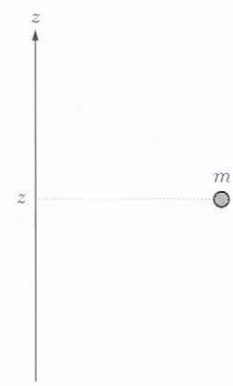
第 III 章

過去問の解答集

1　ベクトル，物体の運動

1.1 (1) $m\ddot{z} = -mg - k\dot{z}$

(2) $\dot{z} = v$ より，$\ddot{z} = \dot{v}$ となる．したがって，$m\dot{v} = -mg - kv$



(3) $$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \;\Rightarrow\; \frac{dv}{mg+kv} = -\frac{1}{m}dt$$

$$\Rightarrow\; \frac{dv}{v + \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dv}{v+\frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}\int dt$$

C を積分定数として，

$$\log|v + \frac{mg}{k}| = -\frac{k}{m}t + C$$

$t = 0$ で $v = v_0$ より

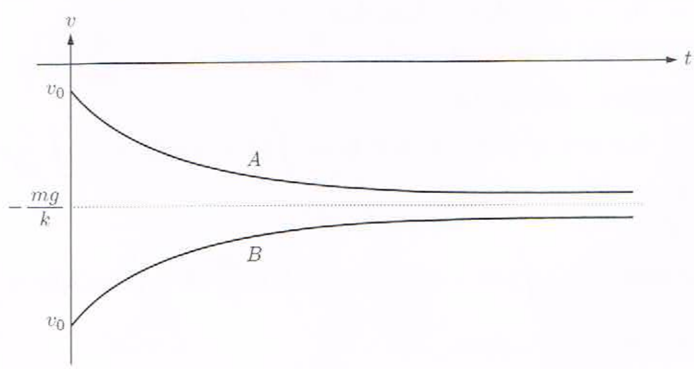
$$\log|v_0 + \frac{mg}{k}| = C$$

したがって，

$$\log|\frac{v+\frac{mg}{k}}{v_0+\frac{mg}{k}}| = -\frac{k}{m}t \;\Rightarrow\; |\frac{v+\frac{mg}{k}}{v_0+\frac{mg}{k}}| = e^{-kt/m} \;\Rightarrow\; \frac{v+\frac{mg}{k}}{v_0+\frac{mg}{k}} = \pm e^{-kt/m}$$

ところが $t = 0$ で左辺$= 1$．よって＋符号をとるべし．

$$\frac{v+\frac{mg}{k}}{v_0+\frac{mg}{k}} = e^{-kt/m} \;\Rightarrow\; \boxed{v = (v_0 + \frac{mg}{k})e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}}$$



曲線 A は初期値 v_0 が $v_0 > -\dfrac{mg}{k}$ を満たしている時.

曲線 B は初期値 v_0 が $v_0 < -\dfrac{mg}{k}$ を満たしている時.

図のように

$v_0 + mg/k > 0$ ならすべての t で常に $v + mg/k > 0$

$v_0 + mg/k < 0$ ならすべての t で常に $v + mg/k < 0$

(4) $t \to \infty$ とすると，$e^{-kt/m} \to 0$ より，$v \to -mg/k = v_\infty$.

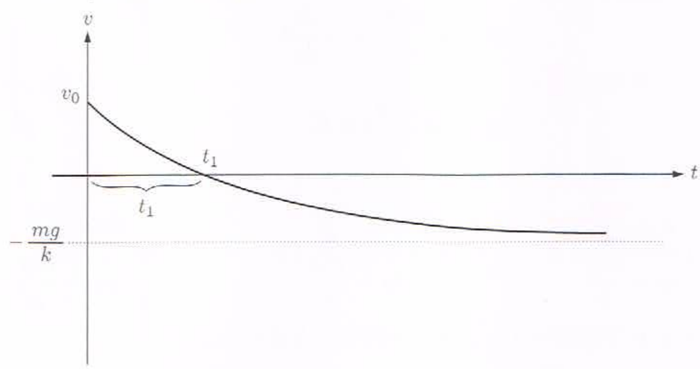
注)　$t \to \infty$ で $v \to$ 一定値になることを仮定すれば，$m\dot{v} = -mg - kv$ において $\dot{v}_\infty = 0$ と置いて，$0 = -mg - kv_\infty \ \Rightarrow\ v_\infty = -mg/k$ となり，(2) 式を解かなくても v_∞ は求まる.

(5) 上に投げるということは $v_0 > 0$ ということ．また，最高点では $v = 0$ となるので，

$$v = (v_0 + \frac{mg}{k})e^{-kt/m} - \frac{mg}{k} = 0 \ \Rightarrow\ (v_0 + \frac{mg}{k})e^{-kt_1/m} = \frac{mg}{k} \ \Rightarrow\ e^{-kt_1/m} = \frac{\frac{mg}{k}}{v_0 + \frac{mg}{k}}$$

$$\Rightarrow\ -\frac{kt_1}{m} = \log\frac{\frac{mg}{k}}{v_0 + \frac{mg}{k}} \ \Rightarrow\ t_1 = -\frac{m}{k}\log\frac{\frac{mg}{k}}{v_0 + \frac{mg}{k}} = \frac{m}{k}\log(1 + \frac{kv_0}{mg})$$

この t_1 は図の長さ t_1 を表している.



1.2

(1a)　$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}) = \nabla(A_x x + A_y y + A_z z) = (A_x, A_y, A_z) = \boldsymbol{A}$

(1b)　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r} = (A_y z - A_z y, A_z x - A_x z, A_x y - A_y x)$

(1c)　x 成分を計算すると $[\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r})]_x = \dfrac{\partial}{\partial y}(A_x y - A_y x) - \dfrac{\partial}{\partial z}(A_z x - A_x z) = 2A_x$. 他の成分も同様で，結果は $2\boldsymbol{A}$.

(2a)　両辺に $\dot{x}$ をかけて t で積分すると $0 = \displaystyle\int(\ddot{x} + x)\dot{x}dt = \frac{1}{2}\int\frac{d}{dt}\dot{x}^2 dt + \int x dx = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 + C$. よって保存量は $\dot{x}^2 + x^2$.

(2b)　前設問と同様に $0 = \displaystyle\int(\dot{x}\ddot{x} + \cos x)\dot{x}dt = \int\dot{x}^2\frac{d\dot{x}}{dt}dt + \int\cos x dx = \frac{1}{3}\dot{x}^3 + \sin x + C$. よって保存量は $\dfrac{1}{3}\dot{x}^3 + \sin x$.

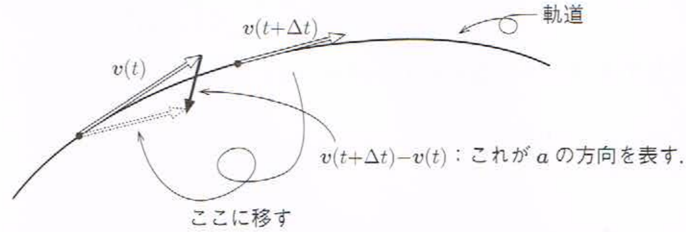
1.3

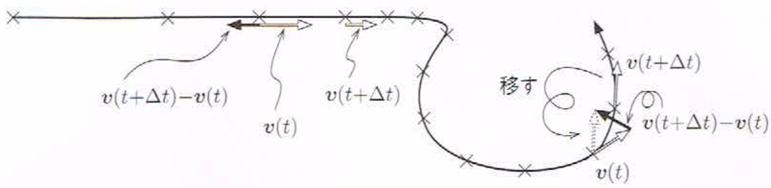
速度：$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{v}(t)$　$\cdots$ $\boldsymbol{v}$ は軌道の接線方向

加速度：$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{a}(t)$

$\cdots$ Δt を有限な微小量として，加速度ベクトルは速度ベクトルの

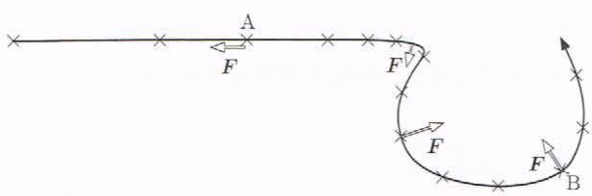
変化$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$ の方向と一致する





大事な事項

「速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ の変化 $\Delta\boldsymbol{v}$，つまり加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向は，その点で働いている力 $\boldsymbol{F}$ の方向である．」



ニュートン方程式は加速度が力 $\boldsymbol{F}$ の方向を向いていることを言っている．これを $m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$，または $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}$ として，$m\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ と書いて，Δt を微小量として，

$$m\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)=\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})}{m}\Delta t$$

よって速度ベクトルの変化 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$ は力 $\boldsymbol{F}$ の方向と一致する．

1.4

(1)　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(2,-1,3)\times(1,2,1)=(-7,1,5)$

(2)　$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$

(3)　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(1,1,-1)\cdot(3,1,4)=0$

(4)　$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-7,1,5)\cdot(1,1,-1)=-11$ より 11

(5)　$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\nabla}\times(x^2/2,yz,xy)=(x-y,-y,0)$

