第3回の演習（テキスト p. 68) の発展問題は余力があったらチャレンジしてください。参考までに解答を配ります。

(1) の解答

$$v = \frac{dz}{dt} = v_\infty \frac{1 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - Ae^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad \left(v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}},\ \frac{1}{\tau} = 2\sqrt{\frac{kg}{m}},\ A = \frac{v_0 - v_\infty}{v_0 + v_\infty} \right)$$

を積分する。

$$\begin{aligned}
z &= \int v_\infty \frac{1 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - Ae^{-\frac{t}{\tau}}} dt \\
&= -v_\infty \tau \int \frac{1 + AX}{1 - AX} \frac{1}{X} dX \qquad \left(\text{変数変換}\ \ X = e^{-\frac{t}{\tau}},\ \ dX = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -\frac{1}{\tau} X dt \right) \\
&= -v_\infty \tau \int \left(\frac{2A}{1 - AX} + \frac{1}{X} \right) dX \\
&= -v_\infty \tau \left[-2 \log |1 - AX| + \log |X| \right] + C \\
&= v_\infty t + 2 v_\infty \tau \log \left(\frac{1 - Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - A} \right) + z_0
\end{aligned}$$

＊最終行では $X = e^{-\frac{t}{\tau}}$ にもどし、log の中がつねに正なので絶対値をはずした。また $t = 0$ で $z = z_0$ とすると、 $2v_\infty \tau \log(1 - A) + C = z_0$. この C を代入して整理した。

(3) の解答

質点が上昇するときと下降するときで抵抗力の向きが異なるので、以下のように場合分けが必要。(cf. 抵抗が速度の1次に比例するときは場合分けは不要で、運動方程式は常に $m\ddot{z} = mg - \gamma \dot{z}$. このように書けば $\dot{z}$ が正でも負でも運動の方向と逆向きに抵抗がはたらくことを確かめてください。)。

$$\begin{cases} m\ddot{z} = mg + k\dot{z}^2, & \dot{z} < 0\ (\text{上昇のとき}) \\ m\ddot{z} = mg - k\dot{z}^2, & \dot{z} > 0\ (\text{下降のとき}) \end{cases}$$

以下、$\dot{z} < 0$ のときを考える。

$\dot{z} = v$ とすると

$$\frac{dv}{dt} = g + \frac{k}{m} v^2$$

変数分離をして積分すると

$$\int \frac{dv}{v^2 + \frac{mg}{k}} = \frac{k}{m} \int dt$$

変数変換 $v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tan\theta, \quad dv = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ 　をおこなうと

$$\begin{aligned}
\frac{k}{mg} \int \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{k}{m} t + C \\
\sqrt{\frac{k}{mg}} \theta &= \frac{k}{m} t + C
\end{aligned}$$

$\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{k}{mg}}v$ より

$$\sqrt{\frac{k}{mg}}v = \tan\left[\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C'\right]$$

$t=0$ での条件より　$\tan C' = \sqrt{\frac{k}{mg}}v_0 = \frac{v_0}{v_\infty}$, したがって (途中加法定理を使って)

$$v = v_\infty \tan(\frac{t}{2\tau} + C') = v_\infty \frac{\tan C' + \tan\frac{t}{2\tau}}{1 - \tan C' \tan\frac{t}{2\tau}} = v_\infty \frac{\frac{v_0}{v_\infty} + \tan\frac{t}{2\tau}}{1 - \frac{v_0}{v_\infty}\tan\frac{t}{2\tau}}$$

今 $v_0 < 0$ で $\frac{v_0}{v_\infty} + \tan\frac{t}{2\tau} = 0$ のとき $v = 0$. それ以後の時刻では $\dot{z} > 0$ の式に従う。

cf. 最高点の高さ $\left(\frac{t}{2\tau} = \tan^{-1}\frac{|v_0|}{v_\infty}\text{のときの } z\right)$ の計算

$$z = \int v_\infty \frac{\frac{v_0}{v_\infty} + \tan\frac{t}{2\tau}}{1 - \frac{v_0}{v_\infty}\tan\frac{t}{2\tau}} dt$$

変数変換 $X = \tan\frac{t}{2\tau},\quad dX = \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2\tau}}\frac{dt}{2\tau} = \left(1 + X^2\right)\frac{dt}{2\tau}$　をおこなうと

$$\begin{aligned}
z &= v_\infty \int \frac{-B + X}{1 + BX}\frac{2\tau}{1 + X^2}dX \qquad \left(B = \frac{|v_0|}{v_\infty}\text{とおいた}\right) \\
&= 2\tau v_\infty \int \left[\frac{-B}{1 + BX} + \frac{X}{1 + X^2}\right] dX \\
&= \tau v_\infty \left[\log\left(1 + \tan^2\frac{t}{2\tau}\right) - 2\log\left(1 + B\tan\frac{t}{2\tau}\right)\right] + z_0
\end{aligned}$$

$\tan\frac{t}{2\tau} = B$ を代入すると

$$z_{max} = -v_\infty \tau \log(1 + B^2) + z_0 = -v_\infty \tau \log\left[1 + \left(\frac{v_0}{v_\infty}\right)^2\right] + z_0$$