5/26 問題　次の条件を満たす線形写像 L_1, L_2 の表現行列をそれぞれ求めよ。

(1) $L_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 \quad + 5x_3 \end{pmatrix}$

(2) $L_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

解) (1) $L_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 \quad + 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

であるから、L_1 の表現行列は、$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$。

(2) 表現行列は、基本ベクトルの像を並べたものであることに注意する。

$$L_2(\mathbb{e}_1) = L_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2(\mathbb{e}_2) &= L_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_2\left(\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\left(L_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - L_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

((*)は、L_2 が線形写像であることを用いた。)

よって L_2 の表現行列は、$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.