(6)　$\boldsymbol{\nabla}f=(2xyz,x^2z,x^2y)$

1.5

(1)　$m\ddot{z}=T-\gamma\dot{z}-mg$

(2)　$z=A\sin\omega t-l$ より $T=m\ddot{z}+\gamma\dot{z}+mg=-m\omega^2A\sin\omega t+\gamma\omega A\cos\omega t+mg$

(3)　糸がたるまない条件は $T\geq 0$ であり，$T=mg+A\omega\sqrt{\gamma^2+m^2\omega^2}\sin(\omega t+\delta)\geq mg-A\omega\sqrt{\gamma^2+m^2\omega^2}\geq 0$ から，

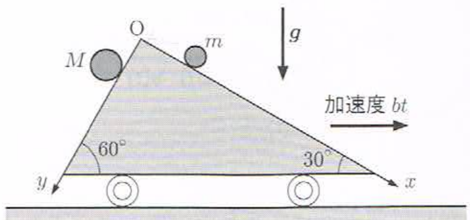
$$A_m=\frac{mg}{\omega\sqrt{\gamma^2+m^2\omega^2}}$$

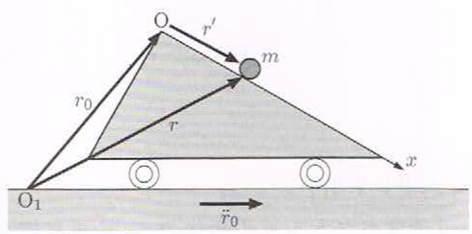
(4)　張力 T がはたらかないので $m\ddot{z}=-\gamma\dot{z}-mg$

2　非慣性系

2.1

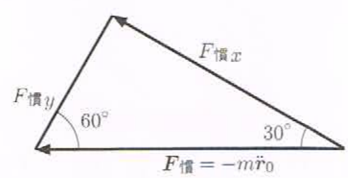
斜面の摩擦はないとする．トラックに乗っていなくて，外で静止している人を原点 O_1 とし，トラックに乗っている人の位置を O とする．





$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}_0$，$\boldsymbol{r}'$ を右図のようにとると，O_1 にいる人にとっては慣性系での式　$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}$ が成立する．　$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_o+\boldsymbol{r}'$　より　$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}_0+\ddot{\boldsymbol{r}}'$　となる．よって O の人にとっては $m\ddot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{F}-m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$　のように見える．$-m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$ を慣性力 $F_{慣}$ と呼ぶ．

問題では $\boldsymbol{r}'$ を $\boldsymbol{r}$ と書いてある．



(1)　$\boldsymbol{F}_{慣}=-m\ddot{\boldsymbol{r}}_0$ において $\ddot{\boldsymbol{r}}_0$ の方向は水平方向で大きさが bt．よって，

$$F_{慣\,x}=-mbt\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}mbt,\qquad F_{慣\,y}=mbt\sin 30^\circ=\frac{1}{2}mbt$$

(2)　$m\ddot{x}=mg\sin 30^\circ-\dfrac{\sqrt{3}}{2}mbt$

(3) $\ddot{x} = \dfrac{g}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}bt$ より

$$\dot{x} = \frac{g}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{4}bt^2 + C \quad \cdots \quad t=0 \text{ で } \dot{x}=0 \text{ より, } C=0$$

$$x = \frac{g}{4}t^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}bt^3 + C' \quad \cdots \quad t=0 \text{ で } x=0 \text{ より, } C'=0$$

よって　$x(t) = \dfrac{g}{4}t^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{12}bt^3$

(4) $\dot{x}=0$ を解く．$0 = \dfrac{1}{2}gt - \dfrac{\sqrt{3}}{4}bt^2 = \dfrac{1}{2}t\left(g - \dfrac{\sqrt{3}}{2}bt\right)$ より $t=0$, または $t = \dfrac{2g}{\sqrt{3}b}$.

$t=0$ を捨てて，$t = \dfrac{2g}{\sqrt{3}b}$.

(5) M の粒子の y 座標に対し，

$$M\ddot{y} = Mg\sin 60^\circ + \frac{1}{2}Mbt \qquad \cdots \quad y \text{ 方向の式}$$

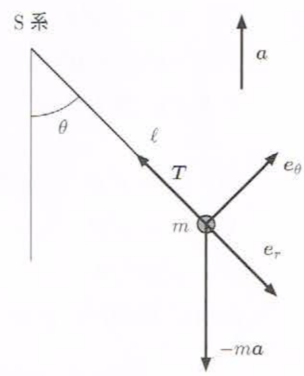
$$0 = Mg\cos 60^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}Mbt + N \quad \cdots \quad x \text{ 方向の式, } N \text{ は斜面からの抗力}$$

斜面より離れる条件は $N=0$.そこで $Mg\cos 60^\circ - \dfrac{\sqrt{3}}{2}Mbt = 0$ でなければならない．

よって，$t_2 = \dfrac{g}{\sqrt{3}b}$.

(*) この問題では y 方向の式は解く必要がない．

2.2



I.

(1) 慣性力は $-m\boldsymbol{a} = -m(0,a)$(図に示してある)

(2) $\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta$ で $r = |\boldsymbol{r}| = \ell$ と一定なので，$\dot{r} = \ddot{r} = 0$ とおいて良い．そこで，$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\ell\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + \ell\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$ となる．力のほうは $\boldsymbol{T} = -T\boldsymbol{e}_r$ を張力，重力を $m\boldsymbol{g} = m(0,-g)$ とすると

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{a} + \boldsymbol{T} = -m(g+a)\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta + m(g+a)\cos\theta\boldsymbol{e}_r - T\boldsymbol{e}_r$$

となる．すると，運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ は

$$m(-\ell\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + \ell\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) = -m(g+a)\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta + [m(g+a)\cos\theta - T]\boldsymbol{e}_r.$$

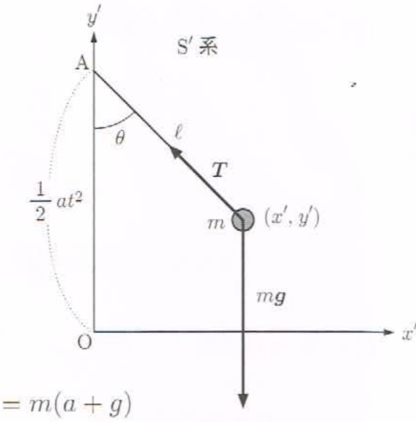
両辺の $\boldsymbol{e}_\theta$ 成分を見ると，$m\ell\ddot{\theta} = -m(g+a)\sin\theta$.

(3) $\sin\theta \approx \theta$ とおくと，$m\ell\ddot{\theta} = -m(g+a)\theta$. したがって，

$$\ddot{\theta} = -\frac{g+a}{\ell}\theta$$

これは単振動の式と同じ形をしており，$(g+a)/\ell$ が角振動数 ω の 2 乗に相当する．したがって，微小振動の周期は $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/(g+a)}$.

II. S' 系では，働く力は重力 $m\boldsymbol{g}$ と張力 $\boldsymbol{T}$ だけ．



(1) $x' = \ell\sin\theta,\quad y' = \frac{a}{2}t^2 - \ell\cos\theta$

(2) $m\ddot{x}' = -T\sin\theta,\quad m\ddot{y}' = -mg + T\cos\theta$

(3) $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$ として，

$x' = \ell\theta,\quad y' = \frac{a}{2}t^2 - \ell.$

よって $\ddot{x}' = \ell\ddot{\theta},\quad \dot{y}' = at,\quad \ddot{y}' = a.$

これらを (2) に代入して

$$m\ell\ddot{\theta} = -T\theta$$

$$ma = -mg + T \quad \Rightarrow \quad T = m(a+g)$$

よって，$m\ell\ddot{\theta} = -m(g+a)\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\dfrac{g+a}{\ell}\theta$

これは単振動の式と同じ形をしており，微小振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g+a}}$ となる．この結果は当然 S 系で求めたものと一致する．

2.3

(1) 箱の質量を M とすると，箱には $-\mu' Mg$ の力 ($-x$ の方向だから) が働いている．よって運動方程式は $M\ddot{x} = -\mu' Mg$．これから $\ddot{x} = -\mu' g$　$\cdots\cdots$　答え．

(2) $a = -\mu' g$ と置くと，小球に働く見かけの力は y' 成分はなく，x' 成分が $-ma = -m(-\mu' g) = \mu' mg$ である (箱にブレーキがかかっているのと同じで，$+x'$ 方向に見かけの力が働く)．重力は y' 方向に $-mg$ ゆえ，求める方程式は　$m\ddot{x}' = \mu' mg,\quad m\ddot{y}' = -mg.$

(3) $\ddot{x}' = \mu' g$．不定積分して $\dot{x}' = \mu' gt + C$．$t = 0$ で $\dot{x}' = 0$ であるから，$C = 0$．こうして　$\dot{x}' = \mu' gt$．もう一度積分すると，$x' = \mu' g t^2/2 + D$．$t = 0$ で $x' =$ より $D = 0$．結局，$x' = \mu' g t^2/2$．
同様に $t = 0$ で $\dot{y}' = v_0$，$y' = 0$ を考慮して $y' = -g t^2/2 + v_0 t$．

(4) t を消去すればよい．x' の式から $t > 0$ と考えて $t = \sqrt{2x'/(\mu' g)}$．これを y' の式に代入して

$$y' = -\frac{g2x'}{2\mu' g} + v_0\sqrt{\frac{2x'}{\mu' g}}, \quad \longrightarrow \quad y' = -\frac{x'}{\mu'} + v_0\sqrt{\frac{2x'}{\mu' g}}$$

(5) (4) で求めた軌道で，$y' = 0$ と置いて

$$\frac{x'}{\mu'} = v_0\sqrt{2x'/(\mu' g)} \quad \longrightarrow \quad \frac{x'^2}{\mu'^2} = v_0^2\frac{2x'}{\mu' g}$$

$x' = 0$ (これは投げ出すときの状態を表しているので捨てる) の他の解が ℓ である．こうして $\ell = 2\mu' v_0^2/g$．$\ell > 0$ であるから前方．(ブレーキがかかって減速している車に乗っていて小球

を投げ上げたのと同じ)

2.4

(1) $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{e}_r$ より $\dot{\boldsymbol{r}} = R\dot{\boldsymbol{e}}_r = R\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = R(\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta) = R(-\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + \ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)$.

