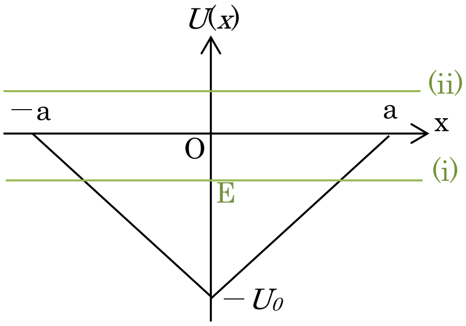
物理学 A　5 章演習　解説

5.1

エネルギー保存則を用いる.



$$U(x)=\begin{cases} U_0\left(\dfrac{|x|}{a}-1\right) & |x|\le a \\ 0 & |x|\ge a \end{cases}$$

$$E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)=\frac{1}{2}mv_0{}^2-U_0$$

(i)　E＜0 のとき

$E=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2-U_0<0$ より

$\left|v_0{}^2\right|<\left|\sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}\right|$

このとき往復運動

運動の範囲の端で

$U(x)=E(\dot{x}=0)$

図より，E＝−U が運動エネルギー

→右に行くに従ってエネルギーは小さくなる.

→交点でとまり，その後 $F=-\dfrac{dU}{dx}$ （傾きが正）より

左向きの力が加わる.

$$U_0\frac{|x|}{a}-U_0=\frac{1}{2}mv_0{}^2-U_0$$

$$|x|=a\frac{mv_0{}^2}{2U_0}$$

$$\therefore -a\frac{mv_0{}^2}{2U_0}\le x\le a\frac{mv_0{}^2}{2U_0}$$

(ii)　E＞0 のとき

$\left|v_0{}^2\right|>\left|\sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}\right|$

このとき半無限領域の運動

図より，E がずっとあるため

∞までいける.

（$v_0>0$ のとき　$x\ge 0$

$v_0<0$ のとき　$x\le 0$）

※E＝0 のとき　x＝±a で静止

そのあとどうなるかは不明（$F=-\dfrac{dU}{dx}$ が計算できる）

5.2 $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega^2 x=\frac{f}{m}\cos\omega_e t$

1) f＝0 のとき

$x=e^{\lambda t}$ とおくと $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$

$\ddot{x}=\lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2+2\beta\lambda+\omega^2=0$$

$$\lambda=-\beta\pm i\sqrt{\omega^2-\beta^2}$$

一般解は

$$x=Ae^{(-\beta+i\tilde{\omega})t}+Be^{(-\beta-i\tilde{\omega})t} \qquad \left(\tilde{\omega}=\sqrt{\omega^2-\beta^2}\right)$$

$$=e^{-\beta t}\left[(A+B)\cos\tilde{\omega}t+i(A-B)\sin\tilde{\omega}t\right]$$

→a →b

$$=e^{-\beta t}\left(a\cos\tilde{\omega}t+b\sin\tilde{\omega}t\right)$$

2) $\dot{x}=-\beta e^{-\beta t}\left(a\cos\tilde{\omega}t+b\sin\tilde{\omega}t\right)+\tilde{\omega}e^{-\beta t}\left(-a\sin\tilde{\omega}t+b\cos\tilde{\omega}t\right)$

t＝0 で

$$x=a=0,\ \dot{x}=-\beta a+\tilde{\omega}b=v_0$$

$$b=\frac{v_0}{\tilde{\omega}}$$

$$\therefore x=\frac{v_0}{\tilde{\omega}}e^{-\beta t}\sin\tilde{\omega}t$$

3) $x=A\sin\omega_e t+B\cos\omega_e t$ とおくと

$$\dot{x}=\omega_e\left(A\cos\omega_e t-B\sin\omega_e t\right)$$

$$\ddot{x}=\omega_e{}^2\left(-A\sin\omega_e t-B\cos\omega_e t\right)$$

与式に代入すると

$$\left(\omega^2-\omega_e{}^2\right)\left(A\sin\omega_e t+B\cos\omega_e t\right)+2\beta\omega_e\left(A\cos\omega_e t-B\sin\omega_e t\right)=\frac{f}{m}\cos\omega_e t$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(\omega^2-\omega_e{}^2\right)A-2\beta\omega_e B=0\\ \left(\omega^2-\omega_e{}^2\right)B+2\beta\omega_e A=\dfrac{f}{m}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}\omega^2-\omega_e{}^2 & -2\beta\omega_e\\ 2\beta\omega_e & \omega^2-\omega_e{}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{f}{m}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(\omega^2 - \omega_e{}^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_e\right)^2} \cdot \frac{f}{m} \begin{pmatrix} 2\beta\omega_e \\ \omega^2 - \omega_e{}^2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{1}{\left(\omega^2 - \omega_e{}^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_e\right)^2} \cdot \frac{f}{m} \times \left[2\beta\omega_e \sin\omega_e t + \left(\omega^2 - \omega_e{}^2\right)\cos\omega_e t\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_e{}^2\right)^2 + \left(2\beta\omega_e\right)^2}} \cdot \frac{f}{m} \cdot \cos\left(\omega_e t - \sigma\right)$$

→振幅　　　　　　　　　　　　↑位相の遅れ

ここで $\tan\sigma = \dfrac{2\beta\omega_e}{\omega^2 - \omega_e{}^2}$