

6/2 問題 $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を、グラム-シュミットの方法で正規直交化せよ。

解) $w_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$w_2 = x_2 - \frac{(w_1, x_2)}{(w_1, w_1)} w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = x_3 - \frac{(w_1, x_3)}{(w_1, w_1)} w_1 - \frac{(w_2, x_3)}{(w_2, w_2)} w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{9}{18} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

答. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

関連問題

(1) 与えられたベクトル x_1, x_2, \dots, x_r が 1 次従属だとすると、グラム-シュミットの方法を行なうと何が起るかを考えてみよ。

(2) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, x$ が \mathbb{R}^3 の正規直交基底となるようなベクトル x を求めよ。