[1] 各ベクトルを次のように定めるとき、下の問いに答えよ。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ c \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が対称行列になるような a の条件を求めよ。

(2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{f}$ が直行するような a の条件を求めよ。

(3) $\boldsymbol{b}\ \boldsymbol{d}\ \boldsymbol{f}$ が一次従属になるような b,c の条件を求めよ。

(4) $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の生成系になるような a の条件を求めよ。

(5) $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ が直行行列となるような a,b,c の条件を求めよ。

(6) $\mathrm{Span(b, c, d)}$ の次元が 2 となるような a,b,c の条件を求めよ。

[2]

(1) 次の 2 つの条件をともにみたす n 次行列 $A = (a_{ij})$ を確率行列という。

・行列の全ての成分が 0 以上

・各行の成分の和が 1、つまり、任意の $1 \leqq i \leqq n$ に対して、$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$

このとき、(i),(ii) の問いに答えよ。

(i)$\boldsymbol{x}$ をすべての成分が 1 である n 次ベクトルとする。確率行列の各行の成分の和が 1 であることを示す式を A と $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ。

(ii)A, B が確率行列であるとき、積 AB も確率行列であることを示せ。

(2)$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき、$\displaystyle\lim_{n \to \infty} A^n \boldsymbol{p}$ を求めよ。(過程も書くこと。)

[3] 線形写像 $L : V^3 \to V^4$ に対して次の条件をみたすとき、L を表す行列を求めよ。

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \quad L\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

[4] $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が、$A^2 = I$ をみたすとき、次の問いに答えよ。

(1) $\det A = \pm 1$ を示せ。

(2) A の固有値は 1 または -1 であることを示せ。

(3) $\det A = -1, a_{11} = a, a_{12} = 1$ をみたす A をすべてあげよ。

[5] $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値および固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列または $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ となる行列 P を 1 つ求めよ。

[6] $A = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 30 & -13 \end{pmatrix}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値、固有ベクトルをすべて求めよ。

(2)$P^{-1}AP$ が対角行列となるような行列 P と $P^{-1}AP$ を求めよ。

(3)$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ の基本行列を求めよ。

(4)$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} -e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}$ の解で、初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をみたすものを求めよ。