平成28年7月25日(月)6時限施行

数学４Ａ定期試験問題 （一斉）

栗原将人, 亀谷幸生

注意: 途中の計算も適宜書くこと.

[1] $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ とおく.

1) A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めなさい.

2) $\mathbf{R}^4$ の線形部分空間 $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ の基底と次元を求めなさい.

3) $\mathbf{R}^4$ の線形部分空間 $\{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4\}$ の基底と次元を求めなさい.

[2] $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & k \\ -1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおく.

1) A の行列式 $\det A$ を因数分解しなさい.

2) $\mathrm{rank} A$ が $1, 2$ となるような k の値をそれぞれ求めなさい.

[3] 空間内の平面 P を $x - 2y + 2z = 0$ をみたす $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ を位置ベクトルとする点全体の集合として定める.

1) 平面 P と直交する長さ 1 のベクトル $\boldsymbol{v}$ を求めなさい.

2) 平面 P に関する対称変換を表す行列 A を求めなさい.

[4] $A = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおく.

1) A が対角化可能であるための k の条件を求めなさい.

2) A が対角化可能で<u>ない</u>とき, A^n を求めなさい.

[5] 1) 2 次行列 A で $A \neq O$, $A^2 = O$ をみたすものを一つ与えなさい.

2) 2 次行列 A と 2 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $A\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $A^2\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ をみたすならば, $\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}$ は 1 次独立であることを示しなさい.

[6] V, W を $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間で $V \subset W$ をみたすものとし, $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ を V の基底, $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l$ を W の基底とする.

1) $[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k] = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_l]P$ をみたす l 行 k 列の行列 P が存在することを示しなさい.

2) $k \leq l$ であることを P を使って示しなさい.