

数学 A1 演習問題ヒントと略解 (第 1 回)

1. $r \leq 0$ のとき: f は $x = 0$ で連続でない.

$0 < r \leq 1$ のとき: f は $x = 0$ で連続だが微分可能ではない.

$r > 1$ のとき: f は $x = 0$ で連続かつ微分可能.

2. $x \neq 0$ のとき $f'(x) = 3x^2 \cos \frac{1}{x^2} + 2 \sin \frac{1}{x^2}$. また $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}| = |x^2 \cos \frac{1}{x^2}| \leq |x|^2 \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) より $f'(0) = 0$.

3. (a) 合成関数の微分を何度か行うことにより

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

(b) $f(x) = x^{x^x}$ とおき両辺 \log をとると $\log f(x) = x^x \log x$. もう一度両辺 \log をとると

$$\log(\log f(x)) = \log(x^x \log x) = x \log x + \log(\log x)$$

この両辺を微分して計算すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \log f(x) \left\{ \log x + 1 + \frac{1}{x \log x} \right\} \\ &= x^{x^x} x^x \log x \left\{ \log x + 1 + \frac{1}{x \log x} \right\} \end{aligned}$$

4. (a) $f(x) = \log x$ とすると平均値の定理よりある $c \in (a, a+1)$ が存在して

$$\frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = f'(c)$$

が成り立つ. $f'(c) = \frac{1}{c} \in (\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a})$ とあわせると $\frac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \frac{1}{a}$ がわかる.

(b) $F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x$ とおくと $F'(x) = f(x)$. $F(0) = 0$ かつ仮定より $F(1) = 0$. よって平均値の定理 (ロルの定理) を用いるとある $c \in (0, 1)$ が存在して $f(c) = F'(c) = 0$ が成り立つ.

5. ロピタルの定理を用いる.

$$(a) \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad (b) 1$$