解説

問題 I

(1) 電荷分布が軸対称なので、ある点 (x,y,z) での電界は、その点をとおり z 軸に垂直で z 軸から離れて行く方向 $\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},0\right)$ の成分のみをもつ。ここで $r=\sqrt{x^2+y^2}$ は z 軸からの距離である。この方向成分は r のみの関数として与えられる。それを $E(r)$ とする。

z 軸を中心軸とした、半径 r、高さ h の円柱表面 S を閉曲面として、ガウスの法則を用いる。円柱表面の上面を S_1、下面を S_2、側面を S_3 とする。円柱内の電荷は $\sigma_0 h$ であるので、ガウスの法則より、

$$\iint_{\mathrm{S}} E_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S=\frac{\sigma_0 h}{\varepsilon_0}$$

S_1 上、S_2 上では $E_{\mathrm{n}}=0$、S_3 上では $E_{\mathrm{n}}=E(r)=$ 一定 より、

$$\begin{aligned}\iint_{\mathrm{S}} E_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S&=\iint_{\mathrm{S}_1} E_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S+\iint_{\mathrm{S}_2} E_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S+\iint_{\mathrm{S}_3} E_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S\\&=\iint_{\mathrm{S}_3} E(r)\mathrm{d}S=E(r)\iint_{\mathrm{S}_3}\mathrm{d}S=E(r)2\pi rh=\frac{\sigma_0 h}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

となり、$E(r)=\dfrac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$ が得られる。これより、位置 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、$r=\sqrt{x^2+y^2}$ として、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(x,y,z)&=E(r)\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r}\boldsymbol{e}_y\right)=\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{e}_x+\frac{y}{r}\boldsymbol{e}_y\right)=\frac{\sigma_0 x}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_x+\frac{\sigma_0 y}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_y\\&=E(r)\left(\frac{x}{r}、\frac{y}{r}、0\right)=\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{x}{r}、\frac{y}{r}、0\right)=\left(\frac{\sigma_0 x}{2\pi\varepsilon_0 r^2},\frac{\sigma_0 y}{2\pi\varepsilon_0 r^2},0\right)\end{aligned}$$

となる。

(2) z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r,φ) で表した円柱座標系を用いる。半円柱内で、座標 r が $r\sim r+\mathrm{d}r$、座標 φ が $\varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$、座標 z が $-\infty<z<\infty$ で指定される部分が原点 O(0,0,0) につくる微小電界 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r,\varphi)$ を考える。断面積 $r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ が微小なので、この部分は、$x=r\cos\varphi$、$y=r\sin\varphi$ の位置を通過する z 軸に平行な無限に長い直線上に線電荷密度 $\rho r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ で電荷が分布したものと考えることができる。$(r\cos\varphi,r\sin\varphi,0)$ を原点とした $(0,0,0)$ の相対位置ベクトルは $(-r\cos\varphi,-r\sin\varphi,0)$ となるので、(1) の結果で、(x,y,z) を $(-r\cos\varphi,-r\sin\varphi,0)$ に変えて、

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(r,\varphi)=\frac{\rho r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,(-r\cos\varphi)}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_x+\frac{\rho r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,(-r\sin\varphi)}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{e}_y=\left(-\frac{\rho\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0},-\frac{\rho\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0},0\right)\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

を得る。原点 O における電界 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ はこれらを $0<r<a$、$0<\varphi<\pi$ の範囲で加え合わせて、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}&=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}(\varphi)=\int_0^a\int_0^\pi\left(-\frac{\rho\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0},-\frac{\rho\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0},0\right)\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=\int_0^a\left(-\frac{\rho\sin\varphi}{2\pi\varepsilon_0},\frac{\rho\cos\varphi}{2\pi\varepsilon_0},0\right)\Bigg|_0^\pi\mathrm{d}r\\&=\int_0^a\left(0,\frac{\rho(-1-1)}{2\pi\varepsilon_0},0\right)\mathrm{d}r=\int_0^a\left(0,-\frac{\rho}{\pi\varepsilon_0},0\right)\mathrm{d}r=\left(0,-\frac{\rho r}{\pi\varepsilon_0},0\right)\Bigg|_0^a=\left(0,-\frac{\rho a}{\pi\varepsilon_0},0\right)\end{aligned}$$

