第 II 章

過去問集

1　ベクトル，物体の運動

1.1　重力と，速度に比例する抵抗力とを受けて，鉛直方向に運動する質量 m の質点を考える．抵抗力の係数を k, 重力加速度を g とし，鉛直上向きに z 軸の正方向をとる．

(1) 座標 z を用いて，運動方程式を書きなさい．

(2) 速度 v を用いて，(1) の運動方程式を書き直しなさい．

(3) (2) を解いて，$t=0$ で，$v=v_0$ となる解を求めなさい．

(4) $t\to\infty$ での速度 v_∞ を求めなさい．

(5) $t=0$ に質点を速度 $v_0(v_0>0)$ で上方に投げ上げる．質点が最高点に達する時刻 t_1 を求めなさい．

1.2　以下の設問に答えなさい．

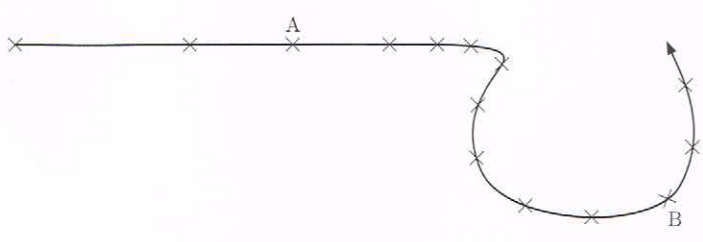
(1)　$\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$ を各成分が定数であるベクトルとし，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ とする．このとき，以下のベクトルを求めなさい．

(1a) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r})$　　(1b) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}$　　(1c) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r})$

(2)　次の微分方程式において，エネルギー積分の方法を使って保存する量を求めなさい．

(2a) $\ddot{x}+x=0$　　(2b) $\dot{x}\ddot{x}+\cos x=0$

1.3　一定時間間隔ごとの物体の位置が×印で図に示されている．点 A および点 B での速度と加速度のおおよその大きさと方向を，それぞれの点を原点とする矢印で表しなさい．ただし，速度は $\Longrightarrow$ のように中を抜いた白矢印で，また加速度は $\longrightarrow$ のように中をぬりつぶした黒矢印で描きなさい．



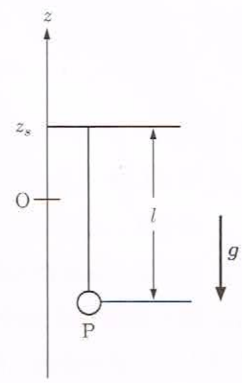
1.4 $\boldsymbol{A} = (2, -1, 3)$, $\boldsymbol{B} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{C} = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{D} = (x^2/2, yz, xy)$, $f = x^2yz$ とするとき，次の計算をしなさい．

(1) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$　(2) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$　(3) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}$

(4) ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を三辺とする平行六面体の体積

(5) $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{D}$, もしくは rot $\boldsymbol{D}$　(6) $\boldsymbol{\nabla} f$, もしくは grad f

1.5 図のように，質量 m の質点 P が長さ l の軽い糸の下端につながっている．鉛直上向きを正として z 軸を取り，重力加速度の大きさを g とする．糸の上端の位置を z_s とすると，z_s は原点 O を中心に単振動をしている．つまり $z_s = A\sin\omega t$ のように時刻 t の関数として表される．また質点には $-\gamma\dot{z}$ で表される抵抗力がはたらく．ここで，A, ω, γ は正の定数である．この時，以下の設問に答えなさい．



(1) 糸の張力の大きさを T，質点 P の位置座標を z として，質点 P についての運動方程式を立てなさい．

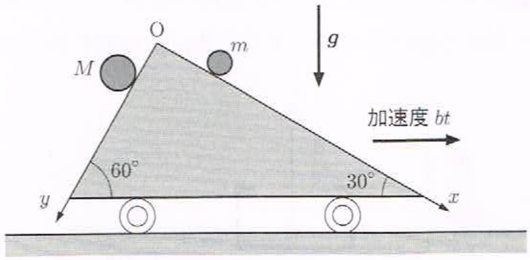
(2) 糸がたるまずに質点が運動しているとき，つまり，拘束条件 $z_s - z = l$ が満たされているとき，張力 T を求めなさい．

(3) 任意の時刻で糸がたるまないための振幅 A の上限 A_m を求めなさい．(必要があれば，$C\cos\theta + D\sin\theta = \sqrt{C^2 + D^2}\sin(\theta + \delta), \tan\delta = C/D$ を使ってよい．)

(4) $A > A_m$ のとき，ある時刻で糸はたるんだ．その直後の運動方程式を書きなさい．

2　非慣性系

2.1 時間 t に依存する加速度 bt で水平方向に運動しているトラックの荷台に，図のような三角柱が固定してある (一定加速度ではない！)．三角形の頂点を原点 O とし，斜面に沿って図のように x 軸，y 軸をとる．荷台に乗っている人が質量 m の質点を x 斜面に置き，$t = 0$ で頂点 O から静かに離した．



