中間試験の略解

2014年6月26日(木) 清 智也

問題 1 (20点). 次の式を満たす定数 A, B, C, D を定めよ：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+e^x}-(A+Bx+Cx^2+Dx^3)}{x^3}=0.$$

[解] e^x と $(1+x)^\alpha$ のマクローリン近似を組み合わせると，

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+e^x} &= \sqrt{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)} \\
&= \sqrt{2}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\right\} \\
&= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{32}x^2+\frac{7\sqrt{2}}{384}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

となる．よって $A=\sqrt{2}$, $B=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $C=-\frac{3\sqrt{2}}{32}$, $D=\frac{7\sqrt{2}}{384}$ となる． □

[別解] $f(x)=(1+e^x)^{1/2}$ とおき，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+o(x^3)$ を計算する． □

問題 2 (15点). 次の，区間 $[0,1]$ で定義された関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

$$f(x)=\begin{cases} x\log(5x)+(1-x)\log(1-x) & \text{if } 0<x<1, \\ 0 & \text{if } x=0, \\ \log 5 & \text{if } x=1. \end{cases}$$

[解] まず，この関数 f は区間 $(0,1)$ で微分可能で，$[0,1]$ で連続である（連続性はロピタルの定理を使って確かめられる）．一方，$f'(x)=0$ となる x を探すと，

$$f'(x)=\log(5x)-\log(1-x)=0 \iff x=\frac{1}{6}$$

となる．以上から，最大・最小をとる点の候補は $x=0,\frac{1}{6},1$ となる．$f(0)=0$, $f(\frac{1}{6})=\log\frac{5}{6}$, $f(1)=\log 5$ を比較することにより，最大値は $f(1)=\log 5$, 最小値は $f(\frac{1}{6})=\log\frac{5}{6}$ である． □

問題 3 (15点). 関数 $f(x,y)=\sin(\sqrt{x}+\cos y)$ を考える．定義域は $D=\{(x,y)\mid x>0,\ y\in\mathbb{R}\}$ とする．このとき，関数 $f(x,y)$ は D において C^1 級であることを証明せよ．ただし，以下の事実 (ア)-(ウ) は使ってよい．

(ア) 1変数関数についてよく知られている事実．
(イ) 2変数関数 $a(x,y)=x$, $b(x,y)=y$, および定数関数はそれぞれ連続であること．
(ウ) 連続関数どうしの加減乗除や合成関数は連続関数になること．ただし除算における分母は0でない場合に限る．

[解] f, f_x, f_y が D において連続であることを言えばよい．それぞれ

$$f=\sin(\sqrt{x}+\cos y),\quad f_x=\cos(\sqrt{x}+\cos y)\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f_y=\cos(\sqrt{x}+\cos y)(-\sin y)$$

となる．例えば f は $f(x,y)=\sin(\sqrt{a(x,y)}+\cos(b(x,y)))$ と表される（他も同様）．(ア) より三角関数と平方根は連続，(イ) より a, b と定数関数は連続，(ウ) よりこれらの四則演算や合成関数は再び連続関数になるから，結局 f, f_x, f_y は連続関数となる．よって f は C^1 級である． □

問題 4 (15 点). 曲面 $z = f(x,y) = y^2(x^4 - 2x^2 + 3)$ の，点 $(a,b,c) = (1,2,f(1,2))$ における接平面の方程式を求めよ．

[解] 接平面の公式 $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ に代入すればよい．$f(x,y) = y^2(x^4-2x^2+3)$，$f(1,2)=8$，$f_x(x,y) = y^2(4x^3-4x)$，$f_x(1,2)=0$，$f_y(x,y) = 2y(x^4-2x^2+3)$，$f_y(1,2)=8$ より，求める平面は $z = 8 + 0\cdot(x-1) + 8(y-2)$，あるいは $z = 8y-8$ となる． □

問題 5 (20 点+15 点=35 点). $x = \cos u \cos\left(\dfrac{t}{\cos u}\right)$, $y = \cos u \sin\left(\dfrac{t}{\cos u}\right)$, $z = \sin u$ をそれぞれ (t,u) の関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $A = x_t^2+y_t^2+z_t^2$, $B = x_tx_u+y_ty_u+z_tz_u$, $C = x_u^2+y_u^2+z_u^2$ をそれぞれ計算し，$AC-B^2=1$ となることを示せ．

(2) $x = \dfrac{1}{4}$ を満たすような陰関数 $u = u(t)$ が点 $(t,u) = (\pi/6, \pi/3)$ の近くで唯一つ存在することを示せ．また，$u'(\pi/6)$ を求めよ．

[解] (1)：まず偏導関数を求める．$\lambda = \frac{t}{\cos u}$ とおくと，

$$x_t = -\sin\lambda,\quad y_t = \cos\lambda,\quad z_t = 0,$$
$$x_u = -\sin u\cos\lambda - t\tan u\sin\lambda,\quad y_u = -\sin u\sin\lambda + t\tan u\cos\lambda,\quad z_u = \cos u$$

となる．よって

$$A = x_t^2+y_t^2+z_t^2 = 1,\quad B = x_tx_u+y_ty_u+z_tz_u = t\tan u,\quad C = x_u^2+y_u^2+z_u^2 = 1+t^2\tan^2 u$$

となり，$AC-B^2=1$ となる．

(2)：$f(t,u) = x - \frac{1}{4} = \cos u\cos\lambda - \frac{1}{4}$ とおく（ただし $\lambda = \frac{t}{\cos u}$）．(1) より偏導関数は $f_t = -\sin\lambda$, $f_u = -\sin u\cos\lambda - t\tan u\sin\lambda$ である．すると，$f(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}) = 0$ かつ $f_u(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}+\pi}{4} \neq 0$ であり，陰関数定理より，方程式 $f(t,u)=0$ の陰関数 $u=u(t)$ が $(t,u) = (\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$ の近傍で唯一つ存在する．また，$t = \frac{\pi}{6}$ における $u(t)$ の微分は

$$u'(t) = -\frac{f_t(t,u)}{f_u(t,u)} = -\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}+\pi}{4}} = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\pi}$$

となる． □

採点基準

- 問題 1：A,B,C,D が正解ならば 20 点，三つ正解のときは 10 点，それ以外は 5 点か 0 点．
- 問題 2：最大値・最小値が合っていれば 15 点．微分や大小比較を間違えたら 10 点．それ以外は 5 点か 0 点．ただし連続性が言及されていたら 5 点を加点する（満点を超えない範囲で）．
- 問題 3：C^1 級の定義が述べられており，それなりに説明が書かれていれば 15 点．定義を間違えているものは 10 点，大きな間違いは 5 点か 0 点．
- 問題 4：A,B,C が正しければ 20 点，偏微分の計算は合っているがその後の計算が間違えていたら 10 点，偏微分の計算を間違えているがその後のつじつまが合っていたら 10 点，それ以外は 5 点か 0 点．
- 問題 5：陰関数定理が正しく用いられていて u' の値が合っていれば 15 点，u' が間違えていたら 10 点，陰関数定理の条件を間違えているなどの誤りは 5 点か 0 点．
- 問題 6：問題 1 から問題 5 の合計が 60 点未満の答案に対し，成績の順位を変えない範囲で加点した．