（又称｜简称｜记作｜简记）

（！）不重不漏

（？）不重

|  |
| --- |
| （和的）笛卡儿积（卡氏积||）：设、为集合，用中元素为第一元素，中元素为第二元素，构成有序对。所有这样的有序对组成的集合。 |
| （与的）无序积（||）：设、为两集合，。  （无序对||） |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 图：有序三元组（）。 | | | | | | | | |
| ┣ | （图的）顶点集（|||） | | | | | | | |
| ┃ | ┣ | （图的）顶点数（阶、（有个顶点的图）阶图||）：。 | | | | | | |
| ┃ | ┗ | （图的）顶点（节点、结点|点|）：的元素。 | | | | | | |
| ┃ |  | ┣ | （顶点的）度数（度、次数||）：顶点作为边的端点的次数之和。在有向图中，。 | | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┣ | （图的）最小度（||）：。 | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┣ | （图的）最大度（||）： | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┗ | （图的）度数序列（度数列）：设，。 | | | | |
| ┃ |  | ┣ | 有向图（顶点的）入度（有条边以该顶点为终点||）：顶点作为边的终点的次数之和。（进入顶点的边的数目。）（从顶点引入的边的数目。） | | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┣ | （图的）最小入度（||）：。 | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┣ | （图的）最大入度（||）： | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┗ | （图的）入度序列：。 | | | | |
| ┃ |  | ┣ | 有向图（顶点的）出度（有条边以该顶点为起点||）：顶点作为边的始点的次数之和。（离开顶点的边的数目。）（从顶点引出的边的数目。） | | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┣ | （图的）最小出度（||）：。 | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┣ | （图的）最大出度（||）： | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┗ | （图的）出度序列：。 | | | | |
| ┃ |  | ┗ | 分类 | | | | | |
| ┃ |  |  | ┗ | 按度（？） | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┗ | 孤立点（顶点是孤立的、孤立结点）：，。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┗ | 悬挂顶点：，。 | | | |
| ┣ | （图的）边集（|||） | | | | | | | |
| ┃ | ┣ | （图的）边数（||）：。 | | | | | | |
| ┃ | ┗ | （图的）边（||）：的元素。 | | | | | | |
| ┃ |  | ┣ | （边的）端点 | | | | | |
| ┃ |  | ┣ | 赋权图（边的）权：若将图的每一条边对应一个实数，。 | | | | | |
| ┃ |  | ┗ | 分类 | | | | | |
| ┃ |  |  | ┗ | 按可能的端点的数量（？） | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┗ | 超边：连接任意顶点子集的边。 | | | |
| ┃ |  |  |  |  | ┗ | 边：连接2个顶点的边。 | | |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┣ | 按有无方向（！） | |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┃ | ┣ | 无向图无向边（|边|、、）：，。（与中的无序偶对应的边。） |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┃ | ┗ | 有向图有向边（弧|边|）：与中的有序偶对应的边。 |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┣ | 按端点关系（？） | |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┃ | ┗ | 自环（环、自回路）：2个端点为同一顶点的边。 |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┗ | 按端点的度（？） | |
| ┃ |  |  |  |  |  |  | ┗ | 悬挂边：悬挂顶点关联的边。 |
| ┣ | （图的）关联函数：。 | | | | | | | |
| ┣ | （图的）重数：重复次数最多的边的重复次数。 | | | | | | | |

