数学 2B　第 4 回（線形写像と行列（その 2））

2019 年 10 月 15 日（火）
担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

宿題の解答例

問題 3-5.(1) (d) 全射・単射のいずれでもない

(理由)$y = f(x)$ のグラフの図示は省略する．

全射性：$y < -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ である $y \in \mathbb{R}$ に対しては，$f(x) = |x^3| - x = y$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しないので，f は<u>全射ではない</u>.

単射性：$f(x) = 0$ となる x は 0,1 があるので，f は<u>単射ではない</u>. □

(2) まず，f の表現行列を求める．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $\mathbb{R}^2$ の標準基底とすると，線形写像の性質から

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2), \quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = -f(\boldsymbol{e}_1) + 2f(\boldsymbol{e}_2)$$

となる．したがって，f の表現行列を A とすると

$$A = [f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

となる．今，$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の表現行列を $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{bmatrix}$ とおくと，合成写像 $g \circ f$ の表現行列は

$$BA = \begin{bmatrix} b_1 - 2b_3 & -(b_1 - 2b_3) \\ b_2 - 2b_4 & -(b_2 - 2b_4) \end{bmatrix}$$

となる（命題 6.2.3）．よって，条件を満たすためには $b_1 = 2b_3, b_2 = 2b_4$ となればよい．よって，

$$B = \begin{bmatrix} 2t & t \\ 2s & s \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

を得る． □

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい．

問題 4-1.　次の線形写像について，核空間と像空間の基底と次元を求めなさい．

(1) 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ によって定まる線形写像 $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

(2) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ y + z \\ x + y - 2z \end{bmatrix}$

(3) $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y + z + w \\ x + 2z - w \\ x + y + 3z - 3w \end{bmatrix}$

問題 4-2.　問題 4-1. の各線形写像について，次元公式（定理 6.2.6.）が成り立っていることを確認しなさい．

問題 4-3.　問題 4-1. の各線形写像について，表現行列の階数を求めなさい．

問題 4-4.　$\mathbb{R}^4$ の線形部分空間 $W = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ について次の問いに答えなさい．

(1) $\mathrm{Im}\ f = W$ となるような線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ の表現行列を 1 つ見つけなさい．

(2) $\mathrm{Ker}\ g = W$ となるような線形写像 $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の表現行列を 1 つ見つけなさい．

問題 4-5(宿題).　線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2c + 2d + 4e \\ -a + b - 3c + e \\ b - c + 2d + 5e \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えなさい．

(1) f の表現行列 A を求めなさい．

(2) f の核空間の基底と次元を求めなさい．

(3) f の像空間の基底と次元を求めなさい．

(4) 次元公式が成り立っていることを確認しなさい．

(5) $\mathrm{rank} A$ を求めなさい．