解説

問題 I

(1) 対称性より，極板間の位置 (x, y, z) における電界 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$，電束密度 $\boldsymbol{D}(x,y,z)$，電気分極 $\boldsymbol{P}(x,y,z)$ は，$\boldsymbol{E}(x,y,z) = E(x)\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{D}(x,y,z) = D(x)\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{P}(x,y,z) = P(x)\boldsymbol{e}_x$ で与えられる．$x=0$ の電極に平行な上底と下底をもち，上底が $0 < x < d$，下底が $x < 0$ の電極間にあるような筒状閉曲面 S を考える．上底を S_1，下底を S_2，側面を S_3，とする．S_1 の x 座標を x とする．また，S_1，S_2 の面積を S' とする．S に $\boldsymbol{D}$ に関するガウスの法則を適用する．S 内の真電荷は $\dfrac{Q}{S}S'$ となる．従って，$\boldsymbol{D}$ に関するガウスの法則より，$\displaystyle\iint_{\mathrm{S}} D_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = \frac{QS'}{S}$ を得る．S_1 上で $\boldsymbol{D} = D(x)\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x$ より，$D_{\mathrm{n}} = D(x)$ となる．S_2 上で $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}$ より，$D_{\mathrm{n}} = 0$ となる．S_3 上で $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{n}$ が垂直より，$D_{\mathrm{n}} = 0$ となる．従ってガウスの法則の左辺は，

$$\iint_{\mathrm{S}} D_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = \iint_{\mathrm{S}_1} D_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_2} D_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_3} D_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = \iint_{\mathrm{S}_2} D_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = D(x)\iint_{\mathrm{S}_2} \mathrm{d}S = D(x)S'$$

となる．ゆえに，$D(x)S' = \dfrac{QS'}{S}$．これより $D(x) = \dfrac{Q}{S}$ を得る．$D(x) = \varepsilon(x)E(x)$ より，$E(x) = \dfrac{Q}{\varepsilon(x)S} = \dfrac{Q}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 S}$ を得る．$P(x) = D(x) - \varepsilon_0 E(x)$ より $P(x) = \dfrac{Q}{S} - \dfrac{\varepsilon_0 Q}{\varepsilon(x)S} = \dfrac{Q}{S}\left[1 - \dfrac{1}{\bar{\varepsilon}\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2}\right]$ を得る．結局，

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{Q}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 S}\boldsymbol{e}_x, \quad \boldsymbol{D}(x,y,z) = \frac{Q}{S}\boldsymbol{e}_x,$$

$$\boldsymbol{P}(x,y,z) = \frac{Q}{S}\left[1 - \frac{1}{\bar{\varepsilon}\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2}\right]\boldsymbol{e}_x.$$

(2) 極板間の位置 (x,y,z) における電界のエネルギー密度 $u_{\mathrm{E}}(x,y,z)$ は，

$$u_{\mathrm{E}}(x,y,z) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{D}(x,y,z) = \frac{1}{2}\frac{Q}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 S}\boldsymbol{e}_x\cdot\frac{Q}{S}\boldsymbol{e}_x = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 S^2}$$

で与えられる．$u_{\mathrm{E}}(x,y,z)$ は y, z によらず，極板間の $x \sim x+\mathrm{d}x$ の部分の体積は $S\mathrm{d}x$ なので，この部分に蓄えられた電界のエネルギーは

$$u_{\mathrm{E}}(x,y,z)S\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 S}\mathrm{d}x$$

で与えられる．これを $x=0$ から $x=d$ まで足し合わせる (積分する) ことで，静電エネルギー U_{E} は

$$U_{\mathrm{E}} = \int_0^d \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 S}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\int_0^d \frac{1}{\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\frac{d}{\alpha}\frac{1}{\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)}\Bigg|_0^d$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\frac{d}{\alpha}\left[\frac{1}{(1+\alpha)} - 1\right] = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\frac{1}{(1+\alpha)}$$

となる．

(別解)

