1/1

数学A4 春学期末試験問題

（担当 ： 石井） 2012年7月23日（月）6時限

試験時間90分　持ち込み不可　答案用紙2枚　計算用紙1枚（回収不要）

[1] 次の行列式の値を求めよ。（計算過程も示すこと）

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

[2] 次の行列が正則であることを示し、その逆行列を求めよ。（計算過程も示すこと）

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[3]

(1) 3次行列の行列式の「交代性」および「多重線形性」とはどのような性質であるかを答えよ。（証明は不要）

(2) 行列式の交代性、多重線形性は既知として、次の (a), (b) に答えよ。

(a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ が1次従属であるとき、$\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$ であることを示せ。

(b) 未知数 x_1, x_2, x_3 に関する連立1次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \left(A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right)$$

が解 x_1, x_2, x_3 を持てば、その解は

$$x_1 \cdot |A| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 \cdot |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 \cdot |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

を満たすことを示せ。

[4] 次の連立1次方程式は解をもつか？　解があれば、それを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

[5] ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ および行列 A を、

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

とする。

(i) A の行列式の値 $|A|$、および階数 $r(A)$ を求めよ。

(ii) $\vec{d} = \begin{pmatrix} t \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ とするとき、$\vec{d}$ が $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の1次結合となるように t を定めよ。また、その定めた値以外の t について、$\vec{d}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の1次結合ではないことを示せ。

(iii) 斉次連立1次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解を求めよ。

(iv) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。このとき、$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、方程式 $A\vec{x} = \vec{f}$ を満たすことを示せ。

(v) 上の (iii), (iv) の結果より、$A\vec{x} = \vec{f}$ の解を求めよ。

[6] $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$　$\left(\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}\right)$ とし、$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする。

(i) $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$, $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}] \neq 0$, $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{c}] = 0$ であるとき、連立1次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ は解を持たず、$A\vec{x} = \vec{c}$ は解を持つことを示せ。

(ii) またこのとき、$A\vec{x} = \vec{c}$ の解の自由度はいくつか。

$y = -\frac{1}{5} - s - \frac{2}{5}t$

$x = -3y - 4s - 3t$

$= \frac{3}{5} + 3s + \frac{6}{5}t$

$-4s - 3t$

$= -s - \frac{9}{5}t + \frac{3}{5}$