数学3A・中間試験

2017年6月26日
勝良健史 (14棟635号室)
e-mail: katsura@math.keio.ac.jp
`http://www.math.keio.ac.jp/~katsura/course/17_1/3A/`

各設問の指示は良く読み，従ってください．解答は解答用紙の所定の欄に書いてください．([1]，[2]，[3] は表，[4]，[5]，[6] は裏に書いてください)．問題の量，計算量ともにたっぷりあるので，できる問題から解いてください．

[1] $\mathbb{R}$ の部分集合 $A := \left\{ \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{r+1}{3r+2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ r \in (0,\infty) \right\}$ の上限 $\sup A$ と下限 $\inf A$ を求めよ．

[2] arcsin を主値をとる逆三角関数としたとき，$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ が成り立つことを示せ．(x の動く範囲も明記せよ．)

[3] $\{a_n\}_n$ を数列とする．

(i) $\{a_n\}_n$ が Cauchy 列であることの定義を書け．

(ii) 狭義単調増加する自然数列 $\{n_k\}_k$ を用いて $\{a_{n_k}\}_k$ と表される $\{a_n\}_n$ の部分列を考える．$\{a_{n_k}\}_k$ が収束することの定義を書け．

(iii) $\{a_n\}_n$ が収束する部分列を持つ Cauchy 列のとき，$\{a_n\}_n$ は収束列であることを示せ．

[4] 次の極限値を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x - ex}{x^2-1}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x\log(1+x)}$　　(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x} - \sin(\frac{1}{x})\right)\sin(x^2)}{x}$

[5] 次の関数の導関数を求めよ．

(i) $f(x) = e^{x^e}$　　(ii) $g(x) = \arctan(\sqrt{2x})$

[6] $\mathbb{R}$ 上定義された次の関数 f は連続か？微分可能か？C^1 級か？理由とともに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin(\log|x|) & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

[1] $\mathbb{R}$ の部分集合 $A := \left\{ \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{r+1}{3r+2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ r \in (0,\infty) \right\}$ の上限 $\sup A$ と下限 $\inf A$ を求めよ．

（答え）$\sup A = \frac{3}{4}$, $\inf A = -\frac{1}{6}$ $\square$

（解答）$\mathbb{R}$ の部分集合 B と C を

$$B := \left\{ \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad C := \left\{ \frac{r+1}{3r+2} \;\middle|\; r \in (0,\infty) \right\}$$

とおくと，$A = B + C := \{b + c \mid b \in B,\ c \in C\}$ となる．また，

$$\begin{aligned} \sup B &= \max B = \frac{1}{4}, & \sup C &= \lim_{r\to 0} \frac{r+1}{3r+2} = \frac{1}{2} \\ \inf B &= \min B = -\frac{1}{2}, & \inf C &= \lim_{r\to \infty} \frac{r+1}{3r+2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となることが分かる．よって，

$$\begin{aligned} \sup A &= \sup B + \sup C = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ \inf A &= \inf B + \inf C = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる． $\square$

（解説）

$$\begin{aligned} B &= \left\{ 0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{1}{6},\ 0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ -\frac{1}{10},\ 0,\ \frac{1}{12},\ 0,\ \ldots \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{10},\ldots,\ -\frac{1}{4n-2},\ldots,\ 0,\ldots,\ \frac{1}{4n},\ldots,\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4} \right\} \end{aligned}$$

です．数列とは異なり集合を考えるときは，順番や 0 が何回でてきたかということは関係がありません．$B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right]$ と書いている人がいましたが，間違っています．また，$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{4}$ とだけ書いている人がいましたが（等号は忘れないように！），これは，$B \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right]$ を意味していて，正しいですが，上限や下限を求める上ではこの不等式だけでは不十分です．($-1 \leq \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$ も正しいけど，上限や下限を求める上では役に立たないというのと同じような感じです．)

一方 $C = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ となることが（関数の連続性や単調性を用いると）証明できます．上と同じ理由で $\frac{1}{3} < \frac{r+1}{3r+2} < \frac{1}{2}$ と書くだけでは（等号はつけないほうが良い），不十分です．結果的に，

$$A = B + C = \left(-\frac{1}{6}, 0 \right) \cup \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{4} \right)$$

となっていることが分かります． $\square$

[2] arcsin を主値をとる逆三角関数としたとき，$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ が成り立つことを示せ．(x の動く範囲も明記せよ．)

