

数学 2 B 第 3 回の演習問題の解答例

問：線形写像 $f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が以下を満たすとき、 f の表現行列を求めよ。

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

解答例： $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ を以下のように求める。

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \times f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} \\ f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上より f の表現行列を A とすると

$$A = \begin{bmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -9 & -11 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

検算

$$\begin{bmatrix} 11 & -9 & -11 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$