数学 4 A 中間試験問題

2017 年 6 月 7 日

Masato KURIHARA

1. 次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & \overset{0}{\cancel{1}} & \overset{1}{\cancel{0}} \\ 7 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。A に対応する一次変換 $f_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ により、平面 $2x + y + z = 2$ はどのような平面に移るか。その方程式を求めよ。また、その平面に垂直なベクトルをひとつ求めよ。

3. x, y 平面上の曲線 $6x^2 + 2\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1$ を原点中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転して得られる図形の方程式を求めよ。

4. $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ とおく。

(1) A の rank (階数) を k の値で分類することによって求めよ。

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

を k の値で分類することによって解け。連立方程式の解 x, y, z に対し、ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を使って、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \ldots$ という形で答えよ。

5. n を正の整数とする。A を n 次行列とし、$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$ を n 次元ベクトルとする。$A\mathbf{a}_1,\ldots,A\mathbf{a}_r$ が 1 次独立のとき、$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$ も 1 次独立であることを証明せよ。

6.(1) 3 次元空間で、右手系の x, y, z 軸を考える。z 軸を中心として、x 軸を向きをこめて y 軸に移す角度 $\frac{\pi}{2}$ の回転を f と書くことにする。この変換 f により、ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に、ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に、ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に移るので、一次変換 f に対応する行列は、$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

次に、x 軸を中心として、y 軸を向きをこめて z 軸に移す角度 $\frac{\pi}{2}$ の回転を g と書くことにする。一次変換 g に対応する行列を、上と同様の方法で求めよ。答案用紙には答のみでよい。

(2) f を行ってから、g を行う変換を h とする。一次変換 h に対応する行列を求めよ。

(3) 一次変換 h で動かない $\mathbf{0}$ でないベクトルをひとつ求めよ。すなわち、A_h を h に対応する 3 次行列とするとき、$A_h\mathbf{x} = \mathbf{x}$ となるようなベクトル $\mathbf{x}$ で零ベクトルでないものをひとつ求めよ。

以上

---キリトリ---

慶應義塾大学　答案用紙

数字記入例 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

(OCR 上では特に 4 と 9 の区別がしにくいので，4 は上を閉じないこと)

科目名	担当者
数学4A中間試験解答例	栗原将人
年　月　日(　)　時限	学科(学門)　　年　組

学籍番号

採点欄

氏名

ページ

(ページ数は必ずご記入ください)

学科出席番号

注1 学籍番号は数字記入例を参照の上、丁寧に記すこと.
注2 左上にある黒い「基準マーク」付近には何も記さないこと.
注3 裏面を使用する場合には，矢印記号⇒の位置から書き始めること(天地を逆転させないこと).
注4 用紙が複数枚に及ぶ場合，氏名は全ての用紙に記入すること.

1 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(i)}-\text{(ii)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{(i)}+\text{(iii)} \\ \text{(ii)}-\text{(iii)}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{(i)}-\text{(iv)} \\ \text{(ii)}+\text{(iv)} \\ \text{(iii)}-\text{(iv)}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上により 逆行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れかえ}]{\text{(i)と(iii)を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{(ii)}-7\times\text{(i)} \\ \text{(iii)}-2\times\text{(i)}}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{iii}-2\times\text{ii}]{\text{i}+\text{ii}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{iii}\times(-1)]{\text{ii}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{i}-\text{iii}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$$

以上により 逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -12 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと 左から A^{-1} をかけて $A^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となる。よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X-Y+6Z \\ -Y+7Z \\ -X+2Y-12Z \end{pmatrix}$$

$2x+y+z=2$ に代入すると $2(X-Y+6Z)+(-Y+7Z)+(-X+2Y-12Z)=2$

よって $X-Y+7Z=2$.

以上により 平面 $2x+y+z=2$ は 平面 $x-y+7z=2$ に移る.

この平面に垂直なベクトルとしては $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ がとれる.

裏面に続く場合は⇒印の欄から書くこと。

(2009.12 B4-K-HT)

⇒

3. 原点中心角度 $\frac{\pi}{3}$ 回転の行列を A とおくと $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である。 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$6x^2 + 2\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1$ に $x = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y$ を代入すると

$3X^2 + 7Y^2 = 1$ が得られる。

よって 楕円 $3x^2 + 7y^2 = 1$ に移る

4. (1)
$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れかえて}]{\text{①と③を}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}-k\times\text{①}]{\text{②}-\text{①}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k-1 & 1-k \\ 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

i) $k=1$ のとき $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より rank は 1 である。

ii) $k \neq 1$ のとき 第2行と第3行を $\frac{1}{k-1}$ 倍して

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -k-1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{③}+\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -k-2 \end{pmatrix}$$

$k=-2$ のとき rank は 2 であり, $k \neq -2, 1$ のとき rank は 3 である。

(2) $k=1$ のとき $x+y+z=0$ より $x = -y-z$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ y, z は任意の数

$k=-2$ のとき $x-z=0$ $y-z=0$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \ldots \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$ z は任意

$t \neq 1, -2$ のとき $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $c_1 a_1 + \cdots + c_r a_r = 0$ とする

両辺に A を左からかけて $c_1 A a_1 + \cdots + c_r A a_r = 0$

$A a_1, \cdots, A a_r$ は1次独立なので $c_1 = \cdots = c_r = 0$

以上により $a_1, \cdots, a_r$ は1次独立である.

6. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると $\begin{pmatrix} -y \\ -z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であり, $x = z$, $y = -z$ となる

よって, たとえば $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

問. A_R に対応する1次変換は原点と $(1, -1, 1)$ を通る直線を軸として原点を中心とする回転であることを示せ. また, どのような角度の回転か. (提出の必要なし)