数学3B・中間試験

2017年11月13日

勝良健史 (14棟635号室)

e-mail: katsura@math.keio.ac.jp

http://www.math.keio.ac.jp/~katsura/course/17_2/3B/

各設問の指示は良く読み，従ってください．解答は解答用紙の所定の欄（[1]，[2] は表，[3]，[4] は裏）に書いてください．

[1] 次の主張は正しいか，間違っているか？理由とともに答えよ．

(i) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad a < b$

(ii) $\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a < b$

[2] $I = (0, \infty)$ 上の関数 f を $f(x) = \dfrac{1}{x}$ で定める．

(i) f が I 上で連続であることの定義を書き，それを示せ．

(ii) I に含まれる区間 I_1 と I_2 を $I_1 = (0, 1)$，$I_2 = (1, \infty)$ とする．

$k = 1, 2$ に対し，f は I_k 上で一様連続か？理由とともに答えよ．

[3] 次の不定積分を計算せよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{2 + 3\cos x} dx$ (iii) $\displaystyle\int \sqrt{4x - x^2} dx$

[4] 閉区間 $[1, 4]$ 上の関数 f を $f(x) = x^2$ で定める．

(i) $\alpha = \displaystyle\int_1^4 f(x) dx$ を計算せよ．

(ii) $[1, 4]$ 内に含まれる閉区間 $[a, b]$ に対して，$\displaystyle\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$ を満たす $\xi \in [a, b]$ を a と b を用いて表せ．

(iii) α を (i) で求めた値とする．$\varepsilon > 0$ に対して，次の条件を満たす $\delta > 0$ を1つ求めて，ε で表せ．

「$|\Delta| < \delta$ を満たす $[1, 4]$ の任意の分割 Δ と，Δ の任意の代表点 ξ に対して，$|S(f, \Delta, \xi) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.」

ここで，$[1, 4]$ の分割 $\Delta\colon 1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 4$ と，Δ の代表点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ に対して，$S(f, \Delta, \xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ である．

[1] 次の主張は正しいか，間違っているか？理由とともに答えよ．

(i) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad a < b$

(ii) $\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a < b$

（答え）(i) は正しく，(ii) は間違っている．理由は以下の解答参照． □

（解答）

(i) 正しい事を証明する．そのために $a \in \mathbb{R}$ を任意にとる．このとき $b \in \mathbb{R}$ を $b = a+1$ と定める．すると，$a < b$ が成り立つ．従って,「$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad a < b$」という主張が正しいことが証明された．

(ii) 間違っている事を証明する．つまり,「$\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a < b$」という主張の否定「$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad a \geq b$」を証明する．

そのために $b \in \mathbb{R}$ を任意にとる．このとき $a \in \mathbb{R}$ を $a = b+1$ と定める．すると，$a \geq b$ が成り立つ．従って,「$\forall b \in \mathbb{R} \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad a \geq b$」という主張が証明された．よって,「$\exists b \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad a < b$」という主張が間違っていることが証明された． □

（解説）(i) の主張を日本語で書くと,「どんな実数 a に対しても，ある実数 b が存在して，$a < b$ が成り立つ.」もしくは,「どんな実数に対しても，それより大きな実数が存在する.」という事ができます．このように言い換えると，当たり前に聞こえると思います．そう思った上で，ちゃんと証明をする必要があります.（Archimedes の原理を用いるもの良いでしょう.）

(ii) の主張を日本語で書くと,「ある実数 b が存在して，どんな実数 a に対しても，$a < b$ が成り立つ.」となります．もっと自然な日本語だと「どんな実数 a に対しても，$a < b$ が成り立つような実数 b が存在する.」もしくは,「どんな実数よりも大きな実数が存在する.」となります．これもまた成り立たないことが当たり前に聞こえる主張ですが，きちんと反証する必要があります.「証明できないので正しくない」と読める解答が多くありましたが，それでは不十分です． □

（配点）1 問 10 点の 20 点満点でややきびしめに採点しました． □

[2] $I=(0,\infty)$ 上の関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{x}$ で定める．

(i) f が I 上で連続であることの定義を書き，それを示せ．

(ii) I に含まれる区間 I_1 と I_2 を $I_1=(0,1)$，$I_2=(1,\infty)$ とする．
$k=1,2$ に対し，f は I_k 上で一様連続か？理由とともに答えよ．

（解答）

(i) f が I 上で連続であることの定義は

「$\forall a\in I \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall b\in I \quad |a-b|<\delta \Rightarrow |f(a)-f(b)|<\varepsilon$」

