慶應義塾大学試験問題　物理学D（一斉）

2018年1月29日（月）1時限（試験時間50分）　問題用紙 回収不要

担当者　神成、木下、齊藤、高野

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数 ε_0、磁気定数 μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 真空中に、半径 a の導体 (金属) の球と、内半径 b で外半径 d の誘電体 (絶縁体) の球殻が、中心を共通にして配置されている ($0 < a < b < d$)。この中心を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の原点とする。このとき、中心からの距離 $r = |\boldsymbol{r}|$ が $0 \leq r \leq a$ の領域が導体 (金属) に、$b \leq r \leq d$ の領域が誘電体 (絶縁体) に、なっている。誘電体の誘電率は、中心からの距離 r の関数として、$\varepsilon(r) = \bar{\varepsilon}\varepsilon_0 \left(\dfrac{d}{r}\right)^4$ で与えられている。ここで、$\bar{\varepsilon}$ は $\bar{\varepsilon} > 1$ を満たす定数である。導体 (金属) 球に Q の電荷を与える。

(1) 位置 $\boldsymbol{r}$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$、電気分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) この系の静電エネルギー U_{E} を求めなさい。

(3) 誘電体の内側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}| = b)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(r = b)$、誘電体の外側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}| = d)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(r = d)$、両極板間の中心からの距離 r が $r_1 \leq r \leq r_2$ の範囲の分極電荷 $q_{\mathrm{P}}(r_1, r_2)$ を求めなさい。ただし、$a < r_1 < r_2 < b$ とする。

問題 II 物質中で、電界を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、真電荷密度を ρ_{t}、真電流密度を $\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}$ とする。

(1) 物質中のマクスウェル方程式を書きなさい。

(2) 物質が一様で、その誘電率 ε と透磁率 μ が一定の場合を考える。$\rho_{\mathrm{t}} = 0$、$\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}$ のとき、時刻 t、位置 $\boldsymbol{r}$ において $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 g(\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} + vt)$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 g(\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} + vt)$ と表される平面電磁波を考える。ここで、$g(\eta)$ は2回以上微分可能な任意の関数、$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ は定数ベクトル、$\hat{\boldsymbol{k}}$ は定数の単位ベクトル、v は定数である。これがマクスウェル方程式を満たしているとき、v は ε、μ を用いてどのように表されるか書きなさい。また、$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$、$\hat{\boldsymbol{k}}$、v の間にどのような関係がなければならないか書きなさい。いずれも解のみで良い。
ヒント: $\hat{\boldsymbol{k}}' = -\hat{\boldsymbol{k}}$ とおくと $\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} + vt = -(\hat{\boldsymbol{k}}' \cdot \boldsymbol{r} - vt)$ と書ける。

(3) (2) の平面電磁波に対して、時刻 t、位置 $\boldsymbol{r}$ における電磁場のエネルギー密度 $u(\boldsymbol{r}, t)$ とポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ を求めなさい。解は ε、μ、$\boldsymbol{E}_0$、f、$\hat{\boldsymbol{k}}$ のみを用いて表しなさい。また、u、$\boldsymbol{S}$、v、$\hat{\boldsymbol{k}}$ の間の関係を書きなさい。

問題 III 半径 a で無限に長い円柱状の導体がある。導体の外側には、導体と同軸で、内半径 $b(> a)$、外半径 $d(> b)$ で無限に長い円筒状の磁性体がある (図 III-1 参照)。導体円柱、磁性体円筒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 III-2 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。磁性体は $b < r < d$ の領域にあり、磁性体の透磁率は r の関数として $\mu(r) = \bar{\mu}\mu_0 \left(\dfrac{r}{b}\right)^4$ で与えられている。ここで、$\bar{\mu}$ は $\bar{\mu} > 1$ を満たす定数である。磁性体のない領域の透磁率は μ_0 である。導体に $\boldsymbol{e}_z$ 方向に大きさ I の定常電流を一様に流す。

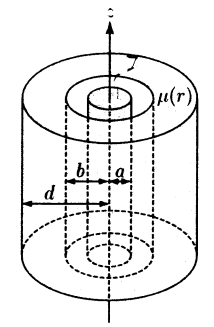

図 III-1

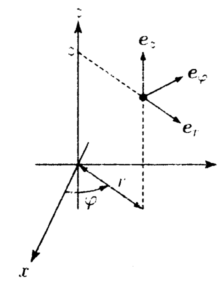

図 III-2

(1) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$、磁界 $\boldsymbol{H}(r, \varphi, z)$、磁化 $\boldsymbol{J}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

(2) 磁性体の内側の表面上の位置 $(r = b, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b, \varphi, z)$ と磁性体の外側の表面上の位置 $(r = d, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d, \varphi, z)$ を求めなさい。

(3) $z =$ 一定 の平面内の $0 \leq r \leq r_1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ で指定される半径 r_1 の円形の範囲を $\boldsymbol{e}_z$ 方向に貫く磁化電流 $I_m(r_1)$ を求めなさい。
ヒント: $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ を磁化電流密度とするとき、$\boldsymbol{B}$ または $\boldsymbol{H}$ に関するアンペールの法則の積分形を参考にして、$\mathrm{rot}\boldsymbol{J} = \mu_0 \boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ の積分形を考える。あるいは、$\boldsymbol{B}$ に関するアンペールの法則 (積分形) で、全電流から真電流の寄与を差し引く。

問題 IV 半径 a の無限に長い導体円柱棒がある。導体円柱棒の中心軸を z 軸にとり、**問題 III** で用いた円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。導体円柱棒の電気伝導率は r の関数として $\sigma(r) = \sigma_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^4$ で与えられている。この導体円柱棒の内外に時刻 t に依存した一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}(r, \varphi, z, t) = B_{\mathrm{ex}}(t)\boldsymbol{e}_z = (B_0 + \beta t)\boldsymbol{e}_z$ を加えた。ここで、σ_0、B_0、β は正の定数である。また、導体円柱棒の内外で透磁率は μ_0 である。位置 (r, φ, z) におけるベクトル量は、互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表しなさい。

(1) 時刻 t で、位置 (r, φ, z) における電界 $\boldsymbol{E}(r, \varphi, z, t)$ と電流密度ベクトル $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z, t)$ を求めなさい。

(2) 時刻 t で、導体円柱棒の単位長さに発生する単位時間あたりのジュール熱 $P(t)$ を求めなさい。

(3) 導体円柱棒中を流れる全電流が、時刻 t で、位置 (r, φ, z) につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}'(r, \varphi, z, t)$ を求めなさい。