問 1: 次の極限を求めよ．ただし $n \in \mathbf{N}$ $(n \geq 1)$ とする:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x}$$

問 2: 関数 $f(x)$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x = 1), \\ \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x - 1} & (x \neq 1) \end{cases}$$

とおく．もし $a, b, c \in \mathbf{R}$ が

$$a + b + c = -1, \quad 2a + b = -2$$

を満たせば, $f(x)$ は $x = 1$ で連続であることを示せ.

問1

$x = \frac{1}{t}$ とおくと、$x \to \infty$ と $t \to +0$ は同値．また、$\dfrac{(\log x)^n}{x} = \dfrac{(-1)^n \log t}{\frac{1}{t}}$ となる.

今 $\frac{1}{t}$, $-\log t \to \infty$ $(t \to +0)$、$\left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2} \neq 0$ と

$$\lim_{t\to+0} \frac{(-\log t)'}{\left(\frac{1}{t}\right)'} = \lim_{t\to+0} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to+0} t = 0$$

が成り立つので、ロピタルの定理より

$$\lim_{t\to+0} \frac{-\log t}{\frac{1}{t}} = 0.$$

したがって

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = \lim_{t\to+0} \frac{(-1)^n \log t}{\frac{1}{t}} = 0.$$

問2

$a + b + c = -1$ から $x^3 + ax^2 + bx + c \to 0$ $(x \to 1)$ となる．また、

$(x-1)' = 1 \neq 0$ と $2a + b = -2$ から

$$\lim_{x\to1} \frac{(x^3 + ax^2 + bx + c)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to1} \frac{3x^2 + 2ax + b}{1} = 3 + 2a + b = 1.$$

ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x - 1} = \lim_{x\to1} \frac{(x^3 + ax^2 + bx + c)'}{(x-1)'} = 1 = f(1).$$

これより $f(x)$ は $x = 1$ で連続.