

数学 2 B 第 1 3 回の演習問題の解答例

問： $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$ の極大, 極小を調べなさい.

解答例： まず停留点を求める.

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + 4y \\ 2y + 4x \\ 2z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を解くと, 停留点は $(0, 0, 0)$ のみである.

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となり, $(0, 0, 0)$ におけるヘッセ行列 H も同様である.

$$\det(\lambda I - H) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -4 & 0 \\ -4 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)((\lambda - 2)^2 - 16) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 6)$$

となり, H は正の固有値と負の固有値を持つため, 正定値でも負定値でもない. すなわち, $(0, 0, 0)$ は極小点でも極大点でもない.