1. (20 点) 次の極限を求めよ (答えを導く説明も書くこと).

(1) $\lim_{x\to\infty} x^a e^{-x}$. ただし，$a>0$ とする.

(2) $\lim_{x\to 1+0} x^{\frac{1}{x-1}}$.

(3) $\lim_{x\to 1+0} \dfrac{f(x)}{x-1}$. ただし，$f:(1,\infty)\to \mathbf{R}$ は $(1,\infty)$ 上微分可能かつ $\lim_{x\to 1+0} f(x)=\alpha\in\mathbf{R}$, $\lim_{x\to 1+0} f'(x)=\beta\in\mathbf{R}$ とする.

(1) 本来は $a\in\mathbf{R}$, $a>0$ という問題だが $a\in\mathbf{N}$ としても良いとしている.

$k-1<a\le k$ となる $k\in\mathbf{N}$ をとり，$x^a e^{-x}=x^a/e^x$ として k 回ロピタルを使うと

$$0=\lim_{x\to\infty} a(a-1)\cdots(a-k)x^{a-k}e^{-x}=\lim_{x\to\infty} a(a-1)\cdots(a-k+1)x^{a-k+1}e^{-x}=\cdots=\lim_{x\to\infty} x^a e^{-x}.$$

(2) $\log(x^{1/(x-1)})=(x-1)^{-1}\log x$ よりこの関数に対してロピタルを使うと

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{\log x}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x}=1.$$

したがって，$\lim_{x\to 1+0} x^{1/(x-1)}=e$.

(3) $\alpha=0$ の場合だけロピタルを使えば

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)}{x-1}=\begin{cases} +\infty & (\alpha>0),\\ \beta & (\alpha=0),\\ -\infty & (\alpha<0).\end{cases}$$

2. (20 点) 次の関数は原点で連続かどうかを判定し，その証明を与えよ．

(1) $f(x,y) := \dfrac{xy}{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}$ $(\ (x,y) \neq (0,0)\ )$, $f(0,0) := 0$.

(2) $f(x,y) := \dfrac{x^3+\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}$ $(\ (x,y) \neq (0,0)\ )$, $f(0,0) := 0$.

(1) 連続. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とすると $r \to 0$ と $(x,y) \to (0,0)$ は同値であり

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq \frac{r^2}{\sin(r)}, \quad \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{\sin r} = \lim_{r\to 0}\frac{r}{\sin r}r = 0.$$

挟み撃ちの原理より $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

(2) 不連続. 例えば $x_n = y_n = n^{-1}$ とすると $(x_n, y_n) \to (0,0)$ となるが

$$f(x_n, y_n) = \frac{n^{-3}+n^{-1}}{2n^{-2}} = 2^{-1}n^{-1} + 2^{-1}n \to \infty \neq f(0,0).$$

3. **(10 点)** 次の関数の 1 階と 2 階偏導関数を全て求めよ:

$$f(x_1,\dots,x_n) := \log\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) = \log\left(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right).$$

$$f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2}\log\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)$$

に注意すると

$$f_{x_i} = \frac{x_i}{x_1^2+\cdots x_n^2}$$

かつ

$$f_{x_ix_j} = \frac{\delta_{ij}}{x_1^2+\cdots x_n^2} - \frac{2x_ix_j}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2+\cdots x_n^2} - \dfrac{2x_i^2}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^2} & (i=j), \\ -\dfrac{2x_ix_j}{(x_1^2+\cdots x_n^2)^2} & (i\neq j). \end{cases}$$

4. (25 点) $\alpha \in \mathbf{R}$ を 1 つ固定し, $x \neq 0$ に対して

$$f(x) := x^{-4}\left(e^{\alpha x} - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)$$

とおく．ただし，$b_i \in \mathbf{R}$ とする．

(1) 極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ が実数 ($\pm\infty$ は含まれない) として存在するためには n, b_i がどのような条件を満たさないといけないかを求めよ.

(2) $f(x)$ が $x = 0$ において連続となるためには，$f(0), n, b_i$ がどのような条件を満たさないといけないかを求めよ.

(3) $f(x)$ が $x = 1$ において微分可能となるための条件と $f'(0)$ を求めよ.

(1)

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{6} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} + R_4(\alpha x), \quad \lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{x^4} = 0$$

より $n \geq 3$ ならば

$$f(x) = x^{-4}(1-b_0) + x^{-3}(\alpha - b_1) + x^{-2}\left(\frac{\alpha^2}{2} - b_2\right) + x^{-1}\left(\frac{\alpha^3}{6} - b_3\right)$$
$$+ \frac{\alpha^4}{24} + x^{-4}R_4(\alpha x) + \sum_{i=4}^{n} b_i x^{i-4}.$$

$R_4(\alpha x)/x^4 \to 0$ ($x \to 0$) に注意すると求める条件は

$$n \geq 3, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = \alpha, \quad b_2 = \frac{\alpha^2}{2}, \quad b_3 = \frac{\alpha^3}{6}.$$

($\alpha = 0$ の場合は $n \geq 0$, $b_0 = 1$, $b_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) であれば良いが，これは特別な場合かつ上の解答にも実質含まれているので点数は与えない．以下同様.)

(2) (1) の条件に加え

$$n = 3 \text{ のときは } f(0) = \frac{\alpha^4}{24}, \, n \geq 4 \text{ のときは } f(0) = \frac{\alpha^4}{24} - b_4 \ .$$

(3) (2) の条件に加え,

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{6} + \frac{\alpha^4 x^4}{24} + \frac{\alpha^5 x^5}{120} + R_5(\alpha x), \quad \lim_{x\to 0}\frac{R_5(x)}{x^5} = 0$$

から

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \dfrac{\alpha^5}{120} + \dfrac{R_5(\alpha x)}{x^5} & (n = 3, 4) \\ \dfrac{\alpha^5}{120} - b_5 + \dfrac{R_5(\alpha x)}{x^5} & (n = 5), \\ \dfrac{\alpha^5}{120} - b_5 + \dfrac{R_5(\alpha x)}{x^5} + \displaystyle\sum_{i=6}^{n} b_i x^{i-5} & (n \geq 6). \end{cases}$$

したがって，求める条件は (2) 同じで

$$f'(0) = \frac{\alpha^5}{120} \quad (n = 3, 4), \quad f'(0) = \frac{\alpha^5}{120} - b_5 \quad (n \geq 5).$$

5. (20 点) 関数 $h(t) \in C^2((0,\infty))$ と $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ ($(x,y,z) \neq (0,0,0)$) に対して

$$f(x,y,z) := h\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

とおく.

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ を h を用いて表せ.

(2) $\Delta f(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)$ を h を用いて表せ.

(3) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ としたとき，$\Delta f(x,y,z)$ を求めよ.

(1)

$$\begin{aligned}
f_x &= h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\
f_y &= h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\
f_z &= h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{h''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
f_{yy} &= \frac{h''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\
f_{zz} &= \frac{h''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)z^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

より

$$\Delta f = f_{xx}+f_{yy}+f_{zz} = h''\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{2h'\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(3) $h(r) = r^{-1}$ となるので $h'(r) = -r^{-2}$, $h''(r) = 2r^{-3}$ より

$$\Delta f = 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} - 2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2} = 0.$$