

物理学 A 3 章演習

質量 m の質点が速さ v で運動しているとき、速度の 2 乗に比例した空気の抵抗 kv^2 を受けるとする。初速度 v_0 で鉛直下方に投げた後の速度の変化を調べなさい。重力加速度を g とする。

- (i) 下方を z の正の方向として、運動方程式を書きなさい。
- (ii) (i) で求めた運動方程式を、速度 $v(=dz/dt)$ についての微分方程式の形で表しなさい。さらに、その方程式を v と t について変数分離を行い、積分して $v(t)$ を求めなさい。

- (iii) $t \rightarrow \infty$ のときの v の値はいくらか。また $v_0 > \sqrt{mg/k}$ および $v_0 < \sqrt{mg/k}$ をそれぞれの場合の速度変化の概形を描きなさい。

ヒント：

変数分離：微分 dv/dt が $dv/dt = V(v)T(t)$ のように、 v のみの関数 $V(v)$ と t のみの関数 $T(t)$ の積で表されるとき、

$$\frac{dv}{V(v)} = T(t)dt$$

のように右辺は t のみ、左辺は v のみとなるように分けることができ、積分により解を求めることができる。

部分分数展開： $\frac{1}{(v-a)(v-b)} = \frac{A}{v-a} + \frac{B}{v-b}$ を用い、分母の因子が一つになるように分

けると計算が容易になる。

積分公式： $\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|$ ；ただし、自然対数 $\ln x = \log_e x$ は e を底とする対数で

ある。

発展問題

- (1) (ii) の結果をもう一度積分して $z(t)$ を求めてみなさい。
- (2) (iii) の結果から、雨粒の大きさと落下速度の間の関係を考えてみよ。雨粒の半径を a とすると、抵抗力の係数 k は断面積 πa^2 に比例し、質量は体積に比例する。
- (3) 質点を鉛直上方へ投げ上げた場合の運動を調べてみなさい。