2018 数IA

Q1

(1) f は $x=0$ で連続か

$f(x) =$ 〜

$n \to \infty$ のとき、$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ より連続(?) ⇐ この問題分からんかった.

(2) f は $x=0$ でビ分係数もつか

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x>0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

$x=0$ において、

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{he^{\frac{1}{h}}}$$

ここで $\frac{1}{h} = t$ とおくと

$$\lim_{h\to 0} he^{\frac{1}{h}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t} = \infty$$

より.

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{he^{\frac{1}{h}}} = 0$$

以上より、ビ分可能でビ分係数は0 //

Q2

$f(x) = \sqrt{1+\log(1+x)}$ を $x=0$ 〜

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 \cdots$$

ここで、

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\log(1+x)}} \times \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+\log(1+x))^{-\frac{3}{2}} \times \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{2}(1+\log(1+x))^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = -\frac{3}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+\log(1+x))^{-\frac{5}{2}} \times \frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{2}(1+\log(1+x))^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{(1+x)^3}$$
$$+ \frac{1}{4}(1+\log(1+x))^{-\frac{3}{2}} \times \frac{1}{(1+x)^3} + (1+\log(1+x))^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow f'''(0) = \frac{17}{8}$$

よって、

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 \cdots$$

No.

Date

Q3.

(1) $f(x,0) = \sin x$, $f(0,y) = y$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_x, f_y)$

ここで、

$f_x(0,0) : \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - 0}{h} = 1$

$f_y(0,0) : \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$

よって、

$\lim (f_x, f_y) = (1, 1)$

(2) $f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ $\quad (a,b) \neq (0,0)$

ここで

$D(\vec{w}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+w_1 h, b+w_2 h) - f(a,b)}{h}$ $\quad \|\vec{w}\| = 1$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+w_1 h, b+w_2 h) - f(a, b+w_2 h)}{w_1 h} \cdot w_1 + \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+w_2 h) - f(a,b)}{w_2 h} \cdot w_2$

$= \underline{w_1 f_x + w_2 f_y}$

また、

$f_x = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

よって、

$D(\vec{w}) = \frac{w_1 x + w_2 y}{x^2+y^2}$

$= \frac{1}{a^2+b^2}(w_1 a + w_2 b)$

$\|\vec{w}\| = 1$ より、$w_1^2 + w_2^2 = 1$ なって $w_1 = \cos\theta$, $w_2 = \sin\theta$ とおくと、

$w_1 a + w_2 b = a\cos\theta + b\sin\theta$

$= \sqrt{a^2+b^2} \sin(\theta + \gamma)$

より max は

$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Q4

(1) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$

いま、

$g(x,y)=x^2+y^2-R=0 \quad (0\leq R\leq 1)$

とする。

ここで $g(x,y)$ は $y=\varphi(x)$ と変形できる。

よって、

$\varphi'(x)=-\frac{g_x}{g_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$

また、f が max となる点では、$\frac{d}{dx}f(x,y)=0$ より、

$\frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=0$

$\iff f_x\cdot 1+f_y\cdot\varphi'(x)=0$

$\iff f_x-\frac{g_x}{g_y}f_y=0$

$\iff f_x g_y=f_y g_x$

より、(x_0,y_0) で max をとるとすると、

$f_x(x_0,y_0)g_y(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)g_x(x_0,y_0)$

$\iff 2y_0 f_x(x_0,y_0)=2x_0 f_y(x_0,y_0)$

をみたせばよいので $(f_x,f_y)\neq(0,0)$ となり得る。

(2) $f(x,y)=\frac{1}{3}(x^3+y^3)-x^2-y^2+xy$ $\Leftarrow$ あってるか微妙

ここで

$f_x=x^2-2x+y \quad , f_y=y^2-2y+x$

よって、

$f_x=f_y=0$

$\Rightarrow$ f_x と f_y では、x と y の関係は反転しているだけなので $x=y$。

より、

$x^2-x=0$

$\therefore x=y=1,0$

なので、停留点は $(1,1),(0,0)$

また、

$f_{xx}=2x-2,\quad f_{xy}=1,\quad f_{yy}=2y-2$

より

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4(x-1)(y-1)-1=D$

(i) $(x,y)=(1,1)$、

$D<0$、より極値ではない

(ii) $(x,y)=(0,0)$

$D>0$、$f_{xx}<0$ より極大値

Q5 ⇐ あってるか微妙

$\varphi(x,y) = 12x^4 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ をみたす (x,y) 全体を C とする

ここで，$x^4 \geq 0$，$x^2 \geq 0$，$y^2 \geq 0$ より．

$x^4 \leq \frac{1}{12} \iff -\frac{1}{\sqrt[4]{12}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ ← 12の4乗根

$x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$

$y^2 \leq 1 \iff -1 \leq y \leq 1$

より，C は有界

ラグランジュの未定乗数法を用いると，$f(x,y) = x^2 + y^2$ より．

$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(12x^4 + x^2 + y^2 - 1)$

なので

$L_x = 2x - 48x^3\lambda - 2x\lambda$

$\quad = 2x(1 - \lambda - 24x^2\lambda)$

$L_y = 2y - 2y\lambda$

$\quad = 2y(1-\lambda)$

$L_\lambda = -12x^4 - x^2 - y^2 + 1$

ここで，

$L_y = 0 \iff y = 0$ または $\lambda = 1$

(i) $\lambda = 1$ のとき，

$L_x = -48x^3 = 0$

$\therefore x = 0$

$L_\lambda = -y^2 + 1$

$\therefore y = \pm 1$

よって，$(x,y) = (0, \pm 1)$

(ii) $y = 0$ のとき，

$L_\lambda = -12x^4 - x^2 + 1 = 0$

$\iff -(4x^2 - 1)(3x^2 + 1) = 0$

$x = \pm \frac{1}{2}$

よって，$(x,y) = (\pm\frac{1}{2}, 0)$

であるから，

①：$(x,y) = (0,1) \Rightarrow f(0,1) = 1$

②：$(x,y) = (0,-1) \Rightarrow f(0,-1) = 1$

③：$(x,y) = (\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$

④：$(x,y) = (-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow f(-\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{4}$

以上より

max. $f(x,y) = 1 \quad (x,y) = (0, \pm 1)$

min. $f(x,y) = \frac{1}{4} \quad (x,y) = (\pm\frac{1}{2}, 0)$

ラグランジュ使わんでも解ける

$\varphi(x,y) = 12x^4 + f(x,y) - 1 = 0$

$\iff f(x,y) = 1 - 12x^4$ なので

$\underbrace{0}_{y=\pm 1} \leq 12x^4 + x^2 \leq \underbrace{1}_{y=0} \iff -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq f(x,y) \leq 1$ と分かる