物理学 A 超特急

Anonymous Coward

2006 年 7 月 16 日

本稿では物理学 A の内容のうち「物理」の部分を主に扱っているため,「数学」の部分 (微分方程式の解法など) についてはほとんど触れていないことをあらかじめお断りしておく.

1　力学の目的

$\Longrightarrow$ 着目対象の**未来予測**：物体の位置を 時間の関数 で表すこと
$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{r}(t)$ の導出

1.1　目的を達するための普遍的規則性 = $\boxed{\textbf{法則}}$

力学では唯一・・・**運動方程式**

$$\boxed{\text{内界の運動量の時間的変化率} = \text{外界から流入する力}}$$

数式で表現すれば,

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \quad \Longleftrightarrow \quad m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$：**運動量**ベクトル，$\boldsymbol{F}$：**外力**である.

2　問題解決の手順

1. 着目対象の設定，状況の図示：簡単な状況でも必ず図を描く.
2. 座標設定：座標をどう取るかは**任意**.
3. 力の数え上げ：着目物体に働く力を**漏れなく**数え上げる. $\boxed{\text{最重要}}$
4. 運動方程式の立式：符号に気を付けながら各成分ごとに式を立てる.
5. 運動方程式を解く：初期条件，束縛条件を加味しつつ機械的に微分方程式の解を求める.

1.〜4. が物理の内容．5. は数学．運動方程式を正確に立式出来た時点で物理は終了.

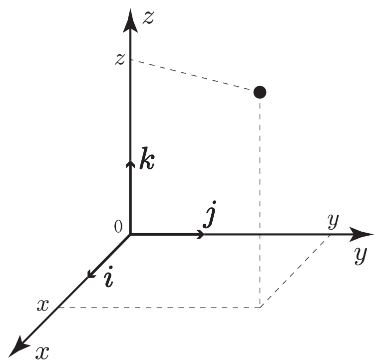
2.1 座標設定

座標（対象を観察するための**目盛り**）は我々観測者が任意に[1]設定できる．運動方程式は，座標系の**各成分ごとに独立した連立微分方程式**として記述される．

$\Longrightarrow$ 普通は直交座標系を用いるが，場合によっては極座標系を導入することもある．

直交座標系

直交座標系における任意の点 (x, y, z) における位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は，x, y, z 各方向成分の単位ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いて



$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

と表されるので，結局，運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

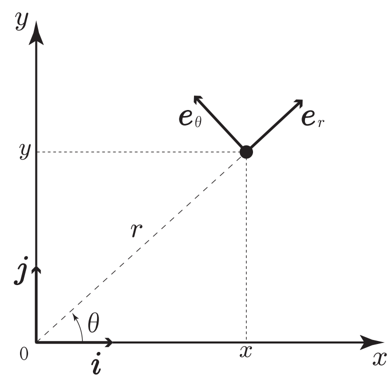
$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = F_x & (x\text{ 成分}) \\ m\ddot{y} = F_y & (y\text{ 成分}) \\ m\ddot{z} = F_z & (z\text{ 成分}) \end{cases}}$$

となる．

極座標系 (二次元の場合)

極座標では粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向に単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ を，$\boldsymbol{r}$と基準となる線 (始線)[2]とのなす角を θ としたときに，θ が増える方向に単位ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ を取る．

直交座標系との対応は



$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} \end{cases}$$

となる．

これより

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \quad , \quad \boldsymbol{e}_\theta = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r}$$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \\ \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

[1] 任意といっても，座標は「ものさし」であるから通常は**静止**していなければならない．仮に運動する座標系から観察した場合，現実には存在しない「みかけの力」(**慣性力**) が働くことがある．

[2] ここでは始線は x 軸に一致しているものとして考える．

となるので，結局，運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = (F_r, F_\theta)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r & (r\text{ 成分}) \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta & (\theta\text{ 成分}) \end{cases}}$$

となる．

2.2 非慣性系とみかけの力

先の脚注にも述べたように，「ものさし」である座標系は通常静止していなければならない．

$\Longrightarrow$ 加速度運動する座標系から観察すると，**座標系の加速度方向とは逆向き**に慣性力という「みかけの力」が生じる．

ガリレイ変換

O：静止，O'：運動　と座標系を設定し，右図のように記号を定める．

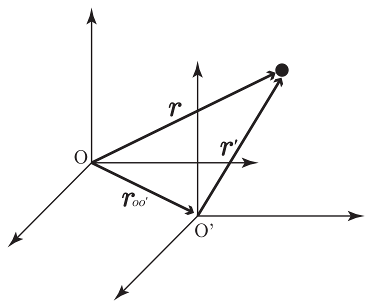
このとき

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{oo'} + \boldsymbol{r}' \qquad \therefore \ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_{oo'} + \ddot{\boldsymbol{r}}'$$

