数学 4 B 中間試験問題

栗原 将人

2017 年 11 月 15 日

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $\det A$ と余因子 Δ_{ij} $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$ をすべて求め、A の逆行列 A^{-1} を求めよ (答のみでよい)。

(2) A の固有多項式と固有値を求めよ。

(3) A の各固有値に対応する固有空間の基底を求めよ。

(4) 3 次元空間内の原点を通る直線で、A に対応する一次変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

により、自分自身に移る直線を ℓ とする (つまり、A に対応する一次変換により、直線 ℓ は直線 ℓ に移されている)。x 軸と直線 ℓ がなす角を θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ とするとき、$\cos\theta$ を求めよ。

2. 次の行列の行列式を求めよ。途中の計算を必ず書くこと。また、(2) は答を因数分解した形で求めること。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

3. $A = (a_{ij})$ を n 次行列 $(n > 2)$ として、A の第 1 行と第 2 行を入れかえた行列を A' とする。$\det A' = -\det A$ を次のように証明したい。以下のかっこの中に適切な式を入れよ。

定義に従って、$\det A'$ を計算すると、

$$\det A' = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{2\sigma(1)} a_{1\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

である。そこで、$\tau =$(ア) とおくと、

$$\tau(1) = \sigma(2),\ \tau(2) = \sigma(1),\ \tau(3) = \sigma(3),\ \ldots, \tau(n) = \sigma(n)$$

となる。σ が r 個の互換の積のとき、$\mathrm{sign}(\sigma)$ =(イ) であり、$\mathrm{sign}(\tau)$ =(ウ) となる。よって、$\mathrm{sign}(\sigma) = -\mathrm{sign}(\tau)$ であり、

$$\det A' = \sum_{\tau \in S_n} -\mathrm{sign}(\tau) a_{2\tau(2)} a_{1\tau(1)} a_{3\tau(3)} \cdots a_{n\tau(n)} = -\det A$$

が成立し、欲しい式が得られた。

4. $\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x + y + z + w = 0 \}$$

の正規直交基底を求めよ。

5. $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ を $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底、A を n 次の直交行列とするとき、$A\mathbf{x}_1, \ldots, A\mathbf{x}_n$ が $\mathbf{R}^n$ の正規直交基底であることを証明せよ。

以上

---キリトリ---

慶應義塾大学　答案用紙

数字記入例 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
(OCR 上では特に４と９の区別がしにくいので，４は上を閉じないこと)

学籍番号	
氏　名	

採点欄	

□ページ
(ページ数は必ずご記入ください)

科目名	担当者
中間試験解答例	栗原
年　月　日(　)　時限	学科(学門)　　年　組
	学科出席番号

注１ 学籍番号は数字記入例を参照の上，丁寧に記すこと.
注２ 左上にある黒い「基準マーク」付近には何も記さないこと.
注３ 裏面を使用する場合には，矢印記号⇒の位置から書き始めること(天地を逆転させないこと).
注４ 用紙が複数枚に及ぶ場合，氏名は全ての用紙に記入すること.

1 (1) $\det A = 16$

$\Delta_{11} = 6$　$\Delta_{12} = -2$　$\Delta_{13} = 4$　$\Delta_{21} = -2$　$\Delta_{22} = 6$

$\Delta_{23} = -4$　$\Delta_{31} = 2$　$\Delta_{32} = -6$　$\Delta_{33} = 12$

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & -6 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

(2) 固有多項式： $(x-4)^2(x-1)$　　固有値： $4,\ 1$

計算)

$$\det\begin{pmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ 0 & x-4 & -2 \\ 1 & -1 & x-2 \end{pmatrix} = (x-3)(x-4)(x-2) + 2 - 2(x-3)$$

$$= x^3 - 9x^2 + 24x - 16$$

$$= (x-4)^2(x-1)$$

(3) 固有値4に対応する固有空間 W_4 を求める

$$A-4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_4 \iff \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $W_4 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ 基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる

固有値1に対応する固有空間 W_1 を求める.

$A-I$ を行基本変形すると

$$A-I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_1 \iff \begin{cases} x-\frac{1}{3}z=0 \\ y+\frac{2}{3}z=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって $W_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ 基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれる

(4) (x, y, z) を l 上の原点でない点とする

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とするとき (X, Y, Z) も l 上の点だから

$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と書ける. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

だから $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は固有ベクトルで

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ or $k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ である.

前者のとき $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\cos\theta = 1$ $\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

後者のとき $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{14}\cos\theta = 1$ $\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{14}}$

2. (1)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 11 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\det\begin{pmatrix} 11 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix} 0 & -10 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -7 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= 12$$

裏面に続く場合は⇒印の欄から書くこと。

(2009.12 B4-K-HT)

$\Rightarrow$

2. (2)

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x+5 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ x+5 & x & 1 & 2 & 1 \\ x+5 & 1 & x+1 & 1 & 1 \\ x+5 & 2 & 1 & x & 1 \\ x+5 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x+5)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

$$= (x+5)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x+5)\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & x & 0 & -1 \\ 1 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

$$= (x+5)(x-2)\det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = x(x+5)(x-2)\left((x-1)^2-1\right)$$

$$= x^2(x+5)(x-2)^2$$

(3)

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ d & c & b & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ d-cx & c & b & a \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -x^2 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ d-cx & b & a \end{pmatrix}$$

$$= -\left(-ax^3 + d - cx + bx^2\right)$$
$$= ax^3 - bx^2 + cx - d$$

3. (ア) $\sigma \circ (1,2)$

(イ) $(-1)^r$

(ウ) $(-1)^{r+1}$

4.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in V \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より $V = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。 $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{q}' = \mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{q} = \dfrac{\mathbf{q}'}{\|\mathbf{q}'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{r}' = \mathbf{c} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{p} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

よって正規直交基底として

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

がとれる。

5. $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, {}^tA\mathbf{y})$ という公式と ${}^tA = A^{-1}$ を使うと

$$(A\mathbf{x}_i, A\mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_i, A^{-1}A\mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

よって $A\mathbf{x}_1, \cdots, A\mathbf{x}_n$ は正規直交基底である。