# 通路

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ┣ | （从到的）通路Walk（路径Path||）：顶点与边相互交错且的有限非空序列。 | | | | | | | | | |
| ┃ | ┣ | （通路的）起点：。 | | | | | | | | |
| ┃ | ┣ | （通路的）终点：。 | | | | | | | | |
| ┃ | ┣ | （通路的）长度：通路中边的数目。 | | | | | | | | |
| ┃ | ┣ | （通路的）子通路（子路径）：通路的一个连续子序列。 | | | | | | | | |
| ┃ | ┗ | 分类 | | | | | | | | |
| ┃ |  | ┃ | |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | | | 按起点与终点关系（！） | | | | | | 闭 | | | | 开 | | 通路 | | | 环（回路、路径是闭的） | | | | 路径是开的 | | ┗ | 按边集与的关系（？） | | |  | |  | ┗ | 巡回：经过的每边至少1次的闭通路。 | |  | |  |  | ┗ | 赋权图最佳巡回：权最小的巡回。 |  | | ┣ | 复杂通路 | | 复杂回路：有边重复。 | | | |  | | ┗ | 道路（简单通路） | | 回路Circuit（简单回路） | | | |  | |  | ┗ | 路径（初级通路） | 圈Cycle（初级回路、环是简单的） | | | |  | | | | | | | | |
| ┃ |  | ┣ | 按每个顶点出现次数（？） | | | | | | | |
| ┃ |  | ┃ | ┗ | 闭 赋权图最佳推销员回路：经过每个顶点至少1次的权最小的闭通路。 | | | | | | |
| ┃ |  | ┗ | 按边是否重复（？） | | | | | | | |
| ┃ |  |  | ┣ | 复杂通路：有边重复出现的通路。 | | | | | | |
| ┃ |  |  | ┗ | 道路Trail（行迹Trace、简单通路||）：边不重复的通路。 | | | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 按每条边出现次数（？） | | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┗ | 欧拉道路（欧拉通路）：经过的每条边一次且仅一次并且行遍图中每个顶点的道路。 | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  | ┗ | 闭欧拉巡回（欧拉回路）：经过的每条边一次且仅一次并且行遍图中每个顶点的回路。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┗ | 按顶点是否重复（？） | | | | | |
| ┃ |  |  |  |  | ┗ | 路径Path（轨道Track、初级通路、路径是简单的、简单路径||）：顶点不重复的道路。 | | | | |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┣ | 赋权图（路径的）权：是赋权图中从到的路径，。 | | | |
| ┃ |  |  |  |  |  | ┗ | 按每个顶点出现次数（？） | | | |
| ┃ |  |  |  |  |  |  | ┗ | （的）哈密顿路径（哈密顿通路|路径）：经过的每个顶点正好1次的路径。 | | |
| ┃ |  |  |  |  |  |  |  | ┗ | 闭哈密顿圈（圈、哈密顿回路）：经过的每个顶点正好1次的圈。 | |
| ┃ |  |  |  |  |  |  |  |  | ┗ | 闭 赋权图最佳圈：权最小的哈密顿圈。 |

# 关系

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ┣ | 关系 | | | | |
| ┃ | ┣ | 顶点与顶点（？） | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （是从经过）可达的（||有向图 ）：从顶点到顶点存在1条路径。 | | |
| ┃ | ┃ |  | ┣ | 无向图（顶点与顶点是）连通的：从顶点到顶点存在通路。规定任何顶点与自身是连通的。 | |
| ┃ | ┃ |  | ┣ | 有向图（顶点）可达（顶点）：从顶点到顶点存在通路。规定任何顶点到自身是可达的。 | |
| ┃ | ┃ |  | ┣ | （顶点和顶点）（关于边）相邻（、是相邻的、彼此相邻）：有边联结2个顶点、。 | |
| ┃ | ┃ |  | ┗ | （顶点）邻接于（顶点）（邻接到）：是图中的1条边。在无向图中，邻接关系是对称的；在有向图中，邻接关系不是对称的。 | |
| ┃ | ┣ | 边与边（？） | | | |
| ┃ | ┃ | ┣ | （边和边）（关于顶点）相邻（、是相邻的、彼此相邻）：2条边、有公共顶点。 | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | 重边：联结同1对顶点的边。 | | |
| ┃ | ┃ |  | ┣ | 无向图平行边：关联一对顶点的无向边多于条，这些边。 | |
| ┃ | ┃ |  | ┃ | ┗ | 无向图重数：平行边的条数。 |
| ┃ | ┃ |  | ┗ | 有向图有向平行边（平行边）：有多于条的边始点与终点相同，这些边。 | |
| ┃ | ┣ | 顶点与边（？） | | | |
| ┃ | ┃ | ┣ | （互相）关联（彼此关联）：边和它的端点称为互相关联的。 | | |
| ┃ | ┃ | ┃ | ┣ | 无向图（与顶点和顶点）关联（、为的端点）：是中的1条边。 | |
| ┃ | ┃ | ┃ | ┣ | 有向图（）射入或进入（顶点）（、为的端点，为的终点、弧头，与顶点和顶点关联，是与顶点关联的入边）：是中的1条边。 | |
| ┃ | ┃ | ┃ | ┗ | 有向图（）射出或离开（顶点）（、为的端点，为的始点、弧尾，与顶点和顶点关联，是与顶点关联的出边）：是中的1条边。 | |
| ┃ | ┃ | ┗ | 无向图（与顶点的）关联次数：若，；若，；若不是的端点，。 | | |
| ┃ | ┗ | 图与图（？） | | | |
| ┃ |  | ┗ | 无向图（与是）同构的（||）：设两个无向图，，存在双射函数，使得对于任意的当且仅当，并且和的重数相同。 | | |