(1) 質点 m に働く慣性力 $\boldsymbol{F}_{慣}$ の x 成分 $F_{慣\,x}$，y 成分 $F_{慣\,y}$ を求めなさい．

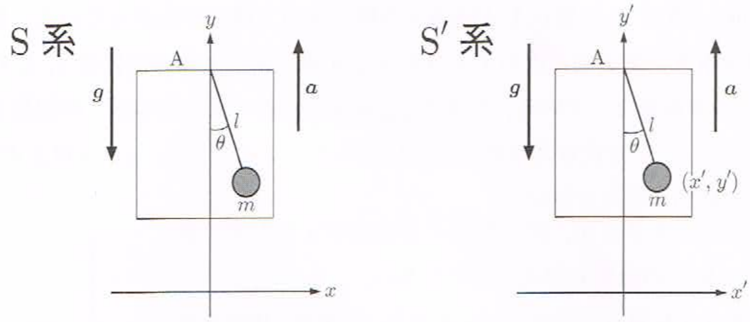
(2) 質点 m の位置を x として，x 方向の運動方程式を書きなさい．

(3) 与えられた初期条件のもとで運動方程式を解き，時刻 t での質点の位置 $x(t)$ を求めなさい．

(4) 質点はある時刻 t_1 で静止し，その後上昇する．この時刻 t_1 を求めなさい．

(5) 別に，質量 M の質点を y 斜面に置き，時刻 $t=0$ で頂点 O から静かに離した．この質点 M が斜面から離れる時刻 t_2 を求めなさい．

2.2 一定加速度 $\boldsymbol{a}$ で鉛直上方に上昇するエレベーターがある．長さ ℓ の軽い糸の一端に質量 m の質点をつけ，他の端をエレベーターの天井の点 A から吊るして，揺らした時の運動を考える．重力加速度を g とする．



I. エレベーターの中の人の系 (S 系) で考える．図のように x, y 軸をとり，$\boldsymbol{a}=(0,a)$ とする．

(1) 質点に働く見かけの力 (慣性力) の式をベクトルで書きなさい．さらにそれを図中に矢印で示しなさい．

(2) θ に関する運動方程式を書きなさい．

(3) 微小振動では $\sin\theta=\theta$，$\cos\theta=1$ と近似して良い．その周期を求めなさい．

II. エレベーターの外に静止している人の系（S' 系）で考える．図のように $x', y'-$ 軸をとり，質点の位置を (x', y') とし，張力を T とする．A の y' 座標は $at^2/2$ としてよい．

(1) x' と y' を ℓ, θ, t, a を用いて表しなさい．

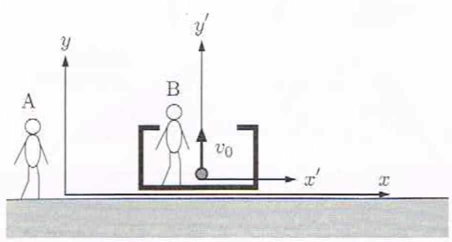
(2) S' 系での運動方程式の右辺を，T, m, g, θ で書きなさい．

$m\ddot{x}' =$　　　　　　　　　　　　$m\ddot{y}' =$

(3) 微小振動の近似が成り立つとき，張力 T と微小振動の周期を求めなさい．

2.3

図のように，動摩擦係数 μ' の水平面上を $+x$ 方向へ運動している箱がある．この箱は静止することなく $+x$ 方向へ運動し続けるものとするとき，次の問に答えなさい．



(1) 箱の外で静止している人 (観測者 A) から見た箱の位置を x とし，A が見た箱の加速度 $\ddot{x}$ を求めなさい．

(2) 箱に乗った人 (観測者 B) が，箱とともに運動する $x'y'$ 座標系の原点 $(x', y')=(0,0)$ から

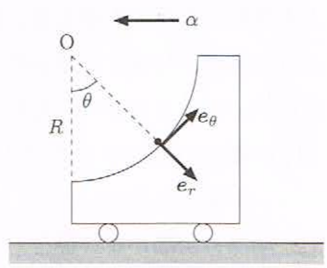
時刻 $t=0$ で鉛直上方 (B から見て) へ速さ v_0 で投げ上げられた質量 m の小球の運動を観測している．時刻 t における小球の位置を (x', y') とするとき，小球に対する運動方程式の x' 成分と y' 成分を $\ddot{x}'$ および $\ddot{y}'$ を用いて表しなさい．ただし，箱の質量は大きく，小球を投げたことによる箱の運動への影響はないものとする．

