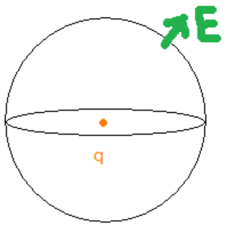
ガウスの法則で求める QE 問題

[球系],[円柱形],[平面系]の３パターンが基本。

[球系]

①点分布



ガウスの法則より

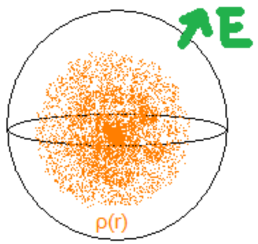
$$E \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

よって、 $\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$ …(＊１)

球系の基本。覚えるのではなくその都度導く。

以降のパターンは分布系に応じた q を求めて、(＊１)に代入する。

②球分布



電荷密度分布が、

$r \leq a$ で $\rho(r)$、$r > a$ で 0

よって半径 r の球内にある総電荷は、

$r \leq a$ のとき

$q = \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$ ⋯（２．１）

$r \geq a$ のときは

$$q = \int_0^a \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr \quad \cdots（２．２）$$

これを(＊１)に代入すればよい。

2009 問題１

原点を中心とする半径 a の球の内部、及び外部（真空）には電荷密度が、

$$\rho(r) = \frac{\lambda}{r^2}, (r \leq a) \qquad \rho(r) = 0, (r > a)$$

で分布している。ここで r は球の中心からの距離であり、λ は定数。

(1)球内の全電荷を求めなさい

(2)中心から距離 r の点での電界の大きさを求めなさい

(3)無限遠点を電位の基準点にとり、中心から距離 r の点での電位 Φ(r)を求めなさい。

(4)　略

(1)$r \geq a$ のとき全電荷を含む。（２．２）式

$$q = \int_0^a \frac{\lambda}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\lambda a$$

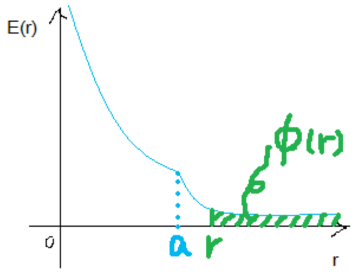
(2)$r \leq a$ のとき，（２．１）式

$$q = \int_0^r \frac{\lambda}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\lambda r$$

それぞれの結果をガウスの法則(＊１)に代入して、

$$E = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0 r} & (r \leq a \text{ のとき}) \\ \dfrac{\lambda a}{\varepsilon_0 r^2} & (r \geq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

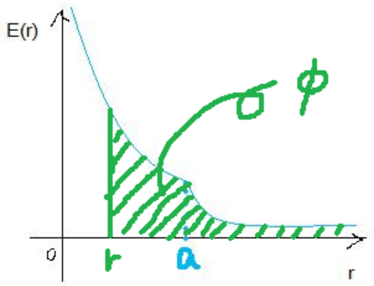
(3) point 場合分けされた電場から電位を求めるときは、まず E-r グラフを描け。



$r \geq a$ のとき、

$$\phi(r) = \int_r^{\infty} \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \left[-\frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r}\right]_r^{\infty} = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r}$$



$r \leq a$ のとき、

$$\phi(r) = \int_a^{\infty} \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r^2} dr + \int_r^{a} \frac{\lambda}{\varepsilon_0 r} dr$$

$$= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \ln\frac{a}{r}$$

神成物 B 問題集 vo1[3]

原点を中心とする半径 a の球の内部に$\rho(r) = \rho_0 \frac{a}{r}$ の電荷密度で分布している。ここで r は球の中心からの距離であり、ρ_0は定数である。

(1)球内の全電荷を求めなさい

(2)中心から距離 r の点での電界の大きさ E(r)はいくらか

(3) 中心から距離 r の点での電位の大きさΦ(r)はいくらか

[解答]

(1) $r \geq a$のとき全電荷を含む。（２．２）式

$$q = \int_0^a \rho_0 \frac{a}{r} \cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho_0 a^3$$

