板倉 慶直 君の模範解答

演習問題 4（2016 年 7 月 12 日分）

次回 7 月 19 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題 1】次の微分方程式の解について以下の問に答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad \text{——} \quad ☆$$

(1) 基本行列をもとめよ．(例 5.1.3 を参照)

(2) 一般解を求めよ．

(3) 初期値 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

(1)

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$|\Phi(0)| = 1 \neq 0$ より $\Phi(t)$ は

☆の基本行列

(2)

$$x = c_1 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

c_1, c_2：任意定数

(3)

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \Phi^{-1}(0) \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ より}$$

$$x_1 = e^{2t}, \quad x_2 = e^{-t}$$

【問題 2】

以下の微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 10x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

(1)

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} x$$

固有値は $\lambda_1 = 2$　$\lambda_2 = 3$

それぞれに対応する固有ベクトルは

$$\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

より基本行列は

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ \frac{2}{5}e^{2t} & \frac{1}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

より

解は

$$x = \Phi(t) \cdot \mathbb{P}^{-1} \cdot x(0)$$

$$= \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 4e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

【問題３】以下の微分方程式の解を求めよ．
（必要に応じて p.129 後半を参照せよ）

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_0 = 2$$

ある正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

基本行列

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$x = P\,\Phi(t)\,P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= P\,\Phi(t)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= P\begin{bmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} \\ e^{2t} + 2te^{2t} \end{bmatrix}$$

【問題４】以下の２階微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \end{bmatrix}$$

固有値 $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$

固有ベクトル $\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

基本行列

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-2-(-1)}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より

$$x = \Phi\,P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -3e^{-t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $x = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$

坂井 梨乃 君の模範解答

演習問題４（2016 年７月 12 日分）

次回７月 19 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題１】次の微分方程式の解について以下の問に答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(1) 基本行列をもとめよ．(例 5.1.3 を参照)
(2) 一般解を求めよ．
(3) 初期値 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

(1) $x = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$

よって，基本行列は $\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

(2) $x(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$ （C_1, C_2 はある定数）

(3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ とすると．

$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$

$= (\lambda-2)(\lambda+1) = 0 \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$

$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \mathbb{P}_1 = 0$

$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbb{P}_1 = 0$

$\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると

$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix}$

$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

【問題２】
以下の微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 10x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ とすると

$\frac{dx}{dt} = Ax = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} x$

$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -10 \\ 2 & \lambda-7 \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 - 5\lambda - 14 + 20$

$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$

$\lambda = 2, 3 \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3$

$(\lambda_1 I - A)\mathbb{P}_1 = 0 \qquad (\lambda_2 I - A)\mathbb{P}_2 = 0$

$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \right) \mathbb{P}_1 = 0 \qquad \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \right) \mathbb{P}_2 = 0.$

$\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \mathbb{P}_1 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = 0$

$2x - 5y = 0 \qquad x - 2y = 0.$

$\mathbb{P}_1 = k \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{P}_2 = l \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ （k, l は定数）

基本ベクトル $\Phi(t) = \begin{bmatrix} 5e^{2t} & 2e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix}$

$x(t) = \Phi(t) P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5e^{2t} & 2e^{3t} \\ 2e^{2t} & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 4e^{3t} & -10e^{2t} + 10e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & -4e^{2t} + 5e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 4e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}$

$x_1(t) = 5e^{2t} - 4e^{3t}$
$x_2(t) = 2e^{2t} - 2e^{3t}$

【問題３】以下の微分方程式の解を求めよ．
（必要に応じて p.129 後半を参照せよ）

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ とすると

$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1$

$= (\lambda-2)^2 = 0 \quad \lambda = 2$

$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \qquad x(0) = 1$ より $C_1 = 1$

$= (C_1 + C_2 t)e^{2t} = (1 + C_2 t)e^{2t}$

$x'(t) = C_2 e^{2t} + (C_1 + C_2 t) 2e^{2t}$

$= e^{2t}(2C_1 + C_2 + 2C_2 t) \qquad ae^{2t} + (1+at)\cdot 2e^{2t}$

$= e^{2t}(2 + C_2 + 2C_2 t)$

$x_1(t) = (1+at)e^{2t} \quad x_2(t) = (1+bt)e^{2t}$

$x_1'(t) = e^{2t}(2+a+2at) \quad x_2'(t) = e^{2t}(2+b+2bt)$

$2 + a + 2at = \cancel{1} + at - \cancel{1} - bt$

$(a+b)t = -2 - a$

これが常に成り立つので．$a + b = 0 \quad a = -2$

$b = 2$.

よって $x_1(t) = e^{2t}(1-2t)$

$x_2(t) = e^{2t}(1+2t)$

【問題４】以下の２階微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$x(t) = e^{\lambda t}$

$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$

$(\lambda+2)(\lambda+1) = 0$.

