解説

問題 I

(1) 微小円環の $\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$ の微小部分の電荷 $\mathrm{d}q$ が原点に作る電界 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, \varphi, z)$ を考える。この微小部分と原点を結ぶベクトル $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R} = -r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z$ と表され、$R = |\boldsymbol{R}| = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ となる。これより、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, \varphi, z) = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

を得る。上式の内、$\boldsymbol{e}_r$ 成分は、$\varphi + \pi \sim \varphi + \pi + \mathrm{d}\varphi$ の微小部分の電荷が作る電界の $\boldsymbol{e}_r$ 成分と打ち消し合い ($\because \boldsymbol{e}_r(\varphi + \pi) = -\boldsymbol{e}_r(\varphi)$)、微小円環全体の作る電界には寄与しないので、$\boldsymbol{e}_z$ 成分の寄与のみを考えれば良い。その寄与は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}'(r, \varphi, z) = -\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z$$

で与えられる。ここで、微小部分の体積は、3 辺の長さが $\mathrm{d}r$、$r\,\mathrm{d}\varphi$、$\mathrm{d}z$ の直方体の体積として、$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi$ で与えられることより、$\mathrm{d}q = \rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi$ で与えられる。これより、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, z) &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, \varphi, z) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}'(r, \varphi, z) = -\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho r z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

を得る。

(2) (1) の結果より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E}(z) &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, z) = -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{a^2}\frac{1}{(u + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\,\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}(-2)\left.\frac{1}{(u + z^2)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{a^2}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$u = r^2$、$\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$、$z > 0$ を用いた。

(3) (2) の結果より、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}} &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}(z) = -\int_{z_1}^{z_1+h}\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{1 - \frac{z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{h - \int_{z_1}^{z_1+h}\frac{z}{(z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}z\right\}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{h - \frac{1}{2}\int_{z_1{}^2}^{(z_1+h)^2}\frac{1}{(v + a^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}v\right\}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left\{h - \frac{1}{2}2\left.(v + a^2)^{\frac{1}{2}}\right|_{z_1{}^2}^{(z_1+h)^2}\right\}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[h - \{(z_1 + h)^2 + a^2\}^{\frac{1}{2}} + (z_1^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}\right]\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

を得る。ここで、$v = z^2$、$\mathrm{d}v = 2z\,\mathrm{d}z$ を用いた。ヒントより、

$$\lim_{a\to\infty}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}} = -\frac{\rho h}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z$$

を得る。ガウスの法則から独立に求めても良い。

問題 II

(1) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ と書ける。ここで、

$$E(r) = \begin{cases} E_0\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 & \cdots \quad r \le a \\[2ex] E_0\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

である。位置 $\boldsymbol{r}$ から $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 方向の直線に沿って無限遠迄線積分を行なう．電界の接線方向成分 $E_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$ は $E_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2} = E(r)$ で与えられる。$a < r$ の場合,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_r^\infty E(r')\mathrm{d}r' = \int_r^\infty E_0\frac{a^2}{r'^2}\mathrm{d}r' = -E_0\frac{a^2}{r'}\bigg|_r^\infty = E_0\frac{a^2}{r} = E_0 a\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}.$$

$r \le a$ の場合,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_r^\infty E(r')\mathrm{d}r' = \int_r^a E(r')\mathrm{d}r' + \int_a^\infty E(r')\mathrm{d}r' = \int_r^a E(r')\mathrm{d}r' + \phi(\boldsymbol{r})|_{r=a}$$

$$= \int_r^a \frac{E_0 r'^3}{a^3}\mathrm{d}r' + E_0 a = \frac{E_0 r'^4}{4a^3}\bigg|_r^a + E_0 a = \frac{E_0 a}{4} - \frac{E_0 r^4}{4a^3} + E_0 a = \frac{E_0 a}{4}\left\{5 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}.$$

(2) $r \ne 0$ とする．$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}$ の形をしている．ここで、

$$f(r) = \frac{E(r)}{r} = \begin{cases} E_0\dfrac{r^2}{a^3} & \cdots \quad r \le a; \\[2ex] E_0\dfrac{a^2}{r^3} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

である。

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\{f(r)\boldsymbol{r}\} = \nabla f(r)\cdot\boldsymbol{r} + f(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r} \\ &= \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}(\nabla r)\cdot\boldsymbol{r} + 3f(r) = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r} + 3f(r) = r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} + 3f(r) \end{aligned}$$