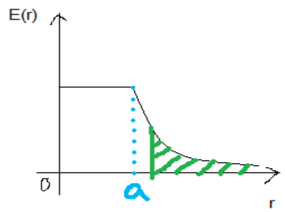
(2) $r \leq a$のとき，（２．１）式

$$q = \int_0^r \rho_0 \frac{a}{r} \cdot 4\pi r^2 dr = 2\pi\rho_0 a r^2$$

それぞれの結果をガウスの法則(＊１)に代入して、

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} & (r \leq a \text{ のとき}) \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 r^2} & (r \geq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

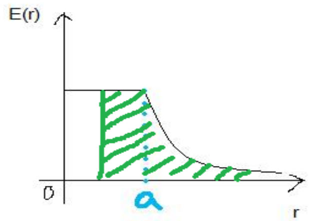
(3) まず E-r グラフ



$r \geq a$のとき

$$\phi(r) = \int_r^{\infty} \frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \left[-\frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 r}\right]_r^{\infty} = \frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 r}$$

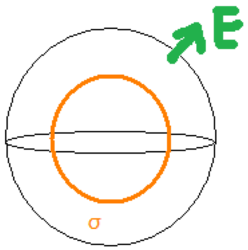


$r \leq a$のとき

$$\phi(r) = \int_a^{\infty} \frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 r^2} dr + \int_r^{a} \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} dr$$

$$= \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}(a - r) = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0}$$

③球面分布（球殻分布厚さ０）



半径 a の球面上に総電荷 Q が分布しているとき、

r<a のとき q=0

r ≥ aのとき q=Q

よってガウスの法則(＊１)に代入して、

$$E=\begin{cases}0 & (r<a)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r\geq a)\end{cases}\quad\cdots（３．１）$$

神成物Ｂ 問題集 vo1[5]

中心を共有する半径 a の帯電していない導体球と、内半径 b の導体球殻がある。ただし a<b である。

(1)球に電荷 Q を与えたとき、a<r<b の空間の電界の大きさ E を r の関数として書け。

(2)球殻にはどのような電荷分布ができるか、簡潔に記せ

(3)この２つの導体をコンデンサーとするとその電気容量Ｃはいくらか

[解答]

(2)point:電荷保存

球の電荷 Q に引き寄せられて、球殻の内側には－Q の電荷が分布する。

もともと球殻の電荷は０だったので、電荷保存より、球殻の外側には＋Q が分布する。

(1)鉄則:電荷分布が複数ある問題⇒独立にガウス、後から重ねあわせ

導体球についてガウスの法則より、r ≥ aで、

$$E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

導体球殻についてガウスの法則（３．１）より、

$$E_2=\begin{cases}0 & (r<b)\\ \dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r\geq b)\end{cases}$$

重ね合わせの原理により、

$$E=\begin{cases}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+0=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (a\leq r<b)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\dfrac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=0 & (r\geq b)\end{cases}$$

