解説

問題 I

(1) z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える. z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする. 位置 (r, φ, z) において, z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$, z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 III-2 参照). 微小円環の $\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$ の微小部分の電荷 $\mathrm{d}q$ が原点に作る電界 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, \varphi, z)$ を考える. この微小部分と原点を結ぶベクトル $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R} = -r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z$ と表され, $R = |\boldsymbol{R}| = (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ となる. これより,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, \varphi, z) = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-r\boldsymbol{e}_r - z\boldsymbol{e}_z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

を得る. 上式の内, $\boldsymbol{e}_r$ 成分は, $\varphi + \pi \sim \varphi + \pi + \mathrm{d}\varphi$ の微小部分の電荷が作る電界の $\boldsymbol{e}_r$ 成分と打ち消し合い ($\because \boldsymbol{e}_r(\varphi + \pi) = -\boldsymbol{e}_r(\varphi)$), 微小円環全体の作る電界には寄与しないので, $\boldsymbol{e}_z$ 成分の寄与のみを考えれば良い. その寄与は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}'(r, \varphi, z) = -\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z$$

で与えられる. ここで, 微小部分の体積は, 3 辺の長さが $\mathrm{d}r$, $r\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}z$ の直方体の体積として, $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi$ で与えられることより, $\mathrm{d}q = \rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi$ で与えられる. これより,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r, z) &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, \varphi, z) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}'(r, \varphi, z) = -\int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z \\
&= -\frac{\rho r z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}$$

を得る.

(別解)
微小円環のある位置 (x, y, z) にある電荷が原点 O に作る電界の z 軸に垂直な成分は, z 軸に関して反対の位置 $(-x, -y, z)$ にある同じ電荷が原点 O に作る電界と打ち消し合う. 従って $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ は z 成分のみが残る. 微小円環のある位置の微小電荷 $\mathrm{d}q$ が原点に作る電界の z 成分は

$$-\frac{z\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

で与えられる. 微小円環部分の体積は, 半径 r の円周の長さ $2\pi r$ に幅 $\mathrm{d}r$ をかけた底面積をもち, 高さが $\mathrm{d}z$ の柱体の体積として $2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ で与えられる. 従って, 微小円環部分の持つ電荷は

$$2\pi\rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$

となる. 上記の $\mathrm{d}q$ をこの電荷に置き換えて

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r, z) = -\frac{\rho r z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{e}_z$$

を得る.

(2) (1) の結果より, 半球内で座標 z が $z \sim z + \mathrm{d}z$ の範囲にある微小円板部分にある電荷が原点に作る電界を $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(z)$ とすると

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(z) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r, z) = -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \frac{r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_z$$

$$= -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^{a^2-z^2}\frac{1}{(u+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u\,\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}(-2)\left.\frac{1}{(u+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right|_0^{a^2-z^2}\boldsymbol{e}_z$$

$$= -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho z\,\mathrm{d}z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z$$

を得る. ここで, $u = r^2$, $\mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r$, $z > 0$, $a > 0$ を用いた. この結果より,

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E}(z) = -\int_0^a \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left.\left(z-\frac{z^2}{2a}\right)\right|_0^a\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{a}{2}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$= -\frac{\rho a}{4\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z$$

を得る.

(3) $z < 0$ の空間が導体で満たされているので, 鏡像法で考える. 鏡像電荷は原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 a の球の $z < 0$ の部分 (半球内) に一定の電荷密度 $-\rho$ で電荷を分布させたものになる. この鏡像電荷が原点 O(0, 0, 0) につくる電界は (2) で求めた $\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ を xy 平面で反転させ (z 成分の符号を変え), ρ を $-\rho$ にすることで得られる. その結果は $\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ に等しい. 従って, $z < 0$ の空間が導体で満たされたとき, 原点 O(0, 0, 0) における電界は $2\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}} = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_z$ となる.

