慶應義塾大学試験問題　物理学C（一斉）

2017 年 11 月 21 日（火）1 時限（試験時間 50 分）　問題用紙 回収不要

担当者　神成、木下、佐々田、高野

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数 ε_0、磁気定数 μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I デカルト座標系 (x, y, z) を用いて考える。x, y, z 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。ベクトル量は $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$ のように $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表すか、$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように成分表示で表すものとする。

(1) 真空中で、z 軸上の線上全て $(-\infty < z < \infty)$ に一定の線電荷密度 σ_0 で電荷が分布している。このとき、ガウスの法則を用いて、位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) z 軸を中心軸とする無限に長い半径 a の円柱の $y > 0$ の部分 (半円柱内) に一定の電荷密度 ρ で電荷が分布している (図 I 参照)。原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ における電界 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ を求めなさい。

ヒント: z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系を用いると、デカルト座標系とは、$x = r\cos\varphi$、$y = r\sin\varphi$ の関係がある。半円柱内で、座標 r が $r \sim r + \mathrm{d}r$、座標 φ が $\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$、座標 z が $-\infty < z < \infty$ で指定される部分 (微小断面積 $r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ をもつ無限に長い柱状の部分) が原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ につくる電界 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r, \varphi)$ を考える。この部分は、$x = r\cos\varphi$、$y = r\sin\varphi$ の位置を通過する z 軸に平行な無限に長い直線上に線電荷密度 $\rho r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ で電荷が分布したものと考えることができ、(1) の結果を $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r, \varphi)$ の計算に利用できる。

(3) (2) の系で、$y < 0$ の空間を導体で満たしたとき、導体表面上の原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ の直近の位置での面電荷密度 ω を求めなさい。

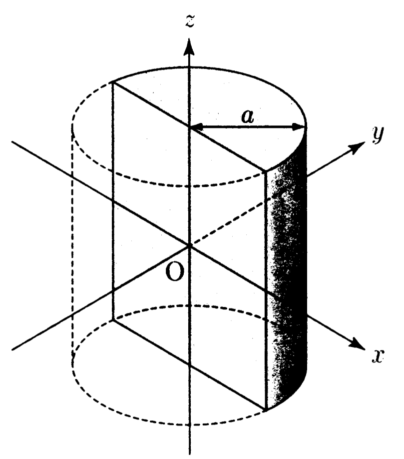

図 I

問題 II 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ が

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \phi_0 \left\{ \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \right\} & \cdots \ r \le a \\ \phi_0 \dfrac{a}{r} & \cdots \ a < r \end{cases}$$

で与えられている。ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ であり、ϕ_0、$a\ (> 0)$ は定数である。

(1) 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(3) この系の全静電エネルギー U_{E} を求めなさい。

問題 III 図 III のように、半径 a の球面状の極板 A と半径 $b\ (b > a)$ の球面状の極板 B が、中心を共通にして配置してある。球面の中心を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の原点とする。AB 間は、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電気伝導率 $\sigma(\boldsymbol{r})$ が

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 \left(\frac{b}{r}\right)^3 \ \cdots \ a \le r \le b$$

となるように導体で満たされている。ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ は原点からの距離、σ_0 は正の定数である。AB 間の電位差が一定に保たれ、A から B に一定電流 I が流れている場合を考える。

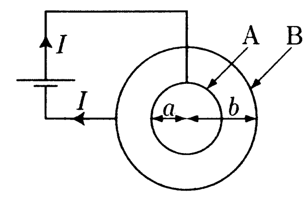

図 III

(1) AB 間の位置 $\boldsymbol{r}$ における電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ と電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) AB 間の電位差 V を求め、AB 間の全電気抵抗 R を求めなさい。

(3) $a < r_1 < r_2 < b$ とするとき、中心からの距離 r が $r_1 < r < r_2$ の領域 (球殻) で単位時間に発生するジュール熱 $P(r_1, r_2)$ を求めなさい。

問題 IV デカルト座標系 (x, y, z) を用いて考える。x, y, z 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。ベクトル量は $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$ のように $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表すか、$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように成分表示で表すものとする。

真空中に xy 面に平行な厚さ $2a$ の無限に広い導体があり、その中を定常電流が流れている。位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}(x, y, z)$ は

$$\boldsymbol{i}(x, y, z) = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \cdots \ z < -a & (\text{真空中}) \\ i_0 \left(\dfrac{z}{a}\right)^3 \boldsymbol{e}_y & \cdots \ -a \le z \le a & (\text{導体中}) \\ \boldsymbol{0} & \cdots \ a < z & (\text{真空中}) \end{cases}$$

で与えられている。i_0, a は正の定数である。外部から磁界は加わっていないものとする。

(1) b を $a < b$ (即ち、$-b < -a$) を満たす正の定数とする。$-b < z$ となる z に対し、点 $\mathrm{A}(0, 0, z)$, $\mathrm{B}(l, 0, z)$, $\mathrm{C}(l, 0, -b)$, $\mathrm{D}(0, 0, -b)$ を頂点とする長方形 ABCD を貫く全電流 $I(z)$ を求めなさい。ここで、l は正の定数である。

ヒント: $-b < z < -a$, $-a \le z \le a$, $a < z$ の 3 つの領域に分けて考える。

(2) 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ は導体外の領域 ($z < -a$ または $a < z$) では $\boldsymbol{0}$ となる。その理由を述べなさい。

(3) 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ を導体内の領域 ($-a \le z \le a$) に対して求めなさい。