（解答）arcsin は閉区間 $[-1,1]$ から $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ への単調増加な関数で，$-1 \leq x \leq 1$ を満たす任意の x に対して $y = \arcsin x$ は $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin y = x$ を満たす唯一の実数となっている．

$-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos y \geq 0$ となるので，$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ となる．この式に $y = \arcsin x$ と $\sin y = x$ を代入すると，$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ が成り立つことが分かる．($-1 \leq x \leq 1$ である．) □

（配点）$-1 \leq x \leq 1$ の範囲，または $\cos y \geq 0$ という事実のそれぞれを 5 点，その他を 2 点の 12 点満点で採点しました． □

[3] $\{a_n\}_n$ を数列とする．

(i) $\{a_n\}_n$ が Cauchy 列であることの定義を書け．

(ii) 狭義単調増加する自然数列 $\{n_k\}_k$ を用いて $\{a_{n_k}\}_k$ と表される $\{a_n\}_n$ の部分列を考える．$\{a_{n_k}\}_k$ が収束することの定義を書け．

(iii) $\{a_n\}_n$ が収束する部分列を持つ Cauchy 列のとき，$\{a_n\}_n$ は収束列であることを示せ．

（解答）

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

(ii) $\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq K \Rightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$

(iii) $\{a_n\}_n$ を収束する部分列を持つ Cauchy 列とする．$\{a_{n_k}\}_k$ を $\{a_n\}_n$ の収束する部分列，$\alpha \in \mathbb{R}$ をその収束先とする．このとき，(ii) にあるように

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq K \Rightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon_1$$

が成り立つ．また，$\{a_n\}_n$ が Cauchy 列であることから，(i) にあるように

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon_2$$

が成り立つ．$\{a_n\}_n$ が α に収束することを示す．つまり，

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

を示す．そのため，$\varepsilon > 0$ を任意にとり固定する．$\{a_n\}_n$ が Cauchy 列であるという主張の ε_2 として $7\varepsilon/17 > 0$ をとることで，

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < 7\varepsilon/17$$

が成り立つ $N \in \mathbb{N}$ がとれる．この N が目的の自然数であることを示す．つまり，

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

を示す．そのために自然数 $n \in \mathbb{N}$ をとり $n \geq N$ を仮定する．$\{a_n\}_n$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_k$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するという主張の ε_1 として $7\varepsilon/22 > 0$ をとることで，

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad k \geq K \Rightarrow |a_{n_k} - \alpha| < 7\varepsilon/22$$

を満たす K がとれる．$\{n_k\}_k$ は狭義単調増加する自然数列なので，$k \geq K$ で $n_k \geq N$ を満たすような k が存在する．そのような k を一つとると，$|a_{n_k} - \alpha| < 7\varepsilon/22$ と $|a_n - a_{n_k}| < 7\varepsilon/17$ が成り立つ．したがって，

$$|a_n - \alpha| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < 7\varepsilon/17 + 7\varepsilon/22 < \varepsilon$$

が成り立つ．よって，N が目的の自然数であることが示され，$\{a_n\}_n$ が α に収束することが分かった．

以上より，$\{a_n\}_n$ が収束する部分列を持つ Cauchy 列のとき，$\{a_n\}_n$ は収束列であることが示された． □

(解説) 予想通りとはいえ，できが悪かったです．自分で読んでも解答の意味が分からないような答案は書かないでください．もし，自分で自分の解答を読んでみて，意味が分かるのだけど，何が間違っているか分からない人は，ぜひ周りの人にどこが変か聞いてみてください．解答をどう書いたら良いか分からない人は，あっている人の解答などを良く読んで，自分が何が分かっていないかをまずは考えてください． □

(配点) (i) と (ii) は 6 点ずつ，(iii) は 16 点の 28 点満点で採点しました． □

[4] 次の極限値を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-ex}{x^2-1}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\log(1+x)}$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{x}-\sin(\frac{1}{x})\right)\sin(x^2)}{x}$

（答え）

(i) $\log 3$ (ii) 0 (iii) $-\dfrac{1}{2}$ (iv) 1

□

（解答）(i) ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\log 6)6^x-(\log 2)2^x}{1}=\log 6-\log 2=\log 3$$

となる．$\dfrac{6^x-2^x}{x}=2^x\dfrac{3^x-1}{x}$ として，$f(x)=3^x$ に対し，

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=\log 3$$

となることと $\displaystyle\lim_{x\to 0}2^x=1$ を使っても答えは出る．

(ii) ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-ex}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{2x}$$

