慶應義塾大学試験問題　物理学 C

（試験時間 50 分）

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数 ε_0、磁気定数 μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 真空中に固定された半径 a、高さ h の円柱状の絶縁体に一定の電荷密度 ρ で電荷が分布している。円柱の中心軸を z 軸にとる。図 I-1 のように、円柱が $0 < z_1 \leq z \leq z_1 + h$ の領域に入るように原点 O をとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 I-2 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。

(1) 座標 r が $r \sim r + \mathrm{d}r$、座標 z が $z \sim z + \mathrm{d}z$ の範囲にある円柱内の微小円環部分 $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ にある電荷が原点 O に作る電界 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(r, z)$ を求めなさい。

(2) 座標 z が $z \sim z + \mathrm{d}z$ の範囲にある円柱内の微小円板部分 $(0 \leq r \leq a$、$0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ にある電荷が原点 O に作る電界 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(z)$ を求めなさい。

(3) 円柱内の電荷が原点 O に作る電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{O}$ を求めなさい。また、$a \to \infty$ としたときの $\boldsymbol{E}_\mathrm{O}$ を求めなさい。
ヒント: b、c を定数とするとき、
$$\lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right)=0 \text{ が成立する。}$$

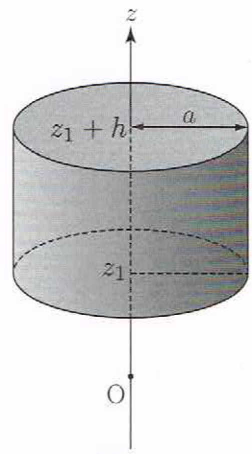

図 I-1

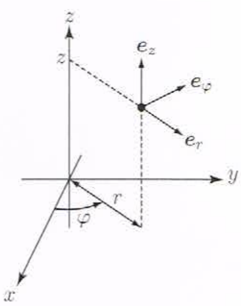

図 I-2

問題 II 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} E_0\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} & \cdots \quad r \leq a \\ E_0\left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

で与えられている。ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ であり、E_0、$a\ (>0)$ は定数である。

(1) 無限遠を基準点として、位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(3) この系の全静電エネルギー U_E を求めなさい。

問題 III 図 III のように、半径 a、高さ h の円筒状の電極 A、および半径 $b\ (>a)$、高さ h の円筒状の電極 B が中心軸を共通にして、高さをそろえて配置してある。中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r,φ) で表した円柱座標系 (r,φ,z) を用いて考える。問題 I で定義した互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r,φ,z) におけるベクトル量を表す (図 I-2 参照)。A と B の間は、位置 (r,φ,z) における電気伝導率 $\sigma(r,\varphi,z)$ が

$$\sigma(r,\varphi,z)=\sigma_0\left(\frac{r}{b}\right)^3 \quad \cdots \quad a\le r\le b$$

となるように導体が詰めてある。ここで、 $\sigma_0\ (>0)$ は定数である。AB 間の電位差が一定に保たれ、A から B に一定電流 I が流れている場合を考える。

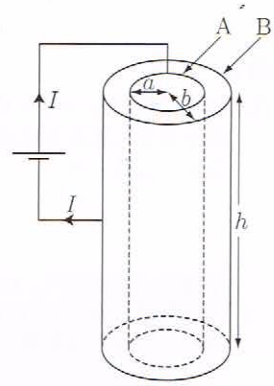

図 III

(1) AB 間の位置 (r,φ,z) における電流密度 $\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)$ と電界 $\boldsymbol{E}(r,\varphi,z)$ を求めなさい。

(2) AB 間の電位差 V を求め、AB 間の全電気抵抗 R を求めなさい。

(3) $a<r_1<r_2<b$ とするとき、中心軸 (z 軸) からの距離 r が $r_1<r<r_2$ の範囲で単位時間に発生するジュール熱 $P(r_1,r_2)$ を求めなさい。

問題 IV 真空中に内半径 a、外半径 b の円筒状の無限に長い導体がある。円筒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r,φ) で表した円柱座標系 (r,φ,z) を用いて考える。問題 I で定義した互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r,φ,z) におけるベクトル量を表す (図 I-2 参照)。この導体に定常電流が流れている。位置 (r,φ,z) における電流密度 $\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)$ は

$$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)=\begin{cases}\boldsymbol{0} & \cdots \quad r<a \quad (\text{真空中})\\ i_0\left(\dfrac{b}{r}\right)^2\boldsymbol{e}_\varphi & \cdots \quad a\le r\le b \quad (\text{導体中})\\ \boldsymbol{0} & \cdots \quad b<r \quad (\text{真空中})\end{cases}$$

で与えられている (図 IV 参照)。この電流分布は、共通の軸を持つ多数のソレノイドの重ね合わせと考えることができる。

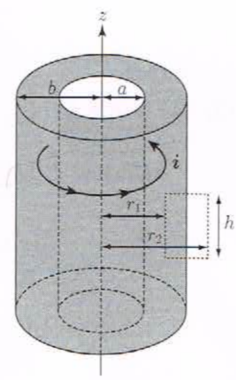

図 IV

(1) $0\le r_1\le b<r_2$ とするとき、$r_1\le r\le r_2$、$\varphi=$ 一定、$0\le z\le h$ で指定される長方形 (図 IV 中の点線の長方形) を貫く全電流 $I(r_1,r_2)$ を求めなさい。

(2) 位置 (r,φ,z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$ は $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)=B(r)\boldsymbol{e}_z$ と表される。磁束密度が φ、z に依存しない理由を説明しなさい。また、磁束密度に $\boldsymbol{e}_r$ 方向成分、$\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向成分が無い理由を説明しなさい。

(3) 位置 (r,φ,z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$ を求めなさい。$r\to\infty$ で $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)\to\boldsymbol{0}$ を用いてよい。