である．

それを示すため，$a\in I$ と $\varepsilon>0$ を任意にとる．このとき $\delta>0$ を $\delta=\dfrac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon}$ と定める．この $\delta>0$ は $a-\delta>0$ と $\dfrac{\delta}{a(a-\delta)}=\varepsilon$ を満たしていることに注意．$|a-b|<\delta$ を満たす $b\in I$ をとる．このとき $b>a-\delta$ に注意すると，

$$|f(a)-f(b)|=\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b-a|}{ab}<\frac{\delta}{a(a-\delta)}=\varepsilon$$

となる．

以上より，f が I 上で連続であることが示された．

(ii) f は I_1 上では一様連続ではなく，I_2 上では一様連続である．

まず，f が I_2 上で一様連続であることを見る．そのためには，

「$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall a,b\in I_2 \quad |a-b|<\delta \Rightarrow |f(a)-f(b)|<\varepsilon$」

を確かめればよい．$\varepsilon>0$ を任意にとり，$\delta>0$ を $\delta=\varepsilon$ と定める．$|a-b|<\delta$ を満たす $a,b\in I_2$ に対して，$a,b>1$ に注意すると

$$|f(a)-f(b)|=\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b-a|}{ab}\le|b-a|<\delta=\varepsilon$$

となる．以上より，f が I_2 上で一様連続であることが分かった．

次に，f が I_1 上で一様連続であることを見る．そのためには，

「$\exists\varepsilon>0 \quad \forall\delta>0 \quad \exists a,b\in I_1 \quad |a-b|<\delta\wedge|f(a)-f(b)|\ge\varepsilon$」

を示せばよい．

$\varepsilon>0$ を $\varepsilon=1$ とおく．任意にとった $\delta>0$ に対し，2 以上の自然数 n を $\dfrac{1}{n}<\delta$ を満たすようにとり，$a,b\in I_1$ を $a=\dfrac{1}{n}$，$b=\dfrac{1}{n+1}$ と定める．このとき $|a-b|=\dfrac{1}{n(n+1)}<\delta$ で，$|f(a)-f(b)|=1=\varepsilon$ となる．よって，f が I_1 上で一様連続でないことが示された． □

（配点）(i) は 10 点，(ii) はそれぞれ 10 点の 20 点の計 30 点満点で採点しました． □

[3] 次の不定積分を計算せよ.

(i) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}dx$ (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{2+3\cos x}dx$ (iii) $\displaystyle\int \sqrt{4x-x^2}dx$

(答え)

(i) $\displaystyle\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{7}{4}\log|x-1|+\frac{1}{4}\log|x+1|+C$

(ii) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{5}}\big(\log|\tan(x/2)+\sqrt{5}|-\log|\tan(x/2)-\sqrt{5}|\big)+C$

(iii) $\displaystyle 2\arcsin\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4x-x^2}+C$

(C は積分定数．以下同様.) □

(解答)

(i) 分子の次数を小さくし，部分分数展開をすると，

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}&=x+1+\frac{2x^2-1}{x^3-x^2-x+1}\\&=x+1+\frac{2x^2-1}{(x-1)^2(x+1)}\\&=x+1+\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{7}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

となる.（求め終わったら，検算することを強く勧めます.）従って，

$$\int \frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{7}{4}\log|x-1|+\frac{1}{4}\log|x+1|+C$$

となる.（ここでも，求め終わったら，検算することを強く勧めます.）

(ii) $t=\tan(x/2)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+3\cos x}dx&=\int \frac{1}{2+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt\\&=\int \frac{2}{5-t^2}dt\\&=\int \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{\sqrt{5}+t}+\frac{1}{\sqrt{5}-t}\Big)dt\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\int \frac{1}{t+\sqrt{5}}dt-\int \frac{1}{t-\sqrt{5}}dt\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\big(\log|t+\sqrt{5}|-\log|t-\sqrt{5}|\big)+C\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{|t+\sqrt{5}|}{|t-\sqrt{5}|}+C\end{aligned}$$

となる．$t = \tan(x/2)$ を上の式に代入すると，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2+\sin x}dx &= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\log|\tan(x/2)+\sqrt{5}| - \log|\tan(x/2)-\sqrt{5}|\big) + C\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{|\tan(x/2)+\sqrt{5}|}{|\tan(x/2)-\sqrt{5}|} + C\end{aligned}$$

