2021 年度数学 1B 期末試験

以下の設問 $\boxed{\mathbf{1}}$ から $\boxed{\mathbf{5}}$ に答えよ．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\displaystyle\int \frac{16x+4}{x^4-1}\,dx$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a>0$ とし，$V=\{\,(x,y,z) \mid\ x^2+|y|+|z| \leqq a^2\,\}$ とおいたとき V の体積を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $\mathbf{0}=(0,0,0), \boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3) \in \boldsymbol{R}^3$ とし，$\mathbf{0}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}$ をそれぞれ O,P,Q,R とする．線分 OP, PQ, QR, RO をパラメーター $t\in[0,1]$ を用いて表せ (**答えのみでよい**)．ただし，各線分において始点は初めの文字，終点は後の文字の点とする．また，$\boldsymbol{f}(x,y,z)=(y,x,0)$, $\Gamma=OP+PQ+QR+RO$ としたとき，$\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(2) $A=\left\{\,(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x^4+y^4+z^2=1,\ z>0\,\right\}$ とおく．A を $z=\varphi(x,y)$ とグラフで表したとき，$\varphi(x,y)$ を求めよ (**答えのみでよい**)．また，$(x,y,\varphi(x,y))\in A$ に対し，A の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ で第 3 成分が正のものを求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 正の実数 $r>0$ に対し $A_r=\{\,(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid\ |x|\leqq r,\ |y|\leqq r\,\}$, $B_r=\{\,(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leqq r^2\,\}$ とおく．

(1) $n\geqq 1$ を自然数にしたとき，$A_n\subset B_{kn}$ をみたす**最小の実数** k を求めよ (**答えのみでよい**).

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n}\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2}\,dxdy$$

が存在するかを判断し，存在すればその値を求め，存在しなければその証明をせよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $S\subset\boldsymbol{R}^3$ を中心が $(0,0,1)$, 半径 1 の球面とする．

(1) $\boldsymbol{R}^3$ 内の点 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ を球座標 $\boldsymbol{x}=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ ($r\geqq 0,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ 0\leqq\theta\leqq\pi$) で表す．このとき $\boldsymbol{x}\in S$ となる必要十分条件が「$r=0$ または $r=f(\theta)$ をみたす」となるような関数 $f(\theta)$ を求めよ.

(2) $f(\theta)$ を (1) で求めたもの，$0<\theta_0\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とし，

$$A=\{\,(f(\theta)\sin\theta\cos\varphi, f(\theta)\sin\theta\sin\varphi,\ f(\theta)\cos\theta) \mid 0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ 0\leqq\theta\leqq\theta_0\,\}$$

とおく．このとき，A の曲面積を θ_0 を用いて表せ.

(3) $1\leqq a\leqq 3$ となる実数 a に対し $C=\{\,(x,y,z)\in\boldsymbol{R}^3 \mid z^2-x^2-y^2\geqq a\,\}$ とおく．このとき，$S\cap C$ の曲面積を求めよ.