(2) $m\alpha(\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta + \sin\theta\boldsymbol{e}_r)$.

(3) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = mR(-\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + \ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) = mg(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) + m\alpha(\sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta) - N\boldsymbol{e}_r$.
よって $-mR\dot{\theta}^2 = m(g\cos\theta + \alpha\sin\theta) - N$, $R\ddot{\theta} = -g\sin\theta + \alpha\cos\theta$.

(4) $\displaystyle\int\ddot{\theta}\dot{\theta}dt = \frac{1}{R}\int(-g\sin\theta + \alpha\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}dt$ より $\displaystyle\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{R}(g\cos\theta + \alpha\sin\theta) + C$.

(5) $\alpha = g$ のとき $\displaystyle\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{\sqrt{2}}{R}g\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + C$. $\theta = 5\pi/12$ のとき $\displaystyle\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{\sqrt{2}}{R}g\frac{\sqrt{3}}{2} + C =$
0. ゆえに $\displaystyle C = -\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{g}{R}$.
$\displaystyle\dot{\theta}^2 = \frac{2\sqrt{2}}{R}g\left[\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \geq 0$ であるから $\displaystyle\left|\theta - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{\pi}{6}$. よって可動領域は
$\displaystyle\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$. $\dot{\theta}^2$ が最大のとき $\displaystyle\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

(6) 運動方程式から $\displaystyle\ddot{\theta} = -\frac{\sqrt{2}g}{R}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \approx -\frac{\sqrt{2}g}{R}(\theta - \theta_1)$. これは $\displaystyle\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{R}}$ の単振動を表すから周期は $\displaystyle T = \frac{2\pi}{\omega} = 2^{3/4}\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.

2.5

(1) $x' = a\cos\omega t$, $y' = -a\sin\omega t$.

(2) $v'_x = \dot{x}' = -a\omega\sin\omega t$, $v'_y = \dot{y}' = -a\omega\cos\omega t$,

(3) 半径 a, 角速度 $-\omega$ の等速円運動 (時計回り).

(4) $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' = -2m(0,0,\omega)\times(v'_x, v'_y, 0) = -2m(-\omega v'_y, \omega v'_x, 0) = -2m\omega^2(a\cos\omega t, -a\sin\omega t, 0) = -2m\omega^2\boldsymbol{r}'$.

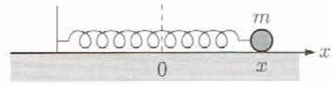
(5) (遠心力)+(コリオリ力)$=m\omega^2\boldsymbol{r}' - 2m\omega^2\boldsymbol{r}' = -m\omega^2\boldsymbol{r}'$.

(6) O' 系では，粒子は等速円運動をしているので，$m\ddot{\boldsymbol{r}}'$ は 向心力 $-m\omega^2\boldsymbol{r}'$ に等しく，そして働いている力に等しいはず．O' 系で働いている力は見かけの力の合力 (遠心力)+(コリオリ力) である．実際，(向心力)=(遠心力)+(コリオリ力) が成り立っている．

3　運動方程式の積分

3.1

(1) $m\ddot{x} = -kx + F$. 左方向へ運動しているとき，摩擦力は $+x$ 方向ゆえ右辺には $+F$ と書くべし．



(2) 同次方程式は $m\ddot{x} = -kx$. $x = e^{\lambda t}$ と置くと，$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. したがって，$(m\lambda^2 + k)e^{\lambda t} = 0$. $e^{\lambda t} \neq 0$ ゆえ $m\lambda^2 + k = 0$. したがって，$\lambda = \pm\sqrt{-\dfrac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

(3) (2) の一般解は $\omega = \sqrt{k/m}$ として，$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ と書ける．
ここで，$C_1 = A_1 + iB_1$，$C_2 = A_2 + iB_2$ と置くと，$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ を用いて，

$$
\begin{aligned}
x &= (A_1 + iB_1)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (A_2 + iB_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\
&= (A_1 + A_2)\cos\omega t - (B_1 - B_2)\sin\omega t + i\{(B_1 + B_2)\cos\omega t + (A_1 - A_2)\sin\omega t\}
\end{aligned}
$$

x が実数となるためには，$B_1 + B_2 = 0$，$A_1 - A_2 = 0$ でなければならない．よって，$C_1 = A_1 + iB_1$，$C_2 = A_1 - iB_1 = C_1^*$ (C_1 の複素共役)．このとき $x = 2A_1\cos\omega t - 2B_1\sin\omega t$. $2A_1 = D$，$-2B_1 = E$ と書き直して，一般解の別の形 $x = D\cos\omega t + E\sin\omega t$ を得る．
または $x = C\cos(\omega t + \delta)$，($C = \sqrt{D^2 + E^2}$，$\tan\delta = -E/D$) でも良い．

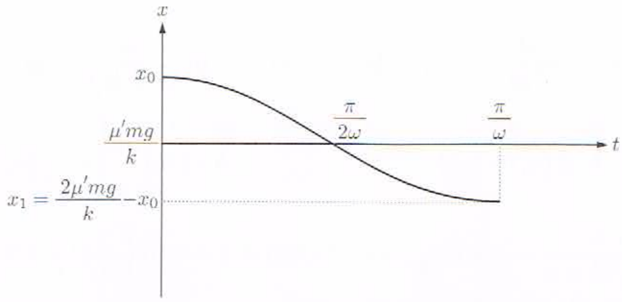
(4) $F = \mu' mg$ として，　$m\ddot{x} = -kx + \mu' mg$　において $x = A$ を代入．$\ddot{x} = 0$ より，

$$0 = -kA + \mu' mg \ \Rightarrow\ A = \frac{\mu' mg}{k}$$

(5) 非同次方程式の一般解は $x = D\cos\omega t + E\sin\omega t + \dfrac{\mu' mg}{k}$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = -D\omega\sin\omega t + E\omega\cos\omega t$
$t = 0$ で　$x = D + \dfrac{\mu' mg}{k} = x_0$，　$\dot{x} = E\omega = 0$　より　$E = 0$，$D = x_0 - \dfrac{\mu' mg}{k}$　よって，

$$x = (x_0 - \frac{\mu' mg}{k})\cos\omega t + \frac{\mu' mg}{k} \cdots (*)$$

(6) x は $\mu' mg/k$ を中心に，振幅 $x_0 - \mu' mg/k$ で振動する．ただし，$kx_0 > \mu' mg$ とする．振動の周期は $2\pi/\omega$. ただし，(*) は $t = 0$ で $\dot{x} = 0$ であるが，次に $\dot{x} = 0$ になるまでの間しか成立しない．その間では $\dot{x} < 0$ である．　$\dot{x} = -\omega(x_0 - \dfrac{\mu' mg}{k})\sin\omega t$ なので，$\dot{x}$ は $t = \pi/\omega$ でゼロとなる．$0 < t < \pi/\omega$ の範囲で $\dot{x} < 0$ であり，(*) を描く．$t = \pi/\omega$ では $\cos\pi = -1$ より，　$x(t = \dfrac{\pi}{\omega}) = \dfrac{\mu' mg}{k} - (x_0 - \dfrac{\mu' mg}{k}) = 2\dfrac{\mu' mg}{k} - x_0$ である．



(7) ばねのポテンシャル・エネルギーの変化分は $x_1 = 2\mu' mg/k - x_0$ とおいて，$\Delta U = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = -2\mu' mg(x_0 - \frac{\mu' mg}{k}) < 0$ となる．摩擦力のした仕事 $\Delta W'$ は，力の方向と変位の方向が逆であることに注意して $\Delta W' = -\mu' mg(x_0 - x_1) < 0$ となる．これは ΔU に等しい．つまり，「摩擦力のなした仕事 (この問題では負) が，ばねのポテンシャルエネルギーとして蓄えられた (この問題では消費された)．」

(注) 一般に 3 次元で保存力 $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ と，必ずしも保存力とは限らない力 $\boldsymbol{F}'$ が働いているとする．運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}' = -\nabla U + \boldsymbol{F}'$ の両辺に $\dot{\boldsymbol{r}}$ を内積の意味で掛け，時間 t_1 から t_2 まで積分する．$\Delta W' = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}' \cdot \dot{\boldsymbol{r}} dt = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}' \cdot d\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{F}'$ がした仕事で，これを用いて $\Delta W' = \Delta E$ を導くことができる．ここで，$\Delta E = E_2 - E_1$，$E_1 = T_1 + U_1$，$E_2 = T_2 + U_2$，T_1 と U_1 は時刻 t_1 における運動エネルギーと力 $\boldsymbol{F}$ によるポテンシャルエネルギーであり，T_2，U_2 は時刻 t_2 におけるものである．($\Delta W' = \Delta E$ は各自確かめよ．) この問題では $T_1 = T_2 = 0$ なので，$\Delta W' = \Delta U$ となる．

3.2

(1) $m\ddot{x} = -k\dot{x}^2,\ m\ddot{y} = -mg.$

(2) $\frac{d}{dt}v_x = -\frac{k}{m}v_x^2$ より $\int \frac{dv_x}{v_x^2} = -\frac{k}{m}\int dt$, よって $\frac{1}{v_x} = \frac{k}{m}t + C$. 初期条件より $C = \frac{1}{v_0}$.
ゆえに $v_x = \frac{mv_0}{kv_0 t + m}$.

