物理学 A　章末問題解答

Anonymous Coward

2006 年 7 月 16 日

1　ベクトルとその演算

[1.1]

(1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= \frac{d}{dt}(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\\ &= \dot{A}_xB_x + A_x\dot{B}_x + \dot{A}_yB_y + A_y\dot{B}_y + \dot{A}_zB_z + A_z\dot{B}_z = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\end{aligned}$$

(2)

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ のときは明白ゆえ，$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ として考える．

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{A} = (\dot{A}_x, \dot{A}_y, \dot{A}_z)\cdot(A_x, A_y, A_z) = \dot{A}_xA_x + \dot{A}_yA_y + \dot{A}_zA_z$$

ここで，$|\boldsymbol{A}| = \mathrm{const.}$ より，

$$\frac{d|\boldsymbol{A}|}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} = \frac{\dot{A}_xA_x + \dot{A}_yA_y + \dot{A}_zA_z}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}} = 0 \qquad \therefore \dot{A}_xA_x + \dot{A}_yA_y + \dot{A}_zA_z = 0$$

したがって，

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{A} = \dot{A}_xA_x + \dot{A}_yA_y + \dot{A}_zA_z = 0$$

となり，$d\boldsymbol{A}/dt$ と $\boldsymbol{A}$ は直交する．

[1.2]

(1)

$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ より，点 (a, b) を通り傾きが v/u である直線上での <u>等速直線運動</u> である．

(2)

$\boldsymbol{v} = u\boldsymbol{i} + (v - gt)\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{j}$ より，初速度が (u, v) である原点からの <u>斜方投射</u> である．

(3)

$\phi(t)$ は簡単のため ϕ と表記する．

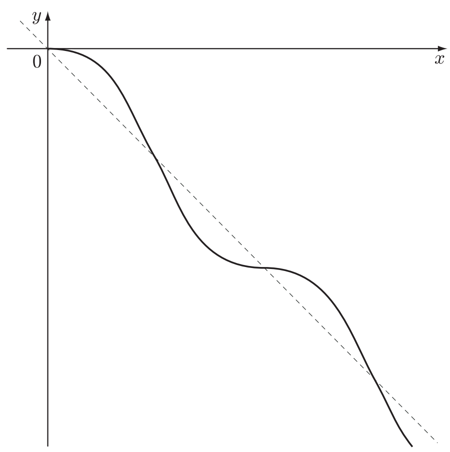
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -\dot{\phi}A\sin\phi\,\boldsymbol{i} + \dot{\phi}A\cos\phi\,\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{a} &= (-\ddot{\phi}A\sin\phi - \dot{\phi}^2A\cos\phi)\boldsymbol{i} + (\ddot{\phi}A\cos\phi - \dot{\phi}^2A\sin\phi)\boldsymbol{j} \\
&= \ddot{\phi}(-A\sin\phi\,\boldsymbol{i} + A\cos\phi\,\boldsymbol{j}) - \dot{\phi}^2(A\cos\phi\,\boldsymbol{i} + A\sin\phi\,\boldsymbol{j}) \\
&= \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}\,\boldsymbol{v} - \dot{\phi}^2\,\boldsymbol{r}
\end{aligned}$$

より，点 $(A, 0)$ を起点とする半径 A の 円運動 である．

2　運動方程式

[2.1]

運動方程式



$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -A\sin\omega t \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -\dfrac{A}{m}\sin\omega t \end{cases}$$

である．いま，$\dot{x}(0) = v_0, \dot{y}(0) = 0$ ゆえ

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = \dfrac{A}{m\omega}\cos\omega t - \dfrac{A}{m\omega} \end{cases}$$

$x(0) = 0, y(0) = 0$ ゆえ

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{A}{m\omega^2}\sin\omega t - \dfrac{A}{m\omega}t \end{cases}$$

である．したがって，

$$\boldsymbol{v}(t) = \left(v_0, \frac{A}{m\omega}\cos\omega t - \frac{A}{m\omega}\right) \quad , \quad \boldsymbol{r}(t) = \left(v_0 t, \frac{A}{m\omega^2}\sin\omega t - \frac{A}{m\omega}t\right)$$

