数学A1演習問題ヒントと略解（第2回）

1. (a) テイラーの定理より $x \to 0$ のとき $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.
   (b) テイラーの定理より $x \to 0$ のとき $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $\log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$. これより $e^{x^3} - \log(1+x^3) - 1 = \left\{1+x^3+\frac{1}{2}x^6+o(x^6)\right\} - \left\{x^3-\frac{1}{2}x^6+o(x^6)\right\} - 1 = x^6+o(x^6)$
   (c) $f(x) = \frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおくと $x \to 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\Big\{-1+\frac{1}{x}\log(1+x)\Big\} = \exp\Big\{-1+\frac{1}{x}\big(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\big)\Big\} \\ &= \exp\Big\{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\Big\} \\ &= 1+\Big(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\Big)+\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\Big)^2+o(x^2) \\ &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2+o(x^2) \end{aligned}$$

   2番目と4番目の等号にはそれぞれ $\log(1+x)$, e^x のマクローリン近似を用いた.

2. (a) テイラーの定理より $x \to 0$ のとき $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$. これより

$$f(x) = (a+x+x^2)\Big\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\Big\} = ax+x^2+(-\frac{a}{6}+1)x^3-\frac{1}{6}x^4+(\frac{a}{120}-\frac{1}{6})x^5+o(x^5)$$

   またテイラーの定理より $x \to 0$ のとき $f(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^5)$. 展開の一意性より x^5 の係数を比較すると $\frac{a}{120} - \frac{1}{6} = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{10}{5!}$. したがって $a = 30$.
   (b) テイラーの定理より $x \to 0$ のとき $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$. よって $f(x) = e^{ax^2+x^3}\cos x$ の4次のマクローリン近似は

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big\{1+(ax^2+x^3)^2+\frac{1}{2}(ax^2+x^3)^2+o(x^4)\Big\}\Big\{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big\} \\ &= 1+(a-\frac{1}{2})x^2+x^3+(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{24})x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

   一方でテイラーの定理より $f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^4)$ と表せ，展開の一意性より x^2 の係数を比較すると $\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = a - \frac{1}{2}$. したがって $f^{(2)}(0) = -1$ のとき $a = 0$. このとき x^4 の係数を比較すると $f^{(4)}(0) = (\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{24}) \cdot 4! = 1$.

3. (a) $x = 0$ の時は結論は明らか．$x > 0$ とする．$f(x) = \log(1+x)$ とするとテイラーの定理よりある $c \in (0,x)$ が存在して $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3$ と表せるが $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ より $0 < f^{(3)}(c) < 2$. したがって任意の $x > 0$ に対し $0 < \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 < \frac{1}{3}x^3$.
   (b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ に対しテイラーの定理を用いると $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_2(x)$. $x > 0$ のとき，ある $c \in (0,x)$ が存在して $R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{5}{81}(1+c)^{-\frac{8}{3}}x^3$ と表せる．ここで $x > 0$ に対し $R_2(x) > 0$. また $(1+c)^{-\frac{8}{3}} < 1$ より $R_2(x) < \frac{5}{81}x^3$. まとめると $x > 0$ のとき $0 < f(x) - (1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2) < \frac{5}{81}x^3$. 特に $x = \frac{1}{4}$ と取ると $0 < \sqrt[3]{10} - 2(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2) < 2\cdot\frac{5}{81}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$. これより $0 < \sqrt[3]{10} - \frac{155}{72} < \frac{5}{2592} < 0.002$.

4. (a) $\sin x$ と $\cos x$ のマクローリン近似を用いると $x \to 0$ のとき

$\sin x \cos x - x + \frac{2}{3}x^3 = \left\{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right\}\left\{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right\} - x + \frac{2}{3}x^3 = \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

よって $n = 5$ とすると $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos x - x + \frac{2}{3}x^3}{x^n} = \frac{2}{15}$.

(b) テイラーの定理より $x \to 0$ のとき $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$, $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. これらを組み合わせると

$$
\begin{aligned}
&\log(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1 \\
&= -\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right\}^2 + o(x^4) + \left\{1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right\} - 1 \\
&= -\frac{5}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

よって $n = 4$ とすると $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{x^n} = -\frac{5}{24}$.