数学A1(一斉)
担当:数学A1担当者

7月25日(水)6時限
90分

以下の設問 **1** から **6** に答えよ。解答は解答用紙の所定の欄に記入すること。

1. 極限値を求めよ：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}-1-\dfrac{x^2}{4}}{\dfrac{x^4}{2}-x^6}$$

$= \frac{1}{x^4} \times \frac{1}{\frac{1}{2}-x^2} \times \left((\cos x)^{-1/2} - 1 - x^2/4\right)$

2. $\sqrt{1+\sin(x+y)}$ の $(0,0)$ のまわりのテイラー展開において xy^2 の項を決定せよ。

3. $f(x,y)$ が次をみたしているとき、(i), (ii) に答えよ。

$$y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad f(1,2)=-1,\quad f(2,2)=5$$

(i) 極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=f(x,y)$ を考える。上の微分方程式を、$r,\ \theta$ を用いた $g(r,\theta)$ についての微分方程式に書きかえよ。

(ii) $(x,y)=(\sqrt{3},\sqrt{2})$ における $f(x,y)$ の値 $f(\sqrt{3},\sqrt{2})$ を答えよ。答えのみでなく、値を決定した理由も適切に説明すること。

4. 方程式 $\varphi(x,y)=x^3-2xy+y^3=0$ は $(x,y)=(1,1)$ の近くで陰関数 $y=y(x)$ $(y(1)=1)$ を唯一つ定めることを示せ。さらに $\dfrac{dy}{dx}(1),\ \dfrac{d^2y}{dx^2}(1)$ の値を求めよ。

5. $\varphi(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{2}-1=0$ をみたしながら (x,y) が動くとき、$f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+y$ の極値とそれらを与える (x,y) をラグランジュの乗数法を用いてすべて求めよ。極大小の判定についても適切に説明すること。

6. 関数 $f(x,y)=x^3+2x^2-1+xy^2$ について次に答えよ。

(i) $f(x,y)$ の停留点をすべて求めよ。

(ii) (i) で求めた停留点における $f(x,y)$ のふるまい（極大、極小、あるいは鞍点など）をそれぞれ決定せよ。