となるので，運動方程式は，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \quad \Longleftrightarrow \quad m(\ddot{\boldsymbol{r}}_{oo'} + \ddot{\boldsymbol{r}}') = \boldsymbol{F}$$

$$\therefore \boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{F} \underbrace{-m\ddot{\boldsymbol{r}}_{oo'}}_{\text{慣性力}}}$$



と書き換えることが出来る．

2.3 力の数え上げ

力には

1. 空間から受ける力　(e.g. 重力場，電場，磁場からの力)
2. 着目物体の表面付近に存在する外界の原子から受ける力　(e.g. 抗力，弾性力，張力)

の**二種類**しか存在しない．力を数え上げるときは，1. → 2. の順で数え上げると間違いが少ない．

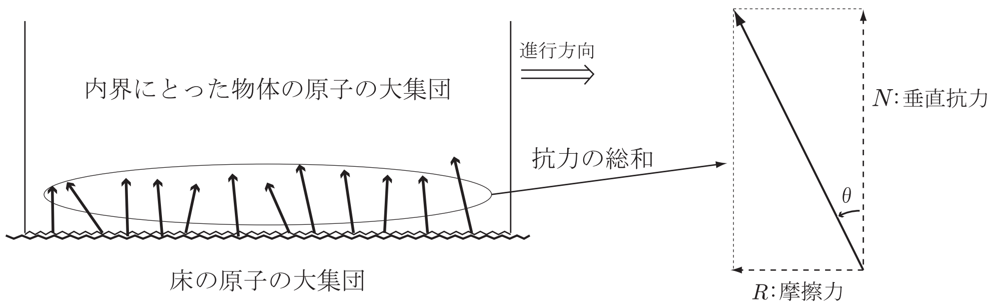
抗力に関する補足

抗力とは床の原子の大集団との接触による斥力の総和であり，その接平面平行成分を**摩擦力**R，接平面垂直成分を**垂直抗力**N と呼ぶ．

1. 次図の θ(接平面垂直方向からの傾き) には**最大値**が存在する．

$$\theta_{\max}\text{存在} \Longrightarrow \tan\theta_{\max}\text{存在}$$

$$\therefore \boxed{\tan\theta = \frac{R}{N} \leqq \tan\theta_{\max} \equiv \mu \qquad (\mu\text{：}\textbf{静止摩擦係数})}$$



2. 動き始めると，抗力の傾き θ は**経験的に等しいとしてよい**ことが知られている．

$$\boxed{\frac{R}{N} \cong \tan\theta' \equiv \mu' \qquad (\mu' : \textbf{動摩擦係数})}$$

3. 物体が地面から浮き上がるときは，垂直抗力が 0 となる．

$$\boxed{N = 0 \qquad (\text{浮き上がる条件})}$$

3 最低限理解しておくべき各種の関係式

3.1 運動量保存の定理

ある量が時間的に一定であることを**保存**という．

$\boxed{\text{外力が働かないとき，運動量は保存する．}}$ (運動量保存の定理)

<u>略証</u>

外力が $\mathbf{0}$ より，運動方程式は $d\boldsymbol{p}/dt = \mathbf{0}$ となる．

いま，各成分すべてにおいて微分してゼロであるということは，<u>運動量ベクトルの各成分が時間的に一定</u>であることと同値である．したがって，$\boldsymbol{p}$(運動量ベクトル) は時間的に一定，すなわち保存する．

3.2 運動量と力積の関係

運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

の両辺をある時刻 t_1 から t_2 で積分する．

$$(\text{左辺}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} dt = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1)$$

$$(\text{右辺}) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt \qquad (\textbf{力積}(\text{力の時間積分}) \text{ と定義})$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} dt} \iff \boxed{\text{運動量の変化は力積に等しい}}$$

3.3 仕事

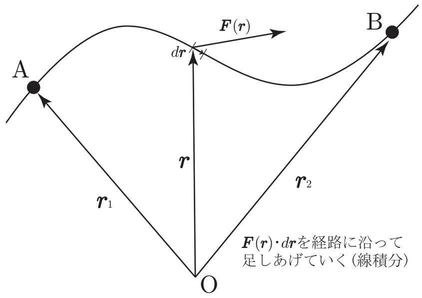
一定の力 $\boldsymbol{F}$ のもとで一定ベクトル $\boldsymbol{d}$ だけ直線にそって移動させたとき，力のなした**仕事**は $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{d}$ と定義された．

