数学 4 B 期末試験問題

亀谷 幸生 ・ 栗原 将人

2016 年度 秋学期

回答欄には、答だけでなく、計算の過程も (回答欄のスペースの範囲内で) 書くこと。

$4e^{t},\ te^{t}$
$C_2 e^{t}$

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) A を直交行列で対角化しなさい。すなわち、直交行列 P で $P^{-1}AP$ が対角行列となるような P とそのときの $P^{-1}AP$ を求めなさい。

(2) 2 次形式 $F(x, y, z)$ を

$$F(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2xy + 2yz - 2zx$$

とおく。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

と X, Y, Z を定義するとき、$F(x, y, z)$ を X, Y, Z を使って表せ。

(3) O を 3 次元空間の原点とする。点 P が楕円面

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2xy + 2yz - 2zx = 1$$

上を動くとき、線分 OP の長さの最大値を求めなさい。また、その最大値を与える点 (x, y, z) をすべて求めなさい。

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ x & y & z & w \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式を $\det A$ と書くとき、

$\det A = ax + by + cz + dw$ となるような実数 a, b, c, d を求めなさい。

(裏へ続く)

3. t の関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ に関する微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

の解で、初期条件 $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ をみたすものを求めなさい。

4. a を実数として、$A = \begin{pmatrix} 2-a & 1+a & 1 \\ 1-a & 2+a & 1 \\ 2a & -2-2a & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) A の固有多項式と固有値を求めなさい。

(2) A が対角化可能かどうか、a の値で分類することにより、判定しなさい。判定するときには、理由をつけて判定すること。

5. A を n 次の行列、O を n 次の零行列であるとし、$A^2 = O, A \neq O$ がみたされているとする。

(1) A の固有値は 0 のみであることを証明しなさい。

(2) A は対角化できないことを証明しなさい。

6. A を実数を成分とする n 次の正則行列とする。${}^tA$ を A の転置行列として、$B = {}^tAA$ とおく。B の固有値はすべて正の実数であることを証明しなさい。

以上

2016

数学４Ｂ期末試験問題略解　　(亀谷)

1. (1) A の固有多項式は $f_A(\lambda)=(\lambda-5)^2(\lambda-2)$ である．W_5 の基底 $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ からシュミットの直交化によって正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$ が得られる．W_2 の基底 $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ からシュミットの直交化によって正規直交基底 $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ が得られる．$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}\\0&2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$ とおくと P は直交行列で，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ となる．

(2) $F(x,y,z)=[x,y,z]A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=[X,Y,Z]^tPAP\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=[X,Y,Z]P^{-1}AP\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=5X^2+5Y^2+2Z^2$.

(3) $2OP^2=2(X^2+Y^2+Z^2)\leq 5X^2+5Y^2+2Z^2=F(x,y,z)=1$ であって，等号は $X^2=Y^2=0$ のときに成り立つ．ゆえに $X=Y=0$, $Z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，OP は最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる．このとき，$(x,y,z)=\pm(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})$ である．

2. 第３行について余因子展開をすると

$$\det A = x\begin{vmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&3&1\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&0&1\\2&3&1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&1\\2&1&1\end{vmatrix}-w\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&2&0\\2&1&3\end{vmatrix}.$$
$$= -2x+4y+2z-6w$$

なので，$a=-2, b=4, c=2, d=-6$.

3. 係数行列 $A=\begin{bmatrix}2&-2\\2&2\end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda=2\pm 2i$ なので，

$$e^{tA}=\frac{e^{2t}}{2}(\sin(2t)A+(2\cos(2t)-2\sin(2t))I)=e^{2t}\begin{bmatrix}\cos(2t)&-\sin(2t)\\\sin(2t)&\cos(2t)\end{bmatrix}.$$

ゆえに

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}\cos(2t)&-\sin(2t)\\\sin(2t)&\cos(2t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=e^{2t}\begin{bmatrix}\cos(2t)-\sin(2t)\\\sin(2t)+\cos(2t)\end{bmatrix}.$$

4. (1) A の固有多項式 $f_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. より A の固有値は $1,2$ である．

(2) 行基本変形により $A-I=\begin{bmatrix}1-a&1+a&1\\1-a&1+a&1\\2a&-2-2a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1-a&1+a&1\\0&0&0\\1+a&-1-a&0\end{bmatrix}$ となるので，$a=-1$ のとき，$\mathrm{rank}A=1$, $a\neq-1$ のとき，$\mathrm{rank}A=2$ である．ゆえに $a=-1$ の

とき, $\dim W_1 = 3 - \mathrm{rank}(A - I) = 2$ は $\lambda = 1$ の重複度と等しい. また, 行基本変形より $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $\mathrm{rank}(A - 2I) = 2$ なので, $\dim W_2 = 3 - \mathrm{rank}(A - I) = 1$ は $\lambda = 2$ の重複度と等しい. ゆえに対角化可能である.

$a \neq -1$ のとき, $\dim W_1 = 3 - \mathrm{rank}(A - I) = 1$ は $\lambda = 1$ の重複度と等しくないので, 対角化可能でない.

5. (1) A の固有値 λ は $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ をみたすので, $\boldsymbol{0} = A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = \lambda(A\boldsymbol{x}) = \lambda^2\boldsymbol{x}$ より $\lambda^2 = 0$ である. ゆえに $\lambda = 0$ である.

(2) A が対角化可能であるとすると, A の固有値はすべて 0 であるので, $P^{-1}AP = O$ となる正則行列 P が存在する. ゆえに $A = POP^{-1} = O$ である. これは仮定に矛盾する.

6. B の固有値 λ は $B\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ をみたすので, ${}^tAA\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ から

$$({}^tAA\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = ||A\boldsymbol{x}||^2 = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda||\boldsymbol{x}||^2$$

となる. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすると, $\mathrm{Ker}\, A \neq \{\boldsymbol{0}\}$ より A は正則ではなくなるので, $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ である. ゆえに $\lambda > 0$ である.