

数学 2B 例題

2020 年 1 月 7 日 (火)

次回 (1/14), 大まかに解説します.

例題 1

実数で定義された関数 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xyz$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) 停留点をすべて求めなさい.
- (2) 各停留点におけるヘッセ行列を求めなさい.
- (3) f の極値を求めなさい. (極大・極小の判定もすること.)

例題 2

実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ について, 正定値, 負定値, いずれでもない, のどれに該当するか判定しなさい.

例題 3

行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ について, 対角化可能かどうか調べなさい. また, 対角化可能なら, 正則行列 P および対角行列 $P^{-1}AP$ も求めなさい.

例題 4

行列 $A = \begin{bmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{bmatrix}$ の行列式を求めなさい. 答えは完全に因数分解された形にしなさい.

例題 5

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$ について, A を表現行列とする線形写像を f_A , tA を表現行列とする線形写像を $f_{{}^tA}$ とする.

- (1) $f_A, f_{{}^tA}$ の全射性, 単射性をそれぞれ調べなさい.
- (2) $\text{Ker} f_A, \text{Im} f_{{}^tA}$ をそれぞれ求めなさい.

例題 6

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ とし, 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_n \mathbf{v}_n, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

と定めるとき, f は線形写像であることを示しなさい.

例題 7

n 次実行列 T が直交行列ならば, T^2 も直交行列であることを示しなさい.

例題 8

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を線形写像とする. このとき, $\text{Im} f = \mathbb{R}^n$ ならば, $\text{Im}(f \circ f) = \mathbb{R}^n$ であることを示しなさい.

例題 9

n 次実行列 A に対し, 次の問いに答えなさい.

- (1) $A^2 = A$ ならば A の行列式は 0 または 1 であることを示しなさい.
- (2) $A^2 = A$ ならば A の固有値は 0 または 1 であることを示しなさい.

例題 10

$m \times n$ 実行列 A に対し, 次の問いに答えなさい.

- (1) tAA は半正定値であることを示しなさい.
- (2) 特に $\text{rank} A = n$ ならば tAA は正定値であることを示しなさい.