慶應義塾大学　OCR 対応用紙

数字記入例 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
(OCR 上では特に 4 と 9 の区別がしにくいので、4 は上を閉じないこと)

学籍番号	61408641
氏名	佐々木 捷

20

1 ページ
(ページ数は必ずご記入ください)

科目名	担当者
数学A2	南 美穂子

2014 年 6 月 9 日 (月) 4 時限　学科(学門) 3　1 年 X 組

学科出席番号

注 1 学籍番号は数字記入例を参照の上、丁寧に記すこと。
注 2 左上にある黒い「基準マーク」付近には何も記さないこと。
注 3 裏面を使用する場合には、矢印記号⇒の位置から書き始めること(天地を逆転させないこと)。
注 4 用紙が複数枚に及ぶ場合、氏名は全ての用紙に記入すること。

20 + 0 = 20

問題 1 $z^4 = -1$ を満たす複素数 z をすべて求め，重複のないように答えなさい．

10/10

$r \geq 0$ として、
$z = re^{i\theta}$ とおく。
$z^4 = r^4 e^{4i\theta}$，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より，
$= r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = -1$ となる為には，
① $r^4 = +1$，$\cos 4\theta = -1 \Leftrightarrow r = 1$，$4\theta = \pi \pm 2\pi n$
$\therefore \theta = \frac{\pi \pm 2\pi n}{4}$ $\left(\begin{matrix} r \in \mathbb{R} \text{なら,} \\ i\sin\theta \times r \neq -1 \end{matrix}\right)$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$
$\therefore z = e^{i\frac{\pi \pm 2\pi n}{4}}$ $(n = 0, 1, 2 \cdots)$
ここで，θ は(主値) 2π ごとに繰り返すので
z が異なる値をとるのは，$n = 0$ を始まると
$\frac{\pi + 2\pi n}{4} = 2\pi \Rightarrow 8\pi = \pi + 2\pi n$
$n = \frac{7\pi}{2\pi}$，$\therefore 3$ まで
(このとき $\frac{1}{4}\pi i$，以下同様) $(n = 0, 1, 2, 3)$
$\therefore z = e^{\frac{1}{4}\pi i}, e^{\frac{3}{4}\pi i}, e^{\frac{5}{4}\pi i}, e^{\frac{7}{4}\pi i}$ の 4 つ

問題 2 n 次ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合 $\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i$ を n 次行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ と n 次ベクトル $\boldsymbol{c} = {}^t[c_1, c_2, \cdots, c_n]$ を用いて表しなさい．

10/10

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = [a_1, a_2, \cdots, a_n] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = Ac$$

問題 3 n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{V}^n$ の基本単位ベクトルの集まり $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が $\boldsymbol{V}^n$ の生成系であることを示しなさい．

0/5

$c = \{c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n\}$ とすると，
$0 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_3 e_3 = ce$ は，自明な関係である。
$\therefore$ 示せた

自明である

問題 4 $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 W を

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x + 2y + z = 0 \right\}$$

とする．

(1) W の基底を求めなさい．また、次元を答えなさい．

0/10

3 次元，$x = \begin{pmatrix} -2y + z \\ -\frac{1}{2}(x + z) \\ -x - 2y \end{pmatrix}$

(2) (1) で求めた基底を直交化することにより W の直交基底を求めなさい．

0/5

裏面に続く場合は⇒印の欄から書くこと。

⇒

問題 5 3×2 行列 A によって定まる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像 L_A に対して

$$L_A\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\9\\3\end{bmatrix},\ L_A\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

であるとき、行列 A を求めなさい.

× 0/15

問題 6 $\det(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=4$ であるとき、

$a_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$ とすると

$\det(\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2)$

の値はいくつか。

0/10

$\det(a_1, a_2) = \det(a_1\cdot a_2)$

$(a_1,a_2)=\begin{pmatrix}a_1a_2 & b_1b_2\\ c_1c_2 & d_1d_2\end{pmatrix}$, ここで; $a_1a_2d_1d_2-b_1b_2c_1c_2 = 4$

$a_1+2a_2=\begin{pmatrix}a_1+2a_2 & b_1+2b_2\\ c_1+2c_2 & d_1+2d_2\end{pmatrix}$, $a_1-2a_2 = \begin{pmatrix}a_1-2a_2 & b_1-2b_2\\ c_1+2c_2 & d_1+2d_2\end{pmatrix}$

×

問題 7

n 次正則行列 A によって定まる線形変換を T_A で表すこととする. どのような $\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{R}^n$ に対しても $T_A(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となる n 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在することを示しなさい.

0/5

0

問題 8 行列 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ a & 1\end{bmatrix}$ $(a\in \boldsymbol{R})$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

0/15

$\det A = 1-a^2 = 0$

$a=\pm 1$

$\therefore \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

問題 9 実対称行列 $A=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 4 & 13\end{bmatrix}$ を直交行列により対角化しなさい.

$\det A = 7\cdot 13 - 16 = 91-16 = 75$

0/20