となる．ここで $\boldsymbol{r}(t)$ より t を消去すると

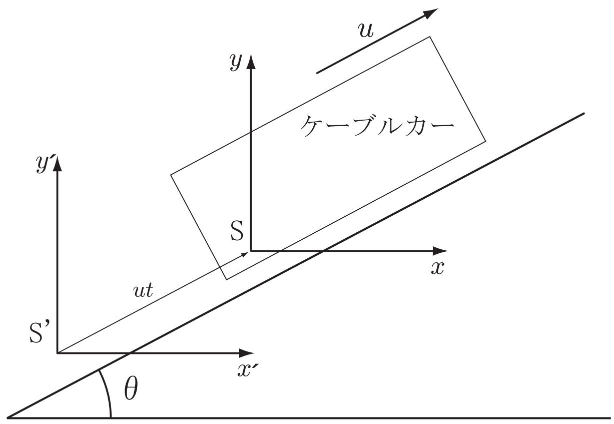
$$y = -\frac{A}{m\omega v_0}x + \frac{A}{m\omega^2}\sin\frac{\omega}{v_0}x$$

となり，運動の様子として右上図を得る．

[2.2]

S：ケーブルカー固定系 (xy 直交系)，S'：地上固定系 ($x'y'$ 直交系) とする．
このとき，(x,y) と (x',y') には

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + ut\cos\theta \\ y'(t) = y(t) + ut\sin\theta \end{cases}$$



の関係がある．

(1)

小球の運動方程式は，$\ddot{x} = \ddot{x}', \ddot{y} = \ddot{y}'$ より

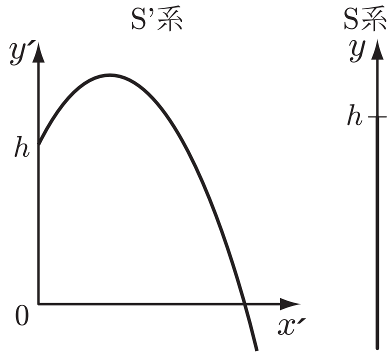
$$\text{S 系}\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$$

$$\text{S' 系}\begin{cases} m\ddot{x}' = 0 \\ m\ddot{y}' = -mg \end{cases}$$

である．

(2)

初期条件 $\dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$ と，$\dot{x}' = \dot{x} + u\cos\theta, \dot{y}' = \dot{y} + u\sin\theta$ より



$$\text{S 系}\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -gt \end{cases} \qquad \therefore \boldsymbol{v}(0) = (0,0)$$

$$\text{S' 系}\begin{cases} \dot{x}'(t) = u\cos\theta \\ \dot{y}'(t) = -gt + u\sin\theta \end{cases} \qquad \therefore \boldsymbol{v'}(0) = (u\cos\theta, u\sin\theta)$$

である．

(3)

初期条件 $x(0) = x'(0) = 0, y(0) = y'(0) = h$ より

$$\text{S 系}\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \qquad \therefore \boldsymbol{r}(t) = (0, -\frac{1}{2}gt^2 + h)$$

$$\text{S' 系}\begin{cases} x'(t) = u\cos\theta t \\ y'(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + u\sin\theta + h \end{cases} \qquad \therefore \boldsymbol{r'}(t) = (u\cos\theta, -\frac{1}{2}gt^2 + ut\sin\theta + h)$$

である．

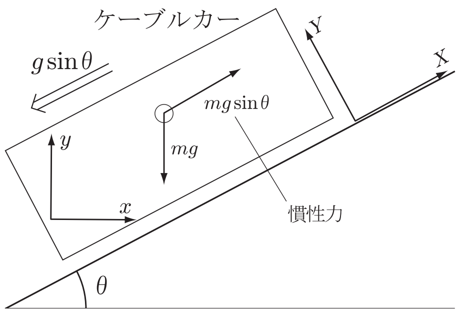
[2.3]

xy ケーブルカー固定系，XY 斜面固定系を設定する．

ケーブルカーの質量を M としたときのケーブルカーの運動方程式は

$$\begin{cases} M\ddot{X} = -Mg\sin\theta \\ M\ddot{Y} = 0 \end{cases}$$

より，ケーブルカーは斜面下向きに $\alpha = -g\sin\theta$ の加速度で運動している．



(1)

物体に働く慣性力は，ケーブルカー固定系自身の加速度の向きを考慮して，斜面平行上向きに $mg\sin\theta$ となる．

(2)

