数学A1中間試験ヒントと略解

1. $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=2$, $x\neq 0$ のとき $f'(x)=\frac{2\cos x e^{2\sin x}x-e^{2\sin x}+1}{x^2}$.

   また $f'(0)=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^{2\sin x}-1}{x}-2}{x}=2.$

   極限の計算には例えばロピタルの定理またはマクローリン近似を用いる.

2. テイラーの定理より $x\to 0$ のとき $\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)$. $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$.

   よって $f(x)=\sqrt{\cos x}$ の 4 次のマクローリン近似は

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\sqrt{1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)}\\
&=1+\frac{1}{2}\Big\{-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\Big\}-\frac{1}{8}\Big\{-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\Big\}^2+o(x^4)\\
&=1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{96}x^4+o(x^4)
\end{aligned}
$$

3. $x=0$ の時，結論は明らか.

   $x>0$ とする．テイラーの定理より 2 次のマクローリン近似を考えると

   $f(x):=(1+x)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2+R_2(x)$. ここである $c\in(0,x)$ が存在して

   $R_2(x)=\frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3=\frac{4}{81(1+c)^{\frac{7}{3}}}x^3$. $x>0$ のとき $0<\frac{1}{(1+c)^{\frac{7}{3}}}<1$ より $0<R_2(x)<\frac{4}{81}x^4$.

4. テイラーの定理より $x\to 0$ のとき $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$, $\sin x=x+o(x)$.

   これらを組み合わせると

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)-x^2+ax^4}{x^n\sin(\frac{x^3}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\left\{x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+o(x^6)\right\}-x^2+ax^4}{x^n\left(\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(a-\frac{1}{2})x^4+\frac{x^6}{3}+o(x^6)}{\frac{1}{2}x^{n+3}(1+o(1))}
$$

   よって $a=\frac{1}{2}$ のとき $n=3$ と取れば極限は $\frac{2}{3}$. また $a\neq\frac{1}{2}$ のとき $n=1$ と取れば極限は $2a-1$.

5. たとえば $(x,y)=(h,2h)\to(0,0)$ $(h\to 0)$ を考えると $\lim_{h\to 0} f(h,2h)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(2h^2)}{9h^2}=\frac{2}{9}\neq f(0,0)$.

   したがって f は点 $(0,0)$ で連続でない.（実際には $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない.）

6. $f_x=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $f_y=\log(x^2+y^2)+\dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$, $f_{xx}=\dfrac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$,

   $f_{xy}=f_{yx}=\dfrac{2x^3-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy}=\dfrac{2y^3+6x^2y}{(x^2+y^2)^2}$.

7. 多変数の合成関数の微分より $\dfrac{dz}{dt}=(2t)'f_x+(t^2+t)'f_y=2f_x+(2t+1)f_y$.

   両辺を t で微分すると $\dfrac{d^2z}{dt^2}=2\dfrac{d}{dt}f_x+2f_y+(2t+1)\dfrac{d}{dt}f_y$.

   ここで $\dfrac{d}{dt}f_x=2f_{xx}+(2t+1)f_{xy}$, $\dfrac{d}{dt}f_y=2f_{yx}+(2t+1)f_{yy}$ を代入してまとめると

   $\dfrac{d^2z}{dt^2}=2f_y+4f_{xx}+4(2t+1)f_{xy}+(2t+1)^2f_{yy}$.