極板間の電位差 V を，$x=0$ の電極から $x=d$ の電極迄 x 軸に平行な線分に沿って電界の接線成分 $E(x)$ を積分して求めると

$$V=\int_0^d E(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^d \frac{Q}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2 S}\,\mathrm{d}x=\frac{Q}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\int_0^d \frac{1}{\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{Q}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\frac{d}{\alpha}\frac{1}{\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)}\Bigg|_0^d=-\frac{Q}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\frac{d}{\alpha}\left[\frac{1}{(1+\alpha)}-1\right]=\frac{Qd}{\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\frac{1}{(1+\alpha)}$$

となる．静電エネルギー $U_{\mathrm{E}}=\frac{1}{2}QV$ より，

$$U_{\mathrm{E}}=\frac{Q^2 d}{2\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 S}\frac{1}{(1+\alpha)}$$

が得られる．$\alpha=0$ のとき，一様な誘電体の場合の結果に一致している．

(3) $\omega_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ より，$x=0$ の表面では，$\boldsymbol{P}=P(0)\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_x$ を用いて，

$$\omega_{\mathrm{P}}^{(x=0)}=-P(0)=-\frac{Q}{S}\left[1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right].$$

$x=d$ の表面では，$\boldsymbol{P}=P(d)\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_x$ を用いて，

$$\omega_{\mathrm{P}}^{(x=d)}=P(d)=\frac{Q}{S}\left[1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}(1+\alpha)^2}\right].$$

$\rho_P=-\mathrm{div}\boldsymbol{P}$ より，$\boldsymbol{P}=P(x)\boldsymbol{e}_x$ を用いて，極板間の位置 (x,y,x) における分極電荷密度 $\rho_{\mathrm{P}}(x,y,z)$ は

$$\rho_{\mathrm{P}}(x,y,z)=-\frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{Q}{S}\left[1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2}\right]=\frac{Q}{\bar{\varepsilon}S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2}=-\frac{2\alpha Q}{\bar{\varepsilon}Sd}\frac{1}{\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^3}$$

で与えられる。

おまけ

誘電体内部 (表面以外) の全分極電荷 Q_{P} は，$\rho_{\mathrm{P}}(x,y,z)$ が y,z によらず，極板間の $x\sim x+\mathrm{d}x$ の部分の体積は $S\mathrm{d}x$ なので，

$$Q_{\mathrm{P}}=-\int_0^d \frac{2\alpha Q}{\bar{\varepsilon}Sd}\frac{1}{\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^3}S\mathrm{d}x=\frac{2\alpha Q}{\bar{\varepsilon}d}\frac{d}{2\alpha}\frac{1}{\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2}\Bigg|_0^d=\frac{Q}{\bar{\varepsilon}}\left[\frac{1}{(1+\alpha)^2}-1\right]$$

$$=-\frac{Q}{\bar{\varepsilon}}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha)^2}\right]$$

となる．これは誘電体表面の全分極電荷

$$\omega_{\mathrm{P}}^{(x=0)}S+\omega_{\mathrm{P}}^{(x=d)}S=-\frac{Q}{S}\left[1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right]S+\frac{Q}{S}\left[1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}(1+\alpha)^2}\right]S=\frac{Q}{\bar{\varepsilon}}\left[1-\frac{1}{(1+\alpha)^2}\right]$$

を打ち消す．

問題 II

(1)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{t}}$$

(2) $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$ で，ε と μ が一定で $\rho_{\mathrm{t}} = 0$，$\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}$ とすると，

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{9}$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{10}$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{11}$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0 \tag{12}$$

