

1

1.1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x + \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} \frac{1}{x} \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 = \underline{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

1.2

$x = \tan y$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2 y}} \cdot \frac{dy}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot -\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

1.3

$b/a > 0$ の時,

$$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\pi}{2}$$

である. これは正接の定義による. このことを用いると $f(1) = f(2) = \underline{\pi/2}$

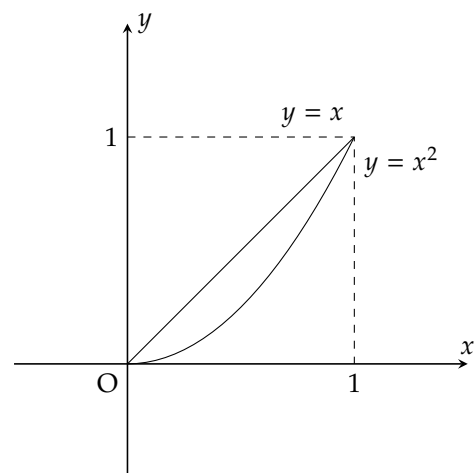
2

$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x+2)(x^2 + 2x + 2)$ より

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} \right) dx \\ &= [\log|x+1|]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{\left(\frac{(x+1)^2+1}{2}\right)'}{(x+1)^2+1} dx = \log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\log \frac{(x+1)^2+1}{2} \right]_1^2 \\ &= \underline{\log \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \log 2}\end{aligned}$$

3

3.1



積分区間 A は直線と放物線で囲まれる領域であり, 右上図の通りである.
これより,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy &= \iint_A f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

3.2

前問と同様に考えれば,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^2 \frac{y}{-y^4 + 2y^2 + 15} \cdot x^3 dx dy = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{y}{-y^4 + 2y^2 + 15} \cdot (-y^4 + 2y^2 + 15) dy = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

4

4.1

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と準備すると,

$$J = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \sin \theta \end{vmatrix} = r$$

$$f(x, y) = r^{-3} \sin \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\overline{B}(R) - B(3/\pi) = \{(r, \theta) | 3/\pi \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

ここで

$$\begin{aligned} g(R) &= \iint_{\overline{B}(R)-B(3/\pi)} r^{-3} \sin\left(\frac{1}{r}\right) \cdot r \, dr \, d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_{3/\pi}^R \left(\frac{1}{r}\right)' \sin\left(\frac{1}{r}\right) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\cos\left(\frac{1}{r}\right) \right]_{3/\pi}^R \, d\theta \\ &= 2\pi \left(\cos\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

より問題文の条件の時, $g(R)$ は R に関して単調増加である. これは, 外側の円周の半径が大きくなることに対応しているため,

$$\overline{B}(R) - B(3/\pi) \subset D(R) - B(3/\pi) \subset \overline{B}(\sqrt{2}R) - B(3/\pi)$$

から, 題意が成立する. □

4.2

前問で

$$\lim_{R \rightarrow \infty} g(R) = \pi, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} g(\sqrt{2}R) = \pi$$

より, 挟み撃ちの定理から

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D(R)-B(3/\pi)} f(x, y) \, dx \, dy = \underline{\pi}$$

5

5.1

$$\nabla \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{2} \int_0^{10} (\cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(\sin t + \cos t) + 1) \, dt \\ &= \int_0^{10} \cos^2 t + \sin^2 t + 1 \, dt \\ &= \underline{10} \end{aligned}$$

5.2

グラフ表示されることから, $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \phi(x, y))$ とすると,

$$\begin{aligned}\phi_x &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \phi_y = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \partial_x \mathbf{r} &= (1, 0, \phi_x), \partial_y \mathbf{r} = (0, 1, \phi_y) \\ \mathbf{n} &= \pm \frac{\partial_x \mathbf{r} \times \partial_y \mathbf{r}}{\|\partial_x \mathbf{r} \times \partial_y \mathbf{r}\|} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + 1}} \cdot \begin{pmatrix} -\phi_x \\ -\phi_y \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z \geq 0$ より複号は正で, ϕ_x, ϕ_y にそれぞれ代入すれば,

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

さらに,

$$\begin{aligned}\int_A \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} (-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta + 1 - r^2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} (1 - 2r^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r - \frac{2}{3} r^3 \right]_0^{\sqrt{3}/2} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \pi\end{aligned}$$