$\lambda = -1, -2$

$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

$x(0) = 1$ より $\quad x'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$

$C_1 + C_2 = 1 \quad x'(0) = -C_1 - 2C_2 = 1$

$C_1 = 3 \quad C_2 = -2$

$x(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$

$2e^{2t}(1-2t) + e^{2t}(-2) = e^{2t}(1-2t) - e^{2t}(1+2t)$

$= -4te^{2t}$

清水 彩花 君の模範解答

演習問題４（2016 年 7 月 12 日分）

次回 7 月 19 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題１】次の微分方程式の解について以下の問に答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(1) 基本行列をもとめよ．(例 5.1.3 を参照)
(2) 一般解を求めよ．
(3) 初期値 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

(1) $\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

$|\Phi(0)| = 1 \neq 0$

$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Phi(t)$

$\therefore \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$ //

(2) $x(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ //　(c_1, c_2 は定数)

(3) $\Phi^{-1}(t) = \dfrac{1}{e^{2t}e^{-t}} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{e^{t}} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\cdot 0} & 0 \\ 0 & e^{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore x(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$ //

【問題２】
以下の微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 10x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\det(A - \lambda I) = 0$ より，

$\begin{bmatrix} -2-\lambda & 10 \\ -2 & 7-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$\therefore \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$　$\therefore \lambda = 2, 3$ (固有値)

$\lambda = 2$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ のとき，$\beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 固有ベクトル

$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

初期値より，

$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$5C_1 + 2C_2 = 1$
$2C_1 + C_2 = 0.$

$5C_1 + 2\times(-2C_1) = 1$

$C_1 = 1$
$C_2 = -2$

$\therefore x_1(t) = 5e^{2t} - 4e^{3t}$
$x_2(t) = 2e^{2t} - 2e^{3t}$ //

【問題３】以下の微分方程式の解を求めよ．
（必要に応じて p.129 後半を参照せよ）

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと，

$\det|A - \lambda I| = 0$ より，

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\therefore \lambda = 2$ （固有値）

固有ベクトルは，

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ より，

$t_0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と表せる。

次に，$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，すなわち

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を満たす u_1, u_2 の組を

1つ求めると，$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって，

$C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$C_2 e^{2t}\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ は

解となる。

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} (C_1 - C_2)e^{2t} + tC_2 e^{2t} \\ -C_1 e^{2t} - tC_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

$x_1(t) = (C_1 - C_2)e^{2t} + tC_2 e^{2t}$

$x_2(t) = -C_1 e^{2t} - tC_2 e^{2t}$

初期値より，

$x_1(0) = C_1 - C_2 = 1$

$x_2(0) = -C_1 = 1$

$C_1 = -1$

$C_2 = -2$

$\therefore$ $x_1(t) = e^{2t}(1 - 2t)$

$x_2(t) = e^{2t}(1 + 2t)$ //

【問題４】以下の２階微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1, \; x'(0) = 1 \end{cases}$$

$x(t) = e^{rt}$ とおくと，

$x'(t) = r e^{rt}$

$x''(t) = r^2 e^{rt}$

$r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r+1)(r+2) = 0$

$r = -1, -2$

$x(t) = e^{-t}, e^{-2t}$

$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

初期値より，

$x(0) = C_1 + C_2 = 1$

$x'(0) = -C_1 - 2C_2 = 1$

$C_2 = 1 - C_1$

$-C_1 - 2(1 - C_1) = 1$

$C_1 = 3$

$C_2 = 1 - 3 = -2$

$\therefore$ $x(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$ //

冨田 隼平 君の模範解答

演習問題 4 (2016 年 7 月 12 日分)

次回 7 月 19 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題 1】次の微分方程式の解について以下の問に答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

(1) 基本行列をもとめよ．(例 5.1.3 を参照)
(2) 一般解を求めよ．
(3) 初期値 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ を満たす解を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\right| = \underline{e^{t}}$$

(2) $x(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ は任意)

(3) $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{C}$$

$$\therefore\ \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}}$$

【問題 2】
以下の微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1'(t) = -2x_1(t) + 10x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 7x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 10x_2 \\ -2x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}}_{= A\ \text{とおく.}} x$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda+2)(\lambda-7) + 20$$
$$= (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

固有値 2 3

固有ベクトル $s\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$x = \left[e^{2t}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ e^{3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \mathbb{C}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5C_1 + 2C_2 \\ 2C_1 + C_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x = \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 4e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix}}$$

【問題３】以下の微分方程式の解を求めよ．
（必要に応じて p.129 後半を参照せよ）

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 3x_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とおく．

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A\text{ とおく.}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)(\lambda-3) + 1 = (\lambda-2)^2 = 0$$

$$\mathbb{P}_0 = (A - \lambda I)\mathbb{P}_1$$

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{P}_1 \quad \mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbb{P}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = [\mathbb{P}_0 \ \ \mathbb{P}_1] \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = Py = \cdots$$

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y$$

$$y_1' = 2y_1 + y_2 \quad y_1 = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$
$$y_2' = 2y_2 \quad y_2 = C_2 e^{2t}$$

$$y = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$x = e^{2t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} -1 & -t+1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$t = 0$ のとき．

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 + C_2 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad C_1 = 1,\quad C_2 = 2$

したがって．

$$x = e^{2t} \begin{bmatrix} -1 & -t+1 \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} -1 - 2t + 2 \\ 1 + 2t \end{bmatrix} = \underline{e^{2t} \begin{bmatrix} -2t + 1 \\ 2t + 1 \end{bmatrix}}$$

【問題４】以下の２階微分方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

$x' = y$ とする．

$$y' = -3x' - 2x = -3y - 2x$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y \\ -3y - 2x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}}_{A\text{ とおく.}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda+3) + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$$

固有値 $\quad -2 \quad -1$

固有ベクトル $\quad s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ として．

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad x = Py$$

$$y' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y$$

$$y_1' = -2y_1 \quad y_1 = C_1 e^{-2t}$$
$$y_2' = -y_2 \quad y_2 = C_2 e^{-t}$$

$$y = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$t = 0$ のとき．

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 = 1 \end{matrix} \quad \therefore \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = -2e^{-2t} + 3e^{-t}$$

//