

数学 2 B 第 5 回の演習問題の解答例

問： $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を正規直交化しなさい。

解答例： \boldsymbol{x}_1 と \boldsymbol{x}_2 は互いに直交し、それぞれノルムが 1 であるので、 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2$ としてそのまま利用する。

$\boldsymbol{v}_3 = c_{13}\boldsymbol{v}_1 + c_{23}\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{x}_3$ とし、 \boldsymbol{v}_3 が \boldsymbol{v}_1 , \boldsymbol{v}_2 と直交するように定める。すなわち、 $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2) = 0$ とする。

$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1) = 0$ より、

$$c_{13} = \frac{-(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1)} = 0$$

となり、 $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_2) = 0$ より

$$c_{23} = \frac{-(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2)} = -1/2$$

となる。これより、

$$\boldsymbol{v}_3 = -1/2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|}$, すなわち

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \\ -1/\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

とすると、 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を正規直交化したものとして $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を得る。