7/14 問題 $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる $x = x(t)$ を求めよ。

解) $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。

行列 A は、固有値 2, 3 をもち、それぞれ対応する固有ベクトルとして、$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれるので、

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ として. } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ となる。}$$

よって、同次線形系 $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ の基本行列として、

$$\Phi(t) = P\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} & e^{3t} \\ -4e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \text{ がとれる。}$$

$$\Phi(t)^{-1} b(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \int \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x(t) = \Phi(t) \int \Phi(t)^{-1} b(t)\, dt = \Phi(t) \left(\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right). \cdots (*)$$

$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(*) に代入して、

$$x(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ -2e^{-2t} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} & e^{3t} \\ -4e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ -2e^{-2t} + 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t - 3e^{2t} + 3e^{3t} \\ -2e^t + 4e^{2t} - 3e^{3t} \end{pmatrix}.$$