数学２Ｂ　第４回の演習問題の解答例

問：

1. 以下のように定義される $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ へ写像が「単射」,「全射」,「全単射」,「いずれでもない」のどれになるか調べなさい.

$$f_1(x) = x^3, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = x^3 - x, \qquad f_4(x) = e^x$$

2. 次の行列の階数を求めなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

解答例：

1. 　$f_1(x)$ は全単射である．実際に任意の実数 y に対して $x = y^{1/3}$ という実数が存在し，$y = f_1(x)$ となるので，f は全射である．一方，$f_1(x_1) = f_1(x_2)$ とすると $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$ となり，実数の範囲では $x_1 = x_2$ となるので，f は単射でもある．

　$f_2(x)$ はいずれでもない．任意の実数 x に対して $f_2(x) \geq 0$ より，$f_2(x)$ は全射ではない．また，$f_2(1) = f_2(-1)$ より $f_2(x)$ は単射でもない．

　$f_3(x)$ は全射であるが単射ではない．$f_3(x)$ のグラフの形より全射である．一方，$f_3(-1) = f_3(0) = f_3(1)$ であるので単射ではない．

　$f_4(x)$ は単射ではあるが全射ではない．任意の実数 x に対して $f_4(x) > 0$ より，$f_4(x)$ は全射ではない．一方，$f(x_1) = f(x_2)$ とすると $e^{x_1 - x_2} = 1$ より $x_1 - x_2 = 0$ でなければならず，$f_4(x)$ は単射である．

2. A に列基本変形を用いて下階段行列に変形する．

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，次の３個のベクトルは A の階数は３である．