1.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

とするとき、次の (1)〜(3) を求めよ。(答えのみでよい)

(1)$\det A$ (2)$\mathrm{adj} A$ (3)A^{-1}

2.

(1) 半正定値行列の定義を述べよ。

(2)A を実対称行列とするとき、以下はすべて同値である。

(a)A は半正定値である。

(b)A の固有値は 0 以上である。

(c) ある実行列 B があり、$A = {}^tBB$

(ア)(a)⇒(b) (イ)(c)⇒(b) (ウ)(b)⇒(c) を証明せよ。

3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ とし、f を A を表現行列に持つ線形写像とする。

(1)$\mathrm{Im} f$ の基底と次元を求めよ。

(2)$(\mathrm{Im} f)^\perp \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{v \in \mathbb{R}^4 |$ 任意の $u \in \mathrm{Im} f$ に対し $(v, u) = 0\}$ とする。すなわち $(\mathrm{Im} f)^\perp$ は $\mathrm{Im} f$ の任意の要素と直交するベクトル全体である。$\mathrm{Im} f$ の要素 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ の満たすべき式を示し、$(\mathrm{Im} f)^\perp$ の基底と次元を求めよ。

4.

以下の文が○か×か答えよ。(答えのみでよい)

(1) 任意の線形写像は表現行列を持つ。

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ において $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とするとき、$f(\boldsymbol{x}) = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = 0$ である。

(3) 任意の n 次行列 A において、A が正則ならば A は固有値に 0 を持たない。

(4)A を n 次行列とする。A の任意の固有値 λ に対する固有空間の次元は $\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ に一致する。

5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & a-3 \\ 0 & 1-a & 4-a \end{bmatrix}$$ とする。

(1)A の固有値を求めよ。
(2)A が対角化可能なときの a の条件を述べよ。
(3)A が対角化可能なとき、$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P および $P^{-1}AP$ を求めよ。

6.
$f(x,y,z) = 4x^3 - 4x^2y + y^2 + 2xz + z^2$ とする。
(1) 停留点を求めよ。
(2) 各停留点におけるヘッセ行列を求めよ。
(3) 極値を求めよ。