数学 1A 期末試験

以下の設問$\boxed{1}$から$\boxed{5}$に答えなさい．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること．

$\boxed{1}$

(1) 次の関数 f は $x=0$ で連続か否か．理由とともに答えなさい．

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \in \left[\dfrac{-1}{2n-1}, \dfrac{-1}{2n}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1}\right],\ n \in \mathbb{N}, \\ -x & \text{for } x \in \left[\dfrac{-1}{2n}, \dfrac{-1}{2n+1}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\right],\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

(2) 次の関数 f は $x=0$ で微分係数を持つか否か．持つならばそれを求めなさい．ただし求める過程も記しなさい．持たないならばその理由を記しなさい．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x \le 0. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $\sqrt{1+\log(1+x)}$ を $x=0$ のまわりで 3 次までテイラー展開しなさい．ただし剰余項は求めなくてよい．

$\boxed{3}$

(1) f は $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 関数であり，$f(x,0)=\sin x$，$f(0,y)=y$ を満たすものとする．$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_x(x,y), f_y(x,y))$ を求めなさい．ただし求める過程も記しなさい．

(2) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ に対して，点 $(a,b) \neq (0,0)$ を固定し，極限値

$\sqrt{w_1^2+w_2^2}=1$

$$D(\vec{\omega}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+\omega_1 h, b+\omega_2 h) - f(a,b)}{h} \quad (\text{ただし } \vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ \|\vec{\omega}\| = 1)$$

$w_1^2+w_2^2=1$

を考える．$D(\vec{\omega})$ を f_x，f_y，ω_1，ω_2 を用いて表しなさい． $D(\vec{\omega})$ を最大にする $\vec{\omega}$ を求めなさい．またその最大値を求めなさい．

$\boxed{4}$

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^1 関数とする．集合 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ 上で f の最大値が存在しかつ最大値を与える点で $(f_x, f_y) \neq (0,0)$ となることはあり得るか否か．理由とともに答えなさい．

(2) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{3} - x^2 - y^2 + xy$ の停留点を全て求め，極大点，極小点，あるいはそのいずれでもないかを判定しなさい．

$\boxed{5}$ $\varphi(x,y) = 12x^4 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ を満たす (x,y) 全体を C と表す．C が有界であることを示しなさい．また，$f(x,y) = x^2+y^2$ の C における最大値と最小値をラグランジュの乗数法を用いて求めなさい．