2018年　数学2A期末試験共通問題

$\boxed{1}$ (1) λが固有値であることの定義を示しなさい。

(2)行列Aの固有値を λ_1,λ_2 とした時、次の行列の固有値を求めよ。

(i) $3A$　(ii) A^2 (iii) A^{-1} (iv) $A+I$

$\boxed{2}$ $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 0 & a & b\end{pmatrix}$ とする。

(1) det A を求めなさい。

(2) $\mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ となるようx_1,x_2,x_3を求めなさい。

$\boxed{3}$ $\mathbb{u}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $\mathbb{v}=\begin{pmatrix}2\\ a\\ 0\end{pmatrix}$, $\mathbb{w}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ a\end{pmatrix}$ とする。

(1) 上記の3つのベクトルによって作られる平行六面体の面積$\mathrm{V}(a)$とした時、$\mathrm{V}(a)=0$となる aを求めよ。

(2) $0\le \mathrm{a}\le 2$とした時、$\mathrm{V}(a)$の最大値とその時の aを求めよ。

(3)$c_1\mathbb{u}+c_2\mathbb{v}=\mathbb{w}$とした時の$c_1,c_2,a$の組み合わせをすべて求めよ。

$\boxed{4}$ $\mathbb{A}=(a_{ij})$で表される$\mathrm{m}\times\mathrm{n}$行列と$\mathbb{B}=(b_{ji})$で表される$\mathrm{n}\times\mathrm{m}$行列がある。

(1) 積$\mathbb{AB}$の成分を表しなさい。

(2) 積$\mathbb{AB}$の対角成分の和を表しなさい。

(3) 積$\mathbb{AB}$の対角成分の和と積$\mathbb{BA}$の対角成分の和が等しいことを証明しなさい。

$\boxed{5}$ (1) 一次独立の定義を示しなさい。

(2) v_1,v_2,v_3,v_4は一次独立である。次の命題は正しいか否か証明しなさい。

(i) $\mathbb{w}_1=v_1+v_2$, $\mathbb{w}_2=v_2+v_3$, $\mathbb{w}_3=v_1+v_3$とした時、$\mathbb{w}_1,\mathbb{w}_2,\mathbb{w}_3$は一次独立である。

(ii) $\mathbb{u}_1=v_1+v_2$, $\mathbb{u}_2=v_2+v_3$, $\mathbb{u}_3=v_3+v_4$, $\mathbb{u}_4=v_1+v_4$とした時、$\mathbb{u}_1,\mathbb{u}_2,\mathbb{u}_3,\mathbb{u}_4$は一次独立である。

(3) $\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2,\mathbb{a}_3$は、それぞれ互いに垂直である。この時、$\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2,\mathbb{a}_3$が一次独立であることを証明せよ。

(但し、$\mathbb{a}_1,\mathbb{a}_2,\mathbb{a}_3$が互いに垂直であるとは、$(a_i\cdot a_j)=0$ (＊i,j は任意)である。)

$\boxed{6}$ $\mathbb{A}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix}$ である。次の問いに答えなさい。

(1) 固有値、固有ベクトルを求めなさい。

(2) $P,P^{-1}P^{-1}AP$を求めなさい。

(3) 基本ベクトルを求めなさい。

$\frac{d\mathbb{x}}{dt}=A\mathbb{x}+\begin{pmatrix}-2e^{4t}\\ e^{4t}\end{pmatrix}$　$\mathbb{x}_{(0)}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ とする。

(4) 上記の線形微分方程式を解きなさい。