数学2B　第14回（極値問題と2次形式、復習）

2020年1月14日（火）

担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

宿題の解答例

問題13-2. (a) $f(x,y,z) = x^2e^x + y^3 - 3yz + z^3$ より，勾配ベクトルは

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x(x+2)e^x \\ 3y^2 - 3z \\ -3y + 3z^2 \end{bmatrix}$$

である．(b) 連立方程式

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x(x+2)e^x \\ 3y^2 - 3z \\ -3y + 3z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を解くと，次の4つが停留点となる．

$$(x,y,z) = (0,0,0), \quad (0,1,1), \quad (-2,0,0), \quad (-2,1,1)$$

(c) 点 (x,y,z) におけるヘッセ行列は

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{bmatrix} (x^2+4x+2)e^x & 0 & 0 \\ 0 & 6y & -3 \\ 0 & -3 & 6z \end{bmatrix}$$

だから，4つの停留点におけるヘッセ行列はそれぞれ

$$\nabla^2 f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(0,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\nabla^2 f(-2,0,0) = \begin{bmatrix} -2e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(-2,1,1) = \begin{bmatrix} -2e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

である．(d) $\nabla^2 f(x,y,z)$ の固有多項式は

$$\left|\lambda I - \nabla^2 f(x,y,z)\right| = \begin{vmatrix} \lambda - (x^2+4x+2)e^x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 6y & 3 \\ 0 & 3 & \lambda - 6z \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - \left\{(x^2+4x+2)e^x + 6(y+z)\right\}\lambda^2 + \left\{6(x^2+4x+2)e^x(y+z) + 36yz\right\}\lambda$$
$$- 36(x^2+4x+2)e^x yz - 9$$

である．

- 停留点 $(0,0,0)$ では，$|\lambda I - \nabla^2 f(0,0,0)| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 9$ より，ヘッセ行列は正定値でも負定値でもないので，極小でも極大でもない．
- 停留点 $(0,1,1)$ では，$|\lambda I - \nabla^2 f(0,1,1)| = \lambda^3 - 14\lambda^2 + 60\lambda - 81$ より，ヘッセ行列は正定値なので，極小である．
- 同様にして，停留点 $(-2,0,0), (-2,1,1)$ では，ヘッセ行列は正定値でも負定値でもないので，極小でも極大でもない．

以上より，関数 f は，点 $(0,1,1)$ において極小となり，そのときの極小値は $f(0,1,1) = -1$ である． □

その他の問題の解答

問題 13-1.

(1) $f(x,y) = 3x^2 + xy^2 + y^2$

(a) 勾配ベクトルは $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x + y^2 \\ 2(x+1)y \end{bmatrix}$, (b) 停留点は $(0,0), (-1,\sqrt{6}), (-1,-\sqrt{6})$ の 3 点である．(c), (d) ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & 2y \\ 2y & 2(x+1) \end{bmatrix}$

$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\nabla^2 f(0,0)$ は正定値なので，$(0,0)$ は極小点で，極小値は 0.

$\nabla^2 f(-1,\pm\sqrt{6}) = \begin{bmatrix} 6 & \pm 2\sqrt{6} \\ \pm 2\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}$, $\left|\nabla^2 f(-1,\pm\sqrt{6})\right| = -24 < 0$ なので，

$(-1,\pm\sqrt{6})$ は極小点でも極大点でもない．

(2) $f(x,y,z) = 1 - x - 2y - z + xy + yz + zx + x^2 + y^2 + z^2$

(a) 勾配ベクトルは $\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} -1 + y + z + 2x \\ -2 + x + z + 2y \\ -1 + y + x + 2z \end{bmatrix}$, (b) 停留点は $(x,y,z) = (0,1,0)$ の 1 点である．(c), (d) ヘッセ行列は $\nabla^2 f(0,1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ であり，この行列の固有値は $4, 1$(重根) であるから正定値行列である．よって，関数 f は，点 $(0,1,0)$ において極小となり，そのときの極小値は $f(0,1,0) = 3$ である．