(3) $x = \int \frac{mv_0}{kv_0 t + m} dt = \frac{m}{k}\log|kv_0 t + m| + C$. 絶対値の中身は正なので，以下では絶対値記号をはずす．初期条件より $\frac{m}{k}\log m + C = 0$, よって $x = \frac{m}{k}\log\left(\frac{kv_0 t}{m} + 1\right)$.

(4) (3) の結果より $t = \frac{m}{kv_0}(e^{kx/m} - 1)$. $y = -\frac{1}{2}gt^2$ より t を消去すると

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{m}{kv_0}\right)^2 (e^{kx/m} - 1)^2.$$

* 空気抵抗は x 方向にも y 方向にもはたらく．この問題では，速度の y 方向成分が x 方向成分に比べて十分小さく，v_y^2 に比例する抵抗力を無視できる状況を考えた．

3.3

(1) $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - b\dot{x}^2$

(2) $\dot{x} = v$ であるから，　$m\dot{v} = -\gamma v - bv^2$

(3)

$$m\dot{v} = m\frac{dv}{dt} = -\gamma v - bv^2, \quad \longrightarrow \quad -m\frac{dv}{\gamma v + bv^2} = dt,$$

$$-\frac{m}{b}\frac{dv}{v((\gamma/b)+v)} = dt, \quad \longrightarrow \quad -\frac{m}{b}\frac{1}{(\gamma/b)}dv\left\{\frac{1}{v} - \frac{1}{(\gamma/b)+v}\right\} = dt,$$

積分して

$$-\frac{m}{\gamma}\log\frac{v}{(\gamma/b)+v} = t + C, \quad \longrightarrow \quad (\gamma/bv) + 1 = \exp\left(\frac{\gamma}{m}(t+C)\right) = D\exp\left(\frac{\gamma}{m}t\right)$$

ここで，$\exp(\gamma C/m) = D$ と置いた．結局

$$v = \frac{\gamma}{b}\frac{1}{D\exp\left(\frac{\gamma}{m}t\right) - 1}.$$

(4) 上の答えで $t=0$ を代入して

$$v_0 = \frac{\gamma}{b}\frac{1}{D-1} \quad \longrightarrow \quad D = \frac{\gamma}{bv_0} + 1.$$

(5) $t \to \infty$ で　$\exp\left(\frac{\gamma}{m}t\right) \to \infty$ から，　$v_\infty = 0$

積分定数の選び方はいろいろあるので，上のようなもの以外でももちろん OK.

3.4

(1) $m\ddot{x} = -k\dot{x} + F_0 e^{-\alpha t}$ より $m\dot{v} + kv = F_0 e^{-\alpha t}$.

(2) $v = Ce^{-\alpha t}$ とおくと $C(-m\alpha + k)e^{-\alpha t} = F_0 e^{-\alpha t}$. よって $C = F_0/(k - m\alpha)$.

(3) まず，同次方程式 $m\dot{v} + kv = 0$ の一般解を求める．$v = e^{\lambda t}$ とおくと $\lambda = -k/m$. 一般解は $v = Ae^{-kt/m}$ (A は積分定数). 与式の一般解は，(同次方程式の一般解) + (特解) であるから，$v = Ae^{-kt/m} + \dfrac{F_0}{k - m\alpha}e^{-\alpha t}$.

(4) $t = 0$ で $v = 0$ より $A = -F_0/(k - m\alpha)$. ゆえに $v = \dfrac{F_0}{k - m\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-kt/m})$.
グラフは省略 ($t = 0$ 付近で $v \approx (F_0/m)t$. t の増加とともに極大を示した後，$t \to \infty$ で $v \approx \dfrac{F_0}{k - m\alpha}e^{-\alpha t}$ のように 0 に漸近する).

(参考) $k = m\alpha$ のとき: (2) の特解は $v = Cte^{-\alpha t}$ とおくと $C = F_0/m$ を得る．(3) の一般解は $v = [A + (F_0/m)t]e^{-\alpha t}$.

3.5

(1) $\dfrac{dx}{dt} = xt$ より $\displaystyle\int\frac{dx}{x} = \int t dt$. $\ln|x| = \dfrac{t^2}{2} + C$ より，$x = \pm e^C e^{t^2/2} = Ae^{t^2/2}$.

(2) $x = e^{\lambda t}$ を代入すると $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$，よって $\lambda = 1 \pm i$. 一般解は $x = Ae^{(1+i)t} + Be^{(1-i)t} = e^t(a\cos t + b\sin t)$ (A, B は複素数，a，b は実数の定数)

(3) $x = e^{\lambda t}$ を代入すると $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$，よって $\lambda = -1$ (重根). 一般解は $x = Ae^{-t} + Bte^{-t} = e^{-t}(A + Bt)$

(4) $x = C$ を代入すると $C = 5/3$，ゆえに $x = 5/3$ の特解を得る．同次方程式の一般解を設問 (2) と同様に求め，与式の一般解は $x = Ae^{-t} + Be^{-3t} + 5/3$.

3.6 $m\ddot{x}\dot{x} = -(K_1 x + K_2 x^3)\dot{x}$ で左辺は $\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\dot{x}^2$ であるから，両辺を t で積分すると

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = -\int (K_1 x + K_2 x^3)\frac{dx}{dt}dt = -\frac{K_1}{2}x^2 - \frac{K_2}{4}x^4 + C.$$

$x = \pm x_0$ で $\dot{x} = 0$ より $C = \frac{K_1}{2}x_0^2 + \frac{K_2}{4}x_0^4$, よって $\dot{x}^2 = \frac{1}{m}\left[K_1(x_0^2 - x^2) + \frac{K_2}{2}(x_0^4 - x^4)\right]$.

3.7

(1) 重力 $m\boldsymbol{g} = mg\cos\theta\boldsymbol{e}_r - mg\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$, 空気抵抗力 $-\gamma\dot{\boldsymbol{r}} = -\gamma l\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$.

(2) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{T} - \gamma\dot{\boldsymbol{r}}$. $\boldsymbol{e}_r$ 成分: $-ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$. $\boldsymbol{e}_\theta$ 成分: $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \gamma l\dot{\theta}$.

(3) $ml\ddot{\theta} = -mg\theta - \gamma l\dot{\theta}$.

(4) 定係数線形方程式であるから $\theta = e^{\lambda t}$ を代入. $ml\lambda^2 + \gamma l\lambda + mg = 0$ より $\lambda = -\frac{\gamma}{2m} \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}$. 一般解は $\theta = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$.

(5) $t = 0$ で $\theta = A = 0$, $\dot{\theta} = -\frac{\gamma}{2m}A + B\omega = \omega_0$. ゆえに $B = \frac{\omega_0}{\omega}$. よって $\theta(t) = \frac{\omega_0}{\omega}e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\sin\omega t$.

3.8

(1) $\boldsymbol{r} = \ell\boldsymbol{e}_r$ より $\dot{\boldsymbol{r}} = \ell\dot{\boldsymbol{e}}_r = \ell\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ell(\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta) = \ell(-\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + \ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta)$.

(2) $\boldsymbol{F} = -T\boldsymbol{e}_r - (\gamma\ell\dot{\theta} + F_0)\boldsymbol{e}_\theta$.

(3) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\ell(-\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r + \ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta) = \boldsymbol{F}$ より $m\ell\dot{\theta}^2 = T$, $m\ell\ddot{\theta} = -\gamma\ell\dot{\theta} - F_0$.

(4) $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\left(\omega + \frac{F_0}{\gamma\ell}\right)$. 変数分離して両辺を積分すると $\int \frac{d\omega}{\omega + \frac{F_0}{\gamma\ell}} = -\frac{\gamma}{m}\int dt$, ゆえに $\log\left|\omega + \frac{F_0}{\gamma\ell}\right| = -\frac{\gamma}{m}t + C$. したがって $\omega + \frac{F_0}{\gamma\ell} = Ae^{-\gamma t/m}$ ($\pm e^C = A$ とおいた).

＊[別解]: 同次微分方程式 $\dot{\omega} = -\frac{\gamma}{m}\omega$ の一般解を $\omega = e^{\lambda t}$ と置いて求めると $\omega = Ae^{-\gamma t/m}$. 元の方程式の特解は $\omega = (\text{定数}) = -F_0/(\gamma\ell)$. 両者を加える.