# 分类

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ┣ | 分类 | | | | | | | | |
| ┃ | ┗ | 超图：含有超边的图。 | | | | | | | |
| ┃ |  | ┗ | 按所有超边的端点数量（？） | | | | | | |
| ┃ |  |  | ┗ | 图 | | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 按顶点的数量和边的数量（！） | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┣ | （图是）无穷的：图有无穷多的顶点和/或边。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┃ | ┗ | 按每个顶点的度（？） | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┃ |  | ┗ | （图是）局部有穷的：每个顶点的度是有限的。 | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┗ | （图是）有穷的：否则。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  | ┣ | 按顶点的数量（？） | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  | ┃ | ┗ | 空图||：。 | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  | ┣ | 按边的数量（？） | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  | ┃ | ┗ | 零图（秃图、空图）：。 | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  | ┗ | 平凡图：。 | | |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 按自环的数量和重边的数量（！） | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┣ | 多重图：有自环或有重边的图/含平行边的图。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┗ | 简单图：没有自环且没有重边的图/既不含平行边也不含自环的图。  二元组，顶点集（||、），边集（||、），。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  | ┗ | 按顶点的度（？） | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  |  | ┣ | （）正则图：每个顶点的度是。 | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  |  | ┃ | ┗ | （阶）完全图（完备图||）：阶为的正则图。连通图 |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  |  | ┣ | 无向图阶无向完全图（||）：设是阶无向简单图，中任何顶点都与其余的个顶点相邻，。 | |
| ┃ |  |  |  | ┃ |  |  | ┗ | 有向图阶有向完全图：设是阶有向简单图，，。 | |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 按所有边是否有方向（！） | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┣ | 混合图：既有无向边又有有向边的图。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┣ | 有向图（||）：每一条边都是有向边的图。  二元组，是一个非空的有穷集合，是卡氏积的一个多重子集。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┗ | 无向图：每一条边都是无向边的图。  二元组，是一个非空的有穷集合，是无序积的一个多重子集。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 按所有两个顶点是否可达（？） | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┣ | 无向图（图是）连通图（图是连通的）：图是平凡图或中任意两顶点是连通的。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┃ | ┗ | 无向图（图的）连通分量（连通分支）：是中顶点之间的连通关系。按照将划分成若干个等价类，由它们导出的导出子图。 | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┃ |  | ┗ | （||） | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┣ | 无向图（图是）非连通图：否则。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┣ | 有向图（图是）弱连通图（|连通图）：略去中所有有向边的方向后所得的无向图是连通图。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┃ | ┗ | 有向图（图是）单连通图：任意两顶点至少一个可达另一个。 | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┃ |  | ┗ | 有向图（图是）强连通图（图是强连通的）：任意两个顶点相互可达。 | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┗ | 有向图（图是）非连通图：否则。 | | | |
| ┃ |  |  |  | ┣ | 按是否赋权（？） | | | | |
| ┃ |  |  |  | ┃ | ┗ | 赋权图（加权图、带权图）：将图的每一条边对应一个实数。  （||（无向边或有向边）） | | | |
| ┃ |  |  |  | ┗ | 按点着色颜色数（！） | | | | |
| ┃ |  |  |  |  | ┗ | （是）可着色的：能用种颜色给的顶点着色。 | | | |