原点 O 付近で, 上面と底面が xy 面に平行で, 高さが d の xy 面を含む筒状閉曲面 S を考える. 上面 S_1 は $z > 0$ の領域にあり, 下面 S_2 が $z < 0$ の領域にある. 側面を S_3 とする. 上面, 下面の面積を S' とする. S' は上面上の電界が一定と考えられるくらい小さいものとする. この閉曲面にガウスの法則を適用する. この閉曲面内の電荷は $\omega S'$ であるから, $\iint_{\mathrm{S}} E_n\,\mathrm{d}S = \frac{\omega S'}{\varepsilon_0}$. S_1 上で $E_n = 2\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}\cdot\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}\cdot\boldsymbol{e}_z = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$, S_2 上は導体内にあるため電界は $\boldsymbol{0}$ となり $E_n = 0$, S_3 上での E_n の面積積分が $d \to 0$ で 0 になることを使うと, この左辺は

$$\iint_{\mathrm{S}} E_n\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathrm{S}_1} E_n\,\mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_2} E_n\,\mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_3} E_n\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathrm{S}_1}\left(-\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}S = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}S'.$$

右辺と比較して $\omega = -\frac{\rho a}{2}$ を得る.

問題 II

(1) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ と書ける. ここで,

$$E(r) = \begin{cases} E_0\left(\dfrac{r}{a}\right)^4 & \cdots \quad r \le a \\[2ex] E_0\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

である. 位置 $\boldsymbol{r}$ から $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 方向の直線に沿って無限遠迄線積分を行なう. 電界の接線方向成分 $E_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r})$ は $E_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} = E(r)\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2} = E(r)$ で与えられる. $a < r$ の場合,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_r^\infty E(r')\,\mathrm{d}r' = \int_r^\infty E_0\frac{a^2}{r'^2}\,\mathrm{d}r' = -E_0\left.\frac{a^2}{r'}\right|_r^\infty = E_0\frac{a^2}{r} = E_0 a\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}.$$

$r \leq a$ の場合,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_r^\infty E(r')\,\mathrm{d}r' = \int_r^a E(r')\,\mathrm{d}r' + \int_a^\infty E(r')\,\mathrm{d}r' = \int_r^a E(r')\,\mathrm{d}r' + \phi(\boldsymbol{r})|_{r=a}$$
$$= \int_r^a \frac{E_0 r'^4}{a^4}\,\mathrm{d}r' + E_0 a = \left.\frac{E_0 r'^5}{5a^4}\right|_r^a + E_0 a = \frac{E_0 a}{5} - \frac{E_0 r^5}{5a^4} + E_0 a = \frac{E_0 a}{5}\left\{6 - \left(\frac{r}{a}\right)^5\right\}.$$

(2) $r \neq 0$ とする. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}$ の形をしている. ここで,

$$f(r) = \frac{E(r)}{r} = \begin{cases} E_0 \dfrac{r^3}{a^4} & \cdots \quad r \leq a \\ E_0 \dfrac{a^2}{r^3} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

である.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\{f(r)\boldsymbol{r}\} = \nabla f(r)\cdot\boldsymbol{r} + f(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r}$$
$$= \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}(\nabla r)\cdot\boldsymbol{r} + 3f(r) = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r} + 3f(r) = r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} + 3f(r)$$

が成立する. これより,

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$
$$= \begin{cases} \varepsilon_0\left[r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(E_0\dfrac{r^3}{a^4}\right) + 3\left(E_0\dfrac{r^3}{a^4}\right)\right] = \varepsilon_0\left[3E_0\dfrac{r^3}{a^4} + 3E_0\dfrac{r^3}{a^4}\right] = 6\dfrac{\varepsilon_0 E_0}{a}\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \\ \hfill \cdots\ 0 < r \leq a; \\ \varepsilon_0\left[r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(E_0\dfrac{a^2}{r^3}\right) + 3\left(E_0\dfrac{a^2}{r^3}\right)\right] = \varepsilon_0\left[-3E_0\dfrac{a^2}{r^3} + 3E_0\dfrac{a^2}{r^3}\right] = 0 \\ \hfill \cdots\ a < r \end{cases}$$