(5) $t = 0$ で $\dot{\theta} = \frac{v_0}{\ell}$. よって $A = \frac{v_0}{\ell} + \frac{F_0}{\gamma\ell}$. ゆえに $\omega = -\frac{F_0}{\gamma\ell} + \frac{1}{\ell}\left(v_0 + \frac{F_0}{\gamma}\right)e^{-\gamma t/m}$.

(6) $\omega = 0$ のとき $t = \frac{m}{\gamma}\log\frac{\gamma v_0 + F_0}{F_0}$.

4 ポテンシャル，仕事，保存力

4.1

(1) $(2, 0, -1) \times (x, y, z) = (y, -x - 2z, 2y)$

(2) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} = \frac{-3}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-5/2}2x = -\frac{3x}{r^5}$

(3) $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -K\left(x + \frac{y}{2}\right)$, $m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{K}{2}x$, $m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = -Kz$.

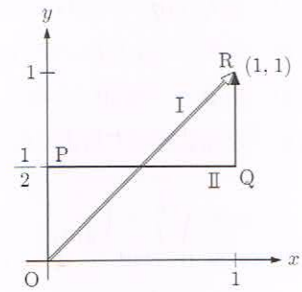
4.2

(1) $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U = (-2Ax - By, -Bx, -2Cz)$. 成分ごとの運動方程式は, $m\ddot{x} = -2Ax - By$, $m\ddot{y} = -Bx$, $m\ddot{z} = -2Cz$.

(2)　$\nabla r^3 = 3r^2 \nabla r = 3r^2 \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = 3r\boldsymbol{r}$.

(3)　$x = e^{\lambda t}$ とおくと $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. この方程式の解は $\lambda = -2 \pm i$. x の一般解は $x = Ae^{(-2+i)t} + Be^{(-2-i)t} = e^{-2t}(Ae^{it} + Be^{-it}) = e^{-2t}(C\cos t + D\sin t)$. 初期条件を考慮すると $x(0) = C = 3$, $\dot{x}(0) = -2C + D = 0$, ゆえに $C = 3$, $D = 6$, したがって $x = 3e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$.

4.3



(1) (A) $F_x = -2x$, $F_y = 2y$

(B) $F_x = 2y$, $F_y = -2x$

$W = \int \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ において,

I の上では $x = y$, $dx = dy$ より

$$d\boldsymbol{r} = (dx,\ dy) = (dx,\ dx) = (dy,\ dy)$$

$$\text{II の上では}\begin{cases} \mathrm{OP} & \boldsymbol{r} = (0, y), & d\boldsymbol{r} = (0, dy) \\ \mathrm{PQ} & \boldsymbol{r} = (x, \frac{1}{2}), & d\boldsymbol{r} = (dx, 0) \\ \mathrm{QR} & \boldsymbol{r} = (1, \cancel{dy}), & d\boldsymbol{r} = (0, dy) \end{cases}$$

y

(A) の力

$$W_I = \int F_x(x, x)dx + \int F_y(y, y)dy = \int_0^1 (-2x)dx + \int_0^1 2ydy = -x^2\Big|_0^1 + y^2\Big|_0^1$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$$W_{II} = \int_0^{\frac{1}{2}} F_y(0, y)dy + \int_0^1 F_x(x, \frac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 F_y(1, y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2ydy + \int_0^1 (-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 2ydy = y^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - x^2\Big|_0^1 + y^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 - \frac{1}{4} = 0$$

(B) の力

$$W_I = \int_0^1 F_x(x, x)dx + \int_0^1 F_y(y, y)dy = \int_0^1 (2x)dx + \int_0^1 (-2y)dy = x^2\Big|_0^1 - y^2\Big|_0^1$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$$W_{II} = \int_0^{\frac{1}{2}} F_y(0, y)dy + \int_0^1 F_x(x, \frac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 F_y(1, y)dy$$

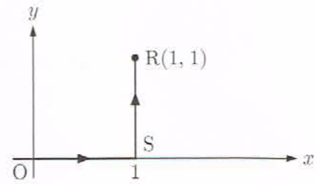
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 0dy + \int_0^1 (2 \cdot \frac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-2)dy = 0 + x\Big|_0^1 - 2y\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 0 + 1 - 2(1 - \frac{1}{2})$$

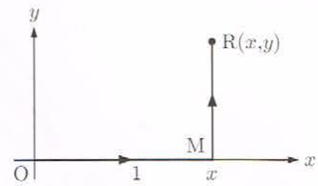
$$= 1 - 1 = 0$$

(2) 判定条件は $\dfrac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}$

(A)： $\dfrac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(-2x)}{\partial y} = 0,\quad \dfrac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(2y)}{\partial x} = 0,\qquad \Rightarrow$ 保存力である．

(B)： $\dfrac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2y)}{\partial y} = 2,\quad \dfrac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(-2x)}{\partial x} = -2,\qquad \Rightarrow$ 保存力ではない．





理由： 保存力の判定条件は $\dfrac{\partial F_x(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}$ がすべての x, y について恒等的に成立することであって，二つの経路 I,II で仕事が同じであっても保存力とはいえない．すべての経路，すべての端点で仕事が等しくなければならない．例えば，力 (B) の場合，右上図のような経路 III で仕事を計算してみると $W_{III} = \int_{\mathrm{OS}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{SR}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 F_x(x,0)dx + \int_0^1 F_y(1,y)dy = 0 + \int_0^1(-2)dy = -2$ となり，$W_I = W_{II} = 0$ とは異なる．

(3) 力 (A) について仕事積分を実行する．

$$U(x,y) = -\int_0^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

において，右下図のような経路 O→M→R をとる．

OM 上では $\boldsymbol{r}' = (x', y') = (x', 0)$，$d\boldsymbol{r}' = (dx', 0)$

MR 上では $\boldsymbol{r}' = (x, y')$，$d\boldsymbol{r}' = (0, dy')$

$$U(x,y) = -\int_0^x F_x(x',0)dx' - \int_0^y F_y(x,y')dy' = -\int_0^x(-2x')dx' - \int_0^y(2y')dy'$$

$$= x'^2\Big|_0^x - y'^2\Big|_0^y = x^2 - y^2 \qquad (U(0,0) = 0 \quad \text{は満たされている．})$$

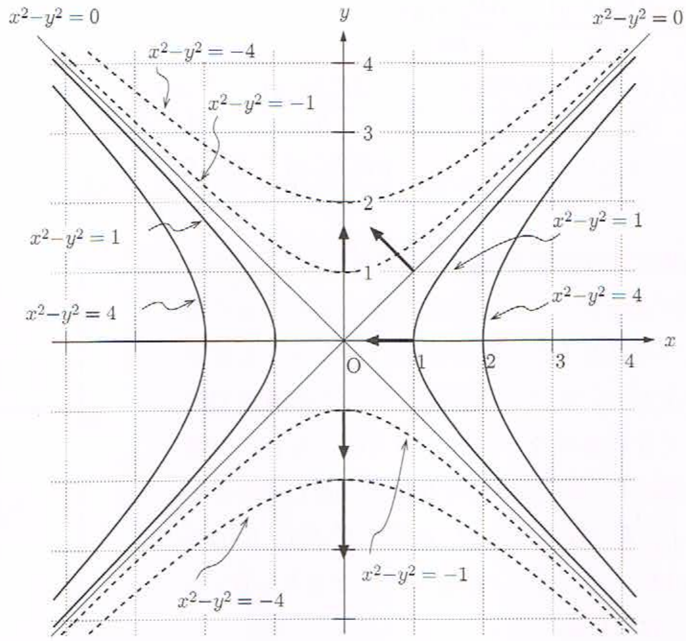
検算： $-\nabla U = \boldsymbol{F}$ が成立しているかをチェックする．

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -2x = F_x,\quad -\frac{\partial U}{\partial y} = 2y = F_y：\mathrm{OK}$$

別解：

$-\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x} = -2x = F_x$ を x で積分して，$U(x,y) = x^2 + C(y)$ を得る．ここで，$C(y)$ は積分定数で，y の関数．すると，$-\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{dC(y)}{dy} = 2y = F_y$ より，$C(y) = -y^2 + D$ となる．ここで D は積分定数．$U(0,0) = 0$ より，$D = 0$ と定まる．したがって，$U(x,y) = x^2 - y^2$．

(4) $U(x,y) = x^2 - y^2 = -4,\ -1,\ 0,\ 1,\ 4$ は図のような曲線になる．



(5) $\boldsymbol{F}(x,y) = -(\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}) = -(2x,-2y) = 2(-x,y)$ より，

$$\boldsymbol{F}(1,0) = 2(-1,0) = (-2,0)$$
$$\boldsymbol{F}(1,1) = 2(-1,1) = (-2,2)$$
$$\boldsymbol{F}(0,1) = 2(0,1) = (0,2)$$
$$\boldsymbol{F}(0,-1) = 2(0,-1) = (0,-2)$$
$$\boldsymbol{F}(0,-2) = 2(0,-2) = (0,-4)$$

図を描くとき，

- $\boldsymbol{F}$ のベクトルの長さは適当にとって良い．ただし，長さの比は正確に書くこと．
- $\boldsymbol{F}$ は等ポテンシャル線に垂直である．

