

5/12 問題  $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  が、1次独立かどうか判定せよ。(1次従属ならば、自明でない1次関係のひとつ与えよ。)

解)  $C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = \mathbf{0}$  において、成分と比較すると、

$$\begin{cases} -C_1 + 2C_2 + C_3 = 0 & \dots (1) \\ C_1 - C_2 - 4C_3 = 0 & \dots (2) \\ -C_2 + 3C_3 = 0 & \dots (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ より } C_2 = 3C_3 \quad \dots (3')$$

$$(3') \text{ を } (1) \text{ に代入して } C_1 = 7C_3 \quad \dots (4)$$

(3') と (2) に代入しても (4) が得られる。

よって、(3'), (4) を満たす  $C_1, C_2, C_3$  を求めればよい。

例えば  $C_3 = 1$  において、(4) より  $C_1 = 7$ , (3') より  $C_2 = 3$ .

$$7x_1 + 3x_2 + x_3 = \mathbf{0} \quad \dots (5)$$

が実際に成り立つので、 $x_1, x_2, x_3$  は1次従属である。

自明でない1次関係は (5)。

注) 「 $x_3 = C_1 x_1 + C_2 x_2$  において  $C_1, C_2$  を求める」

という方針では、うまくいかないことがある。例えば、

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の場合、 $x_3 = C_1 x_1 + C_2 x_2$  とする  $C_1, C_2$  は存在しないが、

$$2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 = \mathbf{0}$$

なので1次従属である。