を得る。

(3) $y<0$ の空間が導体で満たされているので、鏡像法で考える。鏡像電荷は円柱の $y<0$ の部分に電荷密度 $-\rho$ で電荷が分布したものになる。この鏡像電荷が原点 O(0,0,0) につくる電界は (2) で求めた $\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ を z 軸周りに π 回転させ (x 成分と y 成分の符号を変え)、ρ を $-\rho$ にする。その結果は $\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}$ に等しい。従って、$y<0$ の空間が導体で満たされたとき、原点 O(0,0,0) のにおける電界は $2\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}}=\left(0,-\dfrac{2\rho a}{\pi\varepsilon_0},0\right)$ となる。

原点 O 付近で、上面と底面が xz 面に平行で、高さが h の xz 面を含む筒状閉曲面 S を考える。上面 S_1 は $y>0$ の領域にあり、下面 S_2 が $y<0$ の領域にある。側面を S_3 とする。上面、下面の面積を S' とする。S' は上面上の電界が一定と考えられるくらい小さいものとする。この閉曲面にガウスの法則を適用する。この閉曲面内の電荷は $\omega S'$ であるから、

$$\iint_{\mathrm{S}} E_n \mathrm{d}S = \frac{\omega S'}{\varepsilon_0}$$

を得る。S_1 上では、$E_n = 2\boldsymbol{E}_{\mathrm{O}} \cdot \boldsymbol{e}_y = -\dfrac{2\rho a}{\pi\varepsilon_0}$ となる。S_2 上では、導体中で電界が $\mathbf{0}$ より $E_n = 0$ となる。また、S_3 からの寄与は $h \to 0$ の極限をとることで S_3 の面積が 0 になることから消える。これより、上式の左辺は

$$\iint_{\mathrm{S}} E_n \mathrm{d}S = \iint_{\mathrm{S}_1} E_n \mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_2} E_n \mathrm{d}S + \iint_{\mathrm{S}_3} E_n \mathrm{d}S = \iint_{\mathrm{S}_1} \left(-\frac{2\rho a}{\pi\varepsilon_0}\right) \mathrm{d}S = -\frac{2\rho a}{\pi\varepsilon_0} S'.$$

右辺と比較して $\omega = -\dfrac{2\rho a}{\pi}$ を得る。

問題 II

(1) $r \leq a$ の場合、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi_0 \left\{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right\} = \frac{\phi_0}{3a^3}\boldsymbol{\nabla} r^3 = \frac{\phi_0}{3a^3} 3r^2 \boldsymbol{\nabla} r = \frac{\phi_0}{3a^3} 3r^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\phi_0 r}{a^3}\boldsymbol{r}$$

3

となる。$a < r$ の場合、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi_0 \frac{a}{r} = -\phi_0 a \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = -\phi_0 a \left(-\frac{1}{r^2}\right)\boldsymbol{\nabla} r = \frac{\phi_0 a}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\phi_0 a}{r^3}\boldsymbol{r}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{\nabla} f(r) = \dfrac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{\nabla} r$、$\boldsymbol{\nabla} r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ を用いた。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ と書くと、

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\phi_0 r^2}{a^3} = \dfrac{\phi_0}{a}\left(\dfrac{r}{a}\right)^2 & \cdots \quad r \leq a \\[2ex] \dfrac{\phi_0 a}{r^2} = \dfrac{\phi_0}{a}\left(\dfrac{r}{a}\right)^{-2} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

となる。

(2) $r \neq 0$ とする。$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{r}$ の形をしている。ここで、

$$f(r) = \frac{E(r)}{r} = \begin{cases} \dfrac{\phi_0 r}{a^3} & \cdots \quad r \leq a \\[2ex] \dfrac{\phi_0 a}{r^3} & \cdots \quad a < r \end{cases}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot \{f(r)\boldsymbol{r}\} = \nabla f(r) \cdot \boldsymbol{r} + f(r)\nabla \cdot \boldsymbol{r} \\ &= \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}(\nabla r) \cdot \boldsymbol{r} + 3f(r) = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \boldsymbol{r} + 3f(r) = r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} + 3f(r) \end{aligned}$$