より一般には，

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}}$$

と定義される．

すなわち，A から B まで移動させたときに力がする仕事は，**経路に沿った力の内積積分 (線積分)** である．



具体的な計算方法

線積分として定義される仕事は，具体的にどう計算すればよいのであろうか．

$$\begin{aligned}
\int F(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} &= \int (F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz) \\
&= \int F_x(x,y,z)dx + \int F_y(x,y,z)dy + \int F_z(x,y,z)dz
\end{aligned}$$

とすれば，$\underline{x, y, z \text{ 各成分ごとに独立に計算して足せばよい}}$ ことがわかる．さらに，任意の空間曲線は唯一のパラメータ s を用いて表示できるという事実を利用すると，

$$\begin{aligned}
&= \int_{s_1}^{s_2} F_x(x(s), y(s), z(s))\frac{dx}{ds}ds \\
&+ \int_{s_1}^{s_2} F_y(x(s), y(s), z(s))\frac{dy}{ds}ds \\
&+ \int_{s_1}^{s_2} F_z(x(s), y(s), z(s))\frac{dz}{ds}ds \\
&= \int_{s_1}^{s_2} f(s)ds \qquad \left(f(s) = F_x(s)\frac{dx}{ds} + F_y(s)\frac{dy}{ds} + F_z(s)\frac{dx}{ds}\right)
\end{aligned}$$

と，$\underline{\text{パラメータ } s \text{ に関する定積分に帰着させる}}$ こともできる．

各成分ごと計算するかパラメータに帰着させるか，どちらの方法を用いるかは自由だが，後者の方法を実際に採用できる場合は円軌道などごく特殊な場合に限られるだろう．

3.4 保存力とポテンシャル

すべての力は先に定義した仕事に関して 2 種類に分類される．

$$\boxed{\text{力}\begin{cases}\textbf{保存力}\ \cdots\ \text{仕事が } \underline{\text{経路に依らない}} \text{ ような力} \\ \textbf{非保存力}\cdots\ \text{保存力でない力}\end{cases}}$$

さらに，力が $\underline{\text{保存力}}$ であるとき，**ポテンシャルエネルギー**$U(\boldsymbol{r})$ は次式で定義される．

$$\boxed{U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}} \qquad (\boldsymbol{r}_0 \text{ は}\textbf{基準点}\text{であり } U(\boldsymbol{r}_0) = 0 \text{ を満たす．})$$

この定義式より，

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{AB}} &= \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_0} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} - \left(\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \right) \\
&= U(\boldsymbol{r}_1) - U(\boldsymbol{r}_2) = -(U(\boldsymbol{r}_2) - U(\boldsymbol{r}_1))
\end{aligned}
$$

$\iff$ $\boxed{\boldsymbol{r}_1 \text{ から } \boldsymbol{r}_2 \text{ まで動かしたときの仕事 } W_{\mathrm{AB}} \text{ は，ポテンシャルエネルギーの差の符号逆である．}}$

保存力とポテンシャルに関する定理

1. $\boldsymbol{F}$ が保存力のとき，

   $$\boxed{\boldsymbol{F} = -\nabla U = -\mathrm{grad}\, U} \qquad (\overset{\text{ナブラ}}{\nabla}\text{：ベクトル型偏微分演算子})$$

   が成り立つ．

   すなわち，**力はポテンシャルの下り勾配**である．

2. ある力 $\boldsymbol{F}$ が保存力であるかどうかを判定する公式

   $$\boxed{\boldsymbol{F} \text{ が保存力} \quad \iff \quad \nabla \times \boldsymbol{F} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}}$$

3.5 エネルギーと仕事の関係

運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$$

の両辺に，$\dot{\boldsymbol{r}}$ を内積としてかけると，

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \quad \iff \quad \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{r}}^2 \right)}_{\textbf{運動エネルギー}} = \underbrace{\boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}_{\textbf{仕事率}}$$

と変形できる．

ここで運動エネルギーを $T(t) = 1/2m\dot{\boldsymbol{r}}^2$ として，両辺をある時刻 t_1 から t_2 で積分すると，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt = T(t_2) - T(t_1) \equiv T_2 - T_1 \\
(\text{右辺}) &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = W_{12}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \boxed{T_2 - T_1 = W_{12}} \quad \iff \quad \boxed{\text{運動エネルギー変化は働いた力のなした仕事に等しい}}$$

ここまでは すべての力 $\boldsymbol{F}$ について成り立つ．

力学的エネルギー保存の定理

さらに，力 $\boldsymbol{F}$ が保存力 であったときは，仕事はポテンシャルを用いて $W_{12} = -(U_2 - U_1)$ とかけることから，

$$T_2 - T_1 = W_{12} = -(U_2 - U_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \equiv E} \qquad (E\text{：\textbf{全エネルギー}})$$

$$\therefore \boxed{\text{保存力場では全エネルギーは保存する}}$$

逆に言えば,「全エネルギーが保存するような力が保存力である」ということも出来る.

