

1. ベクトル a_1, a_2, a_3 は一次従属であるがこのうち二つはそれぞれすべて一次独立である。この時の以下の式の値を求めよ。この時答えのみでよい。ただし e_1 は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

- (1) $\dim \text{Span}\{a_1\}$
- (2) $\dim \text{Span}\{a_1, a_2 - a_3\}$
- (3) $\dim \text{Span}\{a_1, 2a_2, 3a_3\}$
- (4) $\dim \text{Span}\{a_1, a_2, e_1\}$
- (5) $\dim \text{Span}\{a_2 - a_1, a_2 - a_3, a_3 - a_1\}$

2.

$$x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L(x)=y \text{ をみたす線形写像 } L \text{ について}$$

- (1) $L(x)=y$ をみたす写像 L_1 を表す非対称直行行列を求めよ。
- (2) $L(x)=y$ をみたす写像 L_2 を表す対称直行行列を求めよ。さらに $L(y)=x$ を満たす写像 L_3 を表す対称直行行列を求めよ。

3.

$x_1, x_2, \dots, x_k \in V^n$ を満たす x_1, x_2, \dots, x_k が一次独立でありさらにあるベクトル v が一次結合で表せるとき、その表し方が 1 通りしかないと証明せよ。

4.

$$V_1 = \text{Span}\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2}\}$$

$$V_2 = \text{Span}\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \text{ について}$$

(1) V_1 をみたす点の集合を表す図形を描写せよ。またその時その図形が通る点を 2 つはつきり分かるようにかけ。

(2) V_2 の基底をもとめよ。(1 組でよい)

またその次元を求めよ。

5.

(1) n 次行列 A, B が相似であることの定義を述べよ。

(2) 行列 A, B が相似である時 A の固有値と B の固有値が等しいことを証明せよ。

6.

2 次行列 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4+a & 5 \end{pmatrix}$ が対角化できないときの a を求めよ。またこの時に

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ をみたす P を一つ求めよ。さらにそのとき k の値を求めよ。

7.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ について}$$

(1) A の固有値、固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ を作る P を求めよ。さらに P^{-1} 、 $P^{-1}AP$ を計算せよ。

(3) $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ の基本行列を求めよ。

(4) $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ 、 $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたす $x(t)$ を求めよ。