# 运算

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ┣ | 运算 | | | | |
| ┃ | ┣ | （从顶点到顶点的）距离：若从顶点出发到顶点的最短通路存在，此通路的长度；否则，无穷（）。 | | | |
| ┃ | ┣ | 赋权图（顶点到顶点的）最短路径（最短路||）：从到的所有通路中权最小的通路。 | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | 赋权图（顶点到顶点的）距离（||）：到的最短路径的权。 | | |
| ┃ | ┃ |  | ┣ | （的）中心点：，。 | |
| ┃ | ┃ |  | ┗ | （的）重心：。，。 | |
| ┃ | ┣ | 无向图（的）邻域（||）：。 | | | |
| ┃ | ┃ | 无向图（的）闭邻域（||）：。 | | | |
| ┃ | ┃ | 无向图（的）关联集（||）：。 | | | |
| ┃ | ┃ | 有向图（的）后继元集（||）：。 | | | |
| ┃ | ┃ | 有向图（的）先驱元集（||）：。 | | | |
| ┃ | ┃ | 有向图（的）邻域（||）：。 | | | |
| ┃ | ┃ | 有向图（的）闭邻域（||）：。 | | | |
| ┃ | ┣ | （是的）子图（是的母图||）：，，，。 | | | |
| ┃ | ┃ | ┣ | 赋权图（的）权（||）：。 | | |
| ┃ | ┃ | ┣ | （是的）真子图：。 | | |
| ┃ | ┃ | ┣ | （是的）导出子图：。 | | |
| ┃ | ┃ | ┣ | （是的）生成子图（支撑子图）：。 | | |
| ┃ | ┃ | ┃ | ┗ | 生成树：把一个连通图中的一些边删除得到的树。  赋权图（的）权（||） | |
| ┃ | ┃ | ┃ |  | ┣ | 赋权图 连通图最小生成树：一个图的权最小的生成树。 |
| ┃ | ┃ | ┃ |  | ┗ | 赋权图 连通图最大生成树：一个图的权最大的生成树。 |
| ┃ | ┃ | ┣ | （的）由导出的子图（关于的导出子图||）：，〡，。 | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （的）由导出的子图（||）：，〡，。不含有孤立点。 | | |
| ┃ | ┣ | 简单图（的）补图：，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 无向图 简单图（的）补图（||）：设是阶无向简单图，，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 有向图 简单图（的）补图（||）：设是阶有向简单图，，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 无向图删除（||）：，从中删除中的所有顶点及其关联的边。 | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （的）点割集：，，。 | | |
| ┃ | ┃ |  | ┗ | 割点：若点割集中只有一个顶点，。 | |
| ┃ | ┣ | 无向图删除（||）：，从中删除中的所有边。 | | | |
| ┃ | ┃ | ┗ | （的）边割集（|割集）：，，。 | | |
| ┃ | ┃ |  | ┗ | 割边（桥）：若边割集中只有一条边，。 | |
| ┃ | ┣ | 无向图（图的）关联矩阵（||）：令为顶点与边的关联次数，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 有向图（图的）关联矩阵（||）：有向图中没有自环。令，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 有向图（图的）邻接矩阵（||、）：令为邻接到的边的条数，。  （||） | | | |
| ┃ | ┣ | 无向图（图的）邻接矩阵 | | | |
| ┃ | ┣ | 有向图（图的）可达矩阵（||）：令，。 | | | |
| ┃ | ┣ | 无向图（图的）可达矩阵 | | | |
| ┃ | ┗ | 无向图（图的一种）点着色（|着色）：设无向图无环，对的每个顶点涂一种颜色，使相邻的顶点涂不同的颜色。 | | | |