慣性力を加味した運動方程式は,

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\theta\cos\theta \\ m\ddot{y} = mg\sin^2\theta - mg = -mg\cos^2\theta \end{cases}$$

となる．

(3)

初期条件 $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, x(0) = 0, y(0) = h$ より

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = gt\sin\theta\cos\theta \\ \dot{y}(t) = -gt\cos^2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}gt^2\sin\theta\cos\theta \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2\cos^2\theta + h \end{cases} \qquad \therefore \boldsymbol{r}(t) = \left(\frac{1}{2}gt^2\sin\theta\cos\theta, -\frac{1}{2}gt^2\cos^2\theta + h\right)$$

となる．ところで，$x(t), y(t)$ から t を消去すると

$$y = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x + h$$

であるから，小球は 斜面垂直方向への落下運動 をする．

3　運動方程式の解法

(1)

運動方程式は，抵抗力の向きに注意して

$$m\ddot{z} = mg - kv^2$$

である．

(2)

$v = \dot{z}$ より，運動方程式は

$$m\dot{v} = mg - kv^2$$

と変形できる．

いま，この微分方程式を $v(0) = v_0$ の初期条件のもとで解こう．$\dot{v} = dv/dt$ より，上式を変数分離すると

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = dt$$

となる．両辺積分して

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = \int_0^t dt \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}}dv = -\int_0^t \frac{k}{m}dt$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v^2 - \frac{mg}{k}}dv &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}} - \frac{1}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}dv \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\left\{\ln\left|\frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right| - \ln\left|\frac{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right|\right\} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\left\{\ln\left|\frac{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}} \cdot \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right|\right\}
\end{aligned}$$

$$-\int_0^t \frac{k}{m}dt = -\frac{k}{m}t$$

より，

$$-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t = \ln\left|\frac{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}} \cdot \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}}\right|$$

である．したがって，

$$\frac{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}} \cdot \frac{v - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v + \sqrt{\frac{mg}{k}}} = \exp\left(-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$$

である．

いま，$\alpha = \sqrt{mg/k}$ とすれば

$$\frac{v - \alpha}{v + \alpha} = \frac{v_0 - \alpha}{v_0 + \alpha}\exp\left(-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$$

となる．上式右辺を β とすれば，上式はさらに

$$v - \alpha = \beta(v + \alpha) \quad \Longleftrightarrow \quad v = \alpha\frac{1 + \beta}{1 - \beta}$$

と変形できる．ここに α, β を代入して，

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \frac{1 + \dfrac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}} \exp\left(-2\sqrt{\dfrac{kg}{m}} t\right)}{1 - \dfrac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{k}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{k}}} \exp\left(-2\sqrt{\dfrac{kg}{m}} t\right)}$$

を得る．

(3)

$t \to \infty$ では，$\exp\left(-2\sqrt{\dfrac{kg}{m}} t\right) \to 0$ より，終端速度は

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

となる．

発展問題

双曲線関数：hyperbolic function

一般に，双曲線正弦関数 $\sinh x$(hyperbolic sine x)，双曲線余弦関数 $\cosh x$(hyperbolic cosine x) は次のように定義される．

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

$\sinh x, \cosh x$ などを総称して**双曲線関数**と呼ぶ．[*1]

双曲線関数には次のような性質がある．

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$, $\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$
- $(\sinh\lambda x)' = \lambda\cosh\lambda x$, $(\cosh\lambda x)' = \lambda\sinh\lambda x$ 　　(λ：任意定数)

以下の問では双曲線関数を用いて解答を記述することがある．

(i)

$v_\infty = \sqrt{mg/k}$ として，$z(0) = z_0$ の初期条件のもとで

$$\frac{dz}{dt} = v_\infty \frac{1 + \dfrac{v_0 - v_\infty}{v_0 + v_\infty} \exp\left(-2\sqrt{\dfrac{kg}{m}} t\right)}{1 - \dfrac{v_0 - v_\infty}{v_0 + v_\infty} \exp\left(-2\sqrt{\dfrac{kg}{m}} t\right)}$$