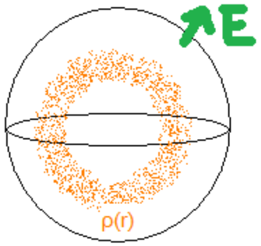
(3)C の求め方：E→V→C

E はもう求まっている。

$$V=\int_a^b E dr=\int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$$

④球殻分布



内半径 a、外半径 b の球殻に電荷密度 ρ (r) の電荷が詰まっているとき、

ガウス曲面内の電荷は、

r<a のとき q=0

a<r<b のとき $q = \int_a^r \rho(r) 4\pi r^2 dr$

r>b のとき $q = \int_a^b \rho(r) 4\pi r^2 dr$

この結果を（＊１）に代入すればよい。

神成物 B 問題集 vo1[6] ←原本には図が載ってるのでそっち参照。

半径 a の導体球と、内半径 b、厚さ c の導体球殻がある。

中空部分は真空で、導体球には電荷 Q_A、導体球殻には電荷 Q_B を与えた。

(1)a<r<b と,r>b+c の部分の電界を距離 r の関数として求めよ。

(2)Q_B は内側の面上の Q_1 と外側の面上の Q_2 に分かれる。Q_2 はいくらか。

(3)a<r における電位を求めよ。

(4)球殻の内側の面に働く内向きの張力と外側の面に働く外向きの張力が釣り合うためには Q_A と Q_B にどのような関係がなければならないか。

ただし、最後の段階で球殻の厚さ c をゼロとせよ。

(5)中空部分を誘電率 ε の誘電体で満たしたときこの球殻のコンデンサーの電気容量はいくらになるか。

(1)鉄則:電荷分布が複数ある問題⇒独立にガウス、後から重ねあわせ

<u>導体球について</u>

ガウスの法則より、$r > a$で、$E_1 = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

<u>導体球殻について</u>

球殻全体に Q_B を与えたので、電荷は一様に分布している。

r<b のとき球殻はガウス平面の外側。よって q=0

r>b+c のとき球殻はすべてガウス曲面内に入っているから

$$q = Q_B$$

ガウスの法則（＊１）式に代入してやれば、

$$E_2 = \begin{cases} 0 & (r < b \text{ のとき}) \\ \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b + c \text{ のとき}) \end{cases}$$

<u>重ね合わせの原理より</u>

$$E = E_1 + E_2 = \begin{cases} \dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (a < r < b) \\ \dfrac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > b + c) \end{cases}$$

(2)point:電荷保存

球の電荷 Q_A に引き寄せられて、球殻の内側(Q_1)には$-Q_A$ の電荷が分布する。

球殻全体には電荷 Q_B を与えただけなので電荷保存より、球殻全体=Q_B

内側の電荷　+　外側の電荷　=　全体の電荷より、

$$-Q_A + Q_2 = Q_B$$

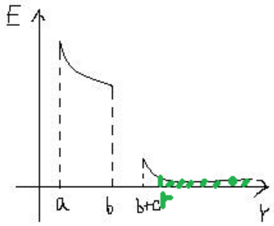
よって$Q_2 = Q_A + Q_B$

(3) point 場合分けされた電場から電位を求めるときは、まず E-r グラフを描け。

(1)では書かなかったが、b<r<b+c のとき（すなわちガウス閉曲面が球殻の中に含まれるとき）、導体内は等電位の法則により E=0。まとめると、

$$E=\begin{cases}\dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (a<r<b\text{のとき})\\ 0 & (b<r<b+c\text{のとき})\\ \dfrac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>b+c\text{のとき})\end{cases}$$

E-r グラフを適当に書くと、(←くれぐれも微分とかせず適当にw）

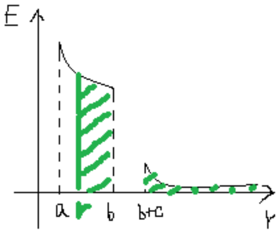


(ⅰ)r>b+c のとき、

$$\phi(r)=\int_r^{\infty}\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\left[-\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_r^{\infty}$$

$$=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



(ⅱ)b<r<b+c のとき、

r～b+c 区間の電位は０だから(ⅰ)で r=b+c として、

$$\phi(r)=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0(b+c)}$$

(ⅲ)a<r<b のとき、

$$\phi(r)=\int_r^{b}\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_r^{\infty}\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)+\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0(b+c)}$$

(4)F=QE を用いて合力０

球殻の内側の面(r=b)の電場は$E=\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,電荷は$-Q_A$

球殻の外側の面(r=b+c)の電場は$E=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,電荷はQ_A+Q_B

