2018 年度数学 2B　期末試験 (一斉)　試験時間:90 分

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ とする. 以下の問いに答えよ. 答えのみで良い.

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ.

(2) A の余因子行列 $\mathrm{adj} A$ を求めよ.

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

2. 以下の問いに答えよ.

(1) n 次行列 A が半正定値行列であることの定義を書け.

(2) 実対称行列 A に対して, 以下は全て同値である.

(a) A は半正定値行列である.

(b) A の固有値は全て正である.

(c) ある実対称行列 B が存在して, $A = BB$ となる.

(ア): (a) $\to$ (b), (イ): (c) $\to$ (b), (ウ): (b) $\to$ (c) をそれぞれ証明せよ.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とし, A を表現行列とする線形写像を f とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Im} f$ の基底と次元を求めよ.

(2) $(\mathrm{Im} f)^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4 \mid$ 任意の $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im} f$ に対して $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0\}$ とする. すなわち, $(\mathrm{Im} f)^{\perp}$ は $\mathrm{Im} f$ の任意の要素と直交するベクトル全体の集合である. $(\mathrm{Im} f)^{\perp}$ の要素 ${}^t[x\ y\ z\ w]$ の満たすべき条件を示し, $(\mathrm{Im} f)^{\perp}$ の基底と次元を求めよ.

4. 次の (1) から (4) の各命題について, いつでも正しいものには○, そうでないものには×を解答欄に記入せよ. 答えのみで良い.

(1) 任意の線形写像は表現行列を持つ.

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ において $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とするとき, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である.

(3) 任意の n 次行列 A において, A が正則ならば A は固有値に 0 を持たない.

(4) A を n 次行列とする. A の任意の固有値 λ に対する固有空間の次元は $\mathrm{rank}(\lambda I - A)$ に一致する.

裏面に続く

5. $a \in \mathbb{R}$ のもとで

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & a-3 \\ 0 & 1-a & 4-a \end{bmatrix}$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有多項式と固有値を求めよ．

(2) A が対角化可能となる a の条件を求めよ．また，対角化可能な a に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ．

6. $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対する関数

$$f(x, y, z) = 4x^3 - 4x^2y + y^2 + 2zx + z^2$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x, y, z)$ の停留点を全て求めよ．

(2) (1) で求めた各停留点におけるヘッセ行列 H_f を求めよ．

(3) (1) で求めた各停留点が $f(x, y, z)$ の極値となるかどうかを判定せよ．

以上