(3) (2) の運動方程式を時間で積分し，初期条件を適用して任意定数を決定することにより，解 x' と解 y' を求めなさい．

(4) B が見た小球の軌道を表す式を求めなさい．

(5) B が観測する小球の落下位置を $(l, 0)$ とするとき，落下点の水平距離 l を求めなさい．また，それは B の前方か後方かを答えなさい．

2.4 半径 R の四分円の形をした滑らかな曲面が台車に固定され，その曲面に沿って質量 m の質点が鉛直面内を運動する．台車は図の矢印の向きに一定の加速度 α ($\alpha > 0$) で動いている．以下では台車とともに動く座標系で，質点の運動を考える．重力加速度の大きさを g とし，垂直抗力の大きさを N とおく．



(1) 極座標表示 (θ は鉛直下方からの角度) を考え，r 方向，θ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ とする．位置ベクトル $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{e}_r$ を時間で微分することにより，速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$，および加速度ベクトル $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を用いて表しなさい．ただし，$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ を用いてよい．

(2) 質点にはたらく慣性力を $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を用いて表しなさい．

(3) r 方向，θ 方向の運動方程式をそれぞれ書きなさい．

(4) θ 方向の運動方程式の両辺に $\dot{\theta}$ を乗じ，時間で積分 (エネルギー積分) することにより，$\dot{\theta}^2$ に対する一般解を求めなさい．

以下では $\alpha = g$ とする．公式 $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta - \pi/4)$, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos(\theta - \pi/4)$ を用いてよい．

(5) 質点を $\theta = 5\pi/12$ で静かに離したとき，設問 (4) の積分定数を求めなさい．このときの質点の可動領域を θ の範囲で表しなさい．また，質点の速さが最大になるときの θ の値 θ_1 を求めなさい．

(6) θ が θ_1 のまわりを微小振動するとき，その周期を求めなさい．

2.5 図のように，静止座標系 $x-y$ (O 系と呼ぶ) において，質量 m の粒子が x-軸上の点 $(a, 0)$ で静止している．この粒子を $x-y$ 座標系に対して一定角速度 ω で回転している $x'-y'$ 座標系 (O' 系と呼ぶ) で観測する．$t=0$ で両座標は一致していた．ここで，z-軸を両座標系に共通に紙面の裏から表に向かうように取ろう．O' 系での粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}' = (x', y', 0)$，回転ベクトルを $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ とすると，O' 系でのみかけの力のうち，遠心力は $m\omega^2\boldsymbol{r}'$，コリオリ力は $-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$ で与えられる．ここで $\boldsymbol{v}' = (v'_x, v'_y, 0)$ は O' 系で見た粒子の速度である．

(1) x', y' を a, ω, t でそれぞれ書きなさい．

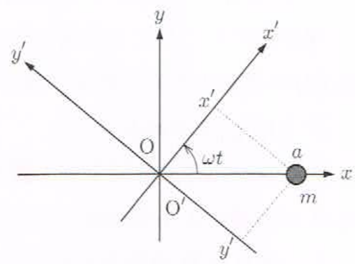
(2) v'_x, v'_y を a, ω, t でそれぞれ書きなさい．

(3) O' 系では粒子はどのような運動をしているように見えるか?

(4) コリオリ力を計算し，結果を $\boldsymbol{r}'$ を用いて書きなさい．

(5) コリオリ力と遠心力との和を求め，見かけの力の合力を $\boldsymbol{r}'$ で書きなさい．

(6) O' 系において，向心加力と見かけの力の合力との関係を述べなさい．



3　運動方程式の積分

3.1　一端が固定されたばね定数 k のばねの他の端に質点 m がつながれていて，水平な床の上を運動する場合を考える．ばねの自然な長さからの変位を x とし，x 軸を右方向が正となるように選ぶ．時刻 t において $x = x_0$ $(x_0 > 0)$ で静かに手を放した後の物体の運動について，次の問いに答えなさい．ただし，動摩擦係数を μ', 重力加速度を g とする．

(1) 摩擦力の大きさを F とし，この物体が左方向へ運動するときの運動方程式を x と $\ddot{x}$ を用いて書きなさい．

(2) 摩擦力が働かない場合 $(F = 0)$ には，(1) の運動方程式は同次方程式となる．その一般解を求めるために，解の形を $x = e^{\lambda t}$ と仮定して，x が解となるような λ の値をすべて求めなさい．

(3) (2) の結果から，同次方程式の一般解を求めなさい．

(4) 摩擦力が働いている場合，(1) の運動方程式は非同次方程式となる．その特解を $x = A$(A は定数) の形に仮定し，x が解となるように A を μ', g, m, k で表しなさい．

(5) 摩擦力が働いている場合に，物体が動き出してから次に静止するまでの解を求めなさい．

(6) (5) の解が示す物体の運動をグラフに図示しなさい．ただし，グラフの縦軸を変位，横軸を時間にとるものとする．

(7) 物体が動き出してから静止するまでの間にばねに蓄えられたポテンシャルエネルギーの変化分と，その間に摩擦力がした仕事をそれぞれ求めなさい．また，両者の間の関係について説明しなさい．

