田中来武 君 の模範解答

演習問題1（2016年6月14日分）

次回6月21日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題1】
次のそれぞれの行列の行列式を計算せよ．途中計算も書きなさい．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(1) $|A| = 1\cdot3 - 2\cdot4$
$= 3 - 8$
$= -5$ //

(2) $|B| = 1\cdot4 - 2\cdot2$
$= 4 - 4 = 0$ //

(3) $|C| = 1(4+6) + 2(6-2) + 3(-2-4)$
$= 10 + 8 - 18$
$= 0$ //

※
(3)はサラスの公式で解くと，
$1\cdot4\cdot1 + 2\cdot6\cdot1 + 2\cdot(-1)\cdot3$
$- 3\cdot4\cdot1 - 2\cdot2\cdot1 - 6\cdot(-1)\cdot1$
$= 4 + 12 - 6 - 12 - 4 + 6$
$= 0$
です。（小林）

【問題2】
ベクトル $\boldsymbol{a} = {}^t[0,1,1]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[3,4,0]$ について，以下の問に答えよ．途中計算も書きなさい．

(1) 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の値
(2) 外積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ の値
(3) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のそれぞれの長さ
(4) 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の長さ

(1) $\mathbb{a}\times\mathbb{b} = {}^t[(1\cdot0 - 1\cdot4), (1\cdot3 - 0\cdot0), (0\cdot4 - 1\cdot3)]$
$= {}^t[0-4, 3-0, 0-3]$
$= {}^t[-4, 3, -3]$ //

(2) $\mathbb{b}\times\mathbb{a} = {}^t[(1\cdot4 - 0\cdot1), (0\cdot0 - 3\cdot1), (3\cdot1 - 4\cdot0)]$
$= {}^t[4, -3, 3]$ //

(3) $\|\mathbb{a}\| = \sqrt{0+1^2+1^2} = \sqrt{2}$ //
$\|\mathbb{b}\| = \sqrt{3^2+4^2+0^2} = 5$ //

(4) (1)より $\mathbb{a}\times\mathbb{b} = {}^t[-4, 3, -3]$
$\|\mathbb{a}\times\mathbb{b}\| = \sqrt{(-4)^2+3^2+(-3)^2}$
$= \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$ //

【問題3（復習問題）】

(1) AB が対称行列でないような2次対称行列 A, B の例を一つ求めよ．

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ //

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 0+0, & 0+0 \\ 0+2, & 0+3 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 対称行列ではない．

(2) ${}^t(AB) \neq {}^tA\,{}^tB$ となるような2次行列 A, B の例を一つ求めよ．

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ //

${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, ${}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$

${}^tA\,{}^tB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ ${}^t(AB) = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$

${}^t(AB) \neq {}^tA\,{}^tB$

裏面に続く場合は⇒印の欄から書くこと。

④ ⇒ 教科書 P83, 84 の (4.2)〜(4.5) 証明 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ とする.

(4.2): $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ とすると. $\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{2}a_{22}$

また $\det[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1] = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$ $\therefore \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = -\det[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1]$ //

(4.3) $\mathbf{a}_1' = \begin{bmatrix} a_{11}' \\ a_{21}' \end{bmatrix}$ とする. $\det[\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{11}' & a_{12} \\ \lambda a_{21} + \mu a_{21}' & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}(\lambda a_{11} + \mu a_{11}') - a_{12}(\lambda a_{21} + \mu a_{21}')$

$= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \mu(a_{11}'a_{22} - a_{12}a_{21}') = \lambda\cdot\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] + \mu\cdot\det[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2]$ //

(4.4) $\mathbf{a}_2' = \begin{bmatrix} a_{12}' \\ a_{22}' \end{bmatrix}$ とする $\det[\mathbf{a}_1, \lambda\mathbf{a}_2 + \mu\mathbf{a}_2'] = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} + \mu a_{12}' \\ a_{21} & \lambda a_{22} + \mu a_{22}' \end{vmatrix} = a_{11}(\lambda a_{22} + \mu a_{22}') - a_{21}(\lambda a_{12} + \mu a_{12}')$

$= \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + \mu(a_{11}a_{22}' - a_{12}'a_{21}) = \lambda\cdot\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] + \mu\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2']$ //

(4.5) $\because I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ より $\det I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$ //

⑤ P86 の (4.8) の $\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = -\det[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$, (9), (12)を示す

(4.8) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$ $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$ とすると. $\det[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3] = -\det[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$ について.

(左辺) $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

(右辺) $= a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{11}(a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33}) + a_{13}(a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32})$

$= a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{31}$

$\therefore \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = -\det[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]$ //

(4.9) $\mathbf{a}_1' = \begin{bmatrix} a_{11}' \\ a_{21}' \\ a_{31}' \end{bmatrix}$ $\det[\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} + \mu a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} + \mu a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 計算して, λとμでくくると.

$(\lambda a_{11} + \mu a_{11}')a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}(\lambda a_{31} + \mu a_{31}') + a_{13}(\lambda a_{21} + \mu a_{21}')a_{32} - a_{13}a_{22}(\lambda a_{31} + \mu a_{31}') - a_{12}(\lambda a_{21} + \mu a_{21}')a_{33} - (\lambda a_{11} + \mu a_{11}')a_{23}a_{32} = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}' & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}' & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\cdot\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] + \mu\cdot\det[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$

(4.12) $\det I_3 = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + 0\cdot0\cdot0 + 0\cdot0\cdot0 - 0\cdot1\cdot0 - 0\cdot0\cdot1 - 1\cdot0\cdot0$

$= 1$ $\therefore \det I_3 = 1$ /