となり，右辺の分数は $x=1$ で分子は 0，分母は 2 になることより，求める極限は 0 であることが分かる．ロピタルの定理は分子も分母も 0 に収束するときに使えるということを忘れないように．

(iii) 2次マクローリン近似を用いると，$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+g_1(x)$，$\log(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+g_2(x)$ で，g_1，g_2 は $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g_1(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g_2(x)}{x^2}=0$ を満たす．

$$\frac{\cos x-1}{x\log(1+x)}=\frac{-\frac{1}{2}x^2+g_1(x)}{x^2-\frac{1}{2}x^3+xg_2(x)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{g_1(x)}{x^2}}{1-\frac{1}{2}x+x\frac{g_2(x)}{x^2}}$$

より，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\log(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

となる．$\log(1+x)$ は 2 次近似ではなく 1 次近似でも答えが出る．ロピタルの定理を用いても良いし，ランダウの記号を用いても良い．また，$(\cos x - 1)/x^2$ と $x/\log(1+x)$ の積に分けてそれぞれの極限を計算しても良い．

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$ に注目して

$$\frac{\left(\frac{1}{x} - \sin(\frac{1}{x})\right)\sin(x^2)}{x} = \left(1 - x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

と変形し，$|x\sin(\dfrac{1}{x})| \leq |x|$ から $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$ であることを使うと極限が 1 であることが分かります．この問題ではロピタルの定理やマクローリン近似は役にたたない． □

（配点）1 問 5 点の 20 点満点で採点しました．答えがあっていても，議論が不十分だった場合などは減点しました． □

[5] 次の関数の導関数を求めよ．

$$\text{(i)}\quad f(x) = e^{x^e} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad g(x) = \arctan(\sqrt{2x})$$

（答え）

$$\text{(i)}\quad f'(x) = ex^{e-1}e^{x^e} \qquad\qquad \text{(ii)}\quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}(1+2x)}$$

□

（解答）(i) 対数微分を用いると，$\log f(x) = x^e$ より $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = ex^{e-1}$ となる．よって，$f'(x) = ex^{e-1}e^{x^e}$ となる．直接，合成関数の微分を用いても $f'(x) = ex^{e-1}e^{x^e}$ が求まる．

(ii) $\sqrt{2x}$ の微分は $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ である．$\arctan(y)$ の微分が $\dfrac{1}{1+y^2}$ であることから，

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}\frac{1}{1+\sqrt{2x}^2} = \frac{1}{\sqrt{2x}(1+2x)}$$

となる． □

（解説）ちょっとした計算間違いをしている人はそれなりにいました．もったいないので，自分で自分の計算ミスを見つけられるようになりましょう．
□

（配点）1 問 5 点の 10 点満点で採点しました． □

([6] の配点) 20 点満点でやや厳しめに採点しました．$x \neq 0$ での $f'(x)$ の計算があっているか，$f'(0) = 0$ の証明を述べているか，f' が $x = 0$ で連続であることを見て f が C^1 級であると結論づけているか，の 3 点に関しては，不十分だと 5 点減点しました． □

[6] $\mathbb{R}$ 上定義された次の関数 f は連続か？微分可能か？C^1 級か？理由とともに答えよ．

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin(\log|x|) & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

（答え）連続で，微分可能で，C^1 級である．理由は以下の通り． □

（解答）C^1 級であることを示せば，連続であることも微分可能であることも分かるので，C^1 級であることを示す．

$x > 0$ では，$f(x) = x^2 \sin(\log x)$ となることから，

$$f'(x) = 2x\sin(\log x) + x\cos(\log x)$$

となる．$x < 0$ では，$f(x) = x^2 \sin(\log(-x))$ となることから，

$$f'(x) = 2x\sin(\log(-x)) + x\cos(\log(-x))$$

となる．$x = 0$ では，

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h\sin(\log|h|) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが，$|h\sin(\log|h|)| \leq |h|$ から分かる．したがって，f は微分可能で

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\log|x|) + x\cos(\log|x|) & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．$x \neq 0$ で $|f'(x)| \leq 3|x|$ となることから，$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ となる．よって，f' は $x = 0$ で連続である．$x \neq 0$ で f' が連続であることは上の式から分かるので，f' は連続関数になる．したがって，f は C^1 級である． □

（解説）絶対値の扱い，微分の定義や計算，微分可能と連続の違い，C^1 級の定義などが分かっていない人が多かったです．一つ一つ確認しましょう．

□