

中間試験問題 (数学B3)

2012年11月28日

(担当 井口達雄)

答案用紙は1人2枚配布する。答案用紙1枚目の表面に問題 [1], 裏面に問題 [2], 答案用紙2枚目の表面に問題 [3], 裏面に問題 [4] を解答せよ。

[1] 次の不定積分を計算せよ。ただし, a, b は実定数である。

$$(1) \int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx \quad (2) \int \frac{2(x^3-1)}{(x^2+2)(x+2)^2} dx$$

$$(3) \int \frac{2}{(x^2+1)^2} dx$$

[2] 次の不定積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}} dx \quad (2) \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$(3) \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$$

- [3] (1) 関数 f が区間 I で一様連続であることの定義を論理記号を用いて書け。
 (2) 区間 I で定義された関数 f に対して, ある正数 ε_0 および区間 I 内の数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ が存在し, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) および $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が成り立っているとする。このとき, 関数 f は区間 I で一様連続でないことを示せ。
 (3) 以下で定められる関数 f が区間 I で一様連続であるかどうかを判定せよ。
 (i) $f(x) = x^2, \quad I = [0, 1]$
 (ii) $f(x) = x^2, \quad I = [0, \infty)$
 (iii) $f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad I = (0, 1]$

[4] 以下で定められる関数 f が区間 $[0, \infty)$ で広義可積分であるかどうかを判定せよ。

$$(1) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$(3) f(x) = \sin(x^2)$$

$$y = x^2 \quad \cdot \quad 4x^2 = (C_1 x^2 + C_2)(1+x^2)^2$$

$$4x^2 = (C_1 x^2 + C_2)(1+x^2-1)$$

$$4x^2 = 2C_1 x^2 + 2C_2 x^2$$

$$4 = C_1(1+x^2)^2 + (C_1 x^2 + C_2)2(1+x^2)$$

$$+ 2C_3 x^2(1+x^2) + (C_3(1+x^2)^2) + 2C_4 x^2$$

$$4 = 2C_3 - 2 \cdot C_2 - 2 \quad 2C_2 = 8 \quad C_3 = 4$$

$$2 \quad - \frac{1}{2} \sqrt{x+1}$$

中間試験問題 (数学B 3) の略解

[1] (1)

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \begin{cases} \int \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) dx = \frac{1}{a-b} \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + C & \text{if } a \neq b \\ \int \frac{1}{(x-a)^2} dx = -\frac{1}{x-a} + C & \text{if } a = b \end{cases}$$

(C は積分定数) ... (答)

(2)

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x^3-1)}{(x^2+2)(x+2)^2} dx &= \int \frac{2}{x+2} dx - \int \frac{3}{(x+2)^2} dx - \int \frac{1}{x^2+2} dx \\ &= 2 \log |x+2| + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

(C は積分定数) ... (答)

(3)

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x^2+1)^2} dx &= \int \left(\frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - x \frac{2x}{(x^2+1)^2} \right) dx = \int \left(\frac{2}{x^2+1} + x \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' \right) dx \\ &= \int \frac{2}{x^2+1} dx + \frac{x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \arctan x + \frac{x}{x^2+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[2] (1) $y = \sqrt{4x^2+1} + 2x$ とおくと, $(y-2x)^2 = 4x^2+1$ より, $x = \frac{1}{4}(y - \frac{1}{y})$. したがって,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}} dx &= \int \frac{2}{y^2-1} dy = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| + C \\ &= \log \frac{\sqrt{4x^2+1} + 2x - 1}{\sqrt{4x^2+1} + 2x + 1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{x(1+2x)} \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ に注意して, $y = \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ とおくと, $x = \frac{y^2-1}{2(y^2+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{y^2+1}$. したがって,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{2}{y^2-1} dy = \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| + C \\ &= \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $\tan \frac{x}{2} = y$ と置換すると, $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{4y}{(y^2+1)(y+1)^2} dy = 2 \int \left(\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{(y+1)^2} \right) dy \\ &= 2 \arctan y + \frac{2}{y+1} + C = 2 \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C \\ &= x + \frac{1}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \quad \dots \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[3] (1) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in I (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$.

