曽家 希美 君の模範解答

演習問題２（2016 年 6 月 21 日分）

次回 6 月 28 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題１】
次のそれぞれの行列の行列式を計算せよ．途中計算も書きなさい．(交代性や線形性を用いると楽に計算できる.)
$a_1 = {}^t[1,0,0]$, $a_2 = {}^t[0,2,0]$, $a_3 = {}^t[0,0,3]$.

(1) $\det[a_1, a_2, a_3]$
(2) $\det[a_1, 2a_2, a_3]$
(3) $\det[a_3, a_2, a_1]$
(4) $\det[a_3, a_1, a_2]$
(5) $\det[2a_2, a_1, -a_3]$

(1) $\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$

(2) $\det[a_1, 2a_2, a_3] = 2\cdot\det[a_1, a_2, a_3] = 12$

(3) $\det[a_3, a_2, a_1] = -\det[a_1, a_2, a_3] = -6$

(4) $\det[a_3, a_1, a_2] = -\det[a_3, a_2, a_1] = 6$

(5) $\det[2a_2, a_1, -a_3] = 2\cdot\det[a_2, a_1, -a_3]$

$= 2\cdot(-1)\cdot\det[a_2, a_1, a_3] = 2\det[a_1, a_2, a_3]$

$= 12$

【問題２】

$$A = \begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}$$

としたとき，$\det A = 0$ となるための実数 a,b,c に関する必要十分条件をもとめよ．(教科書演習問題 4.1.2 参照)

$\det A = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - ac^2 - cb^2$

$= -(a-b)(a-c)(b-c)$

よって． $a=b$ または $a=c$ または $b=c$

裏に続く

【問題３】
３次の行列 A,B に対して $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ を証明せよ.（２次行列に対する定理 4.3.1 の証明を参考にせよ）

$A = [\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3]$ $\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ $\mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$ $\mathbb{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$

$B = [\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3]$ $\mathbb{b}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ $\mathbb{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix}$ $\mathbb{b}_3 = \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix}$

このとき 積 AB は

$$AB = [b_{11}\mathbb{a}_1 + b_{21}\mathbb{a}_2 + b_{31}\mathbb{a}_3,\ b_{12}\mathbb{a}_1 + b_{22}\mathbb{a}_2 + b_{32}\mathbb{a}_3,\ b_{13}\mathbb{a}_1 + b_{23}\mathbb{a}_2 + b_{33}\mathbb{a}_3]$$

$f_1(b) \sim f_{12}(b)$ を b の多項式として.

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= f_1(b)\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_1] \\
&+ f_2(b)\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2] \\
&+ f_3(b)\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_3] \\
&+ f_4(b)\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_2] \\
&+ f_5(b)\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3] \\
&+ f_6(b)\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_3] \\
&+ f_7(b)\det[\mathbb{a}_2, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_2] \\
&+ f_8(b)\det[\mathbb{a}_2, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3] \\
&+ f_9(b)\det[\mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_3] \\
&+ f_{10}(b)\det[\mathbb{a}_3, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_3] \\
&+ f_{11}(b)\det[\mathbb{a}_3, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2] \\
&+ f_{12}(b)\det[\mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_1] \\
&= f_5(b)\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3] + f_{11}(b)\det[\mathbb{a}_3, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2] \\
&\quad + f_{12}(b)[\mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{12}b_{33} + b_{31}b_{22}b_{13} - b_{11}b_{32}b_{23})\cdot\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3] \\
&\quad + b_{31}b_{12}b_{23}\det[\mathbb{a}_3, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2] + b_{21}b_{32}b_{13}\det[\mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3, \mathbb{a}_1] \\
&= (b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{31}b_{12}b_{23} - b_{21}b_{12}b_{33} - b_{31}b_{22}b_{13} \\
&\quad - b_{11}b_{32}b_{23})\cdot\det[\mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2, \mathbb{a}_3] \\
&= (\det A)(\det B)
\end{aligned}$$

//.

【問題４（やってもやらなくてもよい）】$t, f, m \in \mathbb{R}^3$ に対して，右手の親指方向を t，人差し指方向を f，中指方向を m としたとき，

(1) 通常は $\det[t, f, m] \geq 0$ となることを示しなさい.

(2) $\det[t, f, m] < 0$ となるように右手の指を配置し，それをスケッチしなさい.（左利きに有利）

(1)

$\mathbb{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$ $\mathbb{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$ $\mathbb{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$

とおくと.

$$\begin{aligned}
\det[\mathbb{t}, \mathbb{f}, \mathbb{m}] &= (t_2f_3 - t_3f_2)m_1 + (t_3f_1 - t_1f_3)m_2 \\
&\quad + (t_1f_2 - t_2f_1)m_3 \\
&= (\mathbb{t} \times \mathbb{f}) \cdot \mathbb{m}
\end{aligned}$$

通常，$\mathbb{t} \times \mathbb{f}$ と $\mathbb{m}$ がなす角 θ は

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

であるので

$\det[\mathbb{t}, \mathbb{f}, \mathbb{m}] \geq 0$ となる。//

(2)