1/2

1月29日(金)6時限実施　90分

数学４Ｂ期末試験問題

Ｂ才

亀谷 幸生・栗原 将人

2015 年度 秋学期

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ x & y & z & w \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式を $\det A$ と書くとき、

$\det A = ax + by + cz + dw$ となるような実数 a, b, c, d を求めなさい。

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) A の固有多項式、固有値、各固有値に対応する固有空間の基底を求めなさい。

(2) A が対角化可能かどうか理由をつけて述べなさい。

3. a を 0 でない実数として、$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

A を直交行列で対角化しなさい。つまり、直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるものをひとつ求め、そのときの $P^{-1}AP$ がどうなるか答えなさい。

(裏へ続く)

3/2

4. b を実数とする。t の関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ が微分可能で、
微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = bx_1 + (b-1)x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = (1-b)x_1 + (2-b)x_2 \end{cases}$$

と初期条件 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$ をみたすとき、
$x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めなさい (b の値で分類すること)。

5. n 次行列 A が固有値 2 を持つとき、行列 $A^2 - 2A$ は正則行列ではないことを証明しなさい。

6. n 次行列 A に対して、adj$A$ で A の余因子行列を表すことにする。

(1) A が正則行列のとき、adj$A$ も正則行列であることを証明しなさい。

(2) A が正則行列でないとき、adj$A$ も正則行列でないことを証明しなさい。

以上

2015

数学４Ｂ期末試験問題略解　　(亀谷)

1. 第 2 行について余因子展開をすると

$$\det A = -x\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix} + y\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix} - z\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix} + w\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$= -6x + y + 10x - 14w$$

なので, $a = -6, b = 1, c = 10, d = -14$.

2. (1) $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ より A の固有値は $1, 3$ で, それぞれの基底は $\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ によって与えられる.

(2) $\lambda = 3$ の固有値の重複度は 2, 固有空間の次元は 1 で, $1 \neq 2$ より A は対角化可能ではない.

3. $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2a)(\lambda + a)^2$ より, A の固有値は $\lambda = 2a, \lambda = -a$ である. $\lambda = 2a$ の固有空間の直交基底は $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$, $\lambda = -a$ の固有空間の直交基底は $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$ によって与えらえるので, $P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -2 & 0\\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$ とおくと, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}2a & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\\ 0 & 0 & -a\end{bmatrix}$.

4. $b = 1$ のとき, $x_1(t) = e^t, x_2(t) = 2e^t$, $b \neq 1$ のとき, $x_1(t) = 3(b-1)te^t + e^t, x_2(t) = -3(b-1)te^t + 2e^t$.

5. 仮定より, $|2I - A| = 0$. ゆえに $|A^2 - 2A| = |A||A - 2I| = 0$.

6. (1) $(\operatorname{adj} A)A = |A|I$ より, $|\operatorname{adj} A||A| = |A|^n$. A が正則行列なので, $|A| \neq 0$. ゆえに $|A|^n \neq 0$ より $|\operatorname{adj} A| \neq 0$ となり, $\operatorname{adj} A$ は正則行列である.

(2) $A = O$ のとき, 定義より $\operatorname{adj} A = O$.

$A \neq O$ のとき, $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ とすると $\boldsymbol{a}_i \neq \boldsymbol{0}$ となる $1 \leq i \leq n$ が存在する. A は正則行列でないので, $|A| = 0$. ゆえに $(\operatorname{adj} A)A = |A|I = O$ なので, $(\operatorname{adj} A)\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ となり, 連立 1 次方程式 $(\operatorname{adj} A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_i$ をもつ. ゆえに $\operatorname{adj} A$ は正則ではない.