数学 2B　第 3 回（線形写像と行列）

2019 年 10 月 8 日（火）
担当 ： 南 美穂子 (mminami@math.keio.ac.jp)

宿題の解答例

問題 2-4.(1) 以下のように列基本変形を繰り返して，下階段行列に変形する．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[3\text{ 列}+1\text{ 列}\times 3]{2\text{ 列}-1\text{ 列}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -14 \\ 5 & -9 & 18 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3\text{ 列}+2\text{ 列}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 5 & -9 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．よって，U の基底は $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ であり，$\dim U = 2$ である．　□

(2) 以下のように同次形連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解く．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -5 & 10 \\ -1 & 1 & -4 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{3\text{ 行}-1\text{ 行}\times 4 \\ 4\text{ 行}+1\text{ 行}}]{2\text{ 行}-1\text{ 行}\times 2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 4 & -6 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[4\text{ 行}+2\text{ 行}\times 2]{3\text{ 行}-2\text{ 行}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\text{ 行}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行}-2\text{ 行}\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．自由度は 4(変数の数) $-$ 2(方程式の数)$=$ 2 であり，$x_3 = t_1, x_4 = t_2$ とおくと，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の任意の解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}t_1 + 10t_2 \\ \frac{3}{2}t_1 - 5t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

と表せる．基底は $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，次元は 2 である．　□

演習問題

「宿題」と書かれた演習問題の答案を OCR 対応用紙に記し，次回の講義時に提出しなさい．

問題 3-1.　集合 X, Y を (1) − (4) の各場合で定めるとする．このとき，写像 $f : X \to Y,\ f(x) = |x|$ が (a) 全単射，(b) 全射だが単射でない，(c) 単射だが全射でない，(d) 全射・単射のいずれでもない，のいずれであるかを判定しなさい．

(1) $X = \mathbb{R},\quad Y = \mathbb{R}$　　(2) $X = \mathbb{R},\quad Y = [0, \infty)$

(3) $X = [0, \infty),\quad Y = \mathbb{R}$　　(4) $X = [0, \infty),\quad Y = [0, \infty)$

問題 3-2.　次の各写像が線形写像かどうか調べなさい．

(1) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x + y + z$　　(2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = xy$

(3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ 2x-y \end{bmatrix}$　(4) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f_4(x) = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$

問題 3-3.　線形写像 $f : X \to Y$ について，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r \in X$ が 1 次従属ならば，$f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_r) \in Y$ も 1 次従属であることを示しなさい．

問題 3-4.　次の条件を満たす線形写像の表現行列を求めなさい．

(1) $g_1\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},\quad g_1\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

(2) $g_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix},\quad g_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},\quad g_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) $g_{31}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix},\quad g_{32}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$ としたときの合成写像 $g_{31} \circ g_{32}$ および $g_{32} \circ g_{31}$ の表現行列．

問題 3-5(宿題).

(1) 次の写像が (a) 全単射，(b) 全射だが単射でない，(c) 単射だが全射でない，(d) 全射・単射のいずれでもない，のいずれであるかを判定しなさい（理由も述べること）．

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x^3| - x$$

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は次の条件を満たすものとする．

$$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

このとき，線形写像 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の表現行列を，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ を満たすように定めなさい．