数学 2B　第 5 回（線形写像と行列（その 3），実ベクトル空間での内積）

2019 年 10 月 29 日（火）
担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

第 4 回の宿題の解答例

問題 4-5.(1)

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c+2d+4e \\ -a+b-3c+e \\ b-c+2d+5e \end{bmatrix}$$

より，表現行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ である． □

(2) 核空間 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は，同次形連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．係数行列 A に行基本変形を施し，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行}+1\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．したがって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は

$$\begin{cases} a \phantom{{}+b} + 2c + 2d + 4e = 0 \\ \phantom{a+{}} b - c + 2d + 5e = 0 \end{cases}$$

と同値である．自由度は 5(変数の数) − 2(方程式の数)= 3 だから，$c = t_1, d = t_2, e = t_3$ とおくと $a = -2t_1 - 2t_2 - 4t_3$，$b = t_1 - 2t_2 - 5t_3$ となる．よって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の任意の解は

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t_1-2t_2-4t_3 \\ t_1-2t_2-5t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R})$$

であり，核空間 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底は $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$，次元は $(\dim \mathrm{Ker}\, f =)3$

である． □

(3) (1) の表現行列を $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5]$ とおくと，像空間 $\mathrm{Im}\ f=\{f(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5\}$ は，$\mathrm{Span}\,\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5\}$ と一致するので，以下のように列基本変形を繰り返して，表現行列 A を下階段行列に変形する．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{3\text{列}-1\text{列}\times 2 \\ 4\text{列}-1\text{列}\times 2 \\ 5\text{列}-1\text{列}\times 4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{3\text{列}+2\text{列} \\ 4\text{列}-2\text{列}\times 2 \\ 5\text{列}-2\text{列}\times 5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって，像空間 $\mathrm{Im}\ f$ の基底は $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ であり，次元は $(\dim\ \mathrm{Im}\ f=)2$ である． □

(4) (2) より $\dim\ \mathrm{Ker}\ f=3$, (3) より $\dim\ \mathrm{Im}\ f=2$ であり，線形写像 f の定義域の次元は $5(=n)$ だから，次元公式

$$\dim\ \mathrm{Ker}\ f+\dim\ \mathrm{Im}\ f=3+2=5=n$$

が成り立っていることが確認できた． □

(5) 定義より

$$\mathrm{rank}A=\dim\ \mathrm{Im}\ f=2$$

（別解：次元公式より $\mathrm{rank}A=n-\dim\ \mathrm{Ker}\ f=5-3=2$） □

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい．

問題 5-1． 次の各行列の階数を求めなさい．

$$(1)\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (2)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (3)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(4)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -9 \\ 4 & 3 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & x \end{bmatrix} \quad (5)\ \begin{bmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a^2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

問題 5-2． 問題 5-1．の各行列を表現行列とする線形写像が，(i) 全単射，(ii) 全射だが単射でない，(iii) 単射だが全射でない，(iv) 全射・単射のいずれでもない，のいずれであるかを判定しなさい．

問題 5-3． 問題 5-1．の各行列の転置行列を表現行列とする線形写像が，(i) 全単射，(ii) 全射だが単射でない，(iii) 単射だが全射でない，(iv) 全射・単射のいずれでもない，のいずれであるかを判定しなさい．

問題 5-4． 次の行列を表現行列とする線形写像が全単射となるように定数 x を定めなさい．

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & x \end{bmatrix}$$

問題 5-5(宿題)． 行列

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

について，次の問いに答えなさい．

(1) $\mathrm{rank} A$ を求めなさい．

(2) 次の各行列を表現行列とする線形写像が，(i) 全単射，(ii) 全射だが単射でない，(iii) 単射だが全射でない，(iv) 全射・単射のいずれでもない，のいずれであるかを判定しなさい．

(a) A 　　(b) ${}^tAA$