数学 2B　第 7 回（行列式の定義と性質，行列式の計算方法）

2019 年 11 月 12 日（火）
担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

おしらせ

中間試験を 12 月 3 日（火）の授業時間に行います．

- 試験時間：80 分
- 場所：23 教室
- 出題範囲：教科書の 6 章および 7 章

宿題の解答例

問題 6-4.　シュミットの直交化法を用いる．

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{3+2-1+2}{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2}\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{6}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3)}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_3 - \frac{2}{4}\boldsymbol{v}_1 - \frac{7}{9}\boldsymbol{v}_2 = \frac{4}{9}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{x}_4 - \frac{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_4)}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_4)}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}_4)}{\|\boldsymbol{v}_3\|^2}\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_4 + \frac{1}{4}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{36}\boldsymbol{v}_2 - \frac{1}{9}\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

正規化 $(\boldsymbol{u}_i = \dfrac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|})$ して

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

＊シュミットの直交化法でベクトルを求めたら、最後に『$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ が正規直交系となっていること』すなわち，

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

が任意の $i, j = 1, \ldots, 4$ で成立していることを必ず確かめること．

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案をOCR対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい

問題 7-1.　$S_k (k \geq 1)$ は k 次の置換全体を表す.

(1) S_2 を求めなさい．また，各 $\sigma \in S_2$ に対して，符号 $\mathrm{sgn}\sigma$ を求めなさい.

(2) S_3 を求めなさい．また，各 $\sigma \in S_3$ に対して，符号 $\mathrm{sgn}\sigma$ を求めなさい.

問題 7-2.　次の各置換が偶置換，奇置換のいずれであるか調べなさい.

$$(1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

問題 7-3.　定義 7.1.4. から次の行列の行列式を求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

問題 7-4.　命題 7.1.5. および命題 7.2.1. の結果を用いて，問題 7-3 の行列 A の行列式を求めなさい.

問題 7-5(宿題).　命題 7.1.5. および命題 7.2.1. の結果を用いて，次の行列の行列式を求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

（注）B_n は，n 次行列とし，$a, b \in \mathbb{R}$ とする.