



目录列表可在ScienceDirect上获取

自动a

期刊主页: [www.elsevier.com/locate/automatica](http://www.elsevier.com/locate/automatica)



简报

## 隐式不变集跟踪的模型预测控制<sup>☆</sup>

艾琳卢克<sup>a, \*</sup>, 保拉尚弗鲁<sup>b</sup>, 丹尼尔利蒙<sup>a</sup>, 何塞M.马斯特雷<sup>a</sup> <sup>a</sup>西班牙塞维利亚大学

<sup>a</sup> 系统与自动化工程系

<sup>b</sup> 机械工程系, 埃因霍温理工大学, 荷兰埃因霍温



### ARTICLE INFO

文章历史:

接收日期: 2024年6月19日

修订版接收日期: 2025年2月13日; 接受日期: 2025年5月15日

2025年6月19日在线发布

关键词:

模型预测控制

隐含不变集

跟踪系统

### ABSTRACT

本文提出了一种用于跟踪具有隐式终端组件的模型预测控制 (MPC) 技术。控制器的构建包含将人工设定值作为决策变量, 并通过求解线性规划 (LP) 来定义依赖于该变量的扩展系统的终端约束条件, 从而实现隐式终端约束的定义。与传统方法不同, 我们不计算不变终端集, 而是通过求解线性规划来简单限定扩展预测时域的长度。该方法不仅克服了计算不变集所需运算量带来的规模限制, 还简化了离线MPC设计流程。所提出的控制器能够在保证递归可行性和收敛性的同时, 将大型系统驱动至允许的设定值。最后, 通过一个学术案例 (可变尺寸质量-弹簧-阻尼器系统) 和一个更贴近实际的无人机案例研究, 对方法进行了验证。© 2025作者 (们)。由爱思唯尔有限公司出版。本文为CC BY-NC许可下的开放获取文章。

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### 1. 介绍

MPC的理论特性 (如递归可行性和稳定性) 通常通过终端成本函数和终端正不变集的便捷设计来保证, 但随着系统规模的增大, 这些计算变得越来越困难 (Gilbert & Tan, 1991; Mayne, 2013, 2014)。特别地, 即使对于线性时不变系统, 由于需要计算集合交集和原像集, 显式确定不变集也极具挑战性。事实上, 存在可扩展的方法来寻找这些不变集的近似解, 例如通过考虑预定义的多面体形状 (Trodden, 2016)、基于线性矩阵不等式的椭球体 (Alamo, Cepeda, & Limon, 2005)、内外近似法 (Comelli, Oлару, & Kofman, 2024)、区域拓扑 (Morato, Cunha, Santos, Normey-Rico, & Sename, 2021) 或数据驱动方法 (Berberich, Kohler, Muller, & Allgower, 2021), 或生成其隐式表示的方法 (Rakovic & Zhang, 2022, 2023; Wang & Jungers, 2020)。其中, 我们特别关注后者 (Rakovic & Zhang, 2022, 2023), 因为它扩展了预测范围, 确保最终状态属于不变集。

此外, 某些MPC公式进一步复杂化了这一问题, 例如跟踪问题 (费拉莫萨、利蒙、阿尔瓦拉多、阿拉莫, 与卡马乔, 2009; 利蒙、阿尔瓦拉多、阿拉莫、与卡马乔, 2008), 该公式通过扩展终端系统的维度来处理非固定设定值。具体而言, Limon 等人 (2008) 和Ferramosca 等人 (2009) 提出的跟踪MPC公式在优化问题中引入人工稳态和输入作为决策变量以放宽终端约束, 并通过使用改进的成本函数确保递归可行性和收敛至真实设定值。虽然用于跟踪变化设定值的MPC控制器家族更为广泛, 例如贝姆波拉德、卡萨沃拉和莫斯卡 (1997)、加罗内、迪凯拉诺和科尔曼诺夫斯基 (2017)、Gilbert 和 Kolmanovsky (2002), 但我们考虑的是费拉莫萨等人 (2009), Limon 等人 (2008) 提出应用该隐式方法, 不仅因其理论保证, 还因为它能扩大控制器的吸引域。

本文的核心贡献在于设计了一种包含隐式终端成分的跟踪模型预测控制 (MPC), 该成果扩展了卢克、尚弗鲁、利蒙和马斯特雷 (2024) 提出的前期研究。具体而言, 本方法通过用预设有限长度的扩展预测区间替代终端约束集来实现。所提出的方法论允许通过求解线性规划 (LP) 来确定跟踪场景下的预测区间长度, 从而避免集合计算, 使得该方法可应用于任意规模的系统, 仅需承担因使用更长预测区间而产生的边际计算负担。需要指出的是, 在此背景下隐式不变集的运用并非易事, 需要针对人工设定点和实际设定点的存在性, 对现有调节结果进行量身定制的调整。

<sup>☆</sup> 本研究由西班牙学术人员培训计划 (资助编号: FPU21/05299) 以及 MCIN /AEI/ 10.13039/501100011033 和 ERDF /EU 资助的 PID2022-141159OB-I00 和 PID2023-152876 OB-I00 项目共同支持。本文部分研究成果于 2024 年 12 月 16 日至 19 日在意大利米兰举行的第 63 届 IEEE 决策与控制会议 (CDC) 上发表。该文经副主编 Dominic Liao-McPherson 在主编 Florian Dorfler 指导下推荐修订后发表。

\* 通讯作者。

电子邮件地址: [iluque1@us.es](mailto:iluque1@us.es) (I. Luque), [p.chanfreut.palacio@tue.nl](mailto:p.chanfreut.palacio@tue.nl) (P. Chanfreut), [dlim@us.es](mailto:dlim@us.es) (D. Limon), [pepemaestre@us.es](mailto:pepemaestre@us.es) (J.M. Maestre)。

该方法论不仅确保了递归可行性和收敛至真实设定值的特性——这些是跟踪型模型预测控制 (MPC) 应用中的关键属性, 还针对扩展预测范围最大允许长度受限的情况, 提出了一种创新解决方案。该方案通过采用替代策略, 既避免了终端区域的计算, 又能灵活选择扩展预测范围的合适长度。

本文其余部分的结构安排如下: 第2节介绍所提出问题的预备知识; 第3节阐述含隐式终端组件的控制器设计方法, 并给出替代方案及理论证明, 其性能在第4节通过三个案例研究进行验证; 最后, 第5节进行讨论。

**符号说明。** 向量  $[x^\top, u^\top]^\top$  表示为  $(x, u)$ ;  $\mathbf{I}_n$  和  $\mathbf{0}_{m \times n}$  分别表示维度为  $n \times n$  和  $m \times n$  的单位矩阵和零矩阵, 而  $\mathbf{0}_n$  和  $\mathbf{1}_n$  分别是大小为  $n \times 1$  的零列向量和一列向量。  $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{N}$  分别表示实数集和自然数集。同理, 给定  $a, b \in \mathbb{N}$ , 且  $a < b$ , 我们定义  $\mathbb{N}_{[a, b]} := \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$  以及对于  $\mathbb{N}_b$  给出  $\dots, \mathbb{N}_{[0, b]}$ 。最后,  $[u_t]_{t=0}^T$  表示向量  $[u_0, u_1, \dots, u_T]^\top$  对于任意给定  $T \in \mathbb{N}$ 。闭非空子集  $X \subset \mathbb{R}^n$  的支撑函数  $h(X, \cdot)$  对所有  $y \in \mathbb{R}^n$  由  $h(X, y) := \sup_{x \in X} y^\top x$  给出。