を得る. $r = 0$ での電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})|_{r=0}$ は, 半径 r の球面 S に対して積分形のガウスの法則を適用し, 球内の電荷を求め, 球の体積で割り, $r \to 0$ として求める. これにより,

$$\rho(\boldsymbol{r})|_{r=0} = \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon_0 \displaystyle\iint_S E_n \mathrm{d}S}{\dfrac{4\pi r^3}{3}} = \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon_0 4\pi r^2 E(r)}{\dfrac{4\pi r^3}{3}} = \lim_{r\to 0}\frac{3\varepsilon_0 E(r)}{r} = \lim_{r\to 0} 3\varepsilon_0 E_0 \frac{r^3}{a^4} = 0$$

を得る. 即ち, $r \neq 0$ で求めた $\rho(\boldsymbol{r})$ の式は $r = 0$ を含めても成立する.

(3) 原点からの距離が $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分を考えると, 単位体積あたり静電エネルギー $u_E(r)$ は $u_E(r) = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2$, 体積は $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ なので,

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int_0^\infty u_E(r) 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\{E_0\left(\frac{r}{a}\right)^4\right\}^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\{E_0\left(\frac{a}{r}\right)^2\right\}^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^2 \int_0^a \left(\frac{r}{a}\right)^{10}\mathrm{d}r + 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^2 \int_a^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \int_0^1 \left(\frac{r}{a}\right)^{10}\mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) + 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \int_1^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) \\
&= 2\pi\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \left(\frac{1}{11}+1\right) = \frac{24\pi}{11}\varepsilon_0 E_0^2 a^3
\end{aligned}
$$

(別解)
電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$, 電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は原点からの距離 r のみの関数で, それをそれぞれ $\rho(\boldsymbol{r}) = \tilde{\rho}(r)$, $\phi(\boldsymbol{r}) = \tilde{\phi}(r)$, と書く. 原点からの距離が $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分を考えると, この微小部分の電荷は $\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\,\mathrm{d}r$, 電位は $\tilde{\phi}(r)$ となる. これより,

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int_0^\infty \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \int_0^a \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\,\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\frac{E_0 a}{5}\left\{6-\left(\frac{r}{a}\right)^5\right\} 6\frac{\varepsilon_0 E_0}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^3 4\pi r^2\,\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}E_0 a\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\cdot 0\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{12\pi}{5}\varepsilon_0 E_0^2 a^2 \left\{6-\left(\frac{r}{a}\right)^5\right\}\left(\frac{r}{a}\right)^5\mathrm{d}r = \frac{12\pi}{5}\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \int_0^1 \left\{6\left(\frac{r}{a}\right)^5 - \left(\frac{r}{a}\right)^{10}\right\}\mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) \\
&= \frac{12\pi}{5}\varepsilon_0 E_0^2 a^3\left(1-\frac{1}{11}\right) = \frac{12\pi}{5}\varepsilon_0 E_0^2 a^3 \frac{10}{11} = \frac{24\pi}{11}\varepsilon_0 E_0^2 a^3
\end{aligned}
$$

を得る.

問題 III

(1) 電気伝導率 $\sigma(r,\varphi,z)$ は z 軸からの距離 r のみの関数で, それを $\sigma(r,\varphi,z) = \tilde{\sigma}(r)$ と書く. $a < r < b$ とする. 対称性より, $\boldsymbol{i}(r,\varphi,z) = i(r)\boldsymbol{e}_r$ となる. z 軸を中心軸として電極と高さをそろえた半径 r, 高さ h の円柱を閉曲面 S として定常電流に関する電荷保存の式の積分形を用いる. 円柱の上面 S_1 からは導線で電流 I が流れ込んでいる. 円柱の下面 S_2 からは電流の出入りは無い. 円柱の側面 S_3 上では法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r$ なので $i_n = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n} = i(r)$ となる. 以上より,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathrm{S}} i_n \mathrm{d}S &= \iint_{\mathrm{S}_1} i_n \mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_2} i_n \mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_3} i_n \mathrm{d}S \\
&= (-I) + 0 + \iint_{\mathrm{S}_3} i(r)\,\mathrm{d}S = -I + i(r)\iint_{\mathrm{S}_3}\mathrm{d}S = -I + 2\pi r h i(r) = 0
\end{aligned}
$$