# 性质

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ┗ | 性质 | |
|  | ┣ | 度：①（握手定理）  度数为奇数的顶点个数是偶数。  　　②有向图 |
|  | ┣ | 子图：图是本身的子图。  　　　在一个阶图中，若从顶点到（）存在通路，则从到存在长度小于等于的通路。  在一个阶图中，若从顶点到（）存在通路，则从到存在长度小于等于的初级通路。  　　　在一个阶图中，如果存在到自身的回路，则存在到自身长度小于等于的回路。  在一个阶图中，如果存在到自身的简单回路，则存在到自身长度小于等于的初级回路。 |
|  | ┣ | 无向图关联矩阵：每一列恰好有2个或一个。    　　　　　　　　（握手定理）  为孤立点当且仅当第行全为。  与为平行边当且仅当第列与第列相同。 |
|  | ┣ | 有向图关联矩阵：每一列恰好有一个和一个。  　　　　　　　　第行的个数等于，的个数等于。  　　　　　　　　（度②）中所有的个数等于所有的个数，都等于。 |
|  | ┣ | 有向图邻接矩阵：      　　　　　　　　设为有向图的邻接矩阵，则（）中元素为中到长度为的通路数，为中长度为的通路总数，为中长度为的回路总数。！！！同构但[顶点和边的序列]不同的回路算作不同的回路。  设（），则中元素为中到长度小于等于的通路数，为中长度小于等于的通路总数，为中长度小于等于的回路总数。！！！同构但[顶点和边的序列]不同的回路算作不同的回路。 |
|  | ┣ | 无向图邻接矩阵：无向图的邻接矩阵是对称的。 |
|  | ┣ | 有向图可达矩阵：，。  ，，。 |
|  | ┗ | 无向图可达矩阵：无向图的可达矩阵是对称的。 |

# 匹配与覆盖

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| （中的）匹配：设为无向图，，中任意两条边均不相邻，。 | | |
| ┣ | 匹配边：的边。 | |
| ┣ | 自由边：的边。 | |
| ┣ | 是的配偶（是的配偶）：。 | |
| ┣ | 饱和点（是饱和的）：设为中一个匹配，，存在中的边与关联，。 | |
| ┣ | 非饱和点（是非饱和的）：否则。 | |
| ┣ | 交错路：边交错于和的路径。  闭交错圈：边交错于和的圈。 | |
| ┃ | ┗ | 增广路：起点和终点都是非饱和点的交错路。 |
| ┣ | 极大匹配：在中再加入任何一条边就都不是匹配，。 | |
| ┃ | ┗ | 最大匹配：边数最多的匹配。（不存在匹配使，。） |
| ┗ | （的）匹配数（|||）：最大匹配中边的条数。 | |

|  |  |
| --- | --- |
| （的）覆盖：，的每条边都与的一个顶点关联，。 | |
| ┗ | 最小覆盖：不存在覆盖使，。 |

|  |  |
| --- | --- |
| 性质 | |
| ┣ | 匹配：是的最大匹配没有增广路 |
| ┗ | 匹配，覆盖：  是的最大匹配，是的最小覆盖 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 无向图二元图（二部图、偶图||）：能将无向图的顶点集划分成两个不相交的非空子集和，使得中任何一条边的两个端点一个属于，另一个属于，。（。） | | |
| ┣ | 互补顶点子集：、。 | |
| ┣ | 连通图完备二元图（完全二部图、完全偶图||（当，时））：中每个顶点与中每个顶点均有且仅有一条边相关联，二元图。 | |
| ┗ | （中到的）完备匹配：设为一个二元图，，为中一个最大匹配，，。 | |
|  | ┗ | 完美匹配（理想匹配）：中每个顶点都是饱和点，。 |