## 2. 问题设置

本节将介绍所考虑的跟踪公式中的系统动力学及模型预测控制 (MPC)。

### 2.1. 系统动力学

考虑一个由以下方程组描述的离散时间线性系统:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (1)$$

其中  $x_k \in \mathbb{R}^n$  和  $u_k \in \mathbb{R}^m$  分别表示系统在时刻  $k$  的状态和输入, 且矩阵  $A$  和  $B$  具有相容的维度, 即  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  与  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 其中  $m$  和  $n$  为正且可能不同的整数。此外, 考虑以下约束条件

$$x_k \in \mathcal{X}, u_k \in \mathcal{U}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

其中  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  和  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  分别表示状态集和输入约束集。我们引入以下假设:

**假设1.** 对于受约束条件 (2) 的系统 (1), 有:

- 矩阵对  $(A, B)$  是已知的, 并且严格可稳定。
- 约束集  $\mathcal{X}$  和  $\mathcal{U}$  是包含原点的凸多面体集。
- 存在一个反馈增益  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  使得矩阵  $A+BK$  为舒尔矩阵, 以及一个正定矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  使得

$$(A+BK)^\top P (A+BK) - P = -(Q+K^\top RK). \quad (3)$$

系统性能将通过阶段成本函数进行评估

$$\ell(x_k, u_k, x_s, u_s) = \|x_k - x_s\|_Q^2 + \|u_k - u_s\|_R^2,$$

(4) 其中  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  和  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  是对称正定矩阵, 且  $(x_s, u_s)$  表示我们希望驱动系统的设定值。关于这一点, 需要注意的是系统中的任何设定值都必须满足以下方程

$$\begin{bmatrix} A - \mathbf{I}_n & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}_n. \quad (5)$$

因此, 我们可以通过变量  $\theta \in \mathbb{R}^m$  来参数化这对元素  $(x_s, u_s)$ , 即

$$\begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{\theta_x} \\ M_{\theta_u} \end{bmatrix}}_{M_\theta} \theta, \quad (6)$$

$M_\theta$  作为  $[A - \mathbf{I}_n \ B]$  的零空间的合适基, 该基聚合了矩阵  $M_{\theta_x} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  和  $M_{\theta_u} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  (Ferramosca 等人, 2009)。

### 2.2. 用于具有显式终端组件的跟踪的MPC

本文所考虑的用于跟踪配方的MPC具有以下特征 (Limon 等人, 2008):

- 一个人工设定值, 例如  $(x_{as}, u_{as})$ , 被引入作为MPC问题中的优化变量。该人工设定值将通过变量  $\theta^a$  进行参数化, 并引入  $m$  个新的优化变量。
- 还添加了一个偏移成本函数, 用于惩罚人工设定值与实际设定点  $(x_{rs}, u_{rs})$  的偏差。
- 使用一个增强终端不变集  $\mathcal{F}^{\text{tr}}$ , 该集合定义于增强系统

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta^a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A+BK & BL \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}}_{\text{一月}} \begin{bmatrix} x_k \\ \theta^a \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中  $L = [-K \ \mathbf{I}_m]^\top M$ 。下文将区分真实设定值 (记为  $(x_{rs}, u_{rs})$ ) 与人工设定值 (即  $(x_{as}, u_{as})$ )。需注意 (7) 表明系统 (1) 采用控制律

$$u_k = u_{as} + K(x_k - x_{as}) = Kx_k + L\theta^a. \quad (8)$$

考虑到上述情况, 每个时间点  $k$  需要解决的跟踪问题的MPC采用以下形式: 
$$V_N(x_k, x_{rs}) = \min_{u, \theta^a} V_N(x_k, x_{rs}, u, \theta^a)$$

$$\text{s.t. } x_{0|k} = x_k, \quad (9a)$$

$$x_{j+1|k} = Ax_{j|k} + Bu_{j|k}, j \in \mathbb{N}_{[0, N-1]}, \quad (9b)$$

$$x_{j+1|k} \in \mathcal{X}, j \in \mathbb{N}_{[0, N-1]}, \quad (9c) u_{j|k} \in \mathcal{U}, j \in \mathbb{N}_{[0, N-1]},$$

$$(9d) \begin{bmatrix} x_{N|k} \\ \theta^a \end{bmatrix} = M_\theta \theta^a, \begin{bmatrix} x_{N|k} \\ \theta^a \end{bmatrix} \in \mathcal{F}^{\text{tr}}, \quad (9e)$$

其中  $N$  为预测时域长度,  $u = [u_{j|k}]_{j=0}^{N-1}$ 。在此方面, 下标  $j|k$  表示在时间  $k$  对对应变量  $k+j$  的预测。此外, 成本函数定义为

$$V_N(x_k, x_{rs}, u, \theta^a) = \sum_{j=0}^{N-1} (\|x_{j+1|k} - x_{rs}\|_{2Q}^2 + \|u_{j|k} - u_{rs}\|_{2R}^2) + \|x_{N|k} - x_{rs}\|_{2P}^2 + \|x_{N|k} - x_{rs}\|_{2O}^2, \quad (10)$$

其中  $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为正定矩阵, 且  $P$  满足 (3)。需注意的是, 与调节用MPC不同, 系统相对于人工设定值的偏差在预测范围内被加权, 并引入偏移成本 (即  $\|x - x_{rs}\|_{2O}^2$ ) 以惩罚人工与真实状态参考值之间的差异。同理, 终端约束 (9e) 由不变集  $\mathcal{F}^{\text{tr}}$  定义, 该函数针对考虑约束 (2) 的增广系统 (7) 计算, 具体方法详见Limon 等人 (2008)。

特别是,  $\Psi_f^{\text{tr}}$  是最大不变集的多面体近似, 满足

$$\begin{aligned} \Psi_f^{\text{tr}} &= \{ (x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} : (x, Kx + L) \in (X, U), \\ &\quad \text{其中} \\ \Theta &:= \{ \theta \in \mathbb{R}^m : M_{\theta_k} \theta \in \mathcal{X}, M_{\theta_k} \theta \in \mathcal{U} \}. \end{aligned} \quad (11)$$

由于  $A_{\text{aug}}$  的特征值为单位矩阵, 集合  $\Psi_f^{\text{tr}}$  可能不是有限确定的 (Gilbert & Tan, 1991)。然而, 可以通过因子  $(0, 1)$  对  $\Psi_f^{\text{tr}}$  进行缩放, 使得最大可容许不变集成为一个有限确定的凸多面体, 例如  $\Psi_f^{\text{t}, r}$  (Gilbert & Tan, 1991; Limon 等, 2008)。

$$\begin{aligned} \Psi_f^{\text{t}, r} &= \{ (x, u) \in \mathbb{R}^{n+m} : (x, Kx + L) \in (X, U), \\ &\quad \text{其中} \\ [Ax_k + B(Kx_k + La)] &\in \Psi_f^{\text{t}, r} \text{ 对所有 } \begin{bmatrix} x_k \\ a \end{bmatrix} \in \Psi_{f,\lambda}^{\text{tr}}. \end{aligned} \quad (12)$$

如Limon 等人 (2008) 和Ferramosca 等人 (2009) 所述, 跟踪公式 (9) 可将系统状态驱动至任意允许的目标设定值。然而, 该方法需要计算增广动力学 (7) 的不变集  $\Psi_f^{\text{t}, r}$ , 其维度为  $n+m$ 。虽然终端成本易于计算, 但此类终端集的构建对大型系统而言变得难以处理。为解决此问题, 本文采用隐式终端分量对MPC问题 (9) 进行重构, 即无需显式刻画  $\Psi_f^{\text{t}, r}$ 。

### 3. 含隐含终端分量的MPC跟踪

在下文中, 我们将Rakovic 和 Zhang (2023) 中关于调节的隐式终端组件的研究结果扩展到跟踪问题。

#### 3.1. 隐性终止子调控

对于调节问题, 即  $(x_{\text{rs}}, u_{\text{rs}}) = \mathbf{0}_{n+m}$ , 终端控制律可简单定义为  $u_k = Kx_k$ , 因此, 终端动态由以下形式给出