球殻の内側にかかる力＋球殻の外側にかかる力＝0 より、

$$-Q_A\cdot\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 b^2}=(Q_A+Q_B)\cdot\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0(b+c)^2}$$

c→0 として、計算すると$Q_B=0,-2Q_A$

(5) C の求め方：E→V→C

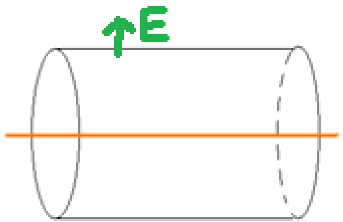
球から球殻までの電位差は、a<r<b のときの E を積分して、

$$V_{ab}=\int_a^b\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon r^2}dr=\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$C=\frac{Q_A}{V_{ab}}=\frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$$

[円柱系]

⑤直線分布



半径 r、高さ h の円柱をガウス閉曲面としてとり、ガウス閉曲面内の総電荷を q とするとガウスの法則より、

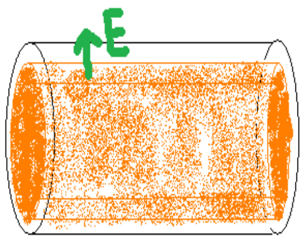
$$E \times 2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

よって $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rh}$ …（＊２）

円柱系の基本式。覚えるのではなくその都度導く。

以降のパターンは分布系に応じた q を求めて、(＊２)に代入する。

⑥円柱分布



円柱の半径を a、高さ h のとき、電荷密度分布を ρ(r)とすると、r>a ならば、円柱はガウス閉曲面の円柱にスッポリと含まれるので、

$$q = \int_0^a \rho(r) 2\pi rh\, dr$$

0<r<a のとき、ガウス閉曲面の円柱内の総電荷は、

$$q = \int_0^r \rho(r) 2\pi rh\, dr$$

この結果をガウスの法則（＊２）に代入してやればよい。

2007 年度過去問　問題Ｉ

真空中に置かれた半径 a の無限に長い円柱の内部に電荷密度 ρ (r)= λ r で電荷が分布している。ここで r は中心軸からの距離であり、λ は定数である。以下の問に答えなさい。

(1)円柱の内部(r<a)及び外部(r>a)での電界の大きさを求めなさい。

(2)円柱の中心軸から距離 r にある点と中心軸との間の電位差を求めなさい。

基本問題。

[解答]

(1)中心軸を等しくする半径 r、高さ h の円柱をガウス閉曲面として取る。

r<a のときガウス閉曲面内の電荷は、

$$q = \int_0^r \lambda r \cdot 2\pi rh\, dr$$

$$= 2\pi\lambda h \int_0^r r^2\, dr$$

$$= \frac{2\pi\lambda h r^3}{3}$$

r>a のときガウス閉曲面内の電荷は、

$$q = \int_0^a \rho(r) 2\pi rh\, dr = \frac{2\pi\lambda h a^3}{3}$$

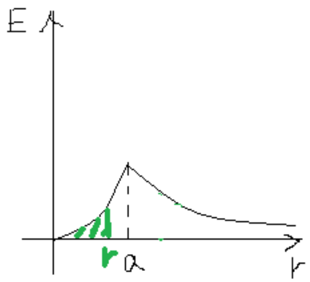
ガウスの法則（＊２）に代入して、

$$E=\begin{cases}\dfrac{\lambda r^2}{3\varepsilon_0} & (r<a)\\ \dfrac{\lambda a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r>a)\end{cases}$$

(2) point 場合分けされた電場から電位を求めるときは、まず E-r グラフを描け。

注意：今までは無限遠が基準だったが、今回は中心軸との電位差を求めよとあるので、原点との区間の面積になる。

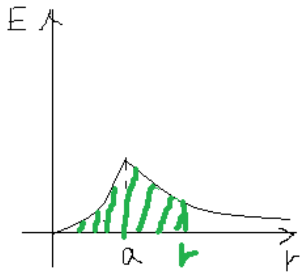
(ｉ)r<a のとき



$$\phi(r)=\int_0^r \frac{\lambda r^2}{3\varepsilon_0}dr$$

$$=\frac{\lambda r^3}{9\varepsilon_0}$$

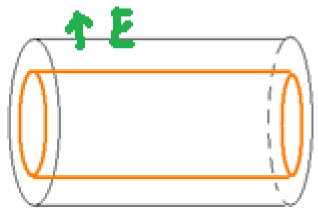
(ⅱ)r>a のとき



$$\phi(r)=\int_0^a \frac{\lambda r^2}{3\varepsilon_0}dr+\int_a^r \frac{\lambda a^3}{3\varepsilon_0 r}dr$$

$$=\frac{\lambda a^3}{9\varepsilon_0}+\frac{\lambda a^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a}$$

