物理学C演習　第1回
（教科書第1章）

【1-1】デカルト (xyz) 座標系において、z 軸上の線上全て $(-\infty < z < \infty)$ に一定の線電荷密度 σ_0 で電荷が分布している。この電荷が位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に作る電界 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ を (1.22) 式および例題 1-4 を参考にして求めなさい。さらに、この電界の大きさを求め、電界がどのような向きを持っているか説明しなさい。

必要な積分

積分 $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(a^2 + (z-s)^2)^{3/2}}$ で、変数変換 $u = s - z$ を行うと、$\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}}$ となる。この不定積分は (1.23) 式に与えている。無限区間の積分を有限区間 $(-L \leq x \leq L)$ とし、積分の最後に $L \to \infty$ とすると

$$\mathcal{I} = \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \lim_{L\to\infty} \left[\frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} \right]_{-L}^{L} = \frac{1}{a^2} \lim_{L\to\infty} \left\{ \underbrace{\frac{L}{\sqrt{a^2+L^2}}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{-L}{\sqrt{a^2+(-L)^2}}}_{\to -1} \right\}$$

より、積分値は $\mathcal{I} = \dfrac{2}{a^2}$ となる。

【1-2】デカルト (xyz) 座標系において、以下の場合の電界を求めなさい。以下では、$a > 0$ とする。

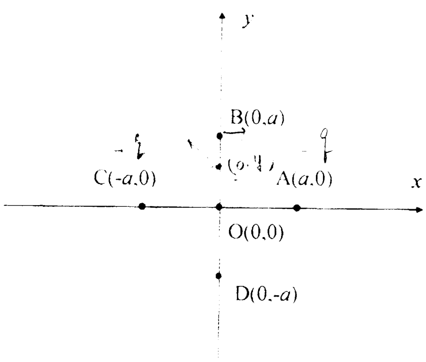
(a) 3個の位置 $\boldsymbol{r}_1 = (a, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (0, a, 0)$, $\boldsymbol{r}_3 = (0, 0, a)$ に電荷 q を置いた。位置 $\boldsymbol{r} = (-a, -a, -a)$ での電界ベクトルを求めなさい。

(b) デカルト座標系 xyz において、$x = a, y = 0$ を通り z 軸に平行な無限直線上に線電荷密度 σ_0 で電荷が分布し、$x = -a, y = 0$ を通り z 軸に平行な無限直線上に線電荷密度 $-\sigma_0$ で電荷が分布している。このとき位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ での電界を求めなさい。（問題 1-1 の結果を用いよ。）

(c) デカルト座標系 xyz において、x 軸、y 軸、そして z 軸上におのおの無限の区間に線電荷密度 σ_0 で電荷が分布している。位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ での電界を求めなさい。（問題 1-1 の結果を用いてよい。）

【Quiz】

2次元の直交座標において、y 軸上の電界ベクトルを $\boldsymbol{E}(0, y) = (E_x, E_y)$ と表記する。今、電荷量 q と電荷量 $-q$ の 2 つの電荷がある（$q > 0$ である）。この 2 つの電荷を用いて、y 軸上の電界ベクトルが $+x$ 方向成分のみを持つ、つまり $\boldsymbol{E}(0, y) = (E_x, 0)$, $E_x > 0$ となるように電荷を配置したい。



(1)　A$(a,0)$, B$(0,a)$, C$(-a,0)$, D$(0,-a)$, O$(0,0)$ の 5 点の座標のうち 2 点に電荷を配置できるとすると、どの点に電荷 q、電荷 $-q$ を配置すれば、題意を満たすことができるか。ただし $a > 0$ である。また、同じ位置に 2 つの電荷を置いてはいけない。

(2)　(1)のとき、E_x を求めよ。（ヒント：y に依存するはずである。）

(3)　(2)の場合、y が a に比べて十分に大きく、$1 + (a/y)^2 \approx 1$ と見なせるとすると、E_x は y に対して y^{-p} に比例すると考えることができる（ただし $y > 0$ のとき）。この時の p として最も的確なものは以下のどれか。

①$p = 1$ ②$p = 2$　③$p = 3$　④$p = 4$　⑤$p = 1.5$

物理学C演習　第2回
(教科書第2章)