一个无向图是二部图当且仅当中没有长度为奇数的回路。

|  |  |
| --- | --- |
| 性质 | |
| ┣ | 匹配：Hall定理：设二部图，，中存在从到的完备匹配当且仅当中任意个顶点至少邻接中的个顶点。   |  |  | | --- | --- | | 证明：：略  ：  假设的匹配数。  取一个最大匹配。  取一个非饱和点。若关联中的非饱和点，则是匹配且，不是最大匹配，与是最大匹配矛盾。若只关联了饱和点，设其中一个为，设和关于中的某边相邻。   |  | | --- | | 求证：若存在，，，使得的生成子图中和任意一个是连通的，则存在，使得的生成子图中和任意一个（尤其是）是连通的。  证明：设相邻的所有顶点（至少个）中有一个是，若与相邻，则与连通；若与相邻，因为和连通，与相邻，所以和连通。 |   向和添加，若是饱和点则也添加关于中某边相邻的，若是非饱和点则停止，得到和。设路径从到且中和不属于的边交替出现，则中属于的边中不属于的边是匹配（增加了和）且这个匹配的边数大于，不是最大匹配，与是最大匹配矛盾。  因此的匹配数不成立，因此的匹配数。 |   　　　┗相异性条件：Hall定理中的条件。  　　　（Hall定理）设二部图，如果存在，使得：  　　　（1）中每个顶点至少关联条边。  　　　（2）中每个顶点至多关联条边。  　　　则中存在到的完备匹配。  　　　┗条件：该定理中的条件。 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| （的）控制集：是连通图，，，。 | | |
| ┣ | 极小控制集：是控制集，而的任何真子集都不是控制集，。 | |
| ┃ | ┗ | 最小控制集：顶点数最小的控制集。 |
| ┗ | 控制数（||、）：最小控制集所含顶点数。 | |

# 欧拉道路与欧拉回路

|  |  |
| --- | --- |
| 开 | 闭 |
| 无向图有欧拉道路但无欧拉回路，当且仅当是连通图且恰好有2个奇度顶点。这2个奇度顶点是欧拉道路的端点。 | 无向图有欧拉回路，当且仅当是连通图且无奇度顶点。 |
| 有向图有欧拉道路但无欧拉回路，当且仅当是连通的，且除了2个顶点外，其余顶点的入度均等于出度。这2个特殊的顶点中，一个顶点的入度比出度大，另一个顶点的入度比出度小。欧拉道路以前一个顶点为终点，以后一个顶点为始点。 | 有向图有欧拉回路，当且仅当是连通的且每个顶点的入度等于出度。 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 分类 | | |
| ┗ | 按是否存在欧拉回路（？） | |
|  | ┗ | 欧拉图：存在欧拉回路的图。规定（平凡图）是欧拉图。 |

# 哈密顿路径与哈密顿圈

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 分类 | | |
| ┣ | 按是否存在哈密顿圈（？） | |
| ┃ | ┗ | 哈密顿图（图）：含哈密顿圈的图。规定（平凡图）是哈密顿图。 |
| ┗ | 按任意2个顶点之间边数（？） | |
|  | ┗ | 有向图竞赛图：任意2个顶点之间恰好有1条有向边的有向图。 |

竞赛图中一定有哈密顿路径。

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 判定 | | | | | | | |
| ┣ | 无向图设是（）阶无向简单图，如果中任何一对不相邻的顶点的度数之和都大于等于，则中存在哈密顿路径。如果中任何一对不相邻的顶点的度数之和都大于等于，则中存在哈密顿圈。 | | | | | | |
| ┗ | 有向图在（）阶有向图中，如果所有有向边均用无向边代替，所得无向图中含生成子图，则有向图中存在哈密顿路径。 | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 性质 | | | | | | | |
| ┗ | （通路是图的子图。）（子图的连通分量数大于等于图的连通分量数。）设无向图中有哈密顿圈，是的任意的非空子集，则。  设无向图中有哈密顿路径，是的任意的非空子集，则。 | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

