解説

問題 I

(1) 電荷は半径 a の導体球の表面に分布する．球対称のため，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = P(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ と書ける．半径 r の同心球の表面 S に対して，電束密度に関するガウスの法則を適用する．S 内の真電荷を $q_{\mathrm{t}}(r)$ と書くと

$$\iint_{\mathrm{S}} D_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S = \iint_{\mathrm{S}} D(r)\mathrm{d}S = D(r)\iint_{\mathrm{S}} \mathrm{d}S = 4\pi r^2 D(r) = q_{\mathrm{t}}(r)$$

となる．

$$q_{\mathrm{t}}(r) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < a \\ Q & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

より

$$D(r) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

を得る．$r < b, d < r$ で $D(r) = \varepsilon_0 E(r)$，$b < r < d$ で $D(r) = \varepsilon(r)E(r)$ より，

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \cdots \quad a < r < b \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon(r)r^2} = \dfrac{Qr^2}{4\pi\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 d^4} & \cdots \quad b < r < d \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \cdots \quad d < r \end{cases}$$

を得る．$D(r) = \varepsilon_0 E(r) + P(r)$ より

$$P(r) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < b \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon(r)}\right) = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \dfrac{r^4}{\bar{\varepsilon}d^4}\right) & \cdots \quad b < r < d \\ 0 & \cdots \quad d < r \end{cases}$$

を得る．

(2) 解法 1

中心からの距離が r の位置での単位体積あたりの電界のエネルギーは $u_{\mathrm{E}}(r) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} = \dfrac{1}{2}E(r)D(r)$ より，中心からの距離が $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分の体積は $4\pi r^2\mathrm{d}r$ であるから，この微小部分の電界のエネルギーは $4\pi r^2 u_{\mathrm{E}}(r)\mathrm{d}r$ となる．これより，

$$\begin{aligned}
U_{\mathrm{E}} &= \int_0^{\infty} 4\pi r^2 u_{\mathrm{E}}(r)\mathrm{d}r \\
&= \int_a^b 4\pi r^2 \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{Q}{4\pi r^2}\mathrm{d}r + \int_b^d 4\pi r^2 \frac{1}{2}\frac{Qr^2}{4\pi\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 d^4}\frac{Q}{4\pi r^2}\mathrm{d}r + \int_d^{\infty} 4\pi r^2 \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{Q}{4\pi r^2}\mathrm{d}r \\
&= \int_a^b \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_b^d \frac{1}{2}\frac{Q^2 r^2}{4\pi\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 d^4}\mathrm{d}r + \int_d^{\infty} \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{3\bar{\varepsilon}d^3}\left(d^3 - b^3\right) + \frac{1}{d}\right] \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{3\bar{\varepsilon}d}\left(1 - \frac{b^3}{d^3}\right) + \frac{1}{d}\right]
\end{aligned}$$

を得る．

解法 2

中心からの距離が r の位置の電位を $\phi(r)$ とすると導体球の電位は $\phi(a)$ となり，導体球には電荷 Q があるので，

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{E}} &= \frac{1}{2}Q\phi(a) = \frac{Q}{2}\int_a^\infty E(r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{2}\left[\int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r + \int_b^d \frac{Qr^2}{4\pi\bar{\varepsilon}\varepsilon_0 d^4}\mathrm{d}r + \int_d^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r\right] \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{3\bar{\varepsilon}d^4}\left(d^3-b^3\right) + \frac{1}{d}\right] \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{3\bar{\varepsilon}d}\left(1-\frac{b^3}{d^3}\right) + \frac{1}{d}\right]
\end{aligned}
$$

を得る．

(3) 誘電体表面の分極電荷密度 ω_{P} は誘電体表面の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とするとき，$\omega_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ で与えられる．$r=b$ の表面では $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{r}/r$，$r=d$ の表面では $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ であるので，

$$
\begin{aligned}
\omega_{\mathrm{P}}(r=b) &= -P(r=b) = -\frac{Q}{4\pi b^2}\left(1-\frac{b^4}{\bar{\varepsilon}d^4}\right), \\
\omega_{\mathrm{P}}(r=d) &= P(r=d) = \frac{Q}{4\pi d^2}\left(1-\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right)
\end{aligned}
$$

を得る．半径 r の球内の分極電荷 $Q_{\mathrm{P}}(r)$ は，半径 r の球面を S として

$$
Q_{\mathrm{P}}(r) = -\iint_{\mathrm{S}} P(r)\mathrm{d}S = -4\pi r^2 P(r)
$$

で与えられる．これより，

$$
q_{\mathrm{P}}(r_1, r_2) = Q_{\mathrm{P}}(r_2) - Q_{\mathrm{P}}(r_1) = -4\pi r_2^2 P(r_2) + 4\pi r_1^2 P(r_1)
$$