⑦円柱面分布



半径 a の円柱に電荷 Q が蓄えられているとき、ガウス閉曲面を半径 r の円柱にとると、この内部にある電荷は、r<a のとき q=0

r>a のとき q=Q

この結果を毎度の如くガウスの法則（＊２）に代入すればよし。

2008 問題Ⅱ　図とかあって写すのメンドイから省略！

過去問は神成研究室ホームページで！！

[解答](1) 鉄則:電荷分布が複数ある問題⇒独立にガウス、後から重ねあわせ

内側の電極について

r<a のとき q=0, r>a のとき q=Q。よってガウスの法則（＊２）より、

$$E_1=\begin{cases}0 & (r<a)\\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hr} & (r>a)\end{cases}$$

外側の電極について

r<b のとき q=0, r>b のとき q=－Q。よってガウスの法則より

$$E_2=\begin{cases}0 & (r<b)\\ \dfrac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 hr} & (r>b)\end{cases}$$

重ね合わせの原理

$$E=E_1+E_2=\begin{cases}0 & (r<a,r>b)\\ \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 hr} & (a<r<b)\end{cases}$$

(2)

$$V=\int_a^b E dr=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{b}{a}$$

(3)

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{b}{a}}$$

↑過去問の答えはミスタイプで逆になってます。

(4)コンデンサー入り回路：回路方程式を解く→まずは q(t)でそろえる。

$$V=RI$$

電流の向きを+q から－q に流れこむ方にとると、$V=\frac{q}{C}$,$I=-\frac{dq}{dt}$を代入して、

$$\frac{q}{C}=-R\frac{dq}{dt}$$

$$-\frac{dt}{RC}=\frac{dq}{q}$$

両辺積分すると、

$$\int -\frac{dt}{RC}=\int\frac{dq}{q}$$

$$\ln q=-\frac{t}{RC}+A(\text{積分定数})$$

$$q=e^{-\frac{t}{RC}+A}=A'e^{-\frac{t}{RC}}\quad(e^A=A'\text{と置いた})$$

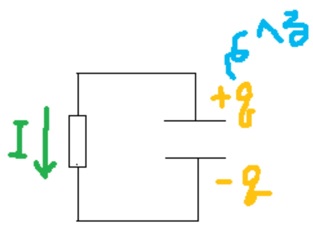
スイッチを ON にした瞬間は、正の極板の電荷はまだ q(0)=Q なので、

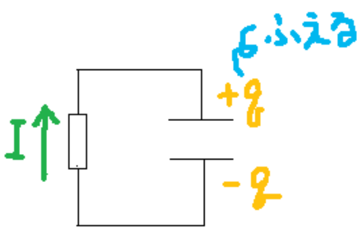
$$A'e^{-\frac{0}{RC}}=Q\text{ より }A'=Q$$

