数学２Ｂ　第１回の演習問題の解答例

問： 次の集合は部分空間となるか．また部分空間である場合はその基底を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\}$$

$$W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 \geq 0,\ x_2 = 0 \right\}$$

解答例：

- $\underline{W_2\ は部分空間である.}$(a) $\mathbf{0} \in W_1$ (b) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1$ ならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1$ (c) $\boldsymbol{x} \in W_1$，$\lambda \in \mathbf{R}$ ならば $\lambda\boldsymbol{x} \in W_1$ であることを示せばよい．$\mathbf{0}$ は $x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ 2x_2 + 3x_3 = 0$ を満たすので，(a) が成立する．$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in W_1$ に対して，

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_2 + 3x_3 = 0 \tag{1}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad 2y_2 + 3y_3 = 0 \tag{2}$$

  が成立するが，これらより，

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0, \quad 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) = 0$$

  となるので $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W_1$ となり，(b) が成立する．$\boldsymbol{x} \in W_1$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ とする．(1) より，

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 0, \quad 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3 = 0$$

  となるので $\lambda\boldsymbol{x} \in W_1$ となり，(c) が成立する．
  また $\boldsymbol{a} =^t (1, -3, 2)$ としたとき，$W_1 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}\}$ であることを示す．すなわち,($\{\boldsymbol{a}\}$ は１次独立なので) $\{\boldsymbol{a}\}$ は W_1 の基底である．$\lambda \in \mathbf{R}$ に対し，$\lambda\boldsymbol{a}$ は W_1 を定義する２本の等式を満たすので，$\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}\} \subseteq W_1$ である．一方，W_1 は連立１次方程式の解全体で，これを解けば良い．第２式 $2x_2 + 3x_3 = 0$ を満たすためには，$x_3 = 2t$(t は任意の実数) としたとき $x_2 = -3t$ でなければならない．さらに $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ を満たすように x_1 を定めると $x_1 = t$ となる．すなわち，W_1 の要素は ${}^t(t, -3t, 2t)$ と表現でき，これは $\mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}\}$ に含まれるので，$W_1 \subseteq \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}\}$ である．以上より，$W_1 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{a}\}$ が示せた．

- $\underline{W_2\ は部分空間ではない.}$なぜならば，$\mathbf{0} \notin W_2$ である．

- $\underline{W_3\ は部分空間ではない.}$なぜならば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_3$ であるが，$-1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_3$ である．