慶應義塾大学試験問題　物理学 C

（試験時間 50 分）

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数 ε_0、磁気定数 μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I デカルト座標系 (x, y, z) を用いて考える。x, y, z 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。ベクトル量は $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$ のように $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表すか、$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように成分表示で表すものとする。

真空中で、原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を中心とする半径 a の球の $z > 0$ の部分 (半球内) に一定の電荷密度 ρ で電荷が分布している (図 I 参照)。

(1) 半球内で、z 軸からの距離 r が $r \sim r + \mathrm{d}r$、座標 z が $z \sim z + \mathrm{d}z$ の範囲にある微小円環部分にある電荷が原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ に作る電界 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r, z)$ を求めなさい。

(2) (1) で求めた $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r, z)$ を r について積分して、半球内で座標 z が $z \sim z + \mathrm{d}z$ の範囲にある微小円板部分 (半径 $\sqrt{a^2 - z^2}$) にある電荷が原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ に作る電界を求めなさい。さらに、半球内の全電荷が原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ に作る電界 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ を求めなさい。

(3) $z < 0$ の空間を導体で満たしたとき、導体表面上の原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ の直近の位置での面電荷密度 ω を求めなさい。

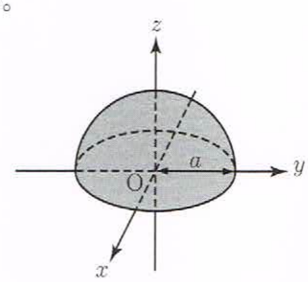

図 I

問題 II 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} E_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^4 \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} & \cdots \quad r \leq a \\[2ex] E_0 \left(\dfrac{a}{r}\right)^2 \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

で与えられている。ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ であり、$a\ (> 0)$、E_0 は定数である。

(1) 無限遠を基準点として、位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) 位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(3) この系の全静電エネルギー U_{E} を求めなさい。

問題 III 図 III-1 のように、半径 a、高さ h の円筒状の電極 A、および半径 $b\ (> a)$、高さ h の円筒状の電極 B が中心軸を共通にして、高さをそろえて配置してある。中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 III-2 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$

を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。A と B の間は、位置 (r, φ, z) における電気伝導率 $\sigma(r, \varphi, z)$ が

$$\sigma(r, \varphi, z) = \sigma_0 \left(\frac{b}{r}\right)^2 \quad \cdots \quad a \leq r \leq b$$

となるように導体が詰めてある。ここで、$\sigma_0\ (> 0)$ は定数である。AB 間の電位差が一定に保たれ、A から B に一定電流 I が流れている場合を考える。

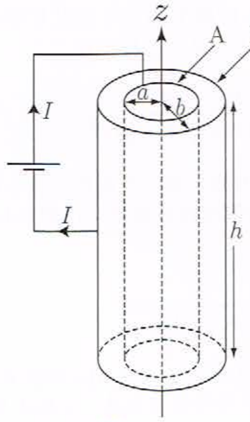

図 III-1

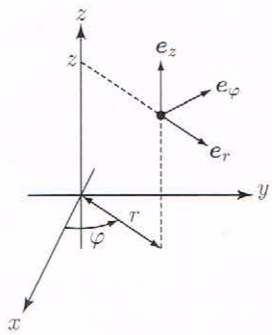

図 III-2

(1) AB 間の位置 (r, φ, z) における電流密度 $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z)$ と電界 $\boldsymbol{E}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

(2) AB 間の電位差 V を求め、AB 間の全電気抵抗 R を求めなさい。

(3) $a < r_1 < r_2 < b$ とするとき、中心軸からの距離 r が $r_1 < r < r_2$ で高さが h の範囲の導体で単位時間に発生するジュール熱 $P(r_1, r_2)$ を求めなさい。

問題 IV 真空中に内半径 a、外半径 $b(> a)$ の円筒状の無限に長い導体がある。円筒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。問題 III で定義した互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す (図 III-2 参照)。この導体に定常電流が流れている。位置 (r, φ, z) における電流密度 $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z)$ は

$$\boldsymbol{i}(r, \varphi, z) = \begin{cases} \mathbf{0} & \cdots \quad r < a \quad (\text{真空中}) \\ i_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^4 \boldsymbol{e}_z & \cdots \quad a \leq r \leq b \quad (\text{導体中}) \\ \mathbf{0} & \cdots \quad b < r \quad (\text{真空中}) \end{cases}$$

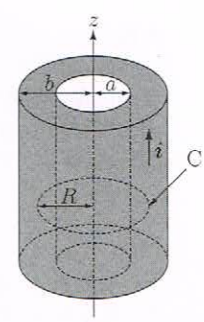

図 IV

で与えられている (図 IV 参照)。ここで、a、b、i_0 は正の定数である。

(1) z 軸に垂直な平面内で z 軸を中心軸とする半径 R の円周 C(図 IV 参照) を縁とする面 $(0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ z = \text{一定}$ の領域) を貫く電流 $I(R)$ を求めなさい。$\boldsymbol{e}_z$ を電流の正の向きとする。

(2) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$ は $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z) = B(r)\boldsymbol{e}_\varphi$ と表される。磁束密度に $\boldsymbol{e}_r$ 方向成分、$\boldsymbol{e}_z$ 方向成分が無い理由を説明しなさい。また磁束密度の $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向成分が φ、z に依存しない理由を説明しなさい。

(3) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。