慶應義塾大学試験問題　物理学 D

（試験時間 50 分）

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数 ε_0、磁気定数 μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 極板間の距離が d、両極板の面積が S の平行平板コンデンサーを考える。図 I のように、一方の極板が $x=0$ の面内に、もう一方の極板が $x=d$ の面内にあるように、デカルト座標系 (x,y,z) をとる。x, y, z 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とし、ベクトル量はこれらを用いて表すものとする。極板間 $0<x<d$ には誘電体があり、その誘電率が x の関数として $\varepsilon(x)=\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2$ のように変化している。ここで、$\bar{\varepsilon}$, α は正の定数であり、$\bar{\varepsilon}>1$ を満たす。$x=0$ にある電極に正の電荷 Q を、$x=d$ にある電極に負の電荷 $-Q$ を与える。極板の端からの電界の漏洩は無視できるものとする。

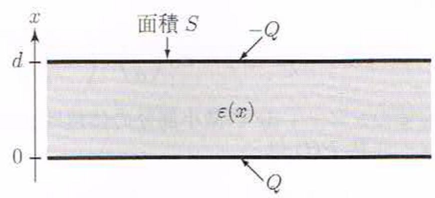

図 I

(1) 極板間の電界 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、電気分極 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい。

(2) この系の静電エネルギー U_{E} を求めなさい。

(3) 誘電体の $x=0$ の表面の分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}^{(x=0)}$ と $x=d$ の表面の分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}^{(x=d)}$ を求めなさい。さらに、誘電体内部 (表面以外) の分極電荷密度 ρ_{P} を求めなさい。

問題 II 物質中で、電界を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、真電荷密度を ρ_{t}、真電流密度を $\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}$ とする。

(1) 物質中のマクスウェル方程式を書きなさい。

(2) 物質が一様で、その誘電率 ε と透磁率 μ が一定の場合を考える。デカルト座標系 (x,y,z) を用い、ベクトル量は**問題 I** で定義した単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ で表すものとする。$\rho_{\mathrm{t}}=0$, $\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{0}$ で、時刻 t、位置 (x,y,z) において $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=E_z(y,t)\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=B_x(y,t)\boldsymbol{e}_x$ と与えられる平面電磁波を考える。$E_z(y,t)$ の従う波動方程式を書きなさい。さらに、その一般解を、2 回以上微分可能な 2 つの任意の関数 $f(\xi)$, $g(\eta)$ を用いて書きなさい。このとき、$B_x(y,t)$ がどのように表されるか書きなさい。ただし、t に依存しない項は 0 とする。

(3) 電磁場のエネルギー密度を u、ポインティングベクトルを $\boldsymbol{S}$ とする。(1) のマクスウェル方程式を用いて、u の時間変化に関する式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\mathrm{div}\boldsymbol{S}-\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{E}$$

を導きなさい。また、右辺の各項の物理的意味を説明しなさい。
ヒント: $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\mathrm{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$
が成立する。

問題 III 無限に広い厚さの無視できる 2 枚の導体板を、互いに平行で、導体板間の距離が d となるように配置されている。図 III のように、一方の導体板が $x=0$ の面内に、もう一方の導体板が $x=d$ の面内にあるように、デカルト座標系 (x,y,z) をとる。ベクトル量は**問題 I** で定義した単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ を用いて表すものとする。極板間 $0<x<d$ には磁性体があり、その透磁率が x の関数として $\mu(x)=\bar{\mu}\mu_0\left(1+\alpha\dfrac{x}{d}\right)^2$ のように変化している。ここで、$\bar{\mu}, \alpha$ は正の定数であり、$\bar{\mu}>1$ を満たす。$x=d$ にある導体板に面電流密度 $\boldsymbol{i}_\mathrm{S}=i_\mathrm{S}\boldsymbol{e}_y$ が、$x=0$ にある導体板に面電流密度 $-\boldsymbol{i}_\mathrm{S}=-i_\mathrm{S}\boldsymbol{e}_y$ が流れている。ここで、i_S は正の定数である。

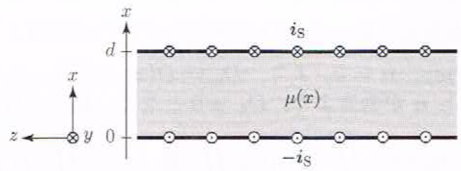

図 III

(1) 位置 (x,y,z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$、磁界 $\boldsymbol{H}(x,y,z)$、磁化 $\boldsymbol{J}(x,y,z)$ を求めなさい。

(2) 磁性体の $x=d$ の表面上の位置 (d,y,z) における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_\mathrm{m}(d,y,z)$ と、磁性体の $x=0$ の表面上の位置 $(0,y,z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_\mathrm{m}(0,y,z)$ を求めなさい。

(3) 磁性体内の位置 (x,y,z) における磁化電流密度 $\boldsymbol{i}_\mathrm{m}(x,y,z)$ を求めなさい。

問題 IV 半径 a の無限に長い導体円柱棒がある。導体円柱棒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r,φ) で表した円柱座標系 (r,φ,z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r,φ,z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 IV-1 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r,φ,z) におけるベクトル量を表すものとする。導体円柱棒の電気伝導率は r の関数として $\sigma(r)=\sigma_0\left(\dfrac{r}{a}\right)^3$ で与えられている。この導体円柱棒の内外に時刻 t に依存した一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}_\mathrm{ex}(r,\varphi,z,t)=B_\mathrm{ex}(t)\boldsymbol{e}_z=(B_0+\beta t)\boldsymbol{e}_z$ を加えた (図 IV-2 参照)。ここで、σ_0、B_0、β は正の定数である。また、導体円柱棒の内外で透磁率は μ_0 である。

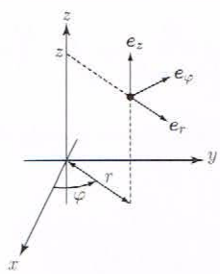

図 IV-1

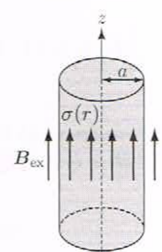

図 IV-2

(1) 時刻 t で、位置 (r,φ,z) における電界 $\boldsymbol{E}(r,\varphi,z,t)$ と電流密度ベクトル $\boldsymbol{i}(r,\varphi,z,t)$ を求めなさい。

(2) 時刻 t で、導体円柱棒中の $r_1<r<r_2$, $0\le\varphi<2\pi$, $z_0<z<z_0+\ell$ で指定される領域に発生する単位時間あたりのジュール熱 $P(r_1,r_2,t)$ を求めなさい。ここで、$0<r_1<r_2<a$, $\ell>0$ である。

(3) 導体円柱棒中を流れる全電流が、時刻 t で、位置 (r,φ,z) につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}'(r,\varphi,z,t)$ を求めなさい。