$$I=-\frac{dq}{dt}=-\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

(3)'s point $I=-\frac{dq}{dt}$の－が問題によっては＋のときもあったりしてよくわからん!!人へ

→まず適当に電流の向きを決めたら、+q のほうの極板に注目し、電流が流れ込んでいるか、流失しているかで判断する。





↑本問の電流の向き

減るから、$I=-\frac{dq}{dt}$

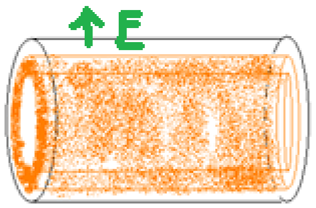
こっち向きに電流をとると、

増えるから、$I=+\frac{dq}{dt}$

電流の向きをどっちにとるかによって答えの符号が変わってしまうので、

[解答]にも書いたの電流の向きを+q から－q に流れこむ方にとるとの部分は明記したほうがいいと思う。

⑧円柱殻分布



内半径 a、外半径 b の円柱殻状に電荷密度 ρ (r)が分布しているとき、

r<a のとき q=0

a<r<b のとき $q=\int_a^r \rho(r) 2\pi rhdr$

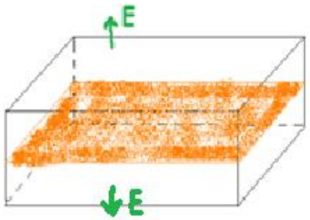
r>b のとき $q=\int_a^b \rho(r) 2\pi rhdr$

これを（＊２）に代入。

過去問には無かったけど一応。

［平面系］

⑨平面分布



平面に分布した電荷に対しては左図のように直方体のガウス閉曲面をとる。

閉曲面内の電荷を Q、断面積を S とすると、

ガウスの法則より、

$$E \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

となる。重要なのはこの場合なら平面より上は上向きの電場が、平面より下は下向きの電場が働くこと。このため場合分けが発生する。

面電荷密度 σ が与えられたのなら、$Q=\sigma S$ とすればよし。

神成物Ｂ 問題集 vol1[4]

２枚の一様に帯電した薄い板が平行に距離 3d だけ隔てて真空中に置かれている。**電荷のそれぞれ Q,－Q で板の面積は S で端の効果は無視できる。**極板(+)の位置を x=0、極板(－)の位置を x=3d となるように x 軸をとったとき、中央軸付近での電界の x 成分 Ex、および電位Φと x の関係をグラフに示しなさい。グラフは形だけでなく値も示しなさい。た

太字部分の意味：本来平面の場合は無限平面でないとガウスの法則は適用できないが、今回の極板には適用していいよ、って意味。

[解答]２枚の板と見た瞬間に、例の鉄則がすぐ浮かぶ。

鉄則:電荷分布が複数ある問題⇒独立にガウス、後から重ねあわせ

<u>極板(+)について</u>

x>0 の時は正方向の電場がかかり、x<0 のときは負方向の電場がかかる。

$$E_+ = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} & (x>0) \\ -\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} & (x<0) \end{cases}$$

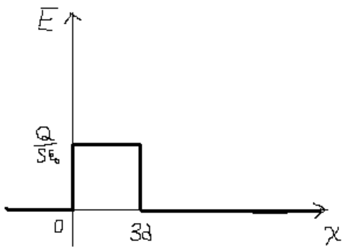
<u>極板(－)について</u>

x>3d の時は負方向の電場がかかり、x<3d のときは正方向の電場がかかる。

$$E_- = \begin{cases} -\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} & (x>3d) \\ \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S} & (x<3d) \end{cases}$$

重ね合わせの原理より、

$$E_x = E_+ + E_- = \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} & (0 < x < 3d) \\ 0 & (x < 0, x > 3d) \end{cases}$$



次に電位。電位差ではなくて「電位」と言われて、かつ基準が無限遠ではない時、

特に意識しなければならないポイント。それは「積分の上が基準点」

よって、

$$\phi(x) = \int_x^0 E_x dx$$

となる。今までの問題では、小さい方から大きい方へ積分してたが、今回は x〜0 まで積分になる。基準点である原点が上にくるってこと。さらにいつもの鉄則、

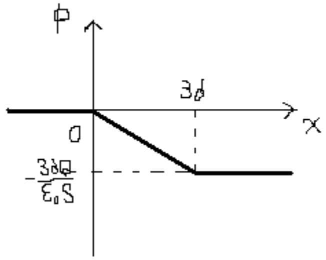
場合分けされた電場から電位を求めるときは、まず E-r グラフを描け。

これはもう書いてあるので、上図を見ながら場合分けしてΦを求める。

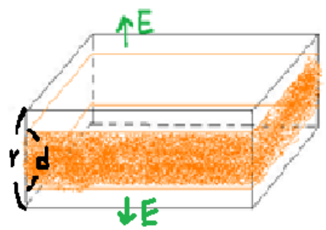
x<0 のとき　$\phi(x) = \int_x^0 0dx=0$

0<x<3d のとき　$\phi(x) = \int_x^0 \frac{Q}{\varepsilon_0 S} dx = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}x$