が成立する．これより、

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$= \begin{cases} \varepsilon_0\left[r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(E_0\dfrac{r^2}{a^3}\right) + 3\left(E_0\dfrac{r^2}{a^3}\right)\right] = \varepsilon_0\left[2E_0\dfrac{r^2}{a^3} + 3E_0\dfrac{r^2}{a^3}\right] = 5\dfrac{\varepsilon_0 E_0}{a}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \quad 0 < r \le a; \\[2ex] \varepsilon_0\left[r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(E_0\dfrac{a^2}{r^3}\right) + 3\left(E_0\dfrac{a^2}{r^3}\right)\right] = \varepsilon_0\left[-3E_0\dfrac{a^2}{r^3} + 3E_0\dfrac{a^2}{r^3}\right] = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \quad a < r \end{cases}$$

を得る。$r = 0$ での電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})|_{r=0}$ は、半径 r の球面 S に対して積分形のガウスの法則を適用し、球内の電荷を求め、球の体積で割り、$r \to 0$ として求める。これにより、

$$\rho(\boldsymbol{r})|_{r=0} = \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon_0 \displaystyle\iint_{\mathrm{S}} E_n \mathrm{d}S}{\dfrac{4\pi r^3}{3}} = \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon_0 4\pi r^2 E(r)}{\dfrac{4\pi r^3}{3}} = \lim_{r\to 0}\frac{3\varepsilon_0 E(r)}{r} = \lim_{r\to 0} 3\varepsilon_0 E_0\frac{r^2}{a^3} = 0$$

を得る。即ち、$r \ne 0$ で求めた $\rho(\boldsymbol{r})$ の式は $r = 0$ を含めても成立する。

(3) 原点からの距離が $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分を考えると，単位体積あたり静電エネルギー $u_E'(r)$ は $u_E(r) = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2$，体積は $4\pi r^2 \mathrm{d}r$ なので，

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int_0^\infty u_E(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\{ E_0 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \right\}^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\{ E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right\}^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^2 \int_0^a \left(\frac{r}{a}\right)^8 \mathrm{d}r + 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^2 \int_a^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \mathrm{d}r \\
&= 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \int_0^1 \left(\frac{r}{a}\right)^8 \mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) + 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \int_1^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} \mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) \\
&= 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \left(\frac{1}{9} + 1\right) = \frac{20\pi}{9}\varepsilon_0 E_0^2 a^3
\end{aligned}
$$

(別解)
電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$、電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は原点からの距離 r のみの関数で，それをそれぞれ $\rho(\boldsymbol{r}) = \tilde{\rho}(r)$、$\phi(\boldsymbol{r}) = \tilde{\phi}(r)$、と書く．原点からの距離が $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分を考えると，この微小部分の電荷は $\tilde{\rho}(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$，電位は $\tilde{\phi}(r)$ となる．これより，

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int_0^\infty \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \int_0^a \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\frac{E_0 a}{4}\left\{5 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\} 5\frac{\varepsilon_0 E_0}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2} E_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{-1} \cdot 0 \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{5\pi}{2}\varepsilon_0 E_0^2 a^2 \left\{5 - \left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}\left(\frac{r}{a}\right)^4 \mathrm{d}r = \frac{5\pi}{2}\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \int_0^1 \left\{5\left(\frac{r}{a}\right)^4 - \left(\frac{r}{a}\right)^8\right\} \mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) \\
&= \frac{5\pi}{2}\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{5\pi}{2}\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \frac{8}{9} = \frac{20\pi}{9}\varepsilon_0 E_0^2 a^3
\end{aligned}
$$

問題 III

(1) 電気伝導率 $\sigma(r,\varphi,z)$ は z 軸からの距離 r のみの関数で、それを $\sigma(r,\varphi,z) = \tilde{\sigma}(r)$ と書く。$a < r < b$ とする。対称性より、$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z) = i(r)\boldsymbol{e}_r$ となる。z 軸を中心軸として電極と高さをそろえた半径 r、高さ h の円柱を閉曲面 S として定常電流に関する電荷保存の式の積分形を用いる。円柱の上面 S_1 からは導線で電流 I が流れ込んでいる。円柱の下面 S_2 からは電流の出入りは無い。円柱の側面 S_3 上では法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r$ なので $i_n = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n} = i(r)$ となる。以上より、

