1

1.1

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\ to\infty} \mathrm{Tan}^{-1} x + \lim_{x\ to\infty} \mathrm{Tan}^{-1} \frac{1}{x} \\
&= \frac{\pi}{2} + 0 = \underline{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

1.2

$x = \tan y$ の両辺を x で微分すると

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2 y}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

これより,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot -\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\
&= \underline{0}
\end{aligned}
$$

1.3

$b/a > 0$ の時,

$$
\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}
$$

である．これは正接の定義による．このことを用いると $f(1) = f(2) = \pi/2$

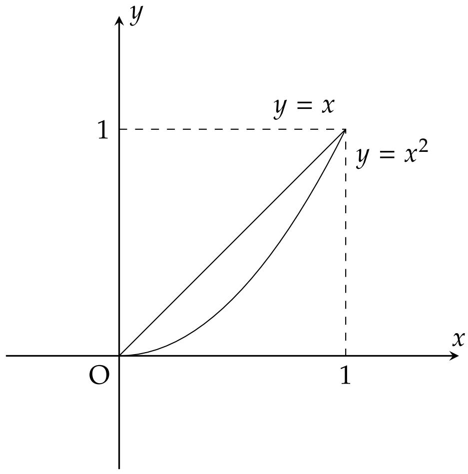
2

$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+2)(x^2+2x+2)$ より

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{1}{x^3+3x^2+4x+2}\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x \\
= \left[\log|x+1|\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\left(\frac{(x+1)^2+1}{2}\right)'}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x &= \log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\log\frac{(x+1)^2+1}{2}\right]_1^2 \\
&= \underline{\log\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log 2}
\end{aligned}
$$

3

3.1



積分区間 A は直線と放物線で囲まれる領域であり, 下図の通りである.
これより,

$$\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \iint_A f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \underline{\int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x, y)\mathrm{d}y \right)}\mathrm{d}x$$

3.2

前問と同様に考えれば,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^2 \frac{y}{-y^4 + 2y^2 + 15} \cdot x^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{-y^4 + 2y^2 + 15} \cdot (-y^4 + 2y^2 + 15)\mathrm{d}y = \underline{\frac{1}{8}}$$

4

4.1

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と準備すると,

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\sin\theta \end{vmatrix} = r$$
$$f(x, y) = r^{-3}\sin\left(\frac{1}{r}\right)$$

ここで

$$g(R) = \iint_{\overline{B}(R)-B(3/\pi)} r^{-3} \sin\left(\frac{1}{r}\right) \cdot r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi} \int_{3/\pi}^{R} \left(\frac{1}{r}\right)' \sin\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\cos\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{3/\pi}^{R} \mathrm{d}\theta$$
$$= 2\pi \left(\cos\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

より問題文の条件の時，$g(R)$ は R に関して単調増加である．

4.2

前問で

$$\lim_{R\to\infty} g(R) = \pi, \lim_{R\to\infty} g(\sqrt{2}R) = \pi$$

より，挟み撃ちの定理から

$$\lim_{R\ to\infty} \iint_{D(R)-B(3/\pi)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\pi}$$

5

5.1

$$\nabla \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t - \cos t) \\ e^t \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

を用いれば

$$\int_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\int_0^{10} (\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t - \cos t) + 1)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{10} 1 - \sin t(\sin t)'\mathrm{d}t = [t - \frac{\sin^2 t}{2}]_0^{10}$$
$$= \underline{10 - \frac{\sin^2 10}{2}}$$

5.2

グラフ表示されることから，$\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, \phi(x,y))$ とすると，

$$\partial_x \boldsymbol{r} = (1, 0, \phi_x),$$
$$\partial_y \boldsymbol{r} = (0, 1, \phi_y)\boldsymbol{n} = \pm\frac{\partial_x \boldsymbol{r} \times \partial_y \boldsymbol{r}}{\|\partial_x \boldsymbol{r} \times \partial_y \boldsymbol{r}\|}$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{\phi_x^2}}$$