

数学 2 B 第 1 1 回の演習問題の解答例

問：次の行列を対角化する正則行列を一つ求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例：固有方程式

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & 3 \\ -3 & \lambda - 1 & 3 \\ 3 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^3 - 54 - 27(\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 24\lambda - 28 \\ &= (\lambda + 2)^2(\lambda - 7) = 0 \end{aligned}$$

を解くと、固有値は -2 (重複度 2) と 7 である。固有値 -2 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

の解より $\begin{bmatrix} 1, 0, 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -1, 1, 0 \end{bmatrix}$ は 1 次独立な 2 つの固有ベクトルである。一方、固有値 7 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

の解より、 $\begin{bmatrix} 1, 1, -1 \end{bmatrix}$ は固有ベクトルである。以下のように P を定めればよい。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$