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k, \quad (13)$$

这个结果同样可以通过将人工设定点和实际设定点固定在 (7) 和 (8) 的原点处获得。此外, 给定 (2), 终端阶段的约束条件可被紧凑地定义为

$$x_k \in \mathcal{X}_t := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{X}, Kx \in \mathcal{U}\}.$$

(14) 考虑上述内容, 让我们引入以下定理, 该定理建立了最大正不变集存在的充分条件。回顾一下, 集合  $\mathbb{R}^n$  被定义为约束条件  $x \in X$  的正不变集当且仅当 (Kerrigan, 2001; Rakovic & Zhang, 2022):

$$u_k \in U \text{ 使得 } x_{k+1} \in X, \text{ 其中 } x_k \in X.$$

然后, 如果一个集合是正不变的, 并且包含  $X$  中所有的正不变集合, 则该集合被定义为最大正不变集 (Kerrigan, 2001)。

**定理 1** (Rakovic 和 Zhang (2023, 定理 1 和 2)). 假设假设 1 成立。那么, 系统 (13) 和约束条件 (14) 的最大正不变集是有限确定的当且仅当对于某个  $M \in \mathbb{N}$  以下条件之一成立

$$\begin{aligned} \bigcap_{j=0}^M (A + BK)^{-j} X_t &\subseteq (A + BK)^{-(M+1)} \mathcal{X}_t^j = \emptyset \\ \text{或} \\ X_t &\subseteq (A + BK)^{-(M+1)} X_t. \end{aligned} \quad (15)$$

给定定理 1, 系统 (13) 和约束条件 (14), 设  $\mathcal{X}_t$  为一个非空闭多面体集合, 其内部包含原点, 定义为

$$\Psi_f = \bigcap_{j=0}^M (A + BK)^{-j} \mathcal{X}_t. \quad (16)$$

检查给定状态是否属于  $\mathcal{X}_t$  的另一种方法可以采用长度为  $M$  的轨迹 (Rakovic & Zhang, 2023)。即, 若序列  $[x_j]_{j=0}^M$  满足条件, 则  $x_N \in \mathcal{X}_t$

$$\begin{aligned} &\text{满足 } x_j \in \mathbb{N}_{[N, N+M]}, \quad x_j \in X_t, \\ &\forall j \in \mathbb{N}_{[N, N+M-1]}, \quad x_{j+1} = (A + BK)x_j, \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $M, N \in \mathbb{N}$ , 且  $M \geq 1$  满足 (15)。注意若  $M = 0$ , 则  $\mathcal{X}_t = X$ 。

后者作为终端分量隐式重构的基础。

设  $\mathcal{X}_t \subseteq \mathbb{R}^n$  (回顾 (14)) 为一个闭多面体集, 其不可约表示为

$$\mathcal{X}_t := \{x \in \mathbb{R}^n : (C + DK)x \leq \mathbf{1}_p\},$$

(18) 其中矩阵对  $(C, D) \in \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$  如此定义。注意  $p$  表示定义  $\mathcal{X}_t$  的不等式数量。给定 (18),  $\mathcal{X}_t$  可以类似地定义为

$$X_t = \{x \in \mathbb{R}^n : i \in \mathbb{N}_{[1, p]}, X_i^\top x \leq 1\}, \quad (19)$$

其中  $X_i^\top$  是矩阵  $(C + DK)$  的第  $i$  行。根据 Following Rakovic 和 Zhang (2023), 当且仅当以下条件对所有  $i \in \mathbb{N}_{[1, p]}$  成立时, (15) 成立:

$$\begin{aligned} &\bigcap_{j=0}^M h((A + BK)^{-j} X_t, (A + BK)^{-(M+1)} X_i) \leq 1 \\ &\text{或} \\ &h(X_t, (A + BK)^{M+1} X_i) \leq 1. \end{aligned} \quad (20)$$

(20) 中不等式的左侧可以通过以下计算简单的线性规划分别计算不同的  $i$ :

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{x_i^\top (A + BK)^{M+1} x : x_j = (A + BK)^j x, x_j \in X_t, j \in \mathbb{N}_{[0, M]}\} \\ &\text{或} \\ &\sup_x \{X_i^\top (A + BK)^{M+1} x : x \in \mathcal{X}_t\}. \end{aligned}$$

那么, 对于任意整数  $M$ , 验证 (15) 就简化为求解  $p$  个线性规划问题。此外, 寻找这样的整数  $M$  可以通过遍历任意适当生成的正整数递增序列来实现。更多细节可参见Rakovic和Zhang (2022, 2023)。

#### 3.2. 隐式终止集用于追踪

假设系统 (1) 由控制律 (8) 控制。那么, 考虑到增广动力学, 对于给定的  $(x, \theta)$ , 以下成立:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta \end{bmatrix} = A_{\text{aug}} \begin{bmatrix} x_k \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (21)$$

该终端增强动力学的约束条件定义如下

$$X_{\text{aug}, t} := \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in X, Kx + L\theta \in U\}. \quad (22)$$

类似于 (18), 设集合  $X_{\text{aug}, t} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  为一个不可约定义的闭多面体

$$\mathcal{X}_{\text{aug}, t} := \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+m} : \tilde{G} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \leq \mathbf{1}_{\tilde{p}}\}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } \sim G \\ \vdash C = \begin{bmatrix} \tilde{D}K & \tilde{D}L \\ \mathbf{0} & \tilde{W} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{p} \times (n+m)}. \end{aligned} \quad (24)$$

此外,  $\sim C = C$ ,  $\sim D = D$ ,  $\sim W = (CM_{\sim x} + DM_{\sim u}) /$  且  $\mathbf{0}$  是适当大小的零矩阵。注意  $\sim p$  被定义为  $X_{\text{aug}, t}$  中不等式的数量。给定 (23), 则  $X_{\text{aug}, t}$  也可定义为

$$\mathcal{X}_{\text{aug}, t} = \{ (x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+m} : i \in \mathbb{N}[1, \sim p], X_{\text{aug}, t}^{\top} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} \leq 1 \}, \quad (25)$$

其中  $X_{\text{aug}, i}^{\top}$  是矩阵  $\sim G$  的第  $i$  行。此外, 考虑一些满足类似 (15) 条件的  $M \leq N$ , 但针对增广系统进行了调整, 即,

$$\bigcap_{j=0}^{\tilde{M}} A_{\text{aug}}^{-j} \mathcal{X}_{\text{aug}, t} \subseteq A^{-\text{aug}(\tilde{M}+1)} \mathcal{X}_{\text{aug}, t}^{j=0} \quad (26)$$

或

$$\mathcal{X}_{\text{aug}, t} \subseteq A^{-\text{aug}(\tilde{M}+1)} \mathcal{X}_{\text{aug}, t}, \quad \text{以}$$

及以下终端集

$$\Psi_{f, \lambda}^{\text{tr}} = \bigcap_{j=0}^{\tilde{M}} A_{\text{aug}}^{-j} \begin{bmatrix} \mathcal{X}_t \\ \lambda \Theta \end{bmatrix}. \quad (27)$$

鉴于对于某些  $(0, 1)$ , 用于跟踪  $\Psi_{f, \lambda}^{\text{tr}}$  的增广终端集是有限确定的 (Gilbert & Tan, 1991; Limon et al., 2008), 可以确保存在一个有限值的  $M$  满足等式 (26) (另见 Rakovic & Zhang, 2022, 推论4)。