# 平面图

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 平面图：图能画在平面上使得除顶点处外没有边交叉出现，。（可以画在平面上并且可以使得不同的边互不交叠的图。） | | | |
| ┣ | （的一个）平面嵌入：画出的这种不出现边交叉的图。 | | |
| ┣ | （的一个）面：设是一个平面嵌入，的边将整个平面划分成若干区域，每个区域。 | | |
| ┃ | ┣ | 无限面（外部面||）：面中面积无限的区域。（图的外面的区域。） | |
| ┃ | ┣ | 有限面（内部面）：面中面积有限的区域。（图里面每个被顶点和边分割出来的封闭并连通的区域。） | |
| ┃ | ┗ | （面的）边界：包围面的所有边构成的环（可以由几个不连通的环组成）。 | |
| ┃ |  | ┗ | （面的）次数（||）：边界的长度。 |
| ┗ | 简单图极大平面图：设为一个简单平面图，如果在中任意不相邻的2个顶点之间再加一条边，所得图为非平面图，。 | | |
| 非平面图：否则。 | | | |
| ┗ | 极小非平面图：在非平面图中任意删除一条边，所得图为平面图，。 | | |

（）阶简单平面图是极大平面图当且仅当它是连通的且每个面的次数都为。

|  |  |
| --- | --- |
| 性质 | |
| ┣ | 平面图的所有面的次数之和等于边数的倍。 |
| ┣ | 连通图（欧拉公式）（数学归纳法）设为任意的连通平面图，则有。其中为中顶点数，为边数，为面数。  （欧拉公式的推广）对于任意的（）个连通分支的平面图，有。 |
| ┗ | 连通图（平面图的所有面的次数之和等于边数的倍，欧拉公式，欧拉公式的推广）设是连通的平面图，且每个面的次数至少为（），则。  和都不是平面图。 |

|  |  |
| --- | --- |
| 运算 | |
| ┣ | 消去度顶点：删去和，添加。 |
| ┣ | 插入度顶点：删去，添加和。 |
| ┗ | 收缩边：删除边，用新的顶点取代、，并使和除外所有与、关联的边关联。 |
| 关系 | |
| ┣ | （与）同胚：两个图和同构，或经反复插入或消去度顶点后同构。 |
| ┗ | （）可收缩到（）：可以通过若干次收缩边得到。 |

（库拉图斯基定理）一个图是平面图当且仅当它不含与同胚的子图，也不含与同胚的子图。

（库拉图斯基定理）一个图是平面图当且仅当它没有可收缩到的子图，也没有可收缩到的子图。

|  |  |
| --- | --- |
| 地图：连通无桥平面图的平面嵌入。 | |
| ┣ | （两个面是）相邻的：两个面有公共的边界。 |
| ┗ | （对地图的）面着色（|地图着色）：对地图的每个面涂上一种颜色，使相邻的面涂不同的颜色。 |

地图着色可以转化成平面图的点着色。

|  |  |
| --- | --- |
| 运算 | |
| ┗ | 平面图（的）对偶图（||）：设是一个平面图的平面嵌入，构造图如下：在的每一个面中放置一个顶点。对的每一条边，若在的面与（）的公共边界上，则作边与相交，且不与其它任何边相交。若为中的桥且在面的边界上，则作以为端点的自环与相交，且不与其它任何边相交，。（原图的每个面（包括外部面）得到一个顶点，[每对面得到的一对顶点]得到[两面的公共边数]条边（一条非自环的边若只属于一个面，得到一个自环；一个自环当然得到一条非自环的边）。） |

平面图的对偶图是平面图。

平面图的对偶图是连通的。

平面图的对偶图的对偶图不一定和原图同构。

（四色定理）任何平面图都是可着色的。

# 树

|  |
| --- |
| 无向图 非连通图 简单图森林：每个连通分支均是树的非连通无向图。 |

|  |  |
| --- | --- |
| 无向图 连通图 简单图无向树（|树）：不含回路的连通无向图。  （连通且不含回路。）  （的每对顶点之间有唯一的一条路径。）  （是连通的且。）  （中无回路且。）  （中无回路，但在任两个不相邻的顶点之间增加一条边就形成唯一的一个圈。）  （是连通的且每条边都是桥。） | |
| ┣ | 平凡树：平凡图。 |
| ┣ | 树叶：树中度为的顶点。 |
| ┗ | 分支点：度数大于等于的顶点。 |

