1/1

# 慶應義塾大学試験問題　物理学D （一斉）

2013年2月1日（金）2時限（試験時間50分）　問題用紙 回収不要

担当者　小原、神成、高野、福嶋

---

**注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。** また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。ただし、電気定数（真空の誘電率）$\varepsilon_0$、磁気定数（真空の透磁率）$\mu_0$、真空中の光速 $c$ の記号は断りなしに使ってよい。

---

**問題 I** 同じ中心もつ半径 $a$ および半径 $b$ の球殻を両極板とするコンデンサーがある ($a<b$)。この中心を位置ベクトルの原点とする。両極板の間の空間は誘電体で満たされており、その誘電率は、中心からの距離 $r$ の関数として、$\varepsilon(r)=\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(\dfrac{b}{r}\right)^4$ で与えられている。ここで、$\bar{\varepsilon}$ は $\bar{\varepsilon}>1$ を満たす定数である。内側の電極に $Q$ の外側の電極に $-Q$ の電荷を与える (図 I 参照)。

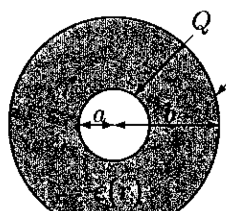



図 I

(1) 両極板間の位置 $\boldsymbol{r}$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$、電気分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) コンデンサーの電気容量を求めなさい。

(3) 誘電体の内側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}|=a)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\rm P}(a)$ および誘電体の外側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}|=b)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\rm P}(b)$ を求めなさい。

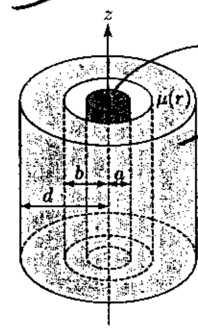
(4) 両極板間の中心からの距離 $r$ が $r_1\le r\le r_2$ の範囲の分極電荷 $q_{\rm P}(r_1,r_2)$ を求めなさい。ただし、$a<r_1<r_2<b$ とする。

**問題 II** 物質中で、電界を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、真電荷密度を $\rho_{\rm t}$、真電流密度を $\boldsymbol{i}_{\rm t}$ とする。

(1) 物質中のマクスウェル方程式を書きなさい。

(2) デカルト座標系 $(x,y,z)$ を用い、$x$, $y$, $z$ 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。$\rho_{\rm t}=0$, $\boldsymbol{i}_{\rm t}=\boldsymbol{0}$ で、時刻 $t$、位置 $(x,y,z)$ において $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=E_x(z,t)\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=B_y(z,t)\boldsymbol{e}_y$ と与えられる平面電磁波を考える。$E_x(z,t)$ の従う波動方程式と、その一般解を書きなさい。この一般解を用いて、$B_y(z,t)$ がどのように表されるか書きなさい。また、時刻 $t$、位置 $(x,y,z)$ におけるポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(x,y,z,t)$ を求めなさい。
ヒント: 一般解には、2回以上微分可能な2つの任意の関数 $f(\xi)$, $g(\eta)$ を用いると良い。

**問題 III** 半径 $a$ で無限に長い円柱状の導体がある。導体の外側には、導体と同軸で、内半径 $b(>a)$、外半径 $d(>b)$ で無限に長い円筒状の磁性体がある (図 III-1 参照)。導体円柱、磁性体円筒の中心軸を $z$ 軸にとり、$z$ 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 $(r,\varphi)$ で表した円柱座標系 $(r,\varphi,z)$ を用いて考える。$z$ 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 $(r,\varphi,z)$ において、$z$ 軸に垂直で $z$ 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、$z$ 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 III-2 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 $(r,\varphi,z)$ におけるベクトル量を表す。磁性体は $b<r<d$ の領域にあり、磁性体の透磁率は $r$ の関数として $\mu(r)=\bar{\mu}\mu_0\dfrac{r}{b}$ で与えられている。ここで、$\bar{\mu}$ は $\bar{\mu}>1$ を満たす定数である。磁性体のない領域の透磁率は $\mu_0$ である。導体に $\boldsymbol{e}_z$ 方向に大きさ $I$ の定常電流を一様に流す。




