac{1}{2}(x_j^2 - x_{j-1}^2) \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j - \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}) \right)(x_j - x_{j-1})$$

と変形される．ここで，各 j に対して $\xi_j, \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}) \in [x_{j-1}, x_j]$ であるから，$\left| \xi_j - \frac{1}{2}(x_j + x_{j-1}) \right| \leq |x_j - x_{j-1}| \leq |\Delta|$ ($1 \leq j \leq n$) が成り立つ．したがって，

$$\left| S(f,\Delta,\xi) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right| \leq |\Delta| \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = |\Delta|(b-a)$$

となる．(証明終)

(2) (1) の結果より，$|\Delta| \to 0$ のとき，f の Riemann 和 $S(f,\Delta,\xi)$ は Δ および ξ の取り方に無関係に $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ に収束する．これは f が区間 I で Riemann 可積分であり，その Riemann 積分が

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

であることを示している．(証明終)

$\boxed{2}$ (1) 与えられた被積分関数は

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2}{x+2} = \frac{(C_1 + C_2)x + (2C_1 - C_2)}{(x-1)(x+2)}$$

と部分分数展開される．ここで，C_1, C_2 は定数である．両辺の分子を比較すると，$1 = (C_1 + C_2)x + (2C_1 - C_2)$ であるから，$C_1 + C_2 = 0$, $2C_1 - C_2 = 1$．ゆえに，$C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = -\frac{1}{3}$．したがって，

$$\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} (\log|x-1| - \log|x+2|) + C$$
$$= \frac{1}{3} \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

(2) 与えられた被積分関数は

$$\frac{2x^3 + x^2}{(x^2+2)(x-1)^2} = \frac{C_1 x + C_2}{x^2 + 2} + \frac{C_3}{x-1} + \frac{C_4}{(x-1)^2}$$

と部分分数展開される．ここで，C_1, C_2, C_3, C_4 は定数である．この両辺を通分し，両辺の分子を比較すると

$$2x^3 + x^2 = (C_1 x + C_2)(x-1)^2 + C_3(x^2+2)(x-1) + C_4(x^2+2)$$
$$= (C_1 + C_3)x^3 + (-2C_1 + C_2 - C_3 + C_4)x^2 + (C_1 - 2C_2 + 2C_3)x + (C_2 - 2C_3 + 2C_4)$$

この両辺の係数を比較すると $C_1 + C_3 = 2$, $-2C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 1$, $C_1 - 2C_2 + 2C_3 = 0$, $C_2 - 2C_3 + 2C_4 = 0$．ゆえに，$C_1 = 0$, $C_2 = C_3 = 2$, $C_4 = 1$．したがって，

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 3}{(x^2+2)(x-1)^2} dx = 2 \int \frac{dx}{x^2 + 2} + 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$= \sqrt{2} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + 2 \log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

$\boxed{3}$ (1) $\tan\frac{x}{2} = y$ と置換すると，$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$ より

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{4y}{(y^2+1)(y+1)^2}dy = 2\int\left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{(y+1)^2}\right)dy$$
$$= 2\arctan y + \frac{2}{y+1} + C = 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + C$$
$$= x + + \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + C \quad (C\text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

(2) $y = \sqrt{x^2+4} + x$ とおくと，$x^2 + 4 = (y-x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$ より $x = \frac{y^2-4}{2y} = \frac{1}{2}\left(y - \frac{4}{y}\right)$
ゆえに，$dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{y^2}\right)dy = \frac{y^2+4}{2y^2}dy$. また，$\sqrt{x^2+4} = y - x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{4}{y}\right) = \frac{y^2+4}{2y}$. したがって，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2}{y^2-4}dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\right)dy$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + C = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+4}+x-2}{\sqrt{x^2+4}+x+2}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{(x^2+4)-(x-2)^2}{(\sqrt{x^2+4}+x+2)(\sqrt{x^2+4}-x+2)}\right| + C$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}+2} + C \quad (C\text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

$\boxed{4}$ (1) 部分積分を用いると

$$I_{m,n} = \int_a^b (x-a)^m\left(-\frac{1}{n+1}(b-x)^{n+1}\right)' dx$$
$$= \left[-\frac{1}{n+1}(x-a)^m(b-x)^{n+1}\right]_a^b + \frac{1}{n+1}\int_a^b ((x-a)^m)'(b-x)^{n+1}dx$$
$$= \frac{m}{n+1}\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}dx = \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}$$

したがって，$I_{m,n} = \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}$ が成り立つ.（証明終）

(2) (1) の結果を帰納的に用いると，

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1} = \frac{m(m-1)}{n(n+1)}I_{m-2,n+2}$$
$$= \cdots = \frac{m(m-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}I_{0,n+m} = \frac{m!n!}{(m+n)!}I_{0,n+m}$$

ここで，

$$I_{0,n+m} = \int_a^b (b-x)^{n+m}dx = \left[-\frac{1}{n+m+1}(b-x)^{n+m+1}\right]_a^b = \frac{1}{n+m+1}(b-a)^{n+m+1}$$

したがって，

$$I_{n,m} = \frac{m!n!}{(n+m+1)!}(b-a)^{n+m+1} \quad \cdots \quad (\text{答})$$