**T\_定理 2.** 假设\_假设 1 成立, 并考虑某些  $M, N \in \mathbb{N}$ , 其中  $M \geq 1$  满足 (26)。那么, 约束条件  $(x_N, \theta)$

$\Psi_{f, \lambda}^{\text{tr}}$  当且仅当存在一个序列  $[x_j]_{j=N}^{N+M}$  那这样的

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}_{[N, N+\tilde{M}]}, \quad (x_j, \theta) \in \mathcal{X}_{\text{aug}, t}, \\ \forall j \in \mathbb{N}_{[N, N+\sim M-1]}, \quad x_{j+1} = (A + BK) x_j + BL. \end{aligned} \quad (28)$$

为满足 (26), 对于所有  $i \in \mathbb{N}[1, \sim p]$ , 以下条件之一必须成立:

$$h \left( \bigcap_{j=0}^{\tilde{M}} A_{\text{aug}}^{-j} \mathcal{X}_{\text{aug}, t}, (A_{\text{aug}}^{\tilde{M}+1})^{\top} \cdot X_{\text{aug}, i} \right) \leq 1 \quad (29)$$

或

$$h(X_{\text{aug}, t}, (A_{\text{aug}}^{\tilde{M}+1})^{\top} \cdot X_{\text{aug}, i}) \leq 1.$$

以下计算简单的线性规划使我们能够验证 (29) 中对任意  $i \in [1, \sim p]$  的不等式:

$$\sup_{(x, \theta), [x_j]_{j=0}^{\tilde{M}}, [\theta_j]_{j=0}^{\tilde{M}}} \left\{ X_{\text{aug}, i}^{\top} \cdot A_{\text{aug}}^{\tilde{M}+1} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} : \begin{aligned} [x \ j] &= A^{-j} \text{aug} [x \ \theta] \\ &\in \mathcal{X}_{\text{aug}, t} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{[0, \sim M-1]} \end{aligned} \right\}$$

$$\sup_{(x, \theta)} \left\{ X_{\text{aug}, i}^{\top} \cdot A_{\text{aug}}^{\tilde{M}+1} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} : (x, \theta) \in \mathcal{X}_{\text{aug}, t} \right\}.$$

因此, 通过搜索正整数并求解每个正整数的  $\sim p$  个线性规划问题, 可以找到满足 (26) 的新参数  $\sim M$ 。

### 3.3. 含隐含终端分量的MPC跟踪

所提出的MPC (包括跟踪和隐式终端约束) 在本小节中详细阐述。根据定理2, 预测时域被划分为两个阶段: 长度为  $N$  的第一部分, 以及长度为  $M$  的终端部分。也就是说, 将计算长度为  $N+M$  的序列。

基于 (9), 所提出的最优控制问题在每个时间步需要求解, 其定义为

$$\begin{aligned} \text{分} \quad V_{N+\sim M}(x_k, x_{rs}, u, a) \\ \text{s.t.} \quad x_{0|k} = x_k, \end{aligned} \quad (30a)$$

$$x_{j+1|k} = Ax_{j|k} + Bu_{j|k}, \quad j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad (30b)$$

$$x_{j+1|k} \in \mathcal{X}, \quad j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad (30c)$$

$$u_{j|k} \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad (30d)$$

$$u_{j|k} = Kx_{j|k} + L a, \quad j \in \mathbb{N}_{[N, N+\sim M-1]}, \quad (30e)$$

$$-1], [x_{\text{aug}}] = M_{\theta} \theta^a \quad (30f)$$

$$a = \theta. \quad (30g)$$

此处, 约束 (30e) 施加了终端控制律, 仅在预测时域的第二部分 (先前称为终端阶段) 被考虑。此外, 目标函数考虑了截至预测时间点  $N+M$  的性能, 以及终端和偏移成本, 如 (10) 中所定义。最后需注意, 扩展预测时域替代了显式终端约束 (9e)。

**注1.** 隐式方法通过延长预测时域来避免离线计算不变集的显式表示, 但这意味着在线计算负担的增加。不过, 由于二次规划问题可在多项式时间内求解, 这在大多数实际应用中可能并非限制因素。此外需要注意的是, 一旦确定  $M$  的值, 即可通过公式 (27) 以闭式解找到最大不变集, 从而无需在每次迭代时检查收敛条件。

**注2.** 跟踪的内隐终端成本函数可定义如下, 由 Rakovic 和 Zhang (2023) 推断得出:

$$V_{f, \text{imp}}^{\text{tr}}(x_{N|k}, x \text{ 作为}, u \text{ 作为}) = (1 - \gamma)^{-1} \sum_{j=N}^{N+\tilde{M}-1} (\gamma x_{j|k} - x \text{ 作为} 2Q + u_{j|k} - u \text{ 作为} 2R), \quad \text{其中 } \gamma \in [0, 1) \text{ 被最小化, 使得终端成本中的隐式界变得紧致。}$$

尽管这是一个有效选项, 但计算  $P$  如 (10) 所考虑的通常并不昂贵, 并能提供更精确的行驶成本估计。因此, 本文选择此方法。

### 3.4. 理论特性

接下来, 我们证明优化问题 (30) 的初始可行性也意味着递归可行性。此外, 如果允许收敛到实数集点, 我们也证明了这一点。

**定理 3.** 假设在时刻  $k$  存在一个解  $(u_k, x_k^*)$  关于问题 (30)。然后, 我们可以在所有时刻  $\geq k$  处找到 (30) 的可行解。

**证明。** 设  $x_k$  为时刻  $k$  的系统状态, 考虑解  $(u_k, x_k^*)$ . Notice that sequence  $u_k^*$ , and its associated predicted



状态序列由

$$\mathbf{u}_k^* = (u_{0|k}^*, u_{1|k}^*, \dots, u_{N|k}^*, \dots, u_{N+\tilde{M}-1|k}^*),$$

$$\mathbf{x}_k^* = (x_{0|k}^*, x_{1|k}^*, \dots, x_{N|k}^*, \dots, x_{N+\tilde{M}|k}^*),$$

其中  $x_{0|k} = x_k$ 。根据构造, 可得

$$\forall j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad x_{j+1|k}^* = Ax_{j|k}^* + Bu_{j|k}^*, \quad (31a)$$

$$\forall j \in \mathbb{N}_{[N, N+\tilde{M}-1]}, \quad u_{j|k}^* = Kx_{j|k}^* + L\theta_k^*, \quad (31b)$$

$$\forall j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad x_{j+1|k}^* \in \mathcal{X}, u_{j|k}^* \in \mathcal{U}. \quad (31c) \text{ 我}$$

们定义一个候选解  $(\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1})$  用于问题 (30) 在时刻  $k+1$ 。特别地, 考虑  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k^*$  and

$$\tilde{\mathbf{u}}_{k+1} = [\tilde{u}_{j|k}]_{j=0}^{N+\tilde{M}-1} = \begin{bmatrix} [u_{j|k}^*]_{j=1}^{N+\tilde{M}-1} \\ Kx_{N+\tilde{M}|k}^* + L\theta_k^* \\ [x_{j|k}^*]_{j=1}^{N+\tilde{M}} \\ + BKx_{N+\tilde{M}|k}^* + BL\theta_k^* \end{bmatrix}, \quad (32) \text{ 其中 } \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} \text{ 是关联的预测}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = [\tilde{x}_{j|k}]_{j=0}^{N+\tilde{M}} = \begin{bmatrix} Ax_{N+\tilde{M}|k}^* \\ + BKx_{N+\tilde{M}|k}^* + BL\theta_k^* \end{bmatrix}$$

状态序列。注意, 给定  $x_{0|k} = x_k$ , 并考虑 (31a), 我们有  $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = A_{\tilde{M}} \tilde{\mathbf{x}}_k + B_{\tilde{M}} u_{0|k} = x_{N+1|k}$