が成立する。これより、

$$
\rho(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0 \mathrm{div}\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})
$$

$$
= \begin{cases} \varepsilon_0 \left[r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\phi_0 r}{a^3}\right) + 3\left(\dfrac{\phi_0 r}{a^3}\right)\right] = \varepsilon_0\left[\dfrac{\phi_0 r}{a^3} + 3\dfrac{\phi_0 r}{a^3}\right] = 4\dfrac{\varepsilon_0\phi_0}{a^2}\left(\dfrac{r}{a}\right) & \cdots \quad 0 < r \le a; \\ \varepsilon_0 \left[r\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\phi_0 a}{r^3}\right) + 3\left(\dfrac{\phi_0 a}{r^3}\right)\right] = \varepsilon_0\left[-3\dfrac{\phi_0 a}{r^3} + 3\dfrac{\phi_0 a}{r^3}\right] = 0 & \cdots \quad a < r \end{cases}
$$

を得る。$r=0$ での電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})|_{r=0}$ は、半径 r の球面 S に対して積分形のガウスの法則を適用し、球内の電荷を求め、球の体積で割り、$r \to 0$ として求める。$r \le a$ を考えているので、$E(r) = \dfrac{\phi_0 r^2}{a^3}$ である。これにより、

$$
\rho(\boldsymbol{r})|_{r=0} = \lim_{r\to 0} \frac{\varepsilon_0 \displaystyle\iint_S E_n \mathrm{d}S}{\dfrac{4\pi r^3}{3}} = \lim_{r\to 0}\frac{\varepsilon_0 4\pi r^2 E(r)}{\dfrac{4\pi r^3}{3}} = \lim_{r\to 0}\frac{3\varepsilon_0 E(r)}{r} = \lim_{r\to 0} 3\varepsilon_0\frac{\phi_0 r}{a^3} = 0
$$

を得る。即ち、$r \neq 0$ で求めた $\rho(\boldsymbol{r})$ の式は $r=0$ を含めても成立する。

(3) 原点からの距離が $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分を考えると、単位体積あたり静電エネルギー $u_E(r)$ は $u_E(r) = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2$、体積は $4\pi r^2 \mathrm{d}r$ なので、

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int_0^\infty u_E(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left\{\frac{\phi_0}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\left\{\frac{\phi_0}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\right\}^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= 2\pi\varepsilon_0\phi_0^2 \int_0^a \left(\frac{r}{a}\right)^6 \mathrm{d}r + 2\pi\varepsilon_0\phi_0^2 \int_a^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\varepsilon_0\phi_0^2 a \int_0^1 \left(\frac{r}{a}\right)^6 \mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) + 2\pi\varepsilon_0\phi_0^2 a\int_1^\infty \left(\frac{r}{a}\right)^{-2}\mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) \\
&= 2\pi\varepsilon_0\phi_0^2 a\left[\int_0^1 x^6 \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-2}\mathrm{d}x\right] = 2\pi\varepsilon_0\phi_0^2 a\left[\left(\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1 + \left(-x^{-1}\right)\Big|_1^\infty\right] \\
&= 2\pi\varepsilon_0\phi_0^2 a\left(\frac{1}{7}+1\right) = \frac{16\pi}{7}\varepsilon_0\phi_0^2 a
\end{aligned}
$$