を得る．ここで $b < r_1 < r_2 < d$ より，

$$
q_{\mathrm{P}}(r_1, r_2) = -4\pi r_2^2\frac{Q}{4\pi r_2^2}\left(1-\frac{r_2^4}{\bar{\varepsilon}d^4}\right) + 4\pi r_1^2\frac{Q}{4\pi r_1^2}\left(1-\frac{r_1^4}{\bar{\varepsilon}d^4}\right) = \frac{Q}{\bar{\varepsilon}}\left(\frac{r_2^4}{d^4}-\frac{r_1^4}{d^4}\right)
$$

を得る．

おまけ

誘電体表面以外の全分極電荷は $q_{\mathrm{P}}(b,d) = \dfrac{Q}{\bar{\varepsilon}}\left(1-\dfrac{b^4}{d^4}\right)$ となる．一方表面の分極電荷は，$4\pi b^2\omega_{\mathrm{P}}(r=b) + 4\pi d^2\omega_{\mathrm{P}}(r=d) = -Q\left(1-\dfrac{b^4}{\bar{\varepsilon}d^4}\right) + Q\left(1-\dfrac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) = -\dfrac{Q}{\bar{\varepsilon}}\left(1-\dfrac{b^4}{d^4}\right)$ となり，$q_{\mathrm{P}}(b,d)$ を打ち消す．

問題 II

(1)

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t},$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0,$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{t}}.$$

(2)

$$-\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0,$$
$$-\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0,$$
$$\boldsymbol{B}_0 = -\frac{1}{v}\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}_0,$$
$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

(3)

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}^2 = \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt) + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{B}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt) + \frac{1}{2\mu v^2}\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt) = \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt) + \frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt) \\ &= \varepsilon\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mu v}\boldsymbol{E}\times\left(-\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}\right) \\ &= -\frac{1}{\mu v}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})\,\hat{\boldsymbol{k}} - \left(-\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}\right)\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\mu v}\boldsymbol{E}^2\hat{\boldsymbol{k}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt)\hat{\boldsymbol{k}}. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt)\hat{\boldsymbol{k}} = -v\varepsilon\boldsymbol{E}_0^2 g^2(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}+vt)\hat{\boldsymbol{k}} = -vu(\boldsymbol{r},t)\hat{\boldsymbol{k}}.$$

$$\therefore \boldsymbol{S} = -vu\hat{\boldsymbol{k}}.$$

問題 III

(1) 対称性より $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z) = B(r)\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{H}(r,\varphi,z) = H(r)\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{J}(r,\varphi,z) = J(r)\boldsymbol{e}_\varphi$ と書ける．半径 r の同軸円 C に対して，磁界に関するアンペールの法則を適用する．真電流は導体を流れる電流のみで，C を貫く真電流を $I_{\mathrm{C}}(r)$ とすると，

$$\oint_{\mathrm{C}} H_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = \oint_{\mathrm{C}} H(r)\mathrm{d}s = H(r)\oint_{\mathrm{C}}\mathrm{d}s = 2\pi r H(r) = I_{\mathrm{C}}(r).$$

ここで，導体中を流れる真電流密度は $\frac{I}{\pi a^2}\boldsymbol{e}_z$ であるので，$r < a$ のとき $I_{\mathrm{C}}(r) = \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = I\frac{r^2}{a^2}$，$a < r$ のとき $I_{\mathrm{C}}(r) = I$ である．即ち，

$$I_{\mathrm{C}}(r) = \begin{cases} \dfrac{Ir^2}{a^2} & \cdots \quad r < a \\ I & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

となる．これより，

$$H(r) = \begin{cases} \dfrac{Ir}{2\pi a^2} & \cdots \quad r < a \\ \dfrac{I}{2\pi r} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

を得る．$r < b$，$d < r$ で $B(r) = \mu_0 H(r)$，$b < r < d$ で $B(r) = \mu(r)H(r)$ より，

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} & \cdots \quad r < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & \cdots \quad a < r < b \\ \dfrac{\mu(r)I}{2\pi r} = \dfrac{\bar{\mu}\mu_0 Ir^3}{2\pi b^4} & \cdots \quad b < r < d \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & \cdots \quad d < r \end{cases}$$

を得る．$B(r) = \mu_0 H(r) + J(r)$ より，

$$J(r) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < b \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\left\{\bar{\mu}\left(\dfrac{r}{b}\right)^4 - 1\right\} & \cdots \quad b < r < d \\ 0 & \cdots \quad d < r \end{cases}$$