を解く．

[*1] これに対し正弦関数 $\sin x$，余弦関数 $\cos x$ などは**円関数**と総称される．

分子・分母に $(v_0+v_\infty)\exp(t\sqrt{kg/m})$ をかけると，

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= v_\infty \frac{(v_0+v_\infty)\exp(t\sqrt{kg/m})+(v_0-v_\infty)\exp(-t\sqrt{kg/m})}{(v_0+v_\infty)\exp(t\sqrt{kg/m})-(v_0-v_\infty)\exp(-t\sqrt{kg/m})} \\
&= v_\infty \frac{v_0\left\{\exp(t\sqrt{kg/m})+\exp(-t\sqrt{kg/m})\right\}+v_\infty\left\{\exp(t\sqrt{kg/m})-\exp(-t\sqrt{kg/m})\right\}}{v_0\left\{\exp(t\sqrt{kg/m})-\exp(-t\sqrt{kg/m})\right\}+v_\infty\left\{\exp(t\sqrt{kg/m})+\exp(-t\sqrt{kg/m})\right\}} \\
&= v_\infty \frac{2v_0\cosh(t\sqrt{kg/m})+2v_\infty\sinh(t\sqrt{kg/m})}{2v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+2v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})} \\
&= v_\infty \frac{v_0\cosh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\sinh(t\sqrt{kg/m})}{v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})} \\
&= v_\infty \sqrt{\frac{m}{kg}}\frac{\left\{v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})\right\}'}{v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})} \\
&= \frac{m}{k}\frac{\left\{v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})\right\}'}{v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})}
\end{aligned}
$$

であるから，両辺を積分すると

$$
\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z} dz &= \int_0^t \frac{m}{k}\frac{\left\{v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})\right\}'}{v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})}dt \\
&= \frac{m}{k}\left[\ln\left|v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})\right|\right]_0^t \\
&= \frac{m}{k}\left\{\ln\left|v_0\sinh(t\sqrt{kg/m})+v_\infty\cosh(t\sqrt{kg/m})\right|-\ln\left|v_0\underbrace{\sinh(0)}_{0}+v_\infty\underbrace{\cosh(0)}_{1}\right|\right\} \\
&= \frac{m}{k}\ln\left|\frac{v_0}{v_\infty}\sinh(t\sqrt{kg/m})+\cosh(t\sqrt{kg/m})\right| \\
&= \frac{m}{k}\ln\left|v_0\sqrt{\frac{k}{mg}}\sinh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)+\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\right|
\end{aligned}
$$

となる．したがって，

$$
z(t) = \frac{m}{k}\ln\left|v_0\sqrt{\frac{k}{mg}}\sinh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)+\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\right| + z_0
$$

である．

(ii)

(3) の結果より，終端速度 v_∞ は

$$
v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}} \propto \sqrt{\frac{g\cdot 4\pi a^3/3}{\pi a^2}} \propto \sqrt{a} \qquad \therefore v_\infty \propto \sqrt{a}
$$

となる．

(iii)

質点の運動方程式は

$$m\ddot{z} = mg + kv^2$$

である．$\ddot{z} = dv/dt$ ゆえ，

$$\frac{dv}{dt} = g + \frac{k}{m}v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad dt = \frac{1}{g + \frac{k}{m}v^2}dv \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{k}{m}dt = \frac{1}{v^2 + \frac{mg}{k}}dv$$

これを $v(0) = v_0(< 0)$ の初期条件のもとで解く．

$$(\text{左辺}) = \int_0^t \frac{k}{m}dt = \frac{k}{m}t$$

一方，$v_\infty = \sqrt{mg/k}$ とすると

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2 + {v_\infty}^2} = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{2iv_\infty}\left(\frac{1}{v - iv_\infty} - \frac{1}{v + iv_\infty}\right)dv = \frac{1}{2iv_\infty}\left[\ln\left|\frac{v - iv_\infty}{v + iv_\infty}\right|\right]_{v_0}^{v} \\ &= \frac{1}{2iv_\infty}\ln\left|\frac{v - iv_\infty}{v + iv_\infty} \cdot \frac{v_0 + iv_\infty}{v_0 - iv_\infty}\right|\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\frac{v - iv_\infty}{v + iv_\infty} \cdot \frac{v_0 + iv_\infty}{v_0 - iv_\infty} = \exp\left(2iv_\infty \frac{k}{m}t\right) \equiv \exp(2i\lambda t) \qquad \left(\lambda = \frac{v_\infty k}{m} = \sqrt{\frac{kg}{m}}\right)$$

