

1 関数 $f(x) = \sin(2x)$ のマクローリン展開 (すなわち, $x=0$ におけるテイラー展開) を求めよ. ただし, $\sin x$ のマクローリン展開は既知としても良い.

2

(1) 関数 $f(x, y) = \frac{1-xy}{1+2x^2}$ に対し, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を計算せよ.

(2) 関数 $g(x, y)$ は, $g_x = x$, $g_y = y$ をみたす. このとき, $\frac{d}{dt}g(1 + \cos t, \sin t)$ を計算せよ.

敵の演習

3 次の極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) + ae^{-2x} + bx}{x^2}$$

が存在するように定数 a, b を決定し, そのときの極限の値を求めよ.

事前公開

4 自然対数 e が 3 より小さいことを証明せよ.

5 一般に, 全微分可能な多変数関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ はどの変数 x_1, \dots, x_n に対しても偏微分可能であるが, その逆は必ずしも成り立たない. 以下の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

について, 以下の (1)(2)(3) を証明せよ.

- (1) f は原点 $(0, 0)$ において連続.
- (2) f は原点において x, y について偏微分可能.
- (3) f は原点において全微分可能ではない.