

平成30年2月2日(金) 2日時間実施 (90分)

数学 4 B 期末試験問題

(一斉)

亀谷 幸生 ・ 栗原 将人

2017 年度 秋学期

回答欄には、答だけでなく、計算の過程も(回答欄のスペースの範囲内で)書くこと。

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 & 1 \\ 2 & y & -1 & -4 \\ 1 & z & 1 & -1 \\ 0 & w & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ を

$$\det A = px + qy + rz + sw$$

と書くとき、 p, q, r, s の値を求めよ。

2. a を実数として、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2-a & 2 & 2-a \\ a-1 & -1 & a \end{pmatrix}$ とおく。

(1) A の固有多項式と固有値を求めなさい。

(2) A が対角化可能かどうか、 a の値で分類することにより、判定しなさい。判定するときには、理由をつけて判定すること。

3. $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような回転行列 P をひとつ求めなさい。
また、そのときの $P^{-1}AP$ を求めなさい。

(2) 2 次曲線

$$f(x, y) = 10x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$$

の概形を書きなさい。ただし、長軸、短軸を表す直線の方程式も求めること。

4. 2 次形式

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 4zx$$

を考える。

- (1) $f(x, y, z) = (x \ y \ z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ をみたす実対称行列 A を求め、その固有値を求めなさい。

- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P をひとつ求めなさい。
また、そのときの $P^{-1}AP$ を求めなさい。

- (3) 2 次曲面 $f(x, y, z) = 1$ の名称を述べ、固有ベクトルによって定まる座標軸と 2 次曲面の概形を書きなさい。

5. A を n 次正則行列とする。

- (1) A は 0 を固有値に持たないことを証明しなさい。

- (2) Δ_{ij} を (i, j) 余因子とし、余因子行列 $\text{adj}A$ を

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

で定義する。 $(\text{adj}A)A$ を求めなさい (答のみでよい)。

- (3) $\text{adj}A$ が正則であることを証明しなさい。

- (4) $B = \text{adj}A$ とおき、 $\text{adj}B$ を B の余因子行列とする。 B を A を使って書きなさい。

6. t の関数 $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ に関する微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

の解で、初期条件 $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$ をみたすものを求めなさい。

以上