数学 2 A 2016 期末試験

[1] (1) 3次行列 $A = a_{ij}$ の行列式を答えよ.

(2) $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$. $\det(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = q$ $\det(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = r$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2)$

のとき、(i)〜(v)を求めよ.

(i) $\det(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (ii) $\det(2\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{b}+3\mathbf{c})$ (iii) $\det(\mathbf{a}+\mathbf{e}_1, \mathbf{b}-\mathbf{e}_1)$

(iv) $\det\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a} \\ {}^t\mathbf{b} \end{pmatrix}$ (v) $\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $*\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

[2] (1) λ が n 次行列 A の固有値であることの定義を答えよ.

n 次行列 A が $A^2 = O$ を満たすとして

(2) A は正則でないことを示せ.

(3) A の固有値は $\lambda = 0$ のみであることを示せ.

(4) $I + A$ は正則であることを示せ.

[3] $A = \begin{pmatrix} 14 & 3 & -5 \\ -5 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ の逆行列があれば求めよ.

[4] A を n 次行列. $\mathbf{e}_1 \sim \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ として. (i)〜(iii)が同値であることを示せ

(i) 各 i に対し. $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ となる解が存在する.

(ii) 任意の $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ となる解が存在する.

(iii) A は正則である.

[5] 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = k \\ -x + ky + z = -2 \\ -x + y + kz = -4 \end{cases}$$

[6] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ について、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ となる正則行列 P とそのときの $P^{-1}AP$ を求めよ.

[7] $A = \begin{pmatrix} -12 & 30 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$ に対して以下の問いに答えよ

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ となる正則行列 P、P^{-1} と $P^{-1}AP$ を求めよ

(3) $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ の基本行列を求めよ.

(4) $\dfrac{dx}{dt} = Ax + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$ 初期値 $x(0)$ を満たす x を求めよ

答(一部)

[3] $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

[6] $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

[7] $x(t) = \begin{pmatrix} -7e^{t} + 6e^{-2t} + 2e^{3t} \\ -3e^{t} + 2e^{-t} + e^{3t} \end{pmatrix}$