3.2　質量 m の弾丸を水平方向に初速度 v_0 で打ち出した時の鉛直面内の運動を考える．水平方向に x 軸を，鉛直上向きに y 軸をとる．弾丸の位置ベクトルと速度ベクトルはそれぞれ $\boldsymbol{r} = (x, y)$，$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ と書かれ，重力加速度ベクトルは $\boldsymbol{g} = (0, -g)$ である．水平方向（x 軸方向）には速度の 2 乗に比例する抵抗力 $-kv_x^2$ がかかる．鉛直方向（y 軸方向）に対しては抵抗が無視でき，力は重力のみがかかる．初期の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}(t = 0) = (0, 0)$ である．

(1)　x, y に関してそれぞれ運動方程式をたてなさい.

(2)　(1) の x に関する運動方程式において $\dot{x} = v_x$ とおき, 初期条件を考慮して水平方向の速度の時間依存性を求めなさい.

(3)　(2) の解をさらに x に関する一階の微分方程式とみなして, $x(t)$ を求めなさい.

(4)　質点の軌跡を表す (x, y) が満たす式を求めなさい.

3.3　x 軸にそって 1 次元運動している粒子の質量を m, 座標を x とする. 速度は正としてよい. 粒子に働く力は, 速度に比例する抵抗力 $-\gamma\dot{x}$ $(\gamma > 0)$ と, 速度の 2 乗に比例する抵抗力 $-b\dot{x}^2$ $(b > 0)$ の和である. 重力は無視する.

(1) x に対する運動方程式を書きなさい.

(2) 運動方程式を速度 $\dot{x} = v$ に対するものに書き直しなさい.

(3) v の一般解を求めなさい. (積分定数を 1 つ含む)

ヒント; 変数分離型である. 次の部分分数分解を用いると良い.

$$\frac{1}{v(av+b)} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{v} - \frac{a}{av+b}\right)$$

(4) 時刻 $t = 0$ での初期条件 $v = v_0$ のもとで, 積分定数を決めなさい.

(5) $t \to \infty$ での v の値 v_∞ を求めなさい.

3.4　質量 m の質点の 1 次元運動を考え, その座標を x とする. 質点には, 速度に比例する抵抗力 $-k\dot{x}$, および時間とともに減衰する外力 $F_0 e^{-\alpha t}$ がはたらいている (k, F_0, α はいずれも正の定数). 重力は考えない. $t = 0$ で質点は静止していたとする.

(1)　$v = \dot{x}$ として, 運動方程式を v の微分方程式として書きなさい.

(2)　方程式の特解を, $v = Ce^{-\alpha t}$ と仮定して求めなさい (つまり C を求める). ただし, $k \neq m\alpha$ とする.

(3)　方程式の一般解を求めなさい. ただし, $k \neq m\alpha$ とする.

(4)　$k > m\alpha$ のとき, 初期条件を満たす $v(t)$ を求め, $v(t)$ のグラフの概形を描きなさい.

3.5　x を t の関数として以下の微分方程式の一般解を求めなさい. 解は実数形で表すこと.

(1)　$\dot{x} = xt$　　(2) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$　　(3) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$　　(4) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 5$

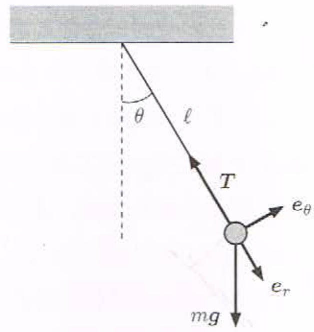
3.6　バネにつながれた質量 m の質点が x 軸上を運動している. バネの非線形項を含めた運動方程式

$$m\ddot{x} = -K_1 x - K_2 x^3$$

を考える (K_1, K_2 は正の定数). エネルギー積分の方法 (両辺に $\dot{x}$ をかけて時間 t で積分) を用いて, $\dot{x}^2$ を x の関数として表しなさい. ただし $x = x_0$ と $-x_0$ のときに $\dot{x} = 0$ とする.

3.7　天井から吊るした長さ ℓ の軽い糸の端に質量 m の質点をつけ, 一様重力場中で鉛直面内で振らせる. 重力加速度の大きさを g とする. また, 質点には速度に比例する空気抵抗 $-\gamma\dot{\boldsymbol{r}}$ $(\gamma > 0)$ もはたらいている.