を得る．$\boldsymbol{E}(x,y,z,t) = E_z(y,t)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}(x,y,z,t) = B_x(y,t)\boldsymbol{e}_x$ とおく．このとき，(3) 式，(4) 式を満たしているのは自明．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し $\mathrm{rot}\boldsymbol{V} = \left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \boldsymbol{V}$ となることを用いて，$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} \times B_x(y,t)\boldsymbol{e}_x = \frac{\partial B_x(y,t)}{\partial y}\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_x = -\frac{\partial B_x(y,t)}{\partial y}\boldsymbol{e}_z$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y} \times E_z(y,t)\boldsymbol{e}_z = \frac{\partial E_z(y,t)}{\partial y}\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \frac{\partial E_z(y,t)}{\partial y}\boldsymbol{e}_x$ を得る．これらより，(1), (2) 式は

$$-\frac{\partial B_x(y,t)}{\partial y} = \varepsilon\mu\frac{\partial E_z(y,t)}{\partial t} \tag{13}$$
$$\frac{\partial E_z(y,t)}{\partial y} = -\frac{\partial B_x(y,t)}{\partial t} \tag{14}$$

となる．(5) 式を t で，(6) 式を y で偏微分し，$\frac{\partial^2 B_x(y,t)}{\partial t\partial y} = \frac{\partial^2 B_x(y,t)}{\partial y\partial t}$ を用いると

$$\frac{\partial^2 E_z(y,t)}{\partial y^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_z(y,t)}{\partial t^2} \tag{15}$$

を得る．これが波動方程式．この一般解は $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ とおいて，

$$E_z(y,t) = f(y - vt) + g(y + vt) \tag{16}$$

で与えられる．

(8) 式を (6) 式に代入して $f'(y-vt)+g'(y+vt) = -\frac{\partial B_x(y,t)}{\partial t}$ を得る．両辺に -1 をかけ，t で積分して，$B_x(y,t) = -\left[\frac{1}{-v}f(y-vt) + \frac{1}{v}g(y+vt)\right] + h(y)$ を得る．t に依存しない $h(y)$ を 0 として，

$$B_x(y,t) = \frac{1}{v}\left[f(y-vt) - g(y+vt)\right] \tag{17}$$

を得る．

(3) 電磁場のエネルギー密度 u は $u = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2 + \dfrac{1}{2\mu}\varepsilon \boldsymbol{B}^2$ で与えられ，ポインティング・ベクトル $\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ で与えられる．u の時間微分は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

で与えられる．上式に物質中のマクスウェル・アンペールの法則 $\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}$ とファラデーの法則 $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$ を用い，さらにヒント $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mathrm{div}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$ を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \boldsymbol{E}\cdot(\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}) - \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} + \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{E} \\ &= -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} - \mathrm{div}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} - \mathrm{div}\cdot\left(\frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\right) = -\mathrm{div}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

を得る．$\boldsymbol{S}$ が電磁的エネルギー流密度なので，$\mathrm{div}\boldsymbol{S}$ は考えている位置から単位時間に発散する単位体積あたりの電磁的エネルギーになり，右辺第 1 項はそれによるその位置の電磁的エネルギー密度の減少を表している．$\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{E}$ は考えている位置で単位時間に発生する単位体積あたりのジュール熱を表し，右辺第 2 項はそれによるその位置の電磁的エネルギー密度の減少を表している．

問題 III

(1) 対称性より，$\boldsymbol{B}(x,y,z) = B(x)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{H}(x,y,z) = H(x)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{J}(x,y,z) = J(x)\boldsymbol{e}_z$ となる．$0 < \ell$，$x_0 < x$ として，$\mathrm{A}(x,0,0)$，$\mathrm{B}(x,0,\ell)$，$\mathrm{C}(x_0,0,\ell)$，$\mathrm{D}(x_0,0,0)$ を直線でつなぐ経路 A→ B→ C→ D→ A に対して，$\boldsymbol{H}$ に関するアンペールの法則を適用する．長方形 ABCD を貫く真電流を $I_{\mathrm{t}}(x,x_0)$ とおくと，$\displaystyle\oint_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{A}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s = I_{\mathrm{t}}(x,x_0)$ となる．$\boldsymbol{H} = H(x)\boldsymbol{e}_z$ より，A→B では接線ベクトルは $\boldsymbol{e}_z$ なので $H_{\mathrm{t}} = H(x)$，B→C では接線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_x$ なので $H_{\mathrm{t}} = 0$，C→D では接線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_z$ なので $H_{\mathrm{t}} = -H(x_0)$，D→A では接線ベクトルは $\boldsymbol{e}_x$ なので $H_{\mathrm{t}} = 0$ となることを用いると，$\boldsymbol{H}$ に関するアンペールの法則の左辺は

$$\begin{aligned}&\oint_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{A}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} H_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}s = H(x)\int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \mathrm{d}s - H(x_0)\int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}} \mathrm{d}s = [H(x) - H(x_0)]\ell\end{aligned}$$

