

4/21 問題  $A = (a_{ij}) \in m \times n$  行列,  $B = (b_{ij}) \in n \times p$  行列  
とすると,  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  が成り立つことを示せ.

解)  $AB$  は  $m \times p$  行列なので,  ${}^t(AB)$  は  $p \times m$  行列.  
 ${}^tB$  は  $p \times n$  行列,  ${}^tA$  は  $n \times m$  行列なので. 積  ${}^tB {}^tA$  は  
定義され,  $p \times m$  行列となり,  ${}^t(AB)$  の型と一致する.

両辺の対応する成分を比較する.

$$\begin{aligned} {}^t(AB) \text{ の } (i, j)\text{-成分} &= AB \text{ の } (j, i)\text{-成分} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^tB {}^tA \text{ の } (i, j)\text{-成分} &= \sum_{k=1}^n ({}^tB \text{ の } (i, k)\text{-成分}) \times ({}^tA \text{ の } (k, j)\text{-成分}) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} \cdot a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = {}^t(AB) \text{ の } (i, j)\text{-成分}. \end{aligned}$$

よって  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$  が示された.

関連問題 正方形行列  $A, B$  が上三角行列ならば,  
積  $AB$  も上三角行列であることを示せ.