数学 1B 期末試験

以下の設問$\boxed{1}$から$\boxed{5}$に答えなさい．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること．

$\boxed{\mathbf{1}}$　区間 $(0,\infty)$ で定義された関数 $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}$ について，次の値を求めなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$.　　(2) $f'(x)$.　　(3) $f(1)$, $f(2)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$　定積分 $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^3+3x^2+4x+2}dx$ を求めさない.

$\boxed{\mathbf{3}}$　(1) 累次積分 $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx\Big)dy$ の積分順序を交換しなさい．

(2) $0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 1$ で定まる長方形領域から原点を中心とする半径 1 の円の内部を除いた領域を A とする．重積分 $\displaystyle\iint_A\frac{x^3y}{-y^4+2y^2+15}dxdy$ を累次積分によって求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$　原点を中心とする半径 r の円の内部を $B(r)$，$B(r)$ に円周も含めたものを $\bar{B}(r)$ と表す．$|x|\leqq R$, $|y|\leqq R$ で定まる正方形領域を $D(R)$ と表す．集合 X から集合 Y の元を除いた集合を $X-Y$ と表す．$f(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\sin\{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\}$ とする．

(1) $R>\frac{3}{\pi}$ のとき，次の不等式を示しなさい．

$$\iint_{\bar{B}(R)-B(\frac{3}{\pi})}f(x,y)dxdy<\iint_{D(R)-B(\frac{3}{\pi})}f(x,y)dxdy<\iint_{\bar{B}(\sqrt{2}R)-B(\frac{3}{\pi})}f(x,y)dxdy.$$

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\iint_{D(R)-B(\frac{3}{\pi})}f(x,y)dxdy$ を求めなさい．ただし求める過程も記しなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$　$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2},\ \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ を原点以外の $\mathbb{R}^3$ の点で考える．

(1) $\boldsymbol{r}(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t,e^t)$ が定める曲線 $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t)\,|\,0\leqq t\leqq 10\}$ を $\boldsymbol{r}(0)$ から $\boldsymbol{r}(10)$ へ進むとき，線積分 $\displaystyle\int_\Gamma\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めなさい．

(2) $B=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq\frac{3}{4}\}$ で定義された関数 $\varphi(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ のグラフ $A=\{(x,y,z)\,|\,z=\varphi(x,y),\ (x,y)\in B\}$ を考える．A の各点 (x,y,z) における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ でその第 3 成分が 0 以上であるものを求めなさい．また面積分 $\displaystyle\int_A\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}dS$ を求めなさい．