数学A1演習問題ヒントと略解（第４回）

1. $f(x,y) = e^x + y\cos x - y^2 - 1$ とおくと $f_x = e^x - y\sin x, f_y = \cos x - 2y$.

   $f(0,1) = 0, f_y(0,1) = -1 \neq 0$ より陰関数定理から $x = 0$ のとき $y = 1$ を満たす $y = \phi(x)$ が唯一つ存在する．また $\phi'(x) = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ より $\phi'(0) = -\dfrac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)} = 1$ であり，

   更に $y = \phi(x)$ は x の関数であることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\phi''(x) &= -\frac{d}{dx}\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \\
&= -\frac{\frac{d}{dx}(e^x - y\sin x)\cdot(\cos x - 2y) - (e^x - y\sin x)\,\frac{d}{dx}(\cos x - 2y)}{(\cos x - 2y)^2} \\
&= -\frac{(e^x - y'\sin x - y\cos x)(\cos x - 2y) - (e^x - y\sin x)(-\sin x - 2y')}{(\cos x - 2y)^2}
\end{aligned}
$$

   $x = 0$ のとき $y = \phi(0) = 1, y' = \phi'(0) = 1$ とあわせると $\phi''(0) = -2$.

2. $f(x,y) = x^4 - 2x^2y + xy^3 - y^2 - 1$ とおくと $f_x = 4x^3 - 4xy + y^3, f_y = -2x^2 + 3xy^2 - 2y$.

   $f(1,2) = 0, f_y(1,2) = 6 \neq 0$ より陰関数定理から $x = 1$ のとき $y = 2$ を満たす $y = \phi(x)$ が唯一つ存在する．また $\phi'(x) = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$ より $\phi'(0) = -\dfrac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)} = -\dfrac{2}{3}$ であり，

   更に $y = \phi(x)$ は x の関数であることに注意して計算すると $\phi''(0) = \dfrac{10}{27}$.

3. テイラーの定理より $t \to 0$ のとき $\log(\cos t) = -\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + o(t^4)$ （第2回問4(b)参照）したがって

$$
f(x,y) = -\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^4}{12} + (x,y \text{ の5次以上の項 })
$$

4. テイラーの定理より $t \to 0$ のとき $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + o(t^4), \sin t = t - \dfrac{t^3}{3!} + o(t^3)$ となることに注意すると

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \Big\{1 - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^4}{24} + (x,y \text{ の5次以上の項 })\Big\}\Big\{x - \frac{x^3}{6} + (x \text{ の5次以上の項 })\Big\} \\
&= x - \frac{2}{3}x^3 - x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + (x,y \text{ の5次以上の項 })
\end{aligned}
$$

5. テイラーの定理より $t \to 0$ のとき $\log(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + o(t^3)$ となることに注意すると

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= xy\Big\{(x+ay^2) - \frac{(x+ay^2)^2}{2} + \frac{(x+ay^2)^3}{3}\Big\} + (x,y \text{ の6次以上の項 }) \\
&= x^2y - \frac{1}{2}x^3y + axy^3 + \frac{1}{3}x^4y - ax^2y^3 + (x,y \text{ の6次以上の項 })
\end{aligned}
$$

   また展開の一意性より x^2y^3 の項の係数を考えると $-a = \dfrac{1}{5!}{}_5C_2\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}(0,0)$ が成り立つので $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x^2\partial y^3}(0,0) = 1$ とすると $a = -\dfrac{1}{12}$.

6. テイラーの定理より $t \to 0$ のとき $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{t^3}{16} + o(t^3)$, $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)$ となることに注意すると

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\left\{(x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + \cdots\right\} - \frac{1}{8}\left\{(x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + \cdots\right\}^2 + \frac{1}{16}\left\{(x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 + \cdots\right\}^3 + \cdots$$

xy^2 の項に着目すると $\left(\dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{1}{6})\cdot 3 + \dfrac{1}{16}\cdot 3\right)xy^2 = -\dfrac{1}{16}xy^2$