長方形 ABCD の単位法線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_y$ で，真電流は $x = 0$ に面電流密度 $-i_{\mathrm{S}}\boldsymbol{e}_y$，$x = d$ に面電流密度 $i_{\mathrm{S}}\boldsymbol{e}_y$ が存在するのみなので，$x_0 < x < 0$ のとき $I_{\mathrm{t}}(x,x_0) = 0$ より $[H(x) - H(x_0)]\ell = 0$ となり $H(x) = H(x_0)$ を得る．即ち，$x < 0$ では，$H(x) =$ 一定 となる．同様にして，$d < x_0 < x$ のとき $I_{\mathrm{t}}(x,x_0) = 0$ より $H(x) = H(x_0)$ となり，$d < x$ では，$H(x) =$ 一定 となる．$x_0 < 0 < d < x$ のときも $I_{\mathrm{t}}(x,x_0) = 0$ より $H(x) = H(x_0)$ となり，$x < 0$ と $d < x$ に対し $H(x) =$ 一定 となる．$x \to \infty$ あるいは $x \to -\infty$ から見ると，$x = 0$ の真電流と $x = d$ の真電流は重なって打ち消し合って見えるので，この一定値は 0 となる．即ち，$x < 0$ と $d < x$ に対し $H(x) = 0$ となる．$x_0 < 0 < x < d$ のとき，$I_{\mathrm{t}}(x,x_0) = (-\boldsymbol{e}_y)\cdot(-i_{\mathrm{S}}\boldsymbol{e}_y)\ell = i_{\mathrm{S}}\ell$ より $[H(x) - H(x_0)]\ell = i_{\mathrm{S}}\ell$ となり，$H(x_0) = 0$ より $H(x) = i_{\mathrm{S}}$ を得る．

$x < 0$，$d < x$ で $B(x) = \mu_0 H(x)$，$0 < x < d$ で $B(x) = \mu(x)H(x)$ より，$x < 0$，$d < x$ で $B(x) = 0$，$0 < x < d$ で $B(x) = \bar{\mu}\mu_0\left(1 + \alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 i_{\mathrm{S}}$ を得る．

$x < 0$，$d < x$ で $J(x) = 0$，$0 < x < d$ で $J(x) = B(x) - \mu_0 H(x)$ より，$x < 0$，$d < x$ で $J(x) = 0$，$0 < x < d$ で $J(x) = \bar{\mu}\mu_0\left(1 + \alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 i_{\mathrm{S}} - \mu_0 i_{\mathrm{S}} = \mu_0 i_{\mathrm{S}}\left[\bar{\mu}\left(1 + \alpha\dfrac{x}{d}\right)^2 - 1\right]$ を得る．

結局，$x<0$，$d<x$ で

$$\boldsymbol{B}(x,y,z)=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{H}(x,y,z)=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{J}(x,y,z)=\boldsymbol{0},$$

$0<x<d$ で

$$\boldsymbol{B}(x,y,z)=\bar{\mu}\mu_0\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2 i_{\mathrm{S}}\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{H}(x,y,z)=i_{\mathrm{S}}\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{J}(x,y,z)=\mu_0 i_{\mathrm{S}}\left[\bar{\mu}\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2-1\right]\boldsymbol{e}_z.$$

(2) $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{\mu_0}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{n}$ より，$x=d$ の表面では $\boldsymbol{J}=J(d)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_x$ を用いて，