鉛直下方からの質点の振れ角を θ として，極座標表示を考え，r 方向，θ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ とする．すると $\boldsymbol{r} = \ell \boldsymbol{e}_r$ であり，糸の張力は $\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_r$ である．また，$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$，$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ が成り立つ．



(1)　重力と空気抵抗力を $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を用いて極座標表示しなさい．

(2)　運動方程式を記しなさい．また，極座標で $\boldsymbol{e}_r$ 成分と $\boldsymbol{e}_\theta$ 成分それぞれの運動方程式を記しなさい．

(3)　振れ角 θ が小さいとき，$\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta \simeq 1$ と近似してよい．このとき，運動方程式の $\boldsymbol{e}_\theta$ 成分を求めなさい．

(4)　前問で，減衰が小さくて $\gamma^2 < 4m^2 g/\ell$ の場合に，θ に対する一般解を実数の形で求めなさい．

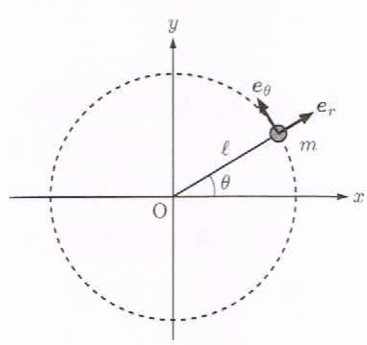
(5)　前問で，時刻 $t = 0$ で $\theta = 0$ から角速度 $\dot{\theta} = \omega_0$ で運動させた．任意の時刻 t での θ を求めなさい．

3.8　水平な xy 平面上で，原点に一端を固定した長さ ℓ の軽い糸の他端に質量 m の質点を結ぶ．質点の初期位置は $(x, y) = (\ell, 0)$ で，時刻 $t = 0$ で $+y$ 方向に撃力を加えたところ，初期の速さ v_0 で半径 ℓ の円に沿って運動を始めた．質点には速度に比例する空気抵抗 $-\gamma\dot{\boldsymbol{r}}$ $(\gamma > 0)$，および水平面からの摩擦力がはたらく．質点が動いているとき，摩擦力の大きさは一定値 F_0，向きは速度の反対方向である ($F_0 = \mu' mg$ であるが，以下の設問では F_0 を用いて解答すること)．なお，z 方向は重力と垂直抗力がつりあっているので考えなくてよい．

(1)　極座標表示を考え，r 方向，θ 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ とする．位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \ell\boldsymbol{e}_r$ (常に $r = \ell$) を時間で微分することにより，速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$, および加速度ベクトル $\ddot{\boldsymbol{r}}$ を $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を用いて表しなさい．ただし，$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r$ を用いてよい．

(2)　糸の張力の大きさを T とする．$\dot{\theta} > 0$ のとき，糸の張力，空気抵抗，水平面からの摩擦力の合力 $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$ を用いて表しなさい．

(3)　$\dot{\theta} > 0$ のとき，r 方向，θ 方向の運動方程式をそれぞれ書きなさい．



(4)　$\dot{\theta} = \omega$ とおき，前問で求めた θ 方向の運動方程式を ω についての微分方程式に書き直しなさい．それを解き，ω の一般解を求めなさい．

(5)　$\dot{\theta}$ の初期条件を書きなさい．それを用いて (4) の一般解の積分定数を決めなさい．

(6)　質点が止まる時刻を求めなさい．

4 ポテンシャル，仕事，保存力

4.1 3次元空間における質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とするとき，次の設問に答えなさい．

(1) ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (2, 0, -1)$ に対して $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ を求めなさい．

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とするとき，$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r^3}\right)$ を計算しなさい．

(3) 質点の質量を m とする．ポテンシャル $U(x, y, z) = \dfrac{1}{2}K(x^2 + xy + z^2)$ の中を運動するとき，運動方程式を成分ごとに書きなさい (運動方程式は解かなくてよい)．ただし，K は定数である．

4.2 次の各設問に答えなさい．

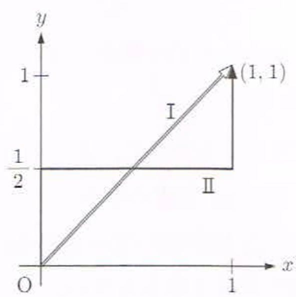
(1) 3次元空間で，質量 m の粒子がポテンシャル $U(x, y, z) = Ax^2 + Bxy + Cz^2$ の中を運動している．ここで，A, B, C は定数である．粒子の位置ベクトルを (x, y, z) とするとき，粒子にはたらく力 $\boldsymbol{F}$ を求めなさい．次に，運動方程式を成分ごとに書きなさい．(運動方程式は解かなくてよい．)

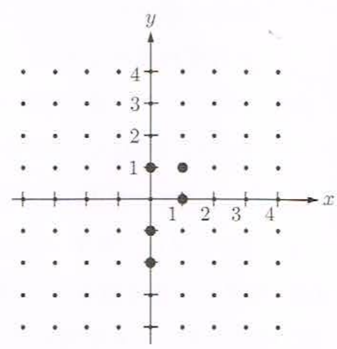
(2) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$r = |\boldsymbol{r}|$ とする．このとき，grad r^3 または $\boldsymbol{\nabla} r^3$ を求めなさい．