$\tilde{\mathbf{x}}_k$ 。通过构造, 我们有  $x_{j|k+1} = x_{j|k}$  且  $u_{j|k+1} = u_{j|k}$  对所有  $j \in \mathbb{N}_{[0, N-2]}$  成立。类似地,

$$\tilde{x}_{N-1|k+1} = x_{N|k}^* \in \mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X},$$

$$\tilde{u}_{N-1|k+1} = Kx_{N|k}^* + L\theta_k^* \in \mathcal{U}.$$

已知约束条件  $\tilde{\mathbf{x}}_{N|k+1} \in \mathcal{X}_f$  在给定 (16) 和 (32) 时被隐式应用。因此, 在终端阶段, 当  $j \in \mathbb{N}_{[N, N+\tilde{M}-1]}$  时, 成立

$$\tilde{x}_{j+1|k+1} \in \mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}, \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{j|k+1} = K\tilde{x}_{j|k+1} + L\theta_{k+1} \in \mathcal{U}.$$

因此, 候选解  $(\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1})$  is a feasible solution 在时刻  $k+1$  处的 问题 (30)。通过归纳法, 递归可行性对所有时间点均得到保证。■

**定理 4.** 设  $x_0 \in X_{N+\tilde{M}}$ , 其中  $X_{N+\tilde{M}}$  是控制器 (30) 的吸引域。那么, 由 (30) 控制的系统状态  $x_k$  将收敛于  $x_{rs}$ , 若该状态是可容许的, 当  $k$  趋向于无穷大时。

**证明。注意**  $\mathcal{X}_{N+\tilde{M}}$  表示优化问题 (30) 可行的状态集合。由此可得, 若  $x_k \in X_{N+\tilde{M}}$ , 则状态  $x_{k+1}$  满足  $x_{k+1} \in X_{N+\tilde{M}}$ 。因此,  $X_{N+\tilde{M}}$  是闭环系统的正不变集。同理, 由于  $X$  有界, 集合  $X_{N+\tilde{M}}$  也必有界, 从而保证系统稳定。下文将通过验证最优成本是闭环系统的李雅普诺夫函数, 以及所选人工设定值  $\tilde{\theta}$  能收敛于真实值, 来证明收敛性。

设  $V_{N+\tilde{M}}(x_{k+1}, x_{rs}, \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1})$  为与候选解  $(\tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1})$  相关的第  $k+1$  时刻的共  $\tilde{\theta}$  量 (参见 (32))。同时, 为清晰起见引入记号  $z_{j|k} = (x_{j|k}, u_{j|k})$ 。则有:

$$V_{N+\tilde{M}}(x_{k+1}, x_{rs}^f, \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1}) - V_{N+\tilde{M}}(x_k, x_{rs}^f, \mathbf{u}_k^*, \theta_k^*) = \ell(\tilde{z}_{k+N+\tilde{M}|k+1}, \tilde{\theta}_{k+1}) - \ell(z_{k|k}^*, \theta_k^*) + V_F(\tilde{z}_{k+N+\tilde{M}+1|k+1}, \tilde{\theta}_{k+1}) - V_F(z_{k+\tilde{M}+N|k}^*, \theta_k^*),$$

其中  $\ell(\cdot)$  表示如 (4) 所示的阶段成本函数, 而  $V_F(\cdot)$  是 (30) 中的终端成本 (回顾 (10))。那么, 根据 (33), 可以断言

$$V_{N+\tilde{M}}(x_{k+1}, x_{rs}^f, \tilde{\mathbf{u}}_{k+1}, \tilde{\theta}_{k+1}) - V_{N+\tilde{M}}(x_k, x_{rs}^f, \mathbf{u}_k^*, \theta_k^*) \leq -\ell(z_{k|k}^*, \theta_k^*).$$

通过应用最优性原理, 我们得出:

$V_{N+\tilde{M}}(x_{k+1}, x_{rs}^f, \mathbf{u}_{k+1}^*, \theta_{k+1}^*) - V_{N+\tilde{M}}(x_k, x_{rs}^f, \mathbf{u}_k^*, \theta_k^*) \leq -\ell(z_{k|k}^*, \theta_k^*)$ 。由此可得, 最优成本严格递减, 并为系统提供一个李雅普诺夫函数。基于此, 我们推断出当  $k \rightarrow \infty$  时,  $x_k \rightarrow x_{rs}$  为,  $\theta_k \rightarrow \theta_{rs} = 0$ 。注意当  $x$  为,  $k = M$   $x_k^*$  是时刻  $k$  时选定的人工状态。最后, 在 Limon 等人 (2008, 引理3) 和 Ferramosca 等人 (2009, 引理2) 中, 通过反证法证明了若  $x_k = x_{rs}$ ,  $\theta_k = 0$ , 则  $x_k \rightarrow x_{rs}$   $\theta_k = 0$ 。

因此, 如果可接受, 系统状态收敛到  $x_{rs}$  的结论得到了证明。■

### 3.5. 用于跟踪的替代隐式设计

本节介绍了一种基于 Limon、Ferramosca、Alvarado 和 Alamo (2018) 提出的无终端约束稳定预测控制器设计的替代方法。该方法特别适用于需要扩展预测时域长度  $M$  但不可行或不被期望的场景。此外, 对于此类系统, 显式计算不变集也可能被证明是计算上不可行的。

让我们考虑一个类似于 (10), 中的终端成本函数, 即  $V_F(x_{N+\tilde{M}|k}, \tilde{\theta}_{k+1}) = x_{N+\tilde{M}|k} - x_{rs}$   $2P$ , 以及 (8) 中定义的终端  $\text{contr\_ol}$  法律。需要注意的是, 新变量  $M$  与  $M$  和  $M$  不同, 可以根据所需性能或其他特定要求为每个系统选择。此外, 选择某个标量  $> 0$  并定义集合:

$$\Psi_\alpha = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^{n+m} : V_F(x, \theta) \leq \alpha\}, \quad (34)$$

使得  $\Psi_\alpha$  成为跟踪的不变集。最后, 定义以下 MPC 问题, 该问题与 (30) 类似, 但考虑用户自定义的时域扩展, 并在目标函数中添加新参数:

$$\min_{\mathbf{u}, \tilde{\theta}} V_{N+\tilde{M}}(x_k, x_{rs}, \mathbf{u}, \tilde{\theta}) \quad (35a)$$

$$\text{s.t.} \quad x_{0|k} = x_k, \quad (35a)$$

$$x_{j+1|k} = Ax_{j|k} + Bu_{j|k}, \quad j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad (35b)$$

$$x_{j+1|k} \in \mathcal{X}, \quad j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad (35c)$$

$$u_{j|k} \in \mathcal{U}, \quad j \in \mathbb{N}_{[0, N+\tilde{M}-1]}, \quad (35d)$$

$$u_{j|k} = Kx_{j|k} + L\tilde{\theta}, \quad j \in \mathbb{N}_{[N, N+\tilde{M}-1]}, \quad (35e)$$

$$-1], [xu_{\text{asas}}] = M_\theta \theta^a \quad (35f)$$

$$\tilde{\theta} = \theta^a. \quad (35g)$$

特别地,  $V_{N+\tilde{M}}(x_k, x_{rs}, \mathbf{u}, \tilde{\theta})$  表示终端成本按  $\tilde{\theta}$  缩放后的成本函数, 即  $V_F(x_{N+\tilde{M}|k}, \tilde{\theta})$ 。

对于上述控制器, 当  $\tilde{\theta} \geq 1$  时, 递归可行性和收敛至允许设定值的特性对所有  $x$

$M_{-}$ ,  $(x_{rs})$  (Limon 等人 (2018, 定理3)) 均成立, 其中  $M_{-}$ ,  $(x_{rs})$  定义为:

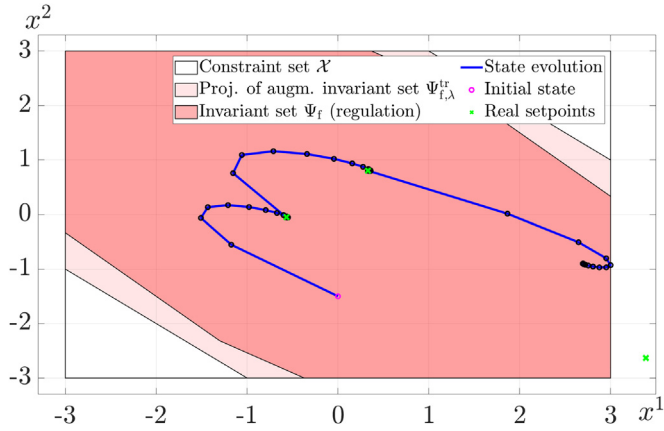
$$\mathcal{Y}_{M_{-}, \gamma}(x_{rs}^f) = \{x \in \mathbb{R}^n : V_{N+\tilde{M}}^*(x, x_{rs}^f) - V_0^*(x, x_{rs}) \leq (N + M_{-})d + \gamma\},$$

其中  $V_{N+\tilde{M}}^*(x, x_{rs})$  是 (35) 中目标函数的最优值,  $V_0^*(x, x_{rs})$  是关联的偏移成本, 且  $d$  表示一个正标量, 使得  $\ell(x, u, x_S, u_S) \geq d$  对所有  $(x, u) \notin \Psi_\alpha$  成立。注意区域  $M_{-}$ ,  $(x_{rs})$  随着  $M$  或  $\tilde{\theta}$  增大而扩大。最后值得一提的是, 该控制器设计仅需选择  $M_{-}$  和  $\gamma$  的值, 无需对终端不变集进行任何显式或隐式的估计。

表1

不同值的累积成本。

$\lambda$	学术范例		无人机	
	$\tilde{M}$	累积成本 ( $\times 10^6$ )	$\tilde{M}$	累积成本 ( $\times 10^6$ )
0.99	10	2.0067	203	3.1548
0.89	5	2.4813	88	3.1548
0.79	4	3.0960	64	3.1548
0.69	3	3.8597	50	11.5174
0.59	3	4.7774	39	44.8102
0.49	3	5.8491	31	112.0422
0.39	2	7.0748	25	271.2111

图1. 平面状态演化 ( $x^1, x^2$ )。

#### 4. 示例

该控制器的性能将通过三个不同维度和动态的示例进行说明，这些示例使用求解器 GUROBI 的 YALMIP 进行模拟 (Lofberg, 2004)。

##### 4.1. 学术范例

第一个例子是一个低维系统，其动力学由  $A$  和  $B$  矩阵在 Limon 等人 (2008) 中定义。该系统受约束条件  $\|x_k\|_\infty \leq 3$  和  $\|u_k\|_\infty \leq 2$ ，对所有  $k \geq 0$  成立。在控制器设计中，使用了权重矩阵  $Q = 10 \mathbf{I}_2$ 、 $R = 100 \mathbf{I}_2$  和  $O = 10.000 \mathbf{I}_2$ ； $N$  设为 10；增益  $K$  通过离散 LQR 求解获得。同样，满足  $\gamma = 0.9$  所提条件的  $\tilde{M}$  值为  $M = 5$ 。平面状态轨迹 ( $x^1, x^2$ ) 如图 1 所示，其中  $x^1$  和  $x^2$  是系统状态的两个分量。我们考虑了不同的设定点（以绿色圆点表示），其中最后一个设定点是不可接受的。调节的不变集也显示在图 1 中，可以看出它包含在我们增广不变集  $\Psi_f^{tr}$  在平面 ( $x^1, x^2$ ) 上的投影中。

此外，表 1 展示了不同  $\lambda$  值的累积性能成本对比。具体而言，累积性能成本是通过以下性能指标计算得出的：

$$V_{cc} = \sum_{k=0}^{T_{sim}} (\|x_k - x_{s,k}^a\|_Q^2 + \|u_k - u_{s,k}^a\|_R^2) + \sum_{k=0}^{T_{sim}} \|x_{s,k}^a - x_s^e\|_O^2,$$

其中 ( $x$  作为  $k$ ,  $u$  作为  $k$ ) 表示在时刻  $k$  计算的人工设定值， $T_{sim}$  用于表示模拟时间点的数量（本例中为 210 个）。

显然，随着  $\lambda$  的减小，累积成本会增加。这是可以预期的，因为会缩放集合  $\Psi_f^{tr}$ ，从而限制  $\tilde{M}$  的允许值。同样，从表 1 可以推断出一个有趣的特性： $M$  会随着  $\lambda$  的减小而减小，因为这会导致可达集远离约束条件。然而，这可能导致系统的某些平衡点无法达到。尽管从性能角度来看，最方便的选择是将  $\lambda$  设定为接近 1，但这一观察结果提供了一个新的自由度。具体而言，如果我们确定了系统中感兴趣的实际集点参数化所需的最小  $\lambda$ ，我们有可能降低所需的  $M$ 。

离线计算终端时域长度  $M$  所需时间为 0.5874 秒，而显式计算最大正不变集所需时间为 0.6315 秒。对于在线控制，求解问题 (30) 的平均时间为 0.0047 秒，而求解 (9) 平均需要 0.0044 秒。需要说明的是，(9) 指未使用扩展预测时域和显式终端集的控制问题。虽然这个学术示例的简洁性无法像预期那样展示显著的计算优势，但它证明了所提设计适用于跟踪任务，同时为扩展到更复杂系统（其中计算不变集更具挑战性）提供了可能性。

最后，第 3.5 节提出的替代设计方案已实现，部分关键结果展示于图 2 中。为说明该方法的  $\tilde{M}$  优势，我们选取了小于  $M=5$  的  $\tilde{M}$  值。具体而言，我们考虑  $\tilde{M} = 2$ ,  $\gamma = 20$  并且  $\lambda = 25$ 。使用这些参数， $d$  的最终值为 5.6322。图 2 展示了容许目标状态  $x_{rs} = [-0.5688, -0.0523]^T$  的稳定性区域  $M_{rs}$  ( $x_{rs}$ )。这表明如果系统的初始状态位于该区域内，那么无终端约束的跟踪 MPC 3.5 将渐近稳定系统。值得注意的是， $M_{rs}$  ( $x_{rs}$ ) 实际上与不变集  $\Psi_f^{tr}$  的投影大小相当。

##### 4.2. 增尺寸质量-弹簧-阻尼器系统

本小节将所提出的 MPC 应用于 Riverso 和 Ferrari-Trecate (2012)、Trodden 和 Maestre (2017) 中系统的一个改进版本。该系统由多个通过弹簧-阻尼结构连接的推车组成，如 Chanfreut、Maestre、Fer-ramosca、Muros 和 Camacho (2021) 所示。每个推车  $i$  的动力学建模如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_i \\ \dot{v}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{m_i} k_{ij} & -\frac{1}{m_i} h_{ij} \end{bmatrix}}_{\text{一个 } ii} \begin{bmatrix} r_i \\ v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} u_i + w_i, \quad (36)$$

$$w_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_i} k_{ij} & \frac{1}{m_i} h_{ij} \end{bmatrix}}_{A_{ij}} \begin{bmatrix} r_j \\ v_j \end{bmatrix}, \quad (37)$$

**表2**  
不同数量推车的计算时间。离线时间分别指显式和隐式情况下最大RPI的计算或~M的计算。在线时间指每次MPC优化的平均时间。

	推车数量									
	3	5	10	15	25	30	50	70	100	200
离线显式时间(s)	7.6293	15.5986	54.4716	153.2055	541.9198	799.4687	$3.0095 \times 10^3$	$8.7399 \times 10^3$	$6.9640 \times 10^4$	–
离线隐式时间	2.7063	3.7123	6.8664	21.5659	52.3099	73.6518	201.9882	390.5777	881.0654	$4.6101 \times 10^3$
在线显式时间 (秒)	0.0085	0.0107	0.0761	0.1170	0.2924	0.3138	0.2052	0.2010	0.3200	–
在线隐时(s)	0.0095	0.0189	0.1122	0.1256	0.1582	0.1904	0.3101	0.4831	0.7917	2.0693