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{S}} i_n \mathrm{d}S &= \iint_{\mathrm{S}_1} i_n \mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_2} i_n \mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_3} i_n \mathrm{d}S \\
&= (-I) + 0 + \iint_{\mathrm{S}_3} i(r)\,\mathrm{d}S = -I + i(r)\iint_{\mathrm{S}_3} \mathrm{d}S = -I + 2\pi r h i(r) = 0; \\
\therefore\ i(r) &= \frac{I}{2\pi r h}.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{E}(r,\varphi,z) = \dfrac{1}{\tilde{\sigma}(r)}\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)$ より $\boldsymbol{E}(r,\varphi,z) = E(r)\boldsymbol{e}_r$、

$$
E(r) = \frac{1}{\tilde{\sigma}(r)} i(r) = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \frac{I}{2\pi r h} = \frac{I b^3}{2\pi\sigma_0 h r^4}.
$$

(2) $\boldsymbol{e}_r$ 方向に沿って、電極 A から B まで線積分する。電界の接線方向成分は $E(r)$ になる。従って、

$$V=\int_a^b E(r)\mathrm{d}r=\int_a^b \frac{Ib^3}{2\pi\sigma_0 hr^4}\mathrm{d}r=\frac{Ib^3}{2\pi\sigma_0 h}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{a^3}\right)\right]=\frac{I}{6\pi\sigma_0 h}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^3-1\right];$$

$$\therefore\ R=\frac{V}{I}=\frac{1}{6\pi\sigma_0 h}\left[\left(\frac{b}{a}\right)^3-1\right].$$

(3) $r_1\le r\le r_2$ とする。$r\sim r+\mathrm{d}r$ の範囲の体積は $2\pi rh\mathrm{d}r$、単位体積あたり単位時間あたりジュール熱 $p(r)$ は $p(r)=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}=i^2(r)/\tilde{\sigma}(r)$ より、

$$\begin{aligned}P(r_1,r_2)&=\int_{r_1}^{r_2}p(r)2\pi rh\mathrm{d}r=\int_{r_1}^{r_2}\frac{i^2(r)}{\tilde{\sigma}(r)}2\pi rh\mathrm{d}r=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{b}{r}\right)^3\left(\frac{I}{2\pi rh}\right)^2 2\pi rh\mathrm{d}r\\&=\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{b}{r}\right)^3\frac{I^2}{2\pi rh}\mathrm{d}r=\frac{b^3I^2}{2\pi\sigma_0 h}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^4}\mathrm{d}r=\frac{b^3I^2}{2\pi\sigma_0 h}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{r_1^3}\right)\right]\\&=\frac{b^3I^2}{6\pi\sigma_0 h}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)=\frac{I^2}{6\pi\sigma_0 h}\left[\left(\frac{b}{r_1}\right)^3-\left(\frac{b}{r_2}\right)^3\right]\end{aligned}$$

を得る。$P(a,b)=IV=I^2R$ となっている。

(別解)

$r=r_1$ の位置と $r=r_2$ の位置の電位差 ($r=r_2$ の位置を基準とした $r=r_1$ の位置の電位) を $V(r_1,r_2)$ とすると $P(r_1,r_2)=IV(r_1,r_2)$ となる。これより、

$$\begin{aligned}P(r_1,r_2)&=IV(r_1,r_2)=I\int_{r_1}^{r_2}E(r)\mathrm{d}r=I\int_{r_1}^{r_2}\frac{Ib^3}{2\pi\sigma_0 hr^4}\mathrm{d}r=\frac{I^2b^3}{2\pi\sigma_0 h}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{{r_2}^3}-\frac{1}{{r_1}^3}\right)\right]\\&=\frac{I^2}{6\pi\sigma_0 h}\left[\left(\frac{b}{r_1}\right)^3-\left(\frac{b}{r_2}\right)^3\right]\end{aligned}$$

を得る。

問題 IV

(1) 長方形の z 軸からの距離が $r\sim r+\mathrm{d}r$ の微小部分を考える。この微小部分の面積は $h\mathrm{d}r$ で、法線ベクトルは $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_\varphi$ となる。電流密度の法線方向成分 $i_n(r)=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}$ は

$$i_n(r)=\begin{cases}0 & \cdots\quad r<a;\\ i_0\left(\dfrac{b}{r}\right)^2 & \cdots\quad a\le r\le b;\\ 0 & \cdots\quad b<r.\end{cases}$$