となる．(2) と同様に考えれば，

$$v(t) = iv_\infty \frac{1 + \dfrac{v_0 - iv_\infty}{v_0 + iv_\infty}\exp(2i\lambda t)}{1 - \dfrac{v_0 - iv_\infty}{v_0 + iv_\infty}\exp(2i\lambda t)}$$

分子・分母に $(v_0 + iv_\infty)\exp(-i\lambda t)$ をかけて，

$$\begin{aligned}&= iv_\infty \frac{(v_0 + iv_\infty)\exp(-i\lambda t) + (v_0 - iv_\infty)\exp(i\lambda t)}{(v_0 + iv_\infty)\exp(-i\lambda t) - (v_0 - iv_\infty)\exp(i\lambda t)} \\ &= iv_\infty \frac{v_0\{\exp(-i\lambda t) + \exp(i\lambda t)\} + iv_\infty\{\exp(-i\lambda t) - \exp(i\lambda t)\}}{v_0\{\exp(-i\lambda t) - \exp(i\lambda t)\} + iv_\infty\{\exp(-i\lambda t) + \exp(i\lambda t)\}}\end{aligned}$$

$\exp(i\lambda t) + \exp(-i\lambda t) = 2\cos\lambda t, \exp(i\lambda t) - \exp(-i\lambda t) = 2i\sin\lambda t$ ($\because \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$) ゆえ，

$$\begin{aligned}&= iv_\infty \frac{2v_0\cos\lambda t + 2v_\infty\sin\lambda t}{-2iv_0\sin\lambda t + 2iv_\infty\cos\lambda t} \\ &= v_\infty \frac{v_\infty\sin\lambda t + v_0\cos\lambda t}{v_\infty\cos\lambda t - v_0\sin\lambda t} \\ &= \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}\sin\sqrt{\frac{kg}{m}}t + v_0\cos\sqrt{\frac{kg}{m}}t}{\sqrt{\frac{mg}{k}}\cos\sqrt{\frac{kg}{m}}t - v_0\sin\sqrt{\frac{kg}{m}}t}\end{aligned}$$

を得る．

次に $z(t)$ を求める．$v = dz/dt$ より，

$$\frac{dz}{dt} = v_\infty \frac{v_\infty \sin\lambda t + v_0 \cos\lambda t}{v_\infty \cos\lambda t - v_0 \sin\lambda t} = v_\infty \cdot \frac{-1}{\lambda} \frac{(v_\infty \cos\lambda t - v_0 \sin\lambda t)'}{v_\infty \cos\lambda t - v_0 \sin\lambda t}$$

である．

これを $z(0) = z_0$ の初期条件のもとで解く．

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z} dz &= \int_0^t -\frac{v_\infty}{\lambda} \frac{(v_\infty \cos\lambda t - v_0 \sin\lambda t)'}{v_\infty \cos\lambda t - v_0 \sin\lambda t} dt \\
&= -\frac{v_\infty}{\lambda} \left[\ln |v_\infty \cos\lambda t - v_0 \sin\lambda t)|\right]_0^t \\
&= -\frac{v_\infty}{\lambda} \left(|v_\infty \cos\lambda t - v_0 \sin\lambda t| - \ln |v_\infty|\right) \\
&= -\frac{v_\infty}{\lambda} \ln \left|\cos\lambda t - \frac{v_0}{v_\infty} \sin\lambda t\right| \\
&= -\frac{m}{k} \ln \left|\cos \sqrt{\frac{kg}{m}} t - v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}} \sin \sqrt{\frac{kg}{m}} t\right|
\end{aligned}$$

