平成23年7月23日(土) 2時限施行 (90分)

数学 A 4 試験問題

栗原 将人

2011年 春学期

1.(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ -2x+y+5z=-6 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解け。

(2) 上の連立方程式を行基本変形で解け。

(3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。A の逆行列を求めよ (答だけでよい)。

(4) $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ s \end{pmatrix}, \mathbf{c}=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく。**a**, **b**, **c** が線型従属となるように s の値を定めよ。

(5) 原点を通り、ベクトル **a**, **b**, **c** を含むような平面を S と書く。A に対応する一次変換

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

により、S に移るような平面の方程式を求めよ。

[裏に続く]

2. $A = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & k-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & k & k-1 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) A の行列式を求めよ。

(2) A の階数 (rank) を k の値で分類することにより求めよ。

(3) k を定数とする連立方程式

$$\begin{cases} (k+1)x + w = 0 \\ -x + (k-1)y + z = 0 \\ x + kz + w = 0 \\ -x + kz + (k-1)w = 0 \end{cases}$$

の解の自由度を k の値で分類することにより求めよ (答のみでよい)。

(4) (3) で求めた解の自由度が正であるようなすべての k に対して、(3) の連立方程式の解全体が $\mathbb{R}^4$ の中でなす部分空間の基底を、それぞれの k に対して求めよ。

3. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ の一次独立なベクトルであるとする。このとき、$\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ は一次独立であるか否か判定せよ。

[以上]

A4 2011年

問1 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+15-2-6-5$

$= -3$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -6 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{-15}{-3} = 5 \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & -6 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{3}{-3} = -1 \quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-3} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

$\underline{x=5,\ y=-1,\ z=1}$ //

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 9 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\underline{x=5,\ y=-1,\ z=1}$ //

(3) $\det A = -3$

$A^{-1} = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 5 & 13 \\ 3 & -3 & 9 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$4+m-3n=0$

$-6+4m+4n=0$

$3+5m+n=0$

$m=3n-4$

$-6+4(3n-4)+4n=0$

$-6+12n-16+4n=0$

$-22=-16n$

$n=\dfrac{11}{8}$

$m=\dfrac{33}{8}-4=\dfrac{1}{8}$

$m=\dfrac{1}{8}$

$3+\dfrac{s}{8}+\dfrac{11}{8}=0$

$24+s+11=0$

$s=-35$

2. (1) $\begin{vmatrix} k+1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & k-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & k & k-1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ -1 & k-1 & 1 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & k & k-1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k-1 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k & -k \\ 0 & 0 & 2k & k \end{vmatrix} = +(k-1) \begin{vmatrix} k^2+k & +k \\ 2k & k \end{vmatrix}$

$= (k-1)\{k^3+k^2-2k^2\} = (k-1)(k^3-k^2) = k^2(k-1)^2$

(2) $\begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & k-1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k & 1 \\ -1 & 0 & k & k-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k-1 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k & -k \\ 0 & 0 & 2k & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ 0 & k-1 & k+1 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k & -k \\ 0 & 0 & -k^2+k & 0 \end{pmatrix}.$

$-k^2-k=0$ 　 $-k^2+k=0$ 　 $k=0$のとき階数2

$-k(k+1)=0$ 　 $-k(k-1)=0$ 　 $k=1$のとき階数2

$k=0,-1.$ 　 $k=0,1$ 　 $k\neq 0,1$のとき階数4.

(3) $k=0$のとき自由度2.

$k=1$のとき自由度2

$k\neq 0,1$のとき自由度0.

(4) (i) $k=0$のとき.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AX=0.$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$とすると.

$x_1+x_4=0.$

$-x_2+x_3+x_4=0$

$x_1=-x_4$

$x_2=x_3+x_4$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $k=1$のとき

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$AX=0.$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$とすると.

$x_1+x_3+x_4=0.$

$2x_3+x_4=0.$

$x_1=-x_3-x_4=-\frac{1}{2}x_4$

$x_3=-\frac{1}{2}x_4.$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

よって $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Step 1.
平面Sを求める

$$\begin{pmatrix}4\\-6\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\4\\-35\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ を通る平面＝平面S.

⇒ 法線ベクトル $\mathbf{n}$ とする.

$\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$ より

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix}18\\13\\2\end{pmatrix}$$

よって平面S: $18x+13y+2z=0$.

Step 2.
答えの平面を求める.

$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ は平面S上 ⇒ $18X+13Y+2Z=0$

もしかしたら
$A^{-1}(X\ Y\ Z)^T$ が
S上って問題かも…

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+3y+2z\\-2x+y+5z\\x+y-z\end{pmatrix}$$

$$18(x+3y+2z)+13(-2x+y+5z)+2(x+y-z)=0$$

$$-6x+69y+114z=0$$

だとしたら
$75X-55Y-131Z=0$
になる

3. a, b, c 一次独立なので

$la+mb+nc \neq 0$ である. ($l=m=n=0$ でない)

$a, a+b, a+b+c$, が一次独立でないなら

$xa+y(a+b)+z(a+b+c)=0$ となる0以外の解 x, y, z が存在する

$(x+y+z)a+(y+z)b+zc=0$

これは $x+y+z=l$, $y+z=m$, $z=n$ とすると

$la+mb+nc \neq 0$ なので矛盾

よって $a, a+b, a+b+c$ は一次独立