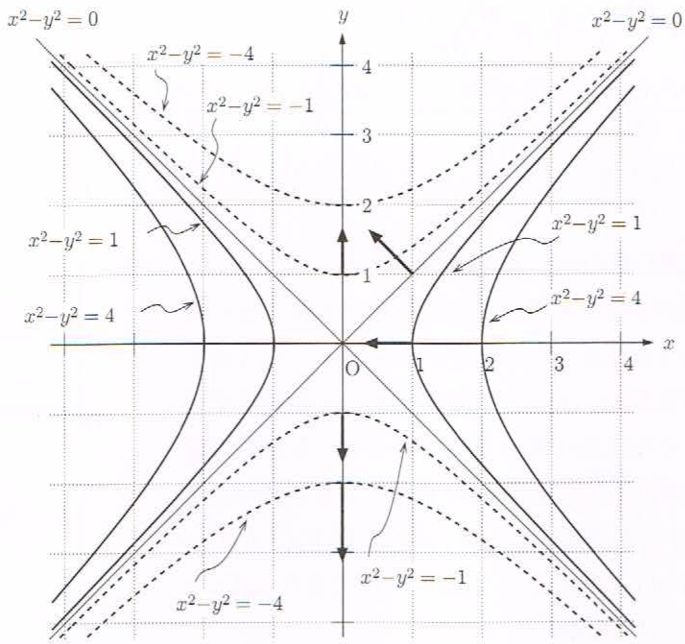
4.4

(1) (問題 1.3 の解答で述べた $\boxed{\text{大事な事項}}$ を参照)

(2) $E = \dfrac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + U(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{m}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}) + \dfrac{dU(\boldsymbol{r})}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \dfrac{dU(\boldsymbol{r})}{dt}$

さて，$U(\boldsymbol{r})$ の t 依存性は $\boldsymbol{r}$ を通して $U(\boldsymbol{r}(t))$ の形で含まれている．よって合成関数の微分法則より

$$\frac{dU(\boldsymbol{r})}{dt} = \frac{dU(\boldsymbol{r}(t))}{dt} = \frac{dU(x(t),y(t),z(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$



(5) $\boldsymbol{F}(x,y) = -(\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}, \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}) = -(2x,-2y) = 2(-x,y)$ より，

$$\boldsymbol{F}(1,0) = 2(-1,0) = (-2,0)$$
$$\boldsymbol{F}(1,1) = 2(-1,1) = (-2,2)$$
$$\boldsymbol{F}(0,1) = 2(0,1) = (0,2)$$
$$\boldsymbol{F}(0,-1) = 2(0,-1) = (0,-2)$$
$$\boldsymbol{F}(0,-2) = 2(0,-2) = (0,-4)$$

図を描くとき，

- $\boldsymbol{F}$ のベクトルの長さは適当にとって良い．ただし，長さの比は正確に書くこと．
- $\boldsymbol{F}$ は等ポテンシャル線に垂直である．

4.4

(1) (問題 1.3 の解答で述べた $\boxed{\text{大事な事項}}$ を参照)

(2) $E = \dfrac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + U(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{m}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}) + \dfrac{dU(\boldsymbol{r})}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \dfrac{dU(\boldsymbol{r})}{dt}$

さて，$U(\boldsymbol{r})$ の t 依存性は $\boldsymbol{r}$ を通して $U(\boldsymbol{r}(t))$ の形で含まれている．よって合成関数の微分法則より

$$\frac{dU(\boldsymbol{r})}{dt} = \frac{dU(\boldsymbol{r}(t))}{dt} = \frac{dU(x(t),y(t),z(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ところが，$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$，$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ であるので，これは $\nabla U \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ と書ける．よって，公式

$$\frac{dU(\boldsymbol{r})}{dt} = \nabla U \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

を得る．さて，$\frac{dE}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \nabla U \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (m\ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla U) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$ となる．ところが，ニュートンの運動方程式より $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -\nabla U$ なので，$m\ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla U = 0$．よって，$dE/dt = 0$ となり，E は保存される．

4.5

(1) $W_{(\mathrm{I})} = \int_0^1 F_x(x,0)dx + \int_0^1 F_y(1,y)dy = \int_0^1 2xdx + \int_0^1 2Ady = 1 + 2A$

$$W_{(\mathrm{II})} = \int_0^1 F_x\left(x, -\frac{2}{x+1} + 2\right)dx + \int_0^1 F_y\left(-\frac{2}{y-2} - 1, y\right)dy$$
$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{2}{x+1} + 2\right)dx + A\int_0^1 \frac{-2}{y-2}dy = 3 - 2\ln 2 + 2A\ln 2$$

(2) $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$

(3) $\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = A - 1 = 0$ より $A = 1$

(4) (3) で求めた $A = 1$ を代入し，経路 $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ を考えると

$$U(x,y) = -\int_0^x F_x(x',0)dx' - \int_0^y F_y(x,y')dy' = -\int_0^x 2x'dx' - \int_0^y (x+1)dy'$$
$$= -x^2 - (x+1)y$$

解答のチェック: $\frac{\partial U}{\partial x} = -2x - y = -F_x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -(x+1) = -F_y$.

4.6

(1) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$

(2) $m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$ と書けるが，$\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}})^2$ より（$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$ と書くと分かり易い），

$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}})^2 = \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ となる．これを時間 t に関して積分して，

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}})^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = W_{12} = (1 \to 2 \text{ の間に } \boldsymbol{F} \text{ のなした仕事})$$

$K = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2$(運動エネルギー) とおくと，$K(t_2) - K(t_1) = W_{12}$.

(3) 保存力なら $\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$ と書ける．それで (2) の式は　$K(t_2) - K(t_1) = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \nabla U \cdot d\boldsymbol{r}$

と書ける．ところが，$dU \equiv U(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r})-U(\boldsymbol{r})$ とおくと

$$\begin{aligned}
dU =&U(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-U(x,\ y,\ z)\\
=&U(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-U(x,\ y+dy,\ z+dz)\\
&+U(x,\ y+dy,\ z+dz)-U(x,\ y,\ z+dz)\\
&+U(x,\ y,\ z+dz)-U(x,\ y,\ z)\\
=&dx\frac{\partial U(x,\ y+dy,\ z+dz)}{\partial x}+dy\frac{\partial U(x,\ y,\ z+dz)}{\partial y}+dz\frac{\partial U(x,\ y,\ z)}{\partial z}
\end{aligned}$$

ここで，微分の定義から $f(x+dx,\cdots)-f(x,\cdots)=dx\dfrac{\partial f(x,\cdots)}{\partial x}$ を用いた．
$dx\to 0$，$dy\to 0$，$dz\to 0$ として，公式

$$dU=dx\frac{\partial U(x,\ y,\ z)}{\partial x}+dy\frac{\partial U(x,\ y,\ z)}{\partial y}+dz\frac{\partial U(x,\ y,\ z)}{\partial z}=d\boldsymbol{r}\cdot\nabla U$$

を得る．よって，

$$K(t_2)-K(t_1)=-\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}dU=-(U(\boldsymbol{r}_2)-U(\boldsymbol{r}_1))$$

$$\Rightarrow\quad K(t_2)+U(\boldsymbol{r}_2)=K(t_1)+U(\boldsymbol{r}_1)\quad\cdots\quad \text{全エネルギーの保存則}$$

4.7

(1) $W_{(\mathrm{I})}=\displaystyle\int_0^1 F_x(x,x)dx+\int_0^1 F_y(y,y)dy=\int_0^1(Ax+2)dx+\int_0^1(-y+1)dy=\frac{A+5}{2}.$
経路 (II) の Q → P の積分では $x=1+\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi/2)$ と変数変換する．$dx=-\sin\theta d\theta$，$dy=\cos\theta d\theta$ より

$$W_{(\mathrm{II})}=\int_0^2 F_x(x,0)dx+\int_0^{\pi/2}[-(A\sin\theta+2)\sin\theta-\cos^2\theta]d\theta=-\frac{\pi}{4}(A+1)+2.$$

(2) $\dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=0.$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}(-x+1)-\dfrac{\partial}{\partial y}(Ay+2)=-1-A=0$ より $A=-1$.

(4) $A=-1$ のとき $\boldsymbol{F}=(-y+2,-x+1)$. $U(x,y)=-\displaystyle\int_0^x F_x(x',0)dx'-\int_0^y F_y(x,y')dy'=xy-2x-y.$
以下は解答のチェック:

$$-\frac{\partial U}{\partial x}=-y+2=F_x(x,y),\quad -\frac{\partial U}{\partial y}=-x+1=F_y(x,y).$$

4.8

(1) $W_{(\mathrm{I})}=\displaystyle\int_1^0 F_x(x,0)dx+\int_0^1 F_y(0,y)dy=\int_1^0 x^2dx+0=-\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
W_{(\mathrm{II})}&=\int_1^0 F_x(x,1-x^2)dx+\int_0^1 F_y\left(\sqrt{1-y},y\right)dy\\
&=\int_1^0\left[x^2+A(1-x^2)\right]dx+\int_0^1(1-y)^{n/2}dy=-\frac{1}{3}-\frac{2A}{3}+\frac{2}{n+2}
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}x^n - \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2 + Ay) = nx^{n-1} - A = 0$ より $n = 1$, $A = 1$.

