数学2B　第12回（正定値行列）

2019年12月24日（火）
担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

8.2 行列の三角化，実対称行列の対角化，正定値行列

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案をOCR対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい

問題 12-1.　次の実対称行列について，正定値，負定値，いずれでもない，のどれに該当するか判定しなさい．

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,　(2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,　(3) $\begin{bmatrix} -1 & m & 0 \\ m & -2 & m \\ 0 & m & -3 \end{bmatrix}$

問題 12-2.　A を n 次実対称行列とする．このとき，以下が成立することを示しなさい．なお、(1) は任意の正方行列に対して成り立つが，実対称行列に関する定理 8.2.5. を用いて示してほしい．

(1) A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とすると，$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$ となる．

(2) A が正定値または負定値ならば，正則である．

問題 12-3(宿題).　任意の $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ に対して，3 次実対称行列 A が

$$ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = (\alpha+1)x_1^2 + (\alpha-1)x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2\alpha x_1x_3 + 2x_2x_3 $$

を満たすように定められているとする．このとき，A は，正定値，負定値，いずれでもない，のどれに該当するか (α の値に応じて) 判定しなさい．

第11回宿題の解答例

問題 11-2. A に対する固有多項式は，

$$ f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-6 & \lambda-6 & \lambda-6 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} $$

$$ = (\lambda-6)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-6) $$

よって固有値は $\lambda_1 = 2$(重複度 2), および，$\lambda_2 = 6$ である．

固有値 $\lambda_1 = 2$ に対する固有ベクトルは $(2I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解 $\boldsymbol{x}$ であり，

$$2I - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，$x_1 = c_1, x_2 = c_2$ と置いて固有ベクトルは，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし } c_1, c_2 \text{は複素数で，少なくともどちらかは } 0 \text{ でない})$$

と表せる．よって，$\lambda_1 = 2$ に対する固有空間（$\lambda_1 = 2$ に対する固有ベクトル全てに零ベクトルを加えた集合）を W_{λ_1} とすると，

$$W_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

である．また，2 つのベクトル（固有ベクトル）は明らかに 1 次独立である．ゆえに，$\dim W_{\lambda_1} = 2 = \text{重複度}$ となるから，定理 8.1.12. より対角化可能となる．

また，固有値 $\lambda_2 = 6$ に対する固有ベクトルは

$$c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし } c_3 \text{は } 0 \text{ でない複素数})$$

となる．よって，固有ベクトル

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を選び，

$$P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

と定めると，

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{であり，} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

と対角化できる． □

その他の問題の解答は keio.jp の授業支援の HP にアップロードします。

その他の問題の略解

問題 11-1．(1) 固有値はそれぞれ $\lambda_1=-1,\lambda_2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\lambda_3=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ となるから，対角化可能である．$\delta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ と置く．このとき，$\lambda_2=\delta,\lambda_3=-\delta^2$, $\delta-\delta^2=1$ であることに注意すると，固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ の各々に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ は，

$$\boldsymbol{p}_1=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_2=c_2\begin{bmatrix}\delta^2\\\delta\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{p}_3=c_3\begin{bmatrix}-\delta\\-\delta^2\\1\end{bmatrix},c_1,c_2,c_3\text{は 0 でない複素数}$$

である．$P=\begin{bmatrix}1&\delta^2&-\delta\\-1&\delta&-\delta^2\\-1&1&1\end{bmatrix}$ と定めると，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\\dfrac{1}{1+\delta}&-\dfrac{\delta}{1+\delta}&1\\\dfrac{\delta}{1+\delta}&-\dfrac{1}{1+\delta}&1\end{bmatrix}$ であり，

$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&\delta&0\\0&0&-\delta^2\end{bmatrix}$ と対角化できる． □

(2) 固有値は $\lambda_1=1$(重複度 2) または $\lambda_2=-1$ である．固有値 $\lambda_1=1$ に対する固有空間を W_{λ_1} とすると，

$$W_{\lambda_1}=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

と表せ，2 つのベクトル（固有ベクトル）は 1 次独立である．ゆえに，$\dim W_{\lambda_1}=$ 重複度 $(=2)$ であるから，対角化可能である．また，固有値 $\lambda_2=-1$ に対する固有ベクトルは，$c_2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$（$c_1$ は 0 ではない複素数）である．$P=\begin{bmatrix}-1&3&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ と定めると，

$P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3&-3\\1&1&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$ であり，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ と対角化できる． □

(3) 固有値は $\lambda_1=2$(重複度 2) または $\lambda_2=1$ である．固有値 $\lambda_1=2$ に対する固有空間を W_{λ_1} とすると，

$$W_{\lambda_1}=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

となる．よって $\dim W_{\lambda_1}=1<$ 重複度 であるから，対角化できない． □

(4) 固有値は $\lambda_1=1$(重複度 3) である．固有値 $\lambda_1=1$ に対する固有空間を W_{λ_1} とすると，

$$W_{\lambda_1}=\mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

となる．よって $\dim W_{\lambda_1}=1<$ 重複度 であるから，対角化できない． □

(5) 固有値は $\lambda_1 = 1$(重複度 2) または $\lambda_2 = 2$ である．固有値 $\lambda_1 = 1$ に対する固有空間を W_{λ_1} とすると，

$$W_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

と表せ，2 つのベクトル（固有ベクトル）は 1 次独立である．ゆえに，$\dim W_{\lambda_1} =$ 重複度 $(= 2)$ であるから，対角化可能である．また，固有値 $\lambda_2 = 2$ に対する固有ベクトルは，$c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$（$c_1$ は 0 ではない複素数）である．$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ と定めると，$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ と対角化できる． □

(6) 固有値は $\lambda_1 = 0$(重複度 2),$\lambda_2 = 2$ または $\lambda_3 = 4$ となる．固有値 $\lambda_1 = 0$ に対する固有空間を W_{λ_1} とすると，

$$W_{\lambda_1} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

となる．よって $\dim W_{\lambda_1} = 1 <$ 重複度 となるから，対角化できない． □