(2) f が I で一様連続であるとしよう. このとき, $\varepsilon = \varepsilon_0/2 > 0$ に対してある正数 $\delta > 0$ が存在し, 任意の $x, y \in I$ に対して $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ が成り立たなくてはならない. 一方, 仮定より $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるから, 上の正数 $\delta > 0$ に対してある番号 $n_0 \in \mathbf{N}$ が存在し, $n \geq n_0$ であれば $|x_n - y_n| < \delta$ が成り立ち, それゆえ, $|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ が成り立たなくてはならない. ところが, これは明らかに仮定 $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ に矛盾する. したがって, f は I で一様連続ではない. (証明終)

(3) (i) 任意の正数 ε に対して, $\delta = \varepsilon/2 > 0$ とすると, 任意の $x, y \in I$ に対して, $|x - y| < \delta$ ならば

$$|x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2|x - y| < 2\delta = \varepsilon$$

が成り立つ. したがって, f は区間 I で一様連続である.

(ii) 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ を $x_n := n, y_n := n + \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定めると, $x_n, y_n \in I$ かつ $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるが,

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n^2 - (n + \frac{1}{n})^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

となる. したがって (2) の結果より, f は区間 I で一様連続でない.

(iii) 数列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ を $x_n := \frac{1}{2n\pi}, y_n := \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定めると, $x_n, y_n \in (0, 1]$ かつ $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるが,

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\sin(2n\pi) - \sin((2n + \frac{1}{2})\pi)| = |0 - 1| = 1 \quad (\forall n \in \mathbf{N})$$

となる. したがって (2) の結果より, f は区間 I で一様連続でない.

[4] (1) $R_2 \geq R_1 > 0$ に対して,

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}} dx \right| \leq \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_{R_1}^{R_2} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{R_1}} - \frac{1}{\sqrt{R_2}} \right) \rightarrow 0 \quad (R_2 \geq R_1 \rightarrow +\infty)$$

ゆえに, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}}$ は $[0, \infty)$ で広義可積分である.

(2) $R > 1$ に対して,

$$\int_0^R \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx \geq \int_1^R \frac{x}{\sqrt{2x^3}} dx = [\sqrt{x}]_1^R = \sqrt{R} - 1 \rightarrow +\infty \quad (R \rightarrow +\infty)$$

ゆえに, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}}$ は $[0, \infty)$ で広義可積分でない.

(3) $(\cos(x^2))' = -2x \cos(x^2)$ より, $\sin(x^2) = -\frac{1}{2x} (\cos(x^2))'$. これに注意して部分積分を行うと, $R_2 \geq R_1 > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \sin(x^2) dx &= - \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2x} (\cos(x^2))' dx = - \left[\frac{1}{2x} \cos(x^2) \right]_{R_1}^{R_2} + \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{1}{x} \right)' \cos(x^2) dx \\ &= \frac{\cos(R_1^2)}{2R_1} - \frac{\cos(R_2^2)}{2R_2} - \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\cos(x^2)}{x^2} dx \end{aligned}$$

したがって,

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} \sin(x^2) dx \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{R_1} \rightarrow 0 \quad (R_1 \rightarrow +\infty)$$

ゆえに, $f(x) = \sin(x^2)$ は $[0, \infty)$ で広義可積分である.

慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

		試験時間	90 分	分
平成25年 2 月 4 日 (月) 2 時限施行		学部	学科	年 組
担当者名	仲田 均・井口 達雄 君	学籍番号		
科目名	数学B3	氏 名		
		採点欄	※	

答案用紙は1人2枚配布する。答案用紙1枚目の表面に問題 [1], 裏面に問題 [2], 答案用紙2枚目の表面に問題 [3], 裏面に問題 [4] を解答せよ。

- [1] 次の2重積分およびその極限を計算せよ。ただし, a, b, R は正定数とする。

(1) $\iint_D e^x \sin y \, dx dy, \quad D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$

(2) $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy, \quad D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$

- [2] 次の累次積分の積分順序を交換せよ。ただし, f は \mathbf{R}^2 上の連続関数, a, b は正定数である。

(1) $\int_0^a \left(\int_1^{x+1} f(x, y) dy \right) dx$

(2) $\int_0^a \left(\int_0^{\frac{b}{x+b}} f(x, y) dy \right) dx$

- [3] 2重積分

$$I := \iint_D x \sin\left(\frac{\pi x}{x+y}\right) dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, 1 \leq x+y \leq 2\}$$

において $u = \frac{x}{x+y}, v = x+y$ により積分変数を (x, y) から (u, v) に変換する。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 変数変換の Jacobian $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求めよ。

- (2) 積分 I の値を求めよ。

- [4] (1) 以下の級数が収束するかどうかを判定せよ。

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

- (2) 以下の z に関するべき級数の収束半径を求めよ。ただし, a は正定数である。

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} z^n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{na^n}{n+2} z^n$

$e^{\frac{1}{n} \log \frac{n}{n+2}}$
 $e^{\frac{1}{n} \log n - \log(n+2)}$