

6/30 問題 $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ。

解) $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda+7)(\lambda-6)$

よって固有値は $\lambda = 6, -7$

固有値 6 について

$A - 6I = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ より、固有ベクトル $k \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ($k \neq 0$)

固有値 -7 について

$A + 7I = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ より、固有ベクトル $l \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ($l \neq 0$)

固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ をえらび、それぞれ正規化して、

$$\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これらを列ベクトルとする行列 $T = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ は直交行列で、

$${}^t T A T = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$