1/1

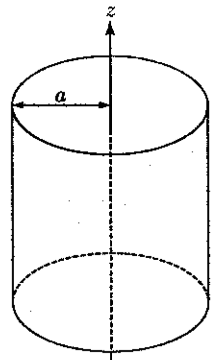
慶應義塾大学試験問題　物理学C

2012年11月19日（月）6時限（試験時間50分）　問題用紙 回収不要

担当者　小原、神成、高野、福嶋

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数ε_0、磁気定数μ_0、真空中の光速cの記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 真空中に半径aの円柱状の無限に長い絶縁体があり、その中に電荷が分布している。図I-1のように円柱の中心軸をz軸にとり、z軸に垂直な平面内の位置を2次元極座標(r,φ)で表した円柱座標系(r,φ,z)を用いて考える。z軸の正の向きの単位ベクトルを$\boldsymbol{e}_z$とする。位置(r,φ,z)において、z軸に垂直でz軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{e}_r$、z軸を中心に回転する方向（右ねじが$\boldsymbol{e}_z$方向に進む方向）の単位ベクトルを$\boldsymbol{e}_\varphi$とする（図I-2参照）。互いに直交するこれらの単位ベクトル$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$を用いて位置(r,φ,z)におけるベクトル量を表す。円柱の内外の位置(r,φ,z)における電荷密度$\rho(r,\varphi,z)$が



図I-1

$$\rho(r,\varphi,z)=\begin{cases}\rho_0\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 & \cdots\ r\le a,\\ 0 & \cdots\ a<r\end{cases}$$

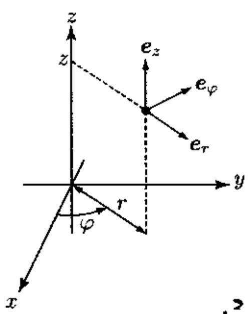
で与えられている。ここで、ρ_0は定数である。

(1) z軸を中心軸とする半径R、高さhの円柱内の全電荷$Q(R,h)$を求めなさい。

(2) 位置(r,φ,z)における電界$\boldsymbol{E}(r,\varphi,z)$を求めなさい。

(3) $a\le r\le b,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le z\le h$の範囲の空間に蓄えられた静電エネルギー$U_E$を求めなさい。

(4) $r=0,\ z=0$の点（原点）を基準点として、位置(r,φ,z)における電位$\phi(r,\varphi,z)$を求めなさい。



図I-2

$y^2-x^2+x^2-y^2$

問題 II 位置$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$における電位$\phi(\boldsymbol{r})$が

$$\phi(\boldsymbol{r})=\begin{cases}-\phi_0\left(\dfrac{z}{a}\right)+\phi_1\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right) & \cdots\ x^2+y^2\neq0,\ z<-a\\ \dfrac{1}{2}\phi_0\left(\dfrac{z}{a}\right)^2+\phi_1\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right) & \cdots\ x^2+y^2\neq0,\ -a\le z\le a\\ \phi_0\left(\dfrac{z}{a}\right)+\phi_1\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right) & \cdots\ x^2+y^2\neq0,\ a<z\end{cases}$$

x^2y^2

$4a^2\phi_1x^2$

$\dfrac{2a^2\phi_1(x^2y^2)-2a^2\phi_1 2x}{(x^2y^2)^2}$

で与えられている。ここで、$\phi_0, \phi_1, a\ (>0)$は定数である。

(1) $x^2+y^2\neq0$のとき、位置$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$における電界$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$を求めなさい。

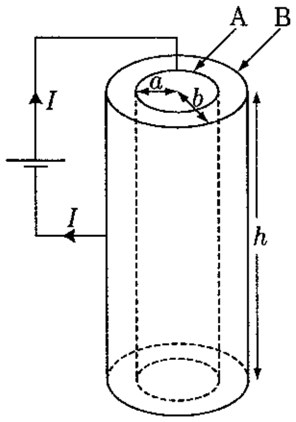
(2) $x^2+y^2\neq0$のとき、位置$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$における電荷密度$\rho(\boldsymbol{r})$を求めなさい。