となり, これより $i(r) = \dfrac{I}{2\pi r h}$ を得る. $\boldsymbol{E}(r,\varphi,z) = \dfrac{1}{\tilde{\sigma}(r)}\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)$ より $\boldsymbol{E}(r,\varphi,z) = E(r)\boldsymbol{e}_r$ と書け,

$$
E(r) = \frac{1}{\tilde{\sigma}(r)}i(r) = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{r}{b}\right)^2\frac{I}{2\pi r h} = \frac{Ir}{2\pi\sigma_0 h b^2}
$$

である.

(2) $\boldsymbol{e}_r$ 方向に沿って, 電極AからBまで線積分する. 電界の接線方向成分は $E(r)$ になる. 従って,

$$V = \int_a^b E(r)\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{Ir}{2\pi\sigma_0 hb^2}\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\sigma_0 hb^2}\frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) = \frac{I}{4\pi\sigma_0 h}\left\{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}$$

となり, これより

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma_0 h}\left\{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}$$

を得る.

(3) $r_1 \leq r \leq r_2$ とする. $r \sim r + \mathrm{d}r$ の範囲の体積は $2\pi rh\mathrm{d}r$, 単位体積あたり単位時間あたりジュール熱 $p(r)$ は $p(r) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E} = i^2(r)/\tilde{\sigma}(r)$ より,

$$\begin{aligned} P(r_1, r_2) &= \int_{r_1}^{r_2} p(r)2\pi rh\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{i^2(r)}{\tilde{\sigma}(r)}2\pi rh\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{r}{b}\right)^2\left(\frac{I}{2\pi rh}\right)^2 2\pi rh\mathrm{d}r \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{r}{b}\right)^2 \frac{I^2}{2\pi rh}\,\mathrm{d}r = \frac{I^2}{2\pi\sigma_0 hb^2}\int_{r_1}^{r_2} r\,\mathrm{d}r = \frac{I^2}{2\pi\sigma_0 hb^2}\frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) \\ &= \frac{I^2}{4\pi\sigma_0 h}\left\{\left(\frac{r_2}{b}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{b}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

を得る. $P(a, b) = IV = I^2R$ となっている.

(別解)

$r = r_1$ の位置と $r = r_2$ の位置の電位差 ($r = r_2$ の位置を基準とした $r = r_1$ の位置の電位) を $V(r_1, r_2)$ とすると $P(r_1, r_2) = IV(r_1, r_2)$ となる. これより,

$$\begin{aligned} P(r_1, r_2) &= IV(r_1, r_2) = I\int_{r_1}^{r_2} E(r)\mathrm{d}r = I\int_{r_1}^{r_2} \frac{Ir}{2\pi\sigma_0 hb^2}\mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi\sigma_0 hb^2}\left\{\frac{1}{2}\left({r_2}^2 - {r_1}^2\right)\right\} \\ &= \frac{I^2}{4\pi\sigma_0 h}\left\{\left(\frac{r_2}{b}\right)^3 - \left(\frac{r_1}{b}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

を得る.

問題IV

(1) 位置 (r, φ, z) における電流密度は $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z) = i(r)\boldsymbol{e}_z$ と書ける. ここで,

$$i(r) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < a \quad (\text{真空中}) \\ i_0\left(\dfrac{r}{a}\right)^4 & \cdots \quad a \leq r \leq b \quad (\text{導体中}) \\ 0 & \cdots \quad b < r \quad (\text{真空中}) \end{cases}$$

