数学 A1 演習問題（第３回）

1. 次の関数 $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続でないことを示せ．

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \quad \text{のとき} \\ 0 & (x,y)=(0,0) \quad \text{のとき} \end{cases}$$

2. $f(x,y)$ を C^2-級関数，$\phi(x)$ を２回微分可能な関数とする．このとき $z(x)=f(x,\phi(x))$ に対し $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ を f の２階までの偏導関数および ϕ の２階までの導関数を用いて表せ．

3. ２変数関数 $f(x,y)$ は C^2-級とし，$u>0, v>0$ 上の関数 $z=g(u,v)$ を $g(u,v)=f(u^2+v^2,\dfrac{v}{u})$ で定める．このとき $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$ を u,v および f の２階までの偏導関数を用いて表せ．

[解]

1. たとえば $(x,y)=(h,h)\to(0,0)$ $(h\to 0)$ を考えると
$\lim\limits_{h\to 0} f(h,h)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h\sin h}{h^2+h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{2h}=\frac{1}{2}\neq f(0,0).$

2. まず多変数の合成関数の微分より

$$\frac{dz}{dx}=f_x\cdot\frac{d}{dx}x+f_y\cdot\frac{d}{dx}\phi(x)=f_x(x,\phi(x))+f_y(x,\phi(x))\phi'(x)$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}f_x(x,\phi(x))+\Big(\frac{d}{dx}f_y(x,\phi(x))\Big)\phi'(x)+f_y(x,\phi(x))\Big(\frac{d}{dx}\phi'(x)\Big)$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f_x(x,\phi(x))&=f_{xx}(x,\phi(x))+f_{xy}(x,\phi(x))\phi'(x)\\ \frac{d}{dx}f_y(x,\phi(x))&=f_{yx}(x,\phi(x))+f_{yy}(x,\phi(x))\phi'(x)\\ &=f_{xy}(x,\phi(x))+f_{yy}(x,\phi(x))\phi'(x)\end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\frac{d^2z}{dx^2}=f_{xx}(x,\phi(x))+2f_{xy}(x,\phi(x))\phi'(x)+f_{yy}(x,\phi(x))(\phi'(x))^2+f_y(x,\phi(x))\phi''(x)$$

3. まず多変数の合成関数の微分より

$$\frac{\partial z}{\partial u}=f_x\cdot\frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)+f_y\cdot\frac{\partial}{\partial u}\frac{v}{u}=2uf_x-\frac{v}{u^2}f_y$$

両辺を v で偏微分して計算すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}&=\frac{\partial}{\partial v}\Big\{2uf_x-\frac{v}{u^2}f_y\Big\}\\ &=2u\cdot\frac{\partial}{\partial v}f_x-\frac{\partial}{\partial v}\frac{v}{u^2}\cdot f_y-\frac{v}{u^2}\cdot\frac{\partial}{\partial v}f_y\\ &=2u\Big\{2vf_{xx}+\frac{1}{u}f_{xy}\Big\}-\frac{1}{u^2}f_y-\frac{v}{u^2}\Big\{2vf_{yx}+\frac{1}{u}f_{yy}\Big\}\\ &=4uvf_{xx}+2\Big(1-\frac{v^2}{u^2}\Big)f_{xy}-\frac{v}{u^3}f_{yy}-\frac{1}{u^2}f_y\end{aligned}$$