2021 年度数学 1A 期末試験

以下の設問 $\boxed{\mathbf{1}}$ から $\boxed{\mathbf{5}}$ に答えよ．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x,y)=\dfrac{\tan y}{1-x}$ の $(x,y)=(0,0)$ における 4 次のテイラー近似を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 開区間 $(-1,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ を以下で定める:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+x)}{x} & (-1<x<0 \text{ または } 0<x \text{ のとき}) \\ 1 & (x=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

(1) $-1<x<0$ または $0<x$ としたとき，$f'(x)$ を求めよ (**結果のみでよい**)．

(2) $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ．

(3) $f(x)$ は $(-1,\infty)$ 上の C^1 級関数となるかを判定し，その証明をせよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $f(x,y)$ を $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^∞ 級関数，$u(t)$ を $\boldsymbol{R}$ 上の C^∞ 級関数とする．$g(t)=f(u(t),t)$ とおいたとき，$g'(t)$ を f, u およびその (偏) 微分を用いて表せ (**結果のみでよい**)．

(2) $h(x,y)=4xy^3+x^2-6xy-3y^2+4x$ とし，曲線 $h(x,y)=0$ を考える．このとき，$(1,1)$ を通る $h(x,y)=0$ の陰関数 $x=\psi(y)$ が $y=1$ の近傍上で存在することを示せ．

(3) (2) の陰関数 $x=\psi(y)$ の $y=1$ における 2 次のテイラー近似を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ とする．$\boldsymbol{R}^2$ 上の C^∞ 級関数 $f(x,y)$ に対し，(a,b) が f の停留点 (臨界点) であることの定義を書け．

(2) $(a,b)\in\boldsymbol{R}^2$ とする．$\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ に対し，(a,b) が $f(x,y)$ の極小点であることの定義を書け．

(3) $g(x,y)=x^3y+xy^3-4xy$ に対し $(1,1)$, $(2,0)$ は g の停留点となる．このとき，これら 2 つの点が $g(x,y)$ の極大点，極小点またはそのいずれでもないかを判定せよ ($(1,1),(2,0)$ が停留点となることの証明は不要)．

(4) $h(x,y)=y^4-3xy^2+x^2$ に対し $(0,0)$ は h の停留点となる．このとき，$(0,0)$ が $h(x,y)$ の極大点，極小点またはそのいずれでもないかを判定せよ ($(0,0)$ が停留点となることの証明は不要)．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boldsymbol{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)=x^2+2y^2$, $\varphi(x,y)=x^6+2y^6-1$ を考える．$\varphi(x,y)=0$ という条件の下，$f(x,y)$ の最大値，最小値を求めよ．