$\frac{1}{2}\phi_0\cdot2\left(\frac{z}{a}\right)\cdot\frac{1}{a}\qquad\frac{z}{a^2}$

問題 III 図IIIのように、半径a、高さhの円筒状の電極Aと半径b、高さhの円筒状の電極Bが中心軸を共通にして、高さをそろえて配置してある。$a<b$である。中心軸をz軸にとり、z軸に垂直な平面内の位置を2次元極座標(r,φ)で表した円柱座標系(r,φ,z)を用いて考える。問題Iで定義した互いに直交する単位ベクトル$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$を用いて位置$(r,\varphi,z)$におけるベクトル量を表す（図I-2参照）。AとBの間は、位置(r,φ,z)における電気伝導率$\sigma(r,\varphi,z)$が

$$\sigma(r,\varphi,z)=\sigma_0\left(\frac{r}{a}\right)^2\quad\cdots\quad a\le r\le b$$

となるように導体が詰めてある。ここで、$\sigma_0\ (>0)$は定数である。AB間の電位差が一定に保たれ、AからBに一定電流Iが流れている場合を考える。



図III

$E\ell\cdot iS$

$Q=\varepsilon_0\cdot2\pi rh\cdot E$

(1) AB間の位置(r,φ,z)における電流密度$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)$と電界$\boldsymbol{E}(r,\varphi,z)$を求めなさい。

(2) AB間の電位差Vを求め、AB間の全電気抵抗Rを求めなさい。

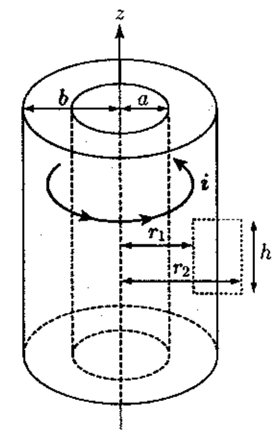
(3) $a<r_1<r_2<b$とするとき、中心からの距離rが$r_1<r<r_2$の範囲の電荷$Q(r_1,r_2)$をガウスの法則の積分形を用いて求めなさい。

(4) $a<r_1<r_2<b$とするとき、中心からの距離rが$r_1<r<r_2$の範囲で単位時間に発生するジュール熱$P(r_1,r_2)$を求めなさい。

$E(r)\cdot S=\varepsilon_0\ P$

問題 IV 真空中に内半径a、外半径bの円筒状の無限に長い導体がある。円筒の中心軸をz軸にとり、z軸に垂直な平面内の位置を2次元極座標(r,φ)で表した円柱座標系(r,φ,z)を用いて考える。問題Iで定義した互いに直交する単位ベクトル$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\varphi,\boldsymbol{e}_z$を用いて位置$(r,\varphi,z)$におけるベクトル量を表す（図I-2参照）。この導体に定常電流が流れている。位置(r,φ,z)における電流密度$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)$は

$$\boldsymbol{i}(r,\varphi,z)=\begin{cases}0 & \cdots\ r<a\quad\text{（真空中）}\\ i_0\left(\dfrac{r}{b}\right)^2\boldsymbol{e}_\varphi & \cdots\ a\le r\le b\quad\text{（導体中）}\\ 0 & \cdots\ b<r\quad\text{（真空中）}\end{cases}$$

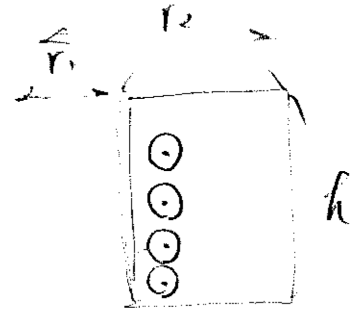


図IV

で与えられている（図IV参照）。この電流分布は、共通の軸を持つ多数のソレノイドの重ね合わせと考えることができる。

(1) $0\le r_1\le b<r_2$とするとき、$r_1\le r\le r_2$, $\varphi=$一定, $0\le z\le h$で指定される長方形（図IV中の点線の長方形）を貫く全電流$I(r_1,r_2)$をを求めなさい。

(2) 位置(r,φ,z)における磁束密度$\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$を求めなさい。



]

$J(r_1,r_2)=i(r)\cdot dr$