

数学B4 秋学期末試験問題

(担当：石井) 2013年 | 月28日(月) 6時限

90分

試験時間 90 分 持ち込み不可 答案用紙 2 枚 計算用紙 1 枚 (回収不要)

[1] n 次行列 A, B についての次の各命題 (1), (2), (3) が正しいならばそれを証明し、誤りであるならば反例を一つ挙げよ。

- (1) A, B がともに正則ならば、積 AB も正則である。
- (2) A, B がともに対称行列ならば、積 AB も対称行列である。
- (3) A, B がともに直交行列ならば、積 AB も直交行列である。

[2] A, B を n 次行列で、 $A = P^{-1}BP$ を満たす n 次正則行列 P が存在するものとする。

- (1) 「 λ が A の固有値で、 \vec{x} がその固有ベクトルである」ということの定義を述べよ。
- (2) λ が A の固有値であれば、 λ^k が A^k の固有値であることを示せ。
- (3) λ が A の固有値で、 \vec{x} がその固有ベクトルであるとする。このとき、 λ は B の固有値でもあり、 $\vec{y} = P\vec{x}$ はその固有ベクトルであることを示せ。

[3] 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 2 \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための、実数 a, b, c の条件を求めよ。

[4] 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ。

- (1) A の固有値を求めよ。
- (2) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような直交行列 T を一つ求めよ。また、その逆行列 T^{-1} を求めよ。
- (3) A^n を求めよ。(解答は3つの行列の積の形でよい)

[5] 3変数 x, y, z の2次形式

$$x^2 + 2ay^2 + 4z^2 + 6ayz - 2zx + 2axy$$

が正定値となるための実数 a の条件を求めよ。

[6] B は n 次実正則行列とする。このとき、

- (1) tBB が対称行列であることを示せ。
- (2) さらに、 tBB が正定値であることを示せ。
- (3) $A^2 = {}^tBB$ を満たす正定値対称行列 A が存在することを示せ。