数学 2B 第 11 回 n 次元行列の固有値，固有ベクトル，対角化（その 2）

2019 年 12 月 17 日（火）

担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい

問題 11-1. 次の各行列について，対角化可能かどうか調べなさい．また，対角化可能なら，正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ も求めなさい．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (6) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

問題 11-2(宿題). 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ について，対角化可能かどうか調べなさい．

また，対角化可能なら，正則行列 P，逆行列 P^{-1}，および対角行列 $P^{-1}AP$ も求めなさい．

第 10 回 宿題の解答例

問題 10-3.(1) A に対する固有方程式は，

$$f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-1 & 3 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-4) = 0$$

となるので，固有値はそれぞれ $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ となる．次に固有ベクトルを求める．固有値 $\lambda_1 = -2$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の解であり，固有ベクトルは

$$c_1\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし } c_1 \text{ は } 0 \text{ でない複素数})$$

となる．同様にして，固有値 $\lambda_2 = 1$ に対する固有ベクトルは

$$c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし } c_2 \text{は } 0 \text{ でない複素数})$$

となり，固有値 $\lambda_3 = 4$ に対する固有ベクトルは

$$c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし } c_3 \text{は } 0 \text{ でない複素数})$$

となる．

(2) (1) より，全ての固有値が互いに異なるので（定理 8.1.14. から）対角化可能である．また，固有ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

を選び，

$$P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

と定めると，

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{であり，} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

と対角化できる． □

その他の問題の解答は keio.jp の授業支援の HP にアップロードします。

その他の問題の解答

問題 10-1., 2. (1) 固有値は $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ である．固有値 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ とすると

$$\boldsymbol{p}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる（ただし c_1, c_2, c_3 は 0 でない複素数).

固有値がすべて異なるので対角化可能であり，$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ と定めると，

$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ であり， $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ と対角化できる．

(2) 固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \omega, \lambda_3 = \omega^2$ である．固有値 $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ とすると

$$\boldsymbol{p}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = c_2 \begin{bmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = c_3 \begin{bmatrix} \omega^2 \\ \omega \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる（ただし c_1, c_2, c_3 は 0 でない複素数).

固有値がすべて異なるので対角化可能であり，$P = \begin{bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ と定めると，

$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{bmatrix}$ であり， $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$ と対角化できる．

(3) 固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 7$ である．固有値 $\lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ とすると

$$\boldsymbol{p}_1 = c_1 \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_4 = c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である（ただし c_1, c_2, c_3, c_4 は 0 でない複素数).

固有値がすべて異なるので対角化可能であり，$P = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ と定めると，

$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & -6 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$ であり， $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ と対角化できる． $\square$