1

1.1

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \mathrm{Tan}^{-1} x + \lim_{x\to\infty} \mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{x} \\
&= \frac{\pi}{2} + 0 = \underline{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

1.2

$x = \tan y$ の両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2 y}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

これより，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot -\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\
&= \underline{0}
\end{aligned}
$$

1.3

$b/a > 0$ の時,

$$
\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}
$$

である．これは正接の定義による．このことを用いると $f(1) = f(2) = \underline{\pi/2}$

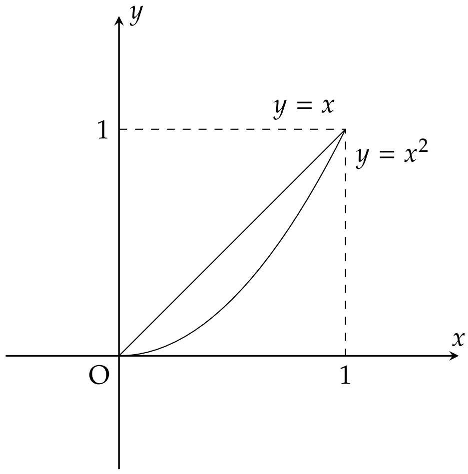
2

$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+2)(x^2+2x+2)$ より

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x^3+3x^2+4x+2}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x \\
= \left[\log|x+1|\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\left(\frac{(x+1)^2+1}{2}\right)'}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x &= \log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\log\frac{(x+1)^2+1}{2}\right]_1^2 \\
&= \underline{\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log 2}
\end{aligned}
$$

3

3.1



積分区間 A は直線と放物線で囲まれる領域であり, 右上図の通りである. これより,

$$\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \underline{\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x}$$

3.2

前問と同様に考えれば,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{2} \frac{y}{-y^4+2y^2+15} \cdot x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{y}{-y^4+2y^2+15} \cdot (-y^4+2y^2+15)\mathrm{d}y = \underline{\frac{1}{8}}$$

4

4.1

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と準備すると,

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = r$$
$$f(x,y) = r^{-3}\sin\left(\frac{1}{r}\right)$$
$$\overline{B}(R) - B(3/\pi) = \{(r,\theta) | 3/\pi \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

ここで

$$g(R) = \iint_{\overline{B}(R)-B(3/\pi)} r^{-3}\sin\left(\frac{1}{r}\right)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi}\int_{3/\pi}^{R}\left(\frac{1}{r}\right)'\sin\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{3/\pi}^{R}\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\pi\left(\cos\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

より問題文の条件の時，$g(R)$ は R に関して単調増加である．これは，外側の円周の半径が大きくなることに対応しているため，

$$\overline{B}(R) - B(3/\pi) \subset D(R) - B(3/\pi) \subset \overline{B}(\sqrt{2}R) - B(3/\pi)$$

から，題意が成立する． □

4.2

前問で

$$\lim_{R\to\infty} g(R) = \pi,\ \lim_{R\to\infty} g(\sqrt{2}R) = \pi$$

より，挟み撃ちの定理から

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{D(R)-B(3/\pi)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\pi}$$

5

5.1

$$\nabla\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t - \cos t) \\ e^t \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

を用いれば

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\int_0^{10}(\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t - \cos t) + 1)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{10} 1 - \sin t(\sin t)'\mathrm{d}t = [t - \frac{\sin^2 t}{2}]_0^{10}$$
$$= \underline{10 - \frac{\sin^2 10}{2}}$$

5.2

グラフ表示されることから，$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$ とすると，

$$\begin{aligned}
\phi_x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \phi_y &= \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\
\partial_x \boldsymbol{r} = (1, 0, \phi_x), \partial_y \boldsymbol{r} &= (0, 1, \phi_y) \\
\boldsymbol{n} &= \pm \frac{\partial_x \boldsymbol{r} \times \partial_y \boldsymbol{r}}{\|\partial_x \boldsymbol{r} \times \partial_y \boldsymbol{r}\|} \\
&= \pm \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + 1}} \cdot \begin{pmatrix} -\phi_x \\ -\phi_y \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_z \geq 0$ より複号は正で，ϕ_x, ϕ_y にそれぞれ代入すれば,

$$\boldsymbol{n} = \underline{\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
\int_A \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} (-r^2 \cos^2\theta - r^2 \sin^2\theta + 1 - r^2) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} (1 - 2r^2) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left[r - \frac{2}{3} r^3 \right]_0^{\sqrt{3}/2} \mathrm{d}\theta \\
&= \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}
\end{aligned}$$