15点 5×3

問題 1　a, b, c が互いに異なる数であるとき，次の連立方程式の解を求めなさい（ヒント：クラメールの公式）.

$$\begin{aligned} x+ \quad y+ \quad z &= 1 \\ a\,x+ \quad b\,y+ \quad c\,z &= d \\ a^2x+ \quad b^2y+ \quad c^2z &= d^2 \end{aligned}$$

$$g(a,b,c) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

とすると

$$x = \frac{g(d,b,c)}{g(a,b,c)} = \frac{(d-b)(c-d)}{(a-b)(c-a)}$$

$$y = \frac{g(a,d,c)}{g(a,b,c)} = \frac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)}$$

$$z = \frac{g(a,b,d)}{g(a,b,c)} = \frac{(b-d)(d-a)}{(b-c)(c-a)}$$

5×4 20点

問題 2　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ について，次の問いに答えなさい.

(1) 行列式 $|A|$ を求めなさい.

(2) 余因子行列 $\mathrm{adj}A$ を求めなさい.

(3) A が正則かどうか調べ，正則であれば逆行列 A^{-1} を求めなさい.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -15$

(2) $$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 6 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) $\det A \neq 0$ なので 正則

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -6 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

問題 3　写像 $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ はベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ を用いて

20点 10×2

$$f_a(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x} + \frac{2(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}$$

と定義される.

(1) 写像 f_a が線形写像であることを示しなさい.

任意の $x, y \in \mathbb{R}^3$，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f_a(\lambda x + \mu y) &= -(\lambda x + \mu y) + \frac{2(\lambda x + \mu y, a)}{(a,a)} a \\ &= -\lambda x + \lambda \frac{2(x,a)}{(a,a)} a - \mu y + \mu \frac{2(y,a)}{(a,a)} a \\ &= \lambda f_a(x) + \mu f_a(y) \end{aligned}$$

よって f_a は線形写像である.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ とするとき、f_a の表現行列 A を求めなさい。

$$f(e_1) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{12}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

同様にして

$$f(e_2) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f(e_3) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

よって

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

10点

問題 4　行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{bmatrix}$ の階数を求めなさい.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1-x^2 & x(1-x^2) \\ 0 & x(1-x^2) & 1-x^4 \end{bmatrix} (*)$$

・$x = \pm 1$ のとき

$$(*) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ 階数1

・$x \neq \pm 1$ のとき

$1-x^2 \neq 0$ なので第2行と第3行を $1-x^2$ で割る

$$(*) \to \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 階数3

答え. $x = \pm 1$ のとき 階数1

$x \neq \pm 1$ のとき 階数3

問題 5　$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,　20点　5×2, 10

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-z \\ x+3y+2z \\ x+4y+3z \\ y+z \end{bmatrix}$$

について，次の問いに答えなさい．

(1) f の像空間 $\mathrm{Im} f$ の基底と次元を求めなさい．

(2) f の核空間 $\mathrm{Ker} f$ の基底と次元を求めなさい．

(3) $\mathbb{R}^4$ の線形空間 U が

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} 3x-2y+z+10w=0 \\ 2x-3y-z+5w=0 \end{array} \right\}$$

と定義されているとき，線形空間
$\mathrm{Im}(f)+U = \{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \in \mathrm{Im} f,\ \boldsymbol{u} \in U\}$
の基底と次元を求めなさい．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Imf の基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$　次元 2

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kerf の基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$　次元 1

(3) U の基底を求める

$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

基底 $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathrm{Im} f + U = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

この基底を求める．

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

次元 3

15点

問題 6　次の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ をシュミットの方法で正規直交化しなさい．

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$u_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{4}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{10}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

正規直交化

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$