より，

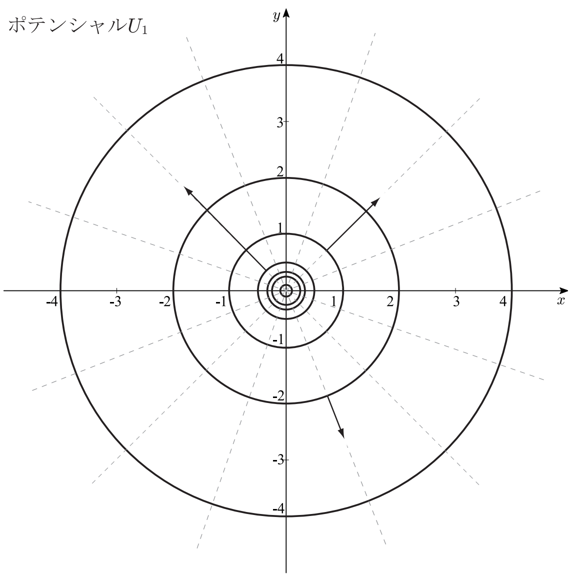
$$z(t) = -\frac{m}{k} \ln \left|\cos \sqrt{\frac{kg}{m}} t - v_0 \sqrt{\frac{k}{mg}} \sin \sqrt{\frac{kg}{m}} t\right| + z_0$$

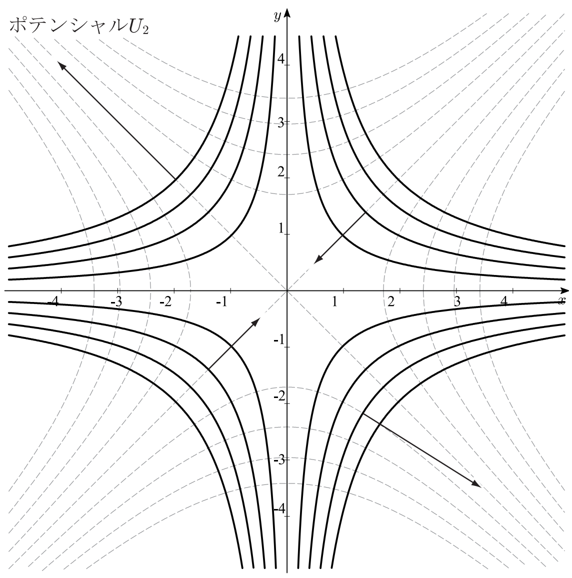
を得る．

4　保存力，ポテンシャル

[4.1]

(1)





上図左では内側から $U_1 = 10, 4, 3, 2, 1, 1/2, 1/4$ である．上図右では第 1,3 象限では内側から $U_2 = 1, 2, 3, 4$, 第 2,4 象限では内側から $U_2 = -1, -2, -3, -4$ である．$U_2 = 0$ は x, y 軸と一致している．

(2)

力とポテンシャルとの間には

$$F(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r})$$

の関係が成立することから，

$$\boldsymbol{F}_1 = -\nabla U_1 = -\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}, \frac{\partial U_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\boldsymbol{F}_2 = -\nabla U_2 = -\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}, \frac{\partial U_2}{\partial y}\right) = -(y, x)$$

となる．

(3)

(1) 参照.

参考：力線

力線とは力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の方向を各場所場所でつなげてできる曲線のことであり，その接線方向はその場所での $\boldsymbol{F}$ の方向に一致する．これより接線上の微小ベクトルを $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$ とすれば，それは $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ に平行である．これを式で表現すると，

$$\frac{dx}{F_x(x,y,z)} = \frac{dy}{F_y(x,y,z)} = \frac{dz}{F_z(x,y,z)}$$

となる．上式を用いて，U_1, U_2 のポテンシャル場における力線の表式を求めてみよう．(1) の図の破線が力線である．

U_1 のポテンシャル場における力線

(2) より，

$$F_{1x} = \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad F_{1y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから，力線の満たすべき方程式は，

$$\frac{dx}{F_{1x}} = \frac{dy}{F_{1y}} \iff \frac{dx}{\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{dy}{\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}} \iff \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

である．この両辺を不定積分すると積分定数を C として

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \iff \ln|y| = \ln|x| + C \iff \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C \iff y = cx$$

となる．したがって，求める力線は $\underline{y = cx \quad (c：任意定数)}$ である．

U_2 のポテンシャル場における力線

(2) より，

$$F_{2x} = -y \quad , \quad F_{2y} = -x$$

であるから，力線の満たすべき方程式は，

$$\frac{dx}{F_{2x}} = \frac{dy}{F_{2y}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{-x} \quad \Longleftrightarrow \quad xdx = ydy$$

である．この両辺を不定積分すると積分定数を C として

$$\int xdx = \int ydy \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + C \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = c$$