(別解)
電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$、電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ は原点からの距離 r のみの関数で、それをそれぞれ $\rho(\boldsymbol{r}) = \tilde{\rho}(r)$、$\phi(\boldsymbol{r}) = \tilde{\phi}(r)$、と書く。原点からの距離が $r \sim r + \mathrm{d}r$ の微小部分を考えると、この微小部分の電荷は $\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\mathrm{d}r$、電位は $\tilde{\phi}(r)$ となる。これより、

$$
\begin{aligned}
U_E &= \int_0^\infty \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\mathrm{d}r = \int_0^a \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\tilde{\phi}(r)\tilde{\rho}(r)4\pi r^2\mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}\phi_0\left\{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right\} 4\frac{\varepsilon_0\phi_0}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r + \int_a^\infty \frac{1}{2}\phi_0\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}\cdot 0\cdot 4\pi r^2\mathrm{d}r \\
&= \int_0^a \frac{8\pi}{3}\varepsilon_0\phi_0^2\left\{4 - \left(\frac{r}{a}\right)^3\right\}\left(\frac{r}{a}\right)^3\mathrm{d}r = \frac{8\pi}{3}\varepsilon_0\phi_0^2 a\int_0^1\left\{4\left(\frac{r}{a}\right)^3 - \left(\frac{r}{a}\right)^6\right\}\mathrm{d}\left(\frac{r}{a}\right) \\
&= \frac{8\pi}{3}\varepsilon_0\phi_0^2 a\int_0^1\left\{4x^3 - x^6\right\}\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{3}\varepsilon_0\phi_0^2 a\left(1-\frac{1}{7}\right) = \frac{8\pi}{3}\varepsilon_0\phi_0^2 a\frac{6}{7} = \frac{16\pi}{7}\varepsilon_0\phi_0^2 a
\end{aligned}
$$

問題 III

(1) 対称性より、電流密度は動径方向で大きさは中心からの距離 r のみの関数。即ち、$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = i(r)\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ となる。半径 r の球面を閉曲面 S として定常電流に関する電荷保存の式の積分形を用いると、$\displaystyle\iint_S i_n\,\mathrm{d}S = i(r)4\pi r^2 - I = 0$ より、$i(r) = \dfrac{I}{4\pi r^2}$ となり、

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

を得る。オームの法則 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ より、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{r})}i(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{r}{b}\right)^3\frac{I}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{Ir}{4\pi\sigma_0 b^3}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{I}{4\pi\sigma_0 b^2}\left(\frac{r}{b}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r} = E(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

を得る。

(2) 動径方向に A から B まで電界の動径方向成分 $E(r)$ を積分して、AB 間の電位差 V を求めると、

$$V = \int_a^b E(r)\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{I}{4\pi\sigma_0 b^2}\left(\frac{r}{b}\right)\mathrm{d}r = \frac{I}{4\pi\sigma_0 b}\int_{a/b}^1\left(\frac{r}{b}\right)\mathrm{d}\left(\frac{r}{b}\right) = \frac{I}{4\pi\sigma_0 b}\int_{a/b}^1 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{I}{4\pi\sigma_0 b}\,\frac{1}{2}x^2\bigg|_{a/b}^1 = \frac{I}{4\pi\sigma_0 b}\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right\} = \frac{I}{8\pi\sigma_0 b}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}$$

これより、全電気抵抗 R は

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{8\pi\sigma_0 b}\left\{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right\}$$

となる。

(3) 中心からの距離が r の位置での単位体積あたり単位時間あたりのジュール熱 $p(r)$ は

$$p(r) = i(r)E(r) = \frac{1}{\sigma(r)}i^2(r) = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{r}{b}\right)^3\left(\frac{I}{4\pi r^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{I}{4\pi b^2}\right)^2\left(\frac{r}{b}\right)^{-1}$$

これに $r \sim r+\mathrm{d}r$ の部分の微小体積 $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ をかけて r_1 から r_2 まで積分して、

$$P(r_1,r_2) = \int_{r_1}^{r_2} p(r)4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{I}{4\pi b^2}\right)^2\left(\frac{r}{b}\right)^{-1}4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{I^2}{4\pi\sigma_0 b}\int_{r_1/b}^{r_2/b}\left(\frac{r}{b}\right)\mathrm{d}\left(\frac{r}{b}\right)$$
$$= \frac{I^2}{4\pi\sigma_0 b}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{r_2}{b}\right)^2-\left(\frac{r_1}{b}\right)^2\right\} = \frac{I^2}{8\pi\sigma_0 b}\left\{\left(\frac{r_2}{b}\right)^2-\left(\frac{r_1}{b}\right)^2\right\}$$