（握手定理）阶非平凡的树中至少有片树叶。

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| （的）生成树：设是无向连通图，是的生成子图并且是树，。 | | | | | | | | | | |
| ┣ | （的）树枝：在中的边。 | | | | | | | | | |
| ┃ | ┗ | （对应树枝的）基本割集：对每一条树枝，存在唯一的由树枝和的弦组成的割集，。 | | | | | | | | |
| ┣ | （的）弦：不在中的边。 | | | | | | | | | |
| ┃ | ┗ | （对应于弦的）基本回路：对每一条弦，存在唯一的由弦和的树枝构成的初级回路，。 | | | | | | | | |
| ┃ | ┗ | （的）余树：的所有弦的集合的导出子图。 | | | | | | | | |
| ┣ | （的）基本回路系统：所有基本回路的集合。 | | | | | | | | | |
| ┣ | （的）基本割集系统：所有基本割集的集合。 | | | | | | | | | |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

任何无向连通图都有生成树。

设阶无向连通图有条边，则。

|  |
| --- |
| （的）广义割集：是连通图，把划分成个不相交的非空子集和，。 |

割集是广义割集。

|  |  |
| --- | --- |
| 运算 | |
| ┣ | 合并和：和是两条回路，如果和有一条或几条公共的边，那么删去共同的边，每一条回路变成若干条通路，这些通路可以连接成一条或几条回路。如果和没有共同的边，那么合并后仍是原来的和。（当和有共同的顶点时，合并后也可以把和看成在共同顶点处连接在一起的一条简单回路。）  合并的结果（||） |
| ┗ | 广义割集和的合并：。 |

连通图中的任一条回路都可以表示成基本回路的合并。任一条回路必含有弦，它等于所含弦对应的基本回路的合并。

连通图中的任一广义割集都可以表示成基本割集的合并。任一广义割集必含有树枝，它等于所含树枝对应的基本割集的合并。

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 有向图有向树：一个有向图，略去有向边的方向所得无向图为一棵无向树，。 | | | | | | | |
| ┗ | 根树：一棵非平凡的有向树，有一个顶点的入度为，其余顶点的入度均为，此有向树。 | | | | | | |
|  | ┣ | 分支点：内点和树根统称为分支点。 | | | | | |
|  | ┃ | ┣ | 树根：入度为的顶点。 | | | | |
|  | ┃ | ┗ | 内点：入度为、出度大于的顶点。 | | | | |
|  | ┣ | 树叶：入度为、出度为的顶点。 | | | | | |
|  | ┣ | （的）层数（||）：在根数中，从树根到顶点的通路长度。  称层数相同的顶点在同一层上。 | | | | | |
|  | ┣ | （的）树高（||）：顶点的最大层数。 | | | | | |
|  | ┣ | 关系 | | | | | |
|  | ┃ | ┗ | 顶点与顶点（？）一棵根树可以看成一棵家族树。 | | | | |
|  | ┃ |  | ┣ | 为的儿子，为的父亲：顶点可以邻接到顶点。 | | | |
|  | ┃ |  | ┣ | 、为兄弟：、有同一个父亲。 | | | |
|  | ┃ |  | ┗ | 为的祖先，为的后代：，可达。 | | | |
|  | ┣ | 分类 | | | | | |
|  | ┃ | ┣ | 按是否每一层上的顶点都有序（？） | | | | |
|  | ┃ | ┃ | ┗ | 有序树：对根树每一层上的顶点规定次序，这样的根树。 | | | |
|  | ┃ | ┗ | 按每个分支点儿子数量（？） | | | | |
|  | ┃ |  | ┗ | 叉树：的每个分支点至多有个儿子，。 | | | |
|  | ┃ |  |  | ┗ | 叉正则树：的每个分支点恰好有个儿子，。 | | |
|  | ┃ |  |  |  | ┗ | 按所有树叶的层数和树高的关系（？） | |
|  | ┃ |  |  |  |  | ┗ | 叉完全正则树：是叉正则树，且所有树叶的层数都等于树高，。 |
|  | ┗ | 运算 | | | | | |
|  |  | ┗ | （的以为根的）根子树（|根子树）：为一棵根树，为中一个顶点且不是树根，及其后代导出的导出子图。 | | | | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |