馬場 恵理子 君の模範解答

演習問題３（2016 年７月５日分）

次回７月 12 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題１】次の行列の固有値と固有行列をもとめよ．

(1) $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix} = A$とおく。

$f_A(\lambda) = (\lambda-11)(\lambda+10)+108$

$= \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$

$\therefore \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ 　固有値$-1, 2$ //

$\lambda_1=-1$に対する固有行列$x_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$として、

$\begin{cases} 11x+6y = -x \\ -18x-10y = -y \end{cases} \iff 2x+y=0$

$\therefore x_1 = k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ // ($k \neq 0$でない任意定数)

$\lambda_2 = 2$に対する固有行列も同様に考えて$x_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$として $x_2 = k\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ //

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = B$とおき。(1)同様に考えて、

$f_B(\lambda) = \lambda^2-\lambda+1$ より $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ //

λ_1に対する固有行列 $x_1 = k\begin{bmatrix} -(3-\sqrt{3}i) \\ 2 \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$ //

λ_2に対する固有行列 $x_2 = k\begin{bmatrix} -(3+\sqrt{3}i) \\ 2 \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$ //

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = C$とおき、(1)(2)同様に考えると

$f_C(\lambda) = (\lambda-2)^2$ より $\lambda_1 = 2$ //

λ_1に対する固有行列 $x_1 = k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ //

【問題２】問題１の (1)〜(3) のそれぞれは対角化できるか．対角化できる場合は対角化せよ．

(1) $P_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ と定めると、$P_A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$P_A^{-1} A P_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ //

(2) $P_B = \begin{bmatrix} -3+\sqrt{3}i & -3-\sqrt{3}i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ と定めると、

$P_B^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{3}i}\begin{bmatrix} 2 & 3+\sqrt{3}i \\ -2 & -3+\sqrt{3}i \end{bmatrix}$

$\therefore P_B^{-1} B P_B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3}i \end{bmatrix}$ //

(3) 対角化できない。

【問題３】

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$$

に対して，A^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を計算せよ．

問題1(1)より $A = P_A D P_A^{-1}$ （ここで $D = P_A^{-1} A P_A$）

よって $A^n = (P_A D P_A^{-1})(P_A D P_A^{-1}) \cdots\cdots (P_A D P_A^{-1})$

$= P_A D^n P_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3(-1)^n+2^{n+2} & -2(-1)^n+2^{n+1} \\ 6(-1)^n-3\cdot2^{n+1} & 4(-1)^n-3\cdot2^n \end{bmatrix}$ //

【問題4】A を n 次実行列とする．$A \neq O$ ならば $A\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ となるベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在することを示せ．

対偶をとって考える。すなわち、Aをn次実行列として、任意のベクトルxに対してAx=0 ならばA=0を示す。

このとき x_i についてi行目だけが1で、それ以外がすべて0であるベクトルを x_i，またAの各列ベクトルを a_i とすると $A=[a_1, a_2, \cdots a_n]$ と表せる。

すると、$Ax_i = a_i$

任意のベクトルに対しAx=0 なので、

$a_i = 0$

これが、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対してすべて成立するので $a_1=0, a_2=0, \cdots, a_n=0$

となり　A=0 である。

よって対偶が示されたので、

$A \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax \neq 0$ も

示された。

【問題5】

(1) 2次実行列 B が異なる固有値 λ_1, λ_2 を持つとき，

$$\det(B) = \lambda_1\lambda_2$$

となることを示せ．

(2) 2次実行列 C が重複度2の固有値 λ_0 を持つとき，

$$\det(C) = \lambda_0^2$$

となることを示せ．

(1) この時、正則2次行列 P_B を用いて、

$P_B^{-1} B P_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ と表せる。

このとき $\det(P_B^{-1} B P_B) = \lambda_1\lambda_2 - 0\cdot 0$

$\therefore \det(P_B^{-1})\det(B)\det(P_B) = \lambda_1\lambda_2$

$\det(P_B^{-1})\det(P_B)\det(B) = \lambda_1\lambda_2$

$\det(P_B^{-1}\cdot P_B)\det(B) = \lambda_1\lambda_2$

$P_B^{-1}\cdot P_B = I$ より $\det(P_B^{-1}P_B) = 1$

$\therefore \det(B) = \lambda_1\lambda_2$ //

(2). この時、正則2次行列 P_C を用いて、

$P_C^{-1} C P_C = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$ と表せる。

このとき $\det(P_C^{-1} C P_C) = \lambda_0^2 - 0\cdot 1 = \lambda_0^2$

$\det(P_C^{-1})\det(C)\det(P_C) = \lambda_0^2$

$\det(P_C^{-1}P_C)\det(C) = \lambda_0^2$

$P_C^{-1}P_C = I$ より $\det(P_C^{-1}P_C) = 1$

$\therefore \det(C) = \lambda_0^2$ //

吉田 旬汰 君の模範解答

注 4 用紙が複数枚に及ぶ場合，氏名は全ての用紙に記入すること．

演習問題 3（2016 年 7 月 5 日分）

次回 7 月 12 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題 1】次の行列の固有値と固有~~行列~~をもとめよ．ベクトル

