

数学 4 A 期末試験問題
(一斉)

亀谷 幸生 ・ 栗原 将人

2017 年度 春学期

回答欄には、答だけでなく、計算の過程も(回答欄のスペースの範囲内で)書くこと。

$$1. A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

とおく。

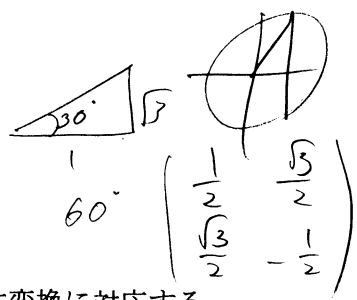
- (1) 行列 A の階数 $\text{rank } A$ を求めなさい。
 - (2) \mathbf{R}^4 の線形部分空間 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の基底と次元を求めなさい。
 - (3) \mathbf{R}^4 の線形部分空間 $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の基底と次元を求めなさい。
2. k を $k \neq \pm 1$ をみたす実数とする。 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を n 次元ベクトルとする。 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が 1 次独立のとき、 $\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + k\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ も 1 次独立であることを証明しなさい。
3. 2 次行列 A の固有多項式は重解 λ を持つとする。 2 次ベクトル \mathbf{p}_2 は $\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$ であり、また λ に対する固有ベクトルではないとする。 $\mathbf{p}_1 = (A - \lambda I)\mathbf{p}_2$ とおく (I は単位行列)。 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は一次独立であることを証明しなさい。

[裏に続く]

$$P_1 + (\lambda I - A) P_2 = 0,$$

① 行到
② 到
③ del $\neq 0$,

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$



4. (1) 座標平面における、直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称変換に対応する行列 A を求めなさい (答だけでよい)。
- (2) (1) で求めた行列 A を対角化しなさい。すなわち、 $P^{-1}AP$ が対角行列となるような P とそのときの $P^{-1}AP$ を求めなさい。

5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とおくとき、正の整数 n に対して A^n を求めなさい。 -6 ✓

- 6.(1) 2 次行列 A で $A \neq O$, $A \neq I$ であり、 $A^2 = A$ となるものを一つ与えなさい (答だけでよい)。ここに O は零行列、 I は単位行列である。
- (2) ハミルトン・ケイリーの定理を必要なら用いて、(1) の性質をみたす行列 A は対角化できることを証明しなさい。

7. a_1, \dots, a_n および b_1, \dots, b_n を共に \mathbf{R}^n の基底であるとする。このとき、

$$(a_1 \dots a_n) = (b_1 \dots b_n)P$$

をみたす n 次行列 P が存在することを証明しなさい。さらに、 P が正則行列であることを証明しなさい。

以上

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 25$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$