(4) (3) より $\boldsymbol{F} = (x^2 + y, x)$. 経路 $(0,0) \to (x,0) \to (x,y)$ を考えると

$$\begin{aligned} U(x,y) &= -\int_0^x F_x(x',0)dx' - \int_0^y F_y(x,y')dy' = -\int_0^x x'^2 dx' - \int_0^y x dy' \\ &= -\frac{1}{3}x^3 - xy \end{aligned}$$

解答のチェック: (4) で求めた U に対して $-\dfrac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y = F_x$, $-\dfrac{\partial U}{\partial y} = x = F_y$.

4.9

(1)
$$\begin{aligned} W_{(\mathrm{I})} &= \int_0^1 F_x(x,0)dx + \int_0^1 F_y(1,y)dy = 0 + \int_0^1 [4 + 3(a-2)]dy = 3a - 2. \\ W_{(\mathrm{II})} &= \int_0^1 F_x(x,x^2)dx + \int_0^1 F_y(\sqrt{y},y)dy \\ &= \int_0^1 4ax^3 dx + \int_0^1 [4y + 3(a-2)\sqrt{y}]dy = 3a - 2. \end{aligned}$$

(2) $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial x}[4x^2 + 3(a-2)x] - \dfrac{\partial}{\partial y}(4axy) = (8-4a)x + 3(a-2) = 0$ より $a = 2$.

(4) $a = 2$ のとき $\boldsymbol{F} = (8xy, 4x^2)$. $U(x,y) = -\int_0^x F_x(x',0)dx' - \int_0^y F_y(x,y')dy' = -0 - \int_0^y 4x^2 dy' = -4x^2 y$.
以下は解答のチェック:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 8xy = F_x(x,y), \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = 4x^2 = F_y(x,y).$$

4.10

(1) $W_{(\mathrm{I})} = \int_0^1 F_x(x,0,0)dx + \int_0^1 F_y(1,y,0)dy + \int_0^1 F_z(1,1,z)dz = \int_0^1 0dx + \int_0^1 ady + \int_0^1 cdz = a + c.$

$W_{(\mathrm{II})} = \int_0^1 [F_x(x,x,x) + F_y(x,x,x) + F_z(x,x,x)]dx = \int_0^1 [2x^2 + (a+b)x^2 + cx^2]dx = \dfrac{1}{3}(a + b + c + 2).$

(2) $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}F_z - \dfrac{\partial}{\partial z}F_y = cx - bx = 0$ より $b = c$. $\dfrac{\partial}{\partial z}F_x - \dfrac{\partial}{\partial x}F_z = y - cy = 0$ より $c = 1$. $\dfrac{\partial}{\partial x}F_y - \dfrac{\partial}{\partial y}F_x = 2ax + bz - (x + z) = 0$ より $2a = 1$, $b = 1$. 以上より $a = 1/2$, $b = c = 1$.

(4) (3) より $\boldsymbol{F} = (xy + yz, x^2/2 + xz, xy)$. 経路 $(0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)$

を考えると

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= -\int_0^x F_x(x',0,0)dx' - \int_0^y F_y(x,y',0)dy' - \int_0^z F_y(x,y,z')dz' \\ &= -\int_0^x 0dx' - \int_0^y \frac{1}{2}x^2 dy' - \int_0^z xydz' = -\frac{1}{2}x^2 y - xyz \end{aligned}$$

解答のチェック: (4) で求めた U に対して $-\dfrac{\partial U}{\partial x} = xy + yz$, $-\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{2}x^2 - xz$, $-\dfrac{\partial U}{\partial z} = xy$ で $\boldsymbol{F}$ に一致する．

5　ポテンシャル内の運動，振動

5.1

(1)　運動方程式は　$m\,\ddot{x} = -k\,x + F_0\,\cos(\omega t + \phi)$　となる．

題意にしたがって，$k/m = \omega_0^2$, $F_0/m = f_0$, $\omega_0 = \omega$ とおくと，

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x + \frac{F_0}{m}\,\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x + f_0\,\cos(\omega t + \phi)\quad \text{となる．}$$

(2)　解の形 $x = t\,(D\,\cos\omega t + E\,\sin\omega t)$ を微分すると，

$$\dot{x} = D\,\cos\omega t + E\,\sin\omega t + t\,(-D\omega\,\sin\omega t + E\omega\,\cos\omega t)$$

$$\ddot{x} = -2\omega\,(D\,\sin\omega t - E\,\cos\omega t) - t\omega^2(D\,\cos\omega t + E\,\sin\omega t)$$

となる．これを，運動方程式

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0\cos(\omega t + \phi) = f_0(\cos\omega t\,\cos\phi - \sin\omega t\,\sin\phi)$$

に代入すると

$$-2\omega(D\,\sin\omega t - E\,\cos\omega t) = f_0(\cos\omega t\,\cos\phi - \sin\omega t\,\sin\phi)$$

となる．この等式がすべての t で成立するためには，$\sin\omega t$，$\cos\omega t$ の係数が両辺で等しくなければならない．これより，

$$-2\omega\,D = -\,f_0\,\sin\phi \quad\Rightarrow\quad D = \frac{f_0}{2\omega}\sin\phi$$

$$2\omega\,E = f_0\,\cos\phi \quad\Rightarrow\quad E = \frac{f_0}{2\omega}\,\cos\phi$$

となり，特殊解は

$$x = t\,\frac{f_0}{2\omega}(\sin\phi\,\cos\omega t + \cos\phi\,\sin\omega t) = \frac{f_0\,t}{2\omega}\,\sin(\omega t + \phi)\quad \text{となる．}$$

(3)　非同次方程式の一般解は同次方程式の一般解と非同次方程式の特殊解の和で表されるという定理を用いる．(2) で求めた解は，非同次方程式の特殊解である．

この問題の同次方程式は，$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ であって，その一般解は $x = A\,\cos(\omega t + \delta)$ である（ただし，A と δ は積分定数）．従って，求めるべき一般解は

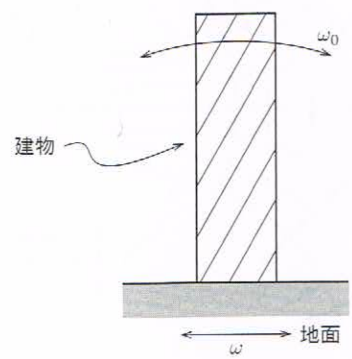
$$x = A\,\cos(\omega t + \delta) + \frac{f_0\,t}{2\omega}\sin(\omega t + \phi)\quad \text{である．}$$

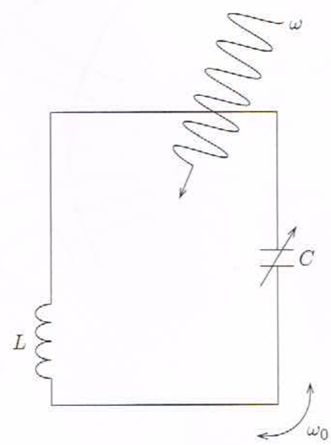
(4)　t とともに大きくなる $t\ \sin(\omega t+\phi)$ の項が $\omega = \omega_0$ の時に起こる共鳴現象を表している．この項は，t と共に振幅が際限なく大きくなる．

例 1　建物の固有振動数を ω_0，地震の振動数を ω とする．$\omega \approx \omega_0$ の時，建物の振動の振幅は大きくなる．

例 2　LC 回路の固有振動数は，$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ である．ここへ，外から振動数 ω の電磁波（ラジオ波）がやってくると $\omega \approx \omega_0$ の時共鳴して大きな電流が流れる．この原理を利用してラジオ局を選局している．

(各自多くの例を挙げられると思う)





5.2

$U(x,y) = m\omega^2 xy$

(1) 等ポテンシャル線

$$
\begin{array}{llll}
U=0 & \Rightarrow \quad m\omega^2 xy = 0 & \cdots & x=0 \text{ または } y=0 \\
U=-m\omega^2 & \Rightarrow \quad m\omega^2 xy = -m\omega^2 & \cdots & xy=-1 \\
U=-2m\omega^2 & \Rightarrow \quad m\omega^2 xy = -2m\omega^2 & \cdots & xy=-2 \\
U=-3m\omega^2 & \Rightarrow \quad m\omega^2 xy = -3m\omega^2 & \cdots & xy=-3
\end{array}
$$

力　$\boldsymbol{F} = -\nabla U = (-\dfrac{\partial U}{\partial x},\ -\dfrac{\partial U}{\partial y}) = -m\omega^2(y,x)$

等ポテンシャル線と力の方向は直交している．

証明）　等ポテンシャル線上に $\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}$ の 2 点をとる．$U(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r})$.

