数学2B　第6回（実ベクトル空間での内積）

2019年11月5日（火）

担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

お知らせ： 中間試験を12月3日（火）に行う予定です．範囲は6章と7章とします．

第5回の宿題の解答例

問題5-5.(1) 列基本変形により列階数を求める．

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{列}\Leftrightarrow 3\text{列}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[3\text{列}-1\text{列}\times x]{2\text{列}-1\text{列}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1-x \\ x & 1-x & 1-x^2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{3\text{列}+2\text{列}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ x & 1-x & 2-x-x^2 \end{bmatrix}$$

ここで，$2-x-x^2 = -(x-1)(x+2)$ より，

$$\mathrm{rank}A = \begin{cases} 1 & x=1\text{のとき} \\ 2 & x=-2\text{のとき} \\ 3 & x\neq 1,-2\text{のとき} \end{cases} \qquad \square$$

(2) (a) $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ だから，(1) の結果と命題6.2.11.，命題6.2.12. より

- $x=1,-2$ のとき，f_A は (iv) 全射・単射のいずれでもない
- $x\neq 1,-2$ のとき，f_A は (i) 全単射

である．　□

(b) 正方行列 A に対し、rank(A) =rank$({}^tAA)$（後述）であるから（a）と同様に

- $x=1,-2$ のとき，$f_{\,{}^tAA}$ は (iv) 全射・単射のいずれでもない
- $x\neq 1,-2$ のとき，$f_{\,{}^tAA}$ は (i) 全単射

である．　□

命題：$m\times n$ 行列 A に対し，rank(A) =rank$({}^tAA)$ が成り立つ．

証明：A が $m\times n$ 行列のとき ${}^tAA$ は n 次正方行列である．表現行列を A とする $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の線形写像を f, 表現行列を ${}^tAA$ とする $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の線形写像を f^* とする．

n 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば ${}^tAA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であり，また，${}^tAA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば ${}^t\boldsymbol{x}\,{}^tAA\boldsymbol{x} = {}^t(A\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x} = 0$ であるから $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である． よって $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^*$ であり，次元公式より $\dim \mathrm{Im} f = \dim \mathrm{Im} f^*$ が成り立つ．よって rank(A) =rank$({}^tAA)$ である．

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい

問題 6-1.　次の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の正規直交化を求めなさい.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

問題 6-2.　次の行列 A に対し，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の正規直交基底を求めなさい．また，A の 4 つの列ベクトルが生成する部分空間の正規直交基底を求めなさい.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

問題 6-3.　$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ とし，$W_1 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$, $W_2 = \mathrm{Span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x}_3 \notin W_1$ を示しなさい.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ と直交する W_2 のベクトルを求めなさい.

問題 6-4(宿題).　次の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ の正規直交化を求めなさい.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$