である. ある $z =$ 一定 の断面で, $\varphi \sim \varphi + \mathrm{d}\varphi$, $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分を貫く電流 $\mathrm{d}I$ は, 電流密度の方向が面に垂直なので, $i(r)$ に微小部分の面積 $r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ をかけて, $\mathrm{d}I = i(r)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ で与えられる. 電流 $I(R)$ はこれを積分して, $I(R) = \int \mathrm{d}I = \int_0^R\int_0^{2\pi} i(r)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R i(r)r\,\mathrm{d}r$ で与えられる. $R < a$ のとき, $0 \leq r \leq R$ に対し $i(r) = 0$ より $I(R) = 0$ となる. $a \leq R \leq b$ のとき,

$$\begin{aligned} I(R) &= 2\pi\int_0^R i(r)r\,\mathrm{d}r = 2\pi\left\{\int_0^a i(r)r\,\mathrm{d}r + \int_a^R i(r)r\,\mathrm{d}r\right\} = 2\pi\int_a^R i(r)r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi i_0\int_a^R \left(\frac{r}{a}\right)^4 r\,\mathrm{d}r = 2\pi i_0 a^2\int_1^{R/a}\left(\frac{r}{a}\right)^5\mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{\pi i_0 a^2}{3}\left\{\left(\frac{R}{a}\right)^6 - 1\right\} \end{aligned}$$

を得る．$b<R$ のとき，$b<r\leq R$ に対し $i(r)=0$ より

$$I(R)=I(b)=\frac{\pi i_0 a^2}{3}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^6-1\right\}$$

を得る．まとめて，

$$I(R)=\begin{cases}0 & \cdots\quad R<a,\\ \dfrac{\pi i_0 a^2}{3}\left\{\left(\dfrac{R}{a}\right)^6-1\right\} & \cdots\quad a\leq R\leq b,\\ \dfrac{\pi i_0 a^2}{3}\left\{\left(\dfrac{b}{a}\right)^6-1\right\} & \cdots\quad b<R\end{cases}$$

となる．

(2) ビオ・サヴァールの法則より，電流と同じ方向には磁場はできない．電流は全て $\boldsymbol{e}_z$ 方向．従って $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$ に $\boldsymbol{e}_z$ 成分は無い．位置 $\mathrm{P}(r,\varphi,z)$ と z 軸を含む面 (S とする) に関して電流分布は対称．導体内のある位置 P' をとおる $\boldsymbol{e}_z$ 方向の無限に長い直線電流が P につくる磁場と，S に関して P' と対称の位置 P'' をとおる $\boldsymbol{e}_z$ 方向の同じ強さの無限に長い直線電流が P につくる磁場を重ね合わせると，磁場の $\boldsymbol{e}_r$ 方向成分は打ち消し合う．従って $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$ に $\boldsymbol{e}_r$ 成分は無い．あるいは，位置 $\mathrm{P}(r,\varphi,z)$ における $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$ の $\boldsymbol{e}_r$ 成分を $B_r(r,\varphi,z)$ とする．P から z 軸に下ろした垂線の周りに全系を π 回転させ，その後電流分布を反転させる．$\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$ の $\boldsymbol{e}_r$ 成分は最初の回転では変化しないが，次の電流の反転で反転し，$-B_r(r,\varphi,z)$ となる．この操作で電流分布は変化しないので，$B_r(r,\varphi,z)=-B_r(r,\varphi,z)$ とならなければならず，$B_r(r,\varphi,z)=0$ を得る．全系は z 軸の周りの回転および z 軸方向への平行移動で変化しない．従って $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$ に φ, z 依存性は無い．

(3) (2) より $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B(r)\boldsymbol{e}_\varphi$ となる．(1) の円周 C の半径を r として，アンペールの法則を適用する．

$$\oint_{\mathrm{C}} B_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s=\mu_0 I(r)$$

ここで，$I(r)$ は (1) で求めた C を縁とする面を貫く電流で，R を r に変えたものである．アンペールの法則の左辺は $\displaystyle\oint_C B_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s=B(r)\oint_{\mathrm{C}}\mathrm{d}s=B(r)2\pi r$ より，(1) の結果を用いて

$$B(r)=\begin{cases}0 & \cdots\quad r<a,\\ \dfrac{\mu_0 i_0 a^2}{6r}\left\{\left(\dfrac{r}{a}\right)^6-1\right\} & \cdots\quad a\leq r\leq b,\\ \dfrac{\mu_0 i_0 a^2}{6r}\left\{\left(\dfrac{b}{a}\right)^6-1\right\} & \cdots\quad b<r\end{cases}$$

を得る．