慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	~~50~~分	90 分

平成 20年 7月 28日（月）6 時限施行		学部　学科　年　組	
担当者名	井口 達雄	学籍番号	
科目名	数学Ａ３	氏　名	

採点欄	※

答案用紙は１人２枚配布する．答案用紙１枚目の表面に問題 $\boxed{1}$，裏面に問題 $\boxed{2}$，答案用紙２枚目の表面に問題 $\boxed{3}$，裏面に問題 $\boxed{4}$ を解答せよ．

$\boxed{1}$ 以下で定められる関数 f の導関数 f' を計算せよ．

(1) $f(x) = x^{\sin x} \quad (x > 0)$

(2) $f(x) = \arctan\frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1)$

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

$\boxed{2}$ (1) f および φ を $\mathbf{R}$ 上の C^3 級関数とし，それらの合成関数を

$$F(x) := f(\varphi(x))$$

とおく．このとき，$F'(x), F''(x), F'''(x)$ を f および φ の導関数を用いて表せ．

(2) $f = f(x, y)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数，$\varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t)$ を $\mathbf{R}$ 上の C^2 級関数とし，それらの合成関数を

$$F(t) := f(\varphi(t), \psi(t))$$

とおく．このとき，$F'(t)$ および $F''(t)$ を f の偏導関数と φ, ψ の導関数を用いて表せ．

$\boxed{3}$ (1) $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ を求めよ．

(2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2\log(\cos x) + x^2}{x^n}$ が 0 以外の有限な極限値をもつように自然数 n を定め，そのときの極限値を求めよ．

$\boxed{4}$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) f の n 階導関数 $f^{(n)}$ を求めよ．

(2) f の有限 Maclaurin 展開を

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + O(x^{n+1}) \quad (x \to 0)$$

とするとき，係数 a_k $(0 \leq k \leq n)$ を求めよ．

期末試験問題（数学Ａ３）の解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x\cdot\log x}$ と書けることに注意すれば，合成関数の微分法および積の微分法より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{\sin x\cdot\log x}(\sin x\cdot\log x)' \\ &= x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\log x+\frac{\sin x}{x}\right) \quad \cdots \quad (答) \end{aligned}$$

(2) $\frac{d}{dy}\arctan y=\frac{1}{1+y^2}$ に注意すれば，合成関数の微分法および商の微分法より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} \quad \cdots \quad (答) \end{aligned}$$

(3) $x\neq 0$ のとき，積の微分法，合成関数の微分法および商の微分法より

$$f'(x)=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2\left(\frac{1}{x}\right)'\cos\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$x=0$ のときは，微分係数の定義より

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

したがって，

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \quad \cdots \quad (答)$$

$\boxed{2}$ (1) 合成関数の微分法および積の微分法より

$F(x)$

$$\begin{cases} F'(x)=f'(\varphi(x))\varphi'(x) \\ F''(x)=f'(\varphi(x))\varphi''(x)+f''(\varphi(x))\big(\varphi'(x)\big)^2 \\ F'''(x)=f'(\varphi(x))\varphi'''(x)+3f''(\varphi(x))\varphi''(x)\varphi'(x)+f'''(\varphi(x))\big(\varphi'(x)\big)^3 \end{cases} \quad \cdots \quad (答)$$

(2) 合成関数の微分法および積の微分法より

$$\begin{cases} F'(t)=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \\ F''(t)=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi''(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi''(t) \\ \qquad +f_{xx}(\varphi(t),\psi(t))\big(\varphi'(t)\big)^2+f_{yy}(\varphi(t),\psi(t))\big(\psi'(t)\big)^2 \\ \qquad +2f_{xy}(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\psi'(t) \end{cases} \quad \cdots \quad (答)$$

ここで，f が C^2 級であることから $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ が成り立つことを用いた．

$\boxed{3}$ (1) $x^{\frac{1}{1-x}}=\mathrm{e}^{\frac{\log x}{1-x}}$ に注意して，極限 $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}$ を考える．これは $\frac{0}{0}$ の不定形であるから，l'Hôspital の定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1}=-1$$