数学2B 第7回(行列式の定義と性質,行列式の計算方法)

2019年11月12日(火)

担当 : 南美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

おしらせ

中間試験を12月3日(火)の授業時間に行います.

● 試験時間:80分

• 場所:23 教室

● 出題範囲:教科書の6章および7章

宿題の解答例

問題 6-4. シュミットの直交化法を用いる.

$$oldsymbol{v}_1 = oldsymbol{x}_1 = egin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$oldsymbol{v}_2 = oldsymbol{x}_2 - rac{(oldsymbol{v}_1, oldsymbol{x}_2)}{\|oldsymbol{v}_1\|^2} oldsymbol{v}_1 = oldsymbol{x}_2 - rac{3+2-1+2}{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2} oldsymbol{v}_1 = egin{bmatrix} 3 \ 2 \ 1 \ -2 \end{bmatrix} - rac{6}{4} egin{bmatrix} 1 \ 1 \ -1 \ -1 \end{bmatrix} = rac{1}{2} egin{bmatrix} 3 \ 1 \ 5 \ -1 \end{bmatrix},$$

$$oldsymbol{v}_3 = oldsymbol{x}_3 - rac{(oldsymbol{v}_1, oldsymbol{x}_3)}{\|oldsymbol{v}_1\|^2} oldsymbol{v}_1 - rac{(oldsymbol{v}_2, oldsymbol{x}_3)}{\|oldsymbol{v}_2\|^2} oldsymbol{v}_2 = oldsymbol{x}_3 - rac{2}{4} oldsymbol{v}_1 - rac{7}{9} oldsymbol{v}_2 = rac{4}{9} egin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$egin{aligned} oldsymbol{v}_4 = oldsymbol{x}_4 - rac{(oldsymbol{v}_1, oldsymbol{x}_4)}{\|oldsymbol{v}_1\|^2} oldsymbol{v}_1 - rac{(oldsymbol{v}_2, oldsymbol{x}_4)}{\|oldsymbol{v}_2\|^2} oldsymbol{v}_2 - rac{(oldsymbol{v}_3, oldsymbol{x}_4)}{\|oldsymbol{v}_3\|^2} oldsymbol{v}_3 = oldsymbol{x}_4 + rac{1}{4} oldsymbol{v}_1 + rac{1}{36} oldsymbol{v}_2 - rac{1}{9} oldsymbol{v}_3 = rac{1}{2} egin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

正規化
$$(oldsymbol{u}_i = rac{oldsymbol{v}_i}{\|oldsymbol{v}_i\|})$$
 して

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \Box$$

*シュミットの直交化法でベクトルを求めたら、最後に『 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ が正規直交系となっていること』すなわち、

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

が任意のi, j = 1, ..., 4で成立していることを必ず確かめること.

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し、次回の講義時に提出しなさい

問題 7-1. $S_k(k \ge 1)$ は k 次の置換全体を表す.

- (1) S_2 を求めなさい. また、各 $\sigma \in S_2$ に対して、符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ を求めなさい.
- (2) S_3 を求めなさい. また、各 $\sigma \in S_3$ に対して、符号 $sgn\sigma$ を求めなさい.

問題 7-2. 次の各置換が偶置換, 奇置換のいずれであるか調べなさい.

$$(1) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right) \qquad (2) \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

問題 7-3. 定義 7.1.4. から次の行列の行列式を求めなさい.

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

問題 7-4. 命題 7.1.5. および命題 7.2.1. の結果を用いて、問題 7-3 の行列 A の行列式を求めなさい.

問題 **7-5(宿題)**. 命題 7.1.5. および命題 7.2.1. の結果を用いて,次の行列の行列式を求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

(注) B_n は、n 次行列とし、 $a,b \in \mathbb{R}$ とする.