2019 年度数学 2B　期末試験 (一斉)　試験時間:90 分

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ としてこれを表現行列とする線形写像をそれぞれ f_A, f_B とする．以下の問いに答えよ.

(1) $U = \mathrm{Ker} f_A$ とするとき, U の基底と次元を求めよ.

(2) $W = \mathrm{Ker} f_B$ とするとき, $U \cap W$ の基底と次元を求めよ.

2. 以下の問いに答えよ.

(1) n 次行列 A の固有値と固有ベクトルの定義を書け.

(2) n 次行列 A と n 次正則行列 B が $AB = BA$ を満たすとき, A の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し, $B\boldsymbol{x}$ も A の固有ベクトルになることを示せ.

(3) n 次行列 A が固有値 2 を持つとき, $A^3 - 4A$ は正則行列ではないことを示せ.

3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を実 3 次ベクトル, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ とする.

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \det[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \\ \det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}] \\ \det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}] \end{bmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のとき, f の表現行列を求めよ.

4. $t \in \mathbb{R}$ のもとで

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -t+3 & t-3 & 2 \end{bmatrix}$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1) A の固有多項式と固有値を求めよ.

(2) A が対角化可能となる t の条件を求めよ．また, 対角化可能な t に対して, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ.

裏面に続く

5. 下記の行列の行列式を求めよ.

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4b-1 & b+1 & b & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. $x, y, z \in \mathbb{R}$ に対する関数

$$f(x,y,z) = x^3 - x - xy - xz + y^2 - yz + z^2$$

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y,z)$ の停留点を全て求めよ.

(2) (1) で求めた各停留点におけるヘッセ行列 H_f を求めよ.

(3) (1) で求めた各停留点が $f(x,y,z)$ の極値となるかどうかを判定せよ.

以上