導体

磁性体

μ

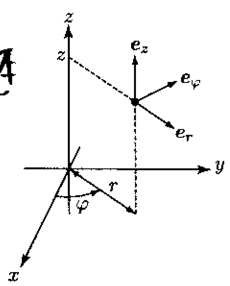



図 III-1　　図 III-2

$\dfrac{1}{2\pi r}$

(1) 位置 $(r,\varphi,z)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$、磁界 $\boldsymbol{H}(r,\varphi,z)$、磁化 $\boldsymbol{J}(r,\varphi,z)$ を求めなさい。

(2) 磁性体の内側の表面上の位置 $(r=b,\varphi,z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\rm m}(b,\varphi,z)$ と磁性体の外側の表面上の位置 $(r=d,\varphi,z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\rm m}(d,\varphi,z)$ を求めなさい。

(3) $z=$ 一定 の平面内の $0\le r\le r_1$, $0\le\varphi<2\pi$ で指定される円形の範囲を $\boldsymbol{e}_z$ 方向に貫く磁化電流 $I_m(r_1)$ を求めなさい。$b<r_1<d$ とする。
ヒント: $\boldsymbol{i}_{\rm m}$ を磁化電流密度とするとき、${\rm rot}\boldsymbol{J}=\mu_0\boldsymbol{i}_{\rm m}$ の積分形を考える。あるいは、$\boldsymbol{B}$ に関するアンペールの法則 (積分形) で、全電流から真電流の寄与を差し引く。

(4) 位置 $(r,\varphi,z)$ における磁化電流密度 $\boldsymbol{i}_{\rm m}(r,\varphi,z)$ を求めなさい。$b<r<d$ とする。
ヒント: (3) の結果を用い、$z=$ 一定 の平面内の $r_1\le r\le r_1+\Delta r_1$, $0\le\varphi<2\pi$ で指定される円環の範囲を $\boldsymbol{e}_z$ 方向に貫く磁化電流 $I_{\rm m}(r_1+\Delta r_1)-I_{\rm m}(r_1)$ を求め、円環の面積で割る。あるいは、デカルト座標 $(x,y,z)$ においては、$r=\sqrt{x^2+y^2}$、$\boldsymbol{e}_r=\left(\dfrac{x}{r},\dfrac{y}{r},0\right)$、$\boldsymbol{e}_\varphi=\left(-\dfrac{y}{r},\dfrac{x}{r},0\right)$、$\boldsymbol{e}_z=(0,0,1)$ と表されることを用いる。

$\mu_0 n_1 \pi r_1^2$ [illegible]

**問題 IV** 真空中に、半径 $r_1$ で単位長さあたりの巻き数 $n_1$ のソレノイド1と、半径 $r_2$ の単位長さあたりの巻き数 $n_2$ のソレノイド2が、中心軸を共通にして配置されている。$r_1<r_2$ である。

(1) ソレノイド1に大きさ $I_1$ の電流を、ソレノイド2に大きさ $I_2$ の電流を同じ向きに流したとき、ソレノイド2の内側の空間の単位長さあたりに蓄えられる磁界のエネルギー $\mathcal{U}_{\rm m}$ を、磁界のエネルギー密度を用いて求めなさい。

(2) ソレノイド1の単位長さあたりの自己インダクタンス $\mathcal{L}_{11}$、ソレノイド2の単位長さあたりの自己インダクタンス $\mathcal{L}_{22}$ およびソレノイド1とソレノイド2の単位長さあたりの相互インダクタンス $\mathcal{L}_{12}$ を求めなさい。

$\mu_0\pi r(n_1 I_1+n_2 I_2)^2$