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d,y,z)=\frac{1}{\mu_0}J(d)\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\frac{1}{\mu_0}J(d)\boldsymbol{e}_y=i_{\mathrm{S}}\left[\bar{\mu}\left(1+\alpha\right)^2-1\right]\boldsymbol{e}_y.$$

$x=0$ の表面では $\boldsymbol{J}=J(0)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_x$ を用いて，

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(0,y,z)=\frac{1}{\mu_0}J(0)\boldsymbol{e}_z\times(-\boldsymbol{e}_x)=-\frac{1}{\mu_0}J(0)\boldsymbol{e}_y=-i_{\mathrm{S}}\left[\bar{\mu}-1\right]\boldsymbol{e}_y.$$

(3) $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{J}$ より，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対し $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\left(\boldsymbol{e}_x\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{V}$ となること，$\boldsymbol{J}(x,y,z)=J(x)\boldsymbol{e}_z$ であることを用い，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(x,y,z)&=\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\times J(x)\boldsymbol{e}_z=\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}J(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_z=-\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}J(x)}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{e}_y\\&=-\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mu_0 i_{\mathrm{S}}\left[\bar{\mu}\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)^2-1\right]\boldsymbol{e}_y=-2i_{\mathrm{S}}\bar{\mu}\frac{\alpha}{d}\left(1+\alpha\frac{x}{d}\right)\boldsymbol{e}_y.\end{aligned}$$

おまけ
磁性体内 (表面以外) の z 方向の単位長さあたりの磁化電流は

$$-\int_0^d\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}J(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_y=-\frac{1}{\mu_0}\left[J(d)-J(0)\right]\boldsymbol{e}_y$$

となり，表面の単位長さあたり磁化電流 $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d,y,z)+\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(0,y,z)=\dfrac{1}{\mu_0}\left[J(d)-J(0)\right]\boldsymbol{e}_y$ を打ち消す．

問題 IV

(1) 対称性より $\boldsymbol{E}(r,\varphi,z,t)=E(r,t)\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z,t)=i(r,t)\boldsymbol{e}_\varphi$ と書ける．半径 r の同軸円周 C に対してファラデーの法則の積分形を適用する．C を縁とする円を S と書くと

$$\oint_{\mathrm{C}}E_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s=-\iint_{\mathrm{S}}\frac{\partial B_{\mathrm{ex,n}}}{\partial t}\mathrm{d}S.$$

ここで，

$$\oint_{\mathrm{C}}E_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s=\oint_{\mathrm{C}}E(r,t)\mathrm{d}s=E(r,t)\oint_{\mathrm{C}}\mathrm{d}s=2\pi rE(r,t)$$

および

$$\begin{aligned}-\iint_{\mathrm{S}}\frac{\partial B_{\mathrm{ex,n}}}{\partial t}\mathrm{d}S&=-\iint_{\mathrm{S}}\frac{\partial\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}(r,\varphi,z,t)\cdot\boldsymbol{e}_z\}}{\partial t}\mathrm{d}S=-\iint_{\mathrm{S}}\frac{\partial(B_0+\beta t)}{\partial t}\mathrm{d}S\\&=-\iint_{\mathrm{S}}\beta\mathrm{d}S=-\beta\iint_{\mathrm{S}}\mathrm{d}S=-\pi r^2\beta\end{aligned}$$

より，

$$E(r,t) = -\frac{\beta r}{2} = E(r)$$

を得る．$r<a$ に対し $\boldsymbol{i}(r,\varphi,z,t) = \sigma(r)\boldsymbol{E}(r,\varphi,z,t)$ より，

$$i(r,t) = \sigma(r)E(r) = \sigma_0\left(\frac{r}{a}\right)^3\left(-\frac{\beta r}{2}\right) = -\frac{\sigma_0\beta r^4}{2a^3} = i(r).$$

(2) 電流も電界も時間に依存していない．中心軸からの距離が r の位置での単位体積あたり単位時間あたりジュール熱 $p(r)$ は

$$p(r) = \sigma(r)E^2(r) = \sigma_0\left(\frac{r}{a}\right)^3\left(-\frac{\beta r}{2}\right)^2 = \frac{\sigma_0\beta^2 r^5}{4a^3}.$$