(3) 微分方程式 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ の一般解を，実数の形で求めなさい．次に，$t = 0$ で $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 0$ を満たす解を求めなさい．(x の上の点 (ドット) は時間微分を表す．)

4.3

(A) $F_x = -2x$, $F_y = 2y$
(B) $F_x = 2y$, $F_y = -2x$
で表される2つの力AとBを考える．





(1) 図の経路 I および II に沿って質点を動かした時，それぞれの力のする仕事を求めなさい．(結果だけでなく，どのように仕事を求めたのか分かるように記しなさい．)

(2) 力 A，B それぞれについて，保存力であるかどうか判定しなさい．また，その理由を述べなさい．

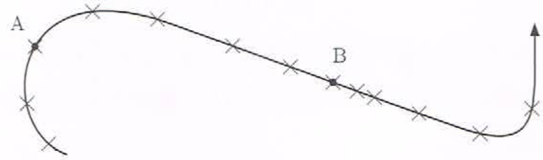
(3) (2) で保存力と判定された力 (2つある場合はどちらか一方) について，位置エネルギー $U(x, y)$ を求めなさい．ただし，$U(0, 0) = 0$ とする．

(4) $U(x, y) = -4$, -1, 0, 1, 4 それぞれの場合について等高線を図に書き込みなさい．(U が負の値の時は破線で書きなさい．)

(5) 上図の ● で記されている点での力を，● を原点とするベクトルとして図に書き込みなさい．

4.4　次の 3 つの設問に答えなさい．

(1) 平面上での質点の動きが図に示されている．× 印は一定時間間隔ごとの質点の位置である．点 A および点 B で速度，および加速度はどの方向を向いているか，図に矢印で描きなさい．速度は ⟹ のように中を抜いた矢印，加速度は ⟶ のように中を塗りつぶした矢印とし，点 A および点 B が矢印の始点となるように描くこと．



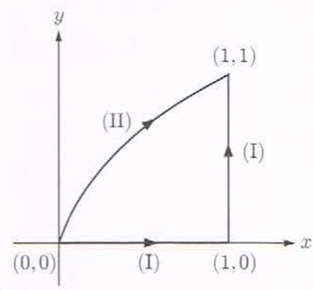
(2) 力 $\boldsymbol{F}$ が保存力のとき，ポテンシャル $U(\boldsymbol{r})$ を用いて，$\boldsymbol{F}=-\nabla U$ と表される．この時，質量 m の質点の持つ力学的エネルギー

$$E=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+U(\boldsymbol{r})$$

は保存されることを示しなさい．

4.5　2 次元の力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=F_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{i}+F_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}=(2x+y)\boldsymbol{i}+A(x+1)\boldsymbol{j}$ を考える．ただし，A は定数とする．

(1)　この力の下で，図に示す 2 つの経路 (I) および (II) $y=-\dfrac{2}{x+1}+2$ に沿って，点 (0,0) から点 (1,1) まで物体を動かしたとき，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のする仕事 $W_{(\mathrm{I})}$, $W_{(\mathrm{II})}$ をそれぞれ求めなさい．



(2)　2 次元の力の場が保存力であるための一般的な条件を，F_x, F_y を用いた式で書きなさい．

(3)　この問題の力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が保存力となるように，A の値を求めなさい．

(4)　(3) の場合，ポテンシャル $U(x,y)$ を求めなさい．ただし，$U(0,0)=0$ とする．

4.6　位置 $\boldsymbol{r}$ にある質量 m の質点に力 $\boldsymbol{F}$ が働いている場合について，次の問いに答えなさい．

(1) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を用いて運動方程式を書きなさい．

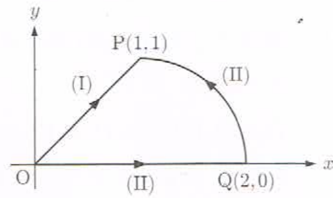
(2) 運動方程式の両辺に内積の意味で速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ を掛けることにより，運動エネルギーの変化が力のした仕事に等しいことを表す式を導きなさい．

(3) 力 $\boldsymbol{F}$ が保存力の場合，全エネルギーが運動の過程で保存されることを (2) の結果から導きなさい．

4.7　2 次元の力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=F_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{i}+F_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}=(Ay+2)\boldsymbol{i}+(-x+1)\boldsymbol{j}$ を考える．ただし

A は定数である．

(1) この力のもとで，図に示す 2 つの経路 (I) および (II) に沿って，点 $(0,0)$ から点 $\mathrm{P}(1,1)$ まで物体を動かす．経路 (I) は線分 OP であり，経路 (II) は $(0,0)$ と $\mathrm{Q}(2,0)$ を結ぶ線分と中心 $(1,0)$，半径 1 の円周の一部から成る．このときの $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ のする仕事 $W_{(\mathrm{I})}$, $W_{(\mathrm{II})}$ をそれぞれ求めなさい．



