1/1

慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	50分	分

平成 29 年 6 月 5 日(月) 4 時限施行		学部 学科 年 組	
担当者名	江藤、齊藤、山内、堀田	学籍番号	
科目名	物理学A (-斉)	氏名	

採点欄	※

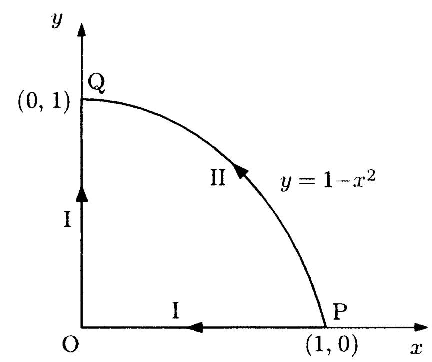
問題 1. 3次元空間における質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき、次の設問に答えなさい。

(1) ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (2, 0, -1)$ に対して $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ を求めなさい。

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とするとき、$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r^3}\right)$ を計算しなさい。

(3) 質点の質量を m とする。ポテンシャル $U(x, y, z) = \dfrac{1}{2}K(x^2 + xy + z^2)$ の中を運動するとき、運動方程式を成分ごとに書きなさい (運動方程式は解かなくてよい)。ただし、K は定数である。

問題 2. 2次元 xy 平面において力の場 $\boldsymbol{F}(x, y) = (F_x(x, y), F_y(x, y)) = (x^2 + Ay, x^n)$ を考える。ただし A と n は定数で、$n > 0$ である。



(1) この力のもとで点 P(1, 0) から点 Q(0, 1) まで、図中の2つの経路 (I), (II) に沿って物体を動かす。経路 (I) は P から O、O から Q を2本の直線で結ぶ。経路 (II) は $y = 1 - x^2$ に沿う。力 $\boldsymbol{F}(x, y)$ の行う仕事 $W_{(\mathrm{I})}, W_{(\mathrm{II})}$ をそれぞれ求めなさい。

(2) 2次元 xy 平面で力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるための一般的な条件式を書きなさい。

(3) 題意の $\boldsymbol{F}(x, y)$ が保存力となるように A と n の値を決めなさい ($n > 0$ に注意のこと)。

(4) 題意の $\boldsymbol{F}(x, y)$ が保存力の場合、ポテンシャル $U(x, y)$ を求めなさい。ただし $U(0, 0) = 0$ とする。

問題 3. バネにつながれた質量 m の質点が x 軸上を運動している。バネの非線形項を含めた運動方程式

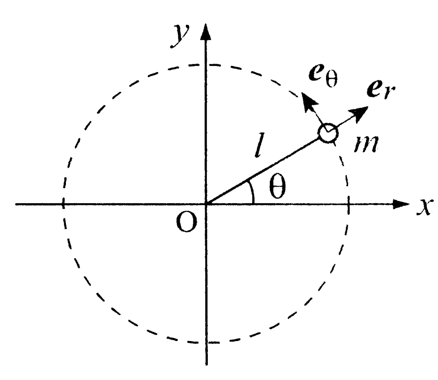
$$m\ddot{x} = -K_1 x - K_2 x^3$$

を考える (K_1, K_2 は正の定数)。エネルギー積分の方法 (両辺に $\dot{x}$ をかけて時間 t で積分) を用いて、$\dot{x}^2$ を x の関数として表しなさい。ただし $x = x_0$ と $-x_0$ のときに $\dot{x} = 0$ とする。

問題 4. 水平な xy 平面上で、原点に一端を固定した長さ l の軽い糸の他端に質量 m の質点を結ぶ。質点の初期位置は $(x, y) = (l, 0)$ で、時刻 $t = 0$ で $+y$ 方向に撃力を加えたところ、初期の速さ v_0 で半径 l の円に沿って運動を始めた。質点には速度に比例する空気抵抗 $-\gamma\dot{\boldsymbol{r}}$ ($\gamma > 0$)、および水平面からの摩擦力がはたらく。質点が動いているとき、摩擦力の大きさは一定値 F_0、向きは速度の反対方向である ($F_0 = \mu' mg$ であるが、以下の設問では F_0 を用いて解答すること)。なお、z 方向は重力と垂直抗力がつりあっているので考えなくてよい。

(1) 極座標表示を考え、r 方向、θ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ とする。位置ベクトル $\boldsymbol{r} = l\boldsymbol{e}_r$ (常に $r = l$) を時間で微分することにより、速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$、および加速度ベクトル $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ を用いて表しなさい。ただし、$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta, \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ を用いてよい。

(2) 糸の張力の大きさを T とする。$\dot{\theta} > 0$ のとき、糸の張力、空気抵抗、水平面からの摩擦力の合力 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ を用いて表しなさい。



(3) $\dot{\theta} > 0$ のとき、r 方向、θ 方向の運動方程式をそれぞれ書きなさい。

(4) $\dot{\theta} = \omega$ とおき、前問で求めた θ 方向の運動方程式を ω についての微分方程式に書き直しなさい。それを解き、ω の一般解を求めなさい。

(5) $\dot{\theta}$ の初期条件を書きなさい。それを用いて (4) の一般解の積分定数を決めなさい。

(6) 質点が止まる時刻を求めなさい。

数学２Ａ：中間試験

(2017 年 6 月 13 日，火曜 5 限，垣村尚徳)

[1] p を 1 以上の整数とし，以下の行列の p 乗を計算せよ．答えのみで良い．

$$\text{(i)}\quad A_1=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\qquad \text{(ii)}\quad A_2=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}\qquad \text{(iii)}\quad A_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

[2] 以下の行列について逆行列を求めよ．ただし (ii) では $ad-bc\neq 0$ とする．

$$\text{(i)}\quad A_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{(ii)}\quad A_2=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}\qquad \text{(iii)}\quad A_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{4}&1&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

[3] 次の連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\1&2&1&-2\\2&3&-1&1\\3&5&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$$

が解を持つために，b_1,b_2,b_3,b_4 が満たすべき条件を求めよ．また，そのときの解を b_1,b_2,b_3,b_4 で表せ．

[4]

1. p 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_p\in\boldsymbol{R}^n$ が 1 次独立であることの定義を書け．
2. $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_p\in\boldsymbol{R}^n$ が 1 次独立ならば，$\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_{p-1}\in\boldsymbol{R}^n$ は 1 次独立であることを証明せよ（$p\geq 2$）．
3. 3 つの 2 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\in\boldsymbol{R}^2$ は 1 次従属であることを示せ．

[5]

1. 以下の命題について，真か偽かを判定せよ．偽の場合は反例 (命題を満たさない具体的な行列) を挙げよ．ただし I はサイズ 2 の単位行列であり，$\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ は 2×2 実行列全体の集合である．
   - (a) 任意の行列 $A\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ に対して，$AI=A$ が成り立つ．
   - (b) 任意の行列 $A\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ に対して，ある行列 $B\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ が存在して，$AB=I$ が成り立つ．
   - (c) ある行列 $B\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ が存在して，任意の行列 $A\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ に対して，$AB=I$ が成り立つ．
   - (d) 任意の 2 つの行列 $A,B\in\boldsymbol{R}^{2\times 2}$ に対して，$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ が成り立つ．
2. (1) の各命題 (a)–(d) の否定を取れ．答えのみでよい．文章で書いても $\forall$ や $\exists$ 等の記法を用いてもよい．