1.

(1)-5

(2)$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 10 \\ 11 & 14 & 15 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(3)$-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & 9 & 10 \\ 11 & 14 & 15 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

2.

(1)n 次実対称行列 A が半正定値であるとは、任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \geqslant 0$ となることである。

(2)

(ア)A が半正定値であるとする。λ を A の固有値、$\boldsymbol{x}$ を λ に関する固有ベクトルとするとき ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = \lambda{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x} = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 \geqslant 0$ であり、$\|\boldsymbol{x}\|^2 > 0$ であるから $\lambda \geqslant 0$ である。

(イ)$A = {}^tBB$ とする。$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ のとき ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{x}{}^tBB\boldsymbol{x} = {}^t(B\boldsymbol{x})B\boldsymbol{x} = \|B\boldsymbol{x}\|^2 \geqslant 0$ であるから、A は半正定値である。よって (ア) より A の任意の固有値は非負である。

(ウ)$\lambda_1 \cdots \lambda_n \geqslant 0$ を A の固有値とする。このときある直交行列 P があり、$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ となる。

このとき $A = {}^t(\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\}{}^tP)\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\}{}^tP$ となる。

3.

(1)A の rref は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる。よって $\mathrm{Im}f$ の基底は $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ であり、次元は 2 である。

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して、$(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x+2y & x+y+z \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = 0$ が成り立つとき、$x+2y=0$ かつ $x+y+z=0$ である。よって、$(\mathrm{Im}f)^{\perp}$ の基底は $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ であり、次元は 2 である。

4.

(1) ○ (2) × (3) ○ (4) ×

5.

(1)$\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)^2(\lambda-3)$ であるから、固有値は 1(重複度 2)、3 である。

(2)$\lambda I - A$ を行基本変形すると、$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる。よって A が対角化可能となる条件は $a=2$ である。

(3)1 に関する固有空間の基底として $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$、3 に関する固有空間の基底として $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がとれる。$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{1,1,3\}$ となる。

6.

(1)$f_x = f_y = f_z = 0$ より、停留点は $(0,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4})$ である。

(2)$(0,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4})$ におけるヘッセ行列はそれぞれ

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ となる。

(3)$(0,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4})$ においてそれぞれ $(\sigma^+(q), \sigma^-(q)) = (2,1), (2,1), (3,0)$ であるから、f は $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{4})$ で極小値 $-\frac{1}{64}$ をとる。