【2-1】以下の場合に全電荷 Q を求めなさい。$\sigma_0, \omega_0, \rho_0, a, b, h$ は定数である。

(a) 長さが a で太さの無視できる曲線上に、線密度が

$$\sigma(s) = \sigma_0 \frac{s}{a}, \qquad 0 \le s \le a$$

で、電荷が分布している。ここで、s は曲線の一端からの距離である。

(b) 半径 a で張る角度が θ の扇状の薄板があり、面密度が

$$\omega(r) = \omega_0 \frac{r}{a}, \qquad r \le a$$

で、電荷が分布している。ここで、r は中心軸からの距離である。

(c) 半径 a で高さが h の円柱内に、密度が

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}, \qquad r \le a$$

で、電荷が分布している。r は中心軸からの距離である。

(d) 中心からの距離が $a \le r \le b$ の球殻内に、密度が

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{a}, \qquad a \le r \le b$$

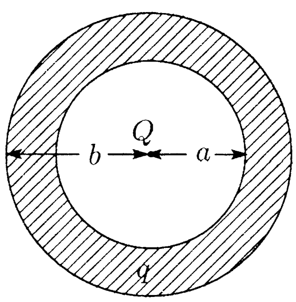
で、電荷が分布している。

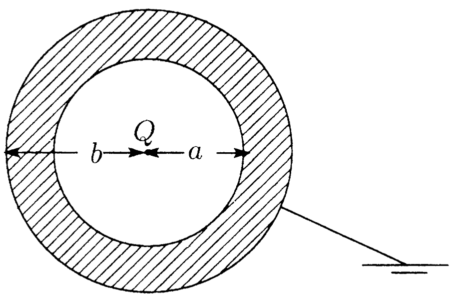
【2-2】半径 a の無限に長い円柱に一様な電荷密度 ρ で電荷が詰まっている。円柱の内外の電界 $\boldsymbol{E}$ を求め、さらに電界の大きさ E を中心軸からの距離 r の関数としてグラフに示しなさい。ただし，円柱の外側は真空であるとする。
（ヒント：まず電荷分布の対称性から、電界がどのような形状をなすかを考える。つぎに、ガウス曲面をどのように選べばよいかを考え、ガウスの法則に適用する。）

【challenge 問題】 半径 a の無限に長い円柱に、電荷密度が中心軸からの距離 r の関数として、$\rho(r) = A(a-r)(\frac{1}{2}a - r)$ であるとする。ここで A は定数である。軸方向に長さ h あたりの電荷を r の関数として求め、全電荷を求めなさい。さらに電界を求めなさい。

【2-3】(時間が余った人のための問題）点電荷 Q を中心として，内半径 a，外半径 b の導体球殻がある．以下の場合について，$r < a, a < r < b, b < r$ の各領域での電界の大きさを求めなさい．ここで r は中心からの距離である．外部からの電界はないとする．

1. 導体球殻に電荷 q を与えた場合.
2. 導体球殻を接地した場合.（接地により $r = b$ での導体表面上の電荷は零となる.）





物理学C演習　第3回
（教科書第3章）

電位ムズイ.

【3-1】以下の問に答えなさい。

(a) 半径 a の金属球Aに電荷 q を与えた。この金属球の内外の電界を求めなさい。

(b) 無限遠点を基準点に選ぶ。金属球Aの電位を求めなさい。

(c) 電荷を持たない半径 b の別の金属球Bを球Aから**十分離れた場所**に置き，細い導線で両球をつないだ後、両球の電位はいくらとなるか。（ヒント：球Aと球Bに各々電荷 q_A と q_B が分布していると考えるとよい。）

(d) このとき両球の表面の電界を求め，$a > b$ として両者の大きさを比較しなさい。（導線は細いのでその表面の電荷は無視できるとする。）

(e) **【challenge 問題】**つなぐ前とつないだ後との静電エネルギーの差を求めなさい。このエネルギー差は何故現れたと考えられるか？

【注意】十分離れた場所とは、球の表面近傍では他の球の影響を考えないで良いほど離れていることを表している。

【3-2】極板として高さ h で半径 a の金属円筒と、同じ高さの半径 b（$b > a$）の金属円筒を同軸に設置した円筒状コンデンサーを考える。h は十分に大きく、端からの電界の遺漏は無視できるとする。

(a) このコンデンサーの電気容量を求めなさい。

(b) 両極の電位差を V に保った。このときの静電エネルギーを、電界のエネルギー密度を体積積分することにより求めなさい。

（ヒント：教科書例題3-3、3-4、2-3などを参考にするとよい。）

【クイズ】

半径 a, b の金属でできた2つの同心球殻があり，半径 a の球殻に電荷 Q, 半径 b の球殻に電荷 $-Q$ を与えてある.

