

## 数学2B 第2回（線形部分空間の基底と次元）

2019年10月1日（火）

担当：南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

### 前回演習問題の略解

問題 1-1.(1), (3) は線形部分空間（証明略）。

(2) は線形部分空間ではない。反例： $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in A_2$  だが  $\lambda = 3$  とすると  $\lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \notin A_2$ 。

問題 1-4.  $\dim \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = 1$  ならば  $\mathbf{a}_1$  は  $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  の基底であるから、 $\mathbf{a}_2$  は  $\mathbf{a}_1$  の定数倍でなければならない。よって  $a = 2$ 。

### 演習問題

「宿題」と書かれた問題の答えを OCR 対応用紙に記し、次回の講義時に提出しなさい。

問題 2-1. 次のベクトルによって生成される線形部分空間の次元と基底を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

問題 2-2. 1 次方程式  $-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0$  の解空間の基底と次元を求めよ。

問題 2-3.  $\mathbb{R}^4$  の線形空間  $U, W$  が次のように定義されているとき、 $U, W, U \cap W, U + W$  の基底と次元を求めよ。

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x = 2y \\ z = w \end{array} \right\}, \quad W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x + 2y + 4z = 0 \\ y + 2z - w = 0 \end{array} \right\}$$

問題 2-4(宿題)。

(1)

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -8 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

の基底と次元を求めよ。

(2)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -5 & 10 \\ -1 & 1 & -4 & 15 \end{bmatrix}$  に対し  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解空間の基底および次元を求めよ。