数学 1A 期末試験
以下の設問$\boxed{1}$から$\boxed{5}$に答えなさい．解答は解答用紙の所定の欄に記入すること．

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\mathbb{R}$ で定義された以下の関数 f_α $(\alpha = 1, 2)$ を考える．

$$f_\alpha(x) \quad = \quad \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(1) $\lim_{x\to 0} f_1(x)$，$\lim_{x\to\infty} f_1(x)$ が存在するならばその値を求めなさい．存在しないならば「存在しない」と記しなさい．

(2) f_1 の $x = 0$ における連続性と微分可能性を調べなさい．

(3) $f_2'(0)$ の値を求め，f_2' の $x = 0$ における連続性を調べなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x) = e^{x\sin x} = \exp(x \sin x)$ の原点における 6 次のテイラー近似を求めなさい．また $g(x, y) = \log(1 + x) \cos y$ の原点における 2 次のテイラー近似を求めなさい．ただし剰余項は求めなくてよい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f_i(x_1, x_2, x_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ を C^∞ 級関数とし，$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ と表す．$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$，$\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$，$\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ とする．点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ を中心とする立方体

$$C(\boldsymbol{a}; h) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, |x_i - a_i| \leq \frac{h}{2},\ \ i = 1, 2, 3 \right\}$$

を考える．$C(\boldsymbol{a}; h)$ の内側からみて $\pm\boldsymbol{e}_i$ 方向を向いた面において，$S_i^\pm = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} \pm \frac{h}{2}\boldsymbol{e}_i) \cdot (\pm h^2 \boldsymbol{e}_i)$ という量を考える (複号同順)．ただし $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ である．次の極限値を $\boldsymbol{f}$ またはその偏導関数などを用いて表しなさい．

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{S_1^+ + S_1^- + S_2^+ + S_2^- + S_3^+ + S_3^-}{C(\boldsymbol{a}; h) \text{ の体積}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ C^2 級関数 $H(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全ての点 x において $H''(x) > 0$ を満たしているとする．H' の値域を $Y = \{H'(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ と表す．

(1) Y の点 y を固定して，関数 $f(x) = yx - H(x)$ を考える．$f' = 0$ を満たす点 x^* が存在して，それは唯 1 つの最大点になることを示しなさい．

(2) x^* は y ごとに唯 1 つ決まるので，y の関数とみなせる．Y で定義された関数 $x^* = x^*(y)$ は C^1 級であることを示しなさい．

(3) Y で定義された C^1 級関数 $L(y) = yx^*(y) - H(x^*(y))$ を考える．$L'(y)$ を求めなさい．また L は C^2 級になることを示し，$L''(y)$ を H またはその導関数などを用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y) = xy$, $\varphi(x, y) = x^3 + x^2 - y^2$ を考える．$\varphi(x, y) = 0$ を満たす点の集合を C とする． C における f の極値を与える点の候補を全て求め，それらの点が極値を与えるか判定しなさい．