7/7 問題 $\dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる

$x = x(t)$ を求めよ。

解) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ とおくと、$f_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$ より、

A は固有値 1, 3 をもつ。

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad A - 3I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

であるから、固有値 1 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$、固有値 3 に対する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ が選べる。

よって、$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ として、$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

したがって基本行列として $\Phi(t) = P \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & -2e^{3t} \end{pmatrix}$

がとれ、一般解は、

$$x(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と表せる。$x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、

$$x(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & -2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^t + e^{3t} \\ 3e^t - 2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

※ 対角化するときの行列 P と、対角行列 $P^{-1}AP$ には自由度があるが、最後の答えは一意的である。

※ 最後の答えが、与えられた2つの条件式を満たしているか検算することは容易である。