これより、$a\le r_1\le b$ の場合、

$$\begin{aligned}I(r_1,r_2)&=\int_{r_1}^{r_2}i_n(r)h\mathrm{d}r=\int_{r_1}^{b}i_n(r)h\mathrm{d}r=\int_{r_1}^{b}i_0\left(\frac{b}{r}\right)^2h\mathrm{d}r=i_0hb^2\int_{r_1}^{b}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\\&=-i_0hb^2\left.\frac{1}{r}\right|_{r_1}^{b}=i_0bh\left(\frac{b}{r_1}-1\right)\quad\cdots\ a\le r_1\le b.\end{aligned}$$

$0\le r_1<a$ の場合、

$$I(r_1,r_2)=\int_{r_1}^{r_2}i_n(r)h\mathrm{d}r=\int_{a}^{b}i_n(r)h\mathrm{d}r=I(a,r_2)=i_0bh\left(\frac{b}{a}-1\right)\quad\cdots\ 0\le r_1<a.$$

(2) 題意より、$\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B(r,\varphi,z)\boldsymbol{e}_z$ とする。電流分布は z 軸を中心軸とした任意の回転で変化しない。この回転で、(r,φ,z) の位置が (r,φ',z) の位置に移ったとすると、$\boldsymbol{e}_z$ は回転で変化しないので、$\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B(r,\varphi,z)\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{B}(r,\varphi',z)=B(r,\varphi',z)\boldsymbol{e}_z$ となる。回転は任意なので $B(r,\varphi,z)$ に φ 依存性はない。電流分布は z 方向への任意の平行移動で変化しない。この平行移動で、(r,φ,z) の位置が (r,φ,z') の位置に移ったとすると、$\boldsymbol{e}_z$ は平行移動で変化しないので、$\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B(r,\varphi,z)\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{B}(r,\varphi,z')=B(r,\varphi,z')\boldsymbol{e}_z$ となる。平行移動は任意なので $B(r,\varphi,z)$ に z 依存性はない。

$\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B_r\boldsymbol{e}_r+B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+B_z\boldsymbol{e}_z$ とする。上記と同様の議論から、B_r、B_φ、B_z は φ、z に依存しない。半径 r の同軸円に対しアンペールの法則を適用すると、円周の接線成分 $B_t=B_\varphi$ なので、$\oint B_t\mathrm{d}s=2\pi rB_\varphi=\mu_0\iint i_n\mathrm{d}S$ となる。円の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_z$ であり、電流密度 $\boldsymbol{i}$ は導体中のみ存在し、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向であるため、$\boldsymbol{e}_\varphi\cdot\boldsymbol{e}_z=0$ より $i_n=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{e}_z=0$ となり、$2\pi rB_\varphi=\mu_0\iint i_n\mathrm{d}S=0$ より、$B_\varphi=0$ を得る。以下、$B_\varphi=0$ とする。

位置 (r,φ,z) から z 軸に下ろした垂線を中心軸として全系を π 回転させ、電流分布を反転させる。この操作で電流分布は変化しない。一方、最初の回転で $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B_r\boldsymbol{e}_r-B_z\boldsymbol{e}_z$ となり、次の電流反転でこの磁束密度が反転するので、$\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=-B_r\boldsymbol{e}_r+B_z\boldsymbol{e}_z$ となる。これが元の磁束密度 $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B_r\boldsymbol{e}_r+B_z\boldsymbol{e}_z$ と等しいことより、$B_r=0$ を得る。