となる．したがって，求める力線は $x^2 - y^2 = c$(c：任意定数) である．

[4.2]

(1)

力 $\boldsymbol{F}$ が行う仕事 W は，$W = \int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r} = \int F_x(x,y,z)dx + \int F_y(x,y,z)dy + \int F_z(x,y,z)dz$ である．

力 A について

$$W_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int_0^1 xydx}_{y=0} + \underbrace{\int_0^2 \frac{x^2}{2}dy}_{x=1} = 0 + \int_0^2 \frac{1}{2}dy = 1$$

$$W_{\mathrm{II}} = \underbrace{\int_0^1 xydx + \int_0^2 \frac{x^2}{2}dy}_{y=2x \Leftrightarrow x=y/2} = \int_0^1 2x^2dx + \int_0^2 \frac{(y/2)^2}{2}dy = 1$$

$$W_{\mathrm{III}} = \underbrace{\int_0^2 \frac{x^2}{2}dy}_{x=0} + \underbrace{\int_0^1 xydx}_{y=2} = 0 + \int_0^1 2xdx = 1$$

力 B について

$$W_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx}_{y=0} + \underbrace{\int_0^2 xydy}_{x=1} = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^2 ydy = \frac{1}{6} + 2 = \frac{13}{6}$$

$$W_{\mathrm{II}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^2 xydy}_{y=2x \Leftrightarrow x=y/2} = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_0^2 \frac{y}{2}ydy = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$$

$$W_{\mathrm{III}} = \underbrace{\int_0^2 xydy}_{x=0} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx}_{y=2} = 0 + \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{6}$$

(2)

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ であれば，力 $\boldsymbol{F}$ は保存力である．

力 A について

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = x - x = 0$$

より，力 A は 保存力 である．

力 B について

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = y - 0 = y \neq 0$$

より，力 B は 非保存力 である．

(3)

保存力である力 A について考える．

求めるポテンシャルは任意の点 (x, y) まで原点から力 A で動かしたときの仕事の符号逆であることと，仕事は経路によらないこととを利用すると，

$$U(x,y) = -W_{\mathrm{I}} = -\left(\underbrace{\int_0^x xy dx}_{y=0} + \underbrace{\int_0^y \frac{x^2}{2} dy}_{x=x}\right) = -\frac{1}{2}x^2 y$$

となる．

別解

力 A は保存力であることから，

$$F_x = xy = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{x^2}{2} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

である．この連立偏微分方程式を $U(0,0) = 0$ の初期条件のもとで解く．

第 1 式：$\partial U/\partial x = -xy$ の両辺を x で不定積分すると，

$$U = -\frac{1}{2}x^2 y + f(y) \qquad (f(y)\text{：}y\text{ の任意関数})$$

となる．これを第 2 式に代入すると，

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}x^2 y + f(y)\right) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{df(y)}{dy} = -\frac{1}{2}x^2$$

より，

$$\frac{df(y)}{dy} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(y) = C = \mathrm{const.}$$

である．したがって，

$$U = -\frac{1}{2}x^2 y + C$$

となり，初期条件 $U(0,0)=0$ を加味すれば

$$U=-\frac{1}{2}x^2y$$

を得る．

5 振動現象

[5.1]

全エネルギー E は,

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)=\frac{1}{2}m{v_0}^2-U_0$$

である．いま，質点が $x=\pm a$ に速度 v で達するとすると，$U(\pm a)=0$ より

$$E=\frac{1}{2}mv^2+0=\frac{1}{2}m{v_0}^2-U_0\geqq 0\qquad \therefore {v_0}^2\geqq\frac{2U_0}{m}\quad\Longleftrightarrow\quad |v_0|\geqq\sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

またこのとき,

$$v=\sqrt{{v_0}^2-\frac{2U_0}{m}}$$

である．

一方，$|v_0|<\sqrt{2U_0/m}$ では質点は $x=\pm a$ に達しない．いま，質点の可動範囲を $-x_{\max}\leqq x\leqq x_{\max}$ とすれば,

$$E=\frac{1}{2}m{v_0}^2-U_0=0+\frac{U_0}{a}|x_{\max}|-U_0\qquad \therefore |x_{\max}|=\frac{ma{v_0}^2}{2U_0}$$

