数学2B　第8回（行列式の計算方法（その2））

2019年11月26日（火）

担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

おしらせ

中間試験を12月3日（火）の授業時間に行います.

- 試験時間：80分
- 場所：23教室
- 出題範囲：教科書の6章および7章

宿題の解答例

問題7-5.　基本変形により行列式を計算する.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & -7 \end{vmatrix} \quad \left[\begin{array}{l} (\text{第}\,2\,\text{列}) \leftarrow (\text{第}\,2\,\text{列}) + (\text{第}\,1\,\text{列}) \\ (\text{第}\,4\,\text{列}) \leftarrow (\text{第}\,4\,\text{列}) + (\text{第}\,1\,\text{列}) \times 2 \end{array} \right]$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 & -7 \end{vmatrix} \quad \left[(\text{第}\,2\,\text{列}) \leftarrow (\text{第}\,2\,\text{列}) \times \tfrac{1}{2} \right]$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 4 \\ -2 & -1 & 6 & -7 \end{vmatrix} \quad \left[(\text{第}\,3\,\text{列}) \leftarrow (\text{第}\,3\,\text{列}) + (\text{第}\,2\,\text{列}) \times (-3) \right]$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \quad \left[(\text{第}\,4\,\text{列}) \leftarrow (\text{第}\,4\,\text{列}) + (\text{第}\,3\,\text{列}) \right]$$

$$= 2\{(-1) \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-1)\} = -8$$

$$|B_n| = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \quad \left[(\text{第}\,1\,\text{列}) \leftarrow (\text{第}\,1\,\text{列}) + (\text{第}\,2\,\text{列}) + \cdots + (\text{第}\,n\,\text{列}) \right]$$

$$= \{a+(n-1)b\}\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \quad \left[\text{(第 1 列)} \leftarrow \text{(第 1 列)} \times \frac{1}{a+(n-1)b} \right]$$

$$= \{a+(n-1)b\}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \quad \left[\begin{array}{c} \text{(第 2 列)} \leftarrow \text{(第 2 列)} + \text{(第 1 列)} \times (-b) \\ \vdots \\ \text{(第 } n \text{ 列)} \leftarrow \text{(第 } n \text{ 列)} + \text{(第 1 列)} \times (-b) \end{array} \right]$$

$$= \{a+(n-1)b\}\{1 \cdot (a-b)\cdots(a-b)\} = \{a+(n-1)b\}(a-b)^{n-1}$$

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を各自解きなさい．ただし、今回は提出の必要はない．

問題 8-1.　次の行列の行列式の値を求めなさい．

$$(1)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \quad (2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad (3)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

問題 8-2.　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 行列式 $|A|$ を求めなさい．
(2) 余因子行列 $\mathrm{adj}A$ を求めなさい．
(3) 正則ならば，逆行列 A^{-1} を求めなさい．

問題 8-3.　連立 1 次方程式 $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 3 \\ 2x - 5y + z = -10 \\ 4x + y - 3z = 8 \end{cases}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) ただ 1 つの解をもつことを示しなさい．
(2) クラメールの公式 (命題 7.2.7.) を用いて解を求めなさい．

問題 8-4(宿題，ただし提出不要).

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) 行列式 $|A|$ を求めなさい．

(2) 余因子行列 $\mathrm{adj}A$ を求めなさい．

(3) A が正則となるための x の条件を求めなさい．

(4) x が (3) の条件をみたすとき，逆行列 A^{-1} を求めなさい．

演習問題 解答例

問題 8-1　基本変形により行列式を計算する．
(1) 1　(2) -4　(3) 0　(4) $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$

問題 8-2.(1) $|A| = 1$　(2) $\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -6 & 5 \\ 9 & 7 & -6 \end{bmatrix}$　(3) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -6 & 5 \\ 9 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

問題 8-3. (1) 略（係数行列が正則であることを示し、よってただ 1 つの解をもつことを述べる.）　(2) $[x, y, z] = [2, 3, 1]$

問題 8-4.(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x^2 & x-x^2 \\ x & x-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} (\text{第 2 列}) \leftarrow (\text{第 2 列}) + (\text{第 1 列}) \times (-x) \\ (\text{第 3 列}) \leftarrow (\text{第 3 列}) + (\text{第 1 列}) \times (-x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2 & x-x^2 \\ x-x^2 & 1-x^2 \end{vmatrix} \quad [\text{第 1 行に関する余因子展開}]$$

$$= (1-x)^2(1+x)^2 - x^2(1-x)^2 = (1-x)^2(1+2x)$$

(2) 定義より

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x \\ x & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x^2 & -x+x^2 & -x+x^2 \\ -x+x^2 & 1-x^2 & -x+x^2 \\ -x+x^2 & -x+x^2 & 1-x^2 \end{bmatrix}$$

(3) 定理 7.2.11. より，A が正則 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ だから，

$$x \neq -\frac{1}{2}, 1$$

であれば正則である.

(4) (1), (2) より

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}A = \frac{1}{(1-x)(1+2x)}\begin{bmatrix} 1+x & -x & -x \\ -x & 1+x & -x \\ -x & -x & 1+x \end{bmatrix}$$

□