数学２Ｂ　第２回の演習問題の解答例

問：次の行列 A に対して，A の列が生成する部分空間 W_1 と $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間 W_2 の基底をそれぞれ求めよ．

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

解答例：まず W_1 の基底を求める．A に列基本変形を用いて下階段行列に変形する．

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

は W_1 の基底となる．

次に W_2 の基底を求める．次のように行基本変形を用いて上階段行列に変形する．

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

第 j 列に対応する変数を x_j と表記する．第２行は $x_2+2x_3-4x_4=0$ を意味するので，$x_3=s$，$x_4=t$（ただし s,t は任意の数）とすると，

$$x_2=-2x_3+4x_4=-2s+4t$$

となる．さらに第１行より

$$x_1=x_2+3x_3-3x_4=(-2s+4t)+3s-3t=s+t$$

を得る．以上より，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

は W_2 の基底となる．