数学２Ｂ　第１２回の演習問題の解答例

問：次の実対称行列を対角化する直交行列を一つ求めなさい．

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

解答例： 固有方程式

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -4 & -4 \\ -4 & \lambda - 1 & 8 \\ -4 & 8 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 \\ &= (\lambda - 9)^2(\lambda + 9) = 0 \end{aligned}$$

を解くと，固有値は 9（重複度 2）と -9 である．固有値 9 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & 8 \\ -4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

の解より $\boldsymbol{x}_1 = {}^t(2, 0, 1)$ と $\boldsymbol{x}_2 = {}^t(2, 1, 0)$ は 1 次独立な固有ベクトルである．

一方，固有値 -9 に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -16 & -4 & -4 \\ -4 & -10 & 8 \\ -4 & 8 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

の解より，$\boldsymbol{x}_3 = {}^t(1, -2, -2)$ は固有ベクトルである．直交化すると，$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1$,

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2)}{||\boldsymbol{v}_1||^2} \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -4/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3$ となる．さらに正規化して

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{||\boldsymbol{v}_2||} = \begin{pmatrix} 2/3\sqrt{5} \\ -4/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{||\boldsymbol{v}_3||} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

対角化する直交行列として，以下の P を得る．

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

注）固有値 9 に対する固有ベクトルとして既に直交している $\boldsymbol{x}_1 = {}^t(4, 1, 1)$ と $\boldsymbol{x}_2 = {}^t(0, 1, -1)$ が目の子算で見つかると計算が少し減る（求めるべき直交行列も異なるものとなる）．