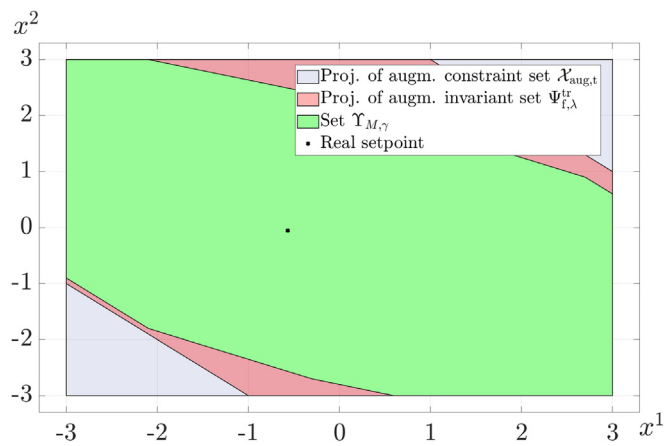


图2. 应用替代设计方法达到的稳定区域。

其中状态由小车*i*从平衡位置的位移 $r_i$ 及其速度 $v_i$ 定义；输入 $u_i$ 表示可施加在小车*i*上的力。由于弹簧和阻尼器将相邻小车连接在一起，因此存在耦合项。在这方面， $k_{ij}=k_{ji}$ 和 $h_{ij}=h_{ji}$ 分别代表弹簧刚度（[N/m]）和阻尼系数（[N/（m×s）]），而 $m_i$ 是小车*i*的质量（[kg]）。连续时间动力学通过零阶保持和0.02秒的采样时间进行离散化。

我们通过逐步增加推车数量（例如 $N_{\text{辆}}$ ）从3到200来模拟不同系统规模。在所有情况下，目标都是在满足状态和控制输入约束的前提下，将所有推车控制到目标设定值： $|r_i| \leq 4$ 、 $|v_i| \leq 1$ 以及 $|u_i| \leq \text{sp\_10} < \text{sp\_10} < 1$ ，其中所有 $i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{辆}}\}$ 。权重矩阵为 $Q_i = [1 \ 0; 0 \ 1.5]$ 和 $R_i = 20$ ，其中所有 $i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{辆}}\}$ ，且 $\alpha = 0.9$ 。

如表2所示，显式离线计算系统不变集所需时间显著增加，甚至最终变得不可行。相比之下，采用所提隐式方法计算*M*在所有情况下仍保持可处理性。需注意离线计算时间上限为48小时（2天）。在线计算时间则通过求解（30）在整个仿真过程中各车数对应的平均时间来计算，以捕捉整体上升趋势。两种方法的在线时间差异会随着系统规模增大而逐步增加，但从未成为所提方法的限制因素。例如，对于包含100辆小车的系统，显式方法的离线计算时间是所提方法对应指标的79倍，而本方法的在线计算时间仅比显式方法高2.5倍，如表2所示。

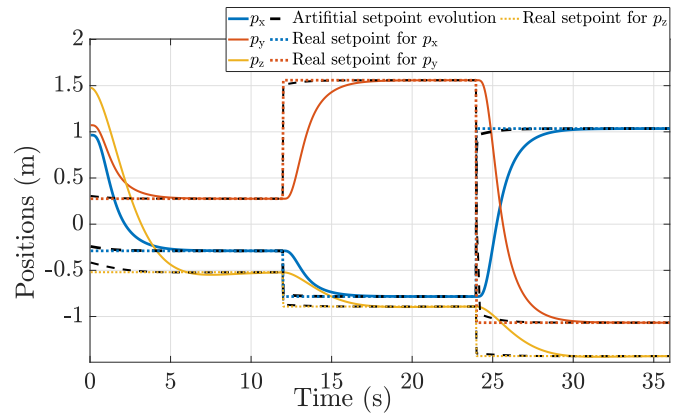


图3. 四旋翼飞行器沿模拟路径的运动轨迹。

### 4.3. 无人机

目前采用Beard（2008）、Romagnoli, Krogh, de Niz, Hristozov, and Sinopoli（2023）中描述的具有12个状态变量的无人机模型，以说明所提出的MPC方法在现实系统中的适用性。简要说明：系统的状态在三维空间中聚合了位置[m]和线速度[m/s]，分别为（ $p_x, p_y, p_z$ ）和（ $v_x, v_y, v_z$ ）；以及角度roll、pitch和yaw（单位[rad]）及其对应的角速度（单位[rad/s]）。同样， $u$ 包含推力（单位[N]）和与roll、pitch、yaw相关的力矩 $\mu$ （单位[N·m]）。状态约束采用Romagnoli等人提出的（2023），同时考虑以下输入约束： $|F| \leq 1.5$ ， $|\mu| \leq 0.043$ 。

成本函数定义为 $Q = 10 \mathbf{I}_{12}$ ， $R = 100 \mathbf{I}_4$ ， $O = 10^6 \mathbf{I}_{12}$ ，且 $N = 5$ 。终端反馈增益*K*通过离散LQR求解获得，且 $\alpha = 0$ 。9.模拟时长为900个时间步长，采样周期 $T_s = 0.04$ s，最终模拟时长为36s。满足条件（26）的终端时间范围长度*M*为*M* = 92。

测试是基于四旋翼的线性模型进行的。图3展示了生成的位置轨迹，以及对应的位置人工设定值和真实设定值。可以看出四旋翼能够达到所有设定值。真实目标设定值是通过矩阵 $M_\theta$ 找到系统允许的平衡点而选定的。由于系统动力学特性，这些设定值仅涉及位置和偏航角的非零状态值。再次从表1可以明显看出，降低 $\alpha$ 会使系统更难达到真实设定值，因此累积成本随之增加。

在计算时间方面，找到~*M*需要16.9558秒，而显式计算最大不变集需要137.1241秒。也就是说，离线计算时间实现了87.63%的级缩减，因为找到*M*可简化为求解简单线性规划问题，而显式不变集的获取则需要更多时间。

传统方法需要进行迭代集合操作。所提出的无人机系统被选为极限案例示例，尽管计算成本较高，但显式计算仍可行。正如预期，由于预测范围的扩展和由此产生的约束条件累积，所提方法的在线计算时间略有增加。然而在我们的仿真中，这种增长是微乎其微的：求解所提MPC问题（30）平均耗时0.0164秒，而求解（9）平均耗时0.0114秒。最后需注意的是，若在实际场景中实施，通过采用更快的编程语言可进一步缩短计算时间。

## 5. 结论

本文提出了一种基于Ferramosca等人（2009）、Limon等人（2008）的隐式终端分量的跟踪MPC公式化方法。该方法避免了通过显式刻画系统最大正不变集来定义终端约束的需求，转而采用扩展预测时域。所提出的控制器可高效设计，同时仍能通过引入表征跟踪公式的虚拟变量获得优势。通过这种方式，它为处理更大规模系统提供了可操作的替代方案。研究表明，对于大型系统，控制器设计的离线成本显著降低，而在线计算时间仅略有增加。最后，递归可行性和收敛性特性已得到验证。作为未来研究方向，将考虑将该方法应用于非线性系统及更广义的约束条件，例如自然扩展可适用于不仅限于多面体约束集，还包括椭球体或两者交集的约束集。