(1) $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(1) $(\lambda-11)(\lambda+10)-(-6)\cdot 18 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$

$\therefore \lambda = 2, -1$

$\lambda = 2$ のとき，

$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -18 & -12 \end{pmatrix} x = 0 \quad \therefore x = \begin{pmatrix} k \\ -\frac{3}{2}k \end{pmatrix} \ (k \neq 0)$

$\lambda = -1$ のとき，

$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} x = 0 \quad \therefore x = \begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix}$

(2) $(\lambda-2)(\lambda+1)-(-3)\cdot 1 = \lambda^2-\lambda+1$

$\therefore \lambda = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\lambda = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき．

$\begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}i}{2} & 3 \\ -1 & \frac{-3-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \quad \therefore x = \begin{pmatrix} k \\ \frac{-3+\sqrt{3}i}{6}k \end{pmatrix}$

$\lambda = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき．

$\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{3}i}{2} & 3 \\ -1 & \frac{-3+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \quad \therefore x = \begin{pmatrix} k \\ -\frac{3+\sqrt{3}i}{6}k \end{pmatrix}$

(3) $\lambda(\lambda-4)-(-4)\cdot 1 = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$

$\therefore \lambda = 2$

$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \quad \therefore x = \begin{pmatrix} k \\ \frac{1}{2}k \end{pmatrix}$

【問題 2】問題 1 の (1)〜(3) のそれぞれは対角化できるか．対角化できる場合は対角化せよ．

(1) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{2\cdot(-2)-1\cdot(-3)}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{pmatrix} P$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$

(3) 対角化できない

【問題 3】

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$$

に対して，A^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を計算せよ．

$P^{-1}AP = D \quad \left(D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$

$\therefore A = PDP^{-1}$

$A^n = PD^nP^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (-1)^n \\ -3\cdot 2^n & -2(-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3(-1)^n & 2^{n+1}-2(-1)^n \\ -3\cdot 2^{n+1}+6(-1)^n & -3\cdot 2^n+4(-1)^n \end{pmatrix}$

【問題4】Aをn次実行列とする．$A \neq O$ならば$A\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$となるベクトル$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$が存在することを示せ．

$$A = \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix} \qquad (a_i \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leqq i \leqq n)$$

とおく、

題意をみたすxが存在しないと仮定、

すなわち、$A \neq O$ならば、任意のxに対して、

$Ax = \mathbf{0}$ をみたすと仮定する。

$$Ax = \begin{bmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{bmatrix} x$$

$$= \begin{bmatrix} {}^t a_1 x \\ {}^t a_2 x \\ \vdots \\ {}^t a_n x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ a_2 \cdot x \\ \vdots \\ a_n \cdot x \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ここで，$a_i \cdot x = 0$ となるのは、

$a_i = \mathbf{0}$ または $x = \mathbf{0}$ または $a_i \perp x$

のときのみ これが任意のxで成り立つためには、

$a_i = \mathbf{0}$ $(1 \leqq i \leqq n)$

が成り立たなければならない。

ところが、このとき，

$A = O$

となり、$A \neq O$であることに矛盾する．

よって，$A \neq O$ ならば $Ax \neq \mathbf{0}$ となるベクトル$x \in \mathbb{R}^n$が存在する

（証明終）

【問題5】

(1) 2次実行列Bが異なる固有値λ_1, λ_2を持つとき，

$$\det(B) = \lambda_1 \lambda_2$$

となることを示せ．

(2) 2次実行列Cが重複度2の固有値λ_0を持つとき，

$$\det(C) = \lambda_0^2$$

となることを示せ．

(1) 2次実行列Bが異なる固有値λ_1, λ_2をもつとき，

$$B' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

とすると、

$$f_B(\lambda) = f_{B'}(\lambda)$$

このとき，$\lambda = 0$ を代入すると，

$$f_B(0) = \det(B)$$

よって，

$$f_B(0) = f_{B'}(0) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\therefore \underline{\det(B) = \lambda_1 \lambda_2}$$

