演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい．

問題 1-1.　次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合は線形部分空間か．正しければ証明を，そうでなければ反例をあげなさい．

(1) $A_1 = \left\{ \boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2] \,|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(2) $A_2 = \left\{ \boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2] \,|\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 2 \right\}$

(3) ある $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$ に対し，$A_3 = \left\{ \boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2] \,|\, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \right\}^*$

問題 1-2.　与えられたベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ に対し，$W = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^2$ の線形部分空間であることを示しなさい．

問題 1-4.（宿題）　$a \in \mathbb{R}$ とし，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ a \end{bmatrix}$$

とする．$\dim \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\} = 1$ となるような a の条件を求めなさい．

問題 1-5

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示しなさい．

$^*(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積という（p.171）．