

数学1A 中間試験問題 (亀谷)

注意: 途中の計算も適宜書くこと. 但し, 初等関数 (指数関数, 三角関数, 対数関数など) のマクローリン展開は既知とする.

[1] 次の関数の指定された次数のマクローリン近似を求めよ. (答えのみを記述せよ.)

1) $f(x) = e^{-x^3}$ (9 次のマクローリン近似)

2) $f(x) = x^2 \log(1-x)$ (7 次のマクローリン近似)

3) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$ (5 次のマクローリン近似)

[2] $f(x) = \sin x$ とする.

1) $f(x)$ の 4 次のマクローリン近似と剰余項を定義にしたがって書け.

2) 以下の不等式を示せ.

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

[3] 次の極限値を求めよ.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3 - 5 \sin^2 x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t^6 - 5t^3) \sin^2 t dt}{\int_0^{x^3} \sin(t^2 + 2t) dt}$

[4] 2 変数関数

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

について以下を示せ.

1) $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ に対して, 点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$ で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0, 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = a$$

をみたすものを構成せよ.

2) $f(0, 0)$ をどのように定めても $f(x, y)$ は $(0, 0)$ において連続とはならないことを示せ.

[5] 2 変数関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \tan^2 x - 4y^3 + 3y^4}{2x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

の点 $(0, 0)$ における偏微分 $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ を求めよ.

[6] $z = f(x, y)$ を C^2 級関数, $z(s, t) = f(2s + 3t, s - 3t)$ とするとき, z_s, z_t, z_{st}, z_{ts} を s, t と f の偏微分を用いて表せ.