1/2

2017年8月2日(水)2時限実施

数学 4 A 期末試験問題

(一斉)

亀谷 幸生 ・ 栗原 将人

2017 年度 春学期

回答欄には、答だけでなく、計算の過程も (回答欄のスペースの範囲内で) 書くこと。

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

とおく。

(1) 行列 A の階数 rank A を求めなさい。

(2) $\mathbf{R}^4$ の線形部分空間 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の基底と次元を求めなさい。

(3) $\mathbf{R}^4$ の線形部分空間 $\{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の基底と次元を求めなさい。

2. k を $k \neq \pm 1$ をみたす実数とする。$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を n 次元ベクトルとする。$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が 1 次独立のとき、$\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + k\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ も 1 次独立であることを証明しなさい。

3. 2 次行列 A の固有多項式は重解 λ を持つとする。2 次ベクトル $\mathbf{p}_2$ は $\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$ であり、また λ に対する固有ベクトルではないとする。$\mathbf{p}_1 = (A - \lambda I)\mathbf{p}_2$ とおく (I は単位行列)。$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は一次独立であることを証明しなさい。

[裏に続く]

$P_1 + (\lambda I - A) P_2 = 0,$

|| 逆行列 || 正則 || $\det \neq 0,$

$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

60° $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4. (1) 座標平面における、直線 $y = \sqrt{3}\,x$ に関する対称変換に対応する行列 A を求めなさい (答だけでよい)。

(2) (1) で求めた行列 A を対角化しなさい。すなわち、$P^{-1}AP$ が対角行列となるような P とそのときの $P^{-1}AP$ を求めなさい。

5.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

とおくとき、正の整数 n に対して A^n を求めなさい。

6.(1) 2 次行列 A で $A \neq O,\ A \neq I$ であり、$A^2 = A$ となるものを一つ与えなさい (答だけでよい)。ここに O は零行列、I は単位行列である。

(2) ハミルトン・ケイリーの定理を必要なら用いて、(1) の性質をみたす行列 A は対角化できることを証明しなさい。

7. $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ および $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n$ を共に $\mathbf{R}^n$ の基底であるとする。このとき、

$$(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n) = (\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n)P$$

をみたす n 次行列 P が存在することを証明しなさい。さらに、P が正則行列であることを証明しなさい。

以上

$\lambda = 2, 3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$