一方，$U(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) \equiv dU = d\boldsymbol{r}\cdot\nabla U$

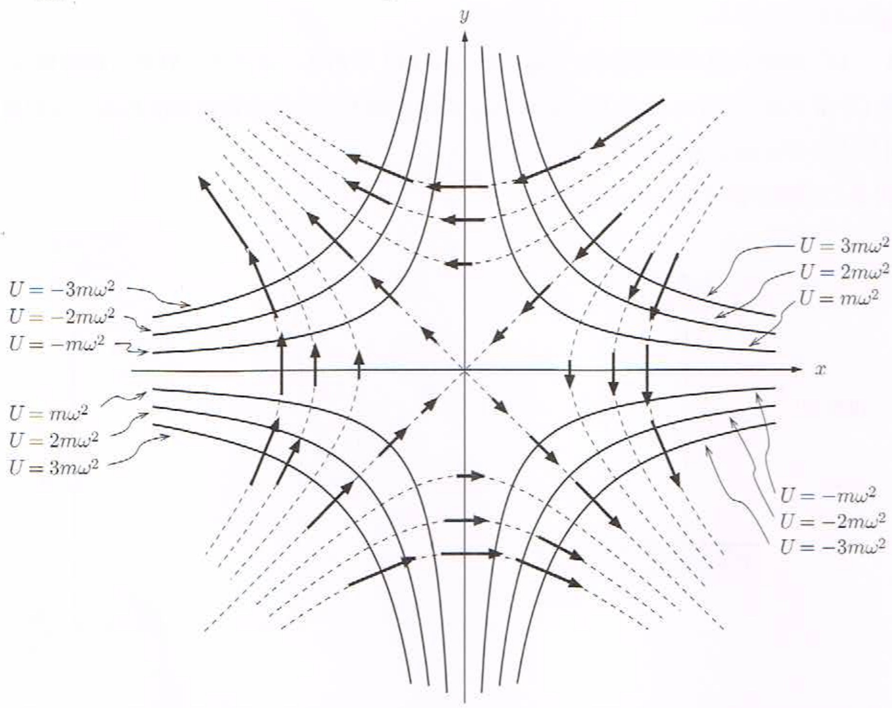
したがって $d\boldsymbol{r}\cdot\nabla U = 0 \quad \Rightarrow \quad d\boldsymbol{r}\perp\nabla U$

$d\boldsymbol{r}$ は等ポテンシャル線の接線方向を向いているので，

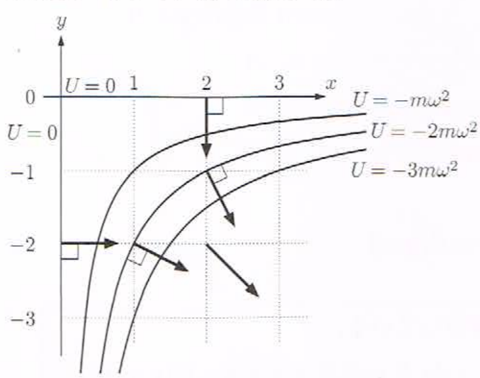
$\boldsymbol{F} = -\nabla U$ は等ポテンシャル線に垂直である．　証明終わり）

この問題では $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ として $0 = dU = dx\dfrac{\partial U}{\partial x} + dy\dfrac{\partial U}{\partial y} = m\omega^2(ydx + xdy)$ より，

$$\frac{dy}{dx} = \text{接線ベクトルの傾き} = -\frac{y}{x}$$



実線は等ポテンシャル線，破線は力線，矢印は力 $\boldsymbol{F}$ でその大きさは $|\boldsymbol{F}| = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$ である．よって，第 4 象限では



$\boldsymbol{F} = -m\omega^2(y, x)$

A$(2, 0)$ では　$\boldsymbol{F} = -m\omega^2(0, 2)$

B$(2, -1)$ では　$\boldsymbol{F} = -m\omega^2(-1, 2)$

C$(2, -2)$ では　$\boldsymbol{F} = -m\omega^2(-2, 2)$

D$(1, -2)$ では　$\boldsymbol{F} = -m\omega^2(-2, 1)$

E$(0, -2)$ では　$\boldsymbol{F} = -m\omega^2(-2, 0)$

(2)

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = -m\omega^2 y \quad \cdots \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = -m\omega^2 x \quad \cdots \quad (2)$$

(3) $X = x + y$, $Y = x - y$

(1)+(2) より　$m(\ddot{x}+\ddot{y}) = -m\omega^2(y+x) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{X} = -m\omega^2 X$

(1) − (2) より　$m(\ddot{x}-\ddot{y}) = -m\omega^2(y-x) \quad \Rightarrow \quad m\ddot{Y} = m\omega^2 Y$

(4) $X=0$ を中心に角振動数 ω の振動．（一般解は $\ddot{X} = -\omega^2 X$ より $X = A\cos(\omega t + \delta)$ となる．）

(5) $Y = e^{\lambda t}$ とおくと $\dot{Y} = \lambda e^{\lambda t}$，$\ddot{Y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ となり，代入すると $\lambda^2 e^{\lambda t} = \omega^2 e^{\lambda t}$ となる．$e^{\lambda t} \neq 0$ より，$\lambda^2 = \omega^2 \Rightarrow \lambda = \pm\omega$ と求められる．一般解は $Y = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$.

(6) $\dot{Y} = C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t}$ を用いて，$t=0$ では $Y = C_1 + C_2 = a$ と $\dot{Y} = (C_1 - C_2)\omega = 0$ より，$C_1 = C_2 = a/2$. したがって，$Y = \dfrac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$ となる．（これはまた良く双曲線関数を用いて，$Y = a\cosh\omega t$ とも書かれる．）

5.3

$U(\boldsymbol{r}) = 1/|\boldsymbol{r}| = 1/r$

(1)　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}\right)$. また，問 1.2 で説明したように　$\dfrac{dx}{dr}$

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{x}{r},\quad \frac{\partial U(r)}{\partial y} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{y}{r},\quad \frac{\partial U(r)}{\partial z} = \frac{dU(r)}{dr}\frac{z}{r}$$ なので，

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U = -\dfrac{dU}{dr}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$. ここで，$\boldsymbol{e}_r$ は $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル．

(2)　$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$

(3)

$$E = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + U(\boldsymbol{r}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{m}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}) + \frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}) = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{d}{dt}U(\boldsymbol{r}) \quad \cdots \quad (*)$$

さて $U(\boldsymbol{r})$ の t 依存性は $\boldsymbol{r}$ を通して起きるので $U(\boldsymbol{r}) = U(x(t), y(t), z(t)) = U(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ と考えて

$$\frac{dU(\boldsymbol{r})}{dt} = \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla U\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \nabla U\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$

よって，$(*)$ より

$$\frac{dE}{dt} = m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \nabla U\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = (m\ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla U)\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = 0$$

となる．ただし，ニュートンの運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} = -\nabla U$ を用いた．

5.4

(1)　エネルギー E は，初期条件より $E = \dfrac{1}{2}mv_0^2 - U_0$. (i) $E<0$, すなわち $|v_0| < \sqrt{2U_0/m}$ のとき有限領域の運動．可動領域の端の点は $E = U(x)$ より $x = \pm a|v_0|\sqrt{m/(2U_0)}$. よって運動の範囲は $-a|v_0|\sqrt{m/(2U_0)} \le x \le a|v_0|\sqrt{m/(2U_0)}$. (ii) $|v_0| > \sqrt{2U_0/m}$ のときは $E>0$ で無限遠まで運動 (範囲は $0 \le x < \infty$, または $-\infty < x \le 0$).

(2)　$m\ddot{x} = F = -\dfrac{dU}{dx} = -\dfrac{2U_0}{a^2}x$.

(3)　$\omega = \sqrt{\dfrac{2U_0}{m}\dfrac{1}{a}}$ とおくと，運動方程式は $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. 一般解は $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$.

$t=0$ で $x=B=0, \dot{x}=A\omega=v_0$. よって $x=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t=\sqrt{\dfrac{m}{2U_0}}v_0 a\sin\left(\sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}\dfrac{t}{a}\right)$.

5.5

(1)　可動範囲は全エネルギー E がポテンシャルより大きいという条件で決まる．この条件が有限の範囲の x で満たされればよい．さらに E は保存されるので，初期の値 $mv_0^2/2+(-U_0)$ に等しい．こうして求める条件は

$$\frac{m}{2}v_0^2+(-U_0)\le 0, \quad \longrightarrow \quad |v_0|\le\sqrt{\frac{2U_0}{m}}$$

(2)　x_1，x_2 では粒子は静止していて，E が $U(x_1)$，$U(x_2)$ に等しい；

$$\frac{m}{2}v_0^2+(-U_0)=U(x_1)=\left(-1+\left(\frac{x_1}{a}\right)^2\right)U_0, \quad \longrightarrow \quad x_1=-a|v_0|\sqrt{\frac{m}{2U_0}},$$

$$\frac{m}{2}v_0^2+(-U_0)=U(x_2)=\left(-1+\frac{x_2}{a}\right)U_0, \qquad \longrightarrow \quad x_2=\frac{mav_0^2}{2U_0},$$

(3)　$m\ddot{x}=-\dfrac{U_0}{a}$.　(一定加速度 $\alpha=-\dfrac{U_0}{am}$ の運動である)

(4)　$m\ddot{x}=-2\dfrac{U_0}{a^2}x$　(角振動数$\omega=\sqrt{\dfrac{2U_0}{ma^2}}$ の単振動である)

(5)　左半分にかかる時間を T_1，右半分にかかる時間を T_2 とすると，T_1，T_2 はそれぞれ単振動，等加速度運動の公式を使って求まる；

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}, \qquad T_2=2\frac{|v_0|}{\alpha}$$

$$\text{周期}=T_1+T_2=\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}+2\frac{|v_0|}{|\alpha|}=a\frac{\pi\sqrt{m}}{\sqrt{2U_0}}+2\frac{|v_0|am}{U_0}$$