5/19 問題 $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ とするとき.

$W = \mathrm{Span}\{x_1, x_2, x_3\}$ の基底をひと組求めよ。

(前回の演習問題より、$\underbrace{7x_1 + 3x_2 + x_3 = \mathbf{0}}_{\text{式(1)}}$ が成り立っている。)

解) 式(1) より、x_1, x_2, x_3 は1次従属なので、W の基底とはなれないことに注意する。

式(1) より、

$$x_3 = -7x_1 - 3x_2 \in \mathrm{Span}\{x_1, x_2\}$$

であるから、教科書 命題2.2 より、($y_1 = x_3$ と思う)

$$\mathrm{Span}\{x_1, x_2\} = \mathrm{Span}\{x_1, x_2, x_3\} = W$$

となる。よって、x_1, x_2 は W の生成系。

x_1, x_2 が1次独立ならば、これが W の基底となる。

実際、$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \mathbf{0}$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} -c_1 + 2c_2 \\ c_1 - c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \; c_1 = c_2 = 0$$

よって x_1, x_2 は1次独立なので、x_1, x_2 は W の基底.

注1) 式(1) を、$x_2 = -\frac{7}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3$ と変形すれば、

$x_2 \in \mathrm{Span}\{x_1, x_3\}$ より、$W = \mathrm{Span}\{x_1, x_3\}$ となる。

x_1, x_3 は1次独立なので、x_1, x_3 も W の基底である。

全く同様にして、x_2, x_3 も W の基底であることがわかる。

注2) いくつかのベクトルで生成される部分空間の基底の求め方は、数学B2 で、別の方法を学ぶ。