である．

以上より，質点の運動は次のようになる．

$$\begin{cases}|v_0|>\dfrac{2U_0}{m} & \Longrightarrow\quad \text{質点は } x=a,-a \text{ を超えて，} |v|=\sqrt{{v_0}^2-\dfrac{2U_0}{m}} \text{ で等速直線運動をする．}\\ |v_0|=\dfrac{2U_0}{m} & \Longrightarrow\quad \text{質点は } x=a,-a \text{ まで達し，そこで静止する．}\\ |v_0|<\dfrac{2U_0}{m} & \Longrightarrow\quad \text{質点は } -\dfrac{ma{v_0}^2}{2U_0}\leqq x\leqq\dfrac{ma{v_0}^2}{2U_0} \text{ の範囲で往復運動.}\end{cases}$$

[5.2]

(1)

$F_0=0$ より，与式の両辺を m で割れば

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega^2x=0$$

となる．この解として $x=\exp(\lambda t)$ を仮定する．$\dot{x}=\lambda\exp(\lambda t),\ddot{x}=\lambda^2\exp(\lambda t)$ ゆえ

$$\lambda^2\exp(\lambda t)+2\beta\lambda\exp(\lambda t)+\omega^2\exp(\lambda t)=0$$

両辺 $\exp(\lambda t) \neq 0$ で割って

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$$

これを $\beta^2 - \omega^2 < 0$ に注意してとけば,

$$\begin{aligned}\lambda &= -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} \\ &= -\beta \pm i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\end{aligned}$$

以上より求める一般解 $x(t)$ は,

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 \exp(-\beta t + it\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) + C_2 \exp(-\beta t - it\sqrt{\omega^2 - \beta^2}) \\ &= \exp(-\beta t)\left(A\cos\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t + B\sin\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t\right) \\ &= D\exp(-\beta t)\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t + \delta\right) \quad , \quad D = \sqrt{A^2 + B^2} \quad , \quad \tan\delta = \frac{B}{A}\end{aligned}$$

などとかける.

(2)

(1) より,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = -\beta\exp(-\beta t)&\left(A\cos\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t + B\sin\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t\right) \\ &+ \exp(-\beta t)\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\left(-A\sin\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t + B\cos\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t\right)\end{aligned}$$

したがって，初期条件を加味すると定数 A, B は

$$\begin{cases} x(0) = A = 0 \\ \dot{x}(0) = -\beta A + B\sqrt{\omega^2 - \beta^2} = B\sqrt{\omega^2 - \beta^2} = v_0 \end{cases} \qquad \therefore B = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}$$

と定まる．よって

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}\exp(-\beta t)\sin\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t$$

となる.

(3)

$F_0 \neq 0$ より，与式の両辺を m で割れば

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t$$

となる．この解として $x = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$ を仮定する.

$$\dot{x} = \omega_0(A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t) \quad , \quad \ddot{x} = -{\omega_0}^2(A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) = -{\omega_0}^2 x$$

ゆえ

$$\begin{aligned}-{\omega_0}^2(A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) &+ 2\beta\omega_0(A\cos\omega_0 t - B\sin\omega_0 t) \\ &+ \omega^2(A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t) = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t\end{aligned}$$

これを $\sin\omega_0 t, \cos\omega_0 t$ について整理すれば

$$\big((\omega^2-{\omega_0}^2)A-2\beta\omega_0 B\big)\sin\omega_0 t+\left((\omega^2-{\omega_0}^2)B+2\beta\omega_0 A-\frac{F_0}{m}\right)\cos\omega_0 t=0$$

となる．上式がすべての t について成立することから,

$$\begin{cases}(\omega^2-{\omega_0}^2)A-2\beta\omega_0 B=0\\(\omega^2-{\omega_0}^2)B+2\beta\omega_0 A-\dfrac{F_0}{m}=0\end{cases}$$

これを解けば,

$$\begin{cases}A=\dfrac{2\beta\omega_0}{\left(\omega^2-{\omega_0}^2\right)^2+4\beta^2{\omega_0}^2}\dfrac{F_0}{m}\\B=\dfrac{\omega^2-{\omega_0}^2}{\left(\omega^2-{\omega_0}^2\right)^2+4\beta^2{\omega_0}^2}\dfrac{F_0}{m}\end{cases}$$

を得る．