(別解)
動径方向に $r = r_1$ の位置から $r = r_2$ の位置まで電界の動径方向成分 $E(r)$ を積分して、2 つの位置間のの電位差 $V(r_1,r_2)$ を求めると、

$$V(r_1,r_2) = \int_{r_1}^{r_2}E(r)\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2}\frac{I}{4\pi\sigma_0 b^2}\left(\frac{r}{b}\right)\mathrm{d}r$$
$$= \frac{I}{4\pi\sigma_0 b}\int_{r_1/b}^{r_2/b}\left(\frac{r}{b}\right)\mathrm{d}\left(\frac{r}{b}\right) = \frac{I}{8\pi\sigma_0 b}\left\{\left(\frac{r_2}{b}\right)^2-\left(\frac{r_1}{b}\right)^2\right\}$$

ジュール熱 $P(r_1,r_2)$ は $V(r_1,r_2)$ と I の積で

$$P(r_1,r_2) = V(r_1,r_2)I = \frac{I^2}{8\pi\sigma_0 b}\left\{\left(\frac{r_2}{b}\right)^2-\left(\frac{r_1}{b}\right)^2\right\}$$

を得る。当然、$P(b,a) = VI = I^2R$ を満たしている。

問題 IV

(1) 長方形の外周を A→B→C→D→A と回るとき、右ねじの進む方向 $\boldsymbol{e}_y$ を長方形の法線方向にとる。長方形 ABCD のうち、z 座標が $z' \sim z' + \mathrm{d}z'$ の微小部分を考える ($z' > -b$)。この微小部分の面積は $l\mathrm{d}z'$ で、法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_y$ となる。電流密度の法線方向成分 $i_n(z') = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n}$ は

$$i_n(z') = \begin{cases} 0 & \cdots \quad -b < z' < -a; \\ i_0 \left(\dfrac{z'}{a}\right)^3 & \cdots \quad -a \leq z' \leq a; \\ 0 & \cdots \quad a < z'. \end{cases}$$

これより、$-b < z < -a$ の場合、

$$I(z) = \int_{-b}^{z} i_n(z') l\mathrm{d}z' = \int_{-b}^{z} 0 \cdot l\mathrm{d}z' = 0$$

となる。$-a < z < a$ の場合、

$$I(z) = \int_{-b}^{z} i_n(z') l\mathrm{d}z' = \int_{-a}^{z} i_0 \left(\frac{z'}{a}\right)^3 l\mathrm{d}z' = i_0 al \int_{-1}^{z/a} \left(\frac{z'}{a}\right)^3 \mathrm{d}\left(\frac{z'}{a}\right) = \frac{i_0 al}{4} \left\{ \left(\frac{z}{a}\right)^4 - 1 \right\}$$

となる。$a < z$ の場合、

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_{-b}^{z} i_n(z') l\mathrm{d}z' = \int_{-a}^{a} i_0 \left(\frac{z'}{a}\right)^3 l\mathrm{d}z' = i_0 al \int_{-1}^{1} \left(\frac{z'}{a}\right)^3 l\mathrm{d}\left(\frac{z'}{a}\right) \frac{i_0 l}{a} = \left[\frac{x'^2}{2}\right]_{-a}^{a} \\ &= \frac{i_0 al}{4}(1-1) = 0 \end{aligned}$$

