中間試験問題 (数学Ｂ３)

２０１２年１１月２８日
(担当　井口達雄)

答案用紙は１人２枚配布する．答案用紙１枚目の表面に問題 $\boxed{1}$, 裏面に問題 $\boxed{2}$, 答案用紙２枚目の表面に問題 $\boxed{3}$, 裏面に問題 $\boxed{4}$ を解答せよ．

$\boxed{1}$ 次の不定積分を計算せよ．ただし，a, b は実定数である．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{2(x^3-1)}{(x^2+2)(x+2)^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx$

$x^2 < x^3+1$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$

$\sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}$

$\boxed{3}$ (1) 関数 f が区間 I で一様連続であることの定義を論理記号を用いて書け．

(2) 区間 I で定義された関数 f に対して，ある正数 ε_0 および区間 I 内の数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が存在し，$|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ $(n=1,2,3,\ldots)$ および $|x_n-y_n| \to 0$ $(n\to\infty)$ が成り立っているとする．このとき，関数 f は区間 I で一様連続でないことを示せ．

(3) 以下で定められる関数 f が区間 I で一様連続であるかどうかを判定せよ．

(i) $f(x)=x^2$, $\quad I=[0,1]$

(ii) $f(x)=x^2$, $\quad I=[0,\infty)$

(iii) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $\quad I=(0,1]$

$x^2 < x^3+1$

$\frac{x^2}{x^3+1} < 1$

$\boxed{4}$ 以下で定められる関数 f が区間 $[0,\infty)$ で広義可積分であるかどうかを判定せよ．

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}}$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}}$

(3) $f(x)=\sin(x^2)$

$y=\tau$　$4\tau = (C_1\tau + C_2)(1+\tau)^2$
$4\tau = (C_1\tau+C_2)(1+2\tau-1)$
$4\tau = -2C_1 + 2\tau C_2$

$4 = C_1(1+y)^2 + (C_1y+C_2)2(1+y) + 2C_3y(1+y) + C_3(1+y^2) + 2C_4y$

$4 = 2C_3 - 2\cdot(-2)$　$2C_3 = 8$　$C_3 = 4$

2　$-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$

中間試験問題（数学Ｂ３）の略解

$\boxed{1}$ (1)

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}\right)dx = \frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C & \text{if} \quad a \neq b \\ \displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^2}\,dx = -\frac{1}{x-a} + C & \text{if} \quad a = b \end{cases}$$

（C は積分定数） $\cdots$ （答）

(2)

$$\int \frac{2(x^3-1)}{(x^2+2)(x+2)^2}\,dx = \int \frac{2}{x+2}dx - \int \frac{3}{(x+2)^2}dx - \int \frac{1}{x^2+2}dx$$
$$= 2\log|x+2| + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

（C は積分定数） $\cdots$ （答）

(3)

$$\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int\left(\frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - x\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)dx = \int\left(\frac{2}{x^2+1} + x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'\right)dx$$
$$= \int \frac{2}{x^2+1}\,dx + \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \arctan x + \frac{x}{x^2+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

$\boxed{2}$ (1) $y = \sqrt{4x^2+1} + 2x$ とおくと，$(y-2x)^2 = 4x^2+1$ より，$x = \frac{1}{4}(y - \frac{1}{y})$．したがって，

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx = \int \frac{2}{y^2-1}\,dy = \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$$
$$= \log\frac{\sqrt{4x^2+1}+2x-1}{\sqrt{4x^2+1}+2x+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

(2) $\frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{x(1+2x)}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ に注意して，$y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ とおくと，$x = \frac{y^2-1}{2(y^2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{y^2+1}$．したがって，

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{2}{y^2-1}\,dy = \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$$
$$= \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

(3) $\tan\frac{x}{2} = y$ と置換すると，$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$ より

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{4y}{(y^2+1)(y+1)^2}dy = 2\int\left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{(y+1)^2}\right)dy$$
$$= 2\arctan y + \frac{2}{y+1} + C = 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + C$$
$$= x + \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \cdots \quad (\text{答})$$

$\boxed{3}$ (1) $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x,y\in I\,(|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$.

(2) f が I で一様連続であるとしよう．このとき，$\varepsilon=\varepsilon_0/2>0$ に対してある正数 $\delta>0$ が存在し，任意の $x,y\in I$ に対して $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$ が成り立たなくてはならない．一方，仮定より $|x_n-y_n|\to 0\ (n\to\infty)$ であるから，上の正数 $\delta>0$ に対してある番号 $n_0\in\mathbf{N}$ が存在し，$n\ge n_0$ であれば $|x_n-y_n|<\delta$ が成り立ち，それゆえ，$|f(x_n)-f(y_n)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$ が成り立たなくてはならない．ところが，これは明らかに仮定 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$ に矛盾する．したがって，f は I で一様連続ではない．(証明終)

(3) (i) 任意の正数 ε に対して，$\delta=\varepsilon/2>0$ とすると，任意の $x,y\in I$ に対して，$|x-y|<\delta$ ならば

$$|x^2-y^2|=|(x+y)(x-y)|\le(|x|+|y|)|x-y|\le 2|x-y|<2\delta=\varepsilon$$

が成り立つ．したがって，f は区間 I で一様連続である．

(ii) 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ を $x_n:=n,\ y_n:=n+\frac{1}{n}\ (n=1,2,3,\ldots)$ により定めると，$x_n,y_n\in I$ かつ $|x_n-y_n|\to 0\ (n\to\infty)$ であるが，

$$|f(x_n)-f(y_n)|=|n^2-(n+\tfrac{1}{n})^2|=2+\frac{1}{n^2}\ge 2\qquad(\forall n\in\mathbf{N})$$

となる．したがって (2) の結果より，f は区間 I で一様連続でない．

(iii) 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ を $x_n:=\frac{1}{2n\pi},\ y_n:=\frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}\ (n=1,2,3,\ldots)$ により定めると，$x_n,y_n\in(0,1]$ かつ $|x_n-y_n|\to 0\ (n\to\infty)$ であるが，

$$|f(x_n)-f(y_n)|=|\sin(2n\pi)-\sin\bigl((2n+\tfrac{1}{2})\pi\bigr)|=|0-1|=1\qquad(\forall n\in\mathbf{N})$$

となる．したがって (2) の結果より，f は区間 I で一様連続でない．

$\boxed{4}$ (1) $R_2\ge R_1>0$ に対して，

$$\left|\int_{R_1}^{R_2}\frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx\right|\le\int_{R_1}^{R_2}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}=\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_{R_1}^{R_2}=2\left(\frac{1}{\sqrt{R_1}}-\frac{1}{\sqrt{R_2}}\right)\to 0\qquad(R_2\ge R_1\to+\infty)$$

ゆえに，$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^5+1}}$ は $[0,\infty)$ で広義可積分である．

(2) $R>1$ に対して，

$$\int_0^R\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}dx\ge\int_1^R\frac{x}{\sqrt{2x^3}}dx=\left[\sqrt{x}\right]_1^R=\sqrt{R}-1\to+\infty\qquad(R\to+\infty)$$

ゆえに，$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ は $[0,\infty)$ で広義可積分でない．

(3) $(\cos(x^2))'=-2x\cos(x^2)$ より，$\sin(x^2)=-\frac{1}{2x}(\cos(x^2))'$．これに注意して部分積分を行うと，$R_2\ge R_1>0$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{R_2}\sin(x^2)dx&=-\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2x}(\cos(x^2))'dx=-\left[\frac{1}{2x}\cos(x^2)\right]_{R_1}^{R_2}+\frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{1}{x}\right)'\cos(x^2)dx\\&=\frac{\cos(R_1^2)}{2R_1}-\frac{\cos(R_2^2)}{2R_2}-\frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\cos(x^2)}{x^2}dx\end{aligned}$$

したがって，

$$\left|\int_{R_1}^{R_2}\sin(x^2)dx\right|\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right)+\frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{R_1}\to 0\qquad(R_1\to+\infty)$$

ゆえに，$f(x)=\sin(x^2)$ は $[0,\infty)$ で広義可積分である．