慶應義塾大学試験問題　物理学D

2011年1月22日（土）3時限（試験時間 50分）　問題用紙 回収不要

担当者　小原、神成、高野、日向

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。ただし、真空の誘電率 ε_0、透磁率 μ_0、光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 電気抵抗率 ρ の導体でできた半径 a の無限に長い円柱棒がある。円柱棒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 I-1 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。この円柱棒に時刻 t に依存した一様な磁界 $\boldsymbol{B}_{\rm ex}(r, \varphi, z, t) = B_{\rm ex}(t)\boldsymbol{e}_z$ を加えた (図 I-2 参照)。ここで、$B_{\rm ex}(t) = B_0 + \beta t$ で, B_0, β は正の定数である。

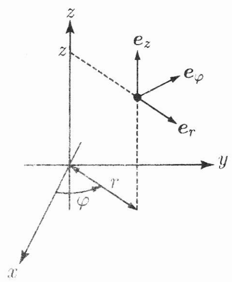


図 I-1

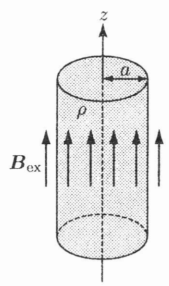


図 I-2

(1) 時刻 t で、位置 (r, φ, z) における電界 $\boldsymbol{E}(r, \varphi, z, t)$ と電流密度ベクトル $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z, t)$ を求めなさい。

(2) 時刻 t で、円柱棒の単位長さに発生する単位時間あたりのジュール熱 $P(t)$ を求めなさい。

(3) 時刻 t で、円柱棒の表面上の位置 $(r = a, \varphi, z)$ におけるポインティング・ベクトル $\boldsymbol{S}(a, \varphi, z, t)$ を求めなさい。

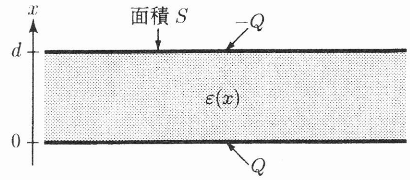
(4) 時刻 t での円柱棒の単位長さあたりの電磁エネルギーを $U(t)$ とするとき、$\dfrac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}$ を求めなさい。(2), (3) の結果を使っても良い。

問題 II 誘電率が ε、透磁率が μ の物質中で、電界を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、真電荷密度を $\rho_{\rm t}$、真電流密度を $\boldsymbol{i}_{\rm t}$ とする。ε, μ は定数とする。

(1) この物質中のマクスウェルの方程式を書きなさい。

(2) デカルト座標系 (x, y, z) を用いて考える。x, y, z 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。$\rho_{\rm t} = 0$, $\boldsymbol{i}_{\rm t} = \boldsymbol{0}$ で、時刻 t, 位置 (x, y, z) において $\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = E_y(x, t)\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{B}(x, y, z, t) = B_z(x, t)\boldsymbol{e}_z$ と与えられる平面電磁波で、$E_y(x, t)$ が、2 回以上微分可能な任意の関数 $f(\xi)$ を用いて、$E_y(x, t) = f(x - vt)$ で与えられるとき、定数 $v > 0$ と $B_z(x, t)$ はどうなるか書きなさい (結果のみで良い)。ただし、$B_z(x, t)$ には t に依存しない磁界の寄与はないものとする。

問題 III 極板間の距離が d、両極板の面積が S の平行平板コンデンサーを考える。次の図のように、一方の極板が $x=0$ の面内に、もう一方の極板が $x=d$ の面内あるように、**問題 II** で用いたデカルト座標系 (x,y,z) をとる。極板間 $0<x<d$ には誘電体があり、その誘電率が x の関数として $\varepsilon(x)=\bar{\varepsilon}\varepsilon_0\exp(\alpha x)$ のように変化している。ここで、$\bar{\varepsilon}$, α は正の定数であり、$\bar{\varepsilon}>1$ を満たす。$x=0$ にある電極に正の電荷 Q を、$x=d$ にある電極に負の電荷 $-Q$ を与える。極板の端からの電界の漏洩は無視できるものとする。ベクトル量は単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表しなさい。



(1) 極板間の電界 $\boldsymbol{E}$、電束密度 $\boldsymbol{D}$、電気分極 $\boldsymbol{P}$ を求めなさい。

(2) コンデンサーの電気容量を求めなさい。

(3) 誘電体の $x=0$ の表面の分極電荷面密度 $\omega_P^{(x=0)}$ と $x=d$ の表面の分極電荷面密度 $\omega_P^{(x=d)}$ を求めなさい。誘電体の表面に現れた全分極電荷 $q_{\mathrm{P}}^{(\text{表面})}$ を求めなさい。

(4) 誘電体内部 (表面以外) の分極電荷密度 ρ_{P} を求めなさい。ρ_{P} を誘電体の全体積にわたって積分し、誘電体内部 (表面以外) の全分極電荷 $q_{\mathrm{P}}^{(\text{内部})}$ を求めなさい。

問題 IV 無限に長い直線状の導線があり、大きさ I の定常電流が流れている。図 IV-1 のように、その導線を中心軸として、内径が a、外径が b の円筒状の無限に長い磁性体がある。導線が z 軸に、電流の流れる方向が z 軸の正の方向になるように、**問題 I** で用いた円柱座標系 (r,φ,z) をとる。このとき、磁性体は $a<r<b$ の領域にある。磁性体の透磁率は r の関数として $\mu(r)$ で与えられている。$r<a$, $b<r$ の領域は真空である。ベクトル量は単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表しなさい。

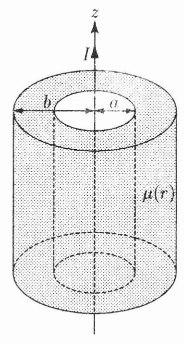


図 IV-1

(1) 磁束密度 $\boldsymbol{B}(r,\varphi,z)$、磁界 $\boldsymbol{H}(r,\varphi,z)$、磁化 $\boldsymbol{J}(r,\varphi,z)$ を求めなさい。

(2) z 軸を中心とした半径 r の円内を貫く磁化電流 $I_{\mathrm{m}}(r)$ を、$r<a$, $a<r<b$, $b<r$ の場合に求めなさい。ただし $\boldsymbol{e}_z$ を磁化電流の正の方向とする。$r=a$, $r=b$ で $I_{\mathrm{m}}(r)$ に飛びがある理由を説明しなさい。

注意: 円内を貫く電流とは、例えば図 IV-2 のように、円周を縁とする面を貫通する電流のことで、円周上を流れる電流ではない。

ヒント: $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ を磁化電流密度とするとき、$\mathrm{rot}\boldsymbol{J}=\mu_0\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ の積分形を考える。あるいは、$\boldsymbol{B}$ に関するアンペールの法則 (積分形) で、全電流から真電流の寄与を差し引く。

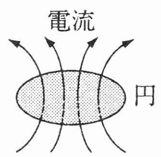


図 IV-2