を得る．

(2) 磁性体の内側の表面の磁性体内から外へ向かう単位法線ベクトルは $-\boldsymbol{e}_r$，磁性体の外側の表面の磁性体内から外へ向かう単位法線ベクトルは $\boldsymbol{e}_r$ であることから

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b,\varphi,z) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{J}(b,\varphi,z)\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{\mu_0}J(b)\boldsymbol{e}_\varphi\times(-\boldsymbol{e}_r) = \frac{1}{\mu_0}J(b)\boldsymbol{e}_z = \frac{I}{2\pi b}\left(\bar{\mu}-1\right)\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d,\varphi,z) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{J}(d,\varphi,z)\times\boldsymbol{n} = \frac{1}{\mu_0}J(d)\boldsymbol{e}_\varphi\times\boldsymbol{e}_r = -\frac{1}{\mu_0}J(d)\boldsymbol{e}_z = -\frac{I}{2\pi d}\left\{\bar{\mu}\left(\frac{d}{b}\right)^4 - 1\right\}\boldsymbol{e}_z.$$

(3) $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{J}$ の積分形は，閉曲線 C を縁とする面 S に対し，$\iint_{\mathrm{S}} i_{\mathrm{m}n}\mathrm{d}S = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\mathrm{C}} J_t\mathrm{d}s$ で与えられる．C を問題の半径 r_1 の円とすると，

$$I_{\mathrm{m}}(r_1) = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\mathrm{C}} J(r_1)\mathrm{d}s = \frac{1}{\mu_0}2\pi r_1 J(r_1) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < b \\ I\left\{\bar{\mu}\left(\dfrac{r_1}{b}\right)^4 - 1\right\} & \cdots \quad b < r < d \\ 0 & \cdots \quad d < r \end{cases}$$

を得る．あるいは，半径 r_1 の円に対して $\boldsymbol{B}$ に関するアンペールの法則の積分形を用いて，半径 r_1 の円を貫くの全電流 $I(r_1)$ を求めると，

$$I(r_1) = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\text{半径 } r_1 \text{の円}} B(r_1)\mathrm{d}s = \frac{1}{\mu_0}2\pi r_1 B(r_1) = \begin{cases} \dfrac{Ir_1^2}{a^2} & \cdots \quad r < a \\ I & \cdots \quad a < r < b \\ \dfrac{\mu(r)I}{\mu_0} = \dfrac{\bar{\mu}Ir_1^4}{b^4} & \cdots \quad b < r < d \\ I & \cdots \quad d < r \end{cases}$$

を得る．一方，半径 r_1 の円を貫く真電流 $I_{\mathrm{t}}(r_1)$ は

$$I_{\mathrm{t}}(r) = \begin{cases} \dfrac{Ir^2}{a^2} & \cdots \quad r < a \\ I & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

これより，

$$I_{\mathrm{m}}(r_1) = I(r_1) - I_{\mathrm{t}}(r_1) = \begin{cases} 0 & \cdots \quad r < b \\ I\left\{\bar{\mu}\left(\dfrac{r_1}{b}\right)^4 - 1\right\} & \cdots \quad b < r < d \\ 0 & \cdots \quad d < r \end{cases}$$

を得る．

おまけ

表面以外の全磁化電流 $\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}$ は，$\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}} = \{I_{\mathrm{m}}(d) - I_{\mathrm{m}}(b)\}\boldsymbol{e}_z = I\bar{\mu}\left\{\left(\dfrac{d}{b}\right)^4 - 1\right\}\boldsymbol{e}_z$．一方，$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b,\varphi,z)$ と $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d,\varphi,z)$ は定ベクトルなので，それぞれ $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b,\varphi,z) = \hat{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b)\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d,\varphi,z) = \hat{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d)\boldsymbol{e}_z$ と書くと，表面の磁化電流は $2\pi b\hat{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b)\boldsymbol{e}_z + 2\pi d\hat{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d)\boldsymbol{e}_z = I\bar{\mu}\left\{1 - \left(\dfrac{d}{b}\right)^4\right\}\boldsymbol{e}_z$ となり $\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}$ を打ち消す．

問題 IV

(1) 対称性より $\boldsymbol{E}(r,\varphi,z,t) = E(r,t)\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z,t) = i(r,t)\boldsymbol{e}_\varphi$ と書ける．半径 r の同軸円周 C に対してファラデーの法則の積分形を適用する．C を縁とする円を S と書くと

$$\oint_{\mathrm{C}} E_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = -\iint_{\mathrm{S}} \frac{\partial B_{\mathrm{ex,n}}}{\partial t}\mathrm{d}S.$$

