物理学 A　3 章演習　解説

3.1

(i)　$m\ddot{z} = mg - k\dot{z}^2$

(ii)　$\dot{z} = v$ とおくと，

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

$$\frac{dv}{kv^2 - mg} = -\frac{1}{m}dt$$

$$\int \frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}\int dt \cdots\cdots（*）$$

$$\frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}} = \frac{1}{\left(v + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\left(v - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} = \frac{A}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} + \frac{B}{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

とおくと，

$$\frac{1}{\left(v + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\left(v - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} = \frac{A\left(v - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right) + B\left(v + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}{\left(v + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\left(v - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)} = \frac{(A+B)v + \sqrt{\frac{mg}{k}}(-A+B)}{\left(v + \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)\left(v - \sqrt{\frac{mg}{k}}\right)}$$

$$\therefore \begin{cases} A + B = 0 \\ \sqrt{\frac{mg}{k}}(-A+B) = 1 \end{cases}$$

$$\therefore B = -A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}$$

$$（*）の左辺 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\int\left(\frac{-1}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} + \frac{1}{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right)dv$$

（*）より

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\log\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right| = -\frac{k}{m}t + C$$

$$\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} = \pm e^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t + C'} = Ae^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} \cdots ①$$

①より

$$v-\sqrt{\frac{mg}{k}}=Ae^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}\cdot\left(v+\sqrt{\frac{mg}{k}}\right)$$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{1+Ae^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t}}{1-Ae^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}}}$$

$t=0$ で $v=v_0$ を①に代入すると,

$$A=\frac{v_0-\sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0+\sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

(iii)　$t\to\infty$ で $v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\equiv v_\infty$

$$\therefore v=v_\infty\,\frac{1+Ae^{-t/\tau}}{1-Ae^{-t/\tau}}$$

$$\therefore A=\frac{v_0-v_\infty}{v_0+v_\infty}\left(\frac{1}{\tau}=2\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)$$

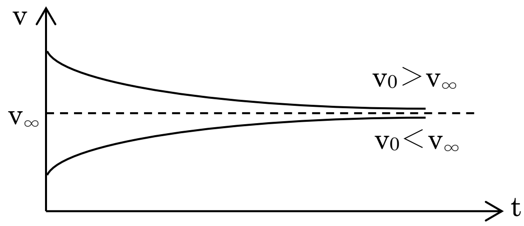
$v_0>v_\infty$ のとき，A＞0

$$\frac{dv}{dt}=\frac{v_\infty}{\tau}\,\frac{-Ae^{-t/\tau}\left(1-Ae^{-t/\tau}\right)-\left(1+Ae^{-t/\tau}\right)Ae^{\frac{t}{\tau}}}{\left(1-Ae^{-t/\tau}\right)^2}=\frac{v_\infty}{\tau}\,\frac{-2Ae^{-t/\tau}}{\left(1-Ae^{-t/\tau}\right)^2}<0$$

単調減少

$v_0<v_\infty$ のとき，A＜0

$\frac{dv}{dt}>0$ より，単調増加



発展問題

(1)　$z=v_\infty\int\frac{1+Ae^{-t/\tau}}{1-Ae^{-t/\tau}}dt$

$X=e^{-t/\tau}$ とおく.

(2)　$m\propto a^3$

$k\propto a^2$　　　$v_\infty=\sqrt{\frac{mg}{k}}\propto\sqrt{a}$

大きい雨粒ほど終端速度は大きくなる.

(3)　$m\ddot{z}=mg+k\dot{z}^2\,(\dot{z}<0)$

$m\ddot{z}=mg-k\dot{z}^2\,(\dot{z}>0)$