科目名	数学1A（一斉）	氏　名	

以下の設問$\boxed{1}$から$\boxed{6}$に答えよ．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること．

$\boxed{1}$　次の極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}+x^2\right)}{1-\cos x}$$

を求めよ．

$\boxed{2}$　x, y を変数とする C^∞ 級関数

$$\frac{\cos(x-y)}{1-x-y}$$

の，原点 $(0,0)$ におけるテイラー展開において，xy の項と x^2y の項をそれぞれ決定せよ．

$\boxed{3}$　$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は C^2 級関数で，$f(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)\neq 0$ とする．このとき陰関数定理より，$f(x,\varphi(x))=0$ かつ $\varphi(x_0)=y_0$ を満たす C^1 級関数 $y=\varphi(x)$ が，$x=x_0$ の近傍でただ一つ存在する．以下の問いに答えよ．

(1) $\varphi'(x)$ を f_x, f_y, φ を使って表し，φ' が C^1 級であることを示せ．

(2)

$$a_1=f_x(x_0,\varphi(x_0)),\ a_2=f_y(x_0,\varphi(x_0)),$$
$$a_3=f_{xx}(x_0,\varphi(x_0)),\ a_4=f_{xy}(x_0,\varphi(x_0)),\ a_5=f_{yy}(x_0,\varphi(x_0))$$

として，$\varphi''(x_0)$ を a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 を使って表せ．

(3) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を C^1 級関数とする．点 (x,y) が $f(x,y)=0$ を満たしながら動くとする．この条件のもとで，$g(x,y)$ が $(x,y)=(x_0,y_0)$ において最大値または最小値をとるならば，

$$g_x(x_0,y_0)f_y(x_0,y_0)-g_y(x_0,y_0)f_x(x_0,y_0)=0$$

を満たすことを陰関数 φ を用いて証明せよ．

$\boxed{4}$　関数 $f(x,y)=x^4-xy+y^2$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) f の停留点を全て求め，それぞれに対して極大点，極小点，鞍点のいずれであるかを判定せよ．

(2) f が最小値を持つことを証明せよ．(ヒント：平方完成)

$\boxed{5}$　$\mathbb{R}^2$ 上の点 (x,y) が，$\varphi(x,y)=3x^2-6xy+4y^2-3=0$ を満たしながら動くとき，$f(x,y)=2(x-y)e^{-\frac{2}{3\sqrt{3}}y}$ の最大値，最小値と，それらを与える (x,y) を，ラグランジュの乗数法を用いて全て求めよ．