x>3d のとき　$\phi(x) = \int_{3d}^0 \frac{Q}{\varepsilon_0 S} dx + \int_x^{3d} 0\,dx = -\frac{Q}{\varepsilon_0 S}3d$



⑩板分布



電荷が幅を持った板のように分布しているときは左図のようにガウス閉曲面をとる。

r>d のときはすべての電荷が含まれる。

r<d のときは一部の電荷がガウス閉曲面外に出る。

問題によって電荷密度の与え方が違うので早速過去問で実戦すべし。

2008 過去問　問題 I

厚さ a の無限に広い板状の空間の中に電荷が分布している。板の法線方向に z 軸をとり、板の下の面を z=0 とする。電荷密度は z の関数として、ρ(z)=βz　(0<z<a) と表せる。板の下面で電界はゼロベクトルだとして、z>0 のときの電界ベクトルを求めよ。

この問題の解答の原本は誤植が多いのでこちらを参考に。

[解答]

まず、板の下面で電界をゼロベクトルとしてよいとあるので、

ガウス閉曲面の下面を z=0 にしておけば、ガウスの法則は上の面のみ考えればよい。

断面積 S とすると、ガウス閉曲面内の電荷は、

$$q=\begin{cases}\int_0^z \rho(z)S\,dz & (0<z<a)\\ \int_0^a \rho(z)S\,dz & (z>a)\end{cases}$$

解くと、

$$q=\begin{cases}\int_0^z \beta zS\,dz=\dfrac{\beta Sz^2}{2} & (0<z<a)\\ \int_0^a \beta zS\,dz=\dfrac{\beta Sa^2}{2} & (z>a)\end{cases}$$

ガウスの法則より、

$$ES=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

(↑上面だけなので、2S ではなく、S になっていることに注意)

$$E=\begin{cases}\dfrac{\beta z^2}{2\varepsilon_0} & (0<z<a)\\ \dfrac{\beta a^2}{2\varepsilon_0} & (z>a)\end{cases}$$

「**電界ベクトル**を求めよ」なので、**z** /z をかけてベクトルに変えて、

$$\mathbf{E}=\begin{cases}\dfrac{\beta z}{2\varepsilon_0}\mathbf{z} & (0<z<a)\\ \dfrac{\beta a^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{z}}{z} & (z>a)\end{cases}$$

最後に補足問題。

神成物 B 問題集 vol4 問題 I (1)

電荷 Q で帯電した半径 a の金属球がある。

距離 r での電荷のエネルギー密度を求め、これを全空間で積分することで、

全静電エネルギーを求めよ。

電荷のエネルギー密度：$u(r)=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$　　静電エネルギー：$U=\iiint u(r)dV$

求め方：　E→u(r)→U　　E の求め方は今まで通り。

[解答]

金属球だから電荷は表面にすべて分布している。故に球面分布である。

球全体に一様に分布している、球分布ではないので要注意。

0<r<a のとき $q=0$

r>a のとき q=Q

ガウスの法則より、

$$E=\begin{cases}0 & (0<a<r)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2} & (r>a)\end{cases}$$

$$u(r)=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\begin{cases}0 & (0<a<r)\\ \dfrac{\varepsilon_0Q^2}{32\pi^2r^4} & (r>a)\end{cases}$$

$$U(r)=\int_0^a u(r)4\pi r^2\,dr+\int_a^\infty u(r)4\pi r^2dr=\int_r^\infty \frac{\varepsilon_0Q^2}{8\pi{\varepsilon_0}^2r^2}dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0a}$$