ここで，

$$\oint_{\mathrm{C}} E_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = \oint_{\mathrm{C}} E(r,t)\mathrm{d}s = E(r,t)\oint_{\mathrm{C}}\mathrm{d}s = 2\pi r E(r,t)$$

および

$$-\iint_S \frac{\partial B_{\mathrm{ex,n}}}{\partial t}\mathrm{d}S = -\iint_S \frac{\partial\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}(r,\varphi,z,t)\cdot\boldsymbol{e}_z\}}{\partial t}\mathrm{d}S = -\iint_S \frac{\partial(B_0+\beta t)}{\partial t}\mathrm{d}S$$
$$= -\iint_S \beta\mathrm{d}S = -\beta\iint_S \mathrm{d}S = -\pi r^2\beta$$

より，

$$E(r,t) = -\frac{\beta r}{2} = E(r)$$

を得る．$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z,t) = \sigma(r)\boldsymbol{E}(r,\varphi,z,t)$ より，

$$i(r,t) = \sigma(r)E(r) = \sigma_0\left(\frac{r}{a}\right)^4\left(-\frac{\beta r}{2}\right) = -\frac{\sigma_0\beta r^5}{2a^4} = i(r)$$

(2) 電流も電界も時間に依存していない．中心軸からの距離が r の位置での単位体積あたり単位時間あたりジュール熱 $p(r)$ は

$$p(r) = \sigma(r)E^2(r) = \sigma_0\left(\frac{r}{a}\right)^4\left(-\frac{\beta r}{2}\right)^2 = \frac{\sigma_0\beta^2 r^6}{4a^4}.$$

単位長さの導体円柱棒の $r\sim r+\mathrm{d}r$ の微小部分の体積は $2\pi r\mathrm{d}r$ であるので，単位長さあたり単位時間あたりジュール熱 $P(t)$ は

$$P(t) = \int_0^a p(r)2\pi r\mathrm{d}r = \int_0^a \frac{\sigma_0\beta^2 r^6}{4a^4}2\pi r\mathrm{d}r = \frac{\sigma_0\beta^2\pi}{2a^4}\int_0^a r^7\mathrm{d}r = \frac{\sigma_0\beta^2\pi}{2a^4}\frac{a^8}{8} = \frac{\pi\sigma_0\beta^2 a^4}{16} = P.$$

(3) (1) で求めた電流密度分布は時間変化せず，ソレノイドの重ね合わせと考えられる．従って $\boldsymbol{B}'(r,\varphi,z,t) = B'(r)\boldsymbol{e}_z$ と書け，$a<r$ に対し $B'(r)=0$ となる．R を $a<R$ を満たす長さ，h を $0<h$ を満たす長さとする．$\varphi=0$ の面内で，$\mathrm{A}(r,0,0)$，$\mathrm{B}(r,0,h)$，$\mathrm{C}(R,0,h)$，$\mathrm{D}(R,0,0)$ の 4 点をとり，閉曲線 A→B→C→D→A に対し，アンペールの法則を適用する．この閉曲線を C，C を縁とする長方形 ABCD を S と書くと

$$\oint_C B'_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = \mu_0\iint_S i_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S.$$

ここで，

$$\oint_C B'_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s = \int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}\boldsymbol{B}'\cdot\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}}\boldsymbol{B}'\cdot(-\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}s + \int_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}}\boldsymbol{B}'\cdot(-\boldsymbol{e}_r)\mathrm{d}s$$
$$= \int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} B'(r)\mathrm{d}s = B'(r)\int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\mathrm{d}s = B'(r)h.$$

一方，中心軸から距離 r' の位置での電流密度は $i(r')$，S 中で電流密度が存在するのは $r<r'<a$ の範囲で，S 中で $r'\sim r'+\mathrm{d}r'$ の微小部分の面積は $h\mathrm{d}r'$ なので，

$$\mu_0\iint_S i_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S. = \mu_0\iint_S \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}S. = \mu_0\int_r^a i(r')h\mathrm{d}r' = \mu_0\int_r^a\left(-\frac{\sigma_0\beta r'^5}{2a^4}\right)h\mathrm{d}r'$$
$$= -\mu_0\frac{\sigma_0\beta h}{2a^4}\int_r^a r'^5\mathrm{d}r = -\mu_0\frac{\sigma_0\beta h}{2a^4}\frac{1}{6}(a^6-r^6) = -\frac{\mu_0\sigma_0\beta a^2 h}{12}\left(1-\frac{r^6}{a^6}\right).$$

これらより

$$B'(r) = -\frac{\mu_0\sigma_0\beta a^2}{12}\left(1-\frac{r^6}{a^6}\right).$$