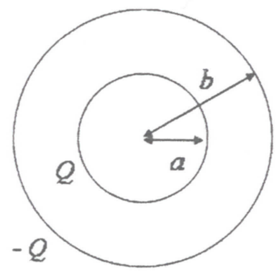
このとき，以下の問いに答えよ.

(1) 中心からの距離を r としたとき，ガウスの法則を用いて電界 $E(r)$ を求めよ.

$r < a$,　$a \leq r \leq b$,　$b < r$ に場合分けをして求めよ.

(2) 球殻間の電位差 V を求めよ.

(3) 全空間に蓄えられている電界のエネルギーと球殻間に蓄えられている静電エネルギーをそれぞれ導出し、それらが一致することを示せ.



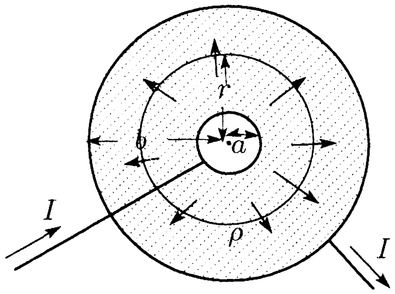
物理学C演習　第4回
（教科書第4章）

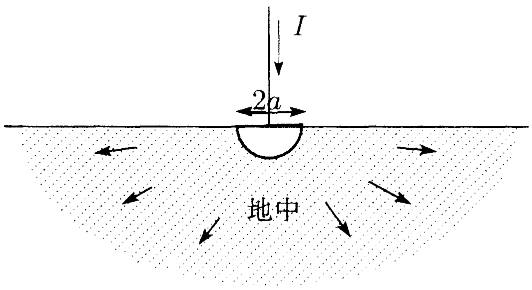
【4-1】半径 a と半径 b（$a<b$）の金属でできた球殻が中心を共通にして配置してある。この球殻間は一定の抵抗率 ρ の物体で満たされているとする。内球殻から外球殻に定常電流 I が流れている。この定常電流は導線により外側から供給され、外球殻につながった導線で外部に流れ去る。

(a) 中心から距離 r（$a<r<b$）での電流密度を求めなさい。

(b) 電界を求め、これより電位差を計算し、I と V の関係式より、全電気抵抗を決定しなさい。さらに、$b\to\infty$ での全電気抵抗を求めなさい。

(c) 半径 a の金属半球を地中に埋めたとしよう。この電極の接地抵抗とは、この電極とそれを中心とする半径無限大の半球状の電極との間の抵抗である。接地抵抗は問 (b) の結果の２倍の大きさであることを確かめなさい。$a=1.50\times10^{-1}$ m，大地の抵抗率を $\rho=2.00\times10^{2}\ \Omega$m とすると接地抵抗はいくらになるか。





【4-2】電気容量 C_1 と C_2 のコンデンサー２個と抵抗 R からなる回路を考える。コンデンサー１を電圧 V_0 で充電したのち、時刻 $t=0$ で図のようにつないだ。コンデンサー２は最初は電荷はないとする。以下の問に答えなさい。

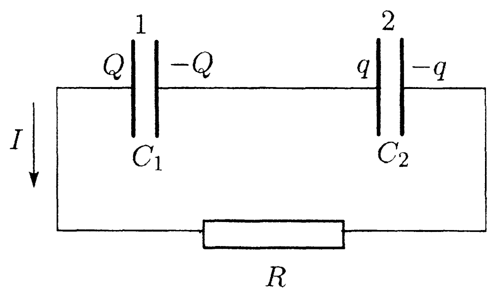
(a) 図のように、時刻 t でのコンデンサー１の電荷を Q、コンデンサー２の電荷を q とし、さらに図のように電流 I の向きをきめる。Q および q と I の関係式を記しなさい。