(2) 2 次元の力の場が保存力であるための一般的な条件を，F_x, F_y を用いた式で書きなさい．

(3) この問題の力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が保存力となるように，A の値を求めなさい．

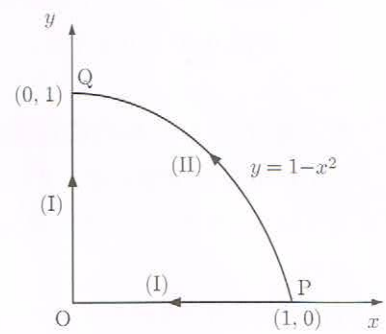
(4) (3) の場合，ポテンシャル $U(x,y)$ を求めなさい．ただし，$U(0,0)=0$ とする．

4.8 2 次元 xy 平面において力の場 $\boldsymbol{F}(x,y)=(F_x(x,y),F_y(x,y))=(x^2+Ay,x^n)$ を考える．ただし A と n は定数で，$n>0$ である．

(1) この力のもとで点 $\mathrm{P}(1,0)$ から点 $\mathrm{Q}(0,1)$ まで，図中の 2 つの経路 (I), (II) に沿って物体を動かす．経路 (I) は P から O，O から Q を 2 本の直線で結ぶ．経路 (II) は $y=1-x^2$ に沿う．力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ の行う仕事 $W_{(\mathrm{I})}$, $W_{(\mathrm{II})}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) 2 次元 xy 平面で力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるための一般的な条件式を書きなさい．

(3) 題意の $\boldsymbol{F}(x,y)$ が保存力となるように A と n の値を決めなさい ($n>0$ に注意のこと)．

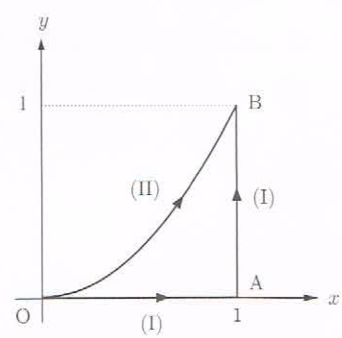


(4) 題意の $\boldsymbol{F}(x,y)$ が保存力の場合，ポテンシャル $U(x,y)$ を求めなさい．ただし $U(0,0)=0$ とする．

4.9 2 次元 xy 平面での力の場

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=(F_x(x,y),F_y(x,y))=(4axy,4x^2+3(a-2)x)$$

を考える (a は定数)．この力の下で，物体を点 O: $(0,0)$ から点 B: $(1,1)$ まで，右図のような二つの経路 (I), (II) に沿って動かす．経路 (I) では途中点 A: $(1,0)$ を経由し，経路 (II) では曲線 $y=x^2$ に沿って移動する．



(1) 経路 (I) に沿った仕事 $W_{(\mathrm{I})}$ と経路 (II) に沿った仕事 $W_{(\mathrm{II})}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) 2 次元 xy 平面で力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるための一般的な条件式を書きなさい．

(3) この問題の力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が保存力となるように，a の値を定めなさい．

(4) この問題の力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が保存力のとき，点 (x,y) におけるポテンシャル $U(x,y)$ を求めなさい．ただし $U(0,0)=0$ とする．

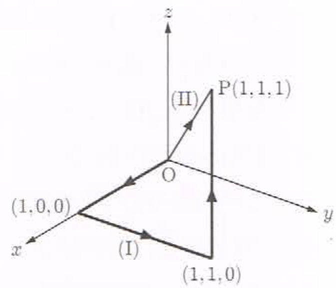
4.10 3 次元空間において，x, y, z 成分がそれぞれ $F_x = xy + yz$, $F_y = ax^2 + bxz$, $F_z = cxy$ である力の場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ を考える．ここで a, b, c は定数である．

(1) 質点を点 O(0,0,0) から点 P(1,1,1) まで，図中の 2 つの経路

(I): $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$

(II): $x = y = z$ を満たす直線上

に沿って動かす時，力 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ がする仕事 $W_{(\mathrm{I})}$, $W_{(\mathrm{II})}$ をそれぞれ求めなさい．



(2) 3 次元空間で力の場 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるための一般的な条件式を書きなさい．

(3) 題意の力 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ が保存力となるように定数 a, b, c を決めなさい．

(4) 題意の $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ が保存力のとき，ポテンシャル $U(x, y, z)$ を求めなさい．ただし，$U(0,0,0) = 0$ とする．

5　ポテンシャル内の運動，振動

5.1 質量 m の質点が，ばね定数 k のばねにつながれて一次元運動をしている．平衡の位置を $x = 0$ とする．この系に $F_0 \cos(\omega t + \phi)$ で与えられる外力が加わった時，次の問いに答えなさい．

(1) 運動方程式を書きなさい．

$k/m = \omega_0^2$, $F_0/m = f_0$ とおいて，以下では $\omega_0 = \omega$ の場合を考える．答えは ω, f_0, ϕ を用いて表しなさい．