確認

保存力場においては全エネルギー E が保存することを確認しよう.

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + U(\boldsymbol{r})\right) = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{dU(\boldsymbol{r})}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{dU(x,y,z)}{dt} \\
&= m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) \qquad (\because \text{合成関数の微分}) \\
&= m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \nabla U\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \\
&= (m\ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla U)\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \\
&= (m\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F})\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \qquad (\because \boldsymbol{F} = -\nabla U) \\
&= \boldsymbol{0}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} \qquad (\because m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

より，確かに E は保存する.

3.6 １次元ポテンシャルでのつりあいの安定性

１次元では，位置の関数として定まる力 ($F(x)$ と表現できる力) はすべて保存力 である.
このときポテンシャルは

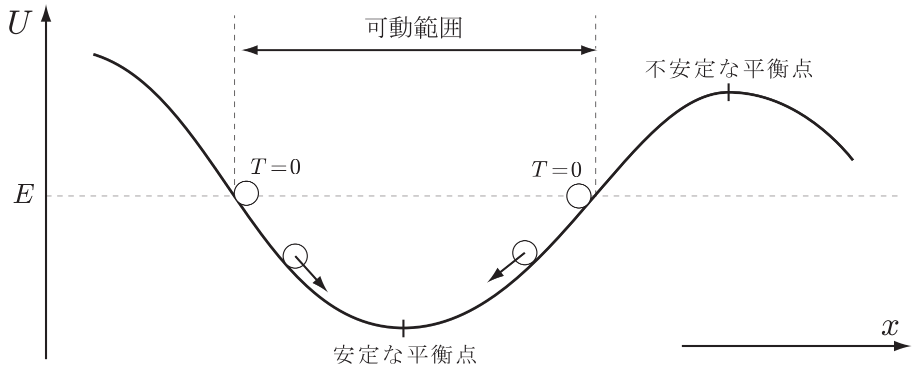
$$F(x) = -\frac{dU}{dx} \quad \Longleftrightarrow \quad F(x)\text{ は }U-x\text{ グラフの傾きの符号逆}$$

$$\therefore U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx \quad , \quad U(x_0) = 0$$

とかける．また，全エネルギーは

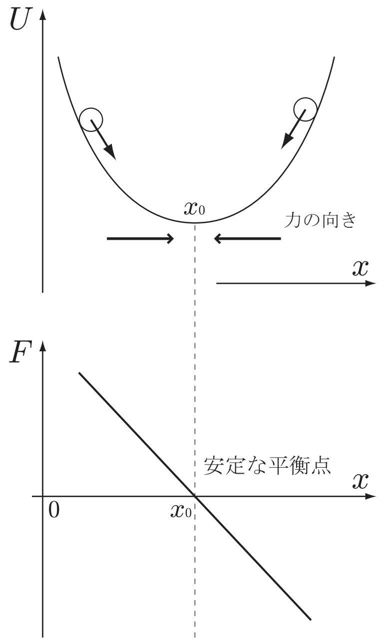
$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x)$$

である.



$U-x$ グラフをジェットコースターの軌道にみたてれば，ある点において粒子がどちら向きに力を受けるのかが容易に想像できる．

安定なつりあい



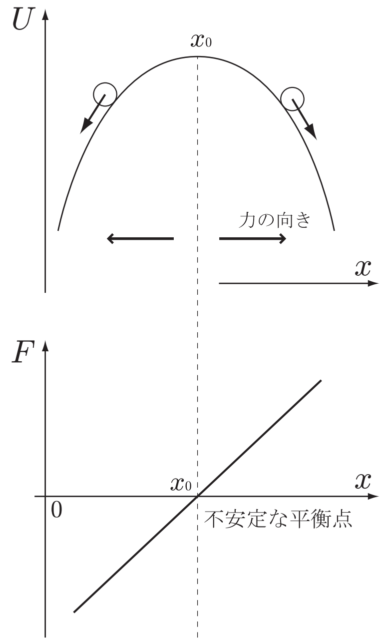
$x=x_0$ から離れると・・・

$U_{\mathrm{up}} \implies T_{\mathrm{down}}$ (勢いが衰える)

$(\because T+U\equiv E)$

$\implies x=x_0$ に近づく方向に力が向く：$\boxed{\text{引力}}$

不安定なつりあい



$x=x_0$ から離れると・・・

$U_{\mathrm{down}} \implies T_{\mathrm{up}}$ (勢いが増す)

$(\because T+U\equiv E)$

$\implies x=x_0$ から遠ざかる方向に力が向く：$\boxed{\text{斥力}}$