となる（最後に $t = \tan(x/2)$ を代入するのを忘れないように）．

(iii) $x-2 = 2\sin\theta$ とおくと，$\sqrt{4x-x^2} = 2\cos\theta$，$\dfrac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$ となるので，

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x-x^2}dx &= \int 4\cos^2\theta d\theta\\ &= \int 2\big(1+\cos(2\theta)\big)d\theta\\ &= 2\theta + \sin(2\theta) + C\end{aligned}$$

となる．$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}(x-2)\sqrt{4x-x^2}$ に注意して，$\theta = \arcsin(x-2/2)$ を上の式に代入すると，

$$\int \sqrt{4x-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x-2}{2} + \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4x-x^2} + C$$

となる.（余裕があれば微分して確かめると良い.） □

（配点）1 問 10 点の 30 点満点で採点しました．答えがあっていても整理不足と思われる答案は 2 点〜5 点減点しました．特に，変数変換をした場合は変数を（この場合は x に）戻すことを忘れないように．私が惜しいと判断した答案には部分点をつけていることがありますが，基本的にはあっているかどうかを見ました． □

[4] 閉区間 $[1,4]$ 上の関数 f を $f(x)=x^2$ で定める．

(i) $\alpha = \int_1^4 f(x)dx$ を計算せよ．

(ii) $[1,4]$ 内に含まれる閉区間 $[a,b]$ に対して，$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ を満たす $\xi \in [a,b]$ を a と b を用いて表せ．

(iii) α を (i) で求めた値とする．$\varepsilon > 0$ に対して，次の条件を満たす $\delta > 0$ を 1 つ求めて，ε で表せ．

「$|\Delta| < \delta$ を満たす $[1,4]$ の任意の分割 Δ と，Δ の任意の代表点 ξ に対して，$|S(f,\Delta,\xi)-\alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．」

ここで，$[1,4]$ の分割 $\Delta\colon 1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 4$ と，Δ の代表点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ に対して，$S(f,\Delta,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ である．

（答え）(i) $\alpha = 21$　(ii) $\xi = \sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$　(iii) 例えば $\delta = \dfrac{\varepsilon}{24}$． □

（解答）

(i)

$$\alpha = \int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=1}^4 = \frac{64-1}{3} = 21$$

(ii)

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=a}^b = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3}$$

より，$f(\xi) = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$ でなければならない．$\xi > 0$ に注意すると $\xi = \sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$ となる．この ξ は確かに $[a,b]$ の点であることに注意．

(iii) 後ほど配ります． □

（配点）(i) は 5 点，(ii) は 7 点，(iii) は 13 点の 25 点満点で採点しました．
□

数学 3B・中間試験 解説の補足

[4](iii) の解答：

(i) より $\alpha = 21$ である．$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を $\delta = \dfrac{\varepsilon}{24}$ と定めるときに

「$|\Delta| < \delta$ を満たす $[1,4]$ の任意の分割 Δ と，Δ の任意の代表点 ξ に対して，$|S(f,\Delta,\xi) - 21| < \varepsilon$ が成り立つ.」

を示す.

$\varepsilon > 0$ を任意にとり，$\delta > 0$ を $\delta = \dfrac{\varepsilon}{24}$ と定める．$|\Delta| < \delta$ を満たす $[1,4]$ の分割

$$\Delta\colon 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$$

と，Δ の代表点 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ を任意にとる．Δ の別の代表点 $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ を

$$\xi'_k = \sqrt{\frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3}} \in [x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ととる．このとき，

$$\begin{aligned}
S(f,\Delta,\xi') &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1}^2 + x_{k-1}x_k + x_k^2}{3}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^3 - x_{k-1}^3}{3} = \frac{x_n^3 - x_0^3}{3} = \frac{4^3 - 1^3}{3} = 21
\end{aligned}$$

となる．また，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$\begin{aligned}
|f(\xi_k) - f(\xi'_k)| &= |\xi_k^2 - {\xi'_k}^2| = |\xi_k + \xi'_k|\,|\xi_k - \xi'_k| \\
&\leq (4+4)|\xi_k - \xi'_k| \leq 8|x_k - x_{k-1}| \leq 8|\Delta| < 8\delta
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}
|S(f,\Delta,\xi) - 21| &= |S(f,\Delta,\xi) - S(f,\Delta,\xi')| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)(x_k - x_{k-1})\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - f(\xi'_k)|(x_k - x_{k-1}) \\
&< \sum_{k=1}^{n} 8\delta(x_k - x_{k-1}) \\
&= 8\delta(4-1) = 24\delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ． $\square$