(b) 電位差を考えることで、Q、q、I の間に成り立つ関係式を求めなさい。

(c) 問 (a)、(b) より電流の満たす微分方程式およびその一般解を求めなさい。（必要なら直列コンデンサーの合成電気容量 $C=C_1C_2/(C_1+C_2)$ を用いよ。）

(d) 初期条件を代入して、Q、q、I を決定しなさい。さらに $t\to\infty$ での Q と q を求めなさい。

(e) 【 **challenge 問題** 】抵抗で発生する全熱量を計算し、エネルギー保存則を確認しなさい。



[4章クイズ]

半径aの円筒Aと半径bの円筒Bがある（$a < b$）。共に高さはhである。この2円筒の中心軸が同一になるように並べ、その間を電気抵抗率ρの抵抗体で満たす(図1参照)。この中空円柱型抵抗に関して下記の問に答えよ。ただし、電池をつないだ面は電極とする。

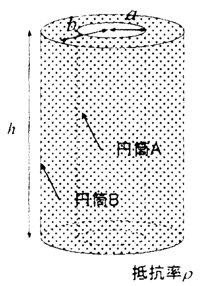


図1

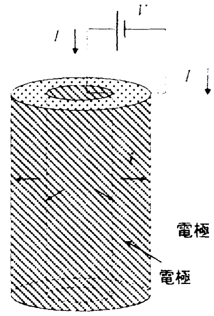


図2

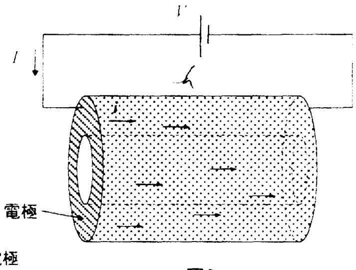


図3

(a)　図2のように円筒Aと円筒Bを電極とし、電圧Vを印加した。電流は円筒の軸から等方的に流れている。この時、この中空円柱型抵抗の抵抗値R_1を求めよ。

(b)　図3のように抵抗の上面と底面を電極とし、円筒の長さ方向に対して電圧Vを印加した。電流は抵抗体内において一様に流れている。この時、中空円柱型抵抗の抵抗値R_2を求めよ。

物理学C演習　第5回
（教科書第5章）

【5-1】以下の問に答えなさい。

(a) 電位を　$\phi(\boldsymbol{r}) = -\lambda|z|$ とする。ここで λ は定数であり、$|z|$ は絶対値である。$z \neq 0$ での電界と電荷密度を求めなさい。さらに、ここで求めた電界が教科書の例題 2-1 で求めた電界と同じであることを確認し、$z = 0$ 面に分布している電荷の面電荷密度 ω を決定しなさい。

(b) 電位を　$\phi(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{x^2+y^2}{b^2}\right)$ とする。　ここで σ_0 および b は定数であり、ln は e を底とする対数 $\log_e$ である。$x^2+y^2 \neq 0$ での電界と電荷密度を求めなさい。

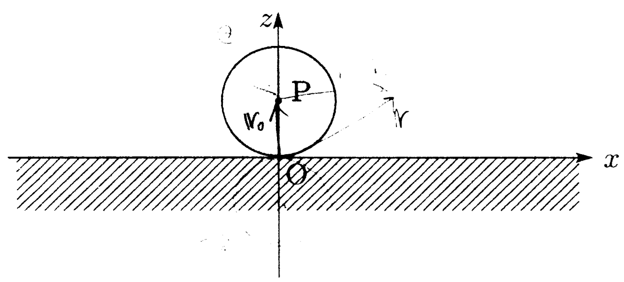
(c) **【challenge 問題】** 電界が $\boldsymbol{E} = \dfrac{C\boldsymbol{r}}{r^3}$ である。ここで C は定数である。$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ での電荷密度を求めなさい。（教科書の補足 5-3 を参照せよ。）

【5-2】図のように xyz 座標系で表した3次元空間で、$z > 0$ は真空であり、$z < 0$ の領域は導体で満たされているとする。電荷が一様に分布した半径 a の絶縁体球を導体上に置いた。その中心の位置 P を $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, a)$ とする。球の全電荷は Q とする。

(a) 導体のかわりに真空であるとした場合に、任意の位置 $\boldsymbol{r}$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0$ を用いて表しなさい。教科書の例題 2-4 の結果を用いてよい。