(後半の別解)
デカルト座標 (x,y,z) で考える。位置 (x,y,z) にある微小体積 $\mathrm{d}V$ 中の電流密度 $\boldsymbol{i}$ が作る電流素片 $\boldsymbol{i}\mathrm{d}V$ が位置 $(x_0,0,0)$ に作る微小磁束密度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ はビオ・サヴァールの法則より、$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\boldsymbol{i}\mathrm{d}V\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$ で与えられる。ここで、$\boldsymbol{r}=(x_0-x,-y,-z)$、$r=|\boldsymbol{r}|=\{(x_0-x)^2+y^2+z^2\}^{\frac{1}{2}}$ である。今の問題では、電流密度 $\boldsymbol{i}$ に z 成分がなく、$\boldsymbol{i}=(i_x,i_y,0)$ と書ける。この時、$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{r}=(i_x,i_y,0)\times(x_0-x,-y,z)=(i_yz,-i_xz,-i_xy-i_y(x_0-x))$ より、$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0\mathrm{d}V(i_yz,-i_xz,-i_xy-i_y(x_0-x))}{4\pi r^3}$ を得る。今の問題のように、xy 平面に関して対称な位置 $(x,y,-z)$ に同じ電流素片 $\boldsymbol{i}\mathrm{d}V$ が存在する場合、それが位置 $(x_0,0,0)$ に作る微小磁束密度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}'$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{B}'=\dfrac{\mu_0\mathrm{d}V(-i_yz,i_xz,-i_xy-i_y(x_0-x))}{4\pi r^3}$ となる。これらを加え合わせると $\mathrm{d}\boldsymbol{B}+\mathrm{d}\boldsymbol{B}'=\dfrac{2\mu_0\mathrm{d}V(0,0,-i_xy-i_y(x_0-x))}{4\pi r^3}$ となり、z 成分のみが残る。位置 $(x_0,0,0)$ では、$\boldsymbol{e}_r=(0,1,0)$、$\boldsymbol{e}_\varphi=(1,0,0)$ なので、これは磁束密度に $\boldsymbol{e}_r$ 方向成分、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向成分が無いことを示している。

(3) (2) より $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B(r)\boldsymbol{e}_z$ となる。(1) の長方形を $b<r_1<r_2$ の場合にも拡張して考える。この長方形を、$r=r_1$ の辺 C_1 は $\boldsymbol{e}_z$ 方向に、$z=h$ の辺 C_2 は $\boldsymbol{e}_r$ 方向に、$r=r_2$ の辺 C_3 は $-\boldsymbol{e}_z$ 方向に、$z=0$ の辺 C_4 は $-\boldsymbol{e}_r$ 方向に回る閉曲線 C に対してアンペールの法則を適用する。上記の回り方に対し、長方形の法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_\varphi$ となるので、長方形を貫く電流は (1) の $I(r_1,r_2)$ となる。磁束密度の接線方向成分は C_1 上では $B_t=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_z=B(r_1)$、$\mathrm{C}_2$ 上では $B_t=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{e}_r=0$、$\mathrm{C}_3$ 上では $B_t=\boldsymbol{B}\cdot(-\boldsymbol{e}_z)=-B(r_2)$、$\mathrm{C}_4$ 上では $B_t=\boldsymbol{B}\cdot(-\boldsymbol{e}_r)=0$ となる。これより、

$$
\begin{aligned}
\oint_{\mathrm{C}} B_t\,\mathrm{d}s &= \int_{\mathrm{C}_1} B_t\,\mathrm{d}s+\int_{\mathrm{C}_2} B_t\,\mathrm{d}s+\int_{\mathrm{C}_3} B_t\,\mathrm{d}s+\int_{\mathrm{C}_4} B_t\,\mathrm{d}s\\
&= \int_{\mathrm{C}_1} B(r_1)\,\mathrm{d}s+\int_{\mathrm{C}_2} 0\,\mathrm{d}s+\int_{\mathrm{C}_3}\{-B(r_2)\}\,\mathrm{d}s+\int_{\mathrm{C}_4} 0\,\mathrm{d}s\\
&= B(r_1)\int_{\mathrm{C}_1}\mathrm{d}s-B(r_2)\int_{\mathrm{C}_3}\mathrm{d}s=B(r_1)h-B(r_2)h=\{B(r_1)-B(r_2)\}h=\mu_0I(r_1,r_2)
\end{aligned}
$$

$b<r_1<r_2$ に対し $I(r_1,r_2)=0$ であるので、$b<r_1<r_2$ に対し $B(r_1)=B(r_2)$ となる。題意より $r_2\to\infty$ で $B(r_2)\to 0$ であるので、$b<r$ に対し $B(r)=0$ を得る。(1) の結果と

$B(r_2)=0$ より、

$$B(r)=\frac{\mu_0 I(r,r_2)}{h}=\begin{cases}\mu_0 i_0 b\left(\dfrac{b}{a}-1\right) & \cdots \quad r<a;\\ \mu_0 i_0 b\left(\dfrac{b}{r}-1\right) & \cdots \quad a\le r\le b;\\ 0 & \cdots \quad b<r\end{cases}$$

を得る。