となる。

(2) 対称性より $\boldsymbol{B}(x,y,z) = B(z)\boldsymbol{e}_x$ となる。理由は次のとおり。
x, y 方向の平行移動で電流分布が変わらないので、$\boldsymbol{B}(x,y,z)$ に x, y 依存性はない。
ビオ・サヴァールの法則より $\boldsymbol{B}(x,y,z)$ に電流に平行な成分はない。即ち y 方向成分はない。
$-a < z' < a$, $0 < \alpha$ とするとき、$(x+\alpha, y, z')$ を通る直線電流のつくる磁界と $(x-\alpha, y, z')$ を通る直線電流のつくる磁界の重ね合わせを考えると、$\boldsymbol{B}(x,y,z')$ に z 方向成分はない。
あるいは、$\boldsymbol{B}(0,0,z)$ の z 成分が存在するとしてそれを $B_z(z)$ とする。z 軸の周りに全系を π 回転させると、電流分布は反転するが $B_z(z)$ は変わらない。次に全電流を反転させると電流分布は元にもとるが、$B_z(z)$ は反転する。これより $B_z(z) = -B_z(z)$ となり、$B_z(z) = 0$ となる。
$-a < z' < a$ とし、z 座標が $z' \sim \mathrm{d}z'$ の導体の微小部分を流れる電流が (x,y,z) につくる磁束密度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}(x,y,z;z') = \mathrm{d}B(z;z')\boldsymbol{e}_x$ を考える。$z' + \mathrm{d}z' < c < z$ として $(0,0,z) \to (l,0,z) \to (l,0,c) \to (0,0,c) \to (0,0,z)$ という閉曲線にアンペールの法則を適用すると、この閉曲線を貫く電流はないので、$\mathrm{d}B(z;z')l - \mathrm{d}B(c;z')l = 0$ 即ち $z' + \mathrm{d}z' < z$ の領域では $\mathrm{d}B(z;z')$ は一定となる。同様に $z < z'$ の領域でも $\mathrm{d}B(z;z')$ は一定となる。$(0,0,z')$ をとおる y 軸に平行な直線の周りに微小部分を π 回転しても電流分布は変わらないとみなせる。これより、$z' + \mathrm{d}z' < z$ に対する一定値 $\mathrm{d}B(z;z')$ と $z < z'$ に対する一定値 $\mathrm{d}B(z;z')$ は絶対値が同じで符号が異なる。$z' \sim z' + \mathrm{d}z'$ の領域の微小部分を流れる電流と $-z' - \mathrm{d}z' \sim -z'$ の領域の微小部分を流れる電流は逆向きであり、それぞれの微小部分が $z < -a$ または $a < z$ の領域に作る磁束密度は大きさが同じで逆向きになり、打ち消し合う。これより、$z < -a$ または $a < z$ で $\boldsymbol{B}(x,y,z) = \boldsymbol{0}$ となる。
または、上記の議論で $a < z, z'$ に対して $(0,0,z) \to (l,0,z) \to (l,0,-z') \to (0,0,-z') \to (0,0,z)$ という閉曲線にアンペールの法則を使うと、(1) の結果より閉曲線を貫く電流はないので、B を定数として $z < -a$ または $a < z$ で $\boldsymbol{B}(x,y,z) = B\boldsymbol{e}_x$ となる。$z \to \infty$ を考えると、電流分布の厚み $2a$ に対し z が十分大きいので、厚みを無視することができる。このとき、全電流は打ち消し合い 0 となるので、$B = 0$ がわかる。

(3) 対称性より $\boldsymbol{B}(x,y,z)=B(z)\boldsymbol{e}_x$ となる。(1) の長方形で $-a<z<a$ の場合を考える。閉曲線 A→B→C→D→A に対しアンペールの法則を適用する。A→B で $B_{\mathrm{t}}=B(z)$、B→C で $B_{\mathrm{t}}=0$、C→D で $B_{\mathrm{t}}=-B(-b)=0$((2) の結果)、D→A で $B_{\mathrm{t}}=0$ であることを用いると

$$\oint_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{D}\to\mathrm{A}} B_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s=\int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} B(z)\mathrm{d}s=B(z)\int_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\mathrm{d}s=B(z)l=\mu_0 I(z)$$

これより、(1) の結果を用いて、$-a<z<a$ に対し、

$$B(z)=\frac{\mu_0 i_0 a}{4}\left\{\left(\frac{z}{a}\right)^4-1\right\}$$

を得る。($z<-a$ および $a<z$ に対しては (2) で示したように $B(z)=0$ となる。)