(b) 次に図のように導体がある場合に、位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z),\ z > 0$ での電界をベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0$ を用いて表しなさい。さらに導体表面上の電界を求めて、電気力線は導体表面に垂直に出入りしていることを示しなさい。
(ヒント：導体表面上で電位が零となるように鏡像電荷を配置すること。)

(c) **【challenge 問題】** このとき導体表面上に誘起される電荷の電荷面密度を求め、接点（座標原点）から半径 R 内にある全誘起電荷を計算しなさい。（ヒント：教科書の (3.14) 式）



【5章クイズ】

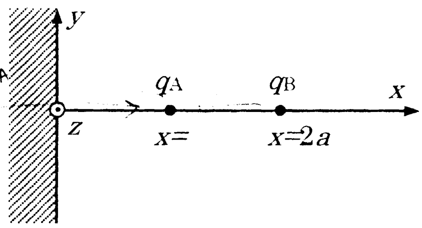
I.

電荷密度 $\rho(x,y,z)=\alpha x$ が分布した3次元デカルト座標空間がある。この空間内に、無限の広さを持つ2枚の導体平面板を、$x=0$ および $x=d$ の位置に y-z 平面と平行に置き、その各々の電位を $\phi(0,y,z)=\phi_0$ および $\phi(d,y,z)=0$ に保つ。ポアソン方程式を用い、$0\leq x\leq d$ における<u>電位 $\varphi(x,y,z)$ および電界 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$</u> を求めよ。

ヒント：電位、電界とも、y, z には依存しないのは明らか。

II.

図のように、3次元デカルト座標空間上で $x<0$ の領域は無限に広い完全導体であるとする。電荷量 q_A、q_B を持つ2つの点電荷を、それぞれ$(a, 0, 0)$、$(2a, 0, 0)$の位置に固定する。点電荷 q_A にはたらくクーロン力が零となるとき、



電荷量 q_A、q_B の間に成り立つ関係を求めよ。

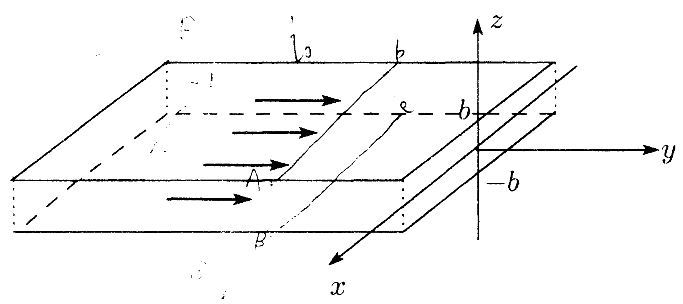
物理学Ｃ演習　第６回
（教科書第６章）

【6-1】半径 a，長さ l の円柱状の導体棒がある。導体棒の抵抗率は中心からの距離 r の関数で $\rho(r) = \rho_0 a/r$ という形をしている。この棒の両端に電圧 V を加える。

(a) 導体棒に流れる電流密度を r の関数として求めなさい。

(b) 円柱内外の磁束密度を r の関数として求め，これをグラフに描きなさい。ただし，l は a に比べて十分長く，棒の端の影響は考えなくてよいものとする。

【6-2】図のように厚さが $2b$ の無限に広い平板内を、電流が $+y$ 方向に流れている。その電流密度の大きさは i_0 ($i_0 > 0$) とする。磁束密度を求めなさい。ただし外部から磁界は掛っていないとする。
（ヒント：電流の流れの対称性と右ねじの法則から、磁束密度がどの方向を向くかを考え、アンペールの法則を適用せよ。）



第６章　クイズ】
図のように半径 a の導体円柱があり、その外側に中心軸の等しい別の半径 $2a$ の導体円筒がある。円柱中心からの距離を r とする。今、$r < a$ において電流密度 $i_0 r/a$ を軸方向と平行に流し、$a < r < 2a$ において電流密度 $k\, i_0$ を反対方向に均一に流す。$k>0$ として、以下の問いに答えよ。
(i) $r < a$ における磁束密度の大きさを求めよ。
(ii) k をある値にすると $r = 2a$ において磁束密度が 0 になる。この k の値を求めよ。