## 参考文献

- Alamo, Teodoro, Cepeda, Alfonso, & Limon, Daniel (2005). 改进的 饱和控制系统 椭球不变集的计算。在IEEE第44届 决策与控制会议（第6216–6221页）。
- Beard, Randal W. (2008). 四旋翼动力学与控制。布利格姆-扬 大学, 19(3), 46–56.
- Bemporad, Alberto, Casavola, Alessandro, & Mosca, Edoardo (1997). 非线性 通过预测性参考管理控制约束线性系统。IEEE《自动控制汇刊》第42卷第3期。
- 贝里希, 朱利安, 科勒, 约翰内斯, 穆勒, 马蒂斯·A., 与奥尔格沃, 弗兰克 (2021). 基于数据的模型预测控制具有稳定性和鲁棒性 保证。IEEE自动控制汇刊, 66(4)。
- 陈弗雷特, 保拉, 马埃斯特雷, Jose Maria, 费拉莫斯卡, 安东尼奥, 穆罗斯, 弗兰西斯柯·哈维尔, 卡马乔, 爱德华多·F. (2021). 分布式模型预测控制用于跟踪: 一种联盟聚类方法。IEEE自动控制汇刊, 67 (12), 6873–6880。
- Comelli, Roman, Olaru, Sorin, & Kofman, Ernesto (2024). 坚强控制不变集的内-外 近似。Automatica, 159, 文章 111350.
- 费拉莫斯卡, 安东尼奥, 利蒙, 丹尼尔, 阿尔瓦拉多, 伊格纳西奥, 阿拉莫, 特奥多罗, 与卡·马乔, 爱德华多·F. (2009). 用于跟踪的MPC与最优闭环 性能。自动化, 45(8), 1975–1978.
- Garone, Emanuele, Di Cairano, Stefano, & Kolmanovsky, Ilya (2017). 受约束系统 的参考与命令控制器: 理论与应用综述。Automatica, 75, 306–328.
- Gilbert, Elmer, & Kolmanovsky, Ilya (2002). 非线性跟踪控制在 状态和控制约束下的 应用: 一种广义参考控制器。Automatica, 38 (12), 2063–2073.
- Gilbert, Elmer G., & Tan, K. Tin (1991). 带状态和控制约束的线性系统: 最大输出 容许集的理论与应用 IEEE自动控制汇刊
- 埃里克·科林·克里根 (2001). 鲁棒约束满足: 不变集与 预测控制 (博士论文), 英国剑桥大学。
- 利蒙, 丹尼尔, 阿尔瓦拉多, 伊格纳西奥, 阿拉莫, 特奥多罗, 卡马乔, 爱德华多·F. (2008). MPC用于跟踪约束线性分段常数参考 系统。《Automatica》第44卷第9期, 2382–2387页。
- Limon, Daniel, Ferramosca, Antonio, Alvarado, Ignacio, & Alamo, Teodoro (2018). 用于跟踪分段常数参考信号的非线性MPC。IEEE《自动控制》第63卷第11期, 3735–3750页。

- Lofberg, Johan (2004). YALMIP: 一个用于建模和优化的工具箱 MATLAB. 在IEEE国际机器人与自动化会议 (第 284–289页)。
- Luque, I., Chanfreut, P., Limon, D., & Maestre, J. M. (2024). 为跟踪建模预测 控制设计隐含 变量集。在IEEE第63届决策与控制会议 (pp. 1795–1800)。
- Mayne, David (2013). 《模型预测控制中稳定终态条件的辩护》国际控制杂志, 86 (11), 2090–2095.
- Mayne, David Q. (2014). 模型预测控制: 最新进展与 未来前景。Automatica, 50 (12), 2967–2986.
- Morato, Marcelo M., Cunha, Victor M., Santos, Tito L. M., Normey-Rico, Julio E., & Sename, Olivier (2021). 通过qLPV 嵌入和区域拓扑不确定性传播实现鲁棒非线性预测控制。IFAC-PapersOnLine, 54(8), 33–38.
- Rakovic, Sasa V., & Zhang, Sixing (2022). 隐含最大正 不变集。IEEE自动控制汇刊, 68(8), 4738–4753.
- Rakovic, Sasa V., & Zhang, Sixing (2023). 基于隐含 终端分量的模型预测控制。Automatica, 151, Article 110942.
- Riverso, Stefano, & Ferrari-Trecate, Giancarlo (2012). 基于管路的线性约束系统分布式 控制。Automatica, 48 (11), 2860–2865.
- 罗马尼奥利, 拉法埃莱, 克洛格, 布鲁斯 H., 德尼兹, 迪奥尼西奥, 希尔佐夫, 安东 D., & 西诺波利, 布鲁诺 (2023). 面对运行时网络攻击时网络-物理系统的安全 运行的软件更新。IEEE控制技术汇刊, 31(4), 1565–1580.
- Trodden, Paul (2016). 计算多顶点正不变集的一步法。IEEE自动控制汇刊, 61 (12), 4100–4105.
- Trodden, Paul A., & Maestre, Jose Maria (2017). 分布式预测控制 与干扰最小化。Automatica, 77, 31–43.
- 王哲明, Jungers, Raphael M. (2020). 基于场景的黑盒非线性系统集合不变性 验证。IEEE控制系统快报, 5(1), 193–198.



**艾琳·卢克**于2020年获得西班牙塞维利亚大学工业工程学士学位，2022年获得机器人与自动化工程硕士学位。目前她正在该校攻读自动化工程博士学位，参与西班牙大学教授培训计划（FPU）。2021至2022年间，她曾任职于ERC Advanced Grant ocontsolar项目。其研究聚焦于网络物理系统的模型预测控制与网络安全方法。



**Paula Chanfreut**现任荷兰埃因霍温理工大学机械工程系助理教授。她于2022年在西班牙塞维利亚大学获得自动化工程博士学位，期间曾作为西班牙大学教授培训计划（FPU）的博士前研究员。2022至2023年间，她曾担任欧洲研究理事会（ERC）高级研究 OCON TSOLAR。其研究聚焦于多变量控制（MPC）领域，尤其关注其非集中式实现方案。



**丹尼尔·利蒙**分别于1996年和2002年在西班牙塞维利亚大学获得电气工程硕士和博士学位。1999年至2007年，他担任塞维利亚大学系统与自动化工程系助理教授，2007年至2017年任副教授，2017年起晋升为该系正教授。2016年和2018年，他先后作为访问学者在剑桥大学和三菱电机研究室开展研究。利蒙博士曾于2008年在国际非线性模型预测控制评估与未来方向研讨会上担任主旨演讲嘉宾，并于2012年在国际非线性模型预测控制会议（IFAC）上担任半正会场主讲人。2015年，他担任第五届IFAC非线性模型预测控制会议主席。其当前研究方向包括模型预测控制、稳定性与鲁棒性分析、跟踪控制及基于数据的控制，这些研究在建筑与供水管网高效运行以及航天器交会策略等领域具有重要应用价值。





**Jose M. Maestre** 拥塞维利亚大学博士学位，现任该校正教授。他曾任职于代尔夫特理工大学、帕维亚大学、Kyoto University 大学及 Tokyo Institute 技术学院。著有《Digital Home 中的 Service Robotics》(Springer, 2011)、《编程即游戏》(Paraninfo, 2017)、《测量与调节系统》(Paraninfo, 2018) 及《模型预测控制》(Springer, 2025)。同时担任《分布式模型预测控制轻松学》(Springer, 2014) 与《控制系统基准测试》(Springer, 2025) 的编者。他的

他的研究聚焦于分布式网络物理系统控制，尤其擅长将异构智能体整合到控制回路中。这位学者已发表200余篇学术论文，并主导了多个科研项目。其卓越成就获得多项殊荣，包括西班牙皇家工程院颁发的预测控制奖章（表彰其在大型系统预测控制领域的贡献），以及2020年成为西班牙大学体系最年轻正教授的殊荣。