

4/28 問題 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、 $(AX)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる行列 X を求めよ。

解) $(AX)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ より、 $X^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

両辺に右から A をかけて、

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore X = (X^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{9}{5} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

今日の授業に関連した問題

(1) $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ a & c \end{pmatrix}$ が直交行列となるような a, b, c を求めよ。

(2) A, B は n 次の正則行列、 C は n 次正方行列、 O は n 次の零行列とすると、 $2n$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

は正則であることを示せ。また、その逆行列を求めよ。

(ヒント: $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ が逆行列となるような X, Y, Z, W を求めてみよ。)