数学 3B 2017 年解答

最終更新日 2023 年 1 月 22 日

作成者: 大黒 瑠海空

e-mail: ruku_oguro@keio.jp

1　級数の収束証明

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することから, 任意の正数 ε に対しある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在し、任意の整数 $m,\ n$ について

$$m > n \geq n_1 \Rightarrow |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \frac{\varepsilon}{r+1}. \tag{1}$$

また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = r$ よりある整数 n_2 が存在し任意の整数 n について

$$n \geq n_2 \Rightarrow \left|\frac{b_n}{a_n} - r\right| < 1 \Rightarrow b_n < (r+1)a_n. \tag{2}$$

ここで $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ とおけば任意の整数 $m,\ n\ (m > n \geq n_0)$ に対し

$$\begin{aligned}
|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| &= b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m & (3)\\
&< (r+1)a_n + (r+1)a_{n+1} + \cdots + (r+1)a_m & (4)\\
&= (r+1)|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| & (5)\\
&< (r+1)\frac{\varepsilon}{r+1} = \varepsilon. & (6)
\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する.

2　級数の収束判定

3　収束半径

(a)

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} && (7)\\
&= \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\dfrac{\cos n}{\log n}\right|}} && (8)\\
&= \infty && (9)
\end{aligned}
$$

(b)

4　累次積分の順序変更

$$
\int_0^7 \left\{ \int_{\max\{-\sqrt{y}, \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}\}}^{\min\{\sqrt{y}, 2\}} f(x, y) dx \right\} dy \tag{10}
$$

5　重積分

(a)

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_y^{-y+2} \frac{x}{1+y^2} dx \right\} dy \tag{11}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left\{ (-y+2)^2 - y^2 \right\} dy \tag{12}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1-y}{1+y^2} dy \tag{13}$$

$$= 2\left[\tan^{-1} y - \frac{1}{2}\log(1+y^2) \right]_0^1 \tag{14}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2} - \log 2} \tag{15}$$

(b)

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ で座標変換すると積分領域が $\{(u,v) | 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 1\}$ になる. このとき面積変化率 $\det A$ は $\dfrac{2}{5}$.

$$I = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 2ve^{2u+v} \frac{5}{2} du \right\} dv \tag{16}$$

$$= 5\int_0^1 e^2 u du \int_0^1 ve^v dv \tag{17}$$

$$= \underline{\frac{5}{2}(e^2 - 1)} \tag{18}$$

(c)

極座標変換する.

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{1 + r\sin\theta}{r\sqrt{1-r^2}} r d\theta \right\} dr \tag{19}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} \right) d\theta \right\} dr \tag{20}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} dr \int_0^{\pi} d\theta + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \tag{21}$$

$$= \left[\sin^{-1} r\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \pi + \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 \tag{22}$$

$$= \underline{\frac{\pi^2}{6} + \sqrt{3} - 1} \tag{23}$$