指定された領域は z 方向の長さが ℓ である．z 方向の長さ ℓ の導体円柱棒の $r\sim r+\mathrm{d}r$ の微小部分の体積は $\ell 2\pi r\mathrm{d}r$ であるので，指定された領域で単位時間あたりに発生するジュール熱 $P(r_1,r_2,t)$ は

$$\begin{aligned}P(r_1,r_2,t) &= \int_{r_1}^{r_2} p(r)\ell 2\pi r\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\sigma_0\beta^2 r^5}{4a^3}\ell 2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\pi\sigma_0\beta^2\ell}{2a^3}\int_{r_1}^{r_2} r^6\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi\sigma_0\beta^2\ell}{2a^3}\frac{1}{7}\left(r_2^7 - r_1^7\right) = \frac{\pi\sigma_0\beta^2\ell}{14a^3}\left(r_2^7 - r_1^7\right) = P(r_1,r_2)\end{aligned}$$

で与えられる．導体棒の単位長さあたり単位時間に発生するジュール熱は $\dfrac{P(0,a)}{\ell} = \dfrac{\pi\sigma_0\beta^2 a^4}{14}$ で与えられる．

(3) (1) で求めた電流密度分布は時間変化せず，ソレノイドの重ね合わせと考えられる．従って $\boldsymbol{B}'(r,\varphi,z,t) = B'(r)\boldsymbol{e}_z$ と書け，$a<r$ に対し $B'(r)=0$ となる．R を $a<R$ を満たす長さ，h を $0<h$ を満たす長さとする．$\varphi=0$ の面内で，$\mathrm{A}(r,0,0)$，$\mathrm{B}(r,0,h)$，$\mathrm{C}(R,0,h)$，$\mathrm{D}(R,0,0)$ の 4 点をとり，閉曲線 A→B→C→D→A に対し，アンペールの法則を適用する．この閉曲線を C，C を縁とする長方形 ABCD を S と書くと

$$\oint_{\mathrm{C}} B'_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = \mu_0\iint_{\mathrm{S}} i_n\mathrm{d}S.$$

ここで，

$$\begin{aligned}\oint_{\mathrm{C}} B'_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s &= \int_{\mathrm{A\to B}}\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{B\to C}}\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{C\to D}}\boldsymbol{B}'\cdot(-\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{D\to A}}\boldsymbol{B}'\cdot(-\boldsymbol{e}_r)\mathrm{d}s\\ &= \int_{\mathrm{A\to B}} B'(r)\mathrm{d}s = B'(r)\int_{\mathrm{A\to B}}\mathrm{d}s = B'(r)h.\end{aligned}$$

一方，中心軸から距離 r' の位置での電流密度は $i(r')$，S 中で電流密度が存在するのは $r<r'<a$ の範囲で，S 中で $r'\sim r'+\mathrm{d}r'$ の微小部分の面積は $h\mathrm{d}r'$ なので，

$$\begin{aligned}\mu_0\iint_{\mathrm{S}} i_n\mathrm{d}S &= \mu_0\iint_{\mathrm{S}}\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}S = \mu_0\int_r^a i(r')h\mathrm{d}r' = \mu_0\int_r^a\left(-\frac{\sigma_0\beta r'^4}{2a^3}\right)h\mathrm{d}r'\\ &= -\frac{\mu_0\sigma_0\beta h}{2a^3}\int_r^a r'^4\mathrm{d}r' = -\frac{\mu_0\sigma_0\beta h}{2a^3}\frac{1}{5}(a^5 - r^5) = -\frac{\mu_0\sigma_0\beta a^2 h}{10}\left(1 - \frac{r^5}{a^5}\right)\end{aligned}$$

を得る．これらより，$r<a$ に対し

$$B'(r) = -\frac{\mu_0\sigma_0\beta a^2}{10}\left(1 - \frac{r^5}{a^5}\right)$$

を得る．