(2) 2次行列Cが重複度2の固有値λ_0をもつとき，

$$C' = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

とすると，

$$f_C(\lambda) = f_{C'}(\lambda)$$

$\lambda = 0$を代入すると，

$$f_C(0) = \det(C)$$

よって，

$$f_C(0) = f_{C'}(0) = \begin{vmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{vmatrix} = \lambda_0^2$$

$$\therefore \underline{\det(C) = \lambda_0^2}$$

橋本 健哉 君の模範解答

注4 用紙が複数枚に及ぶ場合，氏名は全ての用紙に記入すること．

演習問題３（2016 年７月５日分）

次回７月 12 日に回収する．採点後の答案の返却および採点結果の公表はしない．採点前の答案については電子的に返却する．

【問題１】次の行列の固有値と固有行列をもとめよ．

(1) $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(1) $f_A(\lambda) = (\lambda - 11)(\lambda + 10) + 108$

$= (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$

よって固有値は $\underline{\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2}$

λ_1 に対する固有行列は，

$-12x - 6y = 0$ より $\underline{x_1 = k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \ (k \neq 0)}$

また，λ_2 に対する固有行列は，

$-9x - 6y = 0$ より $\underline{x_2 = k\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \ (k \neq 0)}$

(2) $f_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1) + 3 = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

よって固有値は $\underline{\lambda_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2},\ \lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}}$

λ_1 に対する固有行列は，

$\dfrac{-3 - \sqrt{3}i}{2}x - 3y = 0$ より

$\underline{x_1 = k\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i \end{bmatrix} \ (k \neq 0)}$

λ_2 に対する固有行列は，

$\dfrac{-3 + \sqrt{3}i}{2}x - 3y = 0$ より

$\underline{x_2 = k\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \end{bmatrix} \ (k \neq 0)}$

(3) $f_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 4) + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

よって固有値は $\underline{\lambda_1 = 2}$

これに対する固有行列は，

$2x - 4y = 0$ より，$\underline{x_1 = k\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \ (k \neq 0)}$

【問題２】問題１の (1)〜(3) のそれぞれは対角化できるか．対角化できる場合は対角化せよ．

(1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，$P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$

(2) $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$，$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$ とすると，

$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$，$P^{-1} = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \dfrac{1}{\beta - \alpha}\begin{bmatrix} 2\beta - 1 & 3\beta - 1 \\ -2\alpha + 1 & -3\alpha + 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$

$= \sqrt{3}i\begin{bmatrix} 1 - \beta & 0 \\ 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix}$

$= \underline{\begin{bmatrix} \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \end{bmatrix}}$

(3) 固有値を１つしかもたないので，

<u>対角化できない．</u>

【問題３】

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$$

に対して，A^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を計算せよ．

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (-1)^n & 2 \cdot 2^n \\ -2(-1)^n & -3 \cdot 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \underline{\begin{bmatrix} 3(-1)^{n+1} + 2^{n+2} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ 6(-1)^n - 3 \cdot 2^{n+1} & 4(-1)^n - 3 \cdot 2^n \end{bmatrix}}$

【問題4】Aをn次実行列とする．$A \neq O$ならば$A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$となるベクトル$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$が存在することを示せ．

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ とすると.}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ni} \end{bmatrix}$$

$A \neq O$のとき，Aの第l行に注目して．

a_{kl}（k, lは，$1 \leqq k \leqq n$，$1 \leqq l \leqq n$で任意の整数）

が0でないとする；

このとき，x_kをa_{kl}と同符号になるように

定めれば，$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{li} > 0$ となり，

$Ax \neq 0$ である //

【問題5】

(1) 2次実行列Bが異なる固有値λ_1, λ_2を持つとき，

$$\det(B) = \lambda_1 \lambda_2$$

となることを示せ．

(2) 2次実行列Cが重複度2の固有値λ_0を持つとき，

$$\det(C) = \lambda_0^2$$

となることを示せ．

(1) $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とすると，

Bの固有多項式$f_B(\lambda)$は，

$$f_B(\lambda) = (\lambda - b_{11})(\lambda - b_{22}) - b_{12} b_{21}$$
$$= \lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) = 0$$

2次方程式の解と係数の関係より，

$$\lambda_1 \lambda_2 = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}$$
$$= \det(B) \quad //$$

(2) $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ とすると，

Cの固有多項式$f_C(\lambda)$は，

$$f_C(\lambda) = (\lambda - c_{11})(\lambda - c_{22}) - c_{12} c_{21}$$
$$= \lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) = 0$$
$$= (\lambda - \lambda_0)^2$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda_0 + \lambda_0^2$$

$$\therefore \lambda_0^2 = c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}$$
$$= \det(C) \quad //$$