(2) $\omega_0 = \omega$ の時は，特殊解として $x = t(D \cos \omega t + E \sin \omega t)$ の形が知られている．D, E を求めなさい．

(3) $\omega_0 = \omega$ の時の，2 個の積分定数を含む一般解を示しなさい．

(4) $\omega_0 = \omega$ の時に起こる現象を何と呼ぶか．その時の様子を上の結果に基づいて簡単に説明しなさい．さらに自然界で起こる対応する現象を一つ挙げなさい．

5.2　2次元空間 (x, y) でポテンシャルが $U(x, y) = m\omega^2 xy$ と与えられている．この時，質量 m の質点の運動を考える．

(1) $x = 0$，$y = 0$ を含む第4象限 $(x \geq 0,\ y \leq 0)$ での等ポテンシャル線を $U = 0$，$-m\omega^2$，$-2m\omega^2$，$-3m\omega^2$ の場合に書きなさい．また，力の様子（方向と大きさ）がわかるように，図の中で ● 印のついている点で，点を始点とする矢印として力を図に書き込みなさい．

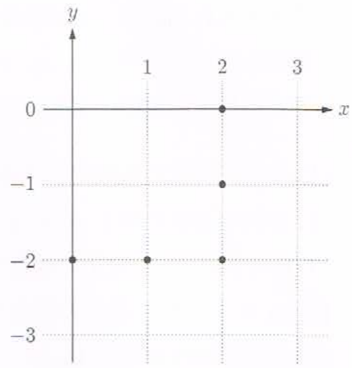
(2) この質点の運動方程式を書きなさい．

(3) $X = x + y$, $Y = x - y$ で定義される新しい変数 X, Y を用いて (2) の運動方程式を書き直しなさい．

(4) 変数 X はどのような運動をするか説明しなさい．

(5) Y について運動方程式を解き，一般解を求めなさい．

(6) $t = 0$ で $Y = a$，$\dot{Y} = 0$ の初期条件を満たす Y を求めなさい．



5.3　位置エネルギーを $U(\boldsymbol{r}) = 1/r$ とする．ただし，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である．

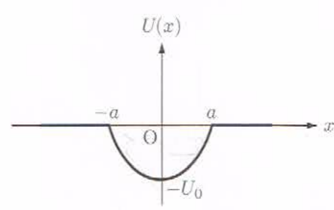
(1) 位置 $\boldsymbol{r}$ での力を求めなさい．

(2) この力を受けて運動する質量 m の質点の運動方程式を書きなさい．

(3) 力学的エネルギー $E = m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}/2 + U(\boldsymbol{r})$ は時間変化しないことを示しなさい．

5.4　1次元において，次のポテンシャル $U(x)$ 中を運動する質量 m の質点を考える．質点の初期状態は，時刻 $t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$ である．

$$U(x) = \begin{cases} -U_0 + U_0(x/a)^2 & (U_0 > 0) \quad \text{for } |x| \leq a \\ 0 & \quad\quad\quad\quad\quad\;\; \text{for } |x| > a \end{cases}$$

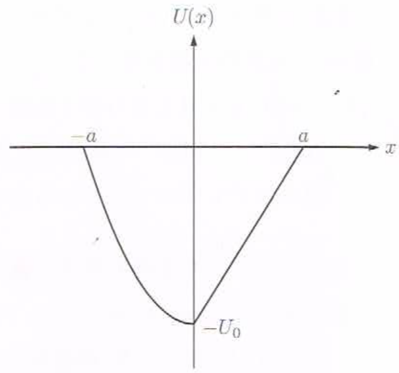


(1)　質点はどのような範囲を動くか，v_0 の値に応じて答えなさい．

(2)　質点が原点の左右を往復運動するとき，質点の運動方程式を書きなさい．

(3)　質点が原点の左右を往復運動するとき，時刻 t での質点の位置を，初期状態を考慮して求めなさい．

5.5 x 軸上を運動する質量 m の粒子のポテンシャルが,



$$U(x) = \begin{cases} \left(-1+\dfrac{x}{a}\right)U_0 & (0 \le x < a) \\ \left(-1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right)U_0 & (-a < x < 0) \\ 0 & (|x| \ge a) \end{cases}$$

で与えられている．右図参照．ここで，$U_0 > 0$ とし，初期条件を $x = 0,\ \dot{x} = v_0$ とする．粒子の座標を x として以下の設問に答えなさい．

(1) 粒子が有限の領域を往復運動するための v_0 の範囲を求めなさい．

(2) 前問の運動範囲を $x_1 < x < x_2$ と書く．x_1, x_2 を求めなさい．

(3) $0 < x < x_2$ で粒子の運動方程式を書きなさい．

(4) $x_1 < x < 0$ で粒子の運動方程式を